

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado en Ciencias Físicas

**“ Ondas gravitacionales y acreción hacia agujeros
negros”**

Tesis

que para obtener el grado de Doctor en Ciencias
(Física)

presenta:

Juan Carlos Degollado Daza.

Tutor Principal: Dr. Darío Núñez Zúñiga

Comité Tutorial: Dr. Darío Núñez Zúñiga, Dr. Miguel Alcubierre Moya y
Dr. William Henry Lee Alardin.

México D.F., enero del 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

El estudio de los agujeros negros juega un papel fundamental en Física moderna. Se ha determinado que los agujeros negros poseen modos característicos de oscilación, llamados modos cuasinormales. Diversos estudios han mostrado que estos modos son importantes para tener un mejor entendimiento de los agujeros negros astrofísicos. En este trabajo se hace un estudio de los modos cuasinormales de agujeros negros para el caso de los espacios tiempo de Schwarzschild y Kerr. Se investiga la radiación gravitacional emitida por acreción de materia cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild y se propone un nuevo enfoque para estudiar la perturbación en un agujero negro de Kerr en términos de una ecuación puramente radial temporal. Con este enfoque se resuelve numéricamente la ecuación de perturbación y se obtiene la señal producida por perturbaciones gravitacionales.

Una de las metas más importantes en astrofísica es modelar diversos fenómenos como la acreción de materia hacia agujeros negros. Aunque la métrica del espacio tiempo es importante dinámicamente, por ejemplo durante la colisión de dos agujeros negros, en el problema de acreción es una buena aproximación considerarla fija. Un problema importante es la evolución de las variables del fluido que la describen. Bajo algunas suposiciones, las variables del fluido evolucionan de acuerdo a las ecuaciones de hidrodinámica relativista, que forman un sistema hiperbólico de leyes de balance que son no lineales y genéricamente presentan choques.

Para simular la evolución de tales fluidos, se han desarrollado muchos métodos numéricos, incluyendo diferencias finitas, métodos pseudo-espectrales e hidrodinámica de partículas suaves y varios métodos de alta resolución para la captura de choques. En este trabajo se presenta una revisión de tales métodos y se muestran algunas aplicaciones numéricas.

Abstract

The study of black holes is a very important branch in modern Physics. It has been determined that black holes have characteristic oscillation modes, called quasinormal modes. Several studies have shown that these modes are important to our understanding of the dynamics of astrophysical black holes.

In this thesis we make a study of the quasinormal modes of black holes in both Schwarzschild and Kerr spacetimes. We investigate the gravitational radiation emitted by the black hole, when accreting matter falls onto it. We propose a new approach to study the perturbation for the Kerr black hole in terms of a purely radial temporal equation. With this approach we solve numerically the equation for the perturbation function and obtain the signal produced by some types of gravitational perturbations.

An important goal in astrophysics is to model diverse phenomena such as the one described above. Although the metric is dynamically important in, for example, the black hole collision problem, in the accretion problem the metric can be considered as fixed, a key piece of this problem is the evolution of the fluid variables. Under some simplifying assumptions, the fluid variables evolve according to the relativistic hydrodynamic equations, which form a system of hyperbolic balance laws that are strongly nonlinear and generically exhibit shock formation.

In order to accurately simulate the evolution of such fluids, several types of numerical methods have been proposed, including finite difference, pseudo spectral, smoothed particle hydrodynamics, and various high resolution shock capturing methods. In this work, we deal with this problem as well, reviewing such methods, and presenting some numerical applications.

Índice

Índice de figuras	vii
1 Introducción	3
2 Ondas gravitacionales	7
2.1 Fuentes de Ondas gravitacionales	7
2.2 Descripción en un marco en la norma transversa sin traza	10
2.3 Descripción en un marco en caída libre	11
2.3.1 Energía y momento de las ondas gravitacionales	12
2.3.2 Fuentes de ondas gravitacionales	14
3 Teoría de perturbaciones	17
3.1 El formalismo de tétradas	18
3.2 El formalismo de Newman-Penrose	21
3.3 Ecuaciones de perturbación	25
4 Perturbaciones al agujero negro de Schwarzschild	31
4.1 Polvo en caída radial	33
4.1.1 Algunos ejemplos de acreción	37
4.2 Detección de modos cuasinormales	43
5 Perturbaciones al agujero negro de Kerr	45
5.1 Descomposición en armónicos esféricos	47
5.2 Formulación a primer orden	50

5.3	Evolución en 2 dimensiones	52
5.4	Evolución para la componente radial	54
5.5	Ejemplos	54
5.5.1	Datos iniciales con $l=2$	54
5.5.2	Datos iniciales con dos modos con diferente l	55
6	Métodos numéricos en Hidrodinámica	59
6.1	Leyes de Conservación	60
6.1.1	Problema de Cauchy	60
6.1.2	El problema de Riemann	61
6.1.3	Sistema de ecuaciones con coeficientes constantes	64
6.1.4	Discretización en volúmenes finitos	67
6.1.5	Estabilidad, convergencia y consistencia	69
6.2	El método de Godunov	72
6.3	Resolvedores de Riemann aproximados	73
6.3.1	Resolvedor de HLLE	74
6.3.2	Resolvedor de Roe	77
6.4	Flujo en las interfases	79
6.4.1	Método de líneas	81
7	Hidrodinámica Relativista	83
7.1	Dinámica de Fluidos	83
7.2	Ecuación de Estado	84
7.2.1	Gases ideales	85
7.3	Variables ADM	87
7.4	Observadores Eulerianos	89
7.5	Reconstrucción de las variables primitivas	94

8	Aplicaciones astrofísicas	95
8.1	Acreción esférica hacia un agujero negro	95
8.1.1	Acreción tipo Michel como dato inicial	99
8.1.2	Inyección de flujo a través de la frontera	101
8.2	Discos de acreción	104
9	Conclusiones	113
	Bibliografía	115

Índice de figuras

4.1	Se muestra la evolución de la densidad para una cáscara de polvo, cada $t = 25$, y la envolvente exacta de la densidad. El pulso tiene una amplitud inicial de $A_0 = 10^{-5}$, un ancho de $\sigma = 0.5$ y está centrada en $r_0 = 70 M$. . .	36
4.2	Señal gravitacional producida por el pulso de la figura 4.1, medido por tres diferentes observadores situados en $r = 100 M, 150 M$ y $200 M$. Se han trasladado las señales en el tiempo para superponerlas y mostrar que el comportamiento de Φ es constante en r , lo que demuestra un decaimiento en Ψ_4 como $1/r$. Las diferencias observadas se deben a que el comportamiento de Ψ_4 como inverso de r es en la región asintótica	38
4.3	La función Φ de la fig. 4.2 en escala logarítmica. Los tiempos tempranos $t < 100$, se ha omitido por claridad. Las frecuencias de oscilación fueron extraídas en un intervalo entre $t \sim 370$ a $t \sim 470$	40
4.4	Señal gravitacional producida por los modos $l = 2, 3, 4$. Todos tienen la misma amplitud inicial, $A_0 = 10^5$, el mismo ancho, $\sigma = 0.5$, y están centrados en la misma posición, $r_0 = 70 M$	41
4.5	Señal gravitacional en escala logarítmica para diferentes valores de σ . Se muestra de izquierda a derecha $\sigma = 1M, 1.5 M, 2 M, 2.5 M$. Hay que resaltar que los modos se despiertan conforme la cáscara se hace más compacta.	42
4.6	Energía total definida como la integral (4.38) como función del ancho de la cáscara. La integral esta evaluada sobre una esfera de radio $r = 70M$. . .	43
5.1	Se presenta la señal gravitacional para dos valores del parámetro de rotación del agujero negro $a = 0.2$ y $a = 0.9$. En el primer panel se muestra la onda medida por un observador en $r = 70M$, en escala logarítmica para $a = 0.2$, en el segundo panel se muestra el caso para $a = 0.9$	56
5.2	La señal presentada es equivalente a la figura 5.1, solo que aquí la perturbación inicial corresponde a un modo $l = 2$ y $m = 2$	57

5.3	El primer cuadro muestra la señal producida por el código axial, el observador está localizado en $r = 80M$, en el plano $\theta = \pi/2$ el momento angular por unidad de masa del agujero es $a = 0.999$. En los cuadros de abajo están las proyecciones de la misma señal en los armónicos Y_{20} y Y_{30} y los resultados obtenidos mediante la descomposición armónica en $1d$ (2 var).	58
6.1	En el caso $u_L > u_R$, tenemos cruce de características en el plano (x, t) . La recta a líneas corresponde al choque. La solución deja de ser univaluada.	64
6.2	En el caso $u_L < u_R$, tenemos una zona de vacío donde la solución no está definida unívocamente.	65
6.3	Estructura de las velocidades características λ_i para la solución de un sistema con coeficientes constantes, k es el valor máximo tal que $\lambda_k \leq 0$	68
6.4	Volumen de control, s_L y s_R son las velocidades máximas que surgen del problema de Riemann.	75
6.5	Extrapolación en las interfases para encontrar los valores de u_i^\pm	80
8.1	Densidad en escala logarítmica (panel superior) de la distribución de gas cayendo hacia el agujero negro, en el panel inferior se grafica la magnitud de la velocidad $v^i v_i$. El punto crítico está localizado en $r_c = 400$	100
8.2	Al igual que en la figura 8.1. En este caso el punto crítico está localizado en $r_c = 8.0$	100
8.3	Error relativo $Err_{rel} = abs(\frac{\rho_M - \rho}{\rho_M})$ entre la solución estacionaria de Michel ρ_M a $t = 0$ y ρ después de $t \sim 500$ utilizando diferentes resoluciones. Err_{rel} está en escala logarítmica. Se ha multiplicado por 4,16,64, correspondiendo la resolución utilizada, para mostrar convergencia a segundo orden.	101
8.4	Proyección tridimensional de un corte en la velocidad de la figura 8.2	102
8.5	Se muestra la densidad en escala logarítmica, para un polítropo en caída radial cuando el punto crítico está dentro de la malla numérica, $r_c = 8$. y se inyecta flujo desde la frontera. Inicialmente hay una región de subdensidad, conforme pasa el tiempo, por la frontera externa se está inyectando un fluido con la densidad de Michel y se observa como este perfil domina la solución para alcanzar el estado estacionario.	103
8.6	El error relativo (en escala logarítmica) entre la solución estacionaria de Michel y la que se alcanza con el código después de $t \sim 120$. Se multiplica por 4 y 16 para observar segundo orden de convergencia	103

8.7 Momento angular kepleriano (geodésicas en caída radial) sobre el plano ecuatorial, para el agujero negro de Schwarzschild, $l_k = \frac{r\sqrt{2}}{r-2M}$ $r_{mb} = 4$ y $r_{ms} = 6$ 106

8.8 Si $l_0 < l_{ms}$ no se cierran las equipotenciales, así que no se puede formar un disco, $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 3.17$, $l_{mb} = 4.0$ 107

8.9 Cuando el momento angular es igual a l_{ms} , existe un anillo infinitesimal en donde se forma el disco, $l_{ms} = 3.67 = l_0$, $l_{mb} = 4.0$ 108

8.10 En el caso $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 4.0 = l_{mb}$ se forman discos pero ninguno tiene un vértice. 108

8.11 No se pueden formar discos, $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 4.17$, $l_{mb} = 4.0$ 109

8.12 El caso de principal interés es cuando se tiene un vértice, y centro, $l_{ms} < l_0 < l_{mb}$. $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 3.85$, $l_{mb} = 4.0$ 110

8.13 Los extremos locales del potencial, corresponden a las posiciones del vértice r_{cusp} y el centro del toro. 110

8.14 Se presenta la densidad central del disco ($\times 10^{-7}$) cuando la solución estacionaria es perturbada con valor de $\eta = 0.02$. El tiempo esta escalado con el tiempo dinámico definido como $tdin = 2\pi/\Omega_c$ con Ω_c la velocidad angular (8.41) del centro del disco. 111

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la Relatividad General describe la dinámica del espacio tiempo por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. Estas ecuaciones son de tal complejidad que las soluciones analíticas que se conocen poseen muchas simetrías o se basan en técnicas de aproximación, como la teoría linealizada de campo débil.

La solución numérica de las ecuaciones de Einstein, es la única forma de estudiar la generación de ondas gravitacionales en los regímenes de velocidades altas, gravedad intensa y grandes desviaciones de un sistema no radiante. Durante los últimos años muchos grupos de investigación han trabajado en el desarrollo de la Relatividad Numérica ver por ejemplo, las referencias [1, 2]. Sin embargo no debe tomarse este enfoque como la única forma de obtener cálculos realistas sobre ondas gravitacionales de hecho hay una fuerte interacción entre ambas técnicas analíticas y numéricas, el espíritu de este trabajo es presentar la generación de ondas gravitacionales mediante un formalismo perturbativo utilizando las herramientas desarrolladas en relatividad numérica. En particular se utilizan modernos algoritmos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Es astrofísicamente posible, que los agujeros negros formen un sistema binario asociándose con otros objetos, incluyendo otros agujeros negros [3]. Debido a la pérdida de energía por radiación gravitacional, la separación y periodo de la órbita del sistema binario decrece. Si el sistema binario consiste en dos agujeros negros, la espiral terminaría con una rápida fusión formándose un solo agujero, este proceso es una fuente intensa de ondas gravitacionales [4]. El proceso completo de órbita genera radiación gravitacional, pero en la fase temprana la radiación es relativamente débil y puede describirse razonablemente bien utilizando la gravitación Newtoniana o las expansiones post Newtonianas [5]. Es únicamente en la fase final de fusión en la que se puede generar una explosión de ondas gravitacionales. La frecuencia característica de las ondas gravitacionales es inversamente proporcional a la masa del agujero formado y se estima que es de 10^3 Hz para un agujero de 10 masas solares [6]. Para agujeros negros supermasivos, mayores de mil masas

solares las frecuencias son menores de 1 Hz. La máxima sensibilidad de los detectores de segunda generación es alrededor de 100 Hz y los detectores serán capaces de medir las ondas producidas por agujeros negros de miles de masas solares [7, 8].

La teoría de ondas gravitacionales de la fase en órbita de un sistema binario, se inició utilizando métodos analíticos basados en las técnicas post-newtonianas, un método para aproximar soluciones a las ecuaciones de Einstein, mediante correcciones sucesivas a la aproximación Newtoniana. Con los resultados, se obtienen *templates* (plantillas con las que comparar) con un alto grado de precisión que juegan un papel muy importante en el análisis de señales en los detectores de ondas gravitacionales [9, 10].

La detección de señales gravitacionales permitirá probar las predicciones del trabajo teórico que se ha llevado a cabo para construir formas de onda, espectros de energía y extraer características distintivas que podrían llevar a reestructurar la fuente que las emitió. Una pieza importante de la información que tienen las ondas gravitacionales esta contenida en las frecuencias a las cuales un objeto compacto emite, es decir sus frecuencias propias o cuasinormales.

De acuerdo a la teoría de la Relatividad General, los modos cuasinormales son los modos propios a los cuales un agujero negro o una estrella oscilan cuando son excitados por perturbaciones no radiales. Se dice que son cuasinormales, en contraste con los modos normales de oscilación en gravedad Newtoniana, porque están amortiguados por la emisión de ondas gravitacionales, como consecuencia, las correspondientes frecuencias propias son complejas. El que una estrella oscile, es en cierto sentido natural porque puede entenderse como una pelota de fluido, sin embargo que un agujero negro oscile resulta poco intuitivo si consideramos que un agujero negro es una región del espacio tiempo. Para entender este fenómeno, fue necesario entender la estructura de las ecuaciones que rigen las perturbaciones de agujeros negros y esto es lo que se discute en este trabajo.

La perturbación de agujeros negros es uno de los procesos astrofísicos más importantes para la generación de ondas gravitacionales que serán detectadas con los detectores de nueva generación [11]. Por lo tanto es importante tener predicciones teóricas precisas para las frecuencias de las ondas gravitacionales emitidas por agujeros negros perturbados.

La teoría de perturbaciones de agujeros negros y estrellas comenzó a principios de los años sesentas y ha alcanzado altos niveles de desarrollo. Un descubrimiento importante en este contexto, fue que existen modos de oscilación inestables en estrellas rotantes, estos pueden ser fuentes prominentes de radiación gravitacional y podrían explicar el rápido decremento en el momento angular de estrellas de neutrones recién formadas. Otro resultado es una descripción casi completa de la emisión de ondas gravitacionales de una masa pequeña orbitando un agujero negro así como los modos cuasinormales de oscilación de agujeros negros perturbados.

Entre las fuentes de las perturbaciones de agujeros negros se encuentran los discos de acreción [12]. Muchos modelos astrofísicos y cosmológicos hacen uso del modelo de un fluido para estudiar su dinámica, y en algunas situaciones, la aproximación de fluido de prueba es suficiente para dar una descripción correcta [13]. En éste contexto la auto-gravedad del fluido se desprecia en comparación con el campo gravitacional de fondo, porque la masa del fluido que acreta es usualmente mucho menor que la masa del objeto compacto, sin embargo, si la masa que acreta es comparable con la del cuerpo compacto, la aproximación ya no es válida y hay que considerar como interactúa el objeto con sus alrededores, es necesario estudiar la respuesta del espacio tiempo junto con la del fluido que cae hacia él. Dentro de los objetivos principales del trabajo están estudiar la acreción y la respuesta del agujero negro emitida en forma de ondas gravitacionales. La organización es como sigue: En el capítulo 2 se hace una revisión de las propiedades de las ondas gravitacionales. En el capítulo 3 se hace el desarrollo de la teoría de perturbaciones utilizando tétradas nulas y se obtiene una ecuación general de perturbación de agujeros negros. En el capítulo 4 se estudia la emisión gravitacional producida por cáscaras de polvo hacia un agujero negro de Schwarzschild. En el capítulo 5 se introduce un enfoque nuevo para estudiar las perturbaciones de un agujero negro de Kerr basado en una descripción radial temporal. En el capítulos 6 y 7 se hace un resumen sobre los métodos numéricos de alta resolución para la captura de choques utilizados en hidrodinámica relativista y en capítulo 8 se desarrollan algunos ejemplos de procesos que involucran el uso de estos métodos en el contexto de acreción hacia agujeros negros.

Capítulo 2

Ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son deformaciones del espacio tiempo generadas cuando las masas son aceleradas. Son una de las predicciones centrales de la teoría de la Relatividad General de Einstein, pero a pesar de décadas de esfuerzo, no se han detectado directamente. Existe una fuerte evidencia de su existencia con un alto grado de precisión, debido al gran acuerdo entre la tasa de decaimiento del periodo del pulsar binario PSR1913+16 y la predicción teórica [14, 15].

Las ondas gravitacionales son, en principio, un tipo nuevo de señal no electromagnética para observar el universo, tal como lo fueron en su tiempo los rayos X , los gamma, las ondas de radio, etc, y nos permiten *seguir* objetos que son imposibles de ver electromagnéticamente, como la colisión de dos agujeros negros o nubes de polvo o gas que no radian. De las fuentes mas importantes de ondas gravitacionales se encuentran los sistemas binarios de objetos compactos como agujeros negros o estrellas de neutrones.

Entre las características de las ondas gravitacionales estan que se propagan a la velocidad de la luz, son transversales a la dirección de propagación, tienen dos estados de polarización y transportan energía del sistema del cual surgieron. Una aproximación para estudiar ondas gravitacionales es la de campos gravitacionales débiles.

2.1 Fuentes de Ondas gravitacionales

Uno de los primeros puntos en los que se debe poner mas énfasis al hablar de ondas gravitacionales, es que su origen es de naturaleza tipo *marea*. Esto es importante porque es necesario monitorear con alto grado de precisión, el movimiento relativo entre masas de prueba o las deformaciones periódicas de cuerpos extendidos.

Una onda gravitacional, propagándose en espacio tiempo plano, genera distorsiones periódicas que pueden describirse en términos del tensor de Riemann que mide la curvatura del espacio

tiempo. En la teoría linealizada $h_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}$ el tensor de Riemann tiene la forma:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha\partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\partial_\mu h_{\beta\nu}), \quad (2.1)$$

que puede simplificarse aún más, si se escoge la norma transversa y sin traza, denotada por TT

$$R_{j0k0}^{TT} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{jk}^{TT}, \quad (2.2)$$

en donde h_{jk}^{TT} es el campo de la onda gravitacional en la norma TT. El tensor de Riemann es un objeto puramente geométrico, pero en relatividad general tiene una interpretación simple, es un campo de fuerza de marea y describe la aceleración relativa entre dos partículas en caída libre. Si consideramos dos partículas moviéndose libremente a lo largo de geodésicas de un espacio tiempo con coordenadas $x^\mu(\tau)$ y $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$, para un valor del tiempo propio τ , y $\delta x^\mu(\tau)$ el vector de desplazamiento que conecta ambos eventos, puede mostrarse [16] que la ecuación de desviación geodésica es:

$$\frac{d^2\delta x^k}{dt^2} \approx -R_{0j0}^k{}^{TT}\delta x^j. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, la fuerza de marea que actúa sobre la partícula es:

$$f^k \approx -mR_{0j0}^k{}^{TT}\delta x^j. \quad (2.4)$$

en donde m es la masa de la partícula. La ecuación (2.4) corresponde a la relación Newtoniana entre fuerza actuando sobre una partícula. Como se espera que la amplitud de las ondas sea muy pequeña que los cambios oscilatorios de δx^j son minúsculos comparados con la distancia de la partícula al origen, x^k puede considerarse como esencialmente constante en el lado derecho y por lo tanto la ecuación (2.3) puede integrarse fácilmente utilizando (2.2) y obtener:

$$\delta x_j = \frac{1}{2}h_{jk}^{TT}x_0^k, \quad \text{o} \quad h \approx \frac{\Delta L}{L}. \quad (2.5)$$

en donde h es *esfuerzo* adimensional de la onda gravitacional. Supongamos que la onda gravitacional, se propaga en dirección z de modo que $h_{jk}(t-z)$. Las dos componentes independientes de la onda son:

$$h_+ = h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT}, \quad h_\times = h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT}. \quad (2.6)$$

Para mostrar el efecto de h_+ en la materia, consideremos una partícula inicialmente localizada en (x_0, y_0) y pongamos por simplicidad $h_\times = 0$ entonces por 2.5:

$$\delta x = \frac{1}{2}h_+x_0 \quad \text{y} \quad \delta y = -\frac{1}{2}h_+y_0. \quad (2.7)$$

Que muestra que si h_+ varia periódicamente, entonces un objeto primero experimentará un estiramiento en la dirección x acompañado de una compresión en la dirección y . Un medio ciclo después la compresión es en la dirección x y el alargamiento es en la dirección y . El efecto de h_\times es el mismo solo que rotado 45 grados, una demostración muy clara de este aspecto se encuentra en la referencia [17]. Hasta este punto se ha mostrado el efecto de la propagación de deformaciones en el espacio tiempo sobre dos partículas cercanas, pero no se hecho una conexión con la teoría gravitacional de Einstein. Si tomamos al tensor $h_{\mu\nu}$ como variaciones del tensor métrico de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu}$ entonces, después de un poco de álgebra [18], las ecuaciones de Einstein se reducen a la forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \tilde{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.8)$$

con

$$\tilde{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_\alpha{}^\alpha, \quad (2.9)$$

en donde se ha utilizado una norma específica, la norma de Lorentz $\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0$. La solución mas simple de la ecuación de onda (2.8) es:

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (2.10)$$

con $A^{\mu\nu}$ un tensor constante y simétrico, llamado el tensor de polarización [19] Toda la información sobre la polarización y amplitud de la onda gravitacional, esta contenida en $A^{\mu\nu}$. k_α es un vector constante, el vector de onda que determina la dirección de propagación de la onda y su frecuencia.

