Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Acerca de los módulos tau-suplementados y tau-complementados

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ANGEL VÁZQUEZ BADILLO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES

2010

Hoja de datos del jurado

1.	Datos del alumno Vázquez Badillo Angel 56 55 45 63 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 099350367
2.	Datos del tutor Dr José Ríos Montes
3.	Datos del sinodal 1 Dr Francisco Federico Raggi Cárdenas
4.	Datos del sinodal 2 Dr Hugo Alberto Rincón Mejia
5.	Datos del sinodal 3 Dr Alejandro Alvarado García
6.	Datos del sinodal 4 Dr Jaime Castro Pérez
7.	Datos del trabajo escrito Acerca de los módulos tau-suplementados y tau-complementados 55p 2010

A mis padres por su apoyo todo este tiempo.

Al Doctor José Ríos por su inagotable paciencia
durante la realización de esta tesis.

Índice general

Introducción

El presente trabajo está basado en el artículo de K. Al-Takhman, C. Lomp y R. Wisbauer titulado *τ-complemented and τ-supplemented modules* [2]. Aquí se estudian clases propias de sucesiones exactas cortas inducidas por complementos y suplementos relativos a radicales idempotentes.

Para llegar a ello, en el primer capítulo se presentan resultados básicos de la teoría de módulos que servirán como herramienta a lo largo de esta tesis. Debido a que se trabaja en una subcategoría de R-Mod, debemos tomar en cuenta lo siguiente: Si M y N son R-módulos, N se dice que es M-generado si existe un epimorfismo $M^{(I)} \to N$. Los submódulos de los módulos M-generados son llamados M-subgenerados y forman la categoría $\sigma[M]$. Esta es la subcategoría plena de R-Mod más pequeña que contiene al módulo M. Se trasladan conceptos conocidos a esta categoría. Por ejemplo, decimos que U es M-inyectivo si todo diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \\ & U & \end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por un morfismo $M \to U$. Se observó en [7] que un módulo es inyectivo en $\sigma[M]$ si y sólo si es M-inyectivo.

Los módulos M-proyectivos son definidos de forma análoga. Todo módulo proyectivo en $\sigma[M]$ es M-proyectivo, sin embargo el recíproco es cierto sólo para los módulos finitamente generados.

En el capítulo dos se definen las **clases propias** de sucesiones exactas cortas en $\sigma[M]$. Además, dada una clase de módulos $\mathcal{P}$ se denota por $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$ a la clase de todas las sucesiones exactas cortas en $\sigma[M]$ en las cuales el funtor $\mathrm{Hom}(P, \_)$ es exacto para cada $P \in \mathcal{P}$. Se prueba que esta es una clase propia y este tipo de clases son llamadas **Proyectivamente generadas**.

De forma dual, se definen las clases **Inyectivamente generadas**.

Se denota por $\mathbb{E}_c$ a la clase de sucesiones exactas cortas $0 \to K \to L \to N \to 0$ tales que K es pseudocomplemento en L y se prueba que $\mathbb{E}_c$ es una clase propia.

Se establecen generalizaciones para los pseudocomplementos y suplementos utilizando (pre)radicales en $\sigma[M]$, llamados **τ-complementos** y **τ-suplementos** con τ un (pre)radical. Diremos que $K \subseteq L$ es un τ-complemento en L si existe $U \subseteq L$ tal que $K \cap U = 0$ y $\tau(L/K) \subseteq (U + K)/K \simeq U$. Se establece una caracterización para los τ-complementos y resulta ser que la clase de sucesiones exactas cortas donde K es un τ-complemento en L es Proyectivamente generada por $\mathbb{T}_\tau$.

Cuando tomamos $\tau = \mathrm{Zoc}(\_)$ se caracteriza a los submódulos **nítidos**.

Si τ es un radical, $K \subseteq L$ es un τ-suplemento si existe $U \subseteq L$ tal que $K + U = L$ y $U \cap K \subseteq \tau(K)$. Resulta que la clase de sucesiones exactas cortas donde K es τ-suplemento en L es Inyectivamente generada por $\mathbb{F}_\tau$.

En particular, si $\tau = \mathrm{Rad}(\_)$ tenemos a los submódulos **conítidos**.

En el último capítulo se trabaja con los módulos **τ-suplementados**, aquellos módulos en los que todo submódulo tiene τ-suplemento. Se traen conceptos como cubiertas proyectivas y módulos semiperfectos a nociones de radicales idempotentes estableciendo vínculos entre τ-suplementos y **τ-cubiertas proyectivas**.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se recuerdan resultados básicos de la teoría de módulos. R denota un anillo asociativo con 1 y R-Mod la categoría de los R-módulos izquierdos unitarios. Se consideran propiedades de $\sigma[M]$, así como proposiciones sobre módulos esenciales. Se da una importante caracterización de los pseudocomplementos, a saber, es equivalente ser pseudocomplemento a ser esencialmente cerrado.

1.1. Definiciones

Definición 1.1.1 *Sea M un R-módulo y N un submódulo de M, decimos que N es un sumando directo de M si existe K submódulo de M tal que $M = N + K$ y $N \cap K = 0$. Lo denotamos $M = N \oplus K$.*

Definición 1.1.2 *Una sucesión $\{... \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} ...\}$ de R-módulos y morfismos de R-módulos es exacta en M_i si $Im(f_i) = Nuc(f_{i+1})$.*
La sucesión es exacta si es exacta en M_i $\forall i$.

Definición 1.1.3 *Una sucesión exacta de la forma $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ la llamamos sucesión exacta corta.*

Definición 1.1.4 *Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta corta, decimos que la sucesión se escinde si existe un morfismo $h : M'' \to M$ tal que $g \circ h = 1_{M''}$.*

Proposición 1.1.5 *Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta corta que se escinde entonces la función $\phi : M' \oplus M'' \to M$ definida por $\phi((x, y)) = f(x) + h(y)$ es un isomorfismo, donde $h : M'' \to M$ es tal que $g \circ h = 1_{M''}$.*

Demostración:

Sea $(x, y) \in \text{Nuc}(\phi)$ entonces $0 = \phi((x, y)) = f(x) + h(y)$ de donde

$$\begin{aligned} 0 &= g(0) \\ &= g(f(x) + h(y)) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ h)(y) \\ &= 0 + 1_{M''}(y) \\ &= y \end{aligned}$$

por tanto $y = 0$ así que $h(y) = 0$ de donde $0 = f(x) + 0 = f(x)$ y como f es un monomorfismo tenemos que $x = 0$ por lo tanto ϕ es un monomorfismo.

Ahora, sea $m \in M$, entonces $(g \circ h) \circ g(m) = g(m)$ pues $g \circ h = 1_{M''}$ por lo que $m - h(g(m)) \in \text{Nuc}(g) = \text{Im}(f)$, por lo tanto existe $x \in M'$ tal que $m - h(g(m)) = f(x)$ de donde $m = f(x) + h(g(m)) = \phi(x, g(m))$ por lo tanto ϕ es epimorfismo
por lo tanto ϕ es un isomorfismo.

Proposición 1.1.6 *Sea M un módulo, $K \subseteq M$ es un sumando directo con $M = K \oplus N$ si y solo si existe un idempotente $f \in End(M)$ tal que $f(M) = K$ y $(1 - f)(M) = N$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que $M = K \oplus N$ para algún $N \subseteq M$ y definimos a $\pi : M \to K$ como $\pi(k+n) = k$ para todo $m = (k+n) \in M$ y la inclusión $i : K \to M$ como $i(k) = k$ para todo $k \in K$. Entonces $f = (i \circ \pi) \in \text{End}(M)$ es idempotente ya que $(\pi \circ i) = 1_K$ de donde $f \circ f = (i \circ \pi) \circ (i \circ \pi) = i \circ 1_k \circ \pi = i \circ \pi = f$.

Además, para $m \in M$ tenemos que $f(m) = (i \circ \pi)(m) = i(k) = k$ por lo tanto $f(M) = K$.

De igual forma, $(1 - f)(m) = m - f(m) = m - (i \circ \pi)(m) = m - k = k + n - k = n$ por tanto $(1 - f)(M) = N$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $f \in \text{End}(M)$ idempotente tal que $f(M) = K$ y $(1 - f)(M) = N$, entonces $M = f(M) + (1 - f)(M)$ ya que para toda $m \in M$ se tiene que $m = f(m) + m - f(m) = f(m) + (1 - f)(m)$.

Ahoar veamos que $\text{Nuc}(f) = (1 - f)(M)$. Sea $x \in \text{Nuc}(f)$ entonces $f(x) = 0$ y como $x = x - 0 = x - f(x)$ tenemos que $x \in (1 - f)(M)$.

Sea $x \in (1 - f)(M)$ entonces $x = y - f(y)$ para alguna $y \in M$, aplicando f tenemos que $f(x) = f(y) - f(f(y)) = f(y) - f(y) = 0$ porque f es idempotente, por tanto $f(x) = 0 \therefore x \in \text{Nuc}(f) \therefore \text{Nuc}(f) = (1 - f)(M)$.

Sea $x \in f(M) \cap (1 - f)(M) = f(M) \cap \text{Nuc}(f)$ entonces $x = f(y)$ para alguna $y \in M$ y $f(x) = 0$ por lo que $f(x) = f(f(y)) = f(y) = 0$ por lo tanto $x = 0$

$\therefore M = f(M) \oplus (1 - f)(M) \therefore K = f(M)$ es un sumando directo de M.

Proposición 1.1.7 *Si K,H,L son submódulos de M y $K \subseteq H$ entonces*

$$H \cap (K + L) = K + (H \cap L).$$

Demostración: Debido a que $K \subseteq H$ tenemos que $K = H \cap K$, de donde

$$\begin{aligned} K + (H \cap L) &= (H \cap K) + (H \cap L) \\ &\subseteq H \cap (K + L). \end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in H \cap (K+L)$, entonces $x \in H$ y existen $k \in K$ y $l \in L$ tal que $x = k + l$ como $k \in K \subseteq H$ entonces $x - k = l \in H \cap L$ por lo tanto $x = k + l \in K + (H \cap L)$. $\therefore H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$.

Teorema 1.1.8 *Sean M, M', N y N' R-módulos y sea $f : M \to N$ un morfismo*

1. *Si $g : M \to M'$ es un epimorfismo tal que $Nuc(g) \subseteq Nuc(f)$ entonces existe un único morfismo $h : M' \to N$ tal que $f = h \circ g$.*
   Más aún, $Nuc(h) = g(Nuc(f))$ e $Im(h) = Im(f)$, entonces h es monomorfismo si y sólo si $Nuc(g) = Nuc(f)$ y h es epimorfismo si y sólo si f es epimorfismo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \\ M' \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Si $g : N' \to N$ es un monomorfismo con $Im(f) \subseteq Im(g)$ entonces existe un único morfismo $h : M \to N'$ tal que $f = g \circ h$.*
   Más aún, $Nuc(h) = Nuc(f)$ e $Im(h) = g^{-1}(Im(f))$, entonces h es monomorfismo si y sólo si f es monomorfismo y h es epimorfismo si y sólo si $Im(g) = Im(f)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & N \\ & N' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Demostración:

(*1*) Supongamos que $\mathrm{Nuc}(g) \subseteq \mathrm{Nuc}(f)$ y sean $x', y' \in M'$. Como g es epimorfismo existen $x, y \in M$ tal que $g(x) = x'$ y $g(y) = y'$. Si $x' = y'$ entonces $g(x - y) = g(x) - g(y) = x' - y' = 0$, por lo que $x - y \in \mathrm{Nuc}(g) \subseteq \mathrm{Nuc}(f)$ y entonces $f(x - y) = 0$ por lo que $f(x) = f(y)$. De donde $h : M' \to N$ dado por $h(x') = f(x)$ está bien definido.

Para ver que es un morfismo consideremos $x', y' \in M'$, $x, y \in M$ tales que $g(x) = x'$ y $g(y) = y'$ y $a, b \in R$, entonces $g(ax + by) = ax' + by'$, por lo que $h(ax' + by') = f(ax + by) = af(x) + bf(y) = ah(x') + bh(y')$.

Si existiera $h' : M' \to N$ tal que $f = h' \circ g$ entonces $h \circ g = h' \circ g$ pero como g es epimorfismo tenemos que $h = h'$.

Sea $x' \in \mathrm{Nuc}(h)$, entonces $h(x') = 0 = f(x)$ con $x' = g(x)$ por lo tanto $\mathrm{Nuc}(h) \subseteq g(\mathrm{Nuc}(f))$.

Sea $x' \in g(\text{Nuc}(f))$. Entonces $x' = g(x)$ con $f(x) = 0$, por lo que $h(x') = h(g(x)) = f(x) = 0$, es decir, $x' \in \text{Nuc}(h)$. Por lo tanto $\text{Nuc}(h) = g(\text{Nuc}(f))$.

Ahora, sea $x \in \text{Im}(f)$, entonces existe $y \in M$ tal que $f(y) = x$ pero$f(y) = h(g(y))$ de donde $x = h(g(y))$, es decir, $x \in \text{Im}(h)$.

Sea $x \in \text{Im}(h)$ entonces existe $y' \in M'$ tal que $h(y') = x$, pero también existe $y \in M$ tal que $g(y) = y'$, por lo tanto $x = h(g(y)) = f(y)$. Por lo tanto $\text{Im}(f) = \text{Im}(h)$.

De lo anterior se sigue que h es monomorfismo si y sólo si $\text{Nuc}(g) = \text{Nuc}(f)$ y h es epimorfismo si y sólo si f es epimorfismo.

(*2*) Para cada $m \in M$, $f(m) \in$Im$(f) \subseteq \text{Im}(g)$, entonces $f(m) = g(n')$, pero como g es un monomorfismo tenemos que $n' \in N'$ es único, por lo tanto existe $h : M \to N'$ tal que $f = g \circ h$ dado por $h(m) = n'$.

Es un morfismo ya que si $x, y \in M$, $x', y' \in N'$ y $a, b \in R$ son tales que $f(x) = g(x')$ y $f(y) = g(y')$ entonces $h(ax + by) = ax' + by' = ah(x) + bh(y)$.

Si existiera $h' : M \to N'$ tal que $f = g \circ h'$ entonces $g \circ h' = g \circ h$ y como g es monomorfismo tenemos que $h' = h$.

Sea $x \in \text{Nuc}(h)$ entonces $h(x) = 0$, por lo que $g(h(x)) = 0$, es decir $f(x) = 0$. Por lo tanto $x \in \text{Nuc}(f)$.

Sea $x \in \text{Nuc}(f)$ entonces $f(x) = g(h(x)) = 0$ y como g es monomorfismo $h(x) = 0$. Por lo tanto $\text{Nuc}(f) =$Nuc(h).

Sea $x \in \text{Im}(h)$ entonces $x = h(y)$ para alguna $y \in M$, por lo tanto $g(x) = g(h(y)) = f(y) \in \text{Im}(f)$, por lo tanto $x \in g^{-1}(\text{Im}(f))$.

Sea $x \in g^{-1}(\text{Im}(f))$. Entonces $g(x) = f(y) = g(h(y))$ y como g es monomorfismo $x = h(y)$. Por lo tanto $\text{Im}(h) = g^{-1}(\text{Im}(f))$.

De lo anterior se sigue que h es monomorfismo si y sólo si f es monomorfismo y h es epimorfismo si y sólo si $\text{Im}(g) = \text{Im}(f)$.

