Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SIMETRÍA FOLIADA DE SCHWARZ EN SOLUCIONES NODALES DE ECUACIONES ELÍPTICAS VÍA EL ÍNDICE DE MORSE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

ALBERTO SALDAÑA DE FUENTES

DIRECTOR DE LA TESIS :

DR. NILS ACKERMANN

MÉXICO, D.F. ABRIL, 2010

SIMETRÍA FOLIADA DE SCHWARZ EN SOLUCIONES NODALES DE ECUACIONES ELÍPTICAS VÍA EL ÍNDICE DE MORSE

Alberto Saldaña De Fuentes

2010

A mis padres Manuel Javier
y Aída Esperanza Saldaña,
gracias por todo su apoyo
y amor incondicional.

Agradecimientos

Este trabajo de tesis fue posible gracias a la beca de CONACyT y a la Beca de Lugar que el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México otorgó al autor.

También quiero agradecer a mi asesor, Nils Ackermann, por toda la paciencia, el interés y la dedicación que siempre ha puesto en mi formación académica, profesional y humana; y a mis sinodales Mónica Clapp, María de la Luz de Teresa, Antonio Capella y Magali Folch.

Y finalmente a toda mi familia y amigos, que siempre han estado a mi lado. Gracias por todo su apoyo y confianza.

Alberto Saldaña.

Abril 2010.

Índice general

Introducción **1**

1 Resultados preliminares **5**

1.1 Problema modelo y el índice de Morse 5

1.2 Simetría foliada de Schwarz 6

1.2.1 Algunos criterios 7

2 Hiperplanos de simetría y valores propios **13**

2.1 Condiciones para la existencia de hiperplanos 14

3 Simetría foliada de Schwarz en soluciones de EDP **21**

3.1 Soluciones con índice estrictamente menor a N 22

3.2 Soluciones con índice igual a N 28

4 Geometría del conjunto nodal **37**

4.1 Definición del conjunto nodal 38

4.2 Un criterio para la negatividad de valores propios 39

4.3 El caso cuando el índice de Morse es menor o igual a N 43

4.4 Soluciones radiales de ($\wp$) que cambian de signo 43

Apéndices **49**

A El laplaciano polar **49**

B La fórmula de Rayleigh **51**

C Perturbación de operadores lineales **55**

C.1 Aplicación del teorema de perturbación 56

D El principio del máximo para dominios pequeños **61**

Bibliografía **63**

Introducción

En este trabajo, basado en un artículo de Filomena Pacella y Tobias Weth [12], se estudian algunas propiedades de soluciones clásicas de problemas semilineales elípticos. En particular estudiaremos las simetrías de soluciones de problemas del tipo

$$(\wp) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u), & \text{en } \ B, \\ \quad u = 0, & \text{en } \partial B, \end{cases}$$

donde B denota una bola abierta o un anillo abierto centrado en cero en $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$ y $f : \overline{B} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función en $C^{1,\alpha}$.

Para el estudio de las simetrías de soluciones de Ecuaciones Diferenciales Parciales se han desarrollado diversos métodos, como el método del plano móvil (moving plane method) desarrollado por Alexandrov y Serrin [17] y que fue utilizado en el famoso resultado de Gidas-Ni-Nirenberg [9] que básicamente establece que cuando B es una bola, la función f es (localmente) Lipschitz continua, decreciente en $r = |x|$ y u es una solución positiva y continua hasta la frontera, entonces u es radialmente simétrica y $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ (para una visión más panorámica de simetrías en soluciones de EDP puede consultarse el artículo de Xavier Cabré [5], donde también se encuentra una versión del resultado de Gidas, Ni y Nirenberg). En este caso la existencia de una solución positiva automáticamente implica la existencia de una solución radialmente simétrica.

Sin embargo, si alguna de esas hipótesis falla, por ejemplo, si u cambia de signo o si B no es una bola o si f no cumple las hipótesis de monotonía, entonces el método del plano móvil no se puede aplicar, y de hecho, en cada uno de esos casos existen contraejemplos al resultado de simetría radial. Pero para algunas funciones no lineales, o para ciertos tipos de soluciones, resulta natural esperar que la solución del problema herede parte de la simetría del dominio.

En el caso de funciones no lineales más generales, por ejemplo cuando f es continua (no necesariamente Lipschitz continua) se han desarrollado otras técnicas basadas en funciones simetrizadoras y aproximación por polarizadores, el lector interesado en este enfoque puede consultar los trabajos de J. Van Schaftingen [16] o de A. Saldaña [14], en donde se demuestra la existencia de soluciones radialmente simétricas y decrecientes en este caso.

En el presente trabajo, nos concentraremos en otro tipo de simetría, que es llamada en ocasiones Simetría de Codimensión Uno o simetría foliada de Schwarz (que es el nombre que utilizaremos de ahora en adelante). Una función simétrica foliada de Schwarz puede entenderse como una función con simetría axial con respecto a un eje que cruza por el origen y que es no creciente respecto al ángulo polar a partir de este eje, es decir, sólo depende de $r = |x|$ y $\theta = \arccos(\frac{x}{|x|} \cdot p)$, para algún vector normalizado p, y la función es no creciente en θ.

En este sentido, F. Pacella demostró en [13] que utilizando el Principio del Máximo y añadiendo al análisis hipótesis como la convexidad estricta de $f(|x|, s)$ en la variable s, y que la solución tuviera índice de Morse uno, se obtiene que esta solución es simétrica foliada de Schwarz.

Existen resultados similares utilizando simetrizaciones, por ejemplo [18], pero en este caso la hipótesis que se agrega tiene relación con la teoría variacional, pues se asume que la solución es un punto crítico de un funcional (de Euler-Lagrange).

A pesar que el resultado de [13] también se aplica a soluciones de $(\wp)$ que cambian de signo, existen casos donde este resultado no puede ser aplicado, pues es común que las funciones que cambian de signo tengan índice de Morse mayor que uno, o que la no linealidad, cuando es considerada sobre toda la recta real, no sea convexa en la segunda variable. Este es el caso, por ejemplo, de la simple no linealidad dada por $f(s) = |s|^{p-1}s,\ p > 1$. Sin embargo, los resultados de [18] tampoco se pueden aplicar en este caso, pues es esencial en ese enfoque que el minimizador sea una función positiva.

En [2], se extiende los resultados de [18] para el caso en el que el minimizador es una función que cambia de signo, utilizando de nuevo técnicas de simetrizaciones.

Para la elaboración de este texto, retomaremos el enfoque de [13] basado en el principio de máximo y en hipótesis relacionadas con el Índice de Morse, y se demostrarán resultados generalizados sobre la simetría de soluciones de $(\wp)$ con “altos” índices de Morse, en el caso en el que f tiene una primer derivada, respecto a la segunda variable, la cual es convexa en la segunda variable. En el caso de una no linealidad del tipo potencia, como $f(s) = |s|^{p-1}s$ la hipótesis antes mencionada sobre f significaría que debemos asumir $p \geq 2$. Y en este caso, se puede deducir que las soluciones con índice de Morse menores o iguales a la dimensión del dominio N son simétricas foliadas de Schwarz.

La organización del material aquí presentado es la siguiente: en el primer capítulo se tratan algunos resultados preliminares, se define formalmente la simetría foliada de Schwarz y se dan algunos criterios para garantizar la existencia de esta simetría en funciones. El segundo capítulo trata de la relación entre el problema modelo ($\wp$) y los criterios dados en el capítulo anterior, para finalmente poder enunciar el Teorema principal que garantiza la existencia de la simetría foliada de Schwarz en soluciones con índice de Morse estrictamente menor que la dimensión del dominio. Por último se encuentran dos pequeñas secciones, en la primera se discute sin demostración el caso en el que la solución tiene índice de Morse igual a la dimensión del dominio, y en la segunda sección se enuncia sin demostración una consecuencia geométrica sobre el conjunto nodal de soluciones de ($\wp$), en ambos casos se dan referencias para consultar su prueba.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo definiremos la simetría foliada de Schwarz para funciones y lo relacionaremos con soluciones de ecuaciones diferenciales mediante el índice de Morse.

1.1 Problema modelo y el índice de Morse

Sea $u \in H_0^1(B)$ una solución del problema:

$$(\wp) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u), & \text{en } \ B, \\ \quad u = 0, & \text{en } \partial B, \end{cases}$$

donde B denota una bola abierta o un anillo abierto centrado en cero en $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$ y $f : \overline{B} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función (localmente) en $C^{1,\alpha}$, para alguna $\alpha \in (0, 1]$.

Por la teoría de regularidad elíptica de Hölder se sabe que $u \in C^{3,\alpha}(\overline{B})$ para alguna $\alpha > 0$. En particular $\mathcal{V}_u(x) := f'(|x|, u(x)) := \frac{\partial f}{\partial u}(|x|, u(x))$, que llamaremos *el potencial,* es continua en $\overline{B}$. Por lo tanto podemos considerar el operador lineal

$$L : H^2(B) \bigcap H_0^1(B) \subset L^2(B) \to L^2(B), \quad Lv = -\Delta v - \mathcal{V}_u v. \tag{1.1}$$

El operador L es autoadjunto, y su espectro consiste de una sucesión de valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_k \to \infty$, enumerados tomando en cuenta su multiplicidad. En este caso particular, podemos definir el **Índice de Morse** como el número de valores propios negativos de L, en el entendido de que el concepto del Índice de Morse puede alcanzar una mucho mayor generalidad.

1.2 Simetría foliada de Schwarz

Definición 1.1. Se dice que una función $v \in C(\overline{B})$ es **Simétrica Foliada de Schwarz** si existe un vector unitario $p \in \mathbb{R}^N,\ |p| = 1$ tal que $v(x)$ sólo depende de $r = |x|$ y $\theta := \arccos(\frac{x}{|x|} \cdot p) \in [0, \pi]$ y v es no creciente en θ.

Sea S la esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$, $S = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$. Para un vector unitario $e \in S$ se considerará el hiperplano $H(e) := \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot e = 0\}$ y el dominio abierto por la mitad $B(e) := \{x \in B : x \cdot e > 0\}$. Además escribimos $\sigma_e : B \to B$ para denotar la reflexión con respecto a $H(e)$, es decir, $\sigma_e(x) := x - 2(x \cdot e)e$ para cada $x \in B$. Nótese que

$$H(-e) = H(e) \ \ y \ \ B(-e) = \sigma_e(B(e)) = -B(e) \text{ para cada } e \in S.$$

1.2.1 Criterios para garantizar la existencia de la simetría foliada de Schwarz

A continuación enunciaremos un criterio geométrico que resulta útil para saber si una función tiene la simetría foliada de Schwarz. Para ver su demostración puede consultarse el artículo de Brock [4], Lema 4.2, la prueba la hace para el caso de un anillo, pero la demostración lleva consigo el caso de la bola.

Lema 1.2. *Sea* $u \in H_0^1(B) \bigcap C(\overline{B})$. *Supóngase que para todo vector unitario* $e \in S$ *se cumple una de las siguientes alternativas*

1. $u(x) \geq u(\sigma_e(x))$ *para toda* $x \in B(e)$, *o bien*

2. $u(x) \leq u(\sigma_e(x))$ *para toda* $x \in B(e)$.

Entonces u *es Simétrica Foliada de Schwarz.*

En el caso de que la función en cuestión sea una solución del problema $(\wp)$ se puede dar un criterio aún más simple para asegurar la simetría foliada de Schwarz, el cual utiliza los valores propios del operador $-\Delta - \mathcal{V}_u(x)$ en el dominio $B(e)$, con condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet. Para denotar estos valores propios utilizaremos la notación $\lambda_k(e, \mathcal{V}_u)$.

Proposición 1.3. *Sea* u *una solución de* $(\wp)$, *y supóngase que existe un* $e \in S$ *tal que* u *es invariante bajo reflexión respecto al hiperplano* $H(e)$, *y tal que* $\lambda_1(e, \mathcal{V}_u) \geq 0$. *Entonces* u *es Simétrica Foliada de Schwarz.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad (aplicando una rotación) podemos asumir que $e = e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, por lo tanto $H(e_2) = \{x \in \mathbb{R}^N | x_2 = 0\}$.

Aplicaremos el Lema 1.2, de modo que consideraremos un vector unitario arbitrario $e' \in S$ distinto de $\pm e_2$. Tras una transformación ortogonal que fija a e_2 y a $H(e_2)$ asumiremos que $e' = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0, 0, \dots, 0)$ para algún $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Ahora haremos un cambio de coordenadas, que reemplazarán x_1, x_2 por las coordenadas polares r, θ con

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta, \\ x_2 &= r\operatorname{sen}\theta, \end{aligned} \tag{1.2}$$

y dejando $\tilde{x} := (x_3, \dots, x_N)$ fijo. En estas nuevas coordenadas (cilíndricas), la función u puede verse como $v(r, \theta, \tilde{x}) := u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \tilde{x})$.

