UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre anillos regulares y V-anillos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JOSÉ POZO MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO FEDERICO RAGGI CÁRDENAS

2010

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
    Pozo
    Martínez
    José
    55 18 50 82 27
    Universidad Nacional Autónoma de México
    Facultad de Ciencias
    Matemáticas
    403066427
2. Datos del tutor
    Doctor
    Francisco Federico
    Raggi
    Cárdenas
3. Datos del sinodal 1
    Doctor
    José
    Ríos
    Montes
4. Datos del sinodal 2
    Doctor
    Hugo Alberto
    Rincón
    Mejía
5. Datos del sinodal 3
    Doctor
    Juan
    Morales
    Rodríguez
6. Datos del sinodal 4
    Matemática
    Daniela Mariyet
    Terán
    Guerrero
7. Datos del trabajo escrito
    Sobre anillos regulares y Vanillos
    31 p
    2010

Índice general

Introducción

Este trabajo está basado en un artículo del matemático Joe W. Fisher en el que se hace una exposición sobre dos clases de anillos y sus conexiones: Los *anillos regulares* y los *V-anillos*.

El concepto de *anillo regular* fue dado en 1936 por el matemático húngaro-estadounidense John von Neumann, definiendo un anillo regular como un anillo R con la propiedad de que para cada $a \in R$ existe $x \in R$ tal que $a = axa$. Para efectos de distinguir esta clase de anillos de los anillos regulares neterianos, quienes estudian anillos no conmutativos los llaman *anillos regulares de von Neumann*. En esta tesis, por economía en la notación y falta de ambigüedad, nos referiremos a ellos simplemente como *anillos regulares*.

El surgimiento de éstos fue fuertemente motivado por áreas de las matemáticas como la geometría proyectiva, que en ese momento estaba siendo estudiada en términos de retículas. Von Neumann introdujo los anillos regulares como una herramienta algebraica para estudiar ciertas retículas. La idea general fue poder asociar un anillo regular R a una W^*-álgebra finita trabajando con un cierto conjunto que resulta ser isomorfo a la retícula de ideales principales de R. Expandiendo esta idea, von Neumann demostró que *casi* cualquier retícula modular complementada es isomorfa a la retícula de ideales principales de un anillo regular.

Por otro lado, están aquellos anillos tales que todo módulo simple definido en ellos es inyectivo. Estos anillos fueron llamados *V-anillos* por el matemático Carl Faith después de que Orlando Villamayor, matemático argentino, caracterizara a los V-anillos izquierdos como aquéllos en los cuales cada ideal izquierdo es una intersección de ideales izquierdos máximos.

Este trabajo trata de ser autocontenido, en el sentido de que cualquiera que esté familiarizado con teoría de anillos y teoría de módulos pueda leerlo sin necesidad de referirse a algún otro texto. Por ello, en el primer capítulo se dan las definiciones de prácticamente todos los objetos con los que trabajaremos. Además, se dan caracterizaciones de ciertos objetos, como el radical de Jacobson, que son de utilidad en capítulos posteriores así como la construcción de la localización de un anillo en un ideal primo.

El segundo capítulo inicia con una serie de resultados básicos de teoría de módulos, que son de utilidad tanto para justificar como para seguir fácilmente las demostraciones de los resultados principales de esta tesis. En la siguiente sección se trata la teoría de anillos regulares; se dan la definición y algunas caracterizaciones de un anillo regular, tanto para el caso conmutativo como para el caso no conmutativo. Uno de los resultados principales de esta sección nos dice, entre otras cosas, que si un anillo es conmutativo entonces es un anillo regular si y sólo si es un V-anillo.

En el tercer capítulo se da una caracterización de módulos congeneradores de una categoría de módulos, y la siguiente sección trata sobre la teoría de los V-anillos; se dan la definición y algunas caracterizaciones de ellos.

Tanto en el segundo capítulo como en el tercero, se da una mirada a los anillos de grupo.

En el último capítulo, se dan ejemplos de anillos regulares y un ejemplo de un anillo regular que es V-anillo derecho pero no es V-anillo izquierdo.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Definiciones.

Definición 1.1.1 *Sean R un anillo y G un grupo multiplicativo. El anillo de grupo $R[G]$ es una R-álgebra asociativa con los elementos de G como una base y con la multiplicación definida distributivamente usando el producto de G. Así,*

$$R[G] = \left\{ \sum_{x \in G} a_x x \mid a_x \in R,\ x \in G \text{ y } a_x = 0 \text{ excepto para un número finito.} \right\}$$

Definición 1.1.2 *Sean $\mathcal{U}$ una clase de módulos y M un módulo. $Rej_M(\mathcal{U}) = \bigcap\{Nuc\ h \mid h : M \longrightarrow U \text{ para todo } U \in \mathcal{U}\}$ es el rechazo de $\mathcal{U}$ en el módulo M.*

Definición 1.1.3 *Sean $\mathcal{S}$ la clase de los R-módulos simples y M un R-módulo. $J(M) = Rej_M(\mathcal{S})$ es el radical de Jacobson de M.*

Definición 1.1.4 *Un anillo R es semiprimitivo si $J(R) = 0$.*

Definición 1.1.5 *Sea R un anillo. Se dice que R es semiprimo si $N(R) = \bigcap\{P \leq R \mid P \text{ es primo}\} = 0$. $N(R)$ es el radical primo de R.*

Definición 1.1.6 *Sean R un anillo conmutativo e $I \leq R$. $Rad(I) = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ es el radical del ideal I.*

Definición 1.1.7 *Sean M un R-módulo y $\mathcal{U}$ una clase de R-módulos. M es (finitamente) cogenerado por $\mathcal{U}$ si existe un conjunto (finito) indicado $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ en $\mathcal{U}$ y una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$$

Definición 1.1.8 *Sean C un R-módulo y $Cog(C)$ la clase de todos los módulos cogenerada por C. Se dice que C es un cogenerador para ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$, la clase de todos los R-módulos izquierdos, si $Cog(C) = {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$.*

Definición 1.1.9 *Sean M un R-módulo y $K \leq M$. Se dice que K es esencial en M, y lo denotamos como $K \trianglelefteq M$, si $K \cap L = 0 \Rightarrow L = 0$ para todo $L \leq M$.*

Definición 1.1.10 *Sean M un R-módulo y $H \leq M$. Se dice que H es superfluo en M, y lo denotamos como $H \ll M$, si $H + L = M \Rightarrow L = M$ para todo $L \leq M$.*

Definición 1.1.11 *Sea M un R-módulo. Un par (E, i) es una cápsula inyectiva de M si E es un R-módulo inyectivo y $M \xrightarrow{i} E$ es un monomorfismo esencial; es decir, $Im(i) \trianglelefteq E$.*

Definición 1.1.12 *Un grupo G es localmente finito si para todo $H \leq G$ finitamente generado, el orden de H es finito.*

Definición 1.1.13 *Sean R un anillo conmutativo e $I \leq R$. Se dice que I es primario si $I \neq R$ y $xy \in I \Rightarrow x \in I$ o $y^n \in I$ para algún $n > 0$.*

Definición 1.1.14 *Sean R un anillo y $P \leq R$. Se dice que P es primo si $P \neq R$ y para cualesquiera A y B ideales bilaterales de R se tiene que $AB \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P$ o $B \subseteq P$.*

Claramente, en un anillo conmutativo todo ideal primo es primario.

Definición 1.1.15 *Sean R un anillo y $J \leq R$. Se dice que J es semiprimo si*

$$J = \bigcap_{i\in I} P_i$$

para algún conjunto I, con $P_i \leq R$ primo para toda $i \in I$.

Definición 1.1.16 *Sea R un anillo. Se dice que R es totalmente idempotente si para todo $I \leq R$ se tiene que $I^2 = I$*

Definición 1.1.17 *Un R-módulo E es inyectivo si siempre que se tenga la parte sólida del siguiente diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f"'] & M \arrow[ul, dashed, "\beta"']
\end{tikzcd}
$$

en ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ con renglón exacto, existe un R-homomorfismo β tal que todo el diagrama conmuta.

Definición 1.1.18 *Un R-módulo Q es autoinyectivo si siempre que se tenga la parte sólida del siguiente diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
 & Q & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f"'] & Q \arrow[ul, dashed, "\beta"']
\end{tikzcd}
$$

en ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ con renglón exacto, existe un R-homomorfismo β tal que todo el diagrama conmuta.

Definición 1.1.19 *Un R-módulo F con un conjunto generador linealmente independiente $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ es llamado un R-módulo libre, con base $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.*

Definición 1.1.20 *Sean R un anillo y $a \in R$. Se dice que a es fuertemente nilpotente si cada sucesión $a_0, a_1, a_2, ...$ en R con $a_0 = a$ y $a_{n+1} \in a_nRa_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ se vuelve cero después de un número finito de pasos.*

Definición 1.1.21 *Sea R un anillo. Un elemento $x \in R$ es cuasi-regular izquierdo (derecho) si $(1 - x)$ tiene inverso izquierdo (derecho) en R.*
Un subconjunto de R es cuasi-regular izquierdo (derecho) si cada elemento de R es cuasi-regular izquierdo (derecho).

Definición 1.1.22 *Sea M un R-módulo. Se dice que M es simple si $M \neq 0$ y no contiene submódulos propios no triviales.*

Definición 1.1.23 *Sea M un R-módulo. Se dice que M es semisimple si M es una suma directa de submódulos simples.*

Definición 1.1.24 *Sea M un R-módulo izquierdo. Para cada $X \subseteq M$, el anulador de X en R es $l_R(X) = \{r \in R \mid rx = 0$ para toda $x \in X\}$.*

Definición 1.1.25 *Sea M un R-módulo. Un elemento $x \in M$ es llamado singular si $l_R(x) \trianglelefteq {}_RR$. M es llamado no singular si no contiene elementos singulares no triviales.*

Definición 1.1.26 *Sea*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N$$

una sucesión exacta. Un R-módulo ${}_RU$ es plano si la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow K \otimes_R U \longrightarrow N \otimes_R U$$

es exacta para todo $N_R \in \mathbf{M_R}$ y para todo $K \leq N$.

Definición 1.1.27 *Un R-módulo P es proyectivo si siempre que se tenga la parte sólida del siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en ${}_\mathbf{R}\mathbf{M}$ con renglón exacto, existe un R-homomorfismo β tal que todo el diagrama conmuta.

Definición 1.1.28 *Sea A un R-módulo. Una resolución plana para A es una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

en la cual cada F_n es plano.