Es común, escribir la solución de la ecuación de onda en la norma transversa sin traza TT. Como $A^{\mu\nu}$ tiene solamente dos componentes independientes, la onda gravitacional puede describirse por dos amplitudes adimensionales h_+ y h_\times , por ejemplo, si la dirección de propagación de la onda gravitacional es el eje z entonces se puede escribir:

$$A^{\mu\nu} = h_+ e_+^{\mu\nu} + h_\times e_\times^{\mu\nu} \quad (2.11)$$

en donde $e_+^{\mu\nu}$ y $e_\times^{\mu\nu}$ son los tensores de polarización:

$$e_+^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_\times^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Finalmente hay que resaltar que, en la norma TT la perturbación a la métrica $h_{\mu\nu}$ y el campo gravitacional $\tilde{h}_{\mu\nu}$ son iguales.

Debido a la naturaleza TT, las ondas gravitacionales producen un campo de fuerza cuadrupolar [20], este campo tiene dos componentes correspondientes a los dos estados

de polarización de la onda, la cantidad $h_+ := h_{xx}^{TT}$ produce un campo de fuerza con la orientación de un signo + mientras que $h_\times := h_{xy}^{TT}$ produce una con orientación de un signo \times por lo que h_+ y h_\times son llamadas las amplitudes mas y cruz de la onda gravitacional.

Las definiciones del campo h_{ij}^{TT} dadas arriba estan basadas en una elección específica del sistema de referencia, así que se muestra como se relaciona este sistema con uno fijo en la Tierra, despues de todo, es aquí donde se hacen las mediciones.

2.2 Descripción en un marco en la norma transversa sin traza

En esta sección discutiremos la interacción de una onda gravitacional con una partícula puntual en la norma TT. Consideremos una partícula de prueba A en reposo a tiempo $\tau = 0$, utilizando la ecuación de geodésicas se tiene:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = - \left(\Gamma_{\rho\sigma}^i \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=0} = - \left(\Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=0} \quad (2.13)$$

como inicialmente la partícula esta en reposo, $(\frac{dx^\mu}{d\tau}) \Big|_{\tau=0} = (1, 0, 0, 0)$ y,

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{ij} (h_{0j,0} + h_{j0,0} - h_{00,j}), \quad (2.14)$$

En la norma TT, h_{00} y $h_{0j} = 0$ de modo que $(\Gamma_{00}^i) = 0$. Como consecuencia si a tiempo $\tau = 0$ tanto la primera derivada como la segunda de x^i con respecto a τ se anulan, y la partícula esta en reposo, seguirá en reposos aun después de que la onda gravitacional haya pasado. Lo que ocurre es que las coordenadas mismas se mueven con la onda gravitacional y las coordenadas de la separación no varían, lo que cambia es la distancia propia entre partículas cercanas. Para una onda propagándose en la dirección z , el elemento de línea es de la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dy^2[1 - h_+ \cos \omega(t-z)] + dx^2[1 + h_+ \cos \omega(t-z)] + 2dydxh_\times \cos \omega(t-z). \quad (2.15)$$

Si dos partículas A y B están sobre el eje x , entonces la distancia relativa entre A y B es:

$$s \approx L \left(1 + \frac{h_+}{2} \cos \omega t \right), \quad (2.16)$$

en donde L es la distancia inicial entre A y B.

2.3 Descripción en un marco en caída libre

Siempre es posible realizar un cambio de coordenadas de tal manera que dado un punto en el espacio tiempo Q , podemos tomar $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(Q) = 0$ y $(d^2/d\tau^2)_Q = 0$. En este sistema de referencia, en un instante de tiempo y un punto en el espacio, las partículas están en caída libre. Este sistema puede construirse explícitamente utilizando las coordenadas normales de Riemann y es posible también construir un sistema, tal que partículas puntuales esten en caída libre a lo largo de geodésicas utilizando las coordenadas normales de Fermi [21]. Si introducimos un sistema en caída libre atado a la partícula A con origen espacial $x^j = 0$ y coordenada temporal el tiempo propio $x^0 = \tau$, la métrica se reduce a la métrica de Minkowski en el origen y todas sus derivadas se anulan:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + O\left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{\mathcal{R}^2}\right), \quad (2.17)$$

en donde \mathcal{R} es el radio de curvatura. $\mathcal{R}^{-2} = |R_{\mu\nu\rho\sigma}|$, que debe entenderse como la mayor de las componentes del tensor de Riemann.

Para experimentos de ondas gravitacionales localizados sobre la Tierra, el interferómetro no esta en caída libre con respecto a la gravedad terrestre, el detector esta sujeto a una aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ con respecto al sistema de referencia local y rota con respecto a los giroscopios locales, en general el efecto de ondas gravitacionales sobre partículas puntuales compite con muchos otros efectos pero existe una banda, entre 10 y 10^3 Hz en el que estos efectos son dominados o son estáticos [22]. Si calculamos la ecuación de desviación geodésica en el marco de referencia en caída libre atado a la partícula con respecto al origen, tendremos:

$$\nabla_u \nabla_u \xi^\alpha = u^\beta \nabla_\beta (u^\lambda \nabla_\lambda \xi^\alpha) = u^\beta u^\lambda (\xi_{,\beta\lambda}^\alpha + \Gamma_{\lambda\sigma,\beta}^\alpha \xi^\sigma), \quad (2.18)$$

En donde se ha utilizado que $\Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha = 0$, además, como se está asumiendo que las partículas estan inicialmente en reposo $u^\beta = \delta_0^\beta$. Utilizando que $\xi^0 = 0$ y el hecho que $\Gamma_{0k,0}^j = 0$ puede desprejarse al calcularse en el punto A tendremos:

$$\nabla_u \nabla_u \xi^j = \frac{d^2 \xi^j}{d\tau^2} \Rightarrow \frac{d^2 \xi^j}{d\tau^2} = -R_{0k0}^j \xi^k. \quad (2.19)$$

Para calcular el tensor de Riemann R_{0k0}^j Se puede utilizar la norma TT pues en teoría linealizada es invariante ante cambios de coordenadas [22],

$$R_{j0k0}^{TT} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{jk}^{TT}, \quad (2.20)$$

y por lo tanto

$$\frac{d^2 \xi^j}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk}^{TT} \xi^k. \quad (2.21)$$

La descripción en el sistema de caída libre es útil siempre y cuando la métrica se pueda escribir como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(x^2/\mathcal{R}^2)$ es decir cuando podamos despreciar los términos x^2/\mathcal{R}^2 . Como $\mathcal{R}^{-2} = |R_{\mu\nu\rho\sigma}| \sim \ddot{h} \sim h/\lambda_{GW}$ tendremos $x^2/\mathcal{R}^2 \simeq L^2 h/\lambda_{GW}$ y como $h \sim \Delta L/L$ se encuentra $L^2/\lambda_{GW} \ll 1$. Esta condición se satisface para detectores en la Tierra porque $L \sim 4km$ y $\lambda_{GW} \sim 3000km$, sin embargo para los detectores en el espacio, esta razón ya no es válida ya que $L \sim 5 \times 10^6 km$. [7]

2.3.1 Energía y momento de las ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales transportan energía y causan deformaciones del espacio. El tensor de energía momento transportado por una onda gravitacional no puede localizarse dentro de un espacio caracterizado por una longitud de onda, sino que uno debe decir que cierta cantidad de energía momento esta contenida en una región del espacio que se extiende sobre varias longitudes de onda. Es posible mostrar que en la norma TT de la teoría linealizada el tensor de energía momento que caracteriza la energía transportada por las ondas gravitacionales es el tensor de Isaacson [23, 24] que tiene la forma siguiente:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \langle \partial_\mu h^+ \partial_\nu h^+ + \partial_\mu h^\times \partial_\nu h^\times \rangle \quad (2.22)$$

o de manera equivalente

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_\mu H \partial_\nu \bar{H} \rangle \quad (2.23)$$

en donde $\langle \rangle$ denota el promedio sobre las longitudes de onda y $H = h^+ - ih^\times$.

Del hecho de que nos encontramos en una región en vacío y lejos de la fuente, (debido a que el tensor de Ricci de anula), En vacío, el tensor de Riemann y el tensor de Weyl coinciden por lo que H puede escribirse en términos del escalar de Ψ_4 . Partiendo de la expresión del tensor de Riemann en la aproximación lineal

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad (2.24)$$

$$\Psi_0 = -\frac{1}{4}(\partial_t^2 h^+ + 2\partial_t \partial_r h^+ + \partial_r^2 h^+) - \frac{i}{4}(\partial_t^2 h^\times + 2\partial_t \partial_r h^\times + \partial_r^2 h^\times), \quad (2.25)$$

$$\Psi_4 = -\frac{1}{4}(\partial_t^2 h^+ - 2\partial_t \partial_r h^+ + \partial_r^2 h^+) + \frac{i}{4}(\partial_t^2 h^\times - 2\partial_t \partial_r h^\times + \partial_r^2 h^\times). \quad (2.26)$$

Para ondas salientes se sigue que $h(r, t) = h(r - t, 0)$, de tal forma que $\partial_r h = -\partial_t h$, y por lo tanto

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad (2.27)$$

$$\Psi_4 = -\ddot{h}^+ + i\ddot{h}^\times = -\ddot{H}. \quad (2.28)$$

Así que para una onda saliente:

$$H = - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} \Psi_4 dt'' dt'. \quad (2.29)$$

El flujo de energía a lo largo de la dirección radial de una onda gravitacional está dado en coordenadas locales cartesianas por [23]

$$\frac{dE}{dt dA} = T^{0r} = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial^0 H \partial^r \bar{H} \rangle = -\frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_t H \partial_r \bar{H} \rangle \quad (2.30)$$

donde dA es el elemento de área ortogonal a la dirección radial. Debido a que la onda es una onda propagándose hacia afuera de la fuente, $\partial_r h = -\partial_t h$, se tiene:

$$\frac{dE}{dt dA} = \frac{1}{16\pi} \langle \dot{H} \dot{\bar{H}} \rangle = \frac{1}{16\pi} \langle |\dot{H}|^2 \rangle \quad (2.31)$$

Para calcular el flujo total de energía, se integra sobre la esfera

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint |\dot{H}|^2 d\Omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega, \quad (2.32)$$

donde $dA = r^2 d\Omega$. El flujo de momento en la dirección radial está dado por

$$\frac{dP_i}{dt dA} = T^{ir} = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_i H \partial_r \bar{H} \rangle. \quad (2.33)$$

Si consideremos ahora que estamos lo suficientemente lejos para poder aproximar localmente a las ondas gravitacionales como ondas planas, $\partial_i H \simeq (x_i/r) \partial_r H$, y usar de nueva cuenta el hecho de que es una onda saliente $\partial_r h = -\partial_t h$, se llega a

$$\frac{dP_i}{dt dA} \simeq \frac{1}{16\pi} l_i \langle |\dot{H}|^2 \rangle, \quad (2.34)$$

donde \vec{l} es el vector radial unitario en un espacio-tiempo plano

$$\vec{l} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (2.35)$$

El flujo total de momento se obtiene integrando sobre la esfera la expresión (2.34)

$$\frac{dP_i}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint l_i |\dot{H}|^2 d\Omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint l_i \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega. \quad (2.36)$$

2.3.2 Fuentes de ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales se clasifican de acuerdo a la naturaleza de las fuentes que las producen. Esta clasificación resulta muy conveniente porque las diferentes clases requieren diferentes enfoques para analizar los datos obtenidos en una medición. La clasificación es la siguiente [25, 26]:

- ★ Chirps: Un sistema binario radía gravitacionalmente y pierde energía lo que causa que los cuerpos se acerquen cada vez mas, conforme la separación disminuye, la amplitud de la onda gravitacional aumenta, lo que produce una señal de chirp característica.
- ★ Explosiones: muchos escenarios producen *explosiones* de ondas gravitacionales, un ejemplo típico de este fenómeno son las oscilaciones de los agujeros negros durante la fusión de un sistema binario
- ★ Periódicas: Sistemas en los cuales la reacción gravitacional pueden radiar periódicamente con una frecuencia casi constante esto es el análogo gravitacional a los pulsares en radio
- ★ Estocásticas: Instantes después del Big Bang se espera fueron generadas ondas gravitacionales, esto genera entonces un fondo estocástico. Otro ejemplo es cuando las fuentes son tan abundantes que es imposible distinguirlas como individuales.

Los modelos para calcular de ondas gravitacionales siguen 3 caminos principales [27]:

- ★ Técnicas perturbativas, mediante expansiones a partir de una solución conocida a las ecuaciones de Einstein.
- ★ Aproximaciones post-newtonianas, esencialmente una expansión del radio entre la velocidad característica del sistema y la velocidad de la luz [28].
- ★ Relatividad numérica, las ecuaciones de Einstein son formuladas como un problema de valores iniciales. Este es el único camino para estudiar situaciones en las cuales se pueden tratar no linealidades de la teoría, como la colisión de dos agujeros negros y estrellas de neutrones o el colapso de supernovas.

En términos de análisis, es importante separar el problema de propagación de ondas gravitacionales y tratarlos de forma separada, esto suele hacerse dividiendo el espacio alrededor

de la fuente en tres regiones, la región de generación de las ondas, una zona local de onda y una zona de ondas distantes. La teoría de generación de ondas gravitacionales se desarrolla con un conjunto de herramientas matemáticas y la teoría de propagación de ondas se desarrolla con otro conjunto de herramientas en la región de ondas distante. Esas regiones están caracterizadas por el tamaño de la fuente e involucran la longitud de onda. De todas las técnicas para calcular la generación de ondas gravitacionales, el formalismo cuadrupolar [29] es importante porque es muy preciso para muchas fuentes y sobre todo da un muy buen estimado sobre los ordenes de magnitud. El formalismo cuadrupolar se basa en una aproximación tipo antena (para el caso de ondas electromagnéticas) de hecho la componente h_{jk}^{TT} se puede calcular mediante:

$$h_{jk}^{TT} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (I(t-r))^{TT} \quad (2.37)$$

en donde $I(t-r)$ es el momento cuadrupolar (de masa) de la fuente que genera las ondas evaluado en el tiempo retardado $t-r$ [16, 29, 30].

Capítulo 3

Teoría de perturbaciones

En algunos casos, las ondas gravitacionales pueden modelarse utilizando una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein más una perturbación, ejemplos de esto son, el estado final de la colisión de un sistema binario de agujeros negros es un solo agujero negro y conforme se aproxima al estado final, el sistema puede modelarse como una solución tipo Kerr más una perturbación. Otro ejemplo es una binaria que tiene un objeto compacto orbitando un agujero negro. El sistema binario puede describirse como un solo agujero negro más una perturbación debida al cuerpo capturado, estos casos pueden estudiarse muy bien utilizando la teoría de perturbaciones, en donde se trata al espacio tiempo como un fondo exacto g_{ab}^B mas una perturbación h_{ab} de modo que:

$$g_{ab} = g_{ab}^B + h_{ab}, \quad (3.1)$$

se dice que se esta dentro del límite perturbativo si $\|h_{ab}\| \ll \|g_{ab}^B\|$ Este sistema puede analizarse expandiendo las ecuaciones de Einstein para esta métrica conservando los términos a primer orden en h_{ab} . Este enfoque ha resultado ser muy útil cuando el espacio de fondo es un agujero negro. Para el caso de un agujero de Schwarzschild la derivación es más o menos directa, sin embargo, para el agujero negro de Kerr esta descomposición no es tan sencilla, debido principalmente a la carencia de simetría esférica. El tomar una expansión en términos de la métrica no ha resultado ser del todo útil, sin embargo si se ha logrado hacer bastantes avances expandiendo el tensor de curvatura, escribiendo el tensor de Riemann como

$$R_{abcd} = R_{abcd}^B + \delta R_{abcd} \quad (3.2)$$

este aproximación fue hecha por Teukolsky [31] basándose en los trabajos antes realizados por [32] y Bondi, [33], Newman y Penrose [34].

Para hacer una descripción de este enfoque comencemos definiendo el tensor de Weyl, en términos del tensor de Riemann como

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} := R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} (g_{\alpha[\mu}R_{\nu]\beta} - g_{\beta[\mu}R_{\nu]\alpha}) + \frac{1}{6} g_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta}R, \quad (3.3)$$

El tensor de Weyl, tiene las mismas propiedades de simetría que el tensor de Riemann y es de traza nula, es decir satisface que:

$$C_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = 0. \quad (3.4)$$

Una característica importante del tensor de Weyl (en 4 dimensiones), es que resulta invariante ante transformaciones conformes de la métrica, si dos métricas están relacionadas como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

con Ω una función escalar entonces,

$$\tilde{C}_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = C_{\beta\mu\nu}^{\alpha}, \quad (3.6)$$

aún cuando los tensores de Riemann de ambas métricas son diferentes, por eso el tensor de Weyl esta asociado con el contenido gravitacional, donde los detalles de la métrica no contribuyen demasiado.

3.1 El formalismo de tétradas

En muchos casos, es útil utilizar una base que es independiente de las coordenadas en cada punto del espacio tiempo, y por ello se hace una descripción en términos de una base en particular. Consideremos por ejemplo, un conjunto de cuatro vectores linealmente independientes Z_a^{μ} , los índices latinos servirán para identificar al vector y toman los valores (1, 2, 3, 4), mientras que los índices griegos, que toman valores (0, 1, 2, 3) indicarán las componentes del vector, además se supone los vectores satisfacen que:

$$Z_a^{\mu} Z_{b\mu} = \eta_{ab}, \quad (3.7)$$

con η_{ab} una matriz de coeficientes constantes independiente de la posición en el espacio tiempo, al conjunto de vectores conforman una tétrada, al ser los vectores Z_a linealmente independientes, existe la matriz η^{ab} con la propiedad que:

$$\eta^{ac} \eta_{cb} = \delta_b^a, \quad (3.8)$$

lo que nos permite definir un conjunto nuevo de vectores como

$$Z^a = \eta^{ab} Z_b. \quad (3.9)$$

La tétrada Z_a puede usarse como base, para expresar cualquier vector v en el espacio tiempo como:

$$v = v^a Z_a, \quad (3.10)$$

en general, el producto de dos vectores u y v puede escribirse como la contracción de las componentes covariantes y contravariantes en la tétrada:

$$v \cdot u = v^\mu u_\mu = v^a u_a. \quad (3.11)$$

Se puede pasar de las componentes coordenadas de cualquier tensor a sus componentes en la tétrada simplemente contrayendo los índices apropiados con la tétrada misma, por ejemplo, consideremos un tensor de rango 2,

$$T_{ab} = T_{\mu\nu} Z_a^\mu Z_b^\nu \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu} = T_{ab} Z_\mu^a Z_\nu^b, \quad (3.12)$$

La tétrada también puede utilizarse para definir derivadas direccionales de funciones escalares

$$f_a := Z_a^\mu \partial_\mu f, \quad (3.13)$$

y de la misma forma para las derivadas sobre tensores,

$$T_{\alpha\beta,a} = Z_a^\mu T_{\alpha\beta,\mu}. \quad (3.14)$$

En este punto, es necesario definir un conjunto de objetos diferenciales, *los coeficientes de rotación de Ricci* de la siguiente forma:

$$\gamma_{abc} = Z_a^\mu Z_{b\mu;\nu} Z_c^\nu. \quad (3.15)$$

Los coeficientes de rotación son antisimétricos en el primer par de índices, $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$ y como veremos mas adelante, juegan un papel muy importante dentro del formalismo Newman Penrose.

Los coeficientes de rotación surgen de manera natural al proyectar la derivada covariante a lo largo de la tétrada, consideremos un vector arbitrario v

$$v_{a,b} = Z_b^\mu \nabla_\mu (Z_a^\nu v_\nu) \quad (3.16)$$

$$= Z_b^\mu (Z_a^\nu v_{\nu;\mu} + v_\nu Z_{a;\mu}^\nu), \quad (3.17)$$

$$= Z_b^\mu (Z_a^\nu v_{\nu;\mu} + v^c Z_{c\nu} Z_{a;\mu}^\nu), \quad (3.18)$$

$$= Z_b^\mu Z_a^\nu v_{\nu;\mu} + \gamma_{cab} v^c \quad (3.19)$$

en donde se ha utilizado la definición (3.15), nótese además que la contracción es con el primer índice. De hecho, partiendo de la expresión anterior escrita como:

$$Z_b^\mu Z_a^\nu v_{\nu;\mu} = v_{a,b} - \eta^{cd} \gamma_{cab} v_d, \quad (3.20)$$

surge la derivada extrínseca que se denota como: $v_{a|b} = v_{a,b} - \eta^{cd} \gamma_{cab} v_d$. Su generalización a tensores es inmediata, para el tensor de Riemann que utilizaremos mas adelante siguiendo la convención de [35] es:

$$R_{abcd|e} = R_{abcd,e} - \eta^{nm} (\gamma_{nae} R_{mbcd} + \gamma_{nbe} R_{amcd} + \gamma_{nce} R_{abmd} + \gamma_{nde} R_{abcm}). \quad (3.21)$$

La representación del tensor de Riemann en la tétrada se obtiene al expresar la derivada covariante en términos de los coeficientes espinores:

$$\begin{aligned} Z_{a\mu;\nu} &= Z_b^\mu Z_\mu^b Z_{a\mu;\nu} Z_c^\nu Z_\nu^c, \\ &= \gamma_{bac} Z_\mu^b Z_\nu^c, \end{aligned}$$

nuevamente se ha utilizado $\gamma_{bac} = Z_b^\mu Z_{a\mu;\nu} Z_c^\nu$, y al aplicarla por segunda vez:

$$\begin{aligned} Z_{a\mu;\nu\lambda} &= (\gamma_{bac} Z_\mu^b Z_\nu^c)_{;\lambda} \\ &= \gamma_{bac;\lambda} Z_\mu^b Z_\nu^c + \gamma_{bac} (Z_{\mu;\lambda}^b Z_\nu^c + Z_\mu^b Z_{\nu;\lambda}^c). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por otro lado, la proyección del tensor de Riemann directamente sobre la tétrada nos da:

$$\begin{aligned} R_{adef} &= R_{\sigma\mu\nu\tau} Z_a^\sigma Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda \\ &= (Z_{a\mu;\nu\lambda} - Z_{a\mu;\lambda\nu}) Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda, \end{aligned}$$

Si se considera el primer término y se sustituye la expresión (3.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} Z_{a\mu;\nu\lambda} Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda &= (\gamma_{bac;\lambda} Z_\mu^b Z_\nu^c + \gamma_{bac} (Z_{\mu;\lambda}^b Z_\nu^c + Z_\mu^b Z_{\nu;\lambda}^c)) Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda \\ &= \gamma_{bac;\lambda} \delta_d^b \delta_e^c Z_f^\lambda + \gamma_{bac} Z_{\mu;\lambda}^b \delta_e^c Z_d^\mu Z_f^\lambda + \gamma_{bac} Z_{\nu;\lambda}^c \delta_d^b Z_e^\nu Z_f^\lambda \\ &= \gamma_{dae;\lambda} Z_f^\lambda + \gamma_{bae} Z_{\mu;\lambda}^b Z_d^\mu Z_f^\lambda + \gamma_{dac} Z_{\nu;\lambda}^c Z_e^\nu Z_f^\lambda, \\ &= \gamma_{dae;f} + \gamma_{bae} \eta^{bm} \gamma_{dmf} + \gamma_{dac} \eta^{cm} \gamma_{emf} \\ &= \gamma_{dae;f} + \eta^{nm} (\gamma_{nae} \gamma_{dmf} + \gamma_{dan} \gamma_{emf}) \end{aligned}$$

Con $\eta^{bm} \gamma_{dmf} = Z_{\mu;\lambda}^b Z_d^\mu Z_f^\lambda$ y $\eta^{cm} \gamma_{emf} = Z_{\nu;\lambda}^c Z_e^\nu Z_f^\lambda$.