En lo subsecuente y en virtud de (1.2) escribiremos $u_\theta(x) := \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta, \tilde{x})$, donde cabe resaltar que

$$\begin{aligned} u_\theta(x) &= \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta, \tilde{x}) \\ &= \frac{du}{d\theta}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \tilde{x}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)(r\cos\theta) \\ &= -x_2\partial_1 u(x) + x_1\partial_2 u(x), \end{aligned} \tag{1.3}$$

de donde se ve claramente que $u_\theta \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$. El operador Laplaciano puede pasarse a coordenadas polares usando simplemente la regla de la cadena (en varias variables) similar a como fue usada en (1.3) y obtenemos que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \sum_{i=3}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{1.4}$$

Toda la derivación del Laplaciano en coordenadas polares puede verse en el Apéndice A.

Derivando la ecuación $-\Delta u = f(|x|, u)$ respecto a θ, y usando la regla de la cadena se sigue que $-\Delta u_\theta = f'(|x|, u)u_\theta = \mathcal{V}_u(x)u_\theta$ en B.

Notemos que debido a la hipótesis de que u es invariante bajo reflexiones respecto a $H(e_2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} u(r\cos(-\theta), r\operatorname{sen}(-\theta), \tilde{x}) &= u(r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, \tilde{x}) \\ &= u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \tilde{x}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

y por lo tanto $u_\theta(r\cos(-\theta), r\operatorname{sen}(-\theta), \tilde{x}) = -u_\theta(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \tilde{x})$. Luego u_θ es antisimétrica con respecto a la reflexión de $H(e_2)$.

Analicemos ahora cómo se comporta u_θ en las fronteras de B y de $B(e_2)$. Ya que u es constante sobre ∂B (pues satisface las condiciones de frontera de Dirichlet) se sigue que $u_\theta = 0$ sobre ∂B, y entonces u_θ es una función propia de L correspondiente al valor propio 0 con condiciones de frontera Dirichlet en B (el caso $u_\theta \equiv 0$ es trivial, pues implica simetría radial, que en particular es simétrica foliada de Schwarz).

Por otro lado como u es invariante bajo reflexiones respecto a $H(e_2)$ por hipótesis, se sigue que $u_\theta = 0$ sobre $H(e_2) \bigcap B$, y por lo tanto $u_\theta = 0$ sobre $\partial B(e_2)$. Notemos que u_θ no cambia de signo en $B(e_2)$, esto debido a que si u_θ cambiara de signo en $B(e_2)$, entonces la restricción de u_θ a $B(e_2)$ sería una función propia de Dirichlet que cambia de signo, correspondiente al valor propio cero, del operador $-\Delta - \mathcal{V}_u(x)$ en $B(e_2)$. Como la función propia asociada al primer valor propio nunca cambia de signo (ver [10] Teorema 8.38 o también [8] Capítulo 6 sección 5), esto implica que $\lambda_1(e_2, \mathcal{V}_u) < 0$, pero esto es una contradicción a la hipótesis de que $\lambda_1(e_2, \mathcal{V}_u) \geq 0$. Por lo tanto u_θ no cambia de signo en $B(e_2)$ y el primer valor propio en este caso resulta ser precisamente cero.

A continuación escribiremos la reflexión $\sigma_{e'}$ respecto del hiperplano $H(e')$ en las nuevas coordenadas. Demostraremos que

$$\sigma_{e'}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \tilde{x}) = (r\cos(2\theta_0 - \theta + \pi), r\operatorname{sen}(2\theta_0 - \theta + \pi), \tilde{x}).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sigma_{e'}(x) &= x - 2(x \cdot e')e' \\
&= (r\cos\theta - 2(x\cdot e')\cos\theta_0, r\operatorname{sen}\theta - 2(x\cdot e')\operatorname{sen}\theta_0, \tilde{x}),
\end{aligned}$$

Analizaremos ahora con más detalle la primera entrada, notemos que

$$(x \cdot e') = r(\cos\theta\cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0),$$

luego

$$\begin{aligned}
r\cos\theta - 2(x\cdot e')\cos\theta_0 &= r\cos\theta - 2r(\cos\theta\cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0)\cos\theta_0 \\
&= r\cos\theta - 2r\cos\theta\cos^2\theta_0 - 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 \\
&= r\cos\theta(1 - 2\cos^2\theta_0) - 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 \\
&= r\cos\theta(-\cos 2\theta_0) - 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 \\
&= -r(\cos\theta\cos 2\theta_0 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}2\theta_0) \\
&= -r(\cos(2\theta_0 - \theta)) = r(\cos(2\theta_0 - \theta + \pi)).
\end{aligned}$$

El cálculo para comprobar la segunda entrada es completamente análogo.

Y ahora podemos distinguir dos casos.

Caso I: $u_\theta \geq 0$ en $B(e_2)$ y $u_\theta \leq 0$ en $B(-e_2)$. Entonces afirmamos que

$$u \leq u \circ \sigma_{e'} \quad \text{en } B(e'). \tag{1.6}$$

Sea $x = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tilde{x}) \in B(e')$. Entonces $|\theta - \theta_0| < \pi/2$. Supondremos primero que $x \in B(e_2)$, lo cual significa que $\theta \in (0, \pi)$. Si $\theta \geq 2\theta_0$, entonces $0 < \theta < 2\theta_0 - \theta + \pi \leq \pi$. Veamos que bajo estas condiciones se cumple que

$$\begin{aligned} u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tilde{x}) &\leq u(r\cos(2\theta_0 - \theta + \pi), r\,\mathrm{sen}(2\theta_0 - \theta + \pi), \tilde{x}) \\ &= u(\sigma_{e'}(x)). \end{aligned} \tag{1.7}$$

En efecto, si tomamos $\gamma(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, \tilde{x})$ con $t \in [\theta, 2\theta_0 - \theta + \pi]$, que sería el arco de circunferencia que une el punto x con su reflexión $\sigma_{e'}(x)$ en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces

$$\{\gamma(t) \mid t \in [\theta, 2\theta_0 - \theta + \pi]\} \subset B(e_2)$$

y por lo tanto por (1.3) y definiendo $\gamma_i(s)$ como la $i-$ésima entrada del vector $\gamma(s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} u(\sigma_{e'}(x)) - u(x) &= \int_\gamma \nabla u \; d\gamma \qquad (1.8) \\ &= \int_\theta^{2\theta_0 - \theta + \pi} \nabla u(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds \\ &= \int_\theta^{2\theta_0 - \theta + \pi} (-r\,\mathrm{sen}(s)\partial_1 u(\gamma(s)) + r\cos(s)\partial_2 u(\gamma(s)))ds \\ &= \int_\theta^{2\theta_0 - \theta + \pi} (-\gamma_2(s)\partial_1 u(\gamma(s)) + \gamma_1(s)\partial_2 u(\gamma(s)))ds \\ &= \int_\theta^{2\theta_0 - \theta + \pi} u_\theta(\gamma(s))ds \geq 0 \end{aligned}$$

lo cual implica (1.7).

Por otro lado, si $\theta < 2\theta_0$, entonces $0 < \theta < \pi - (2\theta_0 - \theta) < \pi$ y análogamente

$$u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tilde{x}) \leq u(r\cos(\pi - (2\theta_0 - \theta)), r\,\mathrm{sen}(\pi - (2\theta_0 - \theta), \tilde{x}).$$

Entonces por la antisimetría de u_θ que establecimos en (1.5), se sigue que

$$\begin{aligned} u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tilde{x}) &\leq u(r\cos(\pi - (2\theta_0 - \theta)), r\,\mathrm{sen}(\pi - (2\theta_0 - \theta), \tilde{x}) \\ &= u(r\cos(2\theta_0 - \theta - \pi), r\,\mathrm{sen}(2\theta_0 - \theta - \pi), \tilde{x}) \\ &= u(r\cos(2\theta_0 - \theta + \pi), r\,\mathrm{sen}(2\theta_0 - \theta + \pi), \tilde{x}) \\ &= u(\sigma_{e'}(x)). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $x \in B(-e_2)$, lo cual significa que $\theta \in (-\pi, 0)$. Si $\theta \leq 2\theta_0$, entonces $0 > \theta > 2\theta_0 - \theta - \pi \geq -\pi$, y por lo tanto, análogamente a (1.8), obtenemos que

$$\begin{aligned} u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tilde{x}) &\leq u(r\cos(2\theta_0 - \theta - \pi), r\,\mathrm{sen}(2\theta_0 - \theta - \pi), \tilde{x}) \\ &= u(r\cos(2\theta_0 - \theta + \pi), r\,\mathrm{sen}(2\theta_0 - \theta + \pi), \tilde{x}) \\ &= u(\sigma_{e'}(x)). \end{aligned}$$

De igual modo, si $\theta > 2\theta_0$, entonces $0 > \theta > -\pi - (2\theta_0 - \theta) > -\pi$, y entonces por (1.5)

$$\begin{aligned} u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tilde{x}) &\leq u(r\cos(-\pi - (2\theta_0 - \theta)), r\,\mathrm{sen}(-\pi - (2\theta_0 - \theta), \tilde{x}) \\ &= u(r\cos(2\theta_0 - \theta + \pi), r\,\mathrm{sen}(2\theta_0 - \theta + \pi), \tilde{x}) \\ &= u(\sigma_{e'}(x)). \end{aligned}$$

Y entonces tenemos (1.6) para este caso.

Caso II: $u_\theta \leq 0$ en $B(e_2)$ y $u_\theta \geq 0$ en $B(-e_2)$. Entonces usando un argumento análogo al Caso I obtenemos que $u \geq u \circ \sigma_{e'}$ en $B(e')$.

Entonces podemos aplicar el Lema 1.2 y se sigue que u tiene la simetría foliada de Schwarz. $\square$

Capítulo 2

Hiperplanos de simetría y valores propios

En este capítulo ahondaremos en la relación que existe entre la existencia de hiperplanos de simetría y los valores propios. Para ello usaremos la misma notación que en el capítulo anterior, y denotaremos por $V_e^{\maltese}$ la parte par del potencial $\mathcal{V}_u(x) = f'(|x|, u(x))$ relativa a la reflexión respecto al hiperplano $H(e)$, es decir, definimos

$$V_e^{\maltese} := \frac{1}{2}[f'(|x|, u(x)) + f'(|x|, u(\sigma_e(x)))], \tag{2.1}$$

y denotaremos por $\lambda_k(e, V_e^{\maltese})$ a los valores propios del operador $-\Delta - V_e^{\maltese}(x)$ en el dominio $B(e)$, con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas.

2.1 Condiciones para la existencia de hiperplanos de simetría

A continuación se dará un resultado que enuncia una condición suficiente para la existencia de un hiperplano respecto al cual una solución u de $(\wp)$ es simétrica, en el sentido de que u es invariante bajo reflexiones respecto a ese hiperplano.

Proposición 2.1. *Supóngase que $f'(|x|, s)$ es convexa en s, u es una solución de $(\wp)$ y $e \in S$ es una dirección tal que $\lambda_1(e, V_e^{\maltese}) \geq 0$. Entonces*

i) si $\lambda_1(e, V_e^{\maltese}) > 0$ o bien $f'(|x|, s)$ es estrictamente convexa en s, entonces u es invariante bajo reflexiones con respecto al hiperplano $H(e)$. Y se cumple que

$$\lambda_1(e, \mathcal{V}_u) = \lambda_1(e, V_e^{\maltese}) \geq 0.$$

ii) Existe una dirección posiblemente diferente $e' \in S$ tal que u es simétrica con respecto al hiperplano $H(e')$ y $\lambda_1(e', \mathcal{V}_u) \geq 0$.

Demostración. Sea $w_e(x) := u(x) - u(\sigma_e(x))$. Entonces w_e resuelve el problema lineal

$$\begin{cases} -\Delta w_e - V_e(x) w_e = 0, & \text{en } \; B(e), \\ \quad w_e = 0, & \text{sobre } \partial B(e), \end{cases} \tag{2.2}$$

donde

$$V_e(x) = \int_0^1 f'(|x|, tu(x) + (1-t)u(\sigma_e(x)))dt, \qquad x \in B(e), \tag{2.3}$$

ya que

$$f(|x|, u) - f(|x|, u \circ \sigma_e) = \int_0^1 f'(|x|, tu + (1-t)u \circ \sigma_e)(u - u \circ \sigma_e)dt,$$

y la condición de frontera la cumple ya que $u(x) = u(\sigma_e(x)) = 0$ para todo $x \in \partial B$. Y finalmente $w_e = 0$ sobre $H(e) \bigcap B$ ya que $\sigma_e(x) = x$ sobre $H(e)$. Por lo tanto $w_e = 0$ sobre $\partial B(e)$.

Como f' es convexa en la segunda variable, tenemos que

$$\begin{aligned} V_e(x) &\leq \int_0^1 [tf'(|x|, u(x)) + (1-t)f'(|x|, u(\sigma_e(x)))]dt \\ &= \frac{1}{2}[f'(|x|, u(x)) + f'(|x|, u(\sigma_e(x)))] = V_e^{\maltese}(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

para $x \in B$. La desigualdad estricta sucede cuando f' es estrictamente convexa y $u(x) \neq u(\sigma_e(x))$. Luego, denotando por $\lambda_k(e, V_e)$ a los valores propios del operador lineal $-\Delta - V_e(x)$ en $B(e)$ con condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet, tenemos por (2.4) que

$$\lambda_k(e, V_e) \geq \lambda_k(e, V_e^{\maltese}), \tag{2.5}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, $\lambda_1(e, V_e) \geq \lambda_1(e, V_e^{\maltese}) \geq 0$ por hipótesis. Esto puede justificarse usando una conocida caracterización de valores propios llamada "La fórmula de Rayleigh" (ver Apéndice B).