Definición 1.1.29 *Sea R un anillo. $wD(R) = sup\{d.p.(A) \mid A \in {}_\mathbf{R}\mathbf{M}\}$ es la dimensión global débil de R, donde $d.p.(A)$ es la dimensión plana de A.*

1.2. Caracterizaciones.

1.2.1. Una caracterización del radical de Jacobson.

Proposición 1.2.1 *Sea $M \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$. Entonces:*
$J(M) = \bigcap\{K \leq M \mid K \text{ es máximo en } M\} = \sum\{L \leq M \mid L \text{ es superfluo en } M\}$.

Demostración:

Como $K \leq M$ es máximo si y sólo si M/K es simple, la primera igualdad es inmediata de la definición de $Rej_M(\mathcal{S})$.

Sea $L \ll M$. Si $K \leq M$ es máximo y $L \nleq K$, entonces $L + K = M$, pero como $L \ll M$ entonces $K = M$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, cada submódulo superfluo de M está contenido en $J(M)$.

Sea $x \in M$. Si $N \leq M$ tal que $M = Rx + N$, entonces $N = M$ o existe $K \leq M$ máximo tal que $N \leq K$ y $x \notin K$. Si $x \in J(M)$, entonces lo último no puede ocurrir, de donde $x \in J(M) \Rightarrow Rx \ll M$.$\blacksquare$

1.2.2. Una caracterización de ideales primos.

Proposición 1.2.2 *Sean R un anillo y $P \leq R$. Para cualesquiera $A, B \leq R$ bilaterales son equivalentes*

a) $AB \subseteq P \Rightarrow\ A \subseteq P$ *o* $B \subseteq P$.
b) $P \subseteq A,\ P \subseteq B,\ AB \subseteq P \Rightarrow\ A = P$ *o* $B = P$.
c) $xRy \subseteq P \Rightarrow\ x \in P$ *o* $y \in P$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b)

$AB \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P$ o $B \subseteq P$ y por hipótesis $P \subseteq A$ y $P \subseteq B$. Por lo tanto, $P = A$ o $P = B$.

b) $\Rightarrow$ a)

$P \subseteq (A + P)$ y $P \subseteq (B + P)$. Además, $(A + P)(B + P) = AB + P = P$. Por lo tanto, $A + P = P$ o $B + P = P$ por lo que $A \subseteq P$ o $B \subseteq P$.

a) $\Rightarrow$ c)

Sean $x, y \in R$ y RxR, RyR los ideales generados por x y y respectivamente. $(RxR)(RyR) = RxRyR \subseteq P$ pues P es un ideal bilateral. Luego, $RxR \subseteq P$ o $RyR \subseteq P \Rightarrow\ x \in P$ o $y \in P$.

c) $\Rightarrow$ a)

Sean $x \in A$ y $y \in B$. Entonces, $xRy \subseteq AB \subseteq P \Rightarrow xRy \subseteq P \Rightarrow x \in P$ o $y \in P \Rightarrow A \subseteq P$ o $B \subseteq P$. ■

1.2.3. Una caracterización de ideales semiprimos.

Proposición 1.2.3 *Sean R un anillo y $J \leq R$. Para cualquier $A \leq R$ bilateral son equivalentes*

a) $J = \bigcap_{i\in I} P_i$, *con P_i primo para toda $i \in I$.*
b) $A^2 \subseteq J \Rightarrow A \subseteq J$.
c) $J \subseteq A$ *tal que* $A^2 \subseteq J \Rightarrow A = J$.
d) $xRx \subseteq J \Rightarrow x \in J$.

Demostración:
b)$\Rightarrow$ d)

Sean $x \in R$ y RxR el ideal generado por x. Se tiene que $(RxR)^2 = RxRxR \subseteq J$ pues J es ideal bilateral. Luego, $RxR \subseteq J$ y por lo tanto $x \in J$.

d)$\Rightarrow$ a)

Claramente, $J \subseteq \bigcap\{P \leq R \mid P$ es primo y $J \subseteq P\}$.

Sea $x_1 \notin J$. Entonces, $x_1Rx_1 \nsubseteq J$. Luego, existe $x_2 \in x_1Rx_1$ tal que x_2 no está en J. Inductivamente, construimos $x_1, \ldots, x_n \notin J$, $x_i \in x_{i-1}Rx_{i-1}$ para toda $i \in \{2, \ldots, n\}$.

$x_nRx_n \nsubseteq J$, $x_{n+1} \in x_nRx_n$ tal que $x_{n+1} \notin J$. Sea $S = \{x_i \mid\ i \in \mathbb{N}\}$, $x_i \notin J$ para toda i, $S \cap J = \emptyset$. Se afirma que existe $P \leq R$ primo tal que $J \subseteq P$ y $P \cap S = \emptyset$, lo que implicaría que $x_1 \notin P$ y habríamos terminado.

Sea $\mathcal{F} = \{{}_RI_R \leq R \mid\ I \cap S = \emptyset$ y $J \leq I\}$. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pues $J \in \mathcal{F}$. Sea $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$ una cadena en $\mathcal{F}$. $(\bigcup I_\alpha) \bigcap S = \emptyset$ y $J \subseteq (\bigcup I_\alpha)$. Luego, por Zorn, existe $P \in \mathcal{F}$ máximo. Veamos que P es primo.

Sean K, L tales que $P \nsubseteq K$, $P \nsubseteq L$ y $KL \subseteq P$. Así, existen x_i, x_j; sin pérdida de generalidad $i < j$, tales que $x_i \in K \cap S$ y $x_j \in L \cap S$. Luego, x_i en K implica $x_iRx_i \in KL \subseteq P$, lo cual es una contradicción pues $P \cap S = \emptyset$. Por lo tanto, P es primo.

a)$\Rightarrow$ b)

$A^2 \subseteq J \Rightarrow A^2 \subseteq \bigcap_{i\in I} P_i\ \forall i \in I \Rightarrow A^2 \subseteq P_i\ \forall i \in I \Rightarrow A \subseteq P_i\ \forall i \in I \Rightarrow A \subseteq \bigcap_{i\in I} P_i = J$.

b)$\Rightarrow$ c)

$A^2 \subseteq J \Rightarrow A \subseteq J$ y por hipótesis $J \subseteq A$. Por lo tanto $A = J$.

c)$\Rightarrow$ b)

$J \subseteq (A+J)$ y $(A+J)^2 = A+J = J$, pues $J \subseteq A$, y se tiene que $A \subseteq J$.$\blacksquare$

1.2.4. Una caracterización del radical primo de R.

Proposición 1.2.4 *Sea R un anillo. $N(R)$ es igual al conjunto de todos los elementos fuertemente nilpotentes de R.*

Demostración:

Supongamos que $a \notin N(R)$. Entonces, existe $P \leq R$ primo tal que $a_0 = a \notin P$ y $a_0 R a_0 \nsubseteq P$ (Proposición 1.2.3). Luego, existe $a_1 \in a_0 R a_0$ tal que $a_1 \notin P$ y, aplicando este argumento repetidamente, obtenemos una sucesión infinita $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $0 \neq a_{n+1} \in a_n R a_n$. Por lo tanto, a no es fuertemente nilpotente.

Ahora, supongamos que a no es fuertemente nilpotente. Aplicando el mismo argumento que en la proposición 1.2.3 (d) $\Rightarrow$ a)), llegamos a que $a \notin N(R)$. $\blacksquare$

1.2.5. Una caracterización de sumandos directos de un R-módulo.

Proposición 1.2.5 *Sea M un R-módulo izquierdo. Si $M = K \oplus K'$, entonces la proyección de M en K es el único epimorfismo $\pi_K : M \longrightarrow K$ que satisface*

a) $(\pi_k|_K) = 1_K$
b) $Nuc(\pi_K) = K'$.

Demostración:

De la definición de π_K es claro que π_K satisface a) y b). Si $g : M \longrightarrow K$ es tal que $(g\,|_K) = 1_K$ y $Nuc(g) = K'$, entonces para todo $k \in K$ y para todo $k' \in K'$, $g(k+k') = g(k) + g(k') = k = \pi_K(k+k')$, de donde π_K es único. $\blacksquare$

Lema 1 *Sea $e \in End\,({}_RM)$ idempotente. Entonces, $(1-e) \in End\,({}_RM)$ es un idempotente tal que*

$Nuc\ e = \{x \in M \mid\ x = (1-e)x\} = Im(1-e)$
$Im\ e = \{x \in M \mid\ x = ex\} = Nuc(1-e)$
$M = eM \oplus (1-e)M$

Demostración:
$e^2 = e \Rightarrow (1-e)^2 = (1-e)$ y $e(1-e) = (1-e)e = 0 \Rightarrow$
$Im\ e \subseteq \{x \in M \mid\ x = ex\} \subseteq Nuc(1-e)$
$Im(1-e) \subseteq \{x \in M \mid\ x = (1-e)x\} \subseteq Nuc\ e$
Pero como $x = ex + (1-e)x$ para toda $x \in M$, estas inclusiones no son estrictas y $M = eM + (1-e)M$. Además, $eM \cap (1-e)M = 0$ pues si $ex = (1-e)y$, entonces $ex = e^2x = e((1-e)y) = 0$. Así, se tiene que
$M = eM \oplus (1-e)M$. $\blacksquare$

Proposición 1.2.6 *Si* ${}_RM = K \oplus K'$, *entonces existe un único* $e \in End\,({}_RM)$ *idempotente tal que* $K = eM$ *y* $K' = (1-e)M$

Demostración:
Se sigue del lema y la proposición anteriores, pues si $e \in End\,({}_RM)$ idempotente, entonces $x \mapsto ex$ es la proyección de M en eM. $\blacksquare$

Corolario 1 $K \leq M$ *es sumando directo de* M *si y sólo si* $K = Im\ e$, *para algún* $e \in End\,({}_RM)$ *idempotente.* $\blacksquare$

Proposición 1.2.7 *Un ideal izquierdo de un anillo* R *es sumando directo de* R *si y sólo si existe* $e \in R$ *idempotente tal que* $I = Re$. *Más aún, si* $e \in R$ *es idempotente entonces* $(1-e)$ *es idempotente y* ${}_RR = Re \oplus R(1-e)$.

Demostración:
Se sigue del lema y el corolario anterior, notando que $End\,({}_RR) \cong R$. $\blacksquare$

1.3. Localización en P.

Sean R un anillo conmutativo y $P \leq R$ primo. Entonces, $S = R - P$ es multiplicativamente cerrado. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $R \times S$ como sigue

$$(a, s) \sim (b, t) \ \Leftrightarrow\ (at - bs)u = 0 \text{ para algún } u \in S$$

Indicamos por a/s a la clase de equivalencia de (a, s) y por R_P al conjunto de clases de equivalencia.