Definición 1.1.9 *Sean $f_1 : M_1 \to M$ y $f_2 : M_2 \to M$ dos morfismos en $R - Mod$. Un diagrama conmutativo en $R - Mod$*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \end{tikzcd}$$

es llamado el producto fibrado para la pareja (f_1, f_2) si para todo par de morfismos $g_1 : X \to M_1$ y $g_2 : X \to M_2$ con $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, existe un único morfismo $g : X \to P$ con $p_1 \circ g = g_1$ y $p_2 \circ g = g_2$

Definición 1.1.10 *Sean $g_1 : N \to N_1$ y $g_2 : N \to N_2$ dos morfismos en $R - Mod$. Un* *diagrama conmutativo en $R-Mod$*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"'] & N_2 \arrow[d, "q_2"] \\ N_1 \arrow[r, "q_1"] & Q \end{tikzcd}$$

es llamado suma fibrada para la pareja (g_1, g_2) si para todo par de morfismos $h_1 : N_1 \to Y$ y $h_2 : N_2 \to Y$ con $h_1 \circ g_1 = h_2 \circ g_2$, existe un único morfismo $h : Q \to Y$ con $h \circ q_1 = h_1$ y $h \circ q_2 = h_2$

Proposición 1.1.11 *Para todo diagrama conmutativo con renglones exactos:*

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 & \end{tikzcd}$$

1. *Las siguientes condiciones son equivalentes*
   a) *existe $\alpha : M_3 \to N_2$ tal que $g_2 \circ \alpha = \phi_3$*
   b) *existe $\beta : M_2 \to N_1$ tal que $\beta \circ f_1 = \phi_1$*
2. *Si ϕ_1 y ϕ_3 son epimorfismos(monomorfismos) entonces ϕ_2 es epimorfismo(monomorfismo)*
3. *Si ϕ_1 es epimorfismo y ϕ_2 es monomorfismo , entonces ϕ_3 es monomorfismo*
4. *Si ϕ_2 es epimorfismo y ϕ_3 es monomorfismo, entonces ϕ_1 es epimorfismo.*

Demostración:

(*1*) (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Supongamos que existe $\alpha : M_3 \to N_2$ tal que $g_2 \circ \alpha = \phi_3$, de donde $g_2 \circ \alpha \circ f_2 = \phi_3 \circ f_2 = g_2 \circ \phi_2$. Por lo tanto $g_2(\phi_2 - \alpha \circ f_2) = 0$, es decir, $\mathrm{Im}(\phi_2 - \alpha \circ f_2) \subseteq \mathrm{Nuc}(g_2) = \mathrm{Im}(g_1)$. Por lo tanto existe $\beta : M_2 \to N_1$ tal que $(\phi_2 - \alpha \circ f_2) = g_1 \circ \beta$, aplicando f_1 obtenemos que $(\phi_2 \circ f_1) - \alpha \circ (f_2 \circ f_1) = g_1 \circ \beta \circ f_1$. Por lo tanto $(\phi_2 \circ f_1) = g_1 \circ \beta \circ f_1$ y como el diagrama es conmutativo $g_1 \circ \phi_1 = g_1 \circ \beta \circ f_1$ pero g_1 es monomorfismo, entonces finalmente $\phi_1 = \beta \circ f_1$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) Supongamos que existe $\beta : M_2 \to N_1$ tal que $\beta \circ f_1 = \phi_1$ entonces $g_1 \circ \beta \circ f_1 = g_1 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f_1$ por lo que $(\phi_2 - (g_1 \circ \beta))f_1 = 0$. Debido a que los renglones son exactos tenemos que $\mathrm{Nuc}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1) \subseteq \mathrm{Nuc}(\phi_2 - (g_1 \circ \beta))$ de donde existe $\alpha : M_3 \to N_2$ tal que $\alpha \circ f_2 = \phi_2 - (g_1 \circ \beta)$ por lo cual $g_2 \circ \alpha \circ f_2 = g_2 \circ \phi_2 - (g_2 \circ g_1 \circ \beta) = g_2 \circ \phi_2 = \phi_3 \circ f_2$ pero como f_2 es un epimorfismo entonces $g_2 \circ \alpha = \phi_3$.

(*2*) Supongamos que ϕ_1 y ϕ_3 son epimorfismos y sea $x \in N_2$ enotnces $g_2(x) \in N_3$ y ya que ϕ_3 es epimorfismo existe $x_1 \in M_3$ tal que $\phi_3(x_1) = g_2(x)$ y para $x_1 \in M_3$

existe $x_2 \in M_2$ tal que $f_2(x_2) = x_1$ por lo que $\phi_3(f_2(x_2)) = g_2(x)$ y como el diagrama es conmutativo tenemos que $g_2(\phi_2(x_2)) = g_2(x)$. Por lo tanto $\phi_2(x_2) - x \in \text{Nuc}(g_2) = \text{Im}(g_1)$. De donde existe $y \in N_1$ tal que $\phi_2(x_2) - x = g_1(y)$ pero ϕ_1 es epimorfismo, porlo tanto existe $y_1 \in M_1$ tal que $\phi_1(y_1) = y$, de donde, $\phi_2(x_2) - x = g_1(\phi_1(y_1)) = \phi_2(f_1(y_1))$. Por lo tanto $x = \phi_2(x_2) - \phi_2(f_1(y_1))$, es decir, ϕ_2 es epimorfismo.

(3) Sean $x \neq y$ en M_3 tal que $\phi_3(x) = \phi_3(y)$. Entonces existen $x_1 \neq x_2$ en M_2 tales que $f_2(x_1) = x$ y $f_2(x_2) = y$, pero ϕ_2 es monomorfismo entonces $\phi_2(x_1) \neq \phi_2(x_2)$ por lo que sustituyendo

$$\begin{aligned} &\phi_3(f_2(x_1)) = \phi_3(f_2(x_2)) \text{pero el diagrama es conmutativo, entonces} \\ &g_2(\phi_2(x_1)) = g_2(\phi_2(x_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_2(x_1 - x_2) \in \text{Nuc}(g_2) = \text{Im}(g_1)$, es decir, existen $y_2 \in N_1$ e $y_3 \in M_1$ tal que $\phi_1(y_3) = y_2$ con

$$\begin{aligned} \phi_2(x_1 - x_2) &= g_1(y_2) \\ &= g_1(\phi_1(y_3)) \\ &= \phi_2(f_1(y_3)) \end{aligned}$$

Pero, ϕ_2 es monomorfismo, por lo que $x_1 - x_2 = f_1(y_3)$ de donde, $x_1 = f_1(y_3) + x_2$ aplicando f_2 obtenemos que $x = f_2(x_1) = f_2(f_1(y_3)) + f_2(x_2) = y$ lo cual es una contradicción. $\therefore$ ϕ_3 es monomorfismo.

(4) Sea $x \in N_1$ entonces $g_1(x) \in N_2$ y como ϕ_2 es sobre, existe $y \in M_2$ tal que $\phi_2(y) = g_1(x)$. Por lo tanto $g_2(\phi_2(y)) = 0 = \phi_3(f_2(y))$, pero ϕ_3 es monomorfismo, entonces $f_2(y) = 0$, de donde, $y \in \text{Nuc}(f_2) = \text{Im}(f_1)$, es decir, $y = f_1(y_1)$ para alguna $y_1 \in M_1$. Por lo tanto $\phi_2(f_1(y_1)) = g_1(x) = g_1(\phi_1(y_1))$ y ya que g_1 es monomorfismo $x = \phi_1(y_1)$. $\therefore$ ϕ_1 es epimorfismo.

1.2. La Categoría $\sigma[M]$

Definición 1.2.1 *Sea M un R-módulo, decimos que un R-módulo N es (finitamente) M-generado si existe un epimorfismo $M^{(I)} \to N$ para algún conjunto (finito) I.*

Definición 1.2.2 *Sea M un R-módulo, decimos que un R-módulo N es subgenerado por M si N es isomorfo a un submódulo de un módulo M-generado.*

Definición 1.2.3 *Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:*

(a) Una clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$ cuyos miembros se llaman objetos de $\mathcal{C}$.

(b) Para cada pareja (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$, un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos son llamados morfismos de A en B de tal forma que si $(A, B) \neq (X, Y)$ entonces $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = \varnothing$.

(c) Para cada terna A, A', A'' de objetos de $\mathcal{C}$ una operación

$$Hom_{\mathcal{C}}(A', A'') \text{x} Hom_{\mathcal{C}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{C}}(A, A'')$$
$$(f, g) \mapsto fg$$

con la propiedad de $f(gh) = (fg)h$ siempre que fgh este definida.

(d) Para todo $A \in Ob(\mathcal{C})$ existe un elemento distinguido $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ que funciona como identidad con respecto a la operación de morfismos de $\mathcal{C}$, $f1_A = f$ y $1_A g = g$.

Definición 1.2.4 *Una categoría $\mathcal{D}$ es llamada una subcategoría de $\mathcal{C}$ si:*

1. *$Ob(\mathcal{D}) \subset Ob(\mathcal{C})$.*
2. *$Hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subset Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in Ob(\mathcal{D})$.*
3. *La composición de morfismos en $\mathcal{D}$ es la restricción de la composición en $\mathcal{C}$.*

Si $Hom_{\mathcal{D}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ entonces $\mathcal{D}$ es llamada una subcategoría plena de $\mathcal{C}$.

Definición 1.2.5 *Una subcategoría $\mathcal{C}$ de $R-Mod$ es subgenerada por M si todo objeto en $\mathcal{C}$ es subgenerado por M.*

Definición 1.2.6 *Denotamos por $\sigma[M]$ a la subcategoría plena de $R - Mod$ cuyos objetos son todos los R-módulos subgenerados por M.*

$$\sigma[M] = \{N \in R - Mod \mid N \textit{es un submódulo de un módulo } M - \textit{generado}\}.$$

Teorema 1.2.7 *Para un R-módulo M tenemos que:*

1. *Si N en $\sigma[M]$, submódulos y cocientes de N pertenecen a $\sigma[M]$.*
2. *La suma directa de una familia de módulos en $\sigma[M]$ pertenece a $\sigma[M]$ y es igual al coproducto de esos módulos en $\sigma[M]$.*
3. *Producto fibrado y suma fibrada de morfismos en $\sigma[M]$ pertenecen a $\sigma[M]$.*

Demostración:

(*1*) Sea $N \in \sigma[M]$. Entonces $N \leq K$ donde K es M-generado, es decir, existe un epimorfismo $M^{(I)} \to K$. En particular si $H \leq N$ entonces H es submódulo de un M-generado y por tanto pertenece a $\sigma[M]$.

Ahora, sea $H \subseteq N \subseteq K$. Como K es M-generado entonces K/H es M-generado, pero $N/H \subseteq K/H$, por lo tanto $N/H \in \sigma[M]$.

(*2*) Si $\{N_\lambda\}$ es una familia de R-módulos en $\sigma[M]$ y $N_\lambda \subset M_\lambda$ con M_λ M-generado, entonces $\bigoplus N_\lambda \subseteq \bigoplus M_\lambda$ con $\bigoplus M_\lambda$ M-generado. Por lo tanto $\bigoplus N_\lambda$ pertenece a $\sigma[M]$.

(*3*) Se sigue de (*1*) y (*2*).

Definición 1.2.8 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías, un funtor F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ es una correspondencia $F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{C}')$ que asigna a cada objeto $A \in Ob(\mathcal{C})$ un único $F(A) \in Ob(\mathcal{C}')$.*

Para cada pareja (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$, una función

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(F(A), F(B))$$

tal que

1. $F(f, g) = F(f)F(g)$.
2. $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Definición 1.2.9 *Un funtor τ de $\sigma[M]$ en $\sigma[M]$ es llamado un prerradical en $\sigma[M]$ si satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\tau(N)$ es un submódulo de N para todo $N \in \sigma[M]$.*
2. *Si $f : N' \to N$ es un morfismo en $\sigma[M]$ entonces $f(\tau(N')) \subseteq \tau(N)$ y $\tau(f)$ es la restricción $f|_{\tau(N')}$.*

τ es llamado un radical si $\tau(N/\tau(N)) = 0$.

τ es llamado idempotente si $\tau(N) = \tau(\tau(N))$.

Definición 1.2.10 *Para un prerradical τ tenemos asociadas dos clases de objetos de $\sigma[M]$:*

$$\mathbb{T}_\tau = \{N \mid \tau(N) = N\} \qquad y$$
$$\mathbb{F}_\tau = \{N \mid \tau(N) = 0\}.$$

Definición 1.2.11 *Sean M y U R-módulos. U es llamado M-inyectivo si todo diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \\ & U & \end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por un morfismo $M \to U$.

Definición 1.2.12 *Un módulo U es inyectivo en $\sigma[M]$ si es N-inyectivo para todo $N \in \sigma[M]$.*

Definición 1.2.13 *Un submódulo K de M es esencial en M si para todo submódulo $0 \neq L$ de M se tiene que $K \cap L \neq 0$. Entonces decimos que M es una extensión esencial de K y lo denotamos por $K \trianglelefteq M$.*

Proposición 1.2.14 *Sean K, L y M módulos, entonces:*

1. *Si $K \subseteq L \subseteq M$ entonces $K \trianglelefteq M$ si y sólo si $K \trianglelefteq L \trianglelefteq M$*

2. *Si $h : K \to M$ es un morfismo y $L \trianglelefteq M$ entonces $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.*

Demostración:

(*1*) ($\Rightarrow$) Supongamos que $K \subseteq L \subseteq M$ y que $K \trianglelefteq M$. Si $0 \neq H \leq L \leq M$ entonces $H \cap K \neq 0$, de donde $K \trianglelefteq L$. Si existe $0 \neq N \leq M$ tal que $N \cap L = 0$ entonces $N \cap K = 0$ lo cual no es posible porque $K \trianglelefteq M$. Por tanto $N \cap L \neq 0$. $\therefore L \trianglelefteq M$.

($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N \leq M$. Debido a que $K \trianglelefteq L \trianglelefteq M$ tenemos que $N \cap L \neq 0$ y en particular $K \cap N \cap L \neq 0$. Por lo tanto $N \cap K \neq 0$. Por lo tanto $K \trianglelefteq M$.

(*2*) Sea $0 \neq U \subseteq K$. Si $h(U) = 0$ entonces $U \subseteq \mathrm{Nuc}(h) \subseteq h^{-1}(L)$ y por lo tanto $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

Si $h(U) \neq 0$ entonces $h(U) \cap L \neq 0$ por lo que existe $0 \neq u \in U$ tal que $h(u) \in L$ y entonces $0 \neq u \in U \cap h^{-1}(L)$ por lo tanto $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

Definición 1.2.15 *Un submódulo K de M es un submódulo cerrado en M si K no tiene extensiones esenciales propias, es decir, si $K \trianglelefteq H \subset M$ entonces $K = H$.*

Definición 1.2.16 *Sea N un submódulo de un módulo M. Un submódulo $K \subseteq L$ es un pseudocomplemento de N si K es máximo en el conjunto de submódulos $L \subseteq M$ con $N \cap L = 0$.*

Observación 1.2.17 *Como el conjunto de submódulos $L \subseteq M$ con $K \cap L = 0$ es no vacío, parcialmenete ordenado por la inclusión e inductivo, entonces por el Lema de Zorn todo submódulo $K \subseteq M$ tiene pseudocomplementos. Los pseudocomplementos de $K \subseteq M$ son cero si y sólo si $K \trianglelefteq M$.*

Proposición 1.2.18 *Sea $K \subseteq M$ un submódulo y K' un pseudocomplemento de K en M entonces:*

1. $(K + K')/K' \trianglelefteq M/K'$

2. $K + K' \trianglelefteq M$

Demostración:

(*1*) Sea $K \subseteq M$ con $K' \subseteq L$ tal que $L/K' \cap (K + K')/K' = 0$ entonces tenemos que $(K + K') \cap L = (K \cap L) + K' \subseteq K'$, de donde $K \cap L \subseteq K'$, además $K \cap L \subseteq K' \cap K = 0$ y como K' es máximo con esa propiedad entonces $L = K'$. Por lo tanto $(K + K')/K' \trianglelefteq M/K'$.

(*2*) Consideramos la proyección canónica $\pi : M \to M/K'$. Por (*1*) $(K + K')/K' \trianglelefteq M/K'$ y dado que la imagen inversa de $(K + K')/K'$ es $K + K'$ por 1.2.14 concluimos que $K + K' \trianglelefteq M$.

Proposición 1.2.19 *Sea $K \subseteq M$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *K es un pseudocomplemento en M*
2. *K es cerrado en M*
3. *$K = X \cap M$ para algún sumando directo X de $E(M)$.*

Demostración: (*1*) $\Rightarrow$ (*2*) Sea K un pseudocomplemento para $K' \subseteq M$. Supongamos que existe $H \subset M$ tal que $K \trianglelefteq H \subset M$ entonces $K \cap (H \cap K') = 0$ por lo que $H \cap K' = 0$. Por lo tanto $K = H$, es decir K es cerrado en M.

(*2*) $\Rightarrow$ (*3*) Como $K \subseteq M \subseteq E(M)$, tenemos que $E(M)$ contiene una copia de $E(K)$, de donde, $K \trianglelefteq E(K) \cap M$. Pero ya que K es cerrado en M entonces $K = E(K) \cap M$. Como, por definición, $E(K)$ es inyectivo, se sigue que $E(K)$ es un sumando directo de $E(M)$.

(*3*) $\Rightarrow$ (*1*) Sea $E(M) = X \oplus Y$ y sea $H = M \cap Y$.