El segundo término se encuentra, al hacer un intercambio de índices:

$$Z_{a\mu;\lambda\nu} Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda = \gamma_{daf;e} + \eta^{nm} (\gamma_{naf} \gamma_{dme} + \gamma_{dan} \gamma_{fme}) \quad (3.23)$$

Finalmente, tendremos al tensor de Riemann:

$$R_{adef} = \gamma_{dae;f} - \gamma_{daf;e} + \eta^{nm} (\gamma_{nae} \gamma_{dmf} - \gamma_{naf} \gamma_{dme} + \gamma_{dan} (\gamma_{emf} - \gamma_{fmc})), \quad (3.24)$$

La expresión para el tensor de Ricci se obtiene directamente de la contracción

$$R_{ac} = \eta^{bd} R_{abcd}, \quad (3.25)$$

y el escalar de Ricci es, $R = \eta^{ab} R_{ab}$.

3.2 El formalismo de Newman-Penrose

El formalismo de Newman Penrose introduce inicialmente una tétrada nula arbitraria $\{l^\mu, k^\mu, m^\mu, m^{*\mu}\}$, con el primer par de vectores reales y el segundo vectores complejos conjugados entre si. Los únicos productos que no se anulan son:

$$l^\mu k_\mu = -1 \quad m^\mu m_\mu^* = 1. \quad (3.26)$$

Esto conduce a que la forma matricial de η_{ab} siguiendo (3.7):

$$\eta^{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Las componentes independientes del tensor de Weyl en ése sistema coordenado están contenidas en cinco escalares complejos, conocidos como escalares de Weyl.

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu l^\lambda m^\tau, \\ \Psi_1 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu k^\nu l^\lambda m^\tau \\ \Psi_2 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu m^{*\lambda} k^\tau, \\ \Psi_3 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu k^\nu m^{*\lambda} k^\tau, \\ \Psi_4 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} k^\mu m^{*\nu} k^\lambda m^{*\tau}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Estas cantidades son independientes de cualquier sistema coordenado, pero claramente dependen de la elección de la tétrada. El formalismo de Teukolsky, utiliza una tétrada nula explotando las características esenciales del espacio tiempo de Kerr, específicamente cualquier espacio tiempo tipo Kerr admite exactamente dos direcciones nulas principales repetidas $\{l^\mu\}$ y $\{k^\mu\}$. En cualquier tétrada nula, cuyos vectores reales estén sobre las direcciones principales todos los escalares de Weyl, excepto Ψ_2 se anulan. Esto garantiza la invarianza de norma de las perturbaciones a primer orden en Ψ_0 y Ψ_4 , por lo tanto es conveniente escoger las direcciones principales como las direcciones de la tétrada, tal como lo han mostrado en [36].

Para describir la ambigüedad en la elección de la tétrada consideremos el siguiente argumento. Dado un punto en el espacio tiempo, uno puede transformar cualquier tétrada nula, orientada a cualquier otra utilizando transformaciones elementales tipo Lorentz de tres tipos básicos, estos incluyen dos familias de rotaciones elementales, que preservan tanto l^μ como k^μ mientras que cambian las otras tres direcciones y una tercera familia que son las transformaciones de Lorentz de espín que mutuamente escalan los vectores l^μ y k^μ dejando sus direcciones invariantes y rotan los elementos complejos m^μ y $m^{*\mu}$ por fases complementarias.

Los seis parámetros de las transformaciones de Lorentz actuando sobre una tétrada nula, están expresados en tres parámetros complejos y pueden expresarse de la siguiente forma:

- ★ Rotaciones nulas o transformaciones tipo I que dejan al vector l invariante mientras que los demás vectores se transforman de la siguiente manera:

$$l \rightarrow l, \quad k \rightarrow k + a^*m + am^* + aa^*l, \quad m \rightarrow m + al, \quad m^* \rightarrow m + a^*l, \quad (3.29)$$

el efecto de esta transformación sobre los escalares de Weyl es [37, 38]:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow \Psi_0, \\ \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + a^*\Psi_0, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2a^*\Psi_1 + a^{*2}\Psi_0, \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3a^*\Psi_2 + 3a^*\Psi_1 + a^{*3}\Psi_0, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4a^*\Psi_3 + 6a^*\Psi_2 + 4a^{*3}\Psi_1 + a^{*4}\Psi_0. \end{aligned}$$

- ★ Rotaciones nulas o transformaciones tipo II que dejan al vector k invariante

$$\begin{aligned} l \rightarrow l + b^*m + bm^* + bb^*k \quad k \rightarrow k, \\ m \rightarrow m + bk \quad m^* \rightarrow m^* + b^*k, \end{aligned}$$

con b una cantidad escalar compleja, las respectivas transformaciones de los escalares de Weyl son:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\ \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4. \end{aligned}$$

- ★ Transformaciones de espín o tipo III, reescalan los vectores l y k y rotan a m y m^* en el plano que generan

$$\begin{aligned} l \rightarrow A^{-1}l, \quad k \rightarrow Ak, \\ m \rightarrow e^{i\theta}m, \quad m^* \rightarrow e^{-i\theta}m^*. \end{aligned}$$

El resultado en los escalares de Weyl es respectivamente:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow A^{-2}e^{2i\theta}\Psi_0, \\ \Psi_1 &\rightarrow A^{-1}e^{i\theta}\Psi_1, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2, \\ \Psi_3 &\rightarrow Ae^{-i\theta}\Psi_3, \\ \Psi_4 &\rightarrow A^2e^{-2i\theta}\Psi_4. \end{aligned}$$

Los escalares de Weyl tiene gran importancia por si mismos ya que se les puede atribuir ciertas interpretaciones, por ejemplo Szekeres [39] hace la descomposición del tensor de Weyl en términos de bivectores,

$$\begin{aligned} U_{ab} &= -l_a m_b^* + l_b m_a^*, \\ V_{ab} &= k_a m_b - k_b m_a, \\ W_{ab} &= m_a m_b^* - m_b m_a^* - k_a l_b - k_b l_a, \end{aligned}$$

como:

$$\begin{aligned} C_{abcd} &= \Psi_0 U_{ab} U_{cd} + \Psi_1 (U_{ab} W_{cd} + W_{ab} U_{cd}) + \Psi_2 (V_{ab} U_{cd} + U_{ab} V_{cd} + W_{ab} W_{cd}) \\ &+ \Psi_3 (V_{ab} W_{cd} + W_{ab} V_{cd}) + \Psi_4 V_{ab} V_{cd}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

y les asocia un significado, por ejemplo, el escalar Ψ_4 representa una onda transversa en la dirección k , el escalar Ψ_3 representa la componente longitudinal de la onda y el Ψ_2 el potencial Coulombiano los términos Ψ_0 y Ψ_1 representan componentes transversas y longitudinales en la dirección l .

El tensor de Weyl puede determinarse completamente en términos de los cinco escalares Ψ_a y son además, una forma de estudiar en la clasificación de Petrov. Si consideramos que es posible hacer transformaciones en la tétrada de tal forma que podemos hacer todos, excepto Ψ_4 cero ¹, entonces bajo transformaciones de tipo II podemos hacer Ψ_0 cero si escogemos el parámetro b como solución a la ecuación:

$$\Psi_0 + 4\Psi_1 b + 6\Psi_2 b^2 + 4\Psi_3 b^3 + \Psi_4 b^4 = 0, \quad (3.31)$$

Que tiene cuatro raíces que corresponden a las direcciones principales. Esta es la esencia de la clasificación de Petrov.

- Petrov Tipo I: Todas las raíces son distintas, al hacer $\Psi_0 = 0$, y al hacer una rotación de tipo I se puede hacer $\Psi_4 = 0$.
- Petrov Tipo II: Dos raíces coinciden, con una rotación de tipo II se puede hacer $\Psi_0 = 0 = \Psi_1$ y al hacer una rotación de tipo I se puede hacer $\Psi_4 = 0$.
- Petrov Tipo D: Una pareja de raíces que coinciden, con una rotación de tipo II y una de tipo I se puede hacer $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$.
- Petrov Tipo III: Tres raíces coinciden, con una rotación tipo II se puede hacer $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$ y después una rotación de tipo I para hacer $\Psi_4 = 0$.

¹Transformaciones de este estilo pueden hacerse siempre y cuando el espacio tiempo sea diferente al de Minkoski

- Petrov Tipo N: Todas las raíces coinciden, con una rotación de tipo II se puede tomar $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ con Ψ_4 el único escalar diferente de cero.

La clasificación basada en las posibles soluciones de la ecuación (3.31) es equivalente a la caracterización del tensor de Weyl en términos de las direcciones nulas principales k [40], con la propiedad de que:

$$k_{[e} C_{a]bc[d} k_{f]} k^b k^c = 0 \Leftrightarrow \Psi_0 = 0. \quad (3.32)$$

Los paréntesis $[]$ indican antisimetrización y hay a lo mas cuatro de tales vectores. En espacios tipo D y III hay una dirección principal adicional l que no se obtiene por transformaciones de Lorentz de l y satisface la condición:

$$l_{[e} C_{a]bc[d} l_{f]} l^b l^c = 0 \Leftrightarrow \Psi_4 = 0. \quad (3.33)$$

y una caracterización completa es la siguiente que se encuentra en las referencias [40, 41]:

$$k_{[e} C_{a]bc[d} k_{f]} k^b k^c = 0 \Leftrightarrow \Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 \neq 0, \quad (3.34)$$

$$C_{abc[d} k_{f]} k^b k^c = 0 \Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 \neq 0, \quad (3.35)$$

$$C_{abc[d} k_{f]} k^c = 0 \Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0, \quad \Psi_3 \neq 0, \quad (3.36)$$

$$C_{abcd} k^c = 0 \Leftrightarrow \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 \neq 0. \quad (3.37)$$

Para las direcciones nulas principales k con multiplicidad 1,2,3 y 4 respectivamente.

En el espacio tiempo de Kerr, fijar las direcciones l y k sobre las direcciones principales, elimina las rotaciones nulas de tipo I y II completamente [36], pero no restringe las transformaciones de espín, Una forma de limitar este grado de libertad, fue propuesto por Kinnersley [42] y se basa en escoger l^a apuntando hacia afuera, hacia infinito en la región externa del agujero y adaptando la escala de la tétrada en infinito para observadores estacionarios, es decir fijando la magnitud de l y k de tal forma que sus proyecciones espaciales relativas a un observador estacionario tengan igual magnitud en infinito [36].

Comencemos escribiendo la métrica mediante los vectores de la tétrada como:

$$g_{\mu\nu} = \eta^{ab} Z_{a(\mu} Z_{b\nu)}, \quad (3.38)$$

Para hacer la conexión con el formalismo de Newman Penrose descrito líneas arriba, y las proyecciones del tensor de Riemann, el vector Z_1^μ se denota como l^μ y Z_2^μ como k^μ , los vectores Z_3^μ como m^μ y su vector conjugado Z_4^μ como $m^{*\mu}$, Los coeficientes espinoriales se definen siguiendo a Chandrasekhar [35]:

$$\kappa = m^\mu l_{\mu;\nu} l^\nu = \gamma_{311}, \quad \tau = m^\mu l_{\mu;\nu} k^\nu = \gamma_{312}, \quad (3.39)$$

$$\sigma = m^\mu l_{\mu;\nu} m^\nu = \gamma_{313}, \quad \rho = m^\mu l_{\mu;\nu} m^{*\nu} = \gamma_{314},$$

$$\pi = k^\mu m^*_{\mu;\nu} l^\nu = \gamma_{241}, \quad \nu = k^\mu m^*_{\mu;\nu} k^\nu = \gamma_{242},$$

$$\mu = k^\mu m^*_{\mu;\nu} m^\nu = \gamma_{243}, \quad \lambda = k^\mu m^*_{\mu;\nu} m^{*\nu} = \gamma_{244},$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} (k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) l^\nu = \frac{1}{2} (\gamma_{211} + \gamma_{341}),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} (k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) k^\nu = \frac{1}{2} (\gamma_{212} + \gamma_{342}),$$

$$\beta = \frac{1}{2} (k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) m^\nu = \frac{1}{2} (\gamma_{213} + \gamma_{343}), \quad (3.40)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) m^{*\nu} = \frac{1}{2} (\gamma_{214} + \gamma_{344}).$$

Como veremos mas adelante, las sustituciones $l \leftrightarrow 1$, $k \leftrightarrow 2$, $m \leftrightarrow 3$, $m^* \leftrightarrow 4$ son de gran ayuda para simplificar notación. Los escalares de Weyl los podemos encontrar con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -C_{1313}, & \Psi_1 &= -C_{1213}, \\ \Psi_2 &= -C_{1342}, & \Psi_3 &= -C_{1242}, \\ \Psi_4 &= -C_{2424}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.3 Ecuaciones de perturbación

La proyección de la derivada del tensor de Riemann en la tétrada se define como,
 $R_{\mu\nu\lambda\tau;\sigma} Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\lambda Z_d^\tau Z_e^\sigma = R_{abcd|e}$.

Las derivadas direccionales las escribimos como:

$$\mathbf{D} = l^\mu \partial_\mu, \quad \mathbf{\Delta} = k^\mu \partial_\mu, \quad \delta = m^\mu \partial_\mu, \quad (3.42)$$

Para obtener las ecuaciones de perturbación, se comienza con las identidades de Bianchi y la definición del tensor de Riemann.

$$R_{\mu\nu\lambda\tau;\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\lambda;\tau} + R_{\mu\nu\tau\sigma;\lambda} = 0, \quad (3.43)$$

y

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} Z_a^\sigma = Z_{a\mu;\nu\lambda} - Z_{a\nu;\lambda\mu}, \quad (3.44)$$

estas ecuaciones, al proyectarse sobre la tetrada nula se transforman en ecuaciones para los escalares de Weyl, por ejemplo, consideremos la proyección de la identidad de Bianchi 42[21|4]

$$\begin{aligned}
0 &= R_{4221|4} + R_{4242|1} + R_{4214|2}, & (3.45) \\
&= C_{4221|4} + \frac{1}{2}(\eta_{42}R_{21|4} + \eta_{21}R_{42|4} - \eta_{22}R_{41|4} - \eta_{41}R_{22|4}) - \frac{1}{6}(\eta_{42}\eta_{21} - \eta_{42}\eta_{22})R \\
&\quad + C_{4214|2} + \frac{1}{2}(\eta_{41}R_{42|2} + \eta_{24}R_{42|2} - \eta_{21}R_{44|2} - \eta_{44}R_{21|2}) - \frac{1}{6}(\eta_{41}\eta_{24} - \eta_{44}\eta_{21})R \\
&\quad + C_{4242|1} + \frac{1}{2}(\eta_{44}R_{22|1} + \eta_{22}R_{44|1} - \eta_{24}R_{42|1} - \eta_{12}R_{24|1}) - \frac{1}{6}(\eta_{44}\eta_{22} - \eta_{42}\eta_{22})R, \\
&= C_{4221|4} + C_{4242|1} + \frac{1}{2}\eta_{12}(R_{42|4} - R_{44|2}). & (3.46)
\end{aligned}$$

Utilizando la definición de derivada extrínseca, aplicada a la componente C_{4221} se encuentra que:

$$\begin{aligned}
C_{4221|4} &= C_{4221,4} - \eta^{nm}(\gamma_{n44}C_{m221} + \gamma_{n24}C_{4m21} + \gamma_{n24}C_{42m1} + \gamma_{n14}C_{422m}) & (3.47) \\
&= C_{4221,4} - \eta^{12}(-2\alpha\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 - \rho\Psi_4) \\
&= \delta^*\Psi_3 - \eta^{12}(-2\alpha\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 - \rho\Psi_4)
\end{aligned}$$

De la misma manera

$$C_{4242|1} = -\mathbf{D}\Psi_4 - \eta^{12}(4\epsilon\Psi_4 - 4\pi\Psi_3), \quad (3.48)$$

utilizando las ecuaciones de Einstein escritas en la tetrada:

$$R_{ab} = K(T_{ab} - \eta_{ab}\eta^{12}(T_{12} - T_{34})) \quad (3.49)$$

$K = 8\pi$, con las componentes:

$$\begin{aligned}
R_{42|4} &= KT_{42|2}, & (3.50) \\
R_{44|1} &= KT_{44|2}.
\end{aligned}$$

en la ecuación (3.46) se obtiene:

$$C_{4221|4} + C_{4242|1} + \frac{1}{2}\eta_{12}(T_{42|4} - T_{44|2}) = 0, \quad (3.51)$$

En donde nuevamente, al expresar $T_{42|4} - T_{44|2}$ en términos de los coeficientes espinores como:

$$T_{42|4} - T_{44|2} = \delta^*T_{km^*} - \Delta T_{m^*m^*} - \eta^{12}(-\sigma^*T_{kk} + \lambda T_{lk} - 2\nu T_{lm^*}) \quad (3.52)$$

$$+ \lambda T_{mm^*} + (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)T_{m^*m^*} + 2(\tau^* - \alpha)T_{km^*}, \quad (3.53)$$

Se llega a:

$$(\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha + 2\pi)) \Psi_3 - (\mathbf{D} - \eta_{12}(\rho - 4\epsilon)) \Psi_4 - 3\eta_{12}\lambda \Psi_2 = \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} & -\eta_{12}\frac{K}{2}((\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha - \tau^*)) T_{km^*} - (\Delta + \eta_{12}(\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)) T_{m^*m^*} \\ & -\eta_{12}\lambda T_{lk} + \eta_{12}\sigma^* T_{kk} + 2\eta_{12}\nu T_{lm^*} - \eta_{12}\lambda T_{mm^*}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

La proyección para la identidad 42[43|2] queda como [35]:

$$(\Delta + 2\eta_{12}(2\mu + \gamma)) \Psi_3 - (\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau)) \Psi_4 - 3\eta_{12}\nu \Psi_2 \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & = \eta_{12}\frac{K}{2}((\Delta + 2\eta_{12}(\mu^* + \gamma)) T_{km^*} - (\delta^* + \eta_{12}(2\alpha + 2\beta^* - \tau^*)) T_{kk} \\ & -\eta_{12}\nu T_{lk} - \eta_{12}\nu T_{mm^*} - \eta_{12}\nu^* T_{m^*m^*} + 2\eta_{12}\lambda T_{km}), \end{aligned} \quad (3.57)$$

Mientras que la proyección del tensor de Riemann R_{2424} :

$$\Psi_4 + (\Delta + \eta_{12}(\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \lambda - (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)) \nu = 0, \quad (3.58)$$

Como veremos mas adelante, utilizaremos para derivar la ecuación de perturbación para el escalar Ψ_4 , las proyecciones 42[13|2]:

$$(\Delta + 3\eta_{12}\mu) \Psi_2 - (\delta + 2\eta_{12}(\beta - \tau)) \Psi_3 - \eta_{12}\sigma \Psi_4 - 2\eta_{12}\nu \Psi_1 = \quad (3.59)$$

$$\eta_{12}\frac{K}{2}(-(\mathbf{D} - \eta_{12}(\rho^* - 2\epsilon - 2\epsilon^*)) T_{kk} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} & + (\delta + 2\eta_{12}(\beta + \pi^*)) T_{km^*} - \eta_{12}\lambda^* T_{m^*m^*} + 2\eta_{12}\pi T_{km} \\ & - \frac{1}{3}(\Delta + 3\eta_{12}\mu) T_{lk} + \frac{1}{3}(\Delta - 3\eta_{12}\mu) T_{mm^*}), \end{aligned} \quad (3.61)$$

y la proyección 42[13|4]:

$$(\delta^* + 3\eta_{12}\pi) \Psi_2 - (\mathbf{D} - 2\eta_{12}(\rho - \epsilon)) \Psi_3 - \eta_{12}\kappa \Psi_4 - 2\eta_{12}\lambda \Psi_1 \quad (3.62)$$

$$= \eta_{12}\frac{K}{2}(-(\mathbf{D} - 2\eta_{12}(\rho^* - \epsilon)) T_{km^*} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} & + (\delta - \eta_{12}(2\alpha^* - 2\beta - \pi^*)) T_{m^*m^*} - \eta_{12}\kappa^* T_{kk} - 2\eta_{12}\mu T_{lm^*} \\ & - \frac{1}{3}(\delta^* - 3\eta_{12}\pi) T_{lk} + \frac{1}{3}(\delta^* + 3\eta_{12}\pi) T_{mm^*}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Además de las siguientes combinaciones de las proyecciones del tensor de Riemann $R_{1242} - R_{3442}$:

$$(\Delta + \eta_{12}(\mu^* - \gamma^*)) \alpha - (\delta^* + \eta_{12}(\beta^* - \tau^*)) \gamma + \eta_{12}(\lambda(\beta + \tau) - \nu(\rho + \epsilon)) + \Psi_3 = 0, \quad (3.65)$$

La proyección R_{2421}

$$\Psi_3 + (\Delta + \eta_{12}(\mu + \gamma - \gamma^*)) \pi - (\mathbf{D} + \eta_{12}(3\epsilon + \epsilon^*)) \nu + \eta_{12}(\mu\tau^* + \lambda(\pi^* + \tau)) + \eta_{12}\frac{K}{2}T_{km^*} = 0, \quad (3.66)$$

la identidad R_{2443}

$$-\Psi_3 + (\delta^* + \eta_{12} (\alpha + \beta^* + \pi)) \mu - (\delta - \eta_{12} (\alpha^* - 3\beta)) \lambda - \eta_{12} \pi \mu^* + \eta_{12} (\rho - \rho^*) \nu + \eta_{12} \frac{K}{2} T_{km^*} = 0. \quad (3.67)$$

Las relaciones de conmutación entre operadores resultan ser de gran interés, pues nos servirán para reducir las ecuaciones, en particular la siguiente:

$$[\delta^*, \Delta] = \eta_{12} (-\nu \mathbf{D} - (\alpha + \beta^* - \tau^*) \Delta + \lambda \delta + (\mu^* + \gamma - \gamma^*) \delta^*). \quad (3.68)$$

Para los espacios tiempo tipo D podemos escoger la tétrada que está alineada con las direcciones principales, los escalares de Weyl salvo Ψ_2 son cero, además, los coeficientes espinores κ, σ, ν y λ son cero.