Los elementos a/s con $a \in P$ forman un ideal M en R_P. Si $b/t \notin M$, entonces $b \notin P$ y por lo tanto $b \in S$. Luego, b/t es una unidad en R_P. Se sigue que si $I \leq R_P$ e $I \nsubseteq M$, entonces I contiene una unidad y por lo tanto es todo el anillo. Por lo tanto, M es el único ideal máximo en R_P; es decir, R es un anillo local.

Al proceso de pasar de R a R_P se le denomina *localización en* P.

Capítulo 2

Anillos regulares.

2.1. Resultados básicos de teoría de módulos.

En esta sección se demostrarán algunos resultados de teoría general de módulos, que serán de utilidad para el desarrollo de la teoría de anillos regulares y V-anillos que se tratarán en las siguientes secciones.

Proposición 2.1.1 *Un R-módulo E es inyectivo si y sólo si para todo ideal ${}_RI \leq R$ y para todo homomorfismo $\alpha : I \longrightarrow E$ existe $y \in E$ tal que $\alpha(x) = xy$ para toda $x \in I$*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ E inyectivo $\Rightarrow E$ es R-inyectivo $\Rightarrow$ para todo $I \leq {}_RR$ y $h : I \longrightarrow E$ morfismo existe $\bar{h} : R \longrightarrow E$ tal que $\left(\bar{h} \mid_I\right) = h$. Sea $y = \bar{h}(1)$. Entonces, $h(x) = \bar{h}(x) = x\bar{h}(1) = xy$ para todo $x \in I$.
$\Longleftarrow\rfloor$ Si ${}_RI \leq R$, $y \in E$ y $h(x) = xy$ para toda $x \in I$, entonces la multiplicación por la derecha por y, $\rho(y) : R \longrightarrow E$ extiende a h. Luego, E es R-inyectivo y como ${}_RR$ es generador para ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ se tiene que E es inyectivo. ∎

Lema 2 *Sean $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos y A un S-módulo inyectivo derecho. Si ${}_RS$ es plano, entonces A también es inyectivo como R-módulo.*

Demostración:
Sean $J \leq R_R$ y $f \in Hom_R(J, A)$. Entonces, f induce un homomorfismo de S-módulos $J \otimes_R S \longrightarrow A \otimes_R S \longrightarrow A$. Como ${}_RS$ es plano, el morfismo natural $J \otimes_R S \longrightarrow JS$ es un isomorfismo. Por lo tanto, se tiene un morfismo g en $Hom_S(JS, A)$ tal que $(g \circ \varphi)(x) = f(x)$ para todo $x \in J$. Por la inyectividad de A_S, existe un elemento $a \in A$ tal que $g(y) = ay$ para todo $y \in JS$. Por lo tanto, $f(x) = (g \circ \varphi)(x) = a\varphi(x) = ax$ para todo $x \in J$. Luego, A_R es inyectivo. ∎

Lema 3 *Un R-módulo F es plano si y sólo si $\widehat{F} = Hom_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo inyectivo derecho.*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ Sea $\alpha : M \longrightarrow N$ monomorfismo de R-módulos derechos. Éste induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(N, Hom_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \arrow[r, "Hom(\alpha,1)"] \arrow[d, "\cong"'] & Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \arrow[d, "\cong"] \\
Hom_{\mathbb{Z}}(N \otimes_R F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "Hom(\alpha\otimes 1,1)"'] & Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

${}_RF$ plano $\Rightarrow$ $\alpha \otimes 1 : M \otimes_R F \longrightarrow N \otimes_R F$ es monomorfismo. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ inyectivo $\Rightarrow$ $Hom(\alpha \otimes 1, 1)$ es epimorfismo $\Rightarrow$ $Hom(\alpha, 1)$ es epimorfismo $\Rightarrow$ $Hom_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es inyectivo.
$\Longleftarrow\rfloor$ Revirtiendo el argumento anterior, $Hom(\alpha \otimes 1, 1)$ es epimorfismo. Sea $0 \neq x \in M \otimes_R F$. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo entonces existe $\varphi : M \otimes_R F \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ una $\mathbb{Z}$-función bilineal tal que $\varphi(x) \neq 0$.

$Hom(\alpha \otimes 1, 1)$ epimorfismo $\Rightarrow \varphi = \psi(\alpha \otimes 1)$ para algún morfismo $\psi : N \otimes_R F \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\varphi(x) \neq 0 \Rightarrow (\alpha \otimes 1)(x) \neq 0 \Rightarrow \alpha \otimes 1$ es monomorfismo. Por lo tanto, ${}_RF$ es plano. ∎

Proposición 2.1.2 *Un R-módulo F es plano si y sólo si $\lambda : I \otimes_R F \longrightarrow F$ es un monomorfismo para cada $I_R \leq R$ finitamente generado.*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ Es claro.
$\Longleftarrow\rfloor$ Sean $I_R \leq R$ finitamente generado y $\lambda : I \otimes_R F \longrightarrow F$ monomorfismo. Esto también se cumple para ideales derechos arbitrarios I, pues si $\sum a_i \otimes y_i \in I \otimes_R F$, entonces los a_i están en $J_R \leq I_R$ finitamente generado y el mapeo compuesto $J \otimes_R F \longrightarrow I \otimes_R F \longrightarrow F$ es monomorfismo. Si $\sum a_i \otimes y_i$ toma el valor de cero en F, $\sum a_i \otimes y_i$ es cero en $J \otimes_R F$ y por lo tanto cero en $I \otimes_R F$. La inclusión $I \hookrightarrow R$ induce un monomorfismo $I \otimes_R F \longrightarrow F$ y resulta un diagrama conmutativo como sigue

$$\begin{tikzcd}
Hom(R, \widehat{F}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\cong"'] & Hom(I, \widehat{F}) \arrow[d, "\cong"] \\
\widehat{F} \arrow[r, "\varphi"'] & \widehat{I \otimes_R F}
\end{tikzcd}$$

donde $\widehat{F} = Hom_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ e $\widehat{I \otimes_R F} = Hom_{\mathbb{Z}}(I \otimes_R F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. φ es epimorfismo pues $0 \longrightarrow I \otimes_R F \longrightarrow F$ es exacta y el funtor Hom es contravariante en la segunda entrada. Entonces, ψ es epimorfismo. Luego, se tiene que $\widehat{F}$ es inyectivo (Lema 3) y por lo tanto que F es plano (Proposición 2.1.1). ■

Lema 4 *Si $I_R \leq R$ y $M \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$, entonces $R/I \otimes_R M \cong M/IM$.*

Demostración:

$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$ exacta $\Rightarrow$

$I \otimes_R M \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow R/I \otimes_R M \longrightarrow 0$ exacta.

$Im\ \alpha = \{\sum a_i x_i \mid a_i \in I;\ x_i \in M\} = IM \Rightarrow R/I \otimes_R M \cong M/IM$ ■

Proposición 2.1.3 *Sea $\mathcal{U}$ una clase de módulos y sea M un módulo. Entonces, $Rej_M(\mathcal{U})$ es el único submódulo mínimo K de M tal que M/K es cogenerado por $\mathcal{U}$.*

Demostración:

Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto indicado en $\mathcal{U}$ y sea $h : M \longrightarrow \prod_A U_\alpha$ con $K = Nuc\, h$. Entonces, $K = \bigcap_A Nuc\,(\pi_K h) \supseteq Rej_M(\mathcal{U})$. Luego, si M/K es cogenerado por $\mathcal{U}, Rej_M(\mathcal{U}) \subseteq K$. Por otro lado, existe un conjunto indicado $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ en $\mathcal{U}$ y $h_\alpha : M \longrightarrow U_\alpha$ con $Rej_M(\mathcal{U}) = \bigcap_A Nuc\, h_\alpha$. Entonces, $\prod_A h_\alpha : M \longrightarrow \prod_A U_\alpha$ tiene como núcleo a $Rej_M(\mathcal{U})$. Por lo tanto, $M/Rej_M(\mathcal{U}) \in Cog(\mathcal{U})$ ■

2.2. Definición y caracterizaciones.

Definición 2.2.1 *Sea R un anillo. Se dice que R es regular si para todo $a \in R$ existe $x \in R$ tal que $a = axa$*

Lema 5 *Sean $J \leq K$ ideales bilaterales de un anillo R. Entonces, K es regular si y sólo si J y K/J son regulares.*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ Si K es regular, es claro que K/J es regular. Dado $x \in J$ se tiene que $x = xyx$ para algún $y \in K$. Entonces, $z = yxy \in J$ es tal que $x = xzx$ de donde J es regular.
$\Longleftarrow\rfloor$ Dado $x \in K$ se tiene que $x - xyx = (x - xyx)z(x - xyx)$ para algún $z \in J$, de donde se tiene que $x = xwx$ para algún $w \in K$. Por lo tanto, K es regular. ∎

Lema 6 *Sean $e_1, ..., e_n$ idempotentes ortogonales en un anillo R tales que $e_1 + \cdots + e_n = 1$. Entonces, R es regular si y sólo si para cada $x \in e_iRe_j$ existe $y \in e_jRe_i$ tal que $xyx = x$.*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ Sea $x \in e_iRe_j$. Entonces, $xyx = x$ para algún $y \in R$ y se observa que $x(e_jye_i)x = x$ que es lo que se buscaba.
$\Longleftarrow\rfloor$ Supongamos que para cualquier $x \in e_iRe_j$ existe $y \in e_jRe_i$ tal que $xyx = x$. Haciendo inducción sobre n, el caso para $n = 1$ es trivial así que se comenzará con el caso $n = 2$. Primero, considérese un elemento $x \in R$ tal que $e_1xe_2 = 0$. Existen elementos $y \in e_1Re_1$ y $z \in e_2Re_2$ tales que $(e_1xe_1)y(e_1xe_1) = e_1xe_1$ y $(e_2xe_2)z(e_2xe_2) = e_2xe_2$. Entonces,
$x(y+z)x = (e_1xe_1+e_2xe_1+e_2xe_2)(y+z)(e_1xe_1+e_2xe_1+e_2xe_2) = e_1xe_1ye_1xe_1+ e_2xe_1ye_1xe_1 + e_2xe_2ze_2xe_1 + e_2xe_2ze_2xe_2 = e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_2x(y + z)xe_1$.

Así, vemos que el elemento $x' = x - x(y + z)x$ está en e_2Re_1. Entonces, $x'wx' = x'$ para algún $w \in e_1Re_2$, de donde $xvx = x$ para algún $v \in R$.