Debido a que $K = X \cap M$ tenemos que $K \cap H = X \cap M \cap Y = 0$.

Consideremos a $N \subseteq M$ tal que $K \subset N$ y sea $t \in N/K$. Luego, $(X + tR) \cap Y \neq 0$ por lo que $x + tr = y$ para algún $x \in X, y \in Y$ y $r \in R$. Pero $M \trianglelefteq E(M)$ por lo que $0 \neq yr' \in H$ para alguna $r' \in R$. De lo anterior obtenemos que $0 \neq yr' = xr' + trr'$, de donde $xr' \in X \cap M = K$. Por lo tanto $N \cap H \neq 0$, es decir K es máximo con esa propiedad y por tanto pseudocomplemento en M.

Lema 1.2.20 *Un submódulo $K \leq M$ es esencial en $M \Leftrightarrow$ para cada $0 \neq x \in M$ existe un $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in K$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que $K \trianglelefteq M$ y $0 \neq x \in M$ entonces $Rx \cap K \neq 0$.

($\Leftarrow$) Sea $0 \neq x \in L \leq M$ entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in K \cap L$. Por tanto $K \trianglelefteq M$.

Proposición 1.2.21 *Sean $K_1 \leq M_1 \leq M$ y $K_2 \leq M_2 \leq M$ con $M = M_1 \oplus M_2$. Entonces $K_1 \oplus K_2 \trianglelefteq M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow K_1 \trianglelefteq M_1$ y $K_2 \trianglelefteq M_2$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que K_1 no es esencial en M_1, es decir, existe $0 \neq L_1 \leq M_1$ tal que $K_1 \cap L_1 = 0$.

Veamos que $(K_1 + K_2) \cap L_1 = 0$. Si $k_1 \in K_1, k_2 \in K_2$ y $l_1 \in L_1$ con $k_1 + k_2 = l_1$ entonces $k_2 = l_1 - k_1 \in M_1 \cap M_2 = 0$, lo cual no puede ser porque $K_1 \oplus K_2 \trianglelefteq M_1 \oplus M_2$. Por lo tanto $K_1 \trianglelefteq M_1$ y $K_2 \trianglelefteq M_2$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $K_1 \trianglelefteq M_1$ y $K_2 \trianglelefteq M_2$ y sean $0 \neq x_1 \in M_1$ y $0 \neq x_2 \in M_2$ entonces por 1.2.20 existe $r_1 \in R$ tal que $0 \neq r_1x_1 \in K_1$. Si $r_1x_2 \in K_2$ entonces $0 \neq r_1x_1 + r_1x_2 \in K_1 \oplus K_2$. Si r_1x_2 no está en K_1 entonces por 1.2.20 existe $r_2 \in R$ tal que $0 \neq r_2r_1x_2 \in K_2$ y por lo tanto $0 \neq r_2r_1x_1 + r_2r_1x_2 \in K_1 \oplus K_2$.

Por lo tanto $K_1 \oplus K_2 \trianglelefteq M_1 \oplus M_2$.

Definición 1.2.22 *Sea M un R-módulo y sea $K \subseteq M$. Decimos que K es superfluo en M si para todo submódulo $L \subseteq M$ con $K+L=M$, tenemos que $L=M$. Lo denotamos por $K \ll M$.*

Definición 1.2.23 *Se dice que un R-módulo N es M-superfluo si $N \ll L$ para algún $L \in \sigma[M]$.*

Definición 1.2.24 *Sea L un R-módulo y $K \subseteq N \subseteq L$. Si $N/K \ll L/K$ entonces decimos que K es coesencial de N en L.*

Definición 1.2.25 *N es cocerrado en L si N no tiene submódulos coesenciales propios en L.*

Definición 1.2.26 *Sea N un módulo en $\sigma[M]$. Un módulo inyectivo E en $\sigma[M]$ junto con un monomorfismo esencial $f : N \to E$ es llamado una cápsula inyectiva de N en $\sigma[M]$ y lo denotamos por $\hat{N}$.*

Definición 1.2.27 *Sean M y P R-módulos. P es llamado M-proyectivo si todo diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por un morfismo $P \to M$

Definición 1.2.28 *Un módulo K en $\sigma[M]$ es llamado proyectivo en $\sigma[M]$ si es N-proyectivo para todo N en $\sigma[M]$.*

Proposición 1.2.29 *Sea P un módulo proyectivo y $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N$ una sucesión exacta con $g \circ h = 0$ para $h : P \to L$, entonces existe $\bar{h} : P \to K$ tal que $h = f \circ \bar{h}$.*

Definición 1.2.30 *Un módulo M es simple si $M \neq 0$ y sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M.*

Definición 1.2.31 *Un módulo N es semisimple si M es la suma de sus submódulos simples.*

Proposición 1.2.32 *Sea $\{N_\lambda\}_\Lambda$ una familia de submódulos simples con $M = \sum\limits_{\Lambda} N_\lambda$ entonces para todo $K \leq M$ existe un conjunto de índices $\Lambda_k \subset \Lambda$ tal que $M = K \bigoplus (\bigoplus\limits_{\Lambda_k} N_\lambda)$.*

Demostración:

Sea $K \leq M$. Tomemos $\Lambda_k \subset \Lambda$ máximo con la propiedad de que $\{N_\lambda\}_{\Lambda_k}$ es una familia independiente de submódulos con $K \cap (\sum_{\Lambda_k} N_\lambda) = 0$. Entonces $L = K + (\sum_{\Lambda_k} N_\lambda)$ es una suma directa. Por lo tanto $L = K \bigoplus (\bigoplus_{\Lambda_k} N_\lambda)$. Pero si $\lambda \in \Lambda$ tenemos que $N_\lambda \cap L = N_\lambda$ o $N_\lambda \cap L = 0$. Si $N_\lambda \cap L = 0$ se contradice la maximalidad de Λ_k por lo tanto $N_\lambda \subseteq L \forall \lambda \in \Lambda$, es decir, $L = M$.

Proposición 1.2.33 *Sea M un módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es semisimple*
2. *M es suma directa de módulos simples*
3. *Todo submódulo de M es sumando directo de M*

Demostración:

(1)(⇒)*(2)* Directo de 1.2.32 tomando $K = 0$.

(2)(⇒)*(3)* Directo de 1.2.32.

(3)(⇒)*(1)* Para todo $0 \neq m \in M$, el submódulo $Rm \subseteq M$ contiene un submódulo máximo U. Por hipótesis, Rm es un sumando directo de M y también en Rm con $Rm = U \oplus V$ con $V \simeq Rm/U$ simple. Por lo tanto todo submódulo no nulo de M contiene un submódulo simple.

Ahora, sea L la suma de todos los submódulos simples de M. Por hipótesis L es un sumando directo, de donde existe $P \subseteq M$ con $M = L \oplus P$, es decir P no tiene submódulos simples. Por lo tanto $P = 0$. Por tanto M es la suma de sus submódulos simples.

Definición 1.2.34 *Para un módulo M se define el zoclo de M como la suma de todos los submódulos simples de M y lo denotamos por $Zoc(M)$. Además es un prerradical en el sentido de 1.2.9.*

Observación 1.2.35 *Para un módulo M tenemos que $Zoc(M) = M$ si y sólo si M es semisimple.*

Definición 1.2.36 *Para un módulo M definimos al radical de Jacobson de M como la intersección de todos los submódulos máximos de M y lo denotamos por $Rad(M)$. Además es un radical en el sentido de 1.2.9.*

Definición 1.2.37 *Un submódulo $N \in \sigma[M]$ es llamado M-singular si $N \simeq L/K$ para $L \in \sigma[M]$ tal que $K \trianglelefteq L$.*

Proposición 1.2.38 *Sea M un R-módulo, entonces:*

1. *Todo módulo M-singular es un submódulo de un módulo M-generado y M-singular.*
2. *Todo módulo finitamente generado M-singular pertenece a $\sigma[M/L]$ para algún $L \trianglelefteq M$.*
3. *$\{M/K \ : \ K \trianglelefteq M\}$ es un conjunto de generadores para los módulos M-generados y M-singulares.*

Demostración:

(*1*) Sea $L \in \sigma[M]$ y $K \subseteq L$ tal que $K \trianglelefteq L$. Tenemos que $\hat{L}$ es M-generada y además como $L \trianglelefteq \hat{L}$ tenemos que $L/K \subseteq \hat{L}/K$.

(*2*) Por definición un submódulo finitamente generado M-singular es de la forma N/K con $N \in \sigma[M]$ finitamente generado y $K \trianglelefteq N$. N es un submódulo esencial de un módulo finitamente generado $\tilde{N}$, es decir, existe un epimorfismo $g : M^k \to \tilde{N}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $U = g^{-1}(N)$, $V = g^{-1}(K)$ submódulos esenciales de M^k.

Con la inclusión canónica $u_i : M \to M^k$ tenemos que $L = \bigcap_{i \leq k} u_i^{-1}(V)$ es un submódulo esencial de M y L^k está en el núcleo de la composición $U \xrightarrow{g} N \to N/K$. Esto implica que $N/K \in \sigma[M/L]$.

(*3*) Directo de (*2*).

Definición 1.2.39 *Un R-módulo M es llamado módulo Max si todo submódulo distinto de cero de M contiene submódulos máximos.*

Capítulo 2

τ-complementos y τ-suplementos

En este capítulo se desarrollan los conceptos centrales del trabajo. Se definen clases propias de sucesiones exactas cortas. Además, dada una clase de módulos $\mathcal{P}$ se denota por $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$ a la clase de todas las sucesiones exactas cortas en $\sigma[M]$ en las cuales el funtor $\mathrm{Hom}(P, \_)$ es exacto para cada $P \in \mathcal{P}$. Se prueba que esta es una clase propia y este tipo de clases son llamadas Proyectivamente generadas. Analogamente tenemos a las clases Inyectivamente generadas.

Dado un prerradical idempotente se definen los τ-complementos y se observa que la clase de suceciones exactas cortas $0 \to K \to L \to N \to 0$ donde K es un τ-complemento en L es Proyectivamente generada.

Para un radical se definen a los τ-suplementos y se tiene que la clase de sucesiones exactas cortas donde K es τ-suplemento en L es Inyectivamente generada.

2.1. Clases propias

Definición 2.1.1 *Sea $\mathbb{E}$ una clase de sucesiones exactas cortas en $\sigma[M]$.*
Si $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ pertenece a $\mathbb{E}$, entonces f es llamado un $\mathbb{E}$-mono y g un $\mathbb{E}$-epi. La clase $\mathbb{E}$ es llamada propia si satisface las siguientes condiciones:

1. *$\mathbb{E}$ es cerrada bajo isomorfismos*

2. *$\mathbb{E}$ contiene a todas las sucesiones exactas cortas que se escinden en $\sigma[M]$*

3. *la clase de $\mathbb{E}$-monos es cerrada bajo composición y además si f y f' son monomorfismos y $f' \circ f$ es un $\mathbb{E}$-mono, entonces f es un $\mathbb{E}$-mono*

4. *la clsase de $\mathbb{E}$-epis es cerrada bajo composición y además si g y g' son epimorfismos y $g \circ g'$ es un $\mathbb{E}$-epi, entonces g es un $\mathbb{E}$-epi.*

Ejemplo: La clase de todas las sucesiones exactas cortas que se escinden en $\sigma[M]$ es una clase propia.

Demostración :

Sea $\mathbb{E}$ la clase de todas las sucesiones exactas cortas que se escinden en $\sigma[M]$

(*1*) Sea $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta que se escinde en $\sigma[M]$, es decir, existe $\bar{g} : N \to L$ tal que $g \circ \bar{g} = 1_N$.
Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & L' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

donde α, β y γ son isomorfismos, entonces hay que ver que la sucesión exacta corta (1) se escinde.
Definimos $\bar{g}' : N' \to L'$ como $\bar{g}' = \beta \circ \bar{g} \circ \gamma^{-1}$ y entonces

$$\begin{aligned}
g' \circ \bar{g}' &= g' \circ (\beta \circ \bar{g} \circ \gamma^{-1}) \\
&= (g' \circ \beta) \circ (\bar{g} \circ \gamma^{-1}) \\
&= (\gamma \circ g) \circ (\bar{g} \circ \gamma^{-1}) && \text{porque } \; g' \circ \beta = \gamma \circ g \\
&= \gamma \circ (g \circ \bar{g}) \circ \gamma^{-1} \\
&= \gamma \circ 1_N \circ \gamma^{-1} && \text{pues } \; g \circ \bar{g} = 1_N \\
&= \gamma \circ \gamma^{-1} \\
&= 1_{N'}
\end{aligned}$$

$\therefore$ la sucesión (1) se escinde.

(*2*) Por hipótesis

(*3*) La composición de dos monomorfismos la podemos ver de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_K"] & U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & U/K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "if"] & L \arrow[r] \arrow[d] & L/K \arrow[r] & 0 \\
& & L/U & &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que f e i son $\mathbb{E}$-monos, entonces existen $\bar{f} : U \to K$ tal que $\bar{f} \circ f = 1_K$ e $\bar{i} : L \to U$ tal que $\bar{i} \circ i = 1_U$.

Ahora, sea $h : L \to K$, definida por $h = \bar{f} \circ \bar{i}$ entonces

$$\begin{aligned} h \circ (i \circ f) &= (\bar{f} \circ \bar{i}) \circ (i \circ f) \\ &= \bar{f} \circ (\bar{i} \circ i) \circ f \\ &= \bar{f} \circ 1_U \circ f \\ &= \bar{f} \circ f \\ &= 1_K \end{aligned}$$

por lo tanto $(i \circ f)$ es un $\mathbb{E}$-mono.

Ahora supongamos que $i \circ f : K \to L$ es un $\mathbb{E}$-mono entonces existe $h : L \to K$ tal que $h \circ (i \circ f) = 1_K$.

Ahora veamos que f es un $\mathbb{E}$-mono.

Consideremos a $g : U \to K$ como $g = h \circ i$ de donde $g \circ f = (h \circ i) \circ f = h \circ (i \circ f) = 1_K$ por lo tanto f es un $\mathbb{E}$-mono.

(4) Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos para representar la composición de dos epimorfismos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "1_K"] & U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & U/K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "hg"] & L/K \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ & & L/U \arrow[r, "1_{L/U}"] & L/U & \end{tikzcd}$$

Supongamos que g y h son $\mathbb{E}$-epis, y veamos que $h \circ g$ es un $\mathbb{E}$-epi.

Debido a que g y h son $\mathbb{E}$-epis existen $\bar{g} : L/K \to L$ tal que $g \circ \bar{g} = 1_{L/K}$ y $\bar{h} : L/U \to L/K$ tal que $h \circ \bar{h} = 1_{L/U}$, de donde definimos a $f : L/U \to L$ como $f = \bar{g} \circ \bar{h}$ entonces

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f &= (h \circ g) \circ (\bar{g} \circ \bar{h}) \\ &= h \circ (g \circ \bar{g}) \circ \bar{h} \\ &= h \circ 1_{L/K} \circ \bar{h} \\ &= h \circ \bar{h} \\ &= 1_{L/U} \end{aligned}$$

por lo tanto $(h \circ g)$ es un $\mathbb{E}$-epi.

Ahora supongamos que $h \circ g$ es un $\mathbb{E}$-epi y veamos que h es un $\mathbb{E}$-epi

Como $(h \circ g)$ es un $\mathbb{E}$-epi existe $\bar{f} : L/U \to L$ tal que $(h \circ g) \circ \bar{f} = 1_{L/U}$, entonces definiendo a $\bar{h} : L/U \to L/K$ como $\bar{h} = (g \circ \bar{f})$ tenemos que $h \circ \bar{h} = h \circ (g \circ \bar{f}) = (h \circ g) \circ \bar{f} = 1_{L/U}$ por lo tanto h es un $\mathbb{E}$-epi.

$\therefore$ La clase $\mathbb{E}$ de todas las sucesiones exactas cortas que se escinden en $\sigma[M]$ es una clase propia.

2.2. Purezas

Proposición 2.2.1 *Sea $\mathcal{P}$ una clase no vacía de módulos en $\sigma[M]$. Denotemos por $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$ la clase de todas las sucesiones exactas cortas en $\sigma[M]$ en las cuales el funtor Hom(P, _) es exacto para cada $P \in \mathcal{P}$. Entonces $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$ es una clase propia.*

A este tipo de clases se les conoce como Proyectivamente generadas y a sus elementos se les llama sucesiones $\mathcal{P}$-puras.