Las ecuaciones de perturbación se siguen al sustituir las variables por su valor más un término de perturbación, denotada por el superíndice (1) , es decir al tomar $F \rightarrow F + F^{(1)}$ para todas las cantidades de la ecuación (3.55):

$$\begin{aligned} & (\delta^* + 2\eta_{12} (\alpha + 2\pi)) \Psi_3^{(1)} - (\mathbf{D} - \eta_{12} (\rho - 4\epsilon)) \Psi_4^{(1)} - 3\eta_{12} \lambda^{(1)} \Psi_2 \\ &= -\eta_{12} \frac{K}{2} \left((\delta^* + 2\eta_{12} (\alpha - \tau^*)) T^{(1)}_{km^*} - (\Delta + \eta_{12} (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)) T^{(1)}_{m^* m^*} \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

de la expresión (3.57)

$$\begin{aligned} & (\Delta + 2\eta_{12} (2\mu + \gamma)) \Psi_3^{(1)} - (\delta + \eta_{12} (4\beta - \tau)) \Psi_4^{(1)} - 3\eta_{12} \nu^{(1)} \Psi_2 \\ &= \eta_{12} \frac{K}{2} \left((\Delta + 2\eta_{12} (\mu^* + \gamma)) T^{(1)}_{km^*} - (\delta^* + \eta_{12} (2\alpha + 2\beta^* - \tau^*)) T^{(1)}_{kk} \right), \end{aligned} \quad (3.70)$$

y de (3.58)

$$\Psi_4^{(1)} + (\Delta + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \lambda^{(1)} - (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)) \nu^{(1)} = 0. \quad (3.71)$$

En donde se han considerado únicamente términos a primer orden. Sustituyendo las ecuaciones (3.60) y (3.63) se obtiene:

$$\Delta \Psi_2 = -3\eta_{12} \mu \Psi_2; \quad \delta^* \Psi_2 = -3\eta_{12} \pi \Psi_2, \quad (3.72)$$

Si en la ec. (3.71) se actúa sobre Ψ_2 :

$$(\Delta + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \lambda^{(1)} \Psi_2 - (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)) \nu^{(1)} \Psi_2 = -\Psi_2 \Psi_4^{(1)}. \quad (3.73)$$

y si se hace actuar el operador $(\Delta + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))$, sobre la ecuación (3.70), y el

operador $(\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))$, sobre la ecuación (3.71) y restarlas se tiene:

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{\Delta} + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) (\delta^* + 2\eta_{12} (\alpha + 2\pi)) \\ & - (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)) (\mathbf{\Delta} + 2\eta_{12} (2\mu + \gamma))) \Psi_3^{(1)} - \\ & ((\mathbf{\Delta} + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) (\mathbf{D} - \eta_{12} (\rho - 4\epsilon)) \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} & - (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)) (\delta + \eta_{12} (4\beta - \tau)) \Psi_4^{(1)} - 3\eta_{12} \Psi_2 \Psi_4^{(1)} = \\ & - \eta_{12} \frac{K}{2} \left((\mathbf{\Delta} + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \left((\delta^* + 2\eta_{12} (\alpha - \tau^*)) T^{(1)}_{km^*} \right. \right. \\ & \left. \left. - (\mathbf{\Delta} + \eta_{12} (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)) T^{(1)}_{m^*m^*} \right) + (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)) \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} & \left((\mathbf{\Delta} + 2\eta_{12} (\mu^* + \gamma)) T^{(1)}_{km^*} \right. \\ & \left. - (\delta^* + \eta_{12} (2\alpha + 2\beta^* - \tau^*)) T^{(1)}_{kk} \right), \end{aligned} \quad (3.76)$$

en donde se ha utilizado la ecuación (3.73). Al sustituir la regla de conmutación (3.68), los operadores que actúan sobre $\Psi_3^{(1)}$ se cancelan de modo que se obtiene una ecuación para $\Psi_4^{(1)}$:

$$((\mathbf{\Delta} + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) (\mathbf{D} - \eta_{12} (\rho - 4\epsilon)) \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} & - (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)) (\delta + \eta_{12} (4\beta - \tau)) - 3\eta_{12} \Psi_2) \Psi_4^{(1)} \\ & = -\eta_{12} \frac{K}{2} \left((\mathbf{\Delta} + \eta_{12} (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \left((\delta^* + 2\eta_{12} (\alpha - \tau^*)) T^{(1)}_{km^*} \right. \right. \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} & \left. - (\mathbf{\Delta} + \eta_{12} (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)) T^{(1)}_{m^*m^*} \right) \\ & + (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)) \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\left((\mathbf{\Delta} + 2\eta_{12} (\mu^* + \gamma)) T^{(1)}_{km^*} - (\delta^* + \eta_{12} (2\alpha + 2\beta^* - \tau^*)) T^{(1)}_{kk} \right), \quad (3.80)$$

Los términos de fuente, pueden escribirse como:

$$T_4 = \hat{\mathcal{T}}^{kk} T^{(1)}_{kk} + \hat{\mathcal{T}}^{km^*} T^{(1)}_{km^*} + \hat{\mathcal{T}}^{m^*m^*} T^{(1)}_{m^*m^*}. \quad (3.81)$$

El siguiente paso es escribir esta ecuación en un sistema de coordenadas en particular. En el siguiente capítulo nos centraremos en el caso de un agujero negro de Shcwarzschild en coordenadas tipo Kerr-Schild, que son regulares a través del horizonte de eventos.

Capítulo 4

Perturbaciones al agujero negro de Schwarzschild

Los primeros estudios sobre perturbaciones de agujeros negros estaban enfocados en demostrar su estabilidad. Para atacar el problema Regge y Wheeler derivaron las ecuaciones que describen un agujero negro deformado en 1957 [43]. En principio, esto puede hacerse utilizando perturbaciones a primer orden en la métrica, de la forma (3.1). Después de insertar este ansatz en las ecuaciones de Einstein, se encuentra que las perturbaciones de un agujero negro de Schwarzschild pueden dividirse en dos clases independientes. La primera induce un arrastre del sistema de referencia y se conoce como perturbaciones axiales o impares [44]. La segunda clase, corresponde a perturbaciones que permanecen invariantes ante un cambio de signo del ángulo azimutal ϕ y son llamadas perturbaciones polares o pares. Ambas ecuaciones tienen la forma de la ecuación de Schrödinger con un potencial efectivo de corto alcance correspondiente a una única barrera de potencial, esto quiere decir que el problema de perturbaciones de un agujero negro es muy parecido al problema de dispersión por un potencial en Mecánica Cuántica.

Existe otra forma de estudiar perturbaciones para el agujero negro de Schwarzschild. Esta se basa en el formalismo de tétradas nulas, que resulta ser un método muy poderoso al tratar con radiación en espacios tiempo asintóticamente planos; este formalismo fue utilizado por Bardeen y Press [32] para escribir una ecuación maestra que describe los campos de radiación para el agujero de Schwarzschild y más tarde por Teukosky para el agujero negro de Kerr [45]. Por supuesto ambos enfoques son equivalentes, aunque demostrar la equivalencia no es trivial, una demostración se encuentra en el artículo de Chandrasekhar [46].

Las coordenadas de tipo Kerr-Schild son muy utilizadas en la comunidad de relatividad numérica porque en una superficie con t constante son regulares y penetran en el horizonte lo que resulta conveniente para imponer condiciones de frontera o para hacer excisión [47]. Para el caso de Schwarzschild se conocen como coordenadas de Eddington-Finkelstein. El elemento de línea es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + 4 \frac{M}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2., \quad (4.1)$$

Se escoge la tétrada como:

$$l^\mu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2M}{r}, 1 - \frac{2M}{r}, 0, 0 \right), \quad k^\mu = (1, -1, 0, 0), \quad m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 0, 1, i \csc \theta), \quad (4.2)$$

Los coeficientes espinores:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{r}, & \rho &= \frac{r-2M}{2r^2}, & \epsilon &= -\frac{M}{2r^2}, \\ \alpha &= \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}r}, & \beta &= -\alpha, & \Psi_2 &= \frac{M}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Al sustituir directamente en la ecuación de perturbación (3.80) se obtiene la siguiente expresión para el escalar perturbado Ψ_4 :

$$[\square_{tr}^\Psi + \square_{\theta\phi}] \Psi_4^{(1)} = 2K r^2 T_4. \quad (4.4)$$

en donde

$$\begin{aligned} \square_{tr}^\Psi &= -(r^2 + 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (r^2 - 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2(2r + 3M) \frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad + 6(r - M) \frac{\partial}{\partial r} + 4, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\square_{\theta\phi} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 4i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - 2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (4.6)$$

La forma explícita de los operadores definidos por las ecuaciones (3.81) para la fuente toman la forma:

$$\hat{T}^{kk} = -\frac{1}{2r^2} \bar{\delta}_{-1} \bar{\delta}_0, \quad (4.7)$$

$$\hat{T}^{km^*} = -\frac{\sqrt{2}}{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{3}{r} \right) \bar{\delta}_{-1}, \quad (4.8)$$

$$\hat{T}^{m^*m^*} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{6}{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{4}{r^2} \right), \quad (4.9)$$

con los operadores “eth” y “eth-bar” [34, 48], definidos como:

$$\bar{\delta}_s = -\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - s \cot \theta \right) \equiv \bar{\delta}_0 + s \cot \theta, \quad (4.10)$$

$$\delta_s = -\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + s \cot \theta \right) \equiv \delta_0 - s \cot \theta, \quad (4.11)$$

El subíndice s indica que actúan sobre una cantidad de peso de espín s ¹, estos operadores,

¹Los escalares de Newman Penrose, tienen un peso conforme c y un peso de espín s si bajo las transformaciones de tipo III

$$\tilde{l}^\mu = \lambda^{-1} l^\mu, \quad \tilde{k}^\mu = \lambda k^\mu, \quad \tilde{m}^\mu = e^{i\theta} m^\mu, \quad (4.12)$$

Los escalares se transforman como:

$$\tilde{T} = \lambda^{-c} e^{i s \theta} T. \quad (4.13)$$

sirven para definir los armónicos con peso de espín $Y_s^{l,m}(\theta, \varphi)$ como las funciones propias del operador $\square_{\theta\phi}$

$$\square_{\theta\varphi} Y_{-2}^{l,m} = \bar{\delta}_{-1} \bar{\delta}_{-2} Y_{-2}^{l,m} = -(l-1)(l+2) Y_{-2}^{l,m} . \quad (4.14)$$

Las funciones (4.14) están definidas sobre la esfera y forman una base completa en el espacio de funciones continuas y están definidas sólo para el caso $|s| \leq l$. Cuando el operador $\bar{\delta}$ actúa sobre los armónicos, les sube el peso de espín

$$\bar{\delta}_s Y_s^{l,m} = \sqrt{(l-s)(l+s+1)} Y_{s+1}^{l,m} , \quad (4.15)$$

mientras que el operador $\bar{\delta}$, les baja el peso de espín.

$$\bar{\delta}_s Y_s^{l,m} = -\sqrt{(l+s)(l-s+1)} Y_{s-1}^{l,m} , \quad (4.16)$$

Para resolver la ecuación de perturbación, resulta conveniente trabajar con la función $\Phi = r \Psi_4$, que se espera tiene un comportamiento constante en las regiones lejanas del agujero negro, de acuerdo al teorema de peeling [33]. La ecuación de perturbación queda de la siguiente forma:

$$[\square_{tr}^\Phi + \square_{\theta\phi}] \Phi = 2K r^3 T_4 . \quad (4.17)$$

En donde el operador radial temporal es:

$$\begin{aligned} \square_{tr}^\Phi = & - (r^2 + 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (r^2 - 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \\ & + 2(2r + M) \frac{\partial}{\partial t} + 2(2r - M) \frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{M}{r} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.17), junto con las definiciones de los operadores (4.7-4.9), es la ecuación para la ecuación de perturbación de un agujero de Schwarzschild en coordenadas de Eddington Finkelstein con una fuente arbitraria $T_{\mu\nu}$.

4.1 Polvo en caída radial

Consideremos que la fuente de perturbación es un fluido perfecto tipo polvo, con un tensor de energía momento:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu , \quad (4.19)$$

con ρ la densidad de energía en reposo y u_μ la cuadrivelocidad del fluido. Si se supone que el fluido cae radialmente, entonces la cuadrivelocidad tiene la forma:

$$u^\mu = (u^0, u^1, 0, 0) , \quad (4.20)$$

en donde, las componentes son funciones de r y t . La dinámica del fluido está descrita por la conservación del vector de corriente, $J^\mu = \rho u^\mu$, y la ecuación de conservación para el tensor de energía momento.

$$J^\mu_{;\mu} = 0 , \quad (4.21)$$

$$T^{\nu\mu}_{;\mu} = 0 . \quad (4.22)$$

Estas ecuaciones, dictan la dinámica del fluido, pero en el caso de polvo se reducen a la ecuación de geodésicas para u^μ y pueden integrarse directamente considerando la normalización de la cuadrivelocidad $u^\mu u_\mu = -1$, y que el lagrangiano para partículas masivas en Schwarzschild no depende del tiempo. La coordenada t es una coordenada cíclica así que se tiene una cantidad conservada $E = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^0}$. Para el movimiento radial que estamos considerando, se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de la cuadrivelocidad.

$$u^1 = \pm \sqrt{E^2 - 1 + 2\frac{M}{r}}, \quad u^0 = \frac{E r + 2 M u^1}{r - 2 M}, \quad (4.23)$$

E constante a lo largo de la trayectoria, se considera además el signo menos en la componente u^1 pues se está considerando que el polvo está cayendo hacia el agujero. Para encontrar a la densidad es necesario resolver la ecuación de continuidad (4.21)

$$\partial_t (\sqrt{-g} \rho u^0) + \partial_r (\sqrt{-g} \rho u^1) = 0. \quad (4.24)$$

con $\sqrt{-g}$ el determinante de la métrica. Con las expresiones para la cuadrivelocidad (4.20), únicamente las proyecciones a lo largo de la dirección k son no triviales, esto es:

$$T_{k m^*} = T_{m^* m^*} = 0, \quad T_{k k} = (k^\mu u_\mu)^2 \rho = (u^0 + u^1)^2 \rho. \quad (4.25)$$

Los términos fuente para la ecuación (4.17) se reducen a:

$$T_4 = \hat{T}^{k k} T_{k k} = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2 r^2} \bar{\partial}_{-1} \bar{\partial}_0 \rho. \quad (4.26)$$

Como ρ es una función escalar podemos descomponerla en términos de los armónicos esféricos con peso de espín cero de la siguiente forma:

$$\rho = \sum_{lm} \rho_{l,m}(t, r) Y_0^{l,m}(\theta, \phi). \quad (4.27)$$

La acción de los operadores $\bar{\partial}$ (4.11) actuando sobre un armónico con peso de espín cero, le baja el espín a -2 ,

$$\bar{\partial}_{-1} \bar{\partial}_0 Y_0^{l,m} = -\sqrt{l(l+1)} \bar{\partial}_{-1} Y_{-1}^{l,m} = \sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)} Y_{-2}^{l,m}. \quad (4.28)$$

Con estos resultados se obtiene que los términos de fuente, para la ecuación de perturbación tienen la forma:

$$T_4 = \hat{T}^{k k} T_{k k} = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2 r^2} \sum_{lm} \rho_{l,m}(t, r) \sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)} Y_{-2}^{l,m}. \quad (4.29)$$

De esta manera es posible describir configuraciones de polvo no necesariamente esféricamente simétricas y por lo tanto es posible producir ondas gravitacionales.

Siguiendo la línea general, de utilizar como base los armónicos esféricos con peso de espín, explotando que son funciones propias del operador $\square_{\theta\phi}$ resulta natural tomar una descomposición

de la función Φ en términos de $Y_{-2}^{l,m}(\theta, \phi)$, de hecho este es un método estándar para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

$$\Phi = \sum_{lm} R_{l,m}(t, r) Y_{-2}^{l,m}(\theta, \phi) , \quad (4.30)$$

con estos resultados, es posible agrupar la ecuación de perturbación, como múltiplos de $Y_{-2}^{l,m}$, por lo tanto, es posible obtener una ecuación para la parte radial temporal cada modo (l, m) de Φ :

$$\begin{aligned} & - (r^2 + 2 M r) \frac{\partial^2 R_{l,m}}{\partial t^2} + (r^2 - 2 M r) \frac{\partial^2 R_{l,m}}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2 R_{l,m}}{\partial t \partial r} + \\ & 2 (2 r + M) \frac{\partial R_{l,m}}{\partial t} + 2 (2 r - M) \frac{\partial R_{l,m}}{\partial r} + \left(2 \frac{M}{r} - (l - 1) (l + 2) \right) R_{l,m} + \\ & 4 \pi r^3 \left(\frac{E - \sqrt{E^2 - 1 + 2 \frac{M}{r}}}{r - 2 M} \right)^2 \sqrt{(l - 1) l (l + 1) (l + 2)} \rho_{l,m} = 0 . \end{aligned} \quad (4.31)$$

al sustituir en la ecuación de continuidad la descomposición (4.27) la expresión explícita de las componentes de la cuadrivelocidad (4.23) se obtiene:

$$\partial_t \rho_{l,m} + v^r \partial_r \rho_{l,m} + 2 \frac{E^2 - 1 + \frac{3M}{2r}}{r (E^2 - 1 + \frac{2M}{r})} v^r \rho_{l,m} = 0 , \quad (4.32)$$

En donde se ha sustituido la velocidad coordenada $v^r = \frac{dr}{dt} = \frac{u^1}{u^0}$.

Esta descomposición, permite estudiar cualquier distribución de polvo en caída radial y su reacción gravitacional utilizando únicamente las variable radial y temporal.

Debido a la simetría esférica del espacio tiempo, la ecuación de evolución es independiente del modo m pues este da una descripción de ángulo azimutal. Podemos observar en la ecuación (4.31) que cada modo de materia (l,m) despierta el correspondiente modo de radiación, para estudiar la dependencia de la onda gravitacional con la distribución de materia que la genera, se resuelve numéricamente la ecuación de perturbación. Para resolver la ecuación de perturbación se definen nuevas variables, las derivadas radiales y temporales para escribir la ecuación como un sistema de ecuaciones, acoplado pero de primer orden. En la próxima sección se describe la reducción a primer orden y se escribe explícitamente el sistema de ecuaciones.

Descomposición a primer orden

Para comenzar, se define la función $\psi_{l,m}$ y $\Pi_{l,m}$ en términos de las funciones $R_{l,m}$ de la siguiente forma:

$$\Pi_{l,m} = \frac{r + 2 M}{r} \partial_t R_{l,m} - 2 \frac{M}{r} \psi_{l,m} , \quad (4.33)$$

Que corresponden a casos particulares de las definiciones usualmente utilizadas para resolver la ecuación de onda [49]. Una vez que se sustituyen estas definiciones en la ecuación de segundo

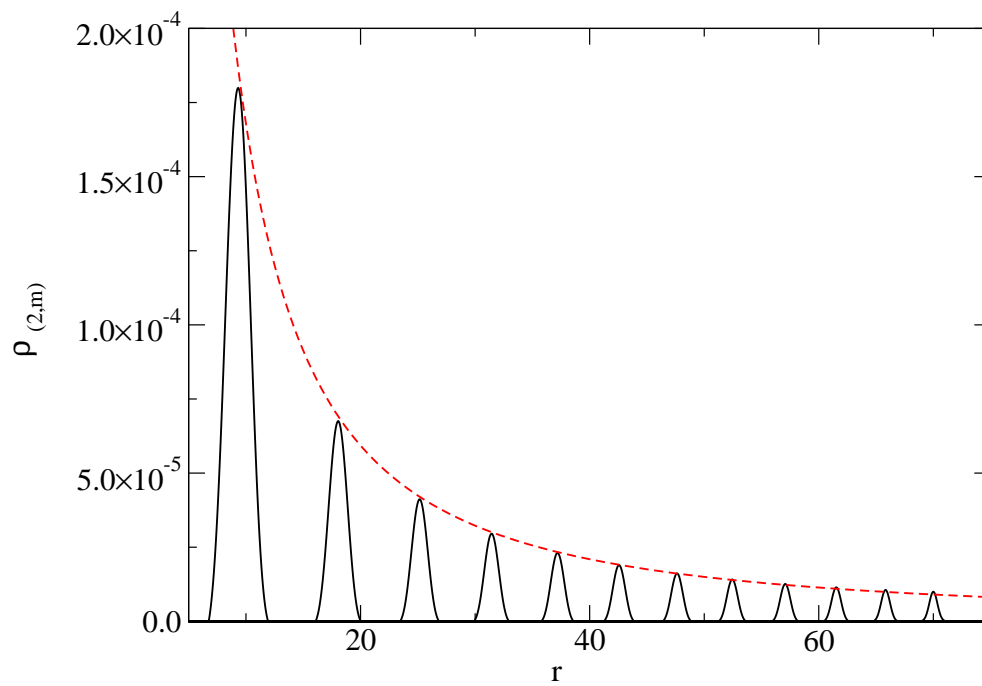


Figura 4.1: Se muestra la evolución de la densidad para una cáscara de polvo, cada $t = 25$, y la envolvente exacta de la densidad. El pulso tiene una amplitud inicial de $A_0 = 10^{-5}$, un ancho de $\sigma = 0.5$ y está centrada en $r_0 = 70 M$.

orden para $R_{l,m}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\partial_t R_{l,m} = \frac{1}{r+2M} (r \Pi_{l,m} + 2M \psi_{l,m}) , \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_{l,m} &= \partial_r \left(\frac{1}{r+2M} (r \Pi_{l,m} + 2M \psi_{l,m}) \right) \\ &= \frac{1}{r+2M} (r \partial_r \Pi_{l,m} + 2M \partial_r \psi_{l,m}) + \frac{2M}{(r+2M)^2} (\Pi_{l,m} - \psi_{l,m}) , \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi_{l,m} &= \frac{1}{r+2M} (2M \partial_r \Pi_{l,m} + r \partial_r \psi_{l,m}) \\ &+ \frac{2}{r(r+2M)^2} ((2r^2 + 5Mr + 4M^2) \Pi_{l,m} + (r+4M)(2r+3M) \psi_{l,m}) \\ &+ \left(2\frac{M}{r^3} - \frac{(l-1)(l+2)}{r^2} \right) R_{l,m} \\ &+ 4\pi r \left(\frac{E - \sqrt{E^2 - 1 + 2\frac{M}{r}}}{r-2M} \right)^2 \sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)} \rho_{l,m} , \end{aligned} \quad (4.36)$$

Éste se resuelve simultáneamente con la ecuación (4.32) para la densidad, para obtener la respuesta gravitacional del agujero negro ante perturbaciones producidas por esa distribución de materia.

Para resolver el sistema se utiliza un método Runge Kutta de tercer orden de variación total decreciente ver sección 6.4.1.

Las condiciones de frontera que se imponen para la densidad son ($\rho_{N_{out}} = \rho_{N_{out-1}}$) y condiciones maximamente disipativas, esto es poniendo cero el correspondiente vector propio entrante, ($\Pi_{out} + \psi_{out} = 0$).

Para simplificar el problema se han considerado cáscaras de polvo que pueden escribirse en términos de los armónicos esféricos como:

$$\rho = \rho_{0,0}(r,t)Y_0^{0,0} + \rho_{l,m}(r,t)Y_l^{l,m} , \quad l \geq 2 . \quad (4.37)$$

La forma específica del modo $\rho_{0,0}$ no importa para la respuesta gravitacional, pues contribuye como un modo monopolar.

Como primer modelo, se considera que la densidad de materia es un pulso gaussiano, cayendo hacia el agujero negro. Posteriormente se varía el ancho del pulso para estudiar los efectos que tiene sobre la respuesta gravitacional, en particular estamos interesados en la forma en que la compacidad de la cáscara despierta los modos cuasinormales del agujero negro.

4.1.1 Algunos ejemplos de acreción

Distribución tipo gaussiana

En la figura 4.2 se muestra la función de radiación Φ producida por la cáscara de fluido, medida por tres diferentes observadores, localizados en $r = 100, 150$ y $200M$. La señales se han super-

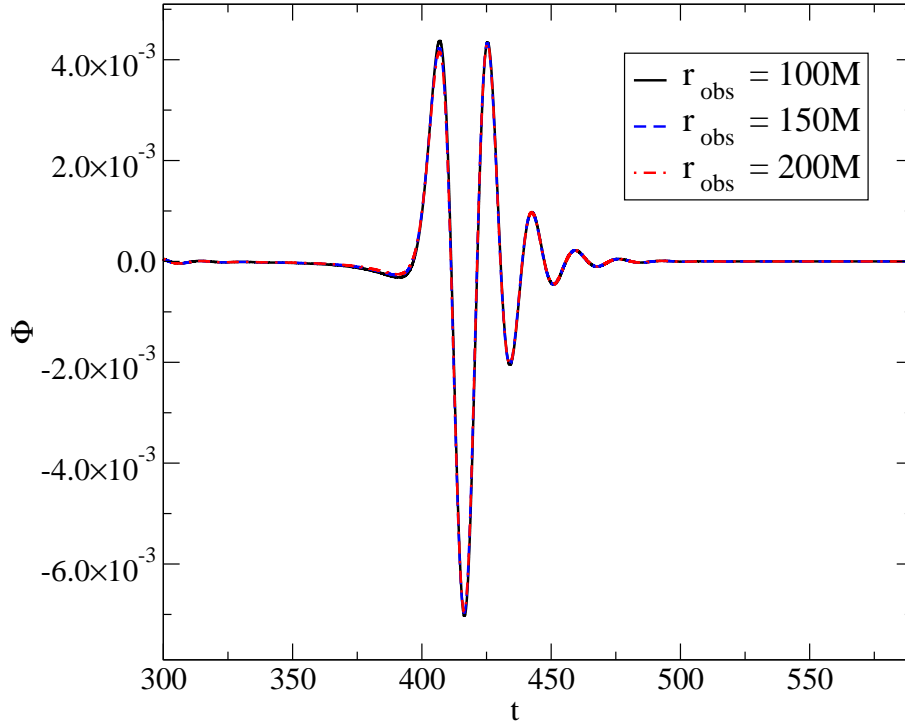


Figura 4.2: Señal gravitacional producida por el pulso de la figura 4.1, medido por tres diferentes observadores situados en $r = 100 M$, $150 M$ y $200 M$. Se han trasladado las señales en el tiempo para superponerlas y mostrar que el comportamiento de Φ es constante en r , lo que demuestra un decaimiento en Ψ_4 como $1/r$. Las diferencias observadas se deben a que el comportamiento de Ψ_4 como inverso de r es en la región asintótica

puesto para mostrar el comportamiento constante de Φ que viene a confirmar el decaimiento $1/r$ para el escalar Ψ_4 .