Ahora, considérese un elemento general $x \in R$ y escójase un elemento y en e_2Re_1 tal que $(e_1xe_2)y(e_1xe_2) = e_1xe_2$. Como $y \in e_2Re_1$ vemos que $e_1xyxe_2 = e_1xe_2$, de donde $e_1(x-xyx)e_2 = 0$. Por el caso anterior, existe un elemento z en R tal que $(x-xyx)z(x-xyx) = x-xyx$. Así, $xwx = x$ para algún $w \in R$. Por lo tanto, R es regular.

Ahora, sea $n > 2$ y supongamos el resultado válido para $n - 1$ elementos idempotentes ortogonales. Tomando $f = e_2+\cdots+e_n$ y $g = e_1+e_3+\cdots+e_n$ sabemos que fRf y gRg son regulares. Considérese un elemento $x \in e_1Rf$. Entonces, existe $y \in e_2Re_1$ tal que $(xe_2)y(xe_2) = xe_2$ y entonces $(x - xyx)e_2 = 0$. Entonces, $x - xyx \in gRg$, por lo tanto $(x - xyx)z(x - xyx) =$

$x - xyx$ para algún z en gRg. Así, $xwx = x$ para algún $w \in R$ y por lo tanto obtenemos que fwe_1 en fRe_1 tal que $x(fwe_1)x = x$. Asimismo, para cualquier $x \in fRe_1$ existe algún t en e_1Rf tal que $xtx = x$. Aplicando el caso $n = 2$ a los idempotentes ortogonales e_1 y f concluimos que R es regular. ■

Teorema 1 *Sea R un anillo. Son equivalentes*
a) *R es regular.*
b) *Para todo ideal principal $Ra \leq R$ existe $e \in R$ idempotente tal que $Ra = Re$.*
c) *Para todo ideal ${}_RI \leq R$ finitamente generado, I es sumando directo de R.*
d) *Todo R-módulo es plano.*
e) *La dimensión global débil de R es cero.*
f) *Todo submódulo finitamente generado de un R-módulo proyectivo ${}_RP$ es sumando directo de ${}_RP$.*
g) *R/L es plano para todo ${}_RL \leq R$.*
h) *Para todo ${}_RL \leq R$ y para todo $K_R \leq R$ se tiene que $K \cap L = KL$.*

Demostración:

a)$\Rightarrow$ b)

Sea $Ra \leq R$. Si R es regular, entonces existe $x \in R$ tal que $a = axa$ de donde $(xa)^2 = xa$. Finalmente, $Ra = Rxa$.

b)$\Rightarrow$ a)

Sean $a, e \in R$ con e idempotente tales que $Ra = Re$. Entonces, existe x en R tal que $e = xa$ y existe $x' \in R$ tal que $a = x'e$. Entonces, $ae = x'e$ de donde $a = ae = axa$.

a)$\Rightarrow$ c)

Es suficiente probar que si $e, f \in R$ son idempotentes, entonces $Re + Rf$ es un ideal izquierdo principal.
$Re + Rf = Re + R(f - fe)$. Sea $x \in R$ tal que $f - fe = (f - fe)x(f - fe)$. Así $f' = (f - fe)x$ es idempotente con $f'e = 0$ y $Re + Rf = Re + Rf'$. Luego, $Re + Rf' = R(e + f' - ef')$ pues $e = e(e + f' - ef')$ y $f' = f'(e + f' - ef')$. Por lo tanto, $Re + Rf$ es un ideal izquierdo principal.

c)$\Rightarrow$ d)

Se sigue de la proposición 2.1.2.

d)$\Rightarrow$ g)

Sea ${}_RL \leq R$. Entonces, ${}_RL \leq {}_RR \Rightarrow R/L \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$. Así, R/L es plano.

g)⇒ h)
Sean ${}_RJ, K_R \leq R$.
$0 \longrightarrow K \longrightarrow R$ exacta $\Rightarrow$
$0 \longrightarrow K \otimes_R R/J \longrightarrow R/J$ exacta. $K \otimes_R R/J \cong K/KJ$ (Lema 4), de donde $K/KJ \hookrightarrow R/J$, es decir, $K \cap J = KJ$.

h)⇒ a)
Sea $a \in R$ y sean aR y Ra los ideales generados por a. Como $aR \cap Ra = aRa$ se tiene que $a \in aRa$ por lo que existe $x \in R$ tal que $a = axa$.

d)⇒ e)
Sea M un R-módulo. M plano implica que

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una resolución plana de M. Por lo tanto, $wD(R) = 0$

e)⇒ d)
$wD(R) = 0$ implica que para todo R-módulo M existe un R-módulo plano F tal que

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es resolución plana de M, y esto ocurre si y sólo si $F \cong M$.

a)⇒ f)
Caso I
Supongamos que P es libre. Entonces, $P \cong R^{(X)}$. Luego, $N \leq P$ finitamente generado $\Rightarrow N \leq R^{(n)}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Ahora, haciendo inducción sobre n, veamos que N es sumando directo de $R^{(n)}$. Si $n = 1$ entonces N es sumando directo de R.

Supongamos que $N \leq R^{(n)}$ implica que N es sumando directo de $R^{(n)}$ y probémoslo para $n+1$. Sea $\varphi : N \longrightarrow R$ tal que $\varphi(x) = x_1,$ donde $x = x_1 + ... + x_n$. Entonces, φ está bien definido. $Im\ \varphi = I \leq R$ finitamente generado implica que I es sumando directo de R, y entonces I es proyectivo. Luego, la sucesión

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

se escinde, es decir, $N \cong K \oplus I$. Luego, $K \leq R^{(n)} \Rightarrow$ (H.I.) K sumando directo de $R^{(n)}$, de donde N es sumando directo de $R^{(n+1)}$.

Caso II

P proyectivo implica que P es sumando directo de $R^{(X)}$, pero $N \leq P$ implica que N es sumando directo de P, por el caso anterior.

f)$\Rightarrow$ c)

Es claro. $\blacksquare$

Proposición 2.2.1 *$Rad(I) = \bigcap\{P \leq R \mid P$ es primo e $I \subseteq P\}$.*

Demostración:

$\subseteq]$ Sean $A = \{P \leq R \mid P$ es primo e $I \subseteq P\}$ y $a \in Rad(I)$. Entonces, $a^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego, $a^n \in P$ para todo $P \in A$, de donde $a \in P$ para todo $P \in A$ pues P es primo. Por lo tanto, $a \in \bigcap A$.

$\supseteq]$ Sea $a \in \bigcap A$ y supongamos que $a \notin Rad(I)$. Luego, $a^n \notin I$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\overline{0} \neq \overline{a^n} \in R/I$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que a no es fuertemente nilpotente en R/I, de donde $a \notin N(R/I) = \bigcap A$ (Proposición 1.2.4) lo cual es una contradicción. $\blacksquare$

Teorema 2 *Sea R un anillo conmutativo. Son equivalentes*

a) *R es regular.*

b) *Para todo ideal $I \leq R$ se tiene que $I^2 = I$.*

c) *Cada cociente de R es semiprimitivo.*

d) *Cada cociente de R es semiprimo.*

e) *R es semiprimo y cada ideal primo de R es máximo.*

f) *Cada ideal primario de R es máximo.*

g) *Cada R-módulo simple es inyectivo.*

Demostración:

a)$\Rightarrow$ b)

Sean $I \leq R$ y $a \in I$. Como R es regular existe $x \in R$ tal que $a = axa = xa^2 \in I^2$. Luego, $a \in I^2$. Por lo tanto, $I = I^2$.

b)$\Rightarrow$ a)

Sean $a \in R$ y Ra el ideal generado por a. Luego, $a \in Ra = (Ra)^2$. Entonces, existe $x \in R$ tal que $a = axa$. Por lo tanto, R es regular.

b)$\Rightarrow$ e)

Sea $I \leq R$ tal que $I^2 = 0$. Luego, $I^2 = I \Rightarrow I = 0$. Por lo tanto, R es semiprimo.

Sea $J \leq R$ primo. Entonces, R/J es un dominio entero. Sea $(a+J) \in R/J$. Existe $x \in R$ tal que $(a+J) = (a^2+J)(x+J) \Rightarrow (a+J)(x+J) = (1+J) \Rightarrow$

R/J es campo. Por lo tanto, J es máximo.

c)$\Rightarrow$ d)

Sea $I \leq R$. $J(R/I) = 0 \Rightarrow R/I$ es cogenerado por la clase de módulos simples (Proposición 2.1.3). Entonces, existe $\varphi : R/I \longrightarrow \prod_A S_\alpha$ monomorfismo tal que S_α es simple para toda $\alpha \in A$. Sea $\bar{0} \neq \bar{x} \in R/I$. Entonces, $(\varphi(\bar{x}))_\alpha \neq 0$ para algún $\alpha \in A$ de donde $(\varphi(\bar{x}))_\alpha^2 \neq 0$. Por lo tanto, R/I es semiprimo.

d)$\Rightarrow$ b)

Sea $I \leq R$ tal que $I \neq I^2$ y sea $0 \neq x \in I$. $\bar{x} \in I/I^2 \Rightarrow \overline{x^2} = 0$. Luego, R/I contiene nilpotentes distintos de cero lo cual es una contradicción. Por lo tanto, R es totalmente idempotente.

a)$\Rightarrow$ g)

Sean $J, M \leq R$ con M máximo y sea $f : J \longrightarrow R/M$ no cero.

$M \cap J = (M \cap J)^2 \leq MJ \leq Nuc\ f < J$. Por lo tanto, $J \nleq M$. Entonces, $x + y = 1$ para algún $x \in M$ y para algún $y \in J$.

Sea $w = f(y) \in R/M$. Si $a \in J$, entonces $a - ya = xa \in MJ \leq Nuc\ f$ y $f(a) = f(ya) = wa$. Por lo tanto, R/M es inyectivo.

g)$\Rightarrow$ e)

Primero, nótese que para todo ideal máximo M, $x \in M \Rightarrow x \in xM$ pues si no, sean M un ideal máximo y $x \in M$ tal que $x \notin xM$. Entonces, $xR/xM \neq 0$.

$\alpha : R \longrightarrow xR$ es epimorfismo así como $\beta : xR \longrightarrow xR/xM$. Entonces, $\beta \circ \alpha$ es epimorfismo y $Nuc(\beta \circ \alpha) = M$. Por lo tanto, $xR/xM \cong R/M$. Si $f : xR \longrightarrow R/M$ entonces existe $g : R \longrightarrow R/M$ que extiende a f. Pero, $g(1) = b + M$ y $g(x) = xb + M = f(x) = 0$ lo cual es una contradicción.

Así, sea $0 \neq x \in R$ tal que $x^2 = 0$. $J = \{r \in R \mid rx = 0\} < R$. Por lo tanto, existe $M \leq R$ máximo tal que $J \leq M$. $x \in J \leq M \Rightarrow x \in xM \Rightarrow x = xy$ para algún $y \in M \Rightarrow (1 - y) \in J \leq M$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, R es semiprimo.