Demostración:

(*1*) Veamos que $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$ es cerrada bajo isomorfismos:

Sea $P \in \mathcal{P}$ y sea $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta en la cual el funtor $\mathrm{Hom}(P, \_)$ es exacto, es decir, para todo $\theta : P \to N$ existe $\bar{\theta} : P \to L$ tal que $g \circ \bar{\theta} = \theta$.

Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos donde α, β y γ son isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & L' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

Sea $\rho : P \to N'$ y veamos que existe $\bar{\rho} : P \to L'$ tal que $g' \circ \bar{\rho} = \rho$.

Como γ es un isomorfismo existe $\gamma^{-1} : N' \to N$ tal que $\gamma \circ \gamma^{-1} = 1_{N'}$, de donde $\gamma^{-1} \circ \rho : P \to N$ y por hipótesis existe $\delta : P \to L$ tal que $g \circ \delta = \gamma^{-1} \circ \rho$, pero aplicando γ a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ g) \circ \delta &= (\gamma \circ \gamma^{-1}) \circ \rho \\
&= 1_{N'} \circ \rho \\
&= \rho.
\end{aligned}$$

Pero por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\gamma \circ g = g' \circ \beta$ de donde

$$\begin{aligned}
\rho &= (\gamma \circ g) \circ \delta \\
&= (g' \circ \beta) \circ \delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto definiendo a $\bar{\rho} : P \to L'$ como $\bar{\rho} = \beta \circ \delta$ tenemos que $g' \circ \bar{\rho} = g' \circ \beta \circ \delta = \rho$.

Por lo tanto el funtor $\mathrm{Hom}(P, \_)$ es exacto en la sucesión exacta corta (1)

(*2*) Veamos que $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$ contiene a todas las sucesiones exactas cortas que se escinden en $\sigma[M]$:

Sea $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta que se escinde, es decir, existe $\bar{g} : N \to L$ tal que $g \circ \bar{g} = 1_N$.

Sean $P \in \mathcal{P}$ y $\theta : P \to N$ entonces existe $\bar{\theta} : P \to L$ con $\bar{\theta} = \bar{g} \circ \theta$ tal que

$$\begin{aligned} g \circ \bar{\theta} &= g \circ (\bar{g} \circ \theta) \\ &= (g \circ \bar{g}) \circ \theta \\ &= 1_N \circ \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

por lo tanto el funtor $\mathrm{Hom}(P, \_)$ es exacto en la sucesión.

(3) Sean f y g $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-monos. Probaremos que $g \circ f$ es $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-mono.

Sea $P \in \mathcal{P}$ y para cada epimorfismo $L \xrightarrow{g} N \to 0$ definimos $g_* : \mathrm{Hom}(P, L) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ como $g_*(\theta) = g \circ \theta \ \forall \theta \in \mathrm{Hom}(P, L)$.

Entonces el funtor $\mathrm{Hom}(P, \_)$ es exacto si y solo si g_* es un epimorfismo para todo epimorfismo g, ya que g_* es epimorfismo si dada $\delta : P \to N$ existe $\bar{\delta} : P \to L$ tal que $g_*(\bar{\delta}) = g \circ \bar{\delta} = \delta$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[r, "="] \arrow[d, "f"] & K \arrow[d, "gf"] & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_1"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & N/L \arrow[d, "="] \\ 0 \arrow[r] & L/K \arrow[r] & N/K \arrow[r] & N/L \end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(P, \_)$ obtenemos:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(P, K) \arrow[r, "="] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}(P, K) \arrow[d, "gf_*"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P, L) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "f_{1*}"] & \mathrm{Hom}(P, N) \arrow[r] \arrow[d, "f_{2*}"] & \mathrm{Hom}(P, N/L) \arrow[d, "="] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P, L/K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P, N/K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P, N/L) \end{tikzcd}$$

Pero por hipótesis, f_{1_*} es epimorfismo y entonces por 1.1.11 tenemos que f_{2_*} es epimorfismo. Por lo tanto $(g \circ f)$ es un $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-mono.

De igual forma, si $g \circ f$ es un $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-mono, entonces f_{2_*} es un epimorfismo por lo que por 1.1.11 f_{1_*} es epimorfismo, es decir, f es un $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-mono.

(4) Probaremos que si f y g son $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-epis entonces $f \circ g$ es un $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-epi.

Sean f, g $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$ entonces para $0 \to K \to L \xrightarrow{f} N \to 0$ y $0 \to K' \to N' \xrightarrow{g} L \to 0$ tenemos que

$$f_* : \mathrm{Hom}(P, L) \to \mathrm{Hom}(P, N) \ \text{ y}$$

$$g_* : \mathrm{Hom}(P, N') \to \mathrm{Hom}(P, L)$$

son epimorfismos.

Veamos que $f_* \circ g_* : \mathrm{Hom}(P, N') \to \mathrm{Hom}(P, N)$ es un epimorfismo.

Sea $\theta \in \mathrm{Hom}(P, N)$, debido a que f_* es epimorfismo existe $\theta' \in \mathrm{Hom}(P, L)$ tal que $f_*(\theta') = f \circ \theta' = \theta$ y como $\theta' \in \mathrm{Hom}(P, L)$ y g_* es un epimorfismo existe $\bar{\theta} \in \mathrm{Hom}(P, N')$ tal que $g_*(\bar{\theta}) = g \circ \bar{\theta} = \theta'$, de donde

$$\begin{aligned}(f_* \circ g_*)(\bar{\theta}) &= f_*(g \circ \bar{\theta}) \\ &= f_*(\theta') \\ &= f \circ \theta' \\ &= \theta.\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_* \circ g_*$ es un epimorfismo

$\therefore f \circ g$ es un $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-epi.

Ahora supongamos que $f \circ g$ es un $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-epi, es decir, $f_* \circ g_* : \mathrm{Hom}(P, N') \to \mathrm{Hom}(P, N)$ es un epimorfismo y veamos que $f_* : \mathrm{Hom}(P, L) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ es un epimorfismo.

Sea $\delta \in \mathrm{Hom}(P, N)$ entonces debido a que $f_* \circ g_*$ es un epimorfismo existe $\bar{\delta} \in \mathrm{Hom}(P, N')$ tal que $(f_* \circ g_*)(\bar{\delta}) = f_*(g \circ \bar{\delta}) = f \circ (g \circ \bar{\delta}) = \delta$ pero $(g \circ \bar{\delta}) \in \mathrm{Hom}(P, L)$

por lo tanto $f_*(g \circ \bar{\delta}) = \delta$, es decir, f_* es un epimorfismo.

$\therefore f$ es un $\mathbb{E}^{\mathcal{P}}$-epi.

2.3. Copurezas

Proposición 2.3.1 *Sea $\mathcal{Q}$ una clase de módulos en $\sigma[M]$. Denotemos por $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$ la clase de todas las sucesiones exactas cortas en $\sigma[M]$ en las cuales el funtor Hom(_,Q) es exacto para cada $Q \in \mathcal{Q}$. Entonces $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$ es una clase propia.*

A este tipo de clases se les conoce como Inyectivamente generadas. A sus elementos se les llama sucesiones $\mathcal{Q}$-copuras.

Demostración:

(*1*) Sea $Q \in \mathcal{Q}$ y sea $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta en la cual $\mathrm{Hom}(\_, Q)$ es exacto, entonces para todo $\theta : K \to Q$ existe $\bar{\theta} : L \to Q$ tal que $\bar{\theta} \circ f = \theta$. Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos donde α, β y γ son isomorfismos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] \arrow[u, "\alpha"] & L' \arrow[r, "g'"] \arrow[u, "\beta"] & N' \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"] & 0 \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Sea $\theta : K' \to Q$ y veamos que existe $\bar{\theta} : L' \to Q$ tal que $\bar{\theta} \circ f' = \theta$.

Como α es un isomorfismo existe $\alpha^{-1} : K \to K'$ tal que $\alpha \circ \alpha^{-1} = 1_{K'}$, de donde $\theta \circ \alpha^{-1} : K \to Q$ y por hipótesis existe $\theta' : L \to K'$ tal que $\theta' \circ f = \theta \circ \alpha^{-1}$, por tanto, $(\theta' \circ f) \circ \alpha = \theta$. Pero debido a que el diagrama es conmutativo tenemos que $\theta' \circ (\beta \circ f') = \theta$. Por lo tanto definiendo $\bar{\theta} : L \to Q$ como $\bar{\theta} = \theta' \circ \beta$ tenemos que $\bar{\theta} \circ f' = \theta$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}(\_, Q)$ es exacto en (*1*).

(*2*) Veamos que $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$ contiene a todas las sucesiones exactas cortas que se escinden en $\sigma[M]$.

Sea $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta que se escinde, entonces existe $\bar{f} : L \to K$ tal que $\bar{f} \circ f = 1_K$. Sean $Q \in \mathcal{Q}$ y $\delta : K \to Q$ entonces existe $\bar{\delta} : L \to Q$ definida como $\bar{\delta} = \delta \circ \bar{f}$ tal que $\bar{\delta} \circ f = (\delta \circ \bar{f}) \circ f = \delta$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}(_, Q)$es exacto en la sucesión exacta corta.

(*3*) Sean f y g $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-monos. Veamos que $f \circ g$ es $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-mono.

Sea $0 \to K \to L \to N \to 0$ una sucesión exacta corta y $Q \in \mathcal{Q}$. Condsideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "="] \arrow[d, "f"] & K \arrow[d, "gf"] \\
L \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
L/K & N/K
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha : K \to Q$ entonces por hipótesis existe $\alpha' : L \to Q$ tal que $\alpha' \circ f = \alpha$. Para α', existe $\alpha'' : N \to Q$ tal que $\alpha'' \circ g = \alpha'$. Por lo tanto $\alpha'' \circ g \circ f = \alpha$ y como $\alpha'' : N \to Q$ tenemos que $g \circ f$ es un $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-mono.

Supongamos que $g \circ f$ es un $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-mono. Veamos que f es un $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-mono.

Sea $\alpha : K \to Q$ entonces por hipótesis existe $\alpha' : N \to Q$ tal que $\alpha' \circ g \circ f = \alpha$ y como $\alpha' \circ g : L \to Q$ tenemos que f es un $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-mono.

(*4*) Sean f y g $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-epis. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "1_K"] & U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & U/K \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "gf"] & L/K \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
 & & L/U \arrow[r, "1_{L/U}"] & L/U &
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor Hom(_, Q) con $Q \in \mathcal{Q}$ obtenemos

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}(L/U,Q) \arrow[r, "="] \arrow[d, "g^*"] & \mathrm{Hom}(L/U,Q) \arrow[d, "gf^*"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L/K,Q) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "h^*"] & \mathrm{Hom}(L,Q) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & \mathrm{Hom}(K,Q) \arrow[d, "="] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U/K,Q) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,Q) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K,Q)
\end{tikzcd}$$

donde si $\beta : H \to T$ entonces $\beta^* : \mathrm{Hom}(T,Q) \to \mathrm{Hom}(H,Q)$ es tal que $\beta^*(\theta) = \theta \circ \beta$. De modo que el funtor Hom(_, Q) es exacto si β^* es epi. Entonces por 1.1.11 tenemos que i^* es epi, es decir $g \circ f$ es un $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-epi.

Ahora, si f y g son epimorfismos y $g \circ f$ es un $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-epi, considerando el diagrama anterior y de nuevo 1.1.11 tenemos que g es un $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}$-epi.

2.4. Proyectividad e inyectividad relativa

Definición 2.4.1 *Sea $\mathbb{E}$ una clase propia de sucesiones exactas cortas en $\sigma[M]$. Un módulo $P \in \sigma[M]$ es llamado $\mathbb{E}$-proyectivo si el funtor Hom(P,_) es exacto en todas las sucesiones exactas cortas en $\mathbb{E}$.*

Proposición 2.4.2 *La clase de todas los módulos $\mathbb{E}$-proyectivos es cerrada bajo sumas directas y sumandos directos.*

Demostración:
Sea $\mathbb{E}$ una clase propia y sea $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos $\mathbb{E}$-proyectivos y consideremos a $P = \bigoplus_I P_i$. Como cada P_i es $\mathbb{E}$-proyectivo tenemos que para toda sucesión exacta corta $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ en $\mathbb{E}$ y todo morfismo $\alpha_i : P_i \to N$ existe $\bar{\alpha}_i : P_i \to L$ tal que $g \circ \bar{\alpha}_i = \alpha_i$.

Sea $\alpha : P \to N$ y consideremos $\alpha \circ u_i$ donde $u_i : P_i \to P$ es la inclusión natural, entonces por hipótesis existe $\bar{\alpha}_i : P_i \to L$ tal que $g \circ \bar{\alpha}_i = \alpha \circ u_i$. Pero por la propiedad universal de la suma directa, la familia $\{\bar{\alpha}_i\}$ induce un único morfismo $\bar{\alpha} : P \to L$ tal que $\bar{\alpha} \circ u_i = \bar{\alpha}_i$.

Veamos que $g \circ \bar{\alpha} = \alpha$. Entonces por la propiedad universal de la suma directa basta probar que $g \circ \bar{\alpha} \circ u_i = \alpha \circ u_i$ para todo $i \in I$. Pero,

$$\begin{aligned} g \circ \bar{\alpha} \circ u_i &= g \circ \bar{\alpha}_i \\ &= \alpha \circ u_i \end{aligned}$$

Por lo tanto $g \circ \bar{\alpha} = \alpha$. $\therefore$ P es $\mathbb{E}$-proyectivo.

Además, si $H \subseteq P$ es un sumando directo con $P = H \oplus H'$, veamos que H es $\mathbb{E}$-proyectivo.

Sea $\alpha : H \to N$ y consideramos $\alpha \circ \pi_H$, donde $\pi_H : P \to H$ es la proyección canónica, entonces por hipótesis existe $\delta : P \to L$ tal que $\alpha \circ \pi_H = g \circ \delta$, de modo que si definimos $\bar{\alpha} : H \to L$ como $\bar{\alpha} = \delta \circ u_H$ tenemos que

$$\begin{aligned} g \circ \bar{\alpha} &= g \circ (\delta \circ u_H) \\ &= \alpha \circ (\pi_H \circ u_H) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$\therefore$ H es $\mathbb{E}$-proyectivo.

Definición 2.4.3 *Un módulo $Q \in \sigma[M]$ es llamado $\mathbb{E}$-inyectivo si el funtor Hom(_,Q) es exacto en todas las sucesiones exactas cortas en $\mathbb{E}$.*

Proposición 2.4.4 *La clase de todos los módulos $\mathbb{E}$-inyectivos es cerrada bajo productos directos y sumandos directos.*

Demostración:
Sea $\mathbb{E}$ una clase propia y sea $\{Q_i\}$ una familia de módulos $\mathbb{E}$-inyectivos y consideremos a $Q = \prod Q_i$. Como cada Q_i es $\mathbb{E}$-inyectivo tenemos que para toda sucesión exacta corta $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ en $\mathbb{E}$ y todo morfismo $\theta : K \to Q_i$ existe un morfismo $\bar{\theta} : L \to Q_i$ tal que $\bar{\theta} \circ f = \theta_i$.

Sea $\theta : K \to Q$ entonces para $\pi_i \circ \theta$ existe, por hipótesis, $\bar{\theta}_i : L \to Q_i$ tal que $\bar{\theta}_i \circ f = \pi_i \circ \theta$, de donde por la propiedad universal del producto directo, la familia $\{\bar{\theta}_i\}$ induce un único morfismo $\bar{\theta} : L \to Q$ tal que $\pi_i \circ \bar{\theta} = \bar{\theta}_i$.

Pero,

$$\begin{aligned} \pi_i \circ (\bar{\theta} \circ f) &= \bar{\theta}_i \circ f \\ &= \pi_i \circ \theta \qquad\qquad \text{para todo } \ i \in I \end{aligned}$$

entonces por la propiedad universal del producto directo tenemos que $\bar{\theta} \circ f = \theta$. Por lo tanto, Q es $\mathbb{E}$-inyectivo.

Además, si H es un sumando directo de Q, con $Q = H \oplus H'$, si $\theta : K \to H$ es un morfismo, considero $\pi_H \circ \theta$ que por hipótesis existe $\delta : L \to Q$ tal que $\delta \circ f = \pi_N \circ \theta$. De donde definiendo $\bar{\theta} : L \to H$ como $\bar{\theta} = u_N \circ \delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\theta} \circ f &= u_N \circ (\delta \circ f) \\ &= (u_N \circ \pi_N) \circ \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

$\therefore$ H es $\mathbb{E}$-inyectivo.