Supongamos ahora que $\lambda_1(e, V_e) > 0$, entonces como w_e satisface (2.2) debe ocurrir que $w_e \equiv 0$, y por lo tanto obtenemos la simetría de u respecto del hiperplano $H(e)$, lo cual comprueba $i)$ en este caso.

Si $\lambda_1(e, V_e) = 0$, entonces por (2.5), se sigue que

$$\lambda_1(e, V_e) = \lambda_1(e, V_e^{\maltese}) = 0,$$

sin embargo por la monotonía estricta de los valores propios respecto al potencial (ver por ejemplo el artículo de Gossez y de Figueiredo [6], en particular la proposición 1 y la Nota 2) la única manera en la que esto puede ocurrir es si $V_e \equiv V_e^{\maltese}$ en B.

En el caso donde f' es estrictamente convexa, lo anterior, y lo mencionado después de (2.4), implican que $u(x) \equiv u(\sigma_e(x))$ para todo $x \in B$, y una vez más se obtiene la simetría de u con respecto del hiperplano $H(e)$, lo cual termina de demostrar el inciso i).

Ya hemos demostrado parcialmente el inciso ii), para terminar su demostración queda considerar el caso en el que f' es sólo convexa y $\lambda_1(e, V_e) = 0$. Si $w_e \equiv 0$ entonces no hay nada más que demostrar. Si $w_e \not\equiv 0$, entonces, como w_e es solución de (2.2), es una función propia asociada al valor propio 0 y como se tiene la hipótesis de que $\lambda_1(e, V_e) \geq 0$, entonces podemos afirmar que w_e no cambia de signo en $B(e)$ (pues en este caso cero es el primer valor propio y la función propia asociada al primer valor propio no cambia de signo).

Luego por el Principio Fuerte del Máximo, $w_e > 0$ ó $w_e < 0$ en $B(e)$ (pues w_e satisface la ecuación (2.2), alcanza su mínimo o su máximo en la frontera y no es constante). Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $e = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ y que $w_e > 0$ en $B(e)$. Y haciendo una rotación bajo estas condiciones tenemos que si $e_\theta := (\operatorname{sen}\theta, 0, \ldots, 0, \cos\theta)$ para $\theta \geq 0$, entonces $e_0 = e$. Para facilitar la notación usaremos

$$B_\theta := B(e_\theta) = \{x \in B \mid x_1 \operatorname{sen}\theta + x_N \cos\theta > 0\} \quad \text{y} \quad w_\theta := w_{e_\theta}.$$

Notemos que si $w_\theta > 0$ en B_θ para algún $\theta \geq 0$, ello implicaría que $\lambda_1(e_\theta, V_{e_\theta}) = 0$ ya que w_θ es solución de (2.2), es decir, es una función propia con valor propio cero, y por ser una función positiva, cero debe ser el primer valor propio.

Definimos

$$\tilde{\theta} = \sup\{\theta \in [0, \pi) \mid w_\theta > 0 \text{ en } B_\theta\},$$

donde cabe resaltar que el conjunto sobre el cual se toma el supremo no es vacío, pues se cumple que $w_0 > 0$ en B_θ. Entonces por la continuidad de los valores propios respecto a pequeñas perturbaciones en el operador (ver el Apéndice C), se sigue que

$$\lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}) = 0. \tag{2.6}$$

Notemos también que $\sigma_\varphi \to \sigma_\theta$ uniformemente en $\overline{B}$ cuando $\varphi \to \theta$, luego como $u \in C^{3,\alpha}(\overline{B})$, se tiene que para alguna constante C,

$$\begin{aligned} ||w_\varphi - w_\theta||_{L^\infty(\overline{B})} &= ||u(\sigma_\varphi) - u(\sigma_\theta)||_{L^\infty(\overline{B})} \quad (2.7)\\ &\leq C||\sigma_\varphi - \sigma_\theta||_{L^\infty(\overline{B})}, \quad (2.8)\end{aligned}$$

de donde se sigue que $w_\varphi \to w_\theta$ uniformemente en $\overline{B}$ cuando $\varphi \to \theta$.

Por lo tanto podemos afirmar que $w_{\tilde{\theta}} \geq 0$ en $B_{\tilde{\theta}}$, por la definición de $\tilde{\theta}$ y por la continuidad uniforme. Y entonces podemos concluir que $\tilde{\theta} < \pi$, pues $w_\pi = -w_0 < 0$ en $B_\pi = -B_0$.

Ahora demostraremos por contradicción que $w_{\tilde{\theta}} \equiv 0$. Supongamos que $w_{\tilde{\theta}} \not\equiv 0$, entonces $w_{\tilde{\theta}} \geq 0$ (por la definición de $\tilde{\theta}$), además $w_{\tilde{\theta}}$ satisface una ecuación similar a (2.2) (con $e_{\tilde{\theta}}$ en lugar de e) y cumple que $w_{\tilde{\theta}} = 0$ sobre $\partial B(e_{\theta_0})$. Luego, por el Principio Fuerte del Máximo, como w_e no es constante, no puede alcanzar su mínimo (cero) dentro de $B_{\tilde{\theta}}$, y por lo tanto $w_{\tilde{\theta}} > 0$ en $B_{\tilde{\theta}}$.

A continuación utilizaremos un resultado conocido como el Principio del Máximo para Dominios Pequeños de S. R. S. Varadhan (ver Apéndice D).

Sean $K \subset B_{\tilde{\theta}}$ un compacto, $\Omega_1 := B_{\tilde{\theta}} \backslash K$ y $c_1(x) := -V_{e_{\tilde{\theta}}}(x)$ para $x \in B$. Para aplicar la Proposición D.2, tenemos en nuestro caso que

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\Omega_1) &\leq \operatorname{dist}(B) =: d, \\ L_1 &:= -\Delta - V_{e_{\tilde{\theta}}}, \\ |c_1(x)| &\leq |V^{\maltese}_{e_{\tilde{\theta}}}(x)| \leq \frac{C}{2}|u(x) - u(\sigma_{e_{\tilde{\theta}}}(x))|^{\alpha} \leq C'||u||^{\alpha}_{L^{\infty}(\overline{B})} =: b \end{aligned}$$

para algunas constantes C y C' ya que $u \in C^{3,\alpha}(\overline{B})$ y

$$f' : \overline{B} \times [\min_{x \in \overline{B}} u(x), \max_{x \in \overline{B}} u(x)]$$

es Hölder de exponente α. Por lo tanto se satisfacen las hipótesis de la Proposición D.2, y entonces existe $\delta > 0$ que sólo depende de b, d y la dimensión del dominio, tal que el Principio del Máximo se conserva para L_1 en Ω_1. Como ninguna de esas cotas depende de K, podemos elegir K de tal modo que $|\Omega_1| < \delta$. Ahora, como $B_{\tilde{\theta}}$ es abierto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ se tiene que $K \subset B_{\tilde{\theta}+\varepsilon}$ y por lo tanto $|B_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \backslash K| < \delta$, de modo que ahora podemos aplicar la misma Proposición con los siguientes datos: $\Omega := B_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \backslash K$, $c(x) := -V_{e_{\tilde{\theta}+\varepsilon}}(x)$ para $x \in B$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\Omega) &\leq \operatorname{dist}(B) =: d, \\ L &= -\Delta - V_{e_{\tilde{\theta}+\varepsilon}}, \\ |c(x)| &\leq |V^{\maltese}_{e_{\tilde{\theta}+\varepsilon}}(x)| \leq \frac{C}{2}|u(x) - u(\sigma_{e_{\tilde{\theta}+\varepsilon}}(x))|^{\alpha} \leq C'||u||^{\alpha}_{L^{\infty}(\overline{B})} =: b. \end{aligned}$$

Como $\delta > 0$ sólo depende de N, d y b se sigue que el Principio del Máximo se conserva también para L en Ω.

Ahora que sabemos que el Principio del Máximo se conserva para L en Ω, para aplicarlo debemos verificar (ver Definición D.1) que

1. $(-\Delta - V_{e_{\tilde{\theta}+\varepsilon}})w_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \geq 0$,

2. $\liminf\limits_{x \to \partial(B_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \setminus K)} w_{\tilde{\theta}+\varepsilon}(x) \geq 0$.

La primera se satisface con la igualdad a cero por (2.2). Para la segunda notemos que como K es un conjunto compacto y $w_{\tilde{\theta}} > 0$ en $B_{\tilde{\theta}}$, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $w_{\tilde{\theta}} > \eta > 0$ en K. Luego, como w_φ depende uniformemente de la variable φ, se puede encontrar $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ lo suficientemente pequeño tal que

$$w_{\tilde{\theta}+\varepsilon} > \frac{\eta}{2} > 0, \qquad \text{en } K \subset B_{\tilde{\theta}+\varepsilon}, \tag{2.9}$$

y por lo tanto por continuidad

$$\liminf_{x \to \partial K} w_{\tilde{\theta}+\varepsilon}(x) \geq \frac{\eta}{2} > 0, \tag{2.10}$$

y como $w_{\tilde{\theta}+\varepsilon}(x) = 0$ para todo $x \in \partial B$ tenemos que se satisfacen las dos hipótesis para el Principio del Máximo para Dominios Pequeños y obtenemos que

$$w_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \geq 0$$

en $B_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \setminus K$. Pero de (2.10) también se sigue que

$$w_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \not\equiv 0 \quad \text{sobre} \quad \partial(B_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \setminus K).$$

De este modo, como $w_{\tilde{\theta}} \not\equiv 0$, se sigue por la continuidad uniforme que $w_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \not\equiv 0$ y se obtiene que

$$w_{\tilde{\theta}+\varepsilon} > 0, \qquad \text{en } B_{\tilde{\theta}+\varepsilon} \setminus K, \tag{2.11}$$

por el Principio Fuerte del Máximo.

Juntando (2.9) y (2.11) obtenemos que $w_{\tilde{\theta}+\varepsilon} > 0$ en $B_{\tilde{\theta}+\varepsilon}$, lo cual es una contradicción con la definición de $\tilde{\theta}$. Luego $w_{\tilde{\theta}}$ debe ser idénticamente cero, y entonces se sigue que $u(x) = u(\sigma_{e_{\tilde{\theta}}}(x))$ para toda $x \in B_\theta$. Esta simetría implica que $\mathcal{V}_u = V_{e_{\tilde{\theta}}}$ y finalmente por (2.6) se sigue que

$$\lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, \mathcal{V}_u) = \lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}) = 0,$$

como habíamos afirmado. □

Combinando la Proposición 2.1 con la Proposición 1.3 se obtiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Bajo las hipótesis de la Proposición 2.1, la solución u es Simétrica Foliada de Schwarz.*

Capítulo 3

Simetría foliada de Schwarz en Soluciones de EDP

Antes de comenzar con la demostración del Teorema principal de este trabajo, es un buen momento para introducir algunas notaciones. Para cualquier solución u de $(\wp)$ y funciones $v, w \in H_0^1(B)$ definimos

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle &= \int_B v(x)w(x)dx, \\
\mathcal{Q}_u(v, w) &= \int_B \nabla v(x)\nabla w(x)dx - \int_B \mathcal{V}_u(x)v(x)w(x)dx, \\
Q_e^{\maltese}(v, w) &= \int_B \nabla v(x)\nabla w(x)dx - \int_B V_e^{\maltese}(x)v(x)w(x)dx.
\end{aligned}$$

3.1 Simetría foliada de Schwarz en soluciones con índice de Morse estrictamente menor a la dimensión del dominio

Teorema 3.1. *Sea B una bola o un anillo en $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, y $f(|x|, s)$ tal que la derivada $f'(|x|, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(|x|, s)$ es convexa para cada $x \in B$. Entonces cada solución de $(\wp)$ con índice de Morse $j \leq N-1$ es Simétrica Foliada de Schwarz.*

Demostración. Sea u una solución de $(\wp)$ con índice de Morse $m(u) = j \leq N-1$. Entonces, para los valores propios de Dirichlet λ_k del operador linealizado $L = -\Delta - \mathcal{V}_u(x)$ en B tenemos que

$$\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_j < 0 \quad \text{y} \quad \lambda_{j+1} \geq 0. \tag{3.1}$$

El objetivo ahora es aplicar el Corolario 2.2 para demostrar que u tiene la simetría foliada de Schwarz.

Para cualquier dirección $e \in S$, sea w_e la función propia positiva normalizada en el sentido de L^2 del operador $-\Delta - V_e^{\maltese}(x)$ en el dominio $B(e)$, con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas, correspondiente a $\lambda_1(e, V_e^{\maltese})$, es decir, satisface la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta w_e - V_e^{\maltese}(x) w_e = \lambda_1(e, V_e^{\maltese}) w_e, & \text{en } \; B(e), \\ \quad w_e = 0, & \text{sobre } \partial B(e), \end{cases} \tag{3.2}$$

Denotaremos por $g_e \in H_0^1(B)$ a la extensión impar en B de ω. Es decir,

$$g_e(x) = \begin{cases} w_e(x), & \text{si } \; x \in B(e), \\ -w_e(\sigma_e(x)), & \text{si } \; x \in B(-e). \end{cases}$$

Notemos ahora algunas propiedades de g_e

1. $g_{-e} = -g_e$ para toda $e \in S$.