Sean $P, M \leq R$ con P primo y M máximo tales que $P \leq M$. Sea $x \in M$. Entonces, $x \in xM \Rightarrow x(1 - y) = 0$ para algún $y \in M$. $(1 - y) \notin M \Rightarrow$
$(1 - y) \notin P \Rightarrow x \in P \Rightarrow P = M$. Por lo tanto, P es máximo.

e)$\Rightarrow$ f)

Sean $P \leq R$ primario y $(a+P), (b+P) \in R/P$ tales que $(a+P)(b+P) = 0$. Entonces, $(ab + P) = 0 \Rightarrow ab \in P \Rightarrow a \in P$ o $b^n \in P$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $a \notin P$ y haciendo inducción sobre n veamos que $b^n \in P \Rightarrow$

$b \in P$.

Para $n = 1$ es claro. Supongamos que $b^n \in P \Rightarrow b \in P$. Si $b^{n+1} \in P$ entonces $b^n b \in P \Rightarrow b^n \in P$ o $b^m \in P$.

Si $b^n \in P$, entonces por hipótesis de inducción $b \in P$. Si $b^m \in P$, entonces:

a) $m \leq n$ y por hipótesis de inducción $b \in P$.

b) $m > n$. Así, $b^m \in P \Rightarrow b^n b^{m-n} \in P$. Recursivamente, llegamos a que $m - n \leq n$ y aplicando hipótesis de inducción tenemos que $b \in P$. Luego, R/P es dominio entero de donde P es primo y, por lo tanto, máximo.

f)$\Rightarrow$ a)

Sea $M \leq R$ máximo. El anillo de fracciones $R_{(M)}$ tiene un único ideal máximo y, por lo tanto, primo. Sea P dicho ideal.

Si $I \leq R_{(M)}$ entonces $I \subseteq P$. $ab \in I \Rightarrow ab \in P \Rightarrow a \in P$ o $b \in P$. Como P es el radical de I (Proposición 2.2.1), entonces sucede que $a^n \in I$ o $b^m \in I$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$. Así, I es primario. Luego, $\varphi^{-1}(I)$ es primario, donde $\varphi : R \longrightarrow R_{(M)}$. Entonces, $\varphi^{-1}(I)$ es máximo. $\varphi^{-1}(I) \subseteq M \Rightarrow \varphi^{-1}(I) = M \Rightarrow I = P$. En particular, $\langle 0 \rangle = P$. Por lo tanto, $R_{(M)}$ es un campo para todo $M \leq R$ máximo.

Ahora, $a \in R$ invertible $\Rightarrow$ a regular, pues $a = aa^{-1}a$. Sean $a \in R$ no invertible y $J = \{t \in R \mid \ at = 0\}$. Claramente, $J \leq R$. Se afirma que si $M \leq R$ máximo tal que $a \in M$, entonces $J \nsubseteq M$ pues si no, sean $M \leq R$ máximo tal que $a \in M$ y $J \subseteq M$. Entonces, $\bar{a}$ no es unidad en $R_{(M)}$. Así, $\bar{a} = \bar{0}$. Luego, existe $t \in R - M$ tal que $at = 0$ de donde $t \in J$. Entonces, $t \in M$ lo cual es una contradicción.

Luego, $J + \langle a \rangle = R$. Entonces, existen $t \in J$ y $s \in R$ tales que $1 = t + sa$, de donde $a = at + asa = asa$. Por lo tanto, $a \in R$ no invertible es regular y, por lo tanto, R es regular.

g)$\Rightarrow$ c)

Sean $I \leq R$ y $f : R \longrightarrow \prod R/M$ morfismo tal que $I \subseteq M$ y M es máximo. Si $I \subset Nuc\ f = \bigcap M$ entonces existe $x \in Nuc\ f$ tal que $x \notin I$. Luego, existe P ideal primo tal que $x \notin P$. Pero por e), P es máximo lo cual es una contradicción. Así, $I = Nuc\ f$ y se tiene $R/I \hookrightarrow \prod R/M$ de donde $J(R/I) = 0$.■

Teorema 3 ***(Fisher-Snider)*** *Un anillo R es regular si y sólo si*

a) *R es semiprimo.*

b) *La unión de cada cadena ascendente de ideales semiprimos de R es semiprimo.*

c) *Si $P \leq R$ primo, entonces R/P es regular.*

Demostración:

$\Longrightarrow\rfloor$ Si ${}_R I \leq R$, entonces $I^2 = I$. Luego, si $I^2 = 0$ se tiene que $I = 0$. Por lo tanto, R es semiprimo.

R totalmente idempotente implica que todo ideal de R es semiprimo y, por lo tanto, se tiene b). El inciso c) es inmediato.

$\Longleftarrow\rfloor$ Supongamos que R no es regular. Entonces, existe $x \in R$ tal que $x \notin xRx$. Obsérvese que $\{0\}$ es un ideal semiprimo de R tal que $x \notin xRx+0$. En vista de b), existe $J \leq R$ semiprimo el cual es máximo (entre los ideales semiprimos) con respecto a la propiedad $x \notin xRx + J$.

R/J no es regular, entonces por c) se tiene que J no es primo. Así, existen A y B ideales bilaterales de R tales que $J \nleq A$, $J \nleq B$ y $AB \leq J$. Sean $K = \{r \in R \mid \ rB \leq J\}$ y $L = \{r \in R \mid \ Kr \leq J\}$. K y L son semiprimos pues si $I^2 \subseteq L$, entonces $(KI)^2 = KIKI \subseteq KI^2 \subseteq KL \subseteq J$. Luego, $KI \subseteq J$ de donde $I \subseteq L$ y se tiene que L es semiprimo. Análogamente, K es semiprimo.

Nótese que $(K \cap L)^2 \leq KL \leq J \Rightarrow K \cap L \leq J$. Claramente, se tiene que $A \leq K$ y $B \leq L$. Por lo tanto, $J \nleq K$ y $J \nleq L$. Luego, como J es máximo existen y, z en R tales que $x - xyx \in K$ y $x - xzx \in L$.

$x-x(y+z-yxz)x = (x-xyx)-(x-xyx)zx \in K$ y $x-x(y+z-yxz)x = (x - xzx) - xy(x - xzx) \in L$. Entonces, $x \in xRx + (K \cap L) \subseteq xRx + J$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, R es regular. ∎

Corolario 2 *Un anillo R es regular si y sólo si $I^2 = I$ para todo I ideal bilateral de R y R/P es regular para todo $P \leq R$ primo.*

Demostración:

$\Longrightarrow\rfloor$ Supongamos que existe $I \leq R$ bilateral tal que $I^2 \neq I$. Entonces, como $I/I^2 \leq R/I^2$ nilpotente no cero se tiene que R/I^2 no es semiprimo y que R no es regular. Por lo tanto, $I^2 = I$ para todo ideal bilateral I de R. La segunda condición se sigue directamente del teorema anterior.

$\Longleftarrow\rfloor$ $I^2 = I$ para todo ideal bilateral de $R \Rightarrow I$ es semiprimo para todo ideal bilateral I de $R \Rightarrow$ la unión de cualquier cadena de ideales semiprimos de R es semiprimo. $R \leq R \Rightarrow R$ semiprimo. Por lo tanto, R es regular. ∎

Lema 7 *Sean R un anillo y A un R-módulo cíclico izquierdo. Son equivalentes*

a) *A es R-plano.*

b) *$Tor_1^R(R/I, A) = 0$ para todo $I \leq R$ principal.*

c) *Si $A = R/J$, $\varphi : R \longrightarrow A$, $\bar{a}$ la imagen del 1 en A y $x \in J$, entonces existe $y \in R$ tal que $xy = 0$ y $y\bar{a} = \bar{a}$.*

Demostración:

a)$\Rightarrow$ b)

Consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$. Ésta induce la siguiente sucesión exacta

$Tor_1^R(R,A) \longrightarrow Tor_1^R(R/I,A) \longrightarrow I \otimes_R A \longrightarrow A \longrightarrow R/I \otimes_R A$

de la que se tiene que $Tor_1^R(R,A) = 0$ pues R es proyectivo. Luego, $I \otimes_R A \longrightarrow A$ es monomorfismo pues A es plano, de donde $Tor_1^R(R/I,A) = 0$.

b)$\Rightarrow$ c)

Sean $x \in J$ e $I = xR$. $Tor_1^R(R/I, R/J) = IJ/I \cap J = 0$, de donde $IJ = I \cap J$. Entonces, $x \in I \cap J = IJ$ implica que existe $z \in J$ tal que $x = xz$. Así, $z\bar{a} = 0$ en R/J y entonces, $y = 1 - z$ cumple que $xy = 0$ y $y\bar{a} = \bar{a}$.

c)$\Rightarrow$ a)

Sean $I_R \leq R$ y $B = R/I$. De c) se tiene que $y\bar{a} = \bar{a} \Rightarrow y\bar{a} - \bar{a} = 0 \Rightarrow y - 1 \in J$. Sea $-z = y - 1$.

Si $x \in I \cap J$, entonces existe $z \in J$ $(z = 1 - y)$ tal que $xz = x$. Entonces, $x \in IJ$ de donde $IJ = I \cap J$. Por lo tanto, $Tor_1^R(B,A) = 0$ para todo R-módulo cíclico B. Y entonces, se tiene que A es R-plano. ■

Lema 8 *Sean R un anillo, G un grupo, $R[G]$ el anillo de grupo y $g_1, ..., g_n$ en G. Entonces, $S = < g_1, ..., g_n >$ es finito si y sólo si existe $x \in R[G]$ tal que $(1 - g_i)x = 0$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demostración:

$\Longrightarrow\rfloor$ Supongamos que S es finito. Sean $\bar{x} = \sum_{s \in S} s$ e $i \in \{1, ..., n\}$. Todos los elementos de la forma $g_i s$, con $s \in S$, son distintos, pues si $g_i s = g_i s'$ entonces $s = s'$. Así, $\sum_{s \in S} g_i s = \sum_{s \in S} s = \bar{x}$, pues S es finito. Luego, $g_i \bar{x} = \bar{x}$ y entonces $(1 - g_i)\bar{x} = 0$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$.