Se hace el ajuste para Φ con una función de la forma $e^{-\omega_i t} \sin(\omega_r t + \varphi)$. Para obtener las frecuencias cuasinormales $\omega = \omega_r, \omega_i$. Aquí es importante hacer un paréntesis sobre la forma en la que se hace el ajuste, y sobre la importancia de los modos cuasinormales obtenidos de esta manera. Primero el problema principal que queremos resolver es obtener la señal gravitacional producida por la caída de cáscaras de polvo hacia el agujero negro, el obtener los modos cuasinormales se hace simplemente para confirmar que el régimen en el que se está trabajando efectivamente se reproducen los resultados conocidos, se ha mostrado que hay métodos mucho mas poderosos para obtener las frecuencias cuasinormales con un alto grado de precisión, por ejemplo los mostrados en las referencias [50, 51, 52, 11], de estos métodos se hablará mas adelante. Segundo, al hacer un ajuste, es bien conocido que una regresión lineal o mínimos cuadrados, depende fuertemente de que tan buena haya sido la aproximación del valor inicial a partir del cual se hace el ajuste, si este valor esta muy alejado de *la solución* entonces la bondad del ajuste se reduce. Por lo tanto, para encontrar los modos cuasinormales utilizamos el

programa R, que es un lenguaje y entorno de programación para análisis estadístico y gráfico, de distribución libre [53]. Con esta aplicación hacemos una regresión no lineal para obtener los valores de los modos cuasinormales, la idea de la regresión es muy sencilla, se propone una función mediante la cual se quieren ajustar nuestros datos por medio de algunos parámetros y se dan valores iniciales para estos parámetros, la regresión consiste en minimizar la diferencia entre nuestros datos y la función, barriendo todos los parámetros, es una generalización del método de mínimos cuadrados para ajustes lineales. Aquí presento una típica corrida para encontrar las frecuencias, los datos obtenidos con el código de perturbación están en el archivo "R.dat" y las constantes a, b, c, d son los parámetros con los cuales se hace el ajuste.

```
datos=read.table("R.dat")
attach(datos)
x<-V1
y<-V2
nls(y ~ a*exp(b*x)*sin(c*x+d), start = list(a=50000, b=-0.08, c=0.373,
d=5000), trace =
TRUE)
a<- 1.5e+04
b<- 7.5e-02
c<- 4.0e-01
d<- 5.0e+03
```

y produce:

```
Nonlinear regression model
model: y ~ a * exp(b * x) * sin(c * x + d)
data: parent.frame()
      a          b          c          d
1.592e+04 -7.794e-02  4.107e-01  4.993e+03
residual sum-of-squares: 2.210e-07
```

```
Number of iterations to convergence: 10
Achieved convergence tolerance: 6.193e-08
```

La función clave de R es `nls`, que significa non-linear-regresion y se encarga de ajustar los parámetros a, b, c y d de la función propuesta $a \exp(bx) \sin(cx + d)$. En este ejemplo la tolerancia es del orden $\sim \times 10^{-08}$ y en los demás ejemplos se fija una tolerancia del mismo orden para encontrar las constantes, b que representa el tiempo característico de decaimiento y c que es la frecuencia de oscilación.

En la figura 4.4 se muestra la radiación producida por el perfil $\rho_{l,m}$ para $l = 2, 3, 4, 5$ utilizando los mismos parámetros. Las frecuencias cuasinormales correspondientes se escriben en la tabla 4.1.1, se hace una comparación con las obtenidas por Leaver en la referencia [50].

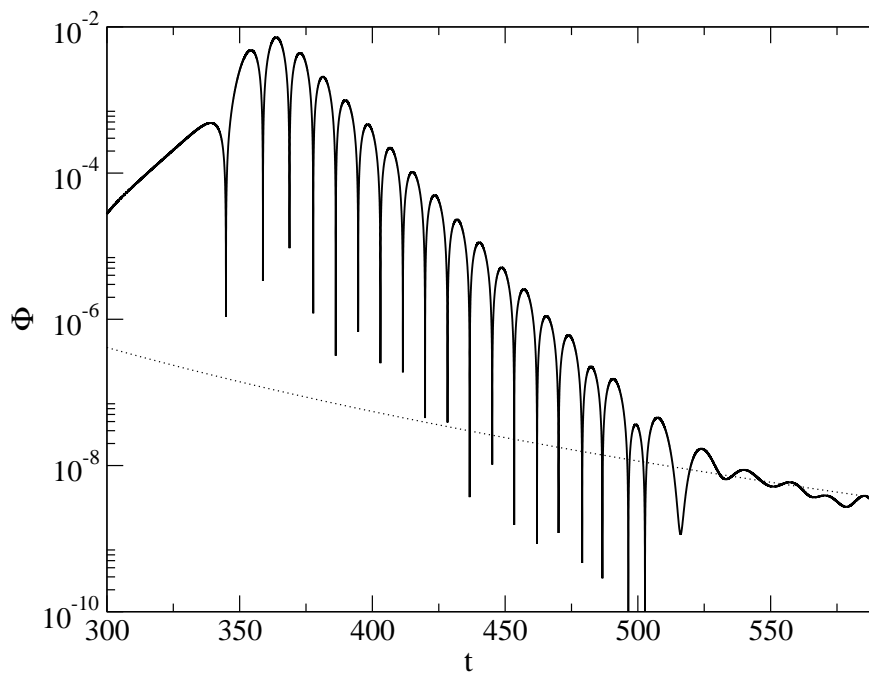


Figura 4.3: La función Φ de la fig. 4.2 en escala logarítmica. Los tiempos tempranos $t < 100$, se ha omitido por claridad. Las frecuencias de oscilación fueron extraídas en un intervalo entre $t \sim 370$ a $t \sim 470$.

Tabla 4.1: Frecuencias cuasinormales. En el caso de Schwarzschild los valores son independientes de m , por tener simetría esférica.

l	Calculadas $M\omega$	Leaver $M\omega$
2	$0.3734 - 0.0891 i$	$0.37367 - 0.08896 i$
3	$0.5990 - 0.0932 i$	$0.59944 - 0.09270 i$
4	$0.8055 - 0.0957 i$	$0.80918 - 0.09416 i$

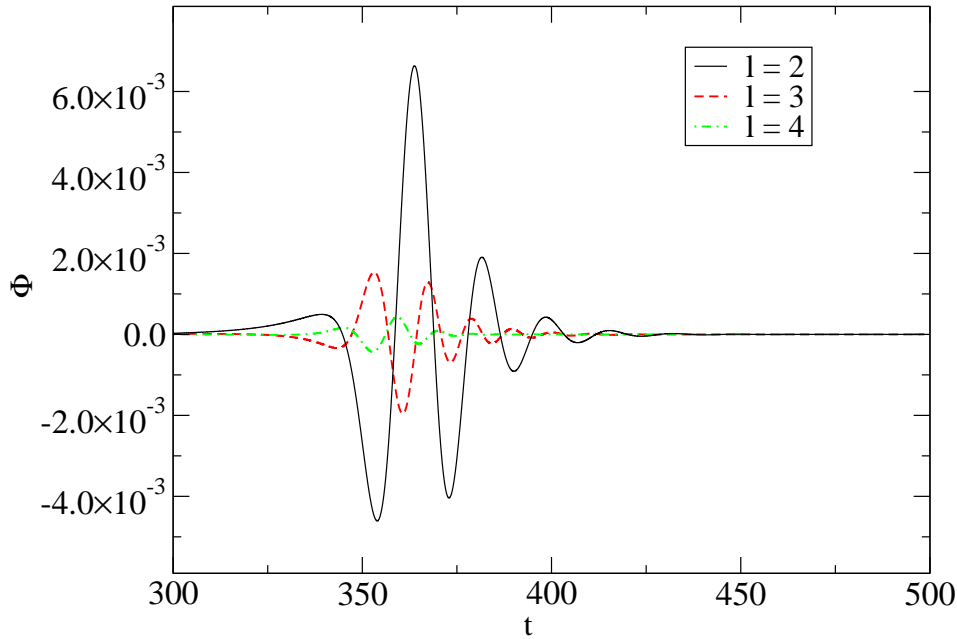


Figura 4.4: Señal gravitacional producida por los modos $l = 2, 3, 4$. Todos tienen la misma amplitud inicial, $A_0 = 10^5$, el mismo ancho, $\sigma = 0.5$, y están centrados en la misma posición, $r_0 = 70 M$.

Un pulso con diferente ancho

Como siguiente ejemplo se estudia la respuesta gravitacional para diferentes anchos del pulso acretante. Nos concentramos en los casos para $\sigma = 0.5 M, 1M, 1.5 M, 2 M$, y $2.5 M$. La gráfica correspondiente se muestra en la figura 4.5. El flujo de energía por unidad de tiempo esta dada por:

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16 \pi} \oint \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16 \pi} \sum_{l,m} \left| \int_{-\infty}^t R_{l,m} dt' \right|^2, \quad (4.38)$$

en donde se ha utilizado la expansión multipolar (4.30) para Φ y la ortonormalidad de los armónicos esféricos con peso de espín. La energía total emitida puede calcularse integrando en el tiempo el flujo saliente (4.38), y los resultados para diferentes anchos del pulso se muestran en la figura 4.6 .

Las simulaciones muestran que la respuesta del agujero negro son los modos cuasinormales de oscilación solo cuando la fuente de la perturbación actúa durante un periodo breve de tiempo, si la perturbación ocurre durante un periodo mayor, las señales dejan de ser los modos cuasinormales característicos. Estos resultados están de acuerdo con los obtenidos previamente, por Nagar [12, 13], y en el caso de vacío por [44, 54, 55, 56]. En donde se menciona que la excitación de los modos cuasinormales, se induce por perfiles de curvatura cuando el tamaño de la perturbación es comparable con el tamaño del agujero negro.

En general, la señal gravitacional tiene un estallido inicial, seguido por la fase de oscilaciones

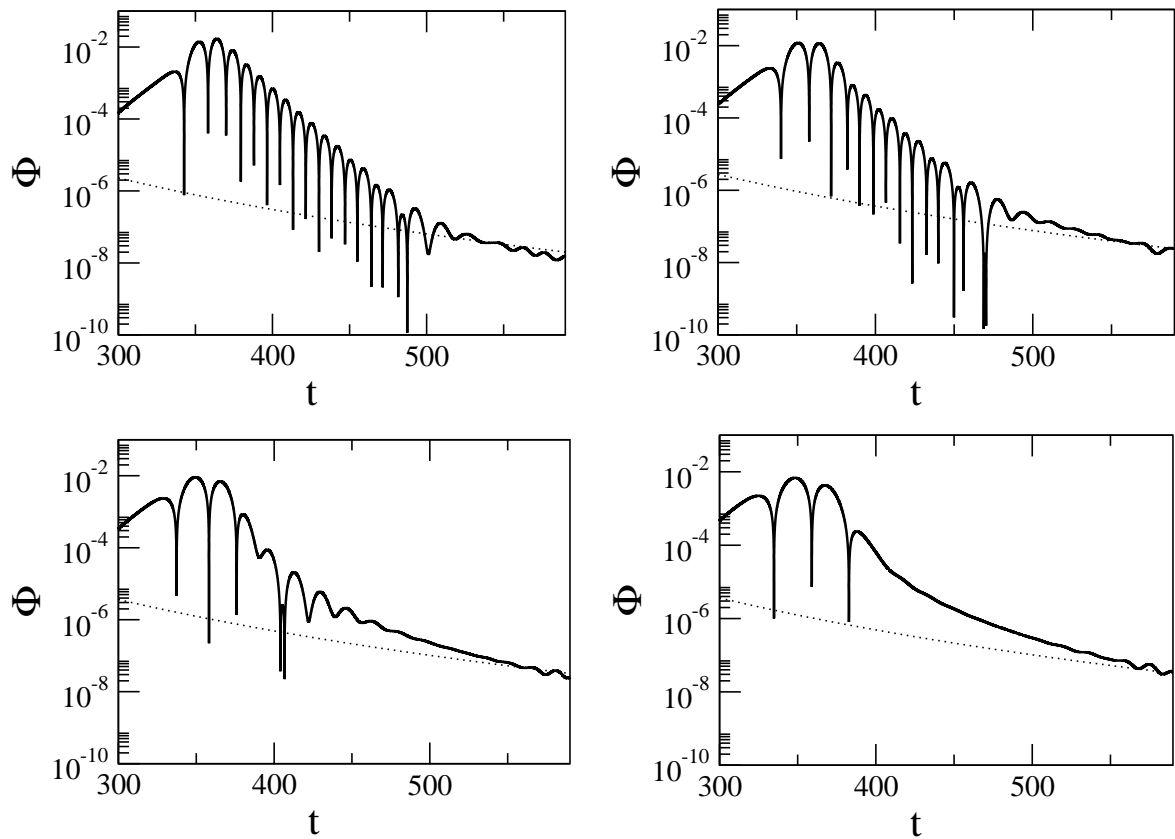


Figura 4.5: Señal gravitacional en escala logarítmica para diferentes valores de σ . Se muestra de izquierda a derecha $\sigma = 1M, 1.5M, 2M, 2.5M$. Hay que resaltar que los modos se despiertan conforme la cáscara se hace más compacta.

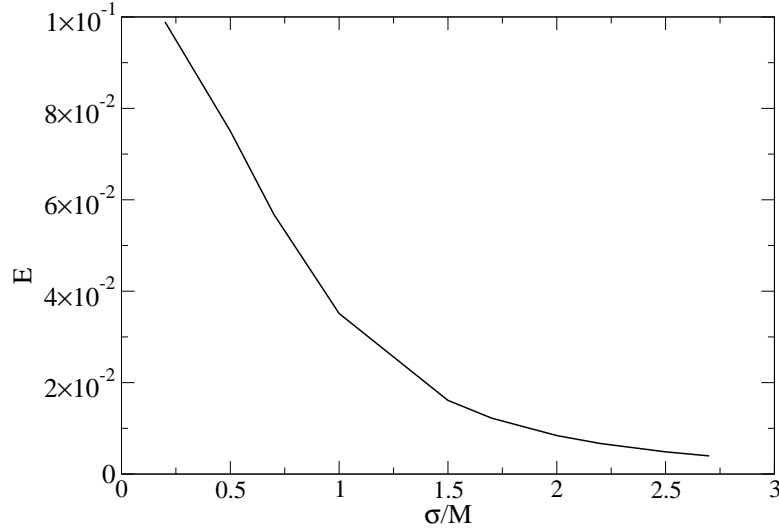


Figura 4.6: Energía total definida como la integral (4.38) como función del ancho de la cáscara. La integral esta evaluada sobre una esfera de radio $r = 70M$.

cuasinormales y termina con la caída característica conocida como *tail* que para el agujero negro de Schwarzschild es de la forma t^{2l+3} [56].

4.2 Detección de modos cuasinormales

Los modos cuasinormales, son modos propios a los cuales un agujero negro o una estrella oscilan cuando son excitados por perturbaciones no radiales. Se dice que los modos son cuasinormales porque están amortiguados por la emisión de ondas gravitacionales y como consecuencia, las frecuencias propias correspondientes son complejas. El hecho de que una estrella oscile nos es común a todos, pues esta compuesta de materia y puede considerarse como una pelota de fluido, sin embargo, que un agujero negro lo haga tiene algunos problemas conceptuales, después de todo un agujero negro no es un objeto material sino una región en el espacio tiempo. Surge naturalmente una pregunta, como es posible que oscile?. La respuesta esta al considerar las soluciones a las ecuaciones de perturbación.

Consideremos que el agujero negro tiene una masa de $M = nM_{\odot}$, $M_{\odot} = 1.48 \times 10^5 cm$ para convertir las frecuencias a unidades físicas tomamos

$$\nu = (M\omega_r) \frac{c}{2\pi nM_{\odot}} = \frac{32.26}{n} (M\omega_r) \text{kHz}, \quad (4.39)$$

y el tiempo característico de amortiguamiento es:

$$\tau = \frac{nM_{\odot}}{M\omega_i c} = \frac{n 0.4937 \times 10^{-5}}{M\omega_i} \text{s}. \quad (4.40)$$

Con estas expresiones es posible darnos una idea si la señal gravitacional emitida por un agujero negro esta dentro del ancho de banda de los interferómetros en tierra VIRGO, LIGO, TAMA [9, 10, 57] o dentro de los espaciales como LISA [7, 8]. El ancho de banda de LIGO/VIRGO se extiende sobre un rango de frecuencias entre 10-40 Hz hasta algunos kHz, esto es, serán capaces de detectar la señal emitida por agujeros negros si su masa oscila entre

$$10 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10^3 M_{\odot}, \quad (4.41)$$

Correspondiente a frecuencias del orden de 12Hz \sim 1.2kHz, para los modos mas altos, por otro lado, el rango de frecuencias al cual LISA será sensible es de $10^{-4} \sim 10^{-1}$ Hz que corresponde a agujeros negros de de masa

$$1.2 \times 10^5 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 1.2 \times 10^8 M_{\odot}, \quad (4.42)$$

Por ejemplo, LISA será capaz de detectar las señales emitidas por las oscilaciones producidas por el agujero supermasivo en el centro de nuestra galaxia SGR A* cuya masa es de $M = (3.7 \pm 0.2)10^6 M_{\odot}$ [58].

Los modos cuasinormales son claramente sucesos que ocurren rápidamente, de hecho podemos comparar un agujero negro con otros sistemas resonantes definiendo el factor de calidad

$$Q \approx \frac{1}{2} \left\| \frac{\omega_r}{\omega_i} \right\|, \quad (4.43)$$

para un agujero negro de Schwarzschild, esta aproximación es del orden de l , para otro sistema, como un estrella de neutrones $Q \approx 1,000$ [6] y el valor típico de un átomo es $Q \sim 10^6$, un agujero negro es un oscilador muy pequeño en comparación.

Esto nos da una idea sobre el modo fundamental al cual oscila un agujero negro, sin embargo hay una infinidad de modos para cada valor de l , estos sobre-tonos (over-tones) como se les llama, tienen partes imaginarias crecientes y por lo tanto tienen una vida (tiempo de amortiguamiento) mucho menor [59].

Capítulo 5

Perturbaciones al agujero negro de Kerr

Uno de los eventos astrofísicos mas espectaculares es el colapso de un núcleo de una estrella muy masiva, lo que lleva a la formación de una estrella de neutrones o un agujero negro. El resultado del colapso depende de varios factores de la estrella progenitora como su masa, su momento angular, su metalicidad, de su ecuación de estado, de la emisión de neutrinos o si existe una estrella compañera.

Después de un rebote del núcleo, parte del material es expulsado y si la estrella progenitora tiene una masa menor que 20 masas solares, el remanente es una estrella de neutrones [6], por otro lado si la masa es mayor, la acreción remanente incrementa la masa de la estrella de neutrones-protones llevándola por arriba de su límite superior, esto tiene como resultado la formación de un agujero negro. Si la masa de la estrella tiene una masa mayor que 45 masas solares, no hay una explosión supernova y la estrella colapsa directamente hacia un agujero negro.

El modelo anterior esta por supuesto sobresimplificado pues la metalicidad, el momento angular del núcleo precolapsado y la presencia de una compañera, influyen notoriamente en el resultado de colapso del núcleo.

La emisión gravitacional de la formación de un agujero negro de Kerr es la suma de dos señales, la generada por el colapso y las oscilaciones provenientes del estadio final. La señal del colapso se produce debido al cambio de los momentos multipolares del espacio tiempo durante la transición de un núcleo de acero o una estrella de neutrones-protones hacia el agujero negro de Kerr. Una estrella de neutrones con rotación uniforme, tiene un momento cuadrupolar axisimétrico dado por $Q = -a_k \frac{J^2}{M}$ donde a_k depende de la ecuación de estado y esta en el rango 2-8 para los modelos de 1.4 masas solares [19]. Esto es varias veces mas grande que el momento cuadrupolar del agujero negro de Kerr, (que tiene $a_k = 1$), por lo tanto la reducción del momento cuadrupolar es la principal fuente de la señal en el colapso. Una vez que se ha formado el agujero negro, continúa oscilando hasta que la energía de oscilación se radia y se alcanza el límite del agujero de Kerr estacionario.

El problema general de los modos cuasinormales del agujero negro de Kerr se complica por el hecho de que el potencial efectivo depende de una manera complicada de la frecuencia de radiación ω y el momento angular del agujero negro a . En este capítulo mostraremos un método para encontrar la señal gravitacional mediante una generalización directa del caso de Schwarzschild mostrada en el capítulo 4 basado en la descomposición en armónicos esféricos de la función de perturbación, esto es posible por la elección de la tétrada que permite escribir la parte angular justo como el operador cuyas funciones propias son los armónicos esféricos.

El elemento de línea para el espacio tiempo de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild es:

$$ds^2 = - \left(1 - 2 \frac{M r}{\Sigma}\right) dt^2 + 4 \frac{M r}{\Sigma} dt dr - 4 \frac{M r}{\Sigma} a \sin^2 \theta dt d\varphi + \left(1 + 2 \frac{M r}{\Sigma}\right) dr^2 \quad (5.1)$$

$$- 2 \left(1 + 2 \frac{M r}{\Sigma}\right) a \sin^2 \theta dr d\varphi + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + 2 \frac{M r}{\Sigma} a^2 \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

en donde M y a son la masa y el momento angular por unidad de masa del agujero negro, se ha definido $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. La tétrada nula se escoge de la forma siguiente:

$$l^\mu = \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2 + 2 M r, \Delta, 0, 2 a); k^\mu = (1, -1, 0, 0); \quad (5.2)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2} (r - i a \cos \theta)} (i a \sin \theta, 0, 1, i \csc \theta),$$

con la definición de $\Delta = r^2 + a^2 - 2 M r$. En la región asintótica, $r \rightarrow \infty$, la tétrada (5.2) tiene la forma $l^\mu = \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0)$, $k^\mu = (1, -1, 0, 0)$, que es la correspondiente al espacio tiempo plano

La elección de esta tétrada tiene importantes consecuencias en la forma de la ecuación de perturbación final como veremos más adelante, por ahora es suficiente decir que la diferencia esta en escoger en el denominador el complejo conjugado de la utilizada por Teukolsky en [45, 31]

De la definición de los coeficientes espinores, se obtiene que $\kappa = \nu = \sigma = \lambda = \gamma = 0$, y l y k son direcciones principales, de modo

que $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ y:

$$\mu = \frac{1}{r - i a \cos \theta}; \quad \rho = \frac{\Delta}{2\Sigma} \mu; \quad \epsilon = \rho - \frac{r - M}{2\Sigma};$$

$$\pi = -i \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma}; \quad \tau = i \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}} \mu^2; \quad \alpha = \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}} \mu^*; \quad \beta = -\alpha^* + \tau; \quad \Psi_2 = M \mu^3, \quad (5.3)$$

Después de sustituir estos valores directamente en la ecuación de perturbación se obtiene la ecuación para $\Psi_4^{(1)}$:

$$-\frac{1}{2\Sigma} [\square + \square_{\theta\phi}] \Psi_4^{(1)} = -4\pi T_4. \quad (5.4)$$

en donde

$$\square = - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 a \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} +$$

$$2 (2 r + 3 M + 2 i a \cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} + 6 (r - M) \frac{\partial}{\partial r} + 4 \quad (5.5)$$

$$\square_{\theta\phi} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 4 i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - 2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (5.6)$$

Hay que resaltar la forma simple en que el operador que actúa sobre $\Psi_4^{(1)}$. El operador $\square_{\theta\phi}$, dado por la ecuación (5.6), es exactamente el mismo que para el caso de Schwarzschild (4.6). En lo subsecuente, consideraremos únicamente vacío $T_4 = 0$.