2. $g_e^2(\sigma_e(x)) = g_e^2(x)$ para todo $x \in B$

3. g_e depende continuamente de e en el sentido de la norma de L^2.

1. y 2. son claros a partir de la definición de g_e. Para demostrar 3. tomemos una sucesión $\{e_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $e_n \to e$ cuando $n \to \infty$. Utilizaremos de nuevo el Teorema sobre Perturbación de Operadores Lineales que aparece en el Apéndice C. Sea $\Lambda_n : B(e) \to B(e_n)$ un rotación y denotemos por $\mu_1^{(n)}$ al primer valor propio del operador $-\Delta - V_{e_n}^{✠} \circ \Lambda_n$ en $B(e)$ con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas.

Notemos que la continuidad Hölder de exponente α de f' y el hecho de que $u \in C^{3,\alpha}(B)$, implican la existencia de constantes C y C' tales que

$$\begin{aligned} ||V_{e_n}^{✠} \circ \Lambda_n - V_e^{✠}||_{L^\infty(B(e))} &\leq \max_{x \in B(e)} \Big\{ |f'(|x|, u(\Lambda_n x)) - f'(|x|, u(x))| \\ &\quad + |f'(|x|, u(\sigma_{e_n}(\Lambda_n x))) - f'(|x|, u(\sigma_e(x)))| \Big\} \\ &\leq C \max_{x \in B(e)} \Big\{ |u(\Lambda_n x) - u(x)|^\alpha \\ &\quad + |u(\sigma_{e_n}(\Lambda_n x)) - u(\sigma_e(x))|^\alpha \Big\} \\ &\leq C' \max_{x \in B(e)} \Big\{ |\Lambda_n x - x|^\alpha + |\sigma_{e_n}(\Lambda_n x) - \sigma_e(x)|^\alpha \Big\} \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, ya que σ_{e_n} converge uniformemente a σ_e y Λ_n converge uniformemente a la identidad.

Ahora haciendo un procedimiento análogo al Apéndice C en su sección de Aplicación, pero usando $V_e^{\maltese}$ en lugar de $V_{e_{\tilde{\theta}}}$, se sigue que

$$\mu_1^{(n)} \to \lambda_1(e, V_e^{\maltese}), \tag{3.3}$$

cuando $n \to \infty$.

Notemos que w_{e_n} cumple por definición la ecuación

$$-\Delta(w_{e_n}(\Lambda_n(x))) - V_{e_{\theta_n}}^{\maltese}(\Lambda_n(x))w_{e_n}(\Lambda_n(x)) = \mu_1^{(n)} w_{e_n}(\Lambda_n(x)) \tag{3.4}$$

para todo $x \in B(e)$.

Terminaremos el argumento por contradicción: supongamos que

$$w_{e_n} \circ \Lambda_n \text{ no converge a } w_e \text{ en } L^2(B(e)). \tag{3.5}$$

Por la teoría de regularidad (ver el libro de Gilbarg Trudinger [10] capítulos 8 y 9) se tiene que $\{w_{e_n} \circ \Lambda_n\}$ es un precompacto en $C^2(\Omega)$ para $\Omega \subset\subset B(e)$ (Ω es un abierto contenido en $B(e)$ tal que su cerradura es distinta de $\overline{B(e)}$) y por lo tanto existe una subsucesión que denotaremos nuevamente por $\{w_{e_n} \circ \Lambda_n\}$ tal que

$$\{w_{e_n} \circ \Lambda_n\} \text{ converge en } C^2 \text{ localmente en } B(e) \text{ a una función } w. \tag{3.6}$$

Haciendo tender n a infinito en la ecuación (3.4) se obtiene que

$$\begin{cases} -\Delta w(x) - V_e^{\maltese}(x)w = \lambda_1(e, V_e^{\maltese})w, & \text{en } \ B(e), \\ \quad w = 0, & \text{sobre } \partial B(e), \end{cases}$$

donde la condición de frontera se satisface porque $w_{e_n} \equiv 0$ sobre $\partial B(e)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para poder asegurar que w es una función propia, resta argumentar que es una función continua no constante, para ello usaremos el Corolario 1 del artículo de Fromm [7] el cual garantiza la siguiente cota

$$||w_{e_n} \circ \Lambda_n||_{C^{0,\alpha}(\overline{B(e)})} \leq C, \tag{3.7}$$

donde C es una constante que no depende de n.

Cabe resaltar que el artículo de Fromm da una cota inicial en el espacio de Sobolev $W^{1,2}$, pero después de hacer una iteración finita de esta desigualdad se puede asegurar una cota en $W^{1,p}$, donde $p > N$, y luego por la desigualdad de Morrey se obtiene una cota en el espacio de Hölder $C^{0,\alpha}$. La necesidad de usar el artículo de Fromm, y no la teoría de regularidad desarrollada en el libro de Gilbarg y Trudinger, radica en que el dominio en el que trabajamos no es liso, pero sí es convexo, por lo tanto se satisfacen las hipótesis del Teorema de Fromm.

La desigualdad (3.7) nos dice que $\{w_{e_n} \circ \Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia equicontinua y como $w_{e_n} \circ \Lambda_n \to w$ en $C(\overline{B(e)})$ cuando $n \to \infty$ se sigue que $w \in C(\overline{B(e)})$.

Por otro lado, como

- $w_{e_n} \circ \Lambda_n \to w$ en $C(\overline{B(e)})$ y en $L^2(B(e))$,
- $w_{e_n} \circ \Lambda_n > 0$ en $B(e)$ y
- $||w_{e_n} \circ \Lambda_n||_{L^2(B(e))} = 1$

para toda n, entonces $w \geq 0$, $||w||_{L^2(B(e))} = 1$ y por lo tanto $w \not\equiv 0$.

Luego, w es una función propia del operador $-\Delta - V_e^{\maltese}(x)$ con condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet asociada al primer valor propio, es decir $w = w_e$, lo cual contradice (3.5). Y por lo tanto $w_{e_n} \circ \Lambda_n \to w_e$ en $L^2(B(e))$.

Esto implica que $g_{e_n} \circ \Lambda_n \to g_e$ en $L^2(B(e))$, y por lo tanto

$$||g_{e_n} - g_e||_{L^2(B)} \leq ||g_{e_n} - g_{e_n} \circ \Lambda_n||_{L^2(B)} + ||g_{e_n} \circ \Lambda_n - g_e||_{L^2(B)} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, ya que Λ_n converge uniformemente en B a la identidad y $\{g_{e_n}\}$ es una familia equicontinua por (3.7).

Y podemos concluir que g_e depende continuamente de e en el sentido de L^2.

Prosigamos con la prueba. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j \in H_0^1(B)$ funciones propias ortonormales en el sentido de L^2 correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$. Con esta notación, enunciamos la fórmula de Rayleigh (ver Apéndice B)

$$\min_{\substack{v \in H_0^1(B) \setminus \{0\}, \\ \langle v, \varphi_1 \rangle = \ldots = \langle v, \varphi_j \rangle = 0}} \frac{\mathcal{Q}_u(v, v)}{\langle v, v \rangle} = \lambda_{j+1} \geq 0. \tag{3.8}$$

Consideremos el mapeo

$$h : S \to \mathbb{R}^j, \qquad h(e) = [\langle g_e, \varphi_1 \rangle, \ldots, \langle g_e, \varphi_j \rangle]. \tag{3.9}$$

Como h es un mapeo continuo e impar definido en la esfera unitaria $S \subset \mathbb{R}^N$ y $j \leq N - 1$, entonces h debe tener un cero, por el teorema de Borsuk-Ulam. Esto significa que existe una dirección $e \in S$ tal que g_e es ortogonal en el sentido de L^2 a todas las funciones propias $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$. Luego por (3.8)

$$\mathcal{Q}_u(g_e, g_e) \geq 0. \tag{3.10}$$

Veamos ahora que se cumple la siguiente ecuación

$$\mathcal{Q}_u(g_e, g_e) = Q_e^{\maltese}(g_e, g_e) = 2\lambda_1(e, V_e^{\maltese}).$$

Comprobemos primero que se cumple $\mathcal{Q}_u(g_e, g_e) = Q_e^{\maltese}(g_e, g_e)$. En efecto, recordemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_u(g_e, g_e) &= \int_B |\nabla g_e|^2(x)dx - \int_B \mathcal{V}_u(x) g_e^2(x)dx, \\ Q_e^{\maltese}(g_e, g_e) &= \int_B |\nabla g_e|^2(x)dx - \int_B V_e^{\maltese}(x) g_e^2(x)dx. \end{aligned}$$

En lo subsecuente omitiremos algunas $x's$ para simplificar la notación. De la propiedad (2) sobre g_e se sigue que

$$\begin{aligned} \int_B \mathcal{V}_u(x) g_e^2 dx &= \int_B f'(|x|, u) g_e^2 dx \\ &= \int_{B(e)} f'(|x|, u) g_e^2 dx + \int_{B(-e)} f'(|x|, u) g_e^2 dx \\ &= \int_{B(e)} f'(|x|, u) g_e^2 dx + \int_{B(e)} f'(|x|, u(\sigma_e(x))) g_e^2(\sigma_e(x)) dx \\ &= \int_{B(e)} \Big(f'(|x|, u) + f'(|x|, u(\sigma_e(x))) \Big) g_e^2 dx \\ &= 2 \int_{B(e)} V_e^{\maltese}(x) g_e^2 dx \\ &= \int_{B(e)} V_e^{\maltese}(x) g_e^2 dx + \int_{B(e)} V_e^{\maltese}(x) g_e^2 dx \\ &= \int_{B(e)} V_e^{\maltese}(x) g_e^2 dx + \int_{B(-e)} V_e^{\maltese}(x) g_e^2 dx \\ &= \int_B V_e^{\maltese}(x) g_e^2 dx \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{Q}_u(g_e, g_e) = Q_e^{\maltese}(g_e, g_e)$. Ahora veamos que $Q_e^{\maltese}(g_e, g_e) = 2\lambda_1(e, V_e^{\maltese})$.

Sabemos que

$$-\Delta w_e - V_e^{\maltese} w_e = \lambda_1(e, V_e^{\maltese}) w_e \quad \text{en} \quad B(e),$$

por lo tanto si multiplicamos por w_e, integramos sobre $B(e)$ y usamos la Fórmula de Green obtenemos que

$$\int_{B(e)} (\nabla w_e(x))^2 - V_e^{\maltese}(x) w_e^2(x) dx = \lambda_1(e, V_e^{\maltese}) \int_{B(e)} \omega_e^2(x) dx$$

pero como w_e está normalizada en L^2 y la parte izquierda es simétrica respecto a $H(e)$ se sigue que

$$Q_e^{\maltese}(g_e, g_e) = \int_B (\nabla g_e(x))^2 - V_e^{\maltese}(x) g_e^2(x) dx = 2\lambda_1(e, V_e^{\maltese})$$

y por lo tanto $\mathcal{Q}_u(g_e, g_e) = Q_e^{\maltese}(g_e, g_e) = 2\lambda_1(e, V_e^{\maltese})$. Pero esto implica que $\lambda_1(e, V_e^{\maltese}) \geq 0$ por (3.10). Una vez que hemos obtenido una dirección e para la cual $\lambda_1(e, V_e^{\maltese})$ es no negativo, el Corolario 2.2 implica que u tiene la simetría foliada de Schwarz. $\square$

3.2 Simetría foliada de Schwarz en soluciones con índice de Morse igual a la dimensión del dominio

Ahora pasamos al caso en el que el índice de Morse es exactamente la dimensión del espacio, en este caso la demostración ya no puede hacer uso del Teorema de Borsuk-Ulam del mismo modo, ya que el mapeo (3.9) debe ir necesariamente de la esfera S a $\mathbb{R}^j$ con $j \leq N-1$ para aplicar este teorema, y por lo tanto es necesario hacer una demostración menos directa, la cual daremos a continuación.