$\Longleftarrow\rfloor$ Supongamos que existe $x \in R[g]$ tal que $(1 - g_i)x = 0$ para toda i en $\{1, ..., n\}$. Entonces, $x = g_1 x = ... = g_n x$ de donde $sx = x$ para toda $s \in S$. Sea $x = \sum_{j=1}^m r_j h_j$; $r_j \in R$, $h_j \in G$. $sx = x$ para toda $s \in S \Rightarrow x$ tiene un término $r_j s h_j$ para toda $s \in S$. Obsérvese que si $s \neq s'$, entonces $r_j s h_j \neq r_j s' h_j$. Así, dado que x es una suma finita y contiene un término $r_j s h_j$ para toda $s \in S$, se tiene que S es finito. ■

Lema 9 *Sean R un anillo, G un grupo y $R[G]$ el anillo de grupo.*
Sean $\varphi : R[G] \longrightarrow R$ defnida como
$\varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i$ y $K[G] = Nuc\ \varphi$. Entonces, $R \cong R[G]/K[G]$ es un $R[G]$-módulo izquierdo plano si y sólo si
a) *G es localmente finito.*
b) *El orden de cada elemento de G es una unidad en R.*

Demostración:

$\Longrightarrow]$ Supongamos que R es $R[G]$-plano. Sea $\mathcal{H} =< g_1, ..., g_n >$. $(1 - g_i)$ en $K[G]$ implica que existe $x_1 \in R[G]$ tal que $(1 - g_i)x_1 = 0$ (Lema 7).

$(1 - g_2)x_1 \in K[G] \Rightarrow \exists\, x_2 \in R[G]$ tal que $(1 - g_2)x_1x_2 = 0$. Así, por inducción, existe $x \in R[G]$ tal que $(1 - g_i)x = 0$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es finito (Lema 8).

Sea $g \in G$ tal que $\mathcal{O}(g) = m$. $(1 - g)x = 0$ para alguna $x \in R[G]$ (Lema 7). Luego, ya que $x = \bar{x}y$ (Lema 8), $1 = \varphi(x) = \varphi(\bar{x}y) = \varphi(\bar{x})\varphi(y) = m\varphi(y)$. Por lo tanto, $m = \mathcal{O}(g)$ es una unidad en R.

$\Longleftarrow]$ Sea $z \in K[G]$. $z = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i = \sum_{i=1}^{n} r_i(g_i - 1)$. Sea $H =< g_1, ..., g_n >$ y sean $m = \mathcal{O}(H)$, $\bar{x} = \sum_{j=1}^{m} h_j$ tal que $h_j \in H$.

$z \in K[G] \Rightarrow \exists\, y \in R[G]$ tal que $zy = 0$. $y = x\bar{y}$ (Lema 8) de donde $1 = \varphi(y) = \varphi(\bar{x}y') = m\varphi(y')$. Por lo tanto, m tiene inverso en R.

Sea $r = \bar{x}m^{-1}$. Entonces, $zr = z\bar{x}m^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i(1 - g_i)\right)\bar{x}m^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i(1 - g_i)\bar{x}\right)m^{-1} = 0$. Además, $\varphi(r) = 1$. Por lo tanto, $R[G]/K[G]$ es plano (Lema 7). ■

Lema 10 *Sean R un anillo y G un grupo finito tal que $\mid G \mid= n$, con n unidad en R. Entonces, cualquier $R[G]$-módulo derecho es proyectivo si es proyectivo como R-módulo derecho.*

Demostración:

Sea P un $R[G]$-módulo derecho tal que P es proyectivo como R-módulo derecho.

Sean $\phi : P_{R[G]} \longrightarrow M_{R[G]}$ morfismo y $\pi : N_{R[G]} \longrightarrow M_{R[G]}$ epimorfismo. Entonces, existe $\psi : P_R \longrightarrow N_R$ tal que $\pi \circ \psi = \phi$.

Definimos $\rho(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \psi(xg)g^{-1}$, donde $\rho : P_{R[G]} \longrightarrow N_{R[G]}$. Es fácil ver que ρ es un $R[G]$-morfismo así como probar que $\pi \circ \rho = \phi$. Por lo tanto, P es proyectivo como $R[G]$-módulo derecho. ■

Lema 11 *Sean R un anillo y G un grupo tal que $\mid G \mid= n$, con n unidad en R. Si R es regular, entonces $R[G]$ es regular.*

Demostración:

Es claro que $R[G]$ es un R-módulo libre finitamente generado y, por lo tanto, $R[G]$ es un R-módulo proyectivo.

Sea $r \in R[G]$. Entonces, $rR[G]$ es sumando directo de $R[G]_R$ (Teorema 1,f). $R[G]$ un R-módulo libre $\Rightarrow rR[G]$ proyectivo. Así, $rR[G]$ es un $R[G]$-módulo proyectivo (Lema 10). Luego, como $R[G] \longrightarrow rR[G] \longrightarrow 0$ se escinde, $rR[G]$ es sumando directo de $R[G]_{R[G]}$. Por lo tanto, $R[G]$ es regular (Teorema 1,f). ■

Teorema 4 ***(Auslander, McLaughlin, Villamayor, Connell)*** *El anillo de grupo $R[G]$ es regular si y sólo si*
a) *R es regular.*
b) *G es localmente finito.*
c) *El orden de cada elemento de G es una unidad.*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ Sea $a \in R$. Luego, $a = ae \in R[G] \Rightarrow \exists \beta \in R[G]$ tal que $a = a\beta a$. Sea $\beta = \sum_{x\in G} b_x x$. $a\beta a = \sum_{x\in G} ab_x ax$. El coeficiente de e es $ab_e e$. Por lo tanto, $a = ab_e a$ y se tiene que R es regular.

Que G es localmente finito y que el orden de cada elemento de G es una unidad es claro (Teorema 1,d y Lema 9).
$\Longleftarrow\rfloor$ Sea $\alpha \in R[G]$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i g_i$. Sea $H =< g_1, ..., g_n >$. Entonces, H es finito. Luego, $R[H]$ es regular (Lema 11). Así, $\alpha \in R[H] \Rightarrow \exists\ \alpha' \in R[H]$ tal que $\alpha = \alpha\alpha'\alpha$. $R[H] \subset R[G] \Rightarrow \alpha' \in R[G]$. Por lo tanto, R es regular. ∎

Proposición 2.2.2 *Sean R un anillo e ${}_R I \leq R$. Son equivalentes:*
a) *I es cuasi-regular izquierdo.*
b) *I es cuasi-regular.*
c) *I es superfluo en R.*

Demostración:
a)⇒ b)

Sea $x \in I$. x cuasi-regular izquierdo implica que existe $x' \in R$ tal que $x'(1-x) = 1$. Como $x'x \in I$ es cuasi-regular izquierdo y como $x' = 1 + x'x = 1 - (-x'x)$, existe $y \in R$ tal que $yx' = 1$. Luego, x' es invertible y $y = 1 - x$. Por lo tanto, $(1-x)x' = 1$ y x es cuasi-regular.

b)⇒ c)

Sea $K \leq R$ tal que $R = I + K$. Entonces, existen $x \in I$ y $k \in K$ tales que $x + k = 1$. Luego, $k = 1 - x$ es invertible, pues x es cuasi-regular, y se tiene que $1 \in K$. Por lo tanto, $K = R$.

c)⇒ a)

Sea $x \in I$. Entonces, $Rx \ll R$. Pero $R = Rx + R(1-x)$ de donde $R = R(1-x)$ y se tiene que x es cuasi-regular izquierdo. ∎

Teorema 5 *Sean M un R-módulo autoinyectivo izquierdo y $Q = End_R(M)$. Entonces:*
a) *$J(Q) = \{f \in Q \mid Nuc\ f \trianglelefteq M\}$.*
b) *$Q/J(Q)$ es regular.*
c) *Si $J(Q) = 0$, entonces Q es autoinyectivo izquierdo.*

Demostración:

a) y b)

Sea $K = \{f \in Q \mid Nuc\ f \trianglelefteq M\}$ y sean $f, g \in K$. Ahora, como se tiene que $(Nuc\ f) \cap (Nuc\ g) \leq Nuc\ (f-g)$ entonces $Nuc\ (f-g) \trianglelefteq M$ y $(f-g) \in K$. Dado $h \in Q$, se tiene que $Nuc\ (fh) = h^{-1}(Nuc\ f) \trianglelefteq M$ por lo que $fh \in K$. Además, como $Nuc\ f \leq Nuc\ (hf)$ vemos que $hf \in K$. Por lo tanto, $K \leq Q$ bilateral.

Dado $f \in K$, tenemos que $Nuc\ f \trianglelefteq M$ y $[Nuc\ (1-f)] \cap [Nuc\ f] = 0$ por lo que $Nuc\ (1-f) = 0$. Luego, $1-f$ nos da un isomorfismo de M en $(1-f)(M)$, y el isomorfismo inverso $(1-f)(M) \longrightarrow M$ se extiende a un morfismo $g \in Q$ tal que $g(1-f) = 1$. Luego, f es un elemento cuasi-regular izquierdo de Q por lo que $K \leq J(Q)$ (Proposición 2.1.5).

Dado $f \in Q$ podemos tomar $N \leq M$ tal que $N \oplus (Nuc\ f) \trianglelefteq M$. Entonces, la restricción de f nos da un isomorfismo de N en $f(N)$ y el isomorfismo inverso $f(N) \longrightarrow N$ se extiende a un mapeo $g \in Q$ tal que $gf = 1$ en N. Así, $(fgf - f)(N) = 0$ por lo que $N \oplus (Nuc\ f) \leq Nuc\ (fgf - f)$ de donde $(fgf - f)$ está en K y, por lo tanto, $\overline{fgf} = \overline{f}$ en Q/K. Por lo tanto, Q/K es regular.

Ahora, $J(Q/K) = 0$ pues Q/K es regular, y se tiene que entonces $J(Q) = K$. Por lo tanto, $Q/J(Q)$ es regular.

c)

Como Q es regular (por b), M es un Q-módulo derecho plano. Sea $J \leq Q$ y sea $f \in Hom_Q(J, {}_QQ)$. Como M_Q es plano, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \otimes_Q J \arrow[r, "f\otimes 1"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes_Q Q \arrow[d, "\cong"] \\ JA \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

donde el morfismo g se extiende a un morfismo $h \in Q$ tal que $h(xy) = xf(y)$, para todo $x \in A$ y todo $y \in J$. Por lo tanto, Q es un anillo autoinyectivo. ∎

Corolario 3 *Sean M un R-módulo derecho y $Q = End_R(M)$. Si M es autoinyectivo semisimple o es autoinyectivo no singular, entonces Q es un anillo regular autoinyectivo derecho.*

Demostración:
Como en cualquier caso M es autoinyectivo, basta probar que $J(Q) = 0$. Dado $f \in J(Q)$, se tiene que $Nuc\ f \trianglelefteq M$. Si M es semisimple, entonces $Nuc\ f = M$ y $f = 0$. Si M es no singular entonces, como $f(M) \cong M/Nuc\ f$ es singular, tenemos que $f = 0$. Entonces, en ambos casos, $J(Q) = 0$. ■

Capítulo 3

V-anillos.