Como en el caso de Schwarzschild, utilizamos la función: $\Phi_1 = r \Psi_4^{(1)}$, pues tiene un comportamiento constante en las regiones lejanas del agujero negro. La ecuación final de perturbación es:

$$-\frac{1}{2r\Sigma} [\square_1 + \square_{\theta\phi}] \Phi_1 = 0. \quad (5.7)$$

En donde únicamente se ha transformado el operador radial:

$$\begin{aligned} \square_1 = & - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2a \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} + \\ & 2(2r + M + 2ia \cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(2r - M - \frac{a^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + 2 \frac{Mr + a^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Esta ecuación (5.7), describe la evolución de una perturbación inicial, su acreción y dispersión como onda gravitacional. Hay que resaltar que al ser el operador angular, el mismo que en el caso de Schwarzschild podemos descomponerlo como lo hicimos en el capítulo 4, en términos de los operadores $\bar{\delta}$ y $\bar{\delta}^\dagger$

$$\square_{\theta\phi} = \bar{\delta}_{-1} \bar{\delta}_{-2}, \quad (5.9)$$

lo que nos permite utilizar como base los armónicos esféricos con peso de espín para representar la función Φ_1 . Este es un enfoque diferente al utilizado comúnmente [60], pues en resultados previos, como en [50, 31] se utilizaba una ecuación cuya parte angular no era la adecuada para hacer esta descomposición, en vez de esto se hacen expansiones sobre los armónicos esferoidales, que involucran al parámetro de rotación a en su definición. El utilizar los armónicos esféricos nos permite escribir la constante de separación (entre la parte angular y radial-temporal) exactamente y no es un parámetro mas a determinar para encontrar los modos cuasinormales [50, 11, 59, 61]. Esta descomposición nos permite utilizar un enfoque nuevo para estudiar la ecuación de perturbación para el agujero negro de Kerr.

5.1 Descomposición en armónicos esféricos

La descomposición en armónicos esféricos para la función Φ_1 es:

$$\Phi_1 = \sum_{lm} R_{l,m}(t, r) Y_{-2}^{l,m}(\theta, \phi). \quad (5.10)$$

El momento más bajo de las ondas gravitacionales es el cuadrupolar, de modo que, $l \geq 2$. Los armónicos son funciones propias del operador angular (4.14) y son también funciones propias del operador derivada en la dirección azimutal:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} Y_{-2}^{l,m}(\theta, \phi) = i m Y_{-2}^{l,m}(\theta, \phi), \quad (5.11)$$

Al sustituir la expresión (5.10) en la ecuación (5.7) se obtiene:

$$\sum_{lm} Y_{-2}^{l,m} \left[- (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M + 2 i a \cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l - 1) (l + 2) \right] R_{l,m} = 0. \quad (5.12)$$

En donde aún hay dos términos angulares, $\cos^2 \theta$ y $\cos \theta$. Si proyectamos esta ecuación para obtener los coeficientes $R_{l,m}$, debemos multiplicar por $\bar{Y}_{-2}^{l',m'} = Y_2^{l',-m'}$, e integrar sobre el ángulo sólido:

$$\sum_{lm} \oint d\Omega Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} \left[- (r^2 + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l - 1) (l + 2) \right] R_{l,m} - a^2 \oint d\Omega Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l,m} + 4 i a \oint d\Omega Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} R_{l,m} = 0. \quad (5.13)$$

Al expandir la suma y despejar los coeficientes con funciones angulares, utilizando que los armónicos son ortonormales, se obtiene:

$$0 = \sum_{lm} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \left[- (r^2 + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2 a i m}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l - 1) (l + 2) \right] R_{l,m} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l,m} \oint d\Omega Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} \cos^2 \theta + 4 i a \frac{\partial}{\partial t} R_{l,m} \oint d\Omega Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} \cos \theta \quad (5.14)$$

y por lo tanto,

$$0 = \left[- (r^2 + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l - 1) (l + 2) \right] R_{l',m'} - \sum_{lm} a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l,m} \oint d\Omega Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_0^{2,0} + \frac{1}{3} \right) + 2 i a \frac{\partial}{\partial t} R_{l,m} \oint d\Omega Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} 4 \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_0^{1,0}, \quad (5.15)$$

En donde se han utilizado las definiciones:

$$\cos^2 \theta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_0^{2,0} + \frac{1}{3}; \quad \cos \theta = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_0^{1,0}. \quad (5.16)$$

La ecuación de perturbación toma la forma:

$$\begin{aligned}
& \left[- \left(r^2 + 2 M r + \frac{a^2}{3} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M) \frac{\partial}{\partial t} \right. \\
& \left. + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l - 1) (l + 2) \right] R_{l,m'} \\
& - \sum_{lm} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l,m} \oint Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} Y_0^{2,0} d\Omega \\
& + 8 i a \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\partial}{\partial t} R_{l,m} \oint Y_2^{l',-m'} Y_{-2}^{l,m} Y_0^{1,0} d\Omega = 0.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Las integrales angulares se resuelven utilizando los símbolos de Wigner $3 - lm$ descritos en [24, 62]:

$$\oint Y_2^{l,-m} Y_{-2}^{l',m'} Y_0^{1,0} d\Omega = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \delta_{m,m'} \left[B_{l,m} \delta_{l,l'-1} + \frac{2m}{l(l+1)} \delta_{l,l'} + B_{l+1,m} \delta_{l,l'+1} \right] \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
\oint Y_2^{l,-m} Y_{-2}^{l',m'} Y_0^{2,0} d\Omega &= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \delta_{m,m'} \left[A_{l+2,m} \delta_{l,l'-2} + 16 \frac{m}{(l+2)l} B_{l+1,m} \delta_{l,l'-1} \right. \\
& \left. + \frac{2(l+4)(l-3)(l(l+1) - 3m^2)}{3(2l+3)(l+1)(l)(2l-1)} \delta_{l,l'} + 16 \frac{m}{(l+1)(l-1)} B_{l,m} \delta_{l,l'+1} + A_{l,m} \delta_{l,l'-2} \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

De esta manera se obtiene una descripción para cada modo, en términos de la variables $r - t$ para las perturbaciones gravitacionales en el espacio tiempo de Kerr.

$$\begin{aligned}
& -a^2 A_{l+2,m} \partial_{tt} R_{l+2,m} - 4 a B_{l+1,m} \left(4 a \frac{m}{(l+2)l} \partial_{tt} - i \partial_t \right) R_{l+1,m} + \bar{\square}_{l,m} R_{l,m} - \\
& 4 a B_{l,m} \left(4 a \frac{m}{(l+1)(l-1)} \partial_{tt} - i \partial_t \right) R_{l-1,m} - a^2 A_{l,m} \partial_{tt} R_{l-2,m} = 0,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Utilizando las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
A_{l,m} &= \frac{1}{l(2l-1)(l-1)} \sqrt{\frac{(l-2)(l-3)(l+2)(l+1)(l+m)(l+m-1)(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-3)}}, \\
B_{l,m} &= \frac{1}{l} \sqrt{\frac{(l-2)(l+2)(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}, \\
\bar{\square}_{l,m} &= - \left(r^2 + 2 M r + \frac{a^2}{3} \left[1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1) - 3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right] \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
& + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 \left(2 r + M + 4 i a \frac{m}{l(l+1)} \right) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} \\
& - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l - 1) (l + 2).
\end{aligned}$$

Las constantes que se obtienen de los símbolos de Wigner tienden a un límite finito, $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{l,m} = \frac{1}{4}$, $\lim_{l \rightarrow \infty} B_{l,m} = \frac{1}{2}$.

Como el escalar de Weyl es complejo preferimos trabajar con dos funciones reales, definimos:

$$R_{l,m} = {}^+R_{l,m} + i^-R_{l,m} \quad (5.21)$$

y considerando que las partes real e imaginaria de los operadores de evolución, ec. (5.20), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de segundo orden para la parte real e imaginaria de $R_{l,m}$:

$$\begin{aligned} & -a^2 A_{l+2,m} \partial_{tt} {}^\pm R_{l+2,m} - 4a B_{l+1,m} \left(4a \frac{m}{(l+2)l} \partial_{tt} {}^\pm R_{l+1,m} \pm \partial_t {}^\mp R_{l+1,m} \right) \\ & \mp 2am \left(\frac{4}{(l+1)l} \partial_t + \partial_r - \frac{1}{r} \right) {}^\mp R_{l,m} - 4a B_{l,m} \left(4a \frac{m}{(l+1)(l-1)} \partial_{tt} {}^\pm R_{l-1,m} \pm \partial_t {}^\mp R_{l-1,m} \right) \\ & + {}_r\bar{\square}_{l,m} {}^\pm R_{l,m} - a^2 A_{l,m} \partial_{tt} {}^\pm R_{l-2,m} = 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

En donde el operador ${}_r\bar{\square}_{l,m}$ se define como:

$$\begin{aligned} {}_r\bar{\square}_{l,m} = & - \left(r^2 + 2Mr + \frac{a^2}{3} \left[1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1)-3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right] \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ & + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2(2r+M) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(2r - M - \frac{a^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{Mr+a^2}{r^2} - (l-1)(l+2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Utilizando los armónicos esféricos con peso de espín, se ha obtenido un sistema de ecuaciones que no tiene dependencia angular explícita, únicamente las partes radiales y temporales entran en juego, el precio que tenemos que pagar es que los modos no evolucionan de manera independiente, sino que están acoplados de manera no trivial.

Como las ondas gravitacionales comienzan con el modo cuadrupolar, el l más bajo es 2 y los modos $R_{1,m}, R_{0,m}$, son cero por construcción.

Los modos radiales, temporales en el sistema de ecuaciones (5.23), están acoplados con sus dos vecinos cercanos, tanto hacia arriba como hacia abajo en el valor de l pero únicamente por medio de los operadores temporales, mediante coeficientes que son independientes de las coordenadas, esto implica que el acople desaparece en regiones lejanas al agujero, el coeficiente de segundas derivadas temporales en ${}_r\bar{\square}_{l,m}$ tiene un término de r^2 , al dividir toda la ecuación por r^2 y se toma el límite, el acople desaparece, incluso el acople entre las partes real e imaginaria se anula para valores grandes de r . En esa región, la ecuación dominante para un modo $R_{l,m}$ es ${}_r\bar{\square}_{l,m} R_{l,m} = 0$, evaluada en ese límite, mas adelante mostraremos que en nuestras simulaciones este es precisamente el comportamiento de la función Φ_1 . Hay que notar que en el caso $a = 0$ los modos se desacoplan y únicamente tenemos, lo que llamamos la parte principal de la ecuación ${}_r\bar{\square}(l,m) R_{l,m} = 0$. que es consistente con los resultados obtenidos para el caso de Schwarzschild.

5.2 Formulación a primer orden

Siguiendo el procedimiento para resolver la ecuación de onda, que utilizamos en capítulos anteriores, definimos las funciones:

$${}^\pm \Psi_{l,m} = \partial_r {}^\pm R_{l,m}, \quad (5.24)$$

y

$$\pm\Pi_{l,m} = \partial_t \pm R_{l,m} + \beta \pm\Psi_{l,m}, \quad (5.25)$$

donde β es una función arbitraria de r , esta función, en el caso de Schwarzschild, esta relacionada directamente con el vector de corrimiento, en este caso, dejaremos a β como una función diferente para cada modo. Estas definiciones conducen a las siguientes expresiones para las derivadas temporales:

$$\partial_t \pm R_{l,m} = \pm\Pi_{l,m} - \beta \pm\Psi_{l,m}, \quad (5.26)$$

$$\partial_t \pm\Psi_{l,m} = \partial_r (\pm\Pi_{l,m} - \beta \pm\Psi_{l,m}), \quad (5.27)$$

$$\partial_{tt} \pm R_{l,m} = \partial_t \pm\Pi_{l,m} - \beta \partial_r (\pm\Pi_{l,m} - \beta \pm\Psi_{l,m}). \quad (5.28)$$

Al sustituir en la ecuación (5.23), se obtienen las siguientes ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} & [(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5)\partial_t + (c_1, c_3, c_5, c_7, c_9, c_9)\partial_r] \begin{pmatrix} \pm\Pi_{l+2,m} \\ \pm\Pi_{l+1,m} \\ \pm\Pi_{l,m} \\ \pm\Pi_{l-1,m} \\ \pm\Pi_{l-2,m} \end{pmatrix} \\ & + [(c_2, c_4, c_6, c_8, c_{10})\partial_r + (S_1, S_3, S_7, S_{12}, S_{14})] \begin{pmatrix} \pm\Psi_{l+2,m} \\ \pm\Psi_{l+1,m} \\ \pm\Psi_{l,m} \\ \pm\Psi_{l-1,m} \\ \pm\Psi_{l-2,m} \end{pmatrix} \\ & + (0, S_2, S_6, S_{11}, 0) \begin{pmatrix} \mp\Pi_{l+2,m} \\ \mp\Pi_{l+1,m} \\ \mp\Pi_{l,m} \\ \mp\Pi_{l-1,m} \\ \mp\Pi_{l-2,m} \end{pmatrix} + (0, S_4, S_8, S_{13}, 0) \begin{pmatrix} \mp\Psi_{l+2,m} \\ \mp\Psi_{l+1,m} \\ \mp\Psi_{l,m} \\ \mp\Psi_{l-1,m} \\ \mp\Psi_{l-2,m} \end{pmatrix} \\ & + S_5 \pm\Pi_{l,m} + S_9 \pm R_{l,m} + S_{10} \mp R_{l,m} = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

que es la ecuación final de primer orden, en donde hemos definido los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned} T_1 &= -a^2 A_{l+2,m}, \quad T_2 = -16 a^2 B_{l+1,m} \frac{m}{(l+2)l}, \\ T_3 &= -\left(r^2 + 2 M r + \frac{a^2}{3} \left[1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1)-3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)}\right]\right), \\ T_4 &= -16 a^2 B_{l,m} \frac{m}{(l+1)(l-1)}, \quad T_5 = -a^2 A_{l,m} \end{aligned}$$

con los siguientes grupos

$$\begin{aligned} c_1 &= -T_1 \beta, \quad c_2 = T_1 \beta^2, \quad c_3 = -T_2 \beta, \quad c_4 = T_2 \beta^2, \quad c_5 = T_3 (4 M r - \beta), \\ c_6 &= T_3 (\beta^2 - 4 M r \beta + \Delta) \quad c_7 = -T_4 \beta, \quad c_8 = T_4 \beta^2, \quad c_9 = -T_5 \beta, \quad c_{10} = T_5 \beta^2, \end{aligned} \quad (5.30)$$

y

$$\begin{aligned}
S_1 &= T_1 \beta \partial_r \beta, \quad S_2 = \mp 4 a B_{l+1,m}, \quad S_3 = T_2 \beta \partial_r \beta, \quad S_4 = \pm 4 a B_{l+1,m} \beta, \quad S_5 = 2 (2 r + M) T_3, \\
S_6 &= \mp 8 a \frac{m}{(l+1)l} T_3, \quad S_7 = \left[(\beta - 4 M r) \partial_r \beta - 2 (2 r + M) \beta + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} \right) \right] T_3, \\
S_8 &= \mp 2 a m \left(1 - \beta \frac{4}{(l+1)l} \right) T_3, \quad S_9 = \left(2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l-1)(l+2) \right) T_3, \quad S_{10} = \pm 2 m \frac{a}{r} T_3, \\
S_{11} &= \mp 4 a B_{l,m}, \quad S_{12} = T_4 \beta \partial_r \beta, \quad S_{13} = \pm 4 a B_{l,m} \beta, \quad S_{14} = T_5 \beta \partial_r \beta.
\end{aligned}$$

El perfil de las ondas gravitacionales en un espacio tiempo de Kerr, así como las frecuencias cuasinormales son bien conocidas, ver por ejemplo [56, 63, 64, 65, 66], así que tenemos muchos resultados con los cuales comparar los obtenidos con el enfoque propuesto, aunque se ha mostrado que una manera muy eficiente de calcular los modos cuasinormales es trasladarse al dominio de frecuencias, el mismo Teukolsky lo hizo de esta forma [31]. Para obtener el perfil de la onda gravitacional es mejor trabajar en el dominio del tiempo, y se han construido códigos bidimensionales para resolverla numéricamente [64, 65]. Tomaremos estos resultados como referencia para verificar el rango de validez de nuestro enfoque propuesto. Este procedimiento nos ayudará para entender el papel que juega cada modo como función de la perturbación inicial.

El sistema de ecuaciones es, en principio, un sistema infinito que involucra todos los valores posibles de $l \geq 2$, para resolverlo es necesario cortarlo en algún punto, proponemos hacerlo hasta que el operador ${}_r \bar{\square}_{l,m}$ actúa sobre el modo máximo que queremos resolver, de otro modo el procedimiento da un sistema sobre determinado, con mas ecuaciones que incógnitas, este efecto se debe únicamente a que estaríamos tratando correcciones de los demás modos como si fuera realmente la evolución de ese modo.

5.3 Evolución en 2 dimensiones

Como se mencionó anteriormente, para comparar los resultados obtenidos resolviendo el sistema de ecuaciones radiales-temporales entre modos, se adaptó un código como el de [63, 67, 68] para resolver la ecuación de perturbación en dos dimensiones, aunque en esa referencia se resuelve para la función $(r - ia \cos \theta)^4 \Psi_4^{(1)}$, mientras que nosotros lo hacemos para $\Phi_1 = r \Psi_4^{(1)}$ de modo que hay diferencias entre las ecuaciones utilizadas, por eso repasamos el enfoque y escribimos las ecuaciones nuevamente. Primero, se asume que la solución a la ecuación (4.17) puede expresarse en términos de los modos azimutales:

$$\Phi_1 = \sum_m e^{i m \phi} S_m(r, \theta, t). \quad (5.31)$$

Para cada modo m se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& \left[- (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right. \\
& + 2 (2 r + M + i a \cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\
& \left. + 2 \left(\frac{M r + a^2}{r^2} - i \frac{a m}{r} \right) - \frac{m^2 - 4 m \cos \theta + 2 (1 + \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta} \right] S_m = 0. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Como la función S_m es compleja, definimos sus partes real e imaginaria de la forma siguiente:

$$S_m = S_+ + iS_-, \quad (5.33)$$

y se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_+ S_+ - P_- S_- &= 0, \\ P_+ S_- + P_- S_+ &= 0. \end{aligned}$$

En donde P_+ y P_- se refieren a las partes real e imaginaria del operador en la ecuación (5.32). Para obtener un sistema de primer orden se definen las variables Π_{\pm} como:

$$\Pi_{\pm} = \partial_t S_{\pm} + b_{\pm} \partial_r S_{\pm}, \quad (5.34)$$

con

$$b = \frac{1}{\Sigma + 2Mr} \left(-2Mr + \sqrt{(2Mr)^2 + \Delta(\Sigma + 2Mr)} \right). \quad (5.35)$$

En términos de las nuevas variables, Π_+ , Π_- la ecuación de perturbación (5.32) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi_{\pm} &= c_1 \partial_r \Pi_{\pm} + c_2 \partial_r S_{\pm} \pm c_3 \partial_r S_{\mp} - c_4 \Pi_{\pm} \pm c_5 \Pi_{\mp} - c_6 S_{\pm} \pm c_7 S_{\mp} + \mathcal{O}_{\theta, \phi} S_{\pm}, \\ \partial_t S_{\pm} &= \Pi_{\pm} - b \partial_r S_{\pm}, \end{aligned}$$

Con las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{\Sigma} \left(2Mr + \sqrt{(2Mr)^2 + \Delta(\Sigma + 2Mr)} \right) \\ c_2 &= b_+ c_4 + \frac{2(2r^2 - Mr - a^2)}{(\Sigma + 2Mr)r} + c_1 b'_+ \\ c_3 &= -\frac{2am}{\Sigma + 2Mr} - c_5 b_+ \\ c_4 &= -\frac{2(2r + M)}{\Sigma + 2Mr} \\ c_5 &= -\frac{4a \cos \theta}{\Sigma + 2Mr} \\ c_6 &= \frac{r^2 m^2 \csc^2 \theta - 2(Mr - a^2)}{r^2(\Sigma + 2Mr)} + \frac{2(1 + \cos^2 \theta) - 4m \cos \theta}{\sin^2 \theta (\Sigma + 2Mr)} \\ \mathcal{O}_{\theta \phi} &= \frac{1}{\Sigma + 2Mr} \partial_{\theta\theta} + \frac{1}{\Sigma + 2Mr} \partial_{\theta} \end{aligned}$$

$b' = db/dr$. Es interesante mencionar que la ecuación (5.32) es muy similar a la ecuación que se obtiene en la ref. [64, 68]. Los perfiles de las ondas gravitacionales, obtenidas con este método son las que utilizan como referencia para comparar las que se obtienen con el enfoque unidimensional, que algunas veces llamaremos descomposición armónica.

5.4 Evolución para la componente radial

Para resolver la ecuación (5.30), es necesario resolver el sistema de ecuaciones para cada modo y esto implica resolver un sistema acoplado, cada miembro de la forma de la ecuación (5.30). Para resolver este sistema se extendió el código utilizado para resolver la ecuación de perturbación para el caso de Schwarzschild del capítulo anterior [69]. Hay que resaltar que al resolver para un coeficiente de la expansión (5.10) estamos resolviendo realmente para seis funciones, por ejemplo, para el caso más sencillo de ($l_{max} = 2$) el modo ${}^{\pm}R_{20}$, el sistema consta de la parte real e imaginaria del modo, además de las funciones auxiliares ${}^{\pm}\Pi_{20}$, ${}^{\pm}\Psi_{20}$, formadas por sus respectivas partes real e imaginaria, eso nos da las seis funciones. El siguiente paso es resolver para dos modos, por ejemplo R_{20} y R_{30} en cuyo caso se tendrán 12 funciones incógnitas, si se considerasen tres modos entonces se tendrían 18 variables acopladas. Hay una complicación adicional, en la ecuación (5.30) hay factores multiplicando las derivadas temporales de los coeficientes R_{lm} por lo que no es posible aislarlos en un simple despeje, para hacerlo, se escribe el sistema en forma matricial y luego se despeja el vector de incógnitas multiplicando por la matriz inversa, el procedimiento, aplicado a dos modos es como sigue:

Supongamos que queremos resolver para los modos $R_{2,m}$ y $R_{3,m}$, que llamaremos modelo 2 var, tendremos dos ecuaciones acopladas de la forma (5.30) con el vector $\vec{u} = ({}^{\pm}R_{2,m}, {}^{\pm}R_{3,m}, {}^{\pm}\Pi_{2,m}, {}^{\pm}\Pi_{3,m}, {}^{\pm}\Psi_{2,m}, {}^{\pm}\Psi_{3,m})$. Se construye una matriz cuadrada de 12×12 cuyas entradas son los coeficientes dados por (5.30), y se obtiene un sistema de ecuaciones de tipo:

$$M \partial_t \vec{u} + A \partial_r \vec{u} + B \vec{u} = 0, \quad (5.36)$$

Al multiplicar por la inversa de M es posible despejar el vector $\partial_t \vec{u}$ muy conveniente para resolverlo utilizando el método de líneas,

Al tomar en cuenta tres modos, $R_{2,m}$, $R_{3,m}$ y $R_{4,m}$, modelo 3 var, el vector de incógnitas aumenta en seis por lo que tendrá dimensión 18, en la siguiente sección mostraremos con algunos ejemplos que los resultados concuerdan bastante bien con los obtenidos con la solución en dos dimensiones.