Teorema 3.2. *Sea B una bola o un anillo en $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, y $f(|x|, s)$ tal que la derivada $f'(|x|, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(|x|, s)$ es convexa para cada $x \in B$. Entonces cada solución de $(\wp)$ con índice de Morse N es Simétrica Foliada de Schwarz.*

Demostración. Una vez más la idea es aplicar la Proposición 1.3, de modo que buscaremos un hiperplano $H(e')$ bajo el cual u sea invariante por reflexiones, y tal que $\lambda_1(e, \mathcal{V}_u) \geq 0$. Sea $S_* \subset S$ (donde S es la esfera en $\mathbb{R}^N$) definido de la siguiente manera

$$S_* := \{e \in S \mid w_e \equiv 0 \text{ en } B \text{ y } \lambda_1(e, \mathcal{V}_u) < 0\},$$

donde una vez más definimos $w_e(x) := u(x) - u(\sigma_e(x))$. Entonces S_* es un conjunto simétrico. Si $S_* \neq \varnothing$ tomamos k el entero más grande tal que existen k direcciones ortogonales $e_1, \ldots, e_k \in S_*$. Demostraremos ahora que $k \in \{1, \ldots, N-1\}$. Para ello, denotemos por $\mathbb{V}_0$ al subespacio cerrado de $L^2(B)$ que consiste de funciones invariantes a la reflexión respecto a los hiperplanos $H(e_1), \ldots, H(e_k)$, de modo que $u \in \mathbb{V}_0$ (por las definiciones de S_* y de k). Sea φ_1 la única función propia de Dirichlet, del operador linealizado $L = -\Delta - \mathcal{V}_u(x)$ en B, la cual es positiva, normalizada en el sentido de L^2 y asociada al primer valor propio λ_1. Veamos que $\varphi_1 \in \mathbb{V}_0$. Sea $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces como $u \in \mathbb{V}_0$ se sigue que

$$\mathcal{V}_u(x) = f'(|x|, u(x)) = f'(|\sigma_{e_i}(x)|, u(\sigma_{e_i}(x)) = \mathcal{V}_u(\sigma_{e_i}(x)) \tag{3.11}$$

y por lo tanto se tiene que

$$\begin{cases} [-\Delta - \mathcal{V}_u(x)]\varphi_1(\sigma_{e_i}(x)) = \lambda_1 \varphi_1(\sigma_{e_i}(x)), & \text{si } x \in B, \\ \varphi_1(\sigma_{e_i}(x)) = 0, & \text{si } x \in \partial B, \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} [-\Delta - \mathcal{V}_u(x)](\varphi_1(x) - \varphi_1(\sigma_{e_i}(x))\big) = \lambda_1\big(\varphi_1(x) - \varphi_1(\sigma_{e_i}(x))\big), & \text{si } \ x \in B, \\ \quad \varphi_1(x) - \varphi_1(\sigma_{e_i}(x)) = 0, & \text{si } x \in \partial B, \end{cases}$$

pero λ_1 es un valor propio simple, por lo que

$$\varphi_1 \equiv \varphi_1(\sigma_{e_i}), \tag{3.12}$$

es decir $\varphi_1 \in \mathbb{V}_0$.

Para $l = 1, \ldots, k$ denotaremos por $w_l \in H_0^1(B(e_l))$ a la única función propia de Dirichlet, del operador $L = -\Delta - \mathcal{V}_u(x)$ en el semi dominio $B(e_l)$, la cual es positiva, normalizada en el sentido de L^2 y asociada al primer valor propio $\lambda_1(e_l, \mathcal{V}_u) < 0$, y definimos a $g_l \in H_0^1(B)$ por

$$g_l(x) = \begin{cases} \quad w_l(x), & \text{si } \ x \in B(e_l), \\ -w_l(\sigma_{e_l}(x)), & \text{si } \ x \in B(-e_l). \end{cases}$$

Esta función cumple las siguientes propiedades

1. Es una función impar respecto a $H(e_l)$.

2. Por (3.11) se tiene que para algún valor propio $\lambda_m (= \lambda_1(e_l, \mathcal{V}_u) < 0)$, $m \geq 2$ (pues para $m = 1$ la función propia no cambia de signo) se cumple que

$$\begin{cases} [-\Delta - \mathcal{V}_u(x)]g_l(x) = \lambda_m g_l(x), & \text{si } \ x \in B, \\ \quad g_l(x) = 0, & \text{si } x \in \partial B. \end{cases}$$

3. Para $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{l\}$ se cumple que $g_l(x) = g_l(\sigma_i(x))$, es decir, es una función par bajo la reflexión respecto a $H(e_i)$. Esto se puede comprobar de la siguiente manera: como e_l y e_i son ortogonales, se sigue que

$$(\sigma_i(x) \cdot e_l) = (x \cdot e_l) - 2(x \cdot e_i)(e_i \cdot e_l) = (x \cdot e_l),$$

por lo tanto, $x \in B(e_l)$ implica que $\sigma_i(x) \in B(e_l)$ y $x \in B(-e_l)$ implica que $\sigma_i(x) \in B(-e_l)$, luego para $x \in B(e_l)$

$$g_l(x) - g_l(\sigma_i(x)) = w_l(x) - w_l(\sigma_i(x)),$$

y procediendo igual que en (3.12) se sigue que $w_l(x) = w_l(\sigma_i(x))$ para todo $x \in B(e_l)$, y análogamente para $x \in B(-e_l)$, lo cual implica que $g_l(x) = g_l(\sigma_i(x))$ para todo $x \in B$.

Estas tres observaciones implican que, variando l de 1 a k se obtiene un conjunto $\{g_1, \ldots, g_k\}$ de k funciones propias del operador $-\Delta - \mathcal{V}_u$, todas ellas asociadas a valores propios negativos y que son ortogonales (gracias a las propiedades 1 y 3). Como el índice de Morse de u es N, y la primera función propia φ_1 también es ortogonal a cada g_l, se sigue que $k \leq N - 1$, como habíamos afirmado.

Ahora, si denotamos por L_0 al operador autoadjunto que es la restricción del operador L al espacio simétrico $\mathbb{V}_0$, es decir,

$$L_0 : H^2(B) \bigcap H_0^1(B) \bigcap \mathbb{V}_0 \to \mathbb{V}_0, \qquad L_0 v = -\Delta v - \mathcal{V}_u(x) v,$$

y denotamos por μ_0 al número de valores propios negativos de L_0 (contados con multiplicidad), tenemos que

$$1 \leq \mu_0 \leq N - k, \tag{3.13}$$

donde la desigualdad de la izquierda se debe a que $\varphi_1 \in \mathbb{V}_0$ y la de la derecha a que $g_i \notin \mathbb{V}_0$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Recordemos que seguimos bajo la hipótesis de que $S_* \neq \varnothing$. Consideremos la esfera de dimensión $N-k-1$ definida por $S^* = S \bigcap H(e_1) \bigcap \ldots \bigcap H(e_k)$. Por la maximalidad de k, tenemos que $S^* \bigcap S_* = \varnothing$.

Demostraremos ahora que existe $e \in S^*$ tal que

$$w_e(x) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in B(e). \tag{3.14}$$

Por contradicción: supongamos que w_e cambia de signo en $B(e)$ para todo $e \in S^*$. Consideramos las funciones $w_e^{(1)} := w_e^+ \chi_{B(e)} - w_e^- \chi_{B(-e)}$ y $w_e^{(2)} := -w_e^- \chi_{B(e)} + w_e^+ \chi_{B(-e)}$, donde $w^+ := \text{máx}\{w, 0\}, w^- := \text{mín}\{w, 0\}$ y χ_Ω es la función característica de un conjunto Ω.

Veamos ahora que $w_e^{(1)}, w_e^{(2)} \in \mathbb{V}_0 \bigcap H_0^1(B) \backslash \{0\}$, en efecto, esto es debido a los siguientes hechos

1. w_e cambia de signo en $B(e)$, por lo tanto $w_e \not\equiv 0$,
2. como $e \in S^*$ entonces e es ortogonal a e_i para $i = 1, \ldots, k$,
3. por la observación anterior $\sigma_e(\sigma_i(x)) = \sigma_i(\sigma_e(x))$ para todo $x \in B$ y como $u \in \mathbb{V}_0$, se sigue que $w_e^{(1)}, w_e^{(2)} \in \mathbb{V}_0$
4. Recordemos que $u \in H_0^1(B)$, por lo tanto $w_e \in H_0^1(B)$ que a su vez implica que $w_e^+, w_e^- \in H_0^1(B)$ (ver [10] Lema 7.6 pág 152) y finalmente se sigue que $w_e^{(1)}, w_e^{(2)} \in H_0^1(B)$.

Notemos también que $w_e^{(1)}, w_e^{(2)}$ son funciones no negativas e invariantes bajo reflexiones respecto a σ_e. Además

$$w_{-e}^{(1)} = w_e^{(2)} \quad \text{y} \quad w_{-e}^{(2)} = w_e^{(1)} \quad \text{para todo} \quad e \in S^*. \tag{3.15}$$

Recordando la definición de V_e en (2.3), como w_e satisface la ecuación lineal $-\Delta w_e - V_e(x)w_e = 0$ en todo el dominio B con $w_e = 0$ sobre ∂B, si hacemos $w_e = w_e\chi_{B(e)} + w_e\chi_{B(-e)}$, multiplicamos por $w_e^+\chi_{B(e)} + w_e^-\chi_{B(-e)}$ e integramos sobre B se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_B \nabla w_e \nabla(w_e^+\chi_{B(e)} + w_e^-\chi_{B(-e)})dx - \int_B V_e(x)w_e(w_e^+\chi_{B(e)} + w_e^-\chi_{B(-e)})dx \\
&= \int_B \Big(|\nabla(w_e^+\chi_{B(e)})|^2 + |\nabla(w_e^-\chi_{B(-e)})|^2\Big)dx \\
&\quad - \int_B V_e(x)\big[(w_e^+\chi_{B(e)})^2 + (w_e^-\chi_{B(-e)})^2\big]dx \\
&= \int_B |\nabla w_e^{(1)}|^2 dx - \int_B V_e(x)(w_e^{(1)})^2 dx.
\end{aligned}$$

Y ahora, por lo anterior y por (2.4) se sigue que

$$\begin{aligned}
0 \geq \int_B |\nabla w_e^{(1)}|^2 dx - \int_B V_e^{\maltese}(x)(w_e^{(1)})^2 dx &= Q_e^{\maltese}(w_e^{(1)}, w_e^{(1)}) \\
&= \mathcal{Q}_u(w_e^{(1)}, w_e^{(1)}), \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

ya que $w_e^{(1)}$ es una función invariante bajo reflexiones respecto a σ_e. Similarmente se puede demostrar que

$$\mathcal{Q}_u(w_e^{(2)}, w_e^{(2)}) \leq 0. \tag{3.17}$$

Ahora, para cada $e \in S^*$, definimos $\psi_e \in \mathbb{V}_0 \bigcap H_0^1(B)$ como

$$\psi_e(x) = \left(\frac{\langle w_e^{(2)}, \varphi_1\rangle}{\langle w_e^{(1)}, \varphi_1\rangle}\right)^{\frac{1}{2}} w_e^{(1)} - \left(\frac{\langle w_e^{(1)}, \varphi_1\rangle}{\langle w_e^{(2)}, \varphi_1\rangle}\right)^{\frac{1}{2}} w_e^{(2)}.$$

Notemos que ψ_e está bien definido, ya que $\varphi_1 > 0$, implica que

$$\begin{aligned}
\langle w_e^{(1)}, \varphi_1 \rangle &= \langle w_e^+ \chi_{B(e)} - w_e^- \chi_{B(-e)}, \varphi_1 \rangle \\
&= \langle w_e^+ \chi_{B(e)}, \varphi_1 \rangle - \langle w_e^- \chi_{B(-e)}, \varphi_1 \rangle \\
&= \int_{B(e)} w_e^+ \varphi_1 dx - \int_{B(-e)} w_e^- \varphi_1 dx \\
&= \int\limits_{B(e) \bigcap \{w_e > 0\}} w_e \varphi_1 dx - \int\limits_{B(-e) \bigcap (w_e < 0)} w_e \varphi_1 dx \\
&= \int\limits_{B(e) \bigcap \{w_e > 0\}} w_e \varphi_1 dx - \int\limits_{B(e) \bigcap (w_e > 0)} (-w_e) \varphi_1 \circ \sigma_e dx \\
&= \int\limits_{B(e) \bigcap \{w_e > 0\}} w_e (\varphi_1 + \varphi_1 \circ \sigma_e) dx > 0,
\end{aligned}$$

donde $|B(e) \bigcap \{w_e > 0\}| > 0$ ya que w_e es continua y cambia de signo en $B(e)$. Similarmente se tiene que $\langle w_e^{(2)}, \varphi_1 \rangle > 0$.