3.1. Una caracterización de módulos cogeneradores de ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$.

Lema 12 *Un R-módulo izquierdo M es un cogenerador de ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ si y sólo si M contiene la cápsula inyectiva de cada R-módulo izquierdo simple.*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ Sean M un cogenerador y S un R-módulo simple. Sean $E(S)$ la cápsula inyectiva de S e $i : S \longrightarrow E(S)$. Como M es cogenerador se tiene que existe $f : E(S) \longrightarrow M$ tal que $f \circ i \neq 0$, es decir, $(Nuc\ f) \cap S = 0 \Rightarrow Nuc\ f = 0 \Rightarrow f$ es inyectiva.
$\Longleftarrow\rfloor$ Sean $N \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}, 0 \neq x \in N$ y Rx el R-módulo generado por x. Rx cíclico implica que Rx contiene máximos de donde existen $S \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$ simple y $f : Rx \longrightarrow S$ epimorfismo. Consideremos $f \circ i : Rx \longrightarrow E(S)$, donde $i : S \hookrightarrow E(S)$. Como $E(S)$ es inyectivo, existe $g : N \longrightarrow E(S)$ que extiende a $f \circ i$. Luego, la composición $i' \circ g : N \longrightarrow M$, donde $i' : E(S) \hookrightarrow M$, es tal que evaluada en x es distinta de cero. Por lo tanto, M es un cogenerador de ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{M}$.$\blacksquare$

3.2. Definición y caracterizaciones.

Definición 3.2.1 *Un anillo R es llamado V-anillo izquierdo (derecho) si cada R-módulo izquierdo (derecho) simple es inyectivo.*

Teorema 6 *Sea R un anillo. Son equivalentes*
a) *R es un V-anillo izquierdo.*
b) *Todo ideal izquierdo de R es una intersección de ideales izquierdos máximos de R.*
c) *Cada R-módulo izquierdo tiene la propiedad de que el cero es una intersección de submódulos máximos.*
d) *La categoría de los R-módulos izquierdos tiene un cogenerador, el cual es una suma directa de R-módulos simples.*

Demostración:
a)$\Rightarrow$ c)
Sea M un R-módulo izquierdo, donde R es un V-anillo. Si $0 \neq x \in M$ entonces, por el lema de Zorn, existe $Y \leq M$ el cual es máximo entre los submódulos $\mathcal{X}$ de M con $x \notin \mathcal{X}$.

Sea $D = \bigcap \{S \leq M \mid Y < S\}$. Entonces, $x \in D$ y $D/Y \neq 0$ es simple, por lo tanto inyectivo. Luego,

$$0 \longrightarrow D/Y \longrightarrow M/Y$$

se escinde, de donde $M/Y = D/Y \oplus K/Y$, con $K \leq M$. Como $x \notin K$, entonces $Y \leq M$ es máximo. Así, $0 = \bigcap\{Y \leq M \mid Y \text{ es máximo}\}$.

c)$\Rightarrow$ b)
Sea ${}_R I \leq R$. Viendo a R/I como R-módulo izquierdo se tiene que
$I = \bigcap_{\alpha \in A} J_\alpha$, donde $J_\alpha \leq R$ es máximo para toda $\alpha \in A$.

b)$\Rightarrow$ a)
Sean S un R-módulo simple e ${}_R I \leq R$. Si $\alpha \in Hom_R(I, S)$ y si $K = Nuc\ \alpha$, entonces existe $M \leq R$ máximo tal que $K \leq M$ pero $I \nleq M$. Como I/K es simple, $M \cap I = K$. Entonces, $R/M = (M + I)/M \cong I/M \cap I = I/K \cong S$. Así, α se puede extender a un R-homomorfismo $\alpha' \in Hom_R(R, S)$. Por lo tanto, S es inyectivo.

a)$\Leftrightarrow$ d)
Se sigue directamente del lema anterior. ∎

Corolario 4 *Si R es un V anillo izquierdo, entonces $I^2 = I$ para todo ideal ${}_R I \leq R$*

Demostración:
Sea $I \leq R$ y supongamos que $I^2 \neq I$. Entonces, existe $M \leq R$ máximo tal que $I^2 \leq M$ pero $I \nleq M$. Luego, $1 = x + m$ para algunos $x \in I$ y $m \in M$ de donde $x = x^2 + xm \in M$, lo cual es una contradicción. Así, $I^2 = I$. ∎

Teorema 7 *Sea R un anillo. Son equivalentes*
a) *R es totalmente idempotente.*
b) *Para todo $a \in R$ existe $x \in RaR$ tal que $a = xa$.*
c) *Para todo ideal bilateral I de R se tiene que R/I es un R-módulo izquierdo plano.*
d) *Cada R/I-módulo izquierdo inyectivo es inyectivo como R-módulo izquierdo canónico.*
e) *Para todo ideal izquierdo $L \leq R$ y para todo ideal bilateral $I \leq R$ se tiene que $I \cap L = IL$.*

Demostración:
c)$\Rightarrow$ e)
Sean L ideal izquierdo de R e I ideal bilateral de R. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow R$$

R/I plano implica que la sucesión

$$0 \longrightarrow R/I \otimes_R L \longrightarrow R/I$$

es exacta. $R/I \otimes_R L \cong L/LI \Rightarrow L/LI \hookrightarrow R/I \Rightarrow I \cap L = IL$

e)$\Rightarrow$ b)
Sea a en R. Luego, $a \in Ra$ y $a \in RaR \Rightarrow a \in (RaR) \cap (Ra) = RaRa \Rightarrow a = \sum_{i=1}^{n} r_i a s_i a$; con $r_i, s_i \in R$. Sea $x = \sum_{i=1}^{n} r_i a s_i \in RaR$. Entonces, $a = xa$.

b)$\Rightarrow$ a)
Sea ${}_RI \leq R$. Como $I^2 \subseteq I$, sólo hay que verificar la otra contención. Sea $a \in I$. Entonces, existe $x \in RaR$ tal que $a = xa = \sum_{i=1}^{n} r_i a s_i a$; con r_i, s_i en R. $\sum_{i=1}^{n} r_i a \in I$ y $\sum_{i=1}^{n} s_i a \in I \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i a s_i a \in I^2$. Así, $I \subseteq I^2$ y por lo tanto se tiene que $I = I^2$.

a)$\Rightarrow$ d)
Sean ${}_RJ \leq R$ y M un R/I-módulo. Sea $\varphi : J \longrightarrow M$.
$\varphi(J \cap I) = 0$ pues si $a \in (J \cap I) = (J \cap I)^2$ se tiene que $a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$; con a_i, b_i en $(J \cap I)$, y entonces $\varphi(a) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(b_i) = 0$, pues I anula a M. Luego, se tiene que $\bar{\varphi} : J/(J \cap I) \longrightarrow M$inducida por φ, pero $J/(J \cap I) \cong (I + J)/I$ y se tiene

$$
\begin{tikzcd}
J \arrow[r] & (I+J)/I \arrow[r] \arrow[d, "i"] & M \\
R \arrow[r, "g"] & R/I \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde $f \circ g$ extiende a φ. Por lo tanto, M es un R-módulo inyectivo.

d)$\Rightarrow$ c)

Sea I un ideal bilateral de R. Entonces, $Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R/I-módulo inyectivo, de donde $Hom_{\mathbb{Z}}(R/I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$es R-inyectivo. Por lo tanto, ${}_RR/I$ es plano. $\blacksquare$

Teorema 8 *Sean R un anillo conmutativo y G un grupo. Entonces, el anillo de grupo $R[G]$ es totalmente idempotente si y sólo si*
a) *R es totalmente idempotente.*
b) *G es localmente finito.*
c) *El orden de cada elemento de G es una unidad en R.*

Demostración:
$\Longrightarrow\rfloor$ Sea $\varphi : R[G] \longrightarrow R$ como en el lema 6. $K[G] \leq R[G]$ bilateral $\Rightarrow R$ es plano, por lo que b) y c) se cumplen (Lema 6).

Sea ${}_RI \leq R$. Entonces, $J = \varphi^{-1}(I) \leq R[G]$. Si $r \in I$, entonces existe $s \in J$ tal que $\varphi(s) = r$. Luego,$J = J^2 \Rightarrow s = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; con $x_i, y_i \in J$. Entonces, $r = \varphi(s) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\varphi(y_i) \in I^2$. Por lo tanto, R es totalmente idempotente.
$\Longleftarrow\rfloor$ R conmutativo y totalmente idempotente implica que R es regular (Teorema 2) lo que implica que $R[G]$ es regular (Teorema 4) y conmutativo lo que implica que $R[G]$ es totalmente idempotente. $\blacksquare$

Teorema 9 ***(Micheler-Villamayor)*** *Sean R un anillo y G un grupo. Si el anillo de grupo $R[G]$ es un V-anillo izquierdo, entonces*
a) *R es un V-anillo izquierdo.*
b) *G es localmente finito.*
c) *El orden de cada elemento en G es una unidad en R.*

Demostración:

$R[G]$ un V-anillo $\Rightarrow R[G]$ totalmente idempotente $\Rightarrow$ b) y c).

Sea S un R-módulo simple. Entonces, S un $R[G]$-módulo simple $\Rightarrow S$ es un $R[G]$-módulo inyectivo.

$R[G]$ un V-anillo $\Rightarrow R[G]$ totalmente idempotente $\Rightarrow S$ es un R-módulo inyectivo pues R es plano como $R[G]$-módulo. Así, R es un V-anillo. $\blacksquare$

Teorema 10 ***(Micheler-Villamayor)*** *Sea G un grupo finito. Entonces, $R[G]$ es un V-anillo izquierdo si y sólo si R es un V-anillo izquierdo y el orden de G es una unidad en R.*

Demostración:
$\Longrightarrow \rfloor$ R es un V-anillo izquierdo (Teorema 5). Sean $\mid G \mid = n$ y $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ la descomposición de n como producto de potencias de primos. Por el teorema de Cauchy, existe $x_i \in G$ tal que $\mid x_i \mid = p_i$, de donde p_i es una unidad en R por lo que $p_i^{\alpha_i}$ es una unidad en R y, por lo tanto, n es una unidad en R.
$\Longleftarrow \rfloor$ Sea M un $R[G]$-módulo izquierdo simple. Entonces, $M = R[G]y$ para todo $0 \neq y \in M$. $x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m}(x_i a_i)y = \sum_{i=1}^{m}[(x_i y)a_i] \Rightarrow \{x_1 y, ..., x_m y\}$ genera a M como R-módulo lo que implica que existe $V \leq M$ máximo. Sea $N = \bigcap_{g \in G} gV$. Entonces, $N \lneq M$ como $R[G]$-módulo. Por lo tanto, $N = 0$ y M, como R-módulo, es isomorfo a un sumando directo del R-módulo $X = \bigoplus_{g \in G} M/gV$. Luego,$X$ es inyectivo.