5.5 Ejemplos

En esta sección se muestran los perfiles de las ondas gravitacionales, así como los modos cuasi-normales obtenidos mediante la descomposición armónica y se comparan con los resultados obtenidos con el código bidimensional.

5.5.1 Datos iniciales con $l=2$

El primer ejemplo que se propone para probar la aproximación armónica, consiste en tomar inicialmente un modo $l = 2$, y resolver la ecuación (5.30), con la parte radial descrita por una función gaussiana de la forma $g(r) = A \exp(-(r - r_0)/\sigma^2)$, la parte angular corresponde

a un armónico esférico con peso de espín $Y_{-2}^{2,0}$ con derivada temporal cero. Los valores de las constantes son: $A = 5 \times 10^{-3}$, $r_0 = 20M$, $\sigma = 0.5$.

Para el caso en dos dimensiones, se toma el mismo tipo de perturbación radial, el dato inicial es:

$$S_+(r, \theta, t = 0) = g(r) Y_{-2}^{20}(\theta), \quad (5.37)$$

con

$$Y_{-2}^{20}(\theta) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{30}{\pi}} \sin^2(\theta), \quad (5.38)$$

Para tener el mismo perfil inicial, con derivada temporal cero para el modo R_{20} , Π_+ debe satisfacer:

$$\Pi_+ = b_+ \partial_r S_+, \quad (5.39)$$

De esta forma aseguramos que el dato inicial es el mismo en ambos casos.

La masa del agujero negro es $M = 1$ y consideramos dos casos genéricos del parámetro de rotación del agujero negro, $a = 0.2$ y 0.9 . Para hacer una comparación directa entre ambos enfoques, es necesario proyectar la señal S_+ con el armónico ${}_2Y^{20}(\theta)$, para obtener el correspondiente ${}^{2d}R_{20}$:

$${}^{2d}R_{20} = \oint S_+(r, \theta) Y_{-2}^{*20}(\theta) d\Omega, \quad (5.40)$$

En la figura 5.1 se grafica la señal medida por un observador localizado en $r = 70M$ obtenida con la descomposición armónica y se grafica la proyección (5.40).

Como puede verse, la señal obtenida con la descomposición armónica difiere muy poco de la obtenida con el procedimiento en dos dimensiones, de hecho, al mirar la diferencia entre los máximos de ambas señales es menor al 3% [70].

Un ejemplo en el que se ve un acople mayor entre los modos es poniendo la misma perturbación radial y un armónico $l = 2$ y $m = 2$, los resultados están en la figura 5.2, en este caso la contribución de los modos mas altos, es evidente, conforme aumentamos el número de modos, se tiende a la señal obtenida con el enfoque bidimensional.

5.5.2 Datos iniciales con dos modos con diferente l

Como siguiente ejemplo, consideramos datos iniciales cuya dependencia angular esta descrita por una combinación de dos modos $l = 2$ and $l = 3$. El problema se hace más complicado incrementando el valor del parámetro de rotación del agujero a $a = 0.999$. Como cualquier perturbación puede describirse en términos de los armónicos esféricos, este ejemplo nos da cierta idea sobre el comportamiento general de la interacción de los modos que inicialmente se despertaron. Tomamos un caso sencillo en el que el dato inicial se descompone en dos modos de la forma $R_{20} = g_r(r) = R_{30}$, por simplicidad mantendremos que la derivada temporal es cero inicialmente. Para el caso bidimensional, el dato inicial es de la forma:

$$S_+(r, \theta, t = 0) = g(r) ({}_2Y^{*20}(\theta) + {}_2Y^{*30}(\theta)), \quad (5.41)$$

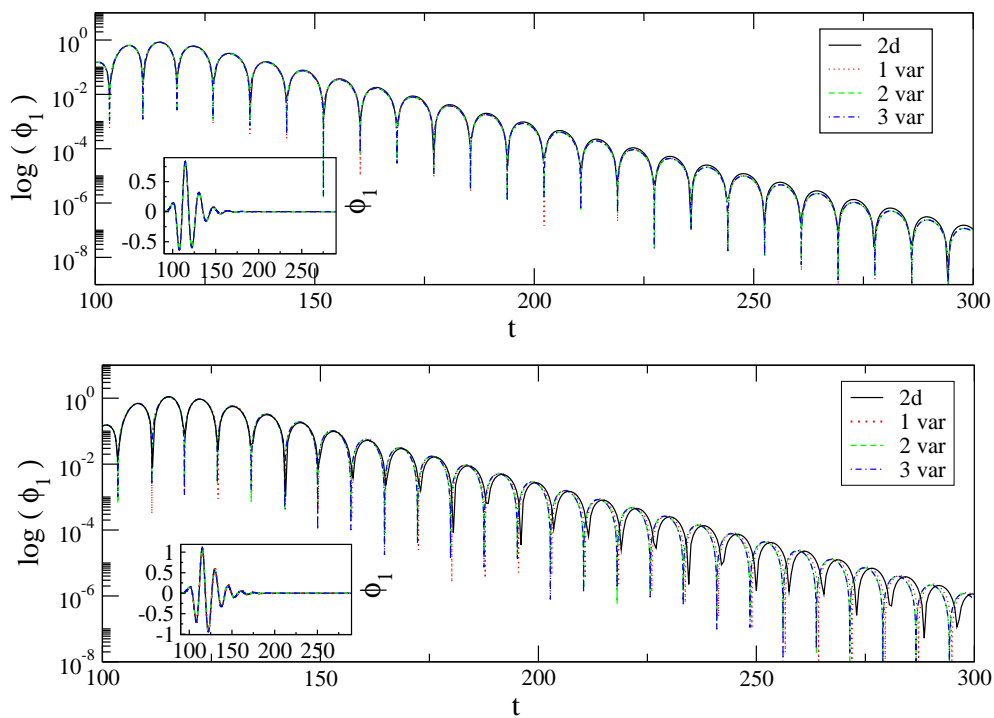


Figura 5.1: Se presenta la señal gravitacional para dos valores del parámetro de rotación del agujero negro $a = 0.2$ y $a = 0.9$. En el primer panel se muestra la onda medida por un observador en $r = 70M$, en escala logarítmica para $a = 0.2$, en el segundo panel se muestra el caso para $a = 0.9$

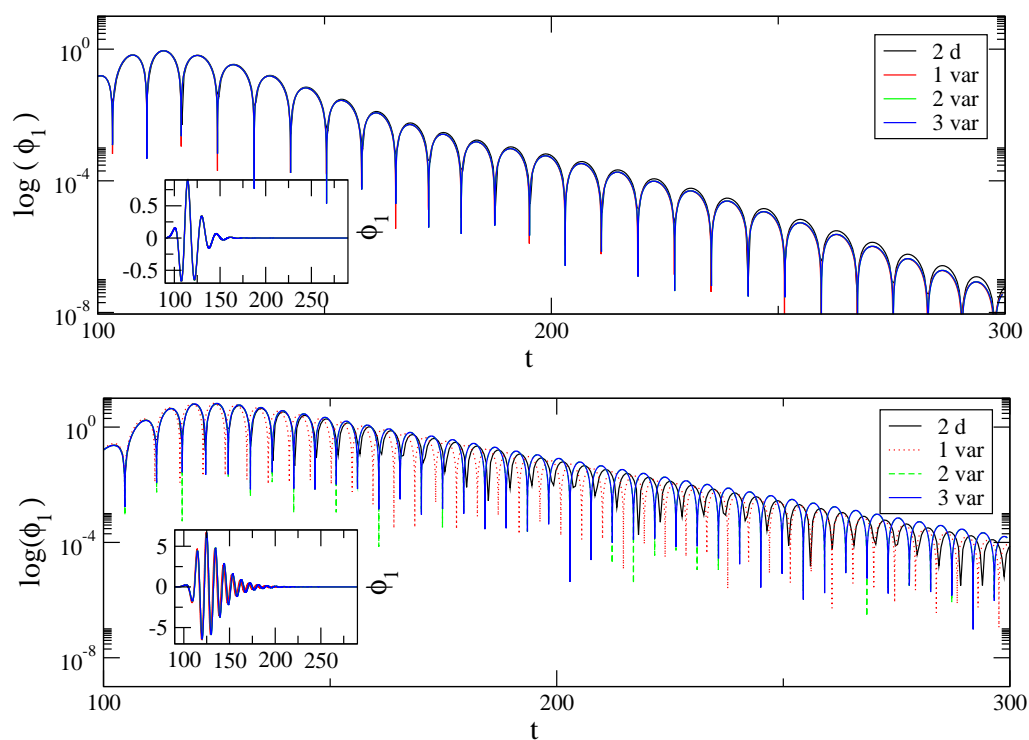


Figura 5.2: La señal presentada es equivalente a la figura 5.1, solo que aquí la perturbación inicial corresponde a un modo $l = 2$ y $m = 2$.

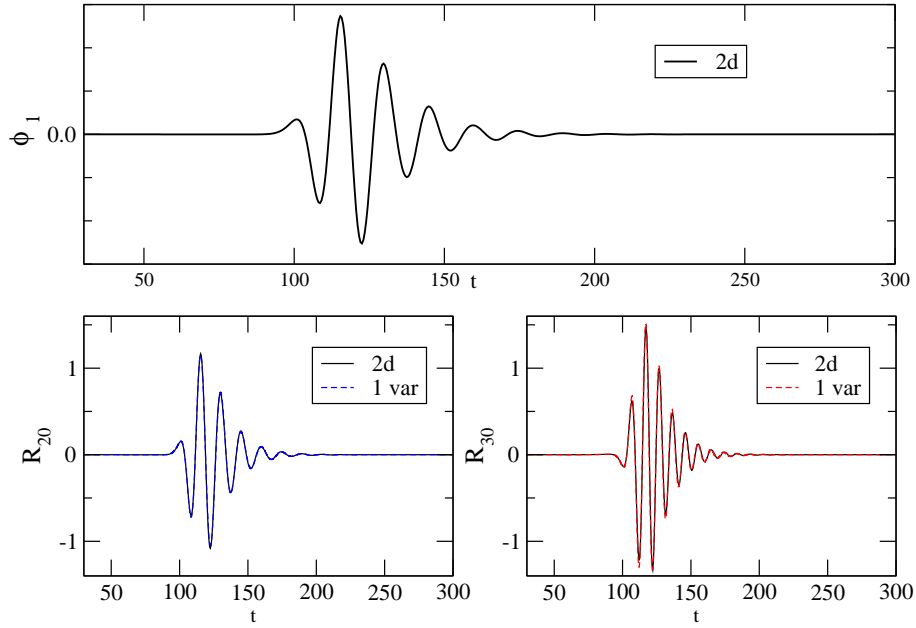


Figura 5.3: El primer cuadro muestra la señal producida por el código axial, el observador esta localizado en $r = 80M$, en el plano $\theta = \pi/2$ el momento angular por unidad de masa del agujero es $a = 0.999$. En los cuadros de abajo están las proyecciones de la misma señal en los armónicos Y_{20} y Y_{30} y los resultados obtenidos mediante la descomposición armónica en $1d$ (2 var).

con derivada temporal igual a la ecuación (5.39).

La proyección de la señal está graficada en la figura 5.3. Hay que resaltar que aún con el acople entre modos, somos capaces de describir correctamente la evolución de cada modo con la descomposición armónica en $1d$, lo que permite decir que este enfoque es un buen candidato para conocer la evolución de un modo sin necesidad de resolver la ecuación completa de perturbación para S_m .

Capítulo 6

Métodos numéricos en Hidrodinámica

Una de las metas más importantes en astrofísica es modelar diversos fenómenos para entenderlos y poder predecir diferentes eventos. Entre estos fenómenos está la acreción de materia hacia agujeros negros y la interacción entre dos agujeros negros. Aunque la métrica es dinámicamente importante en el problema de interacción de agujeros negros, puede considerarse como fija en el problema de acreción. Una pieza clave en el ejemplo de acreción es la evolución de las variables del fluido, que bajo ciertas simplificaciones, evolucionan de acuerdo a las ecuaciones de hidrodinámica relativista, que forman un sistema de leyes de balance hiperbólicas que son fuertemente no lineales y exhiben formación de choques. Para simular la evolución de estos fluidos, se han propuesto muchos métodos numéricos, incluyendo diferencias finitas [71], métodos pseudo espectrales [72], SPH (smooth particle hydrodynamics)[73, 74] y varios métodos de alta resolución para la captura de choques [75]. Aunque cada uno de estos métodos tiene sus propias ventajas, los que más atención han captado en años recientes son los métodos de alta resolución para la captura de choques, basados en el esquema de Godunov [76, 77], los métodos ENO (essentially non-oscillatory)[78], y esquemas centrales [79, 80].

La aplicación de los métodos de alta resolución para la captura de choques (HRSC, por sus siglas en inglés) causó un gran impacto en la hidrodinámica relativista, porque tienen un alto orden de exactitud, una descripción estable y precisa de las discontinuidades y convergen a la solución físicamente correcta, propiedades básicas que le son requeridas a un método numérico aceptable. En este capítulo se presenta una revisión de los métodos de alta resolución son conservativos y tiene la propiedad de describir correctamente soluciones discontinuas, que son tratadas consistentemente y automáticamente cuando aparecen en un flujo.

6.1 Leyes de Conservación

Consideremos las funciones vectoriales u_i , b_i y A_{ij} una matriz de $m \times m$, todas funciones de las variables (x, t) ¹. Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la forma:

$$\partial_t u_i + A_{ij} \partial_x u_j + b_i = 0, \quad (6.1)$$

se dice que fuertemente es hiperbólico en un punto (x, t) si A_{ij} tiene m valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ y un conjunto correspondiente de m vectores propios linealmente independientes $k_i^{(1)}, k_i^{(2)} \dots k_i^{(m)}$. Se dice que el sistema es estrictamente hiperbólico si sus valores propios son todos distintos.

Si las componentes de la matriz A_{ij} son todas constantes al igual que las componentes b_j , entonces el sistema es *lineal con coeficientes constantes*[81]. Si b_i depende linealmente de u_i el sistema es *lineal* y si los coeficientes de la matriz A_{ij} son funciones de u_i se dice que el sistema es *cuasilineal*. Finalmente, si $b_i = 0$ el sistema es *homogéneo*.

Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales constituye un sistema de leyes de conservación si puede escribirse de la forma:

$$\partial_t u_i + \partial_x f_i(u_j) = 0. \quad (6.2)$$

A u_i se le conoce como vector de las variables conservadas, y a $f_i(u_j)$ como el vector de flujos, Nótese que cada componente f_i depende de todos los vectores u_j .

Si denotamos como Q_{ij} al jacobiano del vector de flujos

$$Q_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, \quad (6.3)$$

podemos escribir la ley de conservación (6.2) como un sistema cuasilineal de la forma:

$$\partial_t u_i + Q_{ij} \partial_x u_j = 0, \quad (6.4)$$

6.1.1 Problema de Cauchy

Estudiar la evolución en el tiempo de las cantidades u_i consiste en resolver un problema de valores iniciales, es decir se debe encontrar una función u_i solución de (6.2) y que satisfaga:

$$u_i(x, 0) = u_{0i}(x). \quad (6.5)$$

donde $u_{0i}(x)$ es una función conocida a priori. Una característica fundamental de este problema es que en general no existen soluciones clásicas (de tipo C^1) a partir de un cierto tiempo finito aunque la condición inicial sea suave. Para permitir soluciones discontinuas se tiene que ampliar el espacio de soluciones para incluir aquellas funciones que satisfagan la ley de conservación en el sentido de distribuciones, es decir, aquellas que verifican:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u_i \frac{\partial \phi}{\partial t} + f_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_i(x, 0) \phi(x, 0) dx = 0. \quad (6.6)$$

¹Por simplicidad lo haremos para el caso de una dimensión temporal y una espacial, la generalización a más dimensiones espaciales es inmediata.

para cualquier función $\phi(x, t)$ de clase C^1 con soporte compacto en $(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$. Esta condición es equivalente a pedir que la solución satisfaga la versión integral de la ley de conservación. Con esta condición, se incluyen en el espacio de soluciones aquellas funciones u_i que son continuas por pedazos y son llamadas soluciones débiles de la ecuación diferencial.

6.1.2 El problema de Riemann

El problema de Riemann consiste en resolver una ecuación diferencial parcial con datos iniciales discontinuos. Para el caso de una dimensión, la ley de conservación tiene la forma:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad (6.7)$$

con datos iniciales discontinuos:

A continuación y a manera de ejemplo, resolveremos el problema de Riemann para las ecuaciones de advección y Burgers sin viscosidad, por el método de las características, esta técnica es muy útil porque constituye la base de los métodos de alta resolución y su generalización a mas dimensiones es inmediata.

Ecuación lineal de advección

La ecuación de advección es la forma mas simple de una ley de conservación. La solución es una función u_i que corresponde a los datos iniciales, propagándose con velocidad constante. El problema de Riemann para esta ecuación tiene la forma:

$$\partial_t u + \partial_x (au) = 0, \quad (6.8)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} u^L & \text{si } x < 0, \\ u^R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

En donde a una constante. Resolver este problema por el método de las características es encontrar aquellas curvas en el plano (x, t) sobre las cuales la función u es constante, por ejemplo, si consideramos una curva parametrizada por τ que satisface:

$$\frac{dx}{d\tau} = a, \quad y \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (6.10)$$

Al derivar u a lo largo de estas curvas, tendremos:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \partial_t u + \frac{dx}{d\tau} \partial_x u \quad (6.11)$$

$$= \partial_t u + a \partial_x u \quad (6.12)$$

$$= 0, \quad (6.13)$$

es decir, u es constante a lo largo de esta curva, de hecho, podemos escribir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = a, \quad (6.14)$$

que implica, después de integrar con respecto a t

$$x = at + x_0, \quad (6.15)$$

lo que corresponde a una familia de líneas rectas en el plano (x, t) con pendiente a y que pasan por x_0 .

Al sustituir x_0 de (6.15) en $u_0(x_0)$ tendremos que la solución $u(x, t)$ es:

$$u(x, t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u^L & \text{si } (x - at) < 0 \\ u^R & \text{si } (x - at) > 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

La solución al problema de Riemann para la ecuación de advección es el perfil inicial u_0 propagándose con velocidad a . La discontinuidad en $x = 0$ se mueve con esa misma velocidad. Es importante señalar que esta solución tiene las mismas propiedades sin importar el valor relativo entre u^L y u^R , algo que no ocurre en el caso que estudiaremos a continuación

Ecuación de Burgers

La ecuación de Burgers es otro ejemplo de ley de conservación. El problema de Riemann consiste en la siguiente ecuación:

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (6.17)$$

con las mismas condiciones iniciales que para la ecuación de advección 6.9.

La solución a la ecuación de Burgers se obtiene fácilmente por el método de las características, primero escribámosla de la forma equivalente:

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0, \quad (6.18)$$

que tiene una forma parecida a la ecuación de advección, solo que la velocidad de propagación es la propia función u . Las curvas características son:

$$\frac{dx}{d\tau} = u, \quad \text{y} \quad \frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (6.19)$$

Repetiendo el procedimiento utilizado para la ecuación de advección

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \partial_t u + \frac{dx}{d\tau} \partial_x u \quad (6.20)$$

$$= \partial_t u + u \partial_x u \quad (6.21)$$

$$= 0, \quad (6.22)$$

se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = u, \quad (6.23)$$

que implica, integrando con respecto a t , ya que u es constante,

$$x = ut + x_0, \quad (6.24)$$

una familia de rectas con pendiente u .

La recta que contiene el punto $(0, 0)$ sirve para separar las rectas que tienen diferente pendiente, esto es claro ya que la velocidad es u^L ó u^R si están a la izquierda o a la derecha. Se tendrá un comportamiento diferente que depende del valor relativo de los datos iniciales, consideremos como caso genérico que $u^L > u^R$. Las rectas que están a la izquierda de la que contiene al origen tienen velocidad $\lambda(u^L)$ y las que están a la derecha tienen una velocidad $\lambda(u^R)$.² Las características de la derecha intersectan a las características de la izquierda como se muestra en la figura 6.1. En la región de intersección la función u no será univaluada pues la información de distintos puntos de los datos iniciales se propagó para llegar a un mismo destino.

La solución se puede escribir como

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L & \text{si } x - st < 0, \\ u^R & \text{si } x - st > 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

en donde s es la velocidad de la recta que propaga la discontinuidad $x = 0$. Puede mostrarse que s para la ecuación de Burgers es

$$s = \frac{1}{2}(u^L + u^R). \quad (6.26)$$

Esta solución discontinua es una *onda de choque* y satisface la condición

$$\lambda_L > s > \lambda_R, \quad (6.27)$$

con λ_L y λ_R las velocidades características de la ecuación ($\lambda_L = u^L$ y $\lambda_R = u^R$ para la ecuación de Burgers) La expresión (6.27) se conoce como condición de entropía y sirve para decidir cuando una solución es físicamente aceptable, pues es equivalente a resolver una ecuación con soluciones continuas (ecuaciones con viscosidad y por lo tanto sin discontinuidades).

Las ondas de choque en el aire son pequeñas capas de transición que separan cambios en las variables físicas, como presión, densidad, y temperatura, estas capas son del mismo orden de magnitud que el camino libre medio de las moléculas ($\sim 10^{-7}$ m) y por lo tanto matemáticamente se pueden tratar como discontinuidades, es por esta razón que a las discontinuidades que aparecen en el flujo se llaman choques.

Consideremos ahora el caso en el que $u^L < u^R$. En contraposición al caso anterior, en donde las características se intersectan, existe una región en donde no hay características, existe una zona de vacío en donde la información de los datos iniciales no puede transmitirse, como consecuencia, la solución pierde unicidad. La solución es directamente:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L & \text{si } x - st < 0, \\ u^R & \text{si } x - st > 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

²Como estamos trabajando en el plano $x - t$ la velocidad es el inverso de la pendiente, velocidad = $\lambda(u^R) = u^R$ y $\lambda(u^L) = u^L$.

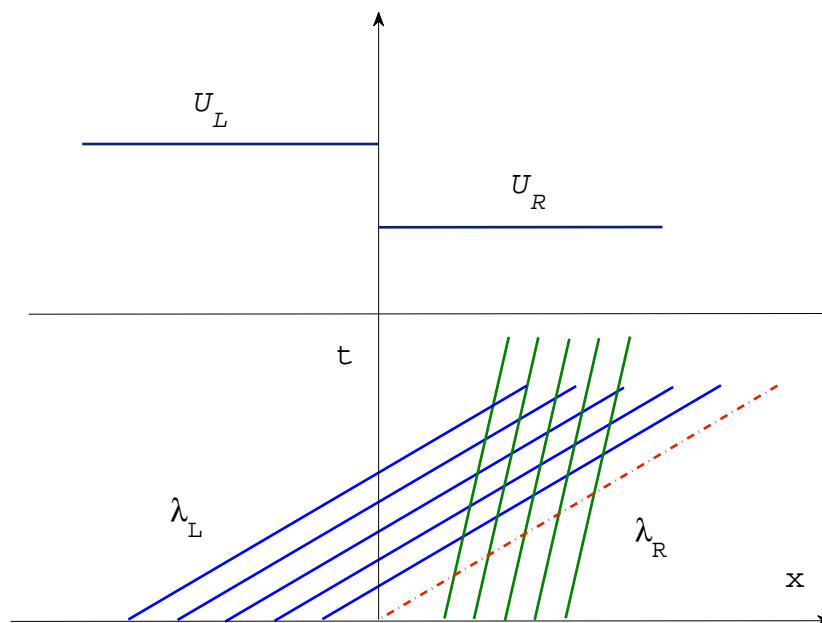


Figura 6.1: En el caso $u_L > u_R$, tenemos cruce de características en el plano (x, t) . La recta a líneas corresponde al choque. La solución deja de ser univaluada.

sin embargo, en este caso no se satisface la condición de entropía (6.27), y resulta ser inestable ante perturbaciones. La solución física se obtiene expresando la discontinuidad inicial como un límite de una función continua y resolviendo la ecuación resultante ref. [82], la solución es:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^L & \text{si } x - \lambda_L t < 0, \\ x/t & \text{si } \lambda_L < x/t < \lambda_R, \\ u^R & \text{si } x - \lambda_R t > 0. \end{cases} \quad (6.29)$$

Esta solución se conoce como onda de rarefacción y es una solución típica en los sistemas hiperbólicos no lineales.