2.5. Clases de submódulos que son complementos

Teorema 2.5.1 *Sea $\mathbb{E}_c$ la clase de sucesiones exactas cortas $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ en $\sigma[M]$ tales que $K \subseteq L$ es un pseudocomplemento en L. Entonces:*

1. *$\mathbb{E}_c$ es una clase propia en $\sigma[M]$*
2. *Todo módulo (semi-)simple en $\sigma[M]$ es $\mathbb{E}_c$-proyectivo.*

Demostración : (*1*)

(i) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & L' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

donde α, β y γ son isomorfismos.

Supongamos que K es un pseudocomplemento en L, entonces por 1.2.19 K es cerrado en L. Supongamos que K' no es cerrado en L', es decir, existe $H' \subset L'$ tal que $K' \trianglelefteq H'$.

Considerando $\beta|_{\beta^{-1}(H')} : \beta^{-1}(H') \to H'$ por 1.2.14 tenemos que $\beta^{-1}(K') \trianglelefteq \beta^{-1}(H')$. De donde, $K \trianglelefteq \beta^{-1}(H')$ lo cual no es posible.

Por lo tanto K' es cerrado en L'.

(ii) Sea $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta que se escinde en $\sigma[M]$, entonces $L = K \oplus U$ para algún $U \subseteq L$ con $U \cong N$ y en particular $K \cap U = 0$.

Para ver que U es maximo supongamos que $K \cap U' = 0$ con $U \subseteq U'$, entonces

$$\begin{aligned}
U &= (K \cap U') + U \\
&= (K + U) \cap U' && \text{por la ley modular} \\
&= L \cap U' \\
&= U'
\end{aligned}$$

por lo tanto U es maximo con $K \cap U = 0$, es decir, K es un pseudocomplemento en L.

(iii) Sea $K \subseteq L \subseteq N$. Por 1.2.19 K es pseudocomplemento si y solo si K es cerrado, entonces si K es cerrado en N, veamos que K es cerrado en L.

Como K es cerrado en N entonces K no tiene extensiones esenciales propias en N, y debido a que $K \trianglelefteq \hat{K}$, donde $\hat{K}$ es la cápsula inyectiva de K en $\sigma[M]$, y $\hat{K} \cap N \subseteq N$ entonces $K \trianglelefteq \hat{K} \cap N \subseteq N$ implica que $K = \hat{K} \cap N$.

Como $L \subseteq N$ se tiene que $\hat{K} \cap L \subseteq \hat{K} \cap N$ y debido a que $\hat{K} \cap N = K \subseteq L$ obtenemos que $\hat{K} \cap N \subseteq \hat{K} \cap L$. Por lo tanto $K = \hat{K} \cap N = \hat{K} \cap L$, es decir, por 1.2.19 K es cerrado en L.

Por otro lado, sean $K \subseteq L$ y $L \subseteq N$ submódulos cerrados y veamos que K es cerrado en N. Eligiendo $\hat{K} \subseteq \hat{L} \subseteq \hat{N}$ tenemos que $K = \hat{K} \cap L = \hat{K} \cap \hat{L} \cap N = \hat{K} \cap N$ por lo tanto K es cerrado en N.

(iv) Considere el diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "1_K"] & U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & U/K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "hg"] & L/K \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
 & & L/U \arrow[r, "1_{L/U}"] & L/U &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que h y g tienen núcleos cerrados, es decir, no tienen extensiones esenciales propias y supongamos que $U = \text{Nuc}(hg)$ no es cerrado en L, esto implica que U tiene una extensión esencial propia en L entonces denotemos por $\bar{U}$ la cerradura esencial de U en L. Debido a esto K es cerrado en $\bar{U}$ y $\text{Nuc}(h) = U/K \trianglelefteq \bar{U}/K$, lo cual es una contradicción porque U/K es cerrado en L/K. Por lo tanto U es cerrado en L.

Ahora supongamos que $U = \text{Nuc}(hg)$ es cerrado y además supongamos que $U/K = \text{Nuc}(h)$ no es cerrado, es decir, tiene una extensión esencial propia V en L/K, es decir, $\text{Nuc}(h) \trianglelefteq V$ y considerando la restricción $g|_{g^{-1}(V)} : g^{-1}(V) \to V$ por 1.2.14 tenemos que $g^{-1}(\text{Nuc}(h)) \trianglelefteq g^{-1}(V)$ pero $g^{-1}(\text{Nuc}(h)) = \{x \in L : g(x) \in \text{Nuc}(h)\} = \{x \in L : hg(x) = 0\} = U$ de donde $U = g^{-1}(\text{Nuc}(h)) \trianglelefteq g^{-1}(V)$ contradiciendo que U es cerrado. Por lo tanto U/K es cerrado en L/K.

(*2*) Sea $K \subseteq L$ un submódulo cerrado y $S \subseteq L/K$ un submódulo simple. Entonces $S \simeq N/K$ para algún submódulo $K \subseteq N \subseteq L$. De donde K es máximo en N y por ser cerrado en L no es esencial en N. Entonces, existe $0 \neq H \subseteq N$ tal que $H \cap K = 0$. Además, como $(K + H)/K \neq 0$ y N/K es simple entonces $(K + H)/K = N/K$ y por lo tanto $K + H = N$. Por lo tanto K es un sumando directo, de donde $N \to N/K$ se escinde, es decir, N/K es proyectivo relativo a $L \to L/K$. Por lo tanto $N/K \simeq S$ es $\mathbb{E}_c$-proyectivo.

Por 2.4.2 se sigue que todo módulo semisimple es $\mathbb{E}_c$-proyectivo.

2.6. Submódulos τ-complementos

Teorema 2.6.1 (Caracterización de τ-complementos) *Sea τ un prerradical idempotente en $\sigma[M]$ con clases asociadas $\mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{F}_\tau$. Entonces para un submódulo $K \subseteq L$ donde $L \in \sigma[M]$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Todo $N \in \mathbb{T}_\tau$ es proyectivo respecto a la proyección $L \to L/K$

(b) Existe un submódulo $U \subseteq L$ tal que $K \cap U = 0$ y $\tau(L/K) = (U + K)/K \cong U$

(c) Existe un submódulo $U \subseteq L$ tal que $K \cap U = 0$ y $\tau(L/K) \subseteq (U+K)/K \cong U$.

Si K satisface estas condiciones, entonces K es llamado un τ-complemento en L.

Se observa que la clase de sucesiones exactas cortas $0 \to K \to L \to N \to 0$ donde K es un τ-complemento en L es proyectivamente generada en el sentido de 2.2.1.

Demostración:
$(a) \Rightarrow (b)$
Para

$$\begin{tikzcd} & \tau(L/K) \arrow[d] \\ L \arrow[r] & L/K \end{tikzcd}$$

obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos mediante producto fibrado

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i_K"] \arrow[d, "1_K"] & \tilde{K} \arrow[r] \arrow[d] & \tau(L/K) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] & L/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Como τ es un prerradical idempotente se tiene que $\tau(\tau(L/K)) = \tau(L/K)$, es decir $\tau(L/K) \in \mathbb{T}_\tau$,entonces por hipótesis $\tau(L/K)$ es proyectivo relativo a $L \to L/K$ de donde, existe $h : \tau(L/K) \to L$ tal que $i = g \circ h$. Entonces por 1.1.11, existe $f : \tilde{K} \to K$ tal que $1_K = f \circ i_K$, de donde la sucesión (1) se escinde, por lo tanto tenemos que,

$$\tilde{K} = K \oplus U \text{ para algún } U \subseteq \tilde{K} \text{ y } (K+U)/K = \tau(L/K)$$

$\therefore$ existe $U \subseteq L$ tal que $K \cap U = 0$ y $\tau(L/K) = (K+U)/K$.
$(b) \Rightarrow (a)$
Sea $N \in \mathbb{T}_\tau$,es decir, $\tau(N) = N$ y $f : N \to L/K$. Como τ es un prerradical $f(\tau(N)) \subseteq \tau(L/K)$ pero $f(\tau(N)) = f(N) = \mathrm{Im}(f)$, por lo tanto $\mathrm{Im}(f) \subseteq \tau(L/K)$. Entonces por el teorema del factor, existe $\alpha : N \to \tau(L/K)$ tal que $f = i \circ \alpha$.

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "f"] \\ & \tau(L/K) \arrow[dl, "h"'] & \\ L \arrow[rr, "g"'] & & L/K \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, definiendo $h' : N \to L$ como $h' = h \circ \alpha$, donde $h : \tau(L/K) \to L$ es dado en $(a) \Rightarrow (b)$ tal que $i = g \circ h$, tenemos que

$$\begin{aligned} g \circ h' &= g \circ (h \circ \alpha) \\ &= (g \circ h) \circ \alpha \\ &= i \circ \alpha && \text{pues } i = g \circ h \\ &= f \end{aligned}$$

$\therefore N$ es proyectivo relativo a $L \to L/K$.
$(c) \Rightarrow (b)$
Sea $U' = \tau(U)$.
Primero

$$\begin{aligned} K \cap U' &= K \cap \tau(U) \\ &\subseteq K \cap U && \text{pues } \tau(U) \subseteq U \\ &= 0 && \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

$\therefore K \cap U' = 0$.

Ahora,como $U = (U + K)/K \subseteq (L + K)/K \subseteq L/K$ entonces $\tau(U) \subseteq \tau(L/K)$, por otro lado, debido a que por hipótesis $\tau(L/K) \subseteq U$ y τ es idempotente $\tau(L/K) = \tau(\tau(L/K)) \subseteq \tau(U)$.
Por lo tanto $U' = \tau(U) = \tau(L/K)$.
$(b) \Rightarrow (c)$
Directo de la hipótesis.

Corolario 2.6.2 *Sea τ un prerradical para $\sigma[M]$ y $K \subseteq L$ donde $L \in \sigma[M]$. Entonces:*

1. *Si K es un τ-complemento en L y $L/K \in \mathbb{T}_\tau$, entonces K es un sumando directo de L.*

2. *Si $L \in \mathbb{T}_\tau$, entonces todo τ-complemento en L es un sumando directo.*

Demostración : (*1*) Como K es un τ-complemento y $L/K \in \mathbb{T}_\tau$, entonces por 2.6.1

$$L = K \oplus U,$$

por lo tanto K es sumando directo de L.

(*2*) Sea K un τ-complemento en L, entonces como $L \in \mathbb{T}_\tau$ tenemos que $L/K \in \mathbb{T}_\tau$, entonces por (*1*) K es sumando directo de L.

2.7. Submódulos nítidos

En particular, para $\tau = \text{Zoc}(\_)$ tenemos lo siguiente:

Definición 2.7.1 *Un monomorfismo $f : K \to L$ es llamado nítido si todo módulo simple S es proyectivo respecto a $L \to L/Im(f)$, es decir, $Hom(S, L) \to Hom(S, L/Im(f)) \to 0$ es exacto.*

Por 2.2.1 tenemos que la clase de sucesiones exactas cortas con monomorfismos nítidos es Proyectivamente generada.

Teorema 2.7.2 (Submódulos nítidos que son cerrados) *Para un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) todo submódulo nítido de M es cerrado

(b) un submódulo de M es cerrado si y solo si es nítido

(c) para todo $L \in \sigma[M]$, submódulos nítidos de L son cerrados

(d) para todo submódulo esencial $U \subseteq M$, $Zoc(M/U) \neq 0$

(e) todo módulo M-singular es semiartiniano.

Demostración :

$(a) \Rightarrow (b)$

Por (a) basta probar que todo submódulo cerrado es nítido.

Sea $K \subseteq M$ un submódulo cerrado, entonces por 2.5.1 para todo módulo simple S tenemos que $\text{Hom}(S, M) \to \text{Hom}(S, M/K)$ es exacto, y por tanto K es nítido.

$(b) \Rightarrow (a)$

Sea K un submódulo de M entonces por hipótesis K es nítido y cerrado.

$(c) \Rightarrow (a)$

Directo de la hipótesis.

$(a) \Rightarrow (d)$

Sea U un submódulo propio esencial de M, es decir, $U \trianglelefteq M$ de donde U tiene extensiones esenciales propias por tanto no es cerrado y por (a) no es nítido en M, entonces existe $g : S \to M/U$ donde S es un módulo simple, tal que no puede ser levantado a un morfismo $f : S \to M$. Entonces, si $\text{Im}(g) = 0$ existiría el morfismo "cero" que haría posible tal extensión contradiciendo la hipótesis, por lo tanto $\text{Im}(g) \neq 0$, es decir, $\text{Zoc}(M/U) \neq 0$

$(d) \Rightarrow (e)$

Sea M/U un módulo M-singular, entonces $U \trianglelefteq M$. Consideremos un cociente propio de M/U, digamos M/V con $U \subseteq V \subseteq M$. Como $U \trianglelefteq M$ por 1.2.14 $V \trianglelefteq M$. Por lo tanto M/V es M-singular y por hipótesis $\text{Zoc}(M/V) \neq 0$, es decir, M/U es semiartiniano. Por

1.2.38 $\{M/U : U \trianglelefteq M\}$ es un conjunto de generadores para los módulos M-generados M-singulares y de nuevo por 1.2.38 todo módulo M-singular es un submódulo de un módulo M-generado M-singular. Por lo tanto si todos los módulos M/U con $U \trianglelefteq M$ tienen $\mathrm{Zoc}(M/U) \neq 0$ entonces todos los módulos M-singulares tienen $\mathrm{Zoc}(M/U) \neq 0$ para todo $U \subseteq M$, por lo tanto todo módulo M-singular es semi artiniano.

$(e) \Rightarrow (c)$ Sea $K \subseteq L$ un submódulo nítido y supongamos que tiene una extensión esencial propia $\bar{K} \subseteq L$. Entonces $\bar{K}/K$ es un submódulo M-singular, entonces por hipótesis, contiene un submódulo simple $S = N/K$ donde $K \trianglelefteq N \subseteq \bar{K}$. Pero como K es nítido en L entonces el morfismo $N \to N/K = S$ se escinde, lo cual nos lleva a una contradicción porque $K \trianglelefteq N$. Por lo tanto K es cerrado en L.

En particular, cuando $M = R$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.3 (Submódulos nítidos que son cerrados en R-Mod) *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) todo ideal izquierdo nítido de R es cerrado

(b) un ideal izquierdo de R es cerrado si y solo si es nítido

(c) para todo R-módulo izquierdo, submódulos nítidos son cerrados

(d) para todo ideal izquierdo esencial $I \subseteq R$, $Zoc(R/I) \neq 0$

(e) todo módulo singular es semiartiniano.

2.8. Submódulos que son τ-suplementos

Teorema 2.8.1 (Caracterización de τ-suplementos) *Sea τ un radical para $\sigma[M]$ con clases asociadas $\mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{F}_\tau$. Entonces para un submódulo $K \subseteq L$, donde $L \in \sigma[M]$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) todo $N \in \mathbb{F}_\tau$ es inyectivo respecto a la inclusión $K \to L$

(b) existe un submódulo $U \subseteq L$ tal que $K + U = L$ y $U \cap K = \tau(K)$

(c) existe un submódulo $U \subseteq L$ tal que $K + U = L$ y $U \cap K \subseteq \tau(K)$.

Si estas condiciones se satisfacen K es llamado un τ-suplemento.

Se observa que la clase de sucesiones exactas cortas $0 \to K \to L \to N \to 0$ donde K es un τ-suplemento en L es inyectivamente generada en el sentido de 2.3.1.

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & L \arrow[r] \arrow[d] & L/K \arrow[r] \arrow[d, "1_{L/K}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K/\tau(K) \arrow[r] & L/\tau(K) \arrow[r, "g"] & L/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

Como τ es un radical tenemos que $\tau(K/\tau(K)) = 0$, es decir, $K/\tau(K) \in \mathbb{F}_\tau$,entonces por hipótesis es inyectivo relativo a $K \to L$ de donde, existe $h : L \to K/\tau(K)$ tal que $p = h \circ i$.