Sea $0 \longrightarrow P \longrightarrow Q$ una sucesión exacta de $R[G]$-módulos y sea $\varphi \in Hom_{R[G]}(P, M)$. Entonces, existe $\psi \in Hom_R(Q, M)$ con $\psi(p) = \varphi(p)$ para toda $p \in P$, pues ${}_RM$ es inyectivo. Si para toda $q \in Q$ definimos $\tilde{\varphi}(q) = 1/n \sum_{g \in G} \psi(qg)g^{-1}$, entonces $\tilde{\varphi} \in Hom_{R[G]}(Q, M)$ y $\tilde{\varphi}(p) = \varphi(p)$ para toda $p \in P$. Por lo tanto, M es un $R[G]$-módulo inyectivo, de donde $R[G]$ es un V-anillo. ∎

Capítulo 4

Ejemplos.

Ejemplo 1 *Cualquier producto subdirecto finito de anillos regulares es regular.*

Demostración:
Basta considerar un anillo R que sea el producto subdirecto de dos anillos regulares S_1 y S_2.
Entonces, existe $f : R \longrightarrow S_1 \times S_2$ monomorfismo de anillos tal que $(\pi_1 \circ f)$ y $(\pi_2 \circ f)$ son suprayectivas, donde π_1 y π_2 son las proyecciones en S_1 y S_2 respectivamente.
Sean $J = Nuc(\pi_1 \circ f)$ y $K = Nuc(\pi_2 \circ f)$. Entonces, $J, K \leq R$ bilaterales y tales que $J \cap K = 0$, pues $Nuc\ f = J \cap K = 0$ por ser f inyectiva. Además, $(\pi_1 \circ f)$ y $(\pi_2 \circ f)$ suprayectivas $\Rightarrow R/J$ y R/K son anillos regulares.
$J \cong (J + K)/K$ en el anillo regular $R/K \Rightarrow J$ regular, (Lema 5). Así, siendo R/J regular se tiene que R es regular (Lema 5). ∎

Ejemplo 2 *Si A es un módulo proyectivo finitamente generado sobre un anillo regular R, entonces $End_R(A)$ es un anillo regular.*

Demostración:
A finitamente generado implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$ es exacta. A proyectivo implica que A es sumando directo de R^n de donde $End_R(A) \cong eEnd_R(R^n)e$, con $e \in End_R(R^n)$ idempotente. Luego, $eM_n(R)e$ es regular (Lema 6). Por lo tanto, $End_R(A)$ es un anillo regular. ∎

Ejemplo 3 *Sea V un k-espacio vectorial. Si R es un anillo denso de transformaciones lineales de rango finito sobre V, entonces R es regular.*

Demostración:
Sea $T \in R$ y sea $\{x_i\}_{i\in I}$ base de V. Sea $\{x_{ij}\}_{j=1}^n \subset \{x_i\}_{i\in I}$ tal que $\{T(x_{ij})\}_{j=1}^n$ es base de $Im\ T$. Sea $\{y_i\}_{i\in I}$ una extensión de $\{T(x_{ij})\}_{j=1}^n$ a una base de V. R denso implica que existe $S \in R$ tal que $S(T(x_{ij})) = x_{ij}$ para toda j en $\{1, ..., n\}$ y $S(y_i) = 0$ si $y_i \neq T(x_{ij})$. Luego,
$T(x_i) = \alpha_1 T(x_{i1}) + \cdots + \alpha_n T(x_{in})$
$S(T(x_i)) = \alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_n x_{in}$
$T(S(T(x_i))) = \alpha_1 T(x_{i1}) + \cdots + \alpha_n T(x_{in})$.
Por lo tanto, $T(x_i) = (TST)(x_i)$ para toda $i \in I$ y R es regular. ∎

Ejemplo 4 *Un anillo regular que es V-anillo derecho pero no es V-anillo izquierdo.*

Sean F un campo y V un espacio vectorial dimensionalmente infinito sobre F. Sea $Q = End_F(V)$. Entonces, Q es un anillo regular autoinyectivo derecho (Corolario 3).
Sea $J = \{f \in Q \mid Rg(f) \text{ es finito.}\}$ y sea $R = F + J$. Obsérvese que $R/J \cong F$. Sean $a \in R$ y $\bar{a}$ la clase de a en R/J. Como R/J es regular, existe $\bar{x} \in R/J$ tal que $\overline{a} = \overline{axa}$ de donde se tiene que $a - axa \in J$. Ahora, como J es regular (Ejemplo 3), existe $y \in J$ tal que $a - axa = (a - axa)y(a - axa)$. Así,
$a = axa + (a - axa)y(a - axa) = axa + a(1 - xa)y(1 - xa)a =$
$a[x + (1 - xa)y(1 - xa)]a$. Por lo tanto, R es regular. Ahora, veamos que R es un V-anillo derecho.

Sea M un R-módulo derecho simple. Si $MJ = 0$, entonces M tiene estructura de R/J-módulo derecho y, por lo tanto, es inyectivo (pues R/J es campo). Luego, como R es totalmente idempotente, M es inyectivo como R-módulo derecho (Teorema 7) y hemos terminado.

Si $MJ \neq 0$, entonces $MJ = M$ (pues M es simple) y por lo tanto M es imagen homomorfa de J_R. Se afirma que J_R es semisimple.

Para todo $u, v \in V$, definimos $g_{v,u} : V \longrightarrow V$ como $g_{v,u}(u) = v$ y $g_{v,u}(\sqcup_u) = 0$, donde $V = \langle u \rangle \oplus \sqcup_u$.

Sean $f \in J$ y $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ tal que $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ es base de $Im\ f$. Sea $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ base de $Nuc\ f$ tal que $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{v_1, ..., v_n\}$ es base de V. Entonces, $f = g_{f(v_1),v_1} + \cdots + g_{f(v_n),v_n}$. Veamos que $g_{v,u}R$ es simple.

Sea $0 \neq h \in g_{v,u}R$ con $Im\ h = \langle v \rangle$. Sea $w \in V$ tal que $h(w) = v$. Definimos $p : V \longrightarrow V$ como $p(u) = w,\ p(v') = 0$ para todo $v' \notin \langle u \rangle$. Entonces, $(hp)(u) = h(w) = v = g_{v,u}(u)$. Así, $hp = g_{v,u}$ de donde se tiene que $g_{v,u}R$ es simple. Por lo tanto, J_R es semisimple.

Así, se tiene que M es sumando directo de J_R y podemos suponer que M es un ideal mínimo de R.

Además, $MQ = MJQ = MJ = M$. Por lo tanto, M es también un ideal derecho mínimo de Q por lo que M es un ideal principal de Q y, por lo tanto, sumando directo de Q (pues Q es regular). Como Q es autoinyectivo, entonces M es inyectivo como Q-módulo derecho y, por lo tanto, M también es inyectivo como R-módulo derecho (Lema 2).

Por lo tanto, R es un V-anillo derecho.

Sean $\{v_i\}_{i\in I}$ una base de V y $w \in V$. Definimos $f : V \longrightarrow V$ como $f(v_i) = w$ para toda $i \in I$. Luego, como $f \in J \subseteq R$ existe $e \in R$ idempotente tal que $e(V) = Fw$.

$eRe \cong F$ pues dado $r \in R$ se tiene que $ere = \alpha e$ y por lo tanto e es una base para eRe/F. Además, Re es un ideal mínimo de R pues si $Re = Rf \oplus Rg,\ e = f + g,\ fg = 0 = gf$, entonces $fRf \oplus gRg \subseteq eRe$ lo cual no puede suceder. Por lo tanto, $Rf = Ref$ es un ideal mínimo izquierdo de R.

Para cada $i \in I$ definimos $f_i : V \longrightarrow V$ como $f_i(v_i) = v_i$ y $f_i(v_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Así, $f_i \in J$ para toda $i \in I$. Se afirma que $Rf \bigcap \left(\sum_{i\in I} Rf_i\right) = 0$.

Sea $x \in Rf \bigcap \left(\sum_{i\in I} Rf_i\right)$. Entonces, $x = rf = r_1 f_{i(1)} + \cdots + r_n f_{i(n)}$ para algunos $r, r_1, ..., r_n \in R$. Como V tiene dimensión infinita, existe $i(m)$ en I tal que $i(m) \notin \{i(1), ...i(n)\}$. Entonces, $r_j f_{i(j)}(v_{i(j)}) =$
$(r_1 f_{i(1)} + \cdots + r_n f_{i(n)})(v_{i(j)}) = rf(v_{i(j)}) = rw = rf(v_{i(m)}) =$
$(r_1 f_{i(1)} + \cdots + r_n f_{i(n)})(v_{i(m)}) = 0$ para toda $j \in \{1, .., n\}$. Entonces, $r_j f_{i(j)} = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

Si la proyección $Rf \bigoplus \left(\sum_{i\in I} Rf_i\right) \longrightarrow Rf$ estuviera dada como la multiplicación por la derecha para alguna $r \in R$, tendríamos que $f_i r = 0$ para toda $i \in I$ y entonces $r = 0$, lo cual no es posible.

Así, el R-módulo izquierdo simple Rf no es inyectivo y, por lo tanto, R no es un V-anillo izquierdo. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] Anderson, F.W., Fuller K. R., Rings and categories of modules, Springer-Verlag, 1991.

[2] Faith, C., Lectures on injective modules and quotient rings, Springer-Verlag, 1967.

[3] Faith, C., Modules finite over endomorphism ring, Springer-Verlag, 1972.

[4] Fisher, W., Snider, R., On the von Neumann regularity of rings with regular prime factor ring, Pacific Journal of mathematics, Vol. 54, No. 1, 1974.

[5] Goodearl, K., Von Neumann regular rings, Krieger Publishing Company, 1991.

[6] Năstăsescu, C., Quelques remarques sur la dimension homologique des anneux. Eléments réguliers, Mecamcă Str. Academiei nr. 14, Roumanie, 1970.

[7] Rotman, J., Notes on homological algebras, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1970.

[8] Stenström, B., Rings of quotients, Springer-Verlag, 1975.

[9] Villamayor, O., On rings whose simple modules are injective, J. Algebra, 1973.

[10] Wisbauer, R., Foundations of module and ring theory, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.