Por (3.15) se sigue que $e \mapsto \psi_e$ es un mapeo impar y continuo de S^* a $\mathbb{V}_0$. Por construcción, $\langle \psi_e, \varphi_1 \rangle = 0$ para toda $e \in S^*$. Además, como $w_e^{(1)}$ y $w_e^{(2)}$ tienen soportes distintos, (3.16) y (3.17) implican que

$$\mathcal{Q}_u(\psi_e, \psi_e) \leq 0 \quad \text{para toda} \quad e \in S^*. \tag{3.18}$$

Recordando (3.13), podemos distinguir ahora dos casos:

Caso I: $\mu_0 \geq 2$. Entonces, sean $\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_{\mu_0}$ los valores propios negativos del operador L_0 en orden creciente, y sean $\varphi_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_{\mu_0} \in \mathbb{V}_0$ las correspondientes funciones propias ortonormales en el sentido de L^2. Similarmente a (3.8) tenemos que

$$\inf_{\substack{v \in H_0^1(B) \bigcap \mathbb{V}_0,\ v \neq 0, \\ \langle v, \varphi_1 \rangle = \langle v, \tilde{\varphi}_2 \rangle = \ldots = \langle v, \tilde{\varphi}_{\mu_0} \rangle = 0}} \frac{\mathcal{Q}_u(v,v)}{\langle v, v \rangle} \geq 0. \tag{3.19}$$

Consideramos ahora el mapeo $h : S^* \to \mathbb{R}^{\mu_0 - 1}$ definido por $h(e) = [\langle \psi_e, \tilde{\varphi}_2 \rangle, \ldots, \langle \psi_e, \tilde{\varphi}_{\mu_0} \rangle]$. Como h es un mapeo impar y continuo definido en la esfera de dimensión $N-k-1$ y $\mu_0 \leq N-k$, entonces h debe tener un cero por el Teorema de Borsuk-Ulam. Luego, existe una dirección $e \in S$ tal que $\langle \psi_e, \tilde{\varphi}_k \rangle = 0$ para $k = 2, \ldots, \mu_0$ y, por construcción, $\langle \psi_e, \varphi_1 \rangle = 0$. Como $\psi_e \in \mathbb{V}_0$ y $\mathcal{Q}_u(\psi_e, \psi_e) \leq 0$, la función ψ_e es un minimizador del cociente (3.19). En consecuencia, debe ser una función propia del operador L_0 correspondiente al valor propio cero. Luego, $\psi_e \in C^2(\overline{B})$, y ψ_e satisface $-\Delta\psi_e - \mathcal{V}_u(x)\psi_e = 0$ en B. Más aún, $\psi_e = 0$ sobre $H(e)$ por la definición de ψ_e, y $\partial_e \psi_e := e \cdot \nabla \psi_e = 0$ en $H(e)$, ya que ψ_e es invariante bajo reflexiones respecto a $H(e)$ (y por lo tanto, para direcciones perpendiculares a $H(e)$ la derivada parcial se anula). Demostraremos que la función $\hat{\psi}_e$ definida como

$$\hat{\psi}_e(x) = \begin{cases} \psi_e(x), & \text{si } x \in B(e), \\ 0, & \text{si } x \in B(-e), \end{cases}$$

es también una solución (débil) de $-\Delta\hat{\psi}_e - \mathcal{V}_u(x)\hat{\psi}_e = 0$ en B. En efecto, para toda $\varphi \in C_c^\infty(B)$, como $\partial_e \psi_e = 0$ en $H(e)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_B \nabla\hat{\psi}_e \nabla\varphi dx - \int_B \mathcal{V}_u \hat{\psi}_e \varphi dx &= \int_{B(e)} \nabla\psi_e \nabla\varphi dx - \int_{B(e)} \mathcal{V}_u \psi_e \varphi dx \\ = \int\limits_{B(e)} -\Delta\psi_e \varphi dx + \int\limits_{H(e)} \partial_e \psi_e \varphi ds &+ \int\limits_{\partial B(e) \setminus H(e)} \frac{\partial \psi_e}{\partial \nu} \varphi ds - \int\limits_{B(e)} \mathcal{V}_u \psi_e \varphi dx \\ = \int_{B(e)} (-\Delta\psi_e - \mathcal{V}_u \psi_e)\varphi dx = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, esto contradice al Teorema de Continuación Única para esta ecuación (ver, por ejemplo [15] página 519).

Caso II: $\mu_0 = 1$. Entonces, para cualquier $e \in S^*$, como $\psi_e \in \mathbb{V}_0$, $\langle \psi_e, \varphi_1 \rangle = 0$ y $\mathcal{Q}_u(\psi_e, \psi_e) \leq 0$, la función ψ_e debe ser una función propia de Dirichlet del operador L_0 correspondiente al valor propio cero. Esto lleva a una contradicción al igual que en el Caso I.

Como en ambos casos se ha llegado a una contradicción, debe existir una dirección $e \in S^*$ tal que w_e no cambia de signo en $B(e)$. Luego, se cumple (3.14) para e o para $-e$.

Ahora, para terminar la prueba, distinguimos una vez más entre dos casos: supongamos primero que $w_e \equiv 0$ en B. Como $S^* \bigcap S_* = \varnothing$, tenemos que $\lambda_1(e, \mathcal{V}_u) \geq 0$, y entonces la Proposición 1.3 implica la simetría foliada de Schwarz de u. Por otro lado, si suponemos que $w_e \not\equiv 0$, ello implica que $w_e > 0$ en $B(e)$ por (3.14) y el Principio Fuerte del Máximo, notando que w_e satisface (2.2). Entonces también $\lambda_1(e, V_e) = 0$, donde $\lambda_1(e, V_e)$ denota al primer valor propio del operador $-\Delta - V_e(x)$ en $B(e)$. Para obtener una dirección e' tal que u es invariante bajo reflexiones respecto al hiperplano $H(e')$ y $\lambda_1(e', V_u) = \lambda_1(e', V_{e'}) = 0$, argumentamos exactamente igual que en la Proposición 2.1 y una vez más, la afirmación se sigue de la Proposición 1.3.

Si $S_* = \varnothing$ se repiten todos los pasos desde (3.14), tomando $S^* = S$ y substituyendo $H_0^1(B) \bigcap \mathbb{V}_0$ con $H_0^1(B)$. Una vez más se obtiene una dirección e' (posiblemente igual a e) tal que $w_{e'} \equiv 0$ y por lo tanto $\lambda_1(e', \mathcal{V}_u) \geq 0$, pues $S_* = \varnothing$. Y terminamos la prueba. $\square$

Capítulo 4

Geometría del conjunto nodal de soluciones de $(\wp)$

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades geométricas del conjunto nodal de soluciones de $(\wp)$. Para ello desarrollaremos algunos resultados, y los vincularemos con lo desarrollado en los capítulos anteriores.

Empezaremos por establecer el contexto del problema modelo para este capítulo, que es básicamente el que hemos trabajado en los capítulos anteriores, pero con un cambio en la dependencia de la no linealidad, pues ahora supondremos que no depende de la variable x y que $f(0) \geq 0$.

También nos enfocaremos al caso en el que el dominio es una bola, pero los mismos resultados son válidos cuando el dominio es un anillo, y las demostraciones de esta generalización pueden encontrarse en el artículo de Pacella y Aftalion [1].

Analizaremos soluciones que cambian de signo del problema modelo con esta hipótesis extra, es decir,

$$(\wp_0) \quad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{en} \ \ B, \\ u = 0, & \text{en} \ \partial B, \end{cases}$$

donde B es una bola abierta en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función localmente en $C^{1,\alpha}$ y $f(0) \geq 0$.

4.1 Definición del conjunto nodal

Ahora daremos algunas definiciones básicas.

Definición 4.1. Sea u una solución que cambia de signo de $(\wp_0)$. Llamaremos *superficie nodal de u* o *conjunto nodal de u* al conjunto

$$\mathcal{N} := \overline{\{x \in B \mid u(x) = 0\}},$$

y llamaremos *regiones nodales* a las componente conexas de $B \backslash \mathcal{N}$.

En este capítulo demostraremos que, bajo ciertas condiciones, la superficie nodal intersecta a la frontera de B. Antes de enunciar formalmente este teorema, daremos un resultado previo, que puede encontrarse en las demostraciones del artículo de Pacella y Aftalion [1].

Usaremos la siguiente notación: Para una solución fija u de $(\wp_0)$, denotamos por $L = -\Delta - f'(u) = -\Delta - V_u(x)$, y por λ_k a los valores propios de L en B con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas.

Recordemos que

$$\begin{aligned} x &:= (x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ H(e_i) &:= \{x \in B \mid x_i = 0\}, \\ B(e_i) &:= \{x \in B \mid x_i > 0\}, \\ B(-e_i) &= \{x \in B \mid x_i < 0\}, \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Finalmente, llamaremos $\mu_i := \lambda_1(e_i, V_u)$ al primer valor propio de L en $B(e_i)$, es decir, μ_i es tal, que existe una función ψ_i que es solución de

$$\begin{cases} -\Delta\psi_i - f'(u)\psi_i = \mu_i\psi_i, & \text{en } \ B(e_i), \\ \psi_i > 0, & \text{en } \ B(e_i), \\ \psi_i = 0, & \text{sobre } \partial B(e_i). \end{cases} \tag{4.1}$$

4.2 Un criterio para la negatividad de valores propios

En lo subsecuente será de gran importancia el Lema de Hopf, por lo que conviene enunciarlo.

Teorema 4.2 (Lema del punto de frontera de Hopf para funciones no positivas). *Supóngase un dominio Ω acotado. Sea L un operador estrictamente elíptico y $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ una función que satisface que $Lu \leq 0$ en Ω y $u \leq 0$ en $\overline{\Omega}$, entonces se cumple que o $u(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$ en Ω.*

Más aún, si Ω *satisface la condición de la bola interior en* $x_0 \in \partial B$, *es decir, que existe una bola* $B \subset \Omega$ *tal que* $x_0 \in \partial B$ *y* $u \in C^1(\Omega \bigcup \{x_0\})$ *con* $u < u(x_0) = 0$ *en* Ω, *entonces* $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} < 0$ *para cualquier dirección* ν *que apunte hacia una bola interior.*

La siguiente Proposición nos dará condiciones para asegurar que un valor propio μ_i es negativo.

Proposición 4.3. *Sea* B *una bola y* u *una solución que cambia de signo del problema* $(\wp_0)$. *Supongamos que* u *es invariante bajo reflexiones respecto al hiperplano* $H(e_i)$, *para alguna* $i = 1, \ldots, N$, *y que el conjunto nodal de* u *no intersecta la frontera del dominio* ∂B. *Entonces* $\mu_i = \lambda_1(e_i, V_u) < 0$.

Demostración. Notemos que

1. Como u es simétrica respecto a $H(e_i)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ sobre $H(e_i)$.

2. Dado que u no cambia de signo en ∂B podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u > 0$ cerca de ∂B, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $u > 0$ en $(\partial B)_\varepsilon := \{x \in B \mid |x - x_0| < \varepsilon \text{ para algún } x_0 \in \partial B\}$ y por lo tanto, $u \geq 0$ en $\overline{(\partial B)_\varepsilon}$.

3. Usando que $f(0) \geq 0$, podemos definir para $x \in B$
$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(u(x)) - f(0)}{u(x)}, & \text{si } u(x) \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } u(x) = 0, \end{cases}$$
entonces tenemos que $g \in L^\infty(B)$. Definimos $M := -\Delta - g(x)$, entonces $Mu = -\Delta u - g(x)u = f(0) \geq 0$ en B, en particular
$$\begin{cases} M(-u) \leq 0, & \text{en } (\partial B)_\varepsilon, \\ -u \leq 0, & \text{en } \overline{(\partial B)_\varepsilon}. \end{cases}$$

Como el conjunto $(\partial B)_\varepsilon$ satisface la condición de la bola interior para cualquier punto en $\partial B(e_i)\backslash H(e_i)$, se sigue del Lema de Hopf que $\frac{\partial u}{\partial x_i} < 0$ en $\partial B(e_i)\backslash H(e_i)$.

4. Usando que u es solución de $(\wp_0)$, y los incisos 1 y 3 se tiene que se satisface

$$\begin{cases} -\Delta \frac{\partial u}{\partial x_i} - f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, & \text{en} \quad B(e_i), \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \leq 0, & \text{sobre} \quad \partial B(e_i). \end{cases} \tag{4.2}$$

5. La idea ahora es encontrar un subdominio $D \subset B(e_i)$ donde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sea positiva y se anule en ∂D. Para ello, notemos que como u es par en x_i y tiene un cero en B, entonces u tiene un cero $x_0 \in B(e_i) \bigcap [H(e_i) \bigcap B]$. Sea x_1 el punto tal que $\{x_1\} = (\partial B(e_i)\backslash H(e_i)) \bigcup \{x_0 + se_i \mid s \in \mathbb{R}\}$. En particular se cumple que $x_0 \neq x_1$.

   Denotemos a (x_0, x_1) como el segmento de recta que une x_0 con x_1. Como $u(x_0) = u(x_1) = 0,\ u > 0$ en una vecindad cerca x_1, y la restricción de u a (x_0, x_1) es diferenciable continuamente, existe $x_2 \in (x_0, x_1)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_2) > 0$.

   Definimos entonces el conjunto $K := \{x \in \overline{B(e_i)} \mid \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0\}$. Y sea D la componente conexa de $B(e_i)\backslash K$ que contiene a x_2. Como $B(e_i)\backslash K$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y localmente conexo, entonces D es también un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $D \subset B(e_i)$.

   Finalmente, como $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es continua en $\overline{B}$. Además, $\partial D \subset H(e_i) \bigcup K$, pues $\frac{\partial u}{\partial x_i} < 0$ en una vecindad de $\partial B(e_i)\backslash H(e_i)$. Como $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ sobre $H(e_i) \bigcap B$ por que u es invariante bajo reflexiones respecto a $H(e_i)$, se sigue que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ en ∂D y que $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ en D.

Por lo tanto existe un subdominio $D \subsetneq B(e)$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta \frac{\partial u}{\partial x_i} - f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, & \text{en} \quad D, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, & \text{sobre} \quad \partial D, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, & \text{en} \quad D. \end{cases}$$

Luego, el primer valor propio η_1 del operador $-\Delta - V_u(x)$ en D es cero.