Ahora, por 1.1.11, existe $f : L/K \to L/\tau(K)$ tal que $g \circ f = \mathit{1}_{L/K}$ y esto implica que el renglón (*1*) se escinde, por lo tanto

$$L/\tau(K) = K/\tau(K) \oplus U/\tau(K), \text{ para algún } \tau(K) \subseteq U \subseteq L$$

$\therefore L = K + U$ y $U \cap K = \tau(K)$.
$(b) \Rightarrow (a)$
Sean $N \in \mathbb{F}_\tau$ y $f : K \to N$, como τ es un radical obtenemos que $f(\tau(K)) \subseteq \tau(N) = 0$, es decir, $\tau(K) \subseteq \mathrm{Nuc}(f)$, y esto implica, por el lema del factor, que existe $\bar{f} : K/\tau(K) \to N$ tal que $f = \bar{f} \circ p$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "f"] & & L \arrow[dl, "h"'] \\
& K/\tau(K) \arrow[dl, "\bar{f}"'] & \\
N & &
\end{tikzcd}$$

Usando el morfismo $h : L \to K/\tau(K)$ definido en $(a) \Rightarrow (b)$ que satisface $p = h \circ i$, definimos $\bar{h} : L \to N$ como $\bar{h} = \bar{f} \circ h$, de modo que

$$\begin{aligned} \bar{h} \circ i &= \bar{f} \circ (h \circ i) \\ &= \bar{f} \circ p \\ &= f \end{aligned}$$

$\therefore N$ es inyectivo relativo a $K \to L$.
$(c) \Rightarrow (b)$
Supongamos que $L = K + U$ y $K \cap U \subseteq \tau(K)$.

Definamos a $U' = U + \tau(K)$ y vemos que
$K + U' = K + U + \tau(K) = K + U = L$ por tanto $K + U' = L$

$K \cap U' = K \cap U + \tau(K) = \tau(K) + \tau(K) = \tau(K)$ por lo tanto $K \cap U' = \tau(K)$.

$(b) \Rightarrow (c)$
Directo de la hipótesis.

Corolario 2.8.2 *Sea τ un radical para $\sigma[M]$ y $K \subseteq L$ donde $L \in \sigma[M]$. Entonces*

1. *Si K es un τ-suplemento en L y $K \in \mathbb{F}_\tau$, entonces K es un sumando directo de L*
2. *Si $L \in \mathbb{F}_\tau$, entonces todo submódulo que es un τ-suplemento de L es un sumando directo*
3. *Si K es un τ-suplemento en L y $X \subseteq K$, entonces K/X es un τ-suplemento en L/X.*

Demostración:
(*1*) Como K es un τ-suplemento en L tenemos que $L = K + U$ para algún $U \subseteq L$ y $K \cap U \subseteq \tau(K)$ pero ya que $K \in \mathbb{F}_\tau$ obtenemos que $K \cap U \subseteq \tau(K) = 0$, es decir, K es un sumando directo de L.

(*2*) Sea K un τ-suplemento de L, entonces $L = K + L$ y $K \cap L \subseteq \tau(K) \subseteq \tau(L) = 0$ pues L es τ-libre de torsión. Por lo tanto K es sumando directo de L.

(*3*) Sea K un τ-suplemento en L, es decir, $L = K + U$ para algún $U \subseteq L$ y $K \cap U \subseteq \tau(K)$.

Entonces como $X \subseteq K$ tenemos que $K + (U + X) = L$, de donde

$$K/X + (U+X)/X = L/X$$

y

$$\begin{aligned} (K/X) \cap [(U+X)]/X &= ((K \cap U) + X)/X \\ &\subseteq (\tau(K) + X)/X && \text{ya que } K \cap U \subseteq \tau(K) \\ &\subseteq \tau((K+X)/X) && \text{porque } \tau \text{ es un radical} \\ &= \tau(K/X). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(K/X) \cap [(U+X)/X] \subseteq \tau(K/X)$
$\therefore K/X$ es un τ-suplemento en L/X.

2.9. Submódulos conítidos

En particular, para $\tau = \mathrm{Rad}(\_)$ tenemos lo siguiente:

Definición 2.9.1 *Un monomorfismo $f : K \to L$ es llamado conítido si todo módulo Q con Rad(Q) = 0 es inyectivo relativo a $K \to L$, es decir, Hom(L, Q) $\to$Hom(K, Q) $\to 0$ es exacto.*

Por 2.3.1, la clase de sucesiones exactas cortas con monomorfismos conítidos es Inyectivamente generada.

Teorema 2.9.2 (Caracterización de submódulos conítidos) *Para un submódulo $K \subseteq L$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $K \to L$ *es un submódulo conítido*

(b) existe un submódulo $U \subseteq L$ tal que $K + U = L$ y $U \cap K = Rad(K)$

(c) existe un submódulo $U \subseteq L$ tal que $K + U = L$ y $U \cap K \subseteq Rad(K)$.

Si estas condiciones se satisfacen K es llamado un Rad-suplemento en L.

Demostración:
$(a) \Rightarrow (b)$
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & L \arrow[r] \arrow[d] & L/K \arrow[r] \arrow[d, "1_{L/K}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K/\mathrm{Rad}(K) \arrow[r] & L/\mathrm{Rad}(K) \arrow[r, "\pi"'] & L/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

Como $\mathrm{Rad}(K/\mathrm{Rad}(K)) = 0$ entonces $K/\mathrm{Rad}(K)$ es inyectivo relativo a $K \to L$ de donde existe $h : L \to K/\mathrm{Rad}(K)$ tal que $h \circ f = p$ y por 1.1.11 existe $g : L/K \to L/\mathrm{Rad}(K)$ tal que $\pi \circ g = 1_{L/K}$ por lo tanto la sucesión exacta corta (1) se escinde, de donde

$$L/\mathrm{Rad}(K) = K/\mathrm{Rad}(K) \oplus U/\mathrm{Rad}(K) \text{ para algún } U \subseteq L$$

por lo tanto $L = K + U$ con $K \cap U = \mathrm{Rad}(K)$.
$(b) \Rightarrow (a)$
Como $L/\mathrm{Rad}(K) = K/\mathrm{Rad}(K) \oplus U/\mathrm{Rad}(K)$ entonces esto nos da un morfismo $h : L \to K/\mathrm{Rad}(K)$ dado por $h(k) = k + \mathrm{Rad}(K)$ para todo $k \in K$.

Sea $f : K \to N$ con $\mathrm{Rad}(N) = 0$. Veamos que N es inyectivo relativo a $K \to L$. Debido a que $f(\mathrm{Rad}(K)) \leq \mathrm{Rad}(N) = 0$ entonces $\mathrm{Rad}(K) \subseteq \mathrm{Nuc}(f)$ por lo tanto por el teorema del factor existe $f' : K/\mathrm{Rad}(K) \to N$ tal que $f = f' \circ p$ de donde definimos a $h' : L \to N$ como $h' = f' \circ h$ y entonces $h'|_K = f$, es decir, $h' \circ i = f' \circ h \circ i = f' \circ p = f$ por lo tanto N es inyectivo relativo a $K \to L$ por lo tanto K es conítido.
$(b) \Rightarrow (c)$
Por hipótesis.

$(c) \Rightarrow (b)$
Sea $U' = U+$ Rad(K).

Tenemos que

$$\begin{aligned} K + U' &= K + U + \mathrm{Rad}(K) \\ &= L + \mathrm{Rad}(K) \\ &= L \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} U' \cap K &= (U + \mathrm{Rad}(K)) \cap K \\ &= U \cap K + \mathrm{Rad}(K) \\ &= \mathrm{Rad}(K). \end{aligned}$$

Observación 2.9.3 *$K \in R$-Mod se dice que es un suplemento para N en M si $M = K + N$ y $K \cap N \ll K$. De aquí se tiene que todo suplemento es un Rad-suplemento. Más aún, si Rad$(K) \ll K$ entonces K es un suplemento en M si y sólo si K es un Rad-suplemento en M.*

Lema 2.9.4 *Un submódulo superfluo N de un módulo L es conítido en L si y solo si Rad$(N) = N$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $N \ll L$ y supongamos que N es conítido en L, entonces por 2.9.2 existe $K \subseteq L$ tal que $L = N + K$ con $N \cap K = \mathrm{Rad}(N)$ pero como $N \ll L$ y $L = N + K$ tenemos que $K = L$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} N &= N \cap L \\ &= \mathrm{Rad}(N). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $N \ll L$ y que $\mathrm{Rad}(N) = N$ entonces $L = N + L$ y $N \cap L = N = \mathrm{Rad}(N)$, es decir, N es conítido en L.

Teorema 2.9.5 (Submódulos conítidos que son cocerrados) *Sea M un módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) todo submódulo distinto de cero conítido de un módulo $L \in \sigma[M]$ es un submódulo cocerrado

(b) todo módulo distinto de cero M-superfluo en $\sigma[M]$ es un módulo Max.

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea $N \ll L$ y supongamos que N no tiene submódulos máximos, luego, $\mathrm{Rad}(N) = N$. Entonces por 2.9.4 N es un submódulo conítido de L. Pero por (a) tenemos que N es cocerrado y por tanto no es esencial en L lo cual es una contradicción. Por lo tanto N es un módulo Max.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea N un submódulo conítido de L.

Sea $K \subseteq L$ tal que $N + K = L$ y $N \cap K = \mathrm{Rad}(N)$. Entonces $N/U + (K+U)/U = L/U$ y entonces $N/U+(K+U)/U = ((N+K)+U)/U = (\mathrm{Rad}(N)+U)/U \subseteq \mathrm{Rad}(N)/U$. Por lo tanto, N/U es conítido en M/U. Ahora, supongamos que $N/U \ll L/U$, entonces por 2.9.4 $\mathrm{Rad}(N/U) = N/U$. Pero por hipótesis N/U es un módulo Max, es decir, tiene un submódulo propio máximo. Por lo tanto N/U no es superfluo en L/U por lo que N es cocerrado en L.

Capítulo 3

Módulos τ-suplementados

A lo largo de este capítulo τ denotará un radical en $\sigma[M]$. Diremos que un módulo es τ-suplementado si todo submódulo tiene un τ-suplemento. Se establecen propiedades de este tipo de módulos. Como una aplicación, se relacionan a los τ-suplementos con otros conceptos: módulos τ-elevables, τ-cubiertas proyectivas y módulos τ-semiperfectos.

3.1. Módulos τ-suplementados

Definición 3.1.1 *Un módulo L en $\sigma[M]$ es llamado τ-suplementado si todo submódulo $K \subseteq L$ tiene un τ-suplemento en L.*

Teorema 3.1.2 (Propiedades de módulos τ-suplementados) *Sea L un módulo τ-suplementado en $\sigma[M]$. Entonces:*

(1.a) todo submódulo $K \subseteq L$ con $K \cap \tau(L) = 0$ es un sumando directo.

(1.b) si $L \in \mathbb{F}_\tau$, entonces L es semisimple

(2.a) todo módulo cociente de L es τ-suplementado

(2.b) todo sumando directo de L es τ-suplementado

(3) $L/\tau(L)$ es un módulo semisimple

(4) $L = U \oplus N$ donde N es semisimple y $\tau(U) \trianglelefteq U$

Demostración:

(*1.a*) Sea K un submódulo de L tal que $K \cap \tau(L) = 0$. Sabemos que $\tau(K) \subseteq K$ y debido a que $K \subseteq L$ obtenemos que $\tau(K) \subseteq \tau(L)$ de donde

$$\begin{aligned} \tau(K) &\subseteq K \cap \tau(L) \\ &= 0 && \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

es decir,$K \in \mathbb{F}_\tau$ y como L es τ-suplementado tenemos que K es un τ-suplemento en L, entonces por 2.8.2 K es un sumando directo de L.

(*1.b*) Si $\tau(L) = 0$ entonces por 2.8.2 todo submódulo de L es sumando directo por lo tanto L es semisimple.

(*2.a*) Sea L/K un módulo cociente de L .
Para mostrar que L/K es τ-suplementado veamos que todo submódulo N/K de L/K es un τ-suplemento en L/K.

Sea $N/K \subseteq L/K$, como $N \subseteq L$ y L es τ-suplementado tenemos que N es un τ-suplemento en L y ya que $K \subseteq N$ de 2.8.2 obtenemos que N/K es un τ-suplemento en L/K, lo cual muestra que todo submódulo de L/K es un τ-suplemento.
Por lo tanto L/K es τ-suplementado.

(*2.b*) Sea $K \subseteq L$ un sumando directo con $L = K \oplus K'$. Entonces por (2.a) $L/K' \simeq K$ es τ-suplementado.

(*3*) Sea $K/\tau(L)$ un submódulo de $L/\tau(L)$ donde $\tau(L) \subseteq K \subseteq L$ es un submódulo de L, como τ es un radical se sigue que $L/\tau(L)$ es τ-libre de torsión, es decir, $\tau(L/\tau(L)) = 0$ entonces por (*2.a*) $K/\tau(L)$ es un τ-suplemento en $L/\tau(L)$ y por 2.8.2 $K/\tau(L)$ es un sumando directo de $L/\tau(L)$.
Por lo tanto $L/\tau(L)$ es semisimple.

(*4*) Por 1.2.17 todo submódulo tiene un pseudocomplemento, entonces sea N un pseudocomplemento para $\tau(L)$, es decir, $N \cap \tau(L) = 0$ y por 1.2.18 $N + \tau(L) \trianglelefteq L$ de donde $N \oplus \tau(L) \trianglelefteq L$.

Ahora, debido a que $N \subseteq L$ tenemos que $\tau(N) \subseteq (N \cap \tau(L)) = 0$, por tanto $\tau(N) = 0$.

Como L es τ-suplementado entonces para $N \subseteq L$ existe $U \subseteq L$ tal que $N + U = L$ y $N \cap U \subseteq \tau(U)$. De donde $N \cap U = N \cap (N \cap U) \subseteq N \cap \tau(U) \subseteq N \cap \tau(L) = 0$

Entonces de lo anterior y por 1.2.18 tenemos que $N \oplus \tau(U) \trianglelefteq N \oplus U$ y por 1.2.21 $\tau(U) \trianglelefteq U$ y debido a que N es τ-libre de torsión por (*1*) N es semisimple.

Teorema 3.1.3 (Sumas de módulos τ-suplementados) *Sea L en $\sigma[M]$. Entonces:*

1. *sean $L_1, U \subseteq L$ submódulos donde L_1 es τ-suplementado. Si $L_1 + U$ tiene un τ-suplemento en L, entonces U tiene un τ-suplemento en L*

2. *si L_1 y L_2 son submódulos τ-suplementados en $\sigma[M]$ y $L = L_1 + L_2$, entonces L es τ-suplementado*

3. *toda suma finita de submódulos τ-suplementados es τ-suplementado*

4. *si L es τ-suplementado, entonces todo módulo finitamente L-generado es τ-suplementado.*

Demostración:

(*1*) Como $L_1 + U$ tiene un τ-suplemento en L existe $X \subseteq L$ tal que $(L_1 + U) + X = L$ y $(L_1 + U) \cap X \subseteq \tau(X)$. Debido a que L_1 es τ-suplementado todo submódulo de L_1

tiene un τ-suplemento en L_1, en particular, para $(U+X)\cap L_1 \subseteq L_1$ existe $Y \subseteq L_1$ tal que $[(U+X)\cap L_1]+Y = L_1$ y $(U+X)\cap L_1 \cap Y \subseteq \tau(Y)$ y como $Y \subseteq L_1$ entonces $(U+X)\cap Y \subseteq \tau(Y)$.

Como

$$\begin{aligned} L &= U+X+L_1 \\ &= U+X+[(U+X)\cap L_1]+Y \\ &= U+X+Y && \text{porque } (U+X)\cap L_1 \subseteq U+X \end{aligned}$$

entonces $L = U+X+Y$ y como $(U+X)\cap Y \subseteq \tau(Y)$, de donde, Y es un τ-suplemento para $U+X$ en L.

Para probar que $X+Y$ es un τ-suplemento para U en L falta ver que $U\cap(X+Y) \subseteq \tau(X+Y)$.

Como $Y \subseteq L_1$ entonces $Y+U \subseteq L_1+U$ de donde

$$\begin{aligned} X\cap Y+U &\subseteq X\cap L_1+U \\ &\subseteq \tau(X) && \text{por ser } X \ \tau\text{-suplemento de } L_1+U \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(X+Y)\cap U \subseteq X\cap(Y+U)+Y\cap(X+U)$$

ya que si $u = x+y \in (X+Y)\cap U$ entonces $x = u-y$ Además, $y = u-x$ de donde $u = x+y = u-y+u-x \in X\cap(Y+U)+Y\cap(X+U)$ y como $X\cap(Y+U) \subseteq \tau(X)$ y $Y\cap(X+U) \subseteq \tau(Y)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} X\cap(Y+U)+Y\cap(X+U) &\subseteq \tau(X)+\tau(Y) \\ &\subseteq \tau(X+Y) && \text{porque } X \subseteq X+Y \Rightarrow \tau(X) \subseteq \tau(X+Y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(X+Y)\cap U \subseteq \tau(X+Y)$ y $L = X+Y+U$.
$\therefore$ U tiene un τ-suplemento en L.

(*2*) Sean L_1 y L_2 módulos τ-suplementados y sea U un submódulo de L. Como $L = L_1+L_2$ entonces $L = L_1+L_2+U$ tiene un τ-suplemento trivial en L y debido a que L_1 es τ-suplementado y $L = L_1+L_2+U$ tiene un τ-suplemento en L por (*1*) L_2+U tiene un τ-suplemento en L y como L_2 es τ-suplementado de nuevo por (*1*) tenemos que U tiene un τ-suplemento en L.
por lo tanto todo submódulo de L tiene un τ-suplemento en L
$\therefore$ L es τ-suplementado.

(*3*) Por inducción sobre el número su submódulos τ-suplementados.

Para $n=2$, si L_1, L_2 son submódulos τ-suplementados en $\sigma[M]$ entonces por (*2*) L_1+L_2 es τ-suplementado.

Ahora, sean $L_1, L_2, ..., L_{n+1}$ submódulos τ-suplementados en $\sigma[M]$. Por hipótesis de inducción $L_1+L_2+...+L_n$ es τ-suplementado, luego de nuevo por (*2*) $(L_1+$

$L_2 + ... + L_n) + L_{n+1}$ es τ-suplementado. Por lo tanto toda suma finita de submódulos τ-suplementados es τ-suplementado.

(*4*) Sea L τ-suplementado y sea N un módulo finitamente L-generado, es decir, existe un epimorfismo $L^{(I)} \xrightarrow{f} N$ con I finito, de donde $N \cong L^{(I)}/\mathrm{Nuc}f$ y por (*2*) tenemos que como L es τ-suplementado entonces $L^{(I)}$ es τ-suplementado y por 3.1.2 $L^{(I)}/\mathrm{Nuc}f$ es τ-suplementado
$\therefore N$ es τ-suplementado.

Ejemplo 1. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es Rad-suplementado porque $\mathbb{Q}$ es un Rad-suplemento para todo $N \leq \mathbb{Q}$, debido a que $\mathrm{Rad}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Pero por 2.9.3, ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ no es suplementado porque $\mathrm{Rad}(\mathbb{Q})$ no es superfluo en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 2. Por 3.1.2 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es Rad-suplementado. De nuevo por 3.1.2 $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es Rad-suplementado.

Ejemplo 3. En $\mathbb{Z} - Mod$, si M es divisible entonces $\mathrm{Rad}(M) = M$, entonces todo módulo divisible en $\mathbb{Z} - Mod$ es Rad-suplementado.

Ejemplo 4. Todo R-módulo hueco es Rad-suplementado.

3.2. Módulos ampliamente τ-suplementados

Definición 3.2.1 *Sea L un módulo τ-suplementado en $\sigma[M]$. L es llamado ampliamente τ-suplementado si para cada pareja de submódulos $K, V \subseteq L$ tales que $L = K + V$, existe un τ-suplemento U para K con $U \subseteq V$*

Teorema 3.2.2 (Propiedades de módulos ampliamente τ-suplementados) *Si $L \in \sigma[M]$ es un módulo ampliamente τ-suplementado, entonces:*

1. *sumandos directos de L son ampliamente τ-suplementados*

2. *módulos cociente de L son ampliamente τ-suplementados*

Demostración:

(*1*) Sea K un sumando directo de L, es decir, $L = K' \oplus K$ y sean X, Y submódulos de K tales que $K = X + Y$.

Como $Y \subseteq K$ entonces $L = K' + X + Y$ y debido a que L es ampliamente τ-suplementado tenemos que existe $Y' \subseteq Y$ tal que $L = Y' + K' + X$ y $Y' \cap (K' + X) \subseteq \tau(Y')$, Además, $X \subseteq X + K'$ implica $Y' \cap X \subseteq Y' \cap (X + K') \subseteq \tau(Y')$.

Debido a que $K \subseteq L$ tenemos que $K = K \cap L$ y como $L = Y' + K' + K$ entonces $L = Y' + (K' \oplus X)$ por tanto

$$
\begin{aligned}
K &= K \cap L \\
&= K \cap (Y' + (K' \oplus X)) \\
&= K \cap (X \oplus K') + Y' && \text{por } Y' \subseteq Y \subseteq K \text{ y por ley modular} \\
&= X + Y' && \text{porque } X = K \cap (X \oplus K')
\end{aligned}
$$

Pero $X = K \cap (X \oplus K')$ porque $X \subseteq K \cap (X \oplus K')$ y si $k \in K \cap (X \oplus K')$ entonces $k \in K$ Además, $k = x + y$ con $x \in X, y \in K'$ de donde $y = k - x \in K$ por tanto $y \in K \cap K' = 0$ por lo tanto $y = 0$ esto implica que $k = x \in X$, es decir, $K \cap (X \oplus K') \subseteq X$ por lo tanto $X = K \cap (X \oplus K')$

Entonces debido a que $K = X + Y'$ y $X \cap Y' \subseteq \tau(Y')$ concluímos que Y' es un τ-suplemento para X en K con $Y' \subseteq Y$, es decir, K es ampliamente τ-suplementado.

(*2*) Sea $L/X = K/X + K'/X$ donde $X \subseteq K \subseteq L$ y $X \subseteq K' \subseteq L$. Como $L = K + K'$ y L es ampliamente τ-suplementado existe $Y \subseteq K'$ tal que $L = K + Y$ con $X \cap Y \subseteq \tau(Y)$.

Veamos que $(Y + X)/X$ es un τ-suplemento para K/X en L/X.

Como $[(Y + X)/X] + (K/X) = L/X$ pues $L = K + Y = K + Y + X$, y ya que $Y, X \subseteq K'$ tenemos que $(Y + X)/X \subseteq K'/X$.

Ahora

$$
\begin{aligned}
K/X &\cap (Y + X)/X \\
&= ((K \cap Y) + X)/X \\
&\subseteq (\tau(Y) + X)/X \\
&\subseteq \tau((Y + X)/X)
\end{aligned}
$$

por lo tanto L/X es ampliamente τ-suplementado.

Corolario 3.2.3 *Sea L un módulo ampliamente τ-suplementado en $\sigma[M]$. Entonces:*

1. *si K es un τ-suplemento en L y $K \in \mathbb{F}_\tau$, entonces K es ampliamente τ-suplementado*
2. *si $L \in \mathbb{F}_\tau$, entonces todo submódulo que es τ-suplemento de L es ampliamente τ-suplementado.*

Demostración:

(*1*) Sea K un τ-suplemento en L tal que K es τ-libre de torsión, entonces por 2.8.2 tenemos que K es un sumando directo de L y por 3.2.2 K es ampliamente τ-suplementado.

(*2*) Sea K un τ-suplemento en L y $L \in \mathbb{F}_\tau$ entonces por 2.8.2 K es sumando directo de L y por 3.2.2 K es ampliamente τ-suplementado.

Definición 3.2.4 *Un R-módulo L es llamado π-proyectivo si para cada pareja de submódulos U, V de L tales que $L = U + V$, existe $f \in End(L)$ con $Im(f) \subseteq U$ e $Im(1-f) \subseteq V$.*

Teorema 3.2.5 *Sea $L \in \sigma[\mathbf{M}]$. Entonces:*

1. *si todo submódulo de L es τ-suplementado, entonces L es un módulo ampliamente τ-suplementado*

2. *si L es un módulo π-proyectivo y τ-suplementado, entonces L es ampliamente τ-suplementado.*

Demostración:

(*1*) Sean $U, V \subseteq L$ tal que $L = U + V$, debido a que U es τ-suplementado, para $U \cap V \subseteq U$ existe $Y \subseteq U$ tal que $U = Y + U \cap V$ con $U \cap V \cap Y \subseteq \tau(Y)$ y como $Y \subseteq U$ entonces $Y = Y \cap U$ de donde $V \cap Y = V \cap U \cap Y \subseteq \tau(Y)$ por lo tanto $V \cap Y \subseteq \tau(Y)$.

Ahora veamos que $L = Y + V$.

$$\begin{aligned} L &= U + V \\ &= [Y + U \cap V] + V \\ &= Y + V \end{aligned}$$

$\therefore$ L es ampliamente τ-suplementado.

(*2*) Sean $X, Y \subseteq L$ tales que $L = X + Y$ por ser L π-proyectivo existe $e \in \mathrm{End}(L)$ tal que $e(L) \subseteq X$ y $(1-e)(L) \subseteq Y$.

Sea $x \in X \subseteq L$ entonces $(1-e)(x) = x - e(x) \in X$ pues $e(L) \subseteq X$ por tanto $(1-e)(X) \subseteq X$.

Como L es τ-suplementado entonces existe $C \subseteq L$ tal que $L = C + X$ y $C \cap X \subseteq \tau(C)$.

Entonces

$$\begin{aligned} L &= e(L) + (1-e)(L) && \\ &= e(L) + (1-e)(C + X) && \text{debido a que } L = C + X \\ &\subseteq X + (1-e)(C + X) && \text{ya que } e(L) \subseteq X \\ &\subseteq X + (1-e)(X) + (1-e)(C) && \\ &\subseteq X + (1-e)(C) && \text{porque } (1-e)(X) \subseteq X \end{aligned}$$

y como

$$X + (1-e)(C) \subseteq L$$

obtenemos que

$$L = X + (1-e)(C). \tag{3.1}$$

Recordemos que $(1-e)(L) \subseteq Y$ y debido a que $C \subseteq L$ tenemos que $(1-e)(C) \subseteq Y$.

Ahora veamos que $X \cap (1-e)(C) = (1-e)(X \cap C)$.

Sea $x \in X \cap (1-e)(C)$, es decir, $x \in X$ y $x = c - e(c)$ para algún $c \in C$ pero $c = x + e(c) \in X$ porque $e(L) \subseteq X$.
Por lo tanto $X \cap (1-e)(C) \subseteq (1-e)(X \cap C)$.

Sea $x \in (1-e)(X \cap C)$ entonces $x = d - e(d)$ para algún $d \in X \cap C$ y recordando que $(1-e)(X) \subseteq X$ tenemos que $x \in X$ y además, como $d \in C$ entonces $x \in (1-e)(C)$.
Por lo tanto $(1-e)(X \cap C) \subseteq X \cap (1-e)(C)$.
$\therefore X \cap (1-e)(C) = (1-e)(X \cap C)$.

Entonces, debido a que C es un τ-suplemento para X, tenemos que $C \cap X \subseteq \tau(C)$ de donde

$$\begin{aligned} X \cap (1-e)(C) &= (1-e)(X \cap C) \\ &\subseteq (1-e)(\tau(C)) \\ &\subseteq \tau((1-e)(C)) \qquad \text{debido a que } \tau \text{ es un radical.} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X \cap (1-e)(C) \subseteq \tau((1-e)(C)). \tag{3.2}$$

$\therefore$ de 3.1 y 3.2 $(1-e)(C)$ es un τ-suplemento para X en L con $(1-e)(C) \subseteq Y$, es decir, L es ampliamente τ-suplementado.

Corolario 3.2.6 *Para un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) todo módulo en $\sigma[M]$ es τ-suplementado

(b) todo módulo en $\sigma[M]$ es ampliamente τ-suplementado.

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$

Sea L un módulo en $\sigma[M]$, entonces por hipótesis todo submódulo de L es τ-suplementado y por 3.2.5 tenemos que L es ampliamente τ-suplementado.

$(b) \Rightarrow (a)$

Sea L un módulo en $\sigma[M]$ ampliamente τ-suplementado, entonces por definición L es τ-suplementado.

3.3. Módulos τ-elevables

Teorema 3.3.1 (Caracterización de sumandos directos τ-densos) *Sea $L \in \sigma[M]$. Para un submódulo $U \subseteq L$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) existe una descomposición $L = X \oplus X'$ con $X \subseteq U$ y $X' \cap U \subseteq \tau(X')$

(b) existe un idempotente $e \in$ *End(L)* *con* $e(L) \subseteq U$ *y* $(1-e)(U) \subseteq \tau((1-e)(L))$

(c) existe un sumando directo X *de* L *con* $X \subseteq U$ *y* $U/X \subseteq \tau(L/X)$

(d) U *tiene un* τ*-suplemento* V *en* L *tal que* $U \cap V$ *es un sumando directo de* U

(e) existe una descomposición $U = X \oplus Y$ *tal que* X *es un sumando directo de* L *y* $Y \subseteq \tau(L)$.

Si estas condiciones se satisfacen, decimos que U *contiene un sumando directo* τ*-denso.*

Demostración:
$(a) \Rightarrow (b)$
Para una descomposición $L = X \oplus X'$ existe un idempotente $e \in \mathrm{End}(L)$ tal que $e(L) = X$ y $(1-e)(L) = X'$, de donde $e(L) = X \subseteq U$, es decir, $e(L) \subseteq U$.
Ahora, como $X \subseteq U$ entonces $(1-e)(U) = U \cap (1-e)(L)$ ya que
sea $u \in U$ entonces $(1-e)(u) = u - e(u) \in U$ pues $e(L) \subseteq U$ y $u - e(u) \in (1-e)(L) \therefore$ $(1-e)(U) \subseteq U \cap (1-e)(L)$.
Ahora, sea $x \in U \cap (1-e)(L)$, entonces $x \in U$ y $x = (1-e)(l)$ para algún $l \in L$, pero $e(L) = X \subseteq U \therefore x - e(l) = l \in U \therefore x \in (1-e)(U) \therefore U \cap (1-e)(L) \subseteq (1-e)(U)$
por lo tanto $(1-e)(U) = U \cap (1-e)(L)$.
Entonces

$$\begin{aligned}
(1-e)(U) &= U \cap (1-e)(L) & \\
&= U \cap X' & \text{porque } (1-e)(L) = X' \\
&\subseteq \tau(X') & \text{por hipótesis} \\
&= \tau((1-e)(L)). &
\end{aligned}$$

$\therefore (1-e)(U) \subseteq \tau((1-e)(L))$.
$(b) \Rightarrow (c)$
Consideremos $X = e(L)$ y debido a que por hipótesis $e(L) = U$ tenemos que $X \subseteq U$, además, $e(L) = X$ es un sumando directo de L y como $X \subseteq U \subseteq L$ sabemos que X es sumando directo de U, de donde

$$U = X \oplus ((1-e)(L) \cap U)$$

y por tanto $U/X = (1-e)(L) \cap U$ pero ya que $X \subseteq U$ entonces

$$(1-e)(U) = U \cap (1-e)(L).$$

Por otro lado $L = X \oplus (1-e)(L)$ y por tanto $L/X = (1-e)(L)$ y $\tau(L/X) = \tau((1-e)(L))$ entonces

$$\begin{aligned} \tau(L/X) &= \tau((1-e)(L)) \\ &\supseteq (1-e)(U) && \text{por hipótesis} \\ &= U \cap (1-e)(L) \\ &= U/X. \end{aligned}$$

$\therefore U/X \subseteq \tau(L/X)$.

$(c) \Rightarrow (a)$

Sea X un sumando directo de L con $X \subseteq U$ y $U/X \subseteq \tau(L/X)$.
Si $L = X \oplus X'$, debido a que $X \subseteq U$ tenemos que

$$U = X \oplus (X' \cap U)$$

de donde, $U/X = X' \cap U$ y

$$\begin{aligned} X' \cap U &\subseteq \tau(L/X) \\ &= \tau(X') \end{aligned}$$

Por lo tanto $X' \cap U \subseteq \tau(X')$.

$(a) \Rightarrow (d)$

Como $X \subseteq U \subseteq L$ y X es sumando directo de L entonces

$$U = X \oplus (X' \cap U)$$

de donde

$$L = X + (X' \cap U) + X' = U + X'$$

y por hipótesis $U \cap X' \subseteq \tau(X')$, es decir, X' es un τ-suplemento de U en L y $U \cap X'$ un sumando directo de U.

$(d) \Rightarrow (a)$

Sea V un τ-suplemento para U en L tal que $U = X \oplus (U \cap V)$. Entonces

$$\begin{aligned} L &= U + V && \text{por ser } \tau\text{-suplemento} \\ &= X + (U \cap V) + V && \text{sustituyendo} \\ &= X + V \end{aligned}$$

y $X \cap V = (X \cap U) \cap V = 0$

$\therefore L = X \oplus V$.

$(a) \Rightarrow (e)$

Como X es sumando directo de L y $X \subseteq U \subseteq L$ entonces $U = X \oplus (X' \cap U)$ y $X' \cap U \subseteq \tau(X')\tau(L)$.