Finalmente, por la monotonía estricta de los valores propios respecto al dominio, concluimos que

$$\begin{aligned} \lambda_1(e, V_u) &= \min_{w \in H_0^1(B(e)) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{B(e)} |\nabla w|^2 - V_u(x) w^2 dx}{\int_{B(e)} w^2 dx} \right\} \\ &< \min_{w \in H_0^1(D) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_D |\nabla w|^2 - V_u(x) w^2 dx}{\int_D w^2 dx} \right\} = \eta_1 = 0. \end{aligned}$$

Esto se justifica del siguiente modo: que $\lambda_1(e, V_u) \leq \eta_1$ es claro a partir de las Fórmulas de Rayleigh escritas arriba. Para demostrar la desigualdad estricta razonaremos por contradicción. Supongamos que $\lambda_1(e, V_u) = \eta_1$, entonces como $H_0^1(D) \subset H_0^1(B(e_i))$ se tiene que los mínimos de las Fórmulas de Rayleigh se alcanzan en la misma función y por lo tanto las funciones propias asociadas a los valores propios $\lambda_1(e, V_u)$ y η_1, que llamaremos φ_1 y φ_2 respectivamente, son las mismas; pero $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ en $B(e_i) \setminus D$ es una contradicción al hecho de que $\varphi_1 > 0$ en $B(e_i)$. Por lo tanto $\lambda_1(e, V_u) < \eta_1 = 0$. $\square$

4.3 El caso cuando el índice de Morse es menor o igual a N

Teorema 4.4. *Supóngase que B es una bola en $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$, y $f = f(s)$ no depende de x, f' es convexa y $f(0) \geq 0$. Entonces el conjunto nodal de cualquier solución de $(\wp_0)$ que cambia de signo con índice de Morse menor o igual a N, intersecta la frontera de B.*

Demostración. Sea u una solución con Índice de Morse $m(u) \leq N$. En la prueba del Teorema 3.1 y 3.2 usando la Proposición 2.1, se obtuvo una dirección $e \in S$ tal que la solución u es invariante bajo reflexiones respecto del hiperplano $H(e)$ y

$$\lambda_1(e, \mathcal{V}_u) \geq 0 \tag{4.3}$$

(sin pérdida de generalidad se puede suponer que $e = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$).

Por contradicción, si suponemos que el conjunto nodal no intersecta la frontera de B, entonces por la Proposición 4.3 se tiene que $\lambda_1(e, \mathcal{V}_u) < 0$, lo cual contradice (4.3), y por lo tanto el conjunto nodal debe intersectar la frontera de B. $\square$

4.4 El Índice de Morse de Soluciones Radiales de $(\wp)$ que cambian de signo

Para terminar este capítulo, diremos un poco más sobre la naturaleza de las soluciones radiales que cambian de signo de $(\wp_0)$. En particular, demostraremos que estas soluciones tienen Índices de Morse "altos". Para ello enunciaremos primero la siguiente proposición usando la notación definida en (4.1).

Proposición 4.5. *Si u es una solución de $(\wp_0)$ la cual es par en la variable x_i para alguna i, entonces la extensión impar de ψ_i a B definida por*

$$\tilde{\psi}_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x), & si \;\; x \in B(e_i), \\ -\psi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_N), & si \;\; x \in B(-e_i). \end{cases}$$

es una función propia del operador linealizado L en B y su valor propio correspondiente es μ_i, por lo tanto $\mu_i = \lambda_{\beta(i)}$, donde $\beta(i) \geq 2$.

Si u es par en k variables, $x_1, \ldots, x_k$, para $1 \leq k \leq N$, entonces las funciones propias $\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_k$ son linealmente independientes y por lo tanto existen k valores propios $\lambda_{\beta(1)}, \ldots, \lambda_{\beta(k)}$ del operador L en B.

Demostración. Como ψ_i se anula en $T := H(e_i) \bigcap B$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j^2} &= 0, \quad \text{en} \quad T \quad \text{para } j \neq i, \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i^2} &= 0, \quad \text{en} \quad T. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que $\psi_i \in C^{2,\alpha}(T \bigcup B(e))$ (Lema 6.18 página 111 de [10]) y de que $\psi_i \equiv 0$ sobre $\partial B(e_i)$. Luego, por la simetría de u en la variable x_i, se concluye que la extensión $\tilde{\psi}_i$ es una función propia de L en B que corresponde al valor propio $\mu_i = \lambda_{\beta(i)}$. Como $\tilde{\psi}_i$ cambia de signo en B se tiene que $\beta(i) \geq 2$.

Para la segunda parte, se repite al argumento anterior, y el hecho de que $\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_k$ son linealmente independientes se sigue de que ψ_i es impar en la variable x_i y $\psi_i > 0$ en $B(e_i)$, además, son ortogonales por el mismo argumento utilizado en el Teorema 3.2 para demostrar la ortogonalidad de las funciones g_i. $\square$

Teorema 4.6. *Bajo las hipótesis del problema* $(\wp_0)$, *cualquier solución radial que cambia de signo tiene índice de Morse más grande o igual a* $N+1$.

Demostración. Como u es radial, u es una función par en cualquiera de las variables x_i, para $i = 1, \ldots, N$. Luego, por la Proposición 4.5 tenemos que $\mu_i = \lambda_{\beta(i)}$, para cada i. Además se satisfacen las hipótesis de la Proposición 4.3, y por lo tanto se sigue que $\lambda_1 < \mu_i = \lambda_{\beta(i)} < 0$ para cada $i = 1, \ldots, N$. Por lo tanto u tiene por lo menos $N+1$ valores propios negativos. $\square$

Apéndices

Apéndice A

El laplaciano polar

En este apéndice, derivaremos la forma polar del Laplaciano, la cual fue enunciada en (1.4). Basta tomar el laplaciano en dimensión dos, pues las otras dimensiones quedan sin cambio alguno en la transformación.

Se tiene entonces que el operador Laplaciano es

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{A.1}$$

y la transformación a coordenadas polares está dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{A.2}$$

De modo que podemos definir una nueva función v como

$$v(r,\theta) := u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Por lo tanto, usando la regla de la cadena se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial u}{\partial x_2}r\cos\theta. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Demostraremos directamente la fórmula:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Calculemos cada uno de los sumandos del lado derecho

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial u^2}{\partial x_1^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\operatorname{sen}\theta\right)\operatorname{sen}\theta \\
&= \partial_1^2 u\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \partial_2^2 u\operatorname{sen}^2\theta \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(-r\cos\theta) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1} r\cos\theta\right)(-r\operatorname{sen}\theta) \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial x_2}(-r\operatorname{sen}\theta) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} r\cos\theta\right) r\cos\theta \\
&= -\partial_1 u r\cos\theta - \partial_2 u r\operatorname{sen}\theta + \partial_1^2 u r^2\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1} r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\
&\quad - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \partial_2^2 u(r^2\cos^2\theta).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= \partial_1 u\frac{1}{r}\cos\theta + \partial_2 u\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta + -\partial_1 u\frac{1}{r}\cos\theta - \partial_2 u\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta \\
&+ \partial_1^2 u\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \partial_2^2 u\cos^2\theta \\
&= \partial_1^2 u\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \partial_2^2 u\cos^2\theta.
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= \partial_1^2 u(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + \partial_2^2 u(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.
\end{aligned}$$

Apéndice B

La fórmula de Rayleigh

En este Apéndice enunciaremos la fórmula de Rayleigh utilizada en el Capítulo 2 y daremos algunas referencias para profundizar su estudio.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio y supongamos que L es un operador autoadjunto de la forma

$$Lu = D_i(-a^{ij}D_ju + b^iD_iu + cu),$$

donde $[a^{ij}]$ es una matriz simétrica. Su forma cuadrática asociada en $H = W_0^{1,2}(\Omega)$ está dada por

$$\mathcal{L}(u,u) = \int_\Omega (a^{ij}D_iuD_ju + 2b^iuD_iu + cu^2)dx.$$

Denotando por $(\cdot,\cdot)$ al producto escalar en L^2, llamaremos al cociente

$$J(u) = \frac{\mathcal{L}(u,u)}{(u,u)}, \qquad u \not\equiv 0, \quad u \in H,$$

el cociente de Rayleigh de L.

Finalmente se tiene la siguiente caracterización: Si λ_m representar los valores propios del operador L, entonces éstos pueden ser ordenados de manera creciente y designaremos sus respectivos espacios propios por V_m, y entonces se pueden caracterizar los valores propios de L mediante la fórmula

$$\lambda_m = \text{mín}\{J(u) \mid u \not\equiv 0, \quad (u,v) = 0 \quad \forall v \in \{V_1, \ldots V_{m-1}\}\}.$$

Conocida como *la Fórmula de Rayleigh*.

Para un estudio más detallado de estas fórmulas se puede revisar el Libro de Evans [8] (Sección 6.5.1 Teorema 2) o el libro de Gilbarg - Trudinger [10] (Sección 8.12).

Como comentario final, se puede concluir ahora usando la fórmula de Rayleigh y la notación de del Capítulo 2 la siguiente desigualdad

$$\lambda_k(e, V_e) \geq \lambda_k(e, V_e^{\maltese}), \tag{B.1}$$

para todo $K \in \mathbb{N}$, pues como se demostró en el Capítulo 2, se tiene la desigualdad

$$-V_e(x) \geq -V_e^{\maltese}(x). \tag{B.2}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
L_e(u) &:= -\Delta u - V_e u \\
L_e^{\maltese}(u) &:= -\Delta u - V_e^{\maltese}(u) \\
Q_e(u) &:= \int_B (\nabla u(x))^2 dx - \int_B V_e(x) u^2(x) dx, \\
Q_e^{\maltese}(u) &:= \int_B (\nabla u(x))^2 dx - \int_B V_e^{\maltese}(x) u^2(x) dx.
\end{aligned}$$

implica que los cocientes de Rayleigh son

$$\begin{aligned} J_e(u) &= \frac{Q_e(u)}{(u,u)}, \quad u \not\equiv 0, \quad u \in H, \\ J_e^{\maltese}(u) &= \frac{Q_e^{\maltese}(u)}{(u,u)}, \quad u \not\equiv 0, \quad u \in H, \end{aligned}$$

pero por B.2 (o bien por (2.4)) se sigue que

$$J_e(u) \geq J_e^{\maltese}(u),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_m(e, V_e) &= \text{mín}\{J_e(u) \mid u \not\equiv 0, \quad (u,v) = 0 \quad \forall v \in \{V_1, \dots V_{m-1}\}\} \\ &\geq \text{mín}\{J_e^{\maltese}(u) \mid u \not\equiv 0, \quad (u,v) = 0 \quad \forall v \in \{V_1, \dots V_{m-1}\}\} \\ &= \lambda_m(e, V_e^{\maltese}), \end{aligned}$$

lo cual comprueba la desigualdad B.1 (o lo que es lo mismo, la desigualdad (2.5)).

Apéndice C

Perturbación de operadores lineales

En este Apéndice explicaremos un poco más los detalles sobre la continuidad de los valores propios respecto a pequeñas perturbaciones en el potencial, hecho que fue utilizado para establecer el resultado (2.6).

La idea principal está en aplicar un Teorema sobre perturbaciones de operadores lineales, que puede encontrarse en el libro de T. Kato [11] Capítulo 5 Teorema 4.10, donde para comodidad del lector, citaremos aquí

Teorema C.1. *Sea H un espacio de Hilbert, $\mathcal{B}(H)$ el espacio de los operadores acotados en el espacio H, T un operador autoadjunto y $A \in \mathcal{B}(H)$ simétrico. Entonces $S = T + A$ es autoadjunto y* $\mathrm{dist}(\Sigma(S), \Sigma(T)) \leq ||A||$, *es decir*

$$\sup_{\xi \in \Sigma(S)} \mathrm{dist}(\xi, \Sigma(T)) \leq ||A||, \quad \sup_{\xi \in \Sigma(T)} \mathrm{dist}(\xi, \Sigma(S)) \leq ||A||.$$

En el teorema, la notación $\Sigma(S)$ se refiere al espectro de S.

C.1 Aplicación del teorema de perturbación

En el contexto del resultado (2.6) tendríamos que

$$\tilde{\theta} = \sup\{\theta \in [0,\pi) \mid w_\theta > 0 \text{ en } B_\theta\},$$

y que

$$\begin{aligned} H &:= L^2(B_{\tilde{\theta}}) \\ T &:= -\Delta - V_{e_{\tilde{\theta}}}, \end{aligned}$$

Recordemos que T es un operador cerrado (y autoadjunto) con dominio $\mathcal{D}(T) = H^2(B_{\tilde{\theta}}) \bigcap H_0^1(B_{\tilde{\theta}})$ (tiene condiciones de frontera Dirichlet homogéneas).

Sea $\{\theta_n\} \subset [0,\pi)$ una sucesión de ángulos tales que $\theta_n \to \tilde{\theta}$ y $w_{\theta_n} > 0$ en B_{θ_n}. Ahora es necesario considerar una sucesión de rotaciones, sea $\Lambda_n \in SO(N)$ tal que $\Lambda_n^{-1}(B_{\theta_n}) = B_{\tilde{\theta}}$, y entonces definimos

$$\begin{aligned} V_n &:= V_{e_{\theta_n}} \circ \Lambda_n, \\ T_n &:= -\Delta - V_n, \\ A_n &:= T_n - T = V_{e_{\tilde{\theta}}} - V_n, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{D}(T_n) = \mathcal{D}(T)$.

Claramente A_n es un operador simétrico. Además,

$$||A_n w||_{L^2(B_{\tilde{\theta}})} = ||V_{e_{\tilde{\theta}}} w - V_n w||_{L^2(B_{\tilde{\theta}})} \leq ||V_{e_{\tilde{\theta}}} - V_n||_\infty ||w||_{L^2(B_{\tilde{\theta}})}.$$

Demostraremos ahora que $||V_{e_{\tilde{\theta}}} - V_n||_{L^\infty(B_{\tilde{\theta}})} \to 0$ cuando $n \to \infty$, ello demostrará que A_n es un operador acotado en $L^2(B_{\tilde{\theta}})$ y que $||A_n||_{L^2(B_{\tilde{\theta}})} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Notemos que

1. $u \in C^{3,\alpha}(\overline{B})$,

2. $f' : \overline{B} \times [\min_{x\in\overline{B}} u(x), \max_{x\in\overline{B}} u(x)]$ es una función Hölder de exponente α,

3. $V_e(x) = \int_0^1 f'(|x|, tu(x) + (1-t)u(\sigma_e(x)))dt$,

4. $|\Lambda_n(x)| = |x|$,

y por lo tanto, por 1. y 2. y la desigualdad de Hölder se tiene que existen constantes C y C' tales que

$$
\begin{aligned}
& ||V_n - V_{e_{\tilde\theta}}||_{L^\infty(B_{\tilde\theta})} \\
\leq\ & \sup_{x\in B_{\tilde\theta}} \Big\{ C \int_0^1 |f'(|x|, tu(\Lambda_n x) + (1-t)u(\sigma_{e_{\theta_n}}(\Lambda_n x)))) \\
& \qquad\qquad -f'(|x|, tu(x) + (1-t)u(\sigma_{e_{\tilde\theta}}(x)))|dt \Big\} \\
\leq\ & \sup_{x\in B_{\tilde\theta}} \Big\{ C \int_0^1 \Big(t|u(x) - u(\Lambda_n(x))| + (1-t)|u(\sigma_{e_{\tilde\theta}}(x)) - u(\sigma_{e_{\theta_n}}(\Lambda_n(x)))| \Big)^\alpha dt \Big\} \\
\leq\ & \sup_{x\in B_{\tilde\theta}} \Big\{ C \Big(\int_0^1 t|u(x) - u(\Lambda_n(x))| + (1-t)|u(\sigma_{e_{\tilde\theta}}(x)) - u(\sigma_{e_{\theta_n}}(\Lambda_n(x)))|dt \Big)^\alpha \Big\} \\
\leq\ & \frac{C}{2^\alpha} \Big(\sup_{x\in B_{\tilde\theta}} \Big\{ |u(x) - u(\Lambda_n(x))| + |u(\sigma_{e_{\tilde\theta}}(x)) - u(\sigma_{e_{\theta_n}}(\Lambda_n(x)))| \Big\} \Big)^\alpha \\
\leq\ & C' \Big(\sup_{x\in B_{\tilde\theta}} \{|x - \Lambda_n(x)|\} + \sup_{x\in B_{\tilde\theta}} \{|\sigma_{e_{\tilde\theta}}(x) - \sigma_{e_{\theta_n}}(\Lambda_n(x))|\} \Big)^\alpha \to 0,
\end{aligned}
$$

cuando $n \to \infty$, ya que $\{\sigma_{e_{\theta_n}}\}$ es una familia equicontinua y $\{\Lambda_n\}$ converge uniformemente.

Y entonces, por el Teorema anterior, se sigue que

$$\mathrm{dist}(\Sigma(T), \Sigma(T_n)) \leq ||A_n||,$$

es decir

$$\sup_{\xi\in\Sigma(T)} \operatorname{dist}(\xi, \Sigma(T_n)) \leq ||A_n||, \quad \sup_{\xi\in\Sigma(T_n)} \operatorname{dist}(\xi, \Sigma(T)) \leq ||A_n||.$$

Denotemos por $\mu_k^{(n)}$ a los valores propio del operador T_n sujeto a condiciones de frontera Dirichlet en $B_{\tilde{\theta}}$, contados con multiplicidad. Entonces las desigualdades anteriores implican en particular que

$$\operatorname{dist}(\lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}), \Sigma(T_n)) \leq ||A_n||, \quad \operatorname{dist}(\mu_1^{(n)}, \Sigma(T)) \leq ||A_n||, \tag{C.1}$$

Demostraremos ahora que

$$\mu_1^{(n)} \to \lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}) \tag{C.2}$$

cuando $n \to \infty$. Esto se puede comprobar de la siguiente manera: supongamos que $\mu_1^{(n)}$ no converge a $\lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}})$, entonces existe una subsucesión y un $\varepsilon > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$|\mu_1^{(n)} - \lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}})| \geq \varepsilon,$$

entonces existe una subsucesión tal que sucede

$$\mu_1^{(n)} \geq \lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}) + \varepsilon, \qquad \text{ó} \qquad \mu_1^{(n)} + \varepsilon \leq \lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}),$$

pero $\mu_1^{(n)} < \mu_k^{(n)}$ y $\lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}) < \lambda_k(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}})$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto se cumple respectivamente que

$$d(\lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}), \Sigma(T_n)) \geq \varepsilon \qquad \text{ó} \qquad d(\mu_1^{(n)}, \Sigma(T)) \geq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (de la subsucesión), pero eso es una contradicción a (C.1), pues $||A_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego (C.2) se cumple.

Ahora, veamos que $\lambda_1(e_{\theta_n}, V_{e_{\theta_n}}) = \mu_1^{(n)}$. Denotemos por w_1 a la función propia del operador $-\Delta - V_{e_{\theta_n}} \circ \Lambda_n$ asociada al valor propio $\mu_1^{(n)}$, entonces satisface que

$$\begin{cases} \big(-\Delta - V_{e_{\theta_n}} \circ \Lambda_n(x)\big) w_1(x) = \mu_1^{(n)} w_1(x), & \text{si } \ x \in B_{\tilde{\theta}}, \\ \quad w_1(x) = 0, & \text{si } x \in \partial B_{\tilde{\theta}}, \end{cases}$$

haciendo una rotación ($\Lambda_n : B_{e_{\tilde{\theta}}} \to B_{e_{\theta_n}}$) tenemos que

$$\begin{cases} \big(-\Delta - V_{e_{\theta_n}} \circ \Lambda_n(\Lambda_n^{-1}x)\big) w_1(\Lambda_n^{-1}x) = \mu_1^{(n)} w_1(\Lambda_n^{-1}x), & \text{en } \ B_{\theta_n}, \\ \quad w_1(\Lambda_n^{-1}x) = 0, & \text{sobre } \partial B_{\theta_n}, \end{cases}$$

es decir, si hacemos $\hat{w}_1(x) = w_1(\Lambda_n^{-1}x)$ entonces

$$\begin{cases} \big(-\Delta - V_{e_{\theta_n}}(x)\big) \hat{w}_1(x) = \mu_1^{(n)} \hat{w}_1(x), & \text{si } \ x \in B_{\theta_n}, \\ \quad \hat{w}_1(x) = 0, & \text{si } x \in \partial B_{\theta_n}. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\mu_1^{(n)}$ es valor propio del operador $-\Delta - V_{e_{\theta_n}}$ con función propia positiva y se sigue que $\mu_1^{(n)} = \lambda_1(e_{\theta_n}, V_{e_{\theta_n}})$.

Luego

$$\lambda_1(e_{\theta_n}, V_{e_{\theta_n}}) = \mu_1^{(n)} \to \lambda_1(e_{\tilde{\theta}}, V_{e_{\tilde{\theta}}}),$$

cuando $n \to \infty$.

Apéndice D

El principio del máximo para dominios pequeños

En este Apéndice enunciaremos el Principio del Máximo para Dominios Pequeños, de S.R.S. Varadhan, su demostración puede consultarse, por ejemplo, en el artículo de Berestycki y Nirenberg [3], Proposición 1.1.

Considérese un operador elíptico de segundo orden en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $L : W^{2,N}_{loc}(\Omega) \to L^N_{loc}(\Omega)$,

$$L = -a_{ij}(x)\partial_{ij} + b_i(x)\partial_i + c(x),$$

con coeficientes en L^∞ uniformemente elípticos, es decir,

$$c_0|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq C_0|\xi|^2, \quad c_0, C_0 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

y que satisface

$$\sqrt{\sum b_i^2}, |c| \leq b.$$

Definición D.1. Decimos que el Principio del Máximo se conserva para L en Ω si

$$Lz \geq 0 \quad \text{en } \Omega$$

y

$$\liminf_{x \to \partial\Omega} z(x) \geq 0$$

implican que $z \geq 0$ en Ω.

Proposición D.2 (Principio del Máximo Para Dominios Pequeños)**.** *Suponga que diam*$(\Omega) \leq d$. *Entonces existe* $\delta > 0$ *que depende sólo de* N, d, c_0 *y* b, *tal que el Principio del Máximo se conserva para* L *en* Ω *si se cumple que* $\text{meas}(\Omega) = |\Omega| < \delta$.

Bibliografía

[1] A. Aftalion, F. Pacella, *Qualitative properties of nodal solutions of semilinear elliptic equations in radially symmetric domains,* C.R. Math. Acad, Sci. Paris **339** (2004), 339-344.

[2] T. Bartsch, T. Weth, y M. Willem, *Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems,* J. Anal. Math. **96** (2005), 1-18.

[3] H. Berestycki, L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method,* Bol. Soc. Bras. Mat., **22** (1991), 1-37.

[4] F. Brock, *Symmetry and monotonicity of solutions to some variational problems in cylinders and annuli.* Electron. J. Diff. Eq. **2003**, 1-20.

[5] X. Cabré, *Elliptic PDEs in Probability and Geometry. Symmetry and regularity of solutions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **20**, 2008, 425-457.

[6] D.G. de Figueiredo, J. Gossez, *Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation,* Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 339-346.

[7] S. J. Fromm, *Potential Space Estimates for Green Potentials in Convex Domains*, Proc. Amer. Mat. Soc., Volumen **119**, número 1, 1993.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society: Graduate Studies in Mathematics, Volumen **19**, 1998.

[9] B. Gidas, W. Ni y L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle,* Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.

[10] D. Gilbarg y N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer: Berlin Heidelberg New York, 2001.

[11] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer: Berlin Heidelberg New York, 1976.

[12] F. Pacella, T. Weth, *Symmetry of solutions to semilinear elliptic equations via Morse index*, Proceedings of the American Mathematical Society, **Vol. 135**, N^{o} 6, (2007), pags. 1753-1762

[13] F. Pacella, *Symmetry results for solutions of semilinear elliptic equations with convex nonlinearities,* J. Func. Anal. **192**(2002), 271-282.

[14] A. Saldaña, *Aproximación de Simetrizaciones por Polarizaciones y su Aplicación a Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas mediante Métodos Variacionales*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma De México, México, 130pp., 2008.

[15] B. Simon, *Schrödinger Semigroups,* Bull. Am. Math. Soc. New Ser. **7** (1982), 447- 526.

[16] J. Van Schaftingen, *Symmetrization and minimax principles* , Commun. Contemp. Math. **7**, No 4 (2005) 463-481.

[17] J. Serrin, *A symmetry problem in potential theory,* Arch. Ration. Mech. **43** (1971), 304-318.

[18] D. Smets y M. Willem, *Partial symmetry and asymptotic behaviour for some elliptic variational problems*, Calc. Var. Part. Diff. Eq. **18** (2003), 57-75.

Índice alfabético

B_θ, 16

$Q_e^{\maltese}(v,w)$, 21

S_*, 29

$V_e^{\maltese}$, 13

$V_e(x)$, 14

χ_Ω, 32

$\lambda_k(e,V_e)$, 15

$\lambda_k(e,V_e^{\maltese})$, 13

$\lambda_k(e,\mathcal{V}_u)$, 7

$\langle v,w\rangle$, 21

σ_e, 6

f', 5

g_e, 23

w^+,w^-, w_e^+, w_e^-, 32

w_θ, 16

w_e, 14

$w_e^{(1)}$, $w_e^{(2)}$, 32

$\mathcal{Q}_u(v,w)$, 21

$\mathcal{V}_u$, 5

Índice de Morse, 6

antisimetría, 12

autoadjunto, 6

Berestycki, 61

coordenadas polares, 8

espectro, 6, 55

Euler-Lagrange, funcional, 3

Fórmula de Rayleigh, 51

fórmula de Rayleigh, 15

Figueiredo, 15

Gidas-Ni-Nirenberg, 1

Gossez, 15

Laplaciano polar, 49

método del plano móvil, 1

Nirenberg, 61

perturbación del potencial, 55

polarizadores, 2

potencial, 6
Principio del Máximo para Dominios Pequeños, 17
Principio del máximo para dominios pequeños, 61
Principio Fuerte del Máximo, 16
Problema Modelo ($\wp$), 5

simetría axial, 2
Simetría foliada de Schwarz, 6
simetría radial, 2
simetrizaciones, 2

teoría de regularidad, 5
teorema de Borsuk-Ulam, 26, 35
teorema de Continuación Única, 35

uniformemente elípticos, 61

Varadhan, 61