$(e) \Rightarrow (a)$

Como $U = X \oplus Y$ y X es un sumando directo de L entonces $L = X \oplus X'$.

Definición 3.3.2 *Un módulo $L \in \sigma[M]$ es llamado τ-elevable si todo submódulo de L contiene un sumando directo τ-denso.*

Teorema 3.3.3 (Propiedades de módulos τ-elevables) *Sea $L \in \sigma[M]$ un módulo τ-elevable. Entonces:*

1. *Rad(L) $\subseteq \tau(L)$ y si Rad(L) $\neq \tau(L)$, entonces L tiene un sumando directo no cero que es de τ-torsión*

2. *todo sumando directo de L es τ-elevable.*

Demostración:

(*1*) Por 3.1.2 tenemos que $L/\tau(L)$ es semisimple, por lo que $\tau(L)$ es intersección de máximos y por lo tanto $\mathrm{Rad}(L) \subseteq \tau(L)$.

Supongamos que $\mathrm{Rad}(L) \neq \tau(L)$, de donde existe un submódulo máximo $K \subseteq L$ tal que $\tau(L) \nsubseteq K$. Pero por hipótesis K contiene un sumando τ-denso, es decir, un submódulo $A \subseteq K$ tal que $L = A \oplus B$ con $K \cap B \subseteq \tau(B)$. Pero, $L = A + B \subseteq K + B$ entonces $L = K + B$ y por el segundo teorema de isomorfismos $L/K \simeq B/(B \cap K)$ por lo tanto $B \cap K$ es máximo en B, de donde, $\tau(B) = B$ ó $K \cap B = \tau(B)$.

Supongamos que $K \cap B = \tau(B)$. Entonces $\tau(L) = \tau(A) \oplus \tau(B) = \tau(A) \oplus (K \cap B) \subseteq K$ lo cual es una contradición. Por lo tanto $B = \tau(B)$.

(*2*) Supongamos que $L = K \oplus K'$ y sea $X \subseteq K$. Por hipótesis $L = N \oplus N'$ con $N \subseteq X$ y $X \cap N' \subseteq \tau(N')$. Luego, $K = N \oplus (K \cap N')$ y

$$\begin{aligned} X \cap (K \cap N') &= X \cap N' \\ &\subseteq \tau(N') \\ &\subseteq \tau(L) \\ &= \tau(K) \oplus \tau(K') \\ &= \tau(N) \oplus \tau(K \cap N') \oplus \tau(K') \end{aligned}$$

Pero $(X \cap N') \subseteq (K \cap N')$ por lo que $(X \cap N') \subseteq \tau(K \cap N')$. Por lo tanto, K es un submódulo τ-elevable.

3.4. Módulos τ-semiperfectos

Definición 3.4.1 *Un epimorfismo en $\sigma[M]$ $f : P \to L$ es llamado una τ-cubierta si Nuc(f) $\subseteq \tau(P)$. Además, si P es proyectivo en $\sigma[M]$, entonces f es llamada una τ-cubierta proyectiva.*

Lema 3.4.2 *Si $f : L \to N$ es un epimorfismo tal que Nuc(f) $\subseteq \tau(L)$, entonces $f(\tau(L)) = \tau(N)$.*

Demostración:

Como τ es un radical entonces $f(\tau(L)) \subseteq \tau(N)$.
Ahora considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & L/\tau(L) \\ N \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

como f es un epimorfismo tal que $\mathrm{Nuc}(f) \subseteq \tau(L) = \mathrm{Nuc}(g)$ entonces por el teorema del factor existe $h : N \to L/\tau(L)$ tal que $h \circ f = g$ y Además $\mathrm{Nuc}(h) = f(\mathrm{Nuc}(g)) = f(\tau(L))$.
Como τ es un radical, entonces $\tau(L/\tau(L)) = 0$ y entonces

$$\tau(N) \xrightarrow{h|_{\tau(N)}} \tau(L/\tau(L)) = 0$$

es decir, $\tau(N) \subseteq \mathrm{Nuc}(h)$.
Ahora, sea $x \in \mathrm{Nuc}(h)$, entonces $h(x) = 0$ y como f es un epimorfismo existe $l \in L$ tal que $f(l) = x$ entonces $h \circ f(l) = h(x) = 0$ y como $0 = h \circ f(l) = g(l)$ entonces $l \in \mathrm{Nuc}(g) = \tau(L)$ entonces $x = f(l)$ con $l \in \tau(L)$, es decir, $x \in f(\tau(L)) \subseteq \tau(N)$.
$\therefore \mathrm{Nuc}(h) \subseteq \tau(N)$
$\therefore \mathrm{Nuc}(h) = \tau(N)$
$\therefore f(\tau(L)) = \tau(N)$

Teorema 3.4.3 (Propiedades de τ-cubiertas proyectivas)

1. *si $f : P \to L$ es una τ-cubierta proyectiva y $g : L \to N$ es una τ-cubierta, entonces $gf : P \to N$ es una τ-cubierta proyectiva.*

2. *si cada $f_i : P_i \to L_i$ con $i \in I$ es una τ- cubierta, entonces el morfismo $\oplus_I f_i : \bigoplus_I P_i \to \bigoplus_I L_i$ es una τ-cubierta.*

   a) *En particular si cada P_i es proyectivo entonces $\oplus_I f_i$ es una τ- cubierta proyectiva.*

Demostración:

1. Veamos que $\mathrm{Nuc}(gf) \subseteq \tau(P)$
   Sea $x \in \mathrm{Nuc}(gf)$ entonces $g(f(x)) = 0$ por lo tanto $f(x) \in \mathrm{Nuc}(g)$ pero

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(g) &\subseteq \tau(L) && \text{por ser g una } \tau\text{-cubierta} \\ &= f(\tau(P)) && \text{por 3.4.2} \end{aligned}$$

por tanto $f(x) \in f(\tau(P))$, de donde, $f(x) = f(p)$ para algun $p \in \tau(P)$ entonces $x - p \in \mathrm{Nuc}(f)$ donde

$$\mathrm{Nuc}(f) \subseteq \tau(P) \qquad\qquad \text{por ser f una } \tau\text{-cubierta}$$

y como $p \in \tau(P)$ tenemos que $x \in \tau(P)$.
$\therefore$ $\mathrm{Nuc}(gf) \subseteq \tau(P)$ $\therefore$ gf es una τ-cubierta proyectiva.

2. Como cada $\mathrm{Nuc}(f_i) \subseteq \tau(P_i)$ y τ conmuta con sumas directas entonces $\mathrm{Nuc}(\oplus_I f_i) \subseteq \tau(\bigoplus_I P_i)$, es decir, $\oplus_I f_i$ es una τ-cubierta.

   a) Si cada P_i es proyectivo entonces $\bigoplus_I P_i$ es proyectivo. Por lo tanto $\oplus_I f_i$ es una τ-cubierta proyectiva.

Observación 3.4.4 *Sabemos que un epimorfismo $f : P \to M$ es una cubierta para M en R-Mod si Nuc$(f) \ll P$. Si P es proyectivo entonces (P, f) es una cubierta proyectiva para M. De aquí tenemos que toda cubierta proyectiva es una Rad-cubierta proyectiva. El recíproco es cierto para los módulos finitamente generados. Entonces si P es un módulo proyectivo finitamente generado, (P, f) es una cubierta proyectiva si y sólo si (P, f) es una Rad-cubierta proyectiva.*

Observación 3.4.5 *A diferencia de las cápsulas inyectivas, las cubiertas proyectivas no necesariamente existen. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$-Mod, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no tiene cubierta proyectiva. De hecho, los únicos $\mathbb{Z}$-módulos con cubierta proyectiva son los $\mathbb{Z}$-módulos libres. Entonces ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ no tiene cubierta proyectiva. Más aún, ningún módulo M con Rad$(M) = M$ puede tener cubierta proyectiva [4, 22.11].*

Lema 3.4.6 *Si $K \subseteq L$ es un τ-suplemento para $U \subseteq L$, entonces $K \to K/(K \cap U) \cong L/U$ es una τ-cubierta.*

Demostración:
Como K es un τ-suplemento para $U \subseteq L$ entonces $L = K + U$ y $K \cap U \subseteq \tau(K)$ y por el segundo teorema de isomorfismos $K/(K \cap U) \cong L/U$ entonces para
$K \xrightarrow{f} K/(K \cap U)$ tenemos que $\mathrm{Nuc}(f) = K \cap U \subseteq \tau(K)$.
$\therefore$ $K \xrightarrow{f} K/(K \cap U) \cong L/U$ es una τ-cubierta.

Teorema 3.4.7 (Relación entre τ-cubiertas y τ-suplementos) *Para $U \subseteq L$ con $L \in \sigma[\mathbf{M}]$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) L/U tiene una τ-cubierta proyectiva

(b) U tiene un τ-suplemento V el cual tiene una τ-cubierta proyectiva

(c) si $V \subseteq L$ y $L = U + V$, entonces U tiene un τ-suplemento $V' \subseteq V$ tal que V' tiene una τ-cubierta proyectiva.

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que $f : P \to L/U$ es una τ-cubierta proyectiva de L/U, es decir, $\mathrm{Nuc}(f) \subseteq \tau(P)$. Para $\pi : L \to L/U$ la proyección canónica, existe, por 1.2.29, $g : P \to L$ tal que $f = \pi \circ g$.

Sea $V = \mathrm{Im}(g) = g(P)$ y veamos que $g^{-1}(U) = \mathrm{Nuc}(f)$.

Sea $x \in g^{-1}(U)$, entonces $x \in P$ y $g(x) \in U$ de donde $0 = \pi(g(x)) = f(x)$ por lo tanto $x \in \mathrm{Nuc}(f)$, por lo tanto $g^{-1}(U) \subseteq \mathrm{Nuc}(f)$.

Ahora, sea $x \in \mathrm{Nuc}(f)$ entonces $0 = f(x) = \pi(g(x))$ de donde $g(x) \in \mathrm{Nuc}(\pi) = U$ por tanto $x \in g^{-1}(U)$. Por lo tanto $g^{-1}(U) = \mathrm{Nuc}(f)$.

Entonces, como $g^{-1}(U) = \mathrm{Nuc}(f)$ tenemos que $\mathrm{Nuc}(g) = \{x \in P : g(x) = 0\} \subseteq \mathrm{Nuc}(f) = U \subseteq \tau(P)$ por lo tanto P es una τ-cubierta proyectiva de V.

Veamos ahora que V es un τ-suplemento para U en L.

$U \cap V = g(\mathrm{Nuc}(f))$ ya que si $x \in U \cap V$ entonces $x \in V = g(P)$, es decir, $x = g(p)$ para algun $p \in P$, pero $g(p) = x \in U \therefore p \in g^{-1}(U) = \mathrm{Nuc}(f)$ por lo tanto $x \in g(\mathrm{Nuc}(f))$.

sea $x \in g(\mathrm{Nuc}(f))$ entonces $x = g(y) \in V$ para alguna $y \in \mathrm{Nuc}(f) = U$.

$\therefore U \cap V = g(\mathrm{Nuc}(f))$. Entonces

$$\begin{aligned} U \cap V &= g(\mathrm{Nuc}(f)) \\ &\subseteq g(\tau(P)) && \text{pues } \mathrm{Nuc}(f) \subseteq \tau(P) \\ &\subseteq \tau(g(P)) && \text{por ser } \tau \text{ un radical} \\ &= \tau(V) && \text{pues } g(P) = V \end{aligned}$$

$\therefore U \cap V \subseteq \tau(V)$.

Ahora, sea $x \in L$, entonces existe $p \in P$ tal que

$$f(p) = \pi(x)$$
$$\pi(g(p)) = f(p) = \pi(x).$$

$(b) \Rightarrow (a)$

Sea V un τ-suplemento para U en L tal que V tiene una τ-cubierta proyectiva $f : P \to V$.

Consideremos $g : V \to V/(V \cap U) = L/U$ entonces por 3.4.6 $g : V \to L/U$ es una τ-cubierta y por 3.4.3 $gf : P \to L/U$ es una τ-cubierta proyectiva.

$(a) \Rightarrow (c)$

Sea $f : P \to L/U$ una τ-cubierta proyectiva y sea $L = U + V$ entonces por el segundo

teorema de isomorfismos $L/U \cong V/(U \cap V)$ de donde P también es una τ-cubierta proyectiva para $V/(U \cap V)$.
Ahora, por (b) $U \cap V$ tiene un τ-suplemento V' en V, es decir, $V = V' + U \cap V$ y $U \cap V \cap V' \subseteq \tau(V')$, donde V' tiene una τ-cubierta proyectiva.
Falta probar que $V' \subseteq V$ es un τ-suplemento para U en L:

$$\begin{aligned} L &= U + V \\ &= U + V' + U \cap V && \text{pues } V = V' + U \cap V \\ &= U + V' \end{aligned}$$

y

$$U \cap V' = U \cap V \cap V' \subseteq \tau(V') \qquad \text{porque } U \cap V \cap V' \subseteq \tau(V')$$

$\therefore V'$ es un τ-suplemento para U en L.
$(c) \Rightarrow (b)$
Como $L = U + L$ entonces U tiene un τ-suplemento $V \subseteq L$ el cual tiene una τ-cubierta proyectiva.

Definición 3.4.8 *Un módulo $L \in \sigma[M]$ es llamado τ-semiperfecto si todo módulo cociente de L tiene una τ-cubierta proyectiva.*

Teorema 3.4.9 (Caracterización de módulos τ-semiperfectos) *Para un módulo $L \in \sigma[M]$ las siguientes son equivalentes:*

(a) L es τ-semiperfecto

(b) L es τ-suplementado por suplementos que tienen τ-cubiertas proyectivas

(c) L es ampliamente τ-suplementado por suplementos que tienen τ-cubiertas proyectivas.

Demostración:
$(a) \Rightarrow (b)$
Sea $L \in \sigma[M]$ un módulo τ-semiperfecto y sea $U \subseteq L$ tal que L/U tiene una τ-cubierta proyectiva. Entonces por 2.14.b U tiene un τ-suplemento K el cual tiene una τ-cubierta proyectiva
$\therefore L$ es suplementado por suplementos que tienen τ-cubiertas proyectivas.
$(b) \Rightarrow (c)$
Sea L τ-suplementado por suplementos que tienen τ-cubiertas proyectivas, entonces por

2.14.c L es ampliamente τ-suplementado por suplementos con τ-cubiertas proyectivas
$(c) \Rightarrow (a)$
Sea L ampliamente τ-suplementado, es decir, para $U, V \subseteq L$ tales que $L = U + V$ existe $V' \subseteq V$ tal que V' es un τ-suplemento para U en L, y Además V' tiene una τ-cubierta proyectiva, entonces pr 2.14.a L/U tiene una τ-cubierta proyectiva $\therefore$ L es τ-semiperfecto.

Corolario 3.4.10 *Sea $L \in \sigma[M]$ un módulo τ-semiperfecto, entonces:*

1. *$L/\tau(L)$ es semisimple*
2. *si L es τ-libre de torsión, entonces L es semisimple.*

Demostración :
(1)
Como L es τ-semiperfecto, entonces por 2.16 L es τ-suplementado y por 2.2.3 $L/\tau(L)$ es semisimple.
(2)
Por 2.2.1 L es semisimple.

Observación 3.4.11 *Si M es un módulo proyectivo en R-Mod, entonces M es Rad-semiperfecto si y sólo si M es semiperfecto [1].*

Bibliografía

[1] Alkan, Mustafa; Ozcan, A. *Semiperfect modules with respect to a prerradical.* Communications in Algebra, Number 34, pp 841 - 856, 2006.

[2] Al-Takhman, Khaled; Lomp, Christian; Wisbauer Robert. *τ-complemented and τ-supplemented modules.* Algebra and Discrete Mathematics, Number 3, pp 1 - 15, 2006.

[3] Anderson, Frank; Fuller, Kent R. *Rings and Categories of Modules.* Springer Verlag, New York, 1992.

[4] Lam, Tsit-Yuen. *A first course in noncommutative rings.* Springer, New York, 1991.

[5] Mermut, Engin. *Homological approach to complements and supplements.* PhD thesis, Dokuz Eylül University, Izmir, 2004.

[6] Stenström, Bo. *Rings of Quotients.* Springer Verlag, Berlin, 1975.

[7] Wisbauer, Robert. *Foundations of module and ring theory.* Gordon and Breach, Reading, 1991.