La solución completa al problema de Riemann para la ecuación de Burgers consiste en una onda de choque si en los datos iniciales son $u_L > u_R$ ecuación (6.25) o una onda de rarefacción, expresión (6.29) si $u_L < u_R$. Mas adelante veremos que esta estructura servirá para evaluar el flujo en las interfaces al resolver numéricamente la ecuación de Burgers.

6.1.3 Sistema de ecuaciones con coeficientes constantes

Consideremos ahora el problema de Riemann para un sistema de leyes de conservación de la forma

$$\partial_t u_i + A_{ij} \partial_x u_j = 0 \quad (6.30)$$

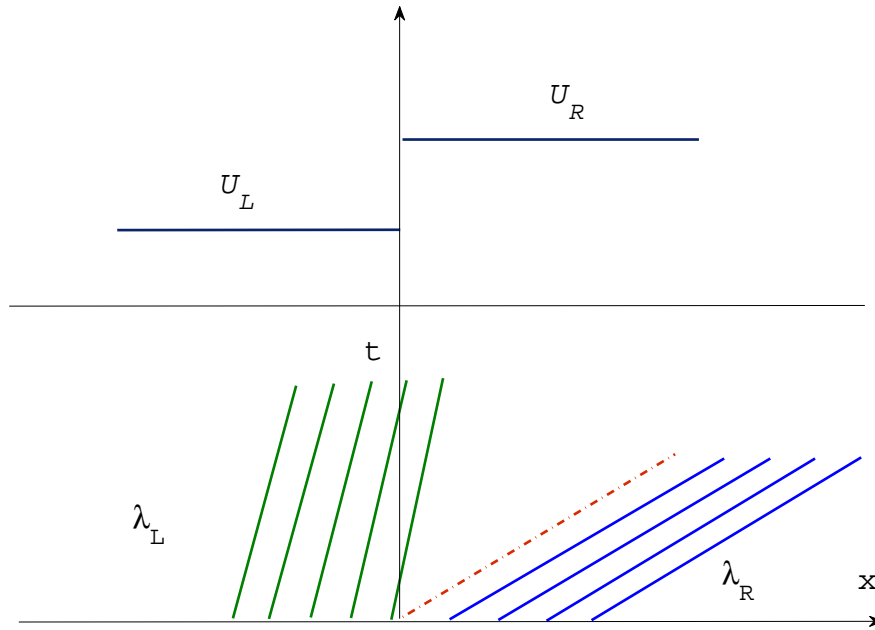


Figura 6.2: En el caso $u_L < u_R$, tenemos una zona de vacío donde la solución no está definida unívocamente.

en donde A_{ij} es una matriz con coeficientes constantes, con valores propios reales y un conjunto completo de vectores propios que satisfacen la condición inicial:

$$u_i = \begin{cases} u_i^L & \text{si } x < 0 \\ u_i^R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Queremos encontrar el valor de las funciones u_i por el método de las características tal como lo hicimos en los casos anteriores, para ello notamos que al poseer un conjunto completo de vectores propios, podemos escribir a la matriz A_{ij} como:

$$A_{ij} = K_{ik}(I_\lambda)_{kl}K_{lj}, \quad (6.32)$$

en donde K_{ik} es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A_{ij} e $(I_\lambda)_{kl}$ es la matriz diagonal que tiene por elementos los valores propios de A_{ij} . Si definimos las funciones $w_i = K_{ij}u_j$ (conocidas como *eigencampos*) y multiplicamos las ecuaciones (6.30) por K_{ij} tendremos:

$$0 = K_{ij}\partial_t u_j + K_{ij}A_{jk}\partial_x u_k \quad (6.33)$$

$$= K_{ij}\partial_t u_j + K_{ij}K_{jm}(I_k)_{ml}K_{lk}\partial_x u_k \quad (6.34)$$

$$= \partial_t K_{ij}u_j + (I_k)_{il}\partial_x K_{lk}u_k, \quad (6.35)$$

$$= \partial_t w_i + (I_k)_{il}\partial_x w_l, \quad (6.36)$$

ya que las matrices K_{ij} son constantes y $K_{ij}K_{jm} = I_{(k)im}$.

El resultado de esta transformación es que problema de Riemann se escribe en términos de los

eigencampos de la siguiente forma:

$$\partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0, \quad (6.37)$$

λ_i son los valores propios de A_{ij} y los datos iniciales

$$w_i^0(x) = \begin{cases} w_i^L & \text{si } x < 0 \\ w_i^R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (6.38)$$

que corresponde a un conjunto de m ecuaciones de advección desacopladas. La solución al problema de Riemann para cada función w_i es:

$$w_i(x, t) = w_i^0(x - \lambda_i t) = \begin{cases} w_i^L & \text{si } (x - \lambda_i t) < 0 \\ w_i^R & \text{si } (x - \lambda_i t) > 0. \end{cases} \quad (6.39)$$

Para un punto dado (x, t) hay un valor propio λ_k tal que $\lambda_k < \frac{x}{t} < \lambda_{k+1}$ esto es $x - \lambda_i t > 0 \forall i$ tal que $i \leq k$, así que es posible escribir la solución en términos de las variables originales como:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^k \beta_i k^{(i)} + \sum_{i=k+1}^m \alpha_i k^{(i)} \quad (6.40)$$

donde k es el valor máximo de los subíndices i para los cuales $x - \lambda_i t > 0$, ver figura 6.3.

La expresión $u_i = K_{ij} w_j$ se utiliza para recuperar el valor de u_i , una vez que se han resuelto las ecuaciones de advección para el vector de variables características w_i , escrito explícitamente es:

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1 k_1^{(1)} + w_2 k_1^{(2)} + \dots + w_m k_1^{(m)} \\ &\cdot \\ u_i &= w_1 k_i^{(1)} + w_2 k_i^{(2)} + \dots + w_m k_i^{(m)} \\ &\cdot \\ u_m &= w_1 k_m^{(1)} + w_2 k_m^{(2)} + \dots + w_m k_m^{(m)} \end{aligned}$$

y en orden por columnas.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ u_i \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} k_1^{(1)} \\ \cdot \\ k_i^{(1)} \\ \cdot \\ k_m^{(1)} \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} k_1^{(2)} \\ \cdot \\ k_i^{(2)} \\ \cdot \\ k_m^{(2)} \end{bmatrix} + \dots + w_m \begin{bmatrix} k_1^{(m)} \\ \cdot \\ k_i^{(m)} \\ \cdot \\ k_m^{(m)} \end{bmatrix}$$

y escrito en forma compacta queda como:

$$u_i = \sum_{j=1}^m w_j k_i^{(j)} \quad (6.41)$$

que es la expansión de u_i en los vectores propios $k_i^{(j)}$. La solución $u_i(x, t)$ se obtiene al sustituir $w_i(x, t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t)$.

Si asumimos que el sistema es fuertemente hiperbólico, entonces podemos ordenar sus valores propios como: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$.

La estructura de la solución del problema de Riemann en el plano $x - t$ consiste de m ondas que emanan del origen, una para cada valor propio λ_i . Cada onda λ_i transporta una discontinuidad de u_i propagándose con velocidad λ_i . Naturalmente la solución a la izquierda de la onda λ_1 es el estado inicial u^L_i y hacia la derecha de la onda λ_m es u^R_i , la solución al problema de Riemann, consiste en encontrar la expresión de u_i para las regiones entre λ_1 y λ_m .

Los eigenvectores $k_j^{(i)}$ son linealmente independientes así que podemos expandir los estados constantes derecho e izquierdo como combinaciones lineales de ellos:

$$u^L_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i k_j^{(i)}, \quad u^R_j = \sum_{i=1}^m \beta_i k_j^{(i)}, \quad (6.42)$$

Para un punto dado (x, t) hay un valor propio λ_k tal que $\lambda_k < \frac{x}{t} < \lambda_{k+1}$ esto es $x - \lambda_i t > 0 \forall i$ tal que $i \leq k$. La solución al problema de Riemann en términos de las variables originales es:

$$u_j(x, t) = \sum_{i=1}^k \beta_i k_j^{(i)} + \sum_{i=k+1}^m \alpha_i k_j^{(i)}, \quad (6.43)$$

donde k es el valor máximo de los subíndices i para los cuales $x - \lambda_i t > 0$.

6.1.4 Discretización en volúmenes finitos

Las discontinuidades en la solución de una ecuación diferencial, causan dificultades computacionales para los esquemas en diferencias finitas porque la ecuación deja de ser válida cerca de las discontinuidades, debido a que las derivadas no están bien definidas. Un planteamiento alternativo, basado en la forma integral de ecuación son los métodos de volumen finito.

Los métodos de volúmenes finitos en una dimensión, están basados en la forma integral de la ecuación:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0. \quad (6.44)$$

para resolverla numéricamente debemos aproximar u mediante una aproximación discreta u_i^n . Donde i y n representan la posición de la aproximación, tanto en espacio como en tiempo.

Los valores aproximados son modificados a cada paso de tiempo por el flujo a través de de las orillas de las celdas y el problema principal es determinar las funciones de flujo numéricas, que aproximan a los flujos basados en los promedios sobre dichas celdas.

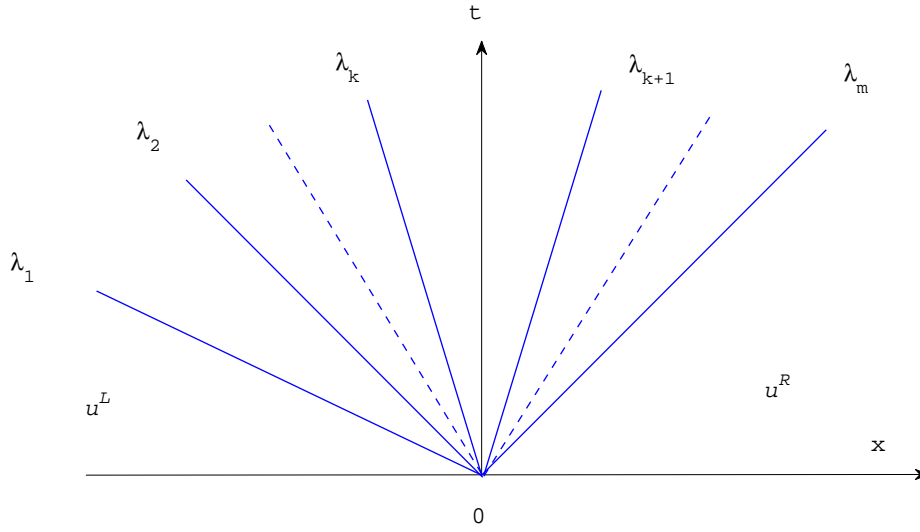


Figura 6.3: Estructura de las velocidades características λ_i para la solución de un sistema con coeficientes constantes, k es el valor máximo tal que $\lambda_k \leq 0$.

Supongamos que Δx_i , denota el tamaño de una malla en la dirección x . Denotamos también a I_i como el intervalo de longitud Δx centrado alrededor del punto x_i es decir $I_i = [x_i - \Delta x_i/2, x_i + \Delta x_i/2]$. El valor promedio de u en el intervalo I_i es simplemente:

$$\hat{u}(x, t) = \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} u(\xi, t) d\xi = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} u(\xi, t) d\xi. \quad (6.45)$$

Si se promedia la ecuación (6.44) sobre I_i se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \partial_t u(\xi, t) d\xi + \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \partial_\xi f(u(\xi, t)) d\xi \\ &= \partial_t \hat{u}(x, t) + \frac{1}{\Delta x} [f(u(x + \Delta x/2, t)) - f(u(x - \Delta x/2, t))]. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Si definimos $F_{i-\frac{1}{2}}(u(t))$ como una aproximación a $f(u(x - \Delta x/2, t))$ obtenida a partir de los datos discretos u_i podemos escribir:

$$\partial_t u_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} [F_{i+1/2}(u(t)) - F_{i-1/2}(u(t))]. \quad (6.47)$$

Integrando la ecuación (6.47) en el intervalo de tiempo $t + \Delta t$ se obtiene:

$$\hat{u}(x, t + \Delta t) = \hat{u}(x, t) - \frac{1}{\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} [F_{i+1/2}(u(\tau)) - F_{i-1/2}(u(\tau))] d\tau. \quad (6.48)$$

Con la expresión (6.48) se calculan los promedios de la celda en un tiempo $t + \Delta t$ a partir del promedio de las celdas en un tiempo t .

Los algoritmos para resolver la ecuación (6.44) son de dos tipos: implícitos y explícitos. Un algoritmo implícito relaciona datos en un nivel temporal $n + 1$ a los otros datos desconocidos en el mismo tiempo $n + 1$ así como los datos conocidos en tiempos previos, estos métodos típicamente requieren la inversión de una matriz o alguna otra operación igualmente costosa, lo que hace que puedan ser demasiado lentos. En un algoritmo explícito se obtienen los datos a un nivel de tiempo $n + 1$ en términos de los datos conocidos en tiempos anteriores, son estos tipos de métodos los que consideraremos a detalle. Para métodos explícitos, hay una restricción física sobre el tamaño del paso temporal. Esta restricción se conoce como la condición de Courant-Friedrich-Lewy (CFL). La condición CFL dice que el dominio de dependencia numérico de u debe contener a su dominio de dependencia físico, si no fuera así, resultaría imposible para la aproximación numérica converger a la solución exacta, pues en cada refinamiento de la malla, habría información física que queda fuera del dominio de dependencia numérico. La violación de la condición CFL produce típicamente oscilaciones numéricas, la restricción usualmente se escribe en términos del espaciamiento de la malla como

$$\Delta t \leq c \Delta x \quad (6.49)$$

donde c es el número de Courant que depende del algoritmo utilizado así como de los datos u^n .

Un algoritmo explícito escrito en forma conservativa, que actualiza la solución de un tiempo t^n al siguiente nivel t^{n+1} basado en (6.48) es:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}(u_{j+1/2}, t) - \hat{f}(u_{j-1/2}, t) \right), \quad (6.50)$$

donde \hat{f} es una función de flujos numéricos consistente con la función real de flujo, es decir $\hat{f}(u, u, \dots, u) = f(u)$.

Así mismo u_j^n es una aproximación del promedio de $u(x, t)$ dentro de la celda numérica I_j

$$u_j^n \approx \frac{1}{I_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t), \quad (6.51)$$

y los flujos numéricos:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F_{i+1/2}(u(\tau)) \tau, \quad (6.52)$$

6.1.5 Estabilidad, convergencia y consistencia

El decir que un método numérico es estable, es decir que dados unos datos iniciales específicos, la evolución calculada por el método produce resultados físicos. Si un método es convegente, quiere decir que la diferencia entre la solución calculada y la solución continua se reduce cuando se incrementa la resolución numérica. Hay dos tipos de error que son de interés, el primero es

el error local de truncamiento, que dada una solución exacta a la ecuación diferencial u , el error local de truncamiento σ esta dado por:

$$\sigma(t + \Delta t, x) = |u(t + \Delta t, x) - \tilde{u}(t + \Delta t, x)|, \quad (6.53)$$

donde $\tilde{u}(t + \Delta t, x)$ se calcula mediante un método numérico utilizando los datos iniciales. El error local de truncamiento puede estimarse incluso si no se conoce la solución exacta y por eso es útil para probar si una aproximación numérica es buena.

Un método es *consistente* si el error local de truncamiento tiende a cero conforme el espaciamiento en la malla Δx tiende a cero. Se dice que un método lineal tiene convergencia de orden p si existe una constante C_σ tal que:

$$|\sigma(t, x)| \leq C_\sigma (\Delta x)^p, \quad (6.54)$$

para todos los espaciamientos de la malla $\Delta x < (\Delta x)_0$.

El otro error de importancia es el error global, que esta dado por:

$$e(t) = |u(t, x) - \tilde{u}(t, x)|, \quad (6.55)$$

donde $\tilde{u}(t, x)$ se calcula utilizando el metodo numerico sobre el rango $t \in [t^0, t]$ utilizando los datos iniciales $u(t^0, x)$. Un método se dice que es *convergente* si el error global tiende a cero para cualquier t fijo conforme el espaciamiento de la malla tiende a cero, sin embargo como la solución exacta no se conoce generalmente, se dice que un método es convergente si el error entre soluciones calculadas numéricamente a diferentes resoluciones tiende a cero. El teorema de equivalencia de Lax muestra que para un método lineal y ecuaciones lineales, consistencia y estabilidad son condiciones necesarias y suficientes para la convergencia. Para ecuaciones no lineales el teorema de Lax Wendroff dice que si la solución converge, entonces convergerá a la solución débil de las ecuaciones.

La estabilidad de un método numérico lineal se comprueba utilizando el análisis de Von Newman, en donde el dato inicial se descompone en sus modos de Fourier y la evolución de cada modo es estudiada individualmente mediante un paso en la evolución. Los modos no interactúan debido a la linealidad del método, la idea es escribir a u_j como una onda monocromática:

$$u_j = C_m e^{2\pi i \frac{mj}{N}}, \quad (6.56)$$

con m el número de onda, j la posición espacial y N el número de puntos en la malla, se puede expresar en términos del factor de amplificación g :

$$u_j^n = g^n e^{i\phi j}, \quad (6.57)$$

con $\phi = 2\pi m/N$, el método es linealmente estable si $|g| < 1$ para todo ϕ . Para muchos métodos numéricos esta condición da el número CFL. No es posible aplicar el análisis de estabilidad a métodos no lineales, debido principalmente a la interacción entre los diferentes modos de Fourier, sin embargo, el teorema de Godunov enuncia que cualquier método lineal no sera monótono si

es de orden mayor que uno en precisión, aunque existen condiciones de estabilidad no lineal, para esto se necesitan introducir algunos conceptos adicionales.

Un método numérico se dice que preserva la monotonicidad si, para una ley de conservación escalar con datos iniciales crecientes (decrecientes) sobre un dominio espacial infinito, la solución es monótona creciente (decreciente) para todo tiempo, esto previene oscilaciones espurias, pero esta condición puede ser muy restrictiva para muchos casos y no cubre aquellos datos iniciales que no son monótonos.

La variación total de una función escalar discreta se define como:

$$TV(u) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|, \quad (6.58)$$

Se dice que un esquema es de variación total decreciente TVD si:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad (6.59)$$

Una propiedad muy importante de los métodos de variación decreciente es que son convergentes si satisfacen además, la condición de entropía [83].

El orden de precisión es en el sentido del error local de truncamiento, si el error local de truncamiento es $O(\Delta x^{r+1})$ en regiones suaves, se dice que el esquema es r -ésimo orden de precisión. Usualmente, métodos semi-discretos, como el método de líneas son mucho más simples que los métodos que son completamente discretos, por ejemplo los que son del tipo Lax Wendroff, cuya principal desventaja es que son complicados de programar, especialmente para problemas de más de una dimensión espacial, además de que no existe una demostración formal de que estos métodos son de variación total decreciente. Una forma de discretizar en tiempo es utilizar un integrador multiniveles tipo Runge Kutta, estos métodos son más sencillos de programar, en especial en múltiples dimensiones y para problemas que involucran fuentes, sin embargo solo existen análisis de estabilidad lineal, que no es suficiente porque no implica convergencia si hay choques u otro tipo de discontinuidades.

Un método numérico se dice que es esencialmente no oscilatorio (ENO) si el incremento en la variación es proporcional a alguna potencia positiva r de la longitud del paso espacial, es decir

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) + O((\Delta x)^r, (\Delta t)^r), \quad (6.60)$$

un método ENO no siempre preserva la monotonicidad, pero en el límite $\Delta x \rightarrow 0$ se recupera la condición TVD. Se define la estabilidad de un sistema de ecuaciones ordinarias mediante lo siguiente, Considere un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{d}{dt}u = Au, \quad (6.61)$$

en donde A es una matriz de $N \times N$, un método numérico, aproximara esta ecuación si la solución numérica satisface:

$$u^{n+1} = g(\Delta t A)u^n, \quad (6.62)$$

donde la función g dependera del método empleado, por lo tanto, un método sera absolutamente estable, es decir cualquier error en la solución numérica no crecera exponencialmente si $|g(z)| < 1$, para todos los complejos z con parte real negativa. La región de estabilidad del método numérico es el conjunto de puntos que satisfacen:

$$S = z \in C : |g(z)| < 1, \quad (6.63)$$

generalmente se dice que el método es estable si una vecindad del origen esta contenida en la región de estabilidad, esto implica que existe un paso de tiempo, tal que los errores no crecen exponencialmente, aunque esto es cierto para sistemas lineales de coeficientes constantes, en la práctica se observa que para sistemas no lineales también sucede, en el caso no lineal se utiliza la matriz jacobiana del sistema.

6.2 El método de Godunov

Un planteamiento de volumen finito nos lleva al esquema numérico general:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}(u_{j+1/2}, t) - \hat{f}(u_{j-1/2}, t) \right), \quad (6.64)$$

en donde $\hat{f}_{i-1/2}^n$ y $\hat{f}_{i+1/2}^n$ son aproximaciones a los flujos a través de las fronteras de las celdas $x_{i-1/2}$ y $x_{i+1/2}$ promediados en un paso de tiempo,

$$f_{i-1/2}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{i-1/2}, \tau)] d\tau \quad (6.65)$$

Si pudiéramos resolver la ley de conservación de manera exacta, en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ con los datos iniciales $\bar{u}^n(x, t_n)$ podríamos dar $u^n(x, t)$ en el tiempo t , $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ y con este valor sería posible definir el flujo numérico al sustituir \bar{u} en la expresión (6.52)

$$f_{i-1/2}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[\bar{u}(x_{i-1/2}, t)]. \quad (6.66)$$

El método de Godunov para evaluar éste flujo consiste en:

- Utilizar los valores promedios en cada celda para construir una función constante por pedazos $\bar{u}(x, t_n)$ definido $\forall x$
- Utilizar los datos iniciales constantes por pedazos para encontrar la solución exacta a la ley de conservación y evolucionar para obtener $\bar{u}(x_i, t_{n+1})$.
- Calcular el promedio de esta función en cada celda para obtener los nuevos valores en cada celda

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_x} \bar{u}(x_i, t_{n+1}) dx, \quad (6.67)$$

El paso más complicado de este algoritmo es resolver la ley de conservación, pero, como estamos empezando con datos constantes por pedazos, podemos tratar cada interfaz entre celdas como un problema de Riemann y así encontrar el valor de los flujos en la interfase.

En el caso de la ecuación de Burgers

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad f(u) = \frac{u^2}{2}. \quad (6.68)$$

el flujo en la interfaz, para el marco local de la solución es $f(u_{i+1/2}(0))$,³ con $u_{i+1/2}(0)$ la solución al problema de Riemann entre las celdas i , $i + 1$:

Si $u_i^n > u_{i+1}^n$,

$$u_{i+1/2}^n(0) = \begin{cases} u_i^n & \text{si } s > 0, \\ u_{i+1}^n & \text{si } s < 0. \end{cases} \quad (6.69)$$

con $s = \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n)$.

Si $u_i^n \leq u_{i+1}^n$,

$$u_{i+1/2}^n(0) = \begin{cases} u_i^n & \text{si } 0 \leq u_i^n, \\ 0 & \text{si } u_i^n < 0 < u_{i+1}^n, \\ u^R & \text{si } 0 \leq u_{i+1}^n. \end{cases} \quad (6.70)$$

En los cálculos prácticos no es necesaria la estructura completa de la solución al problema de Riemann, solamente se utilizan los valores que resultan en la interfaz de las celdas para poder evaluar el flujo numérico.

En el caso clásico de las ecuaciones de Euler, se han desarrollado una gran variedad de resolvedores de Riemann aproximados que se pueden ser usados en el caso relativista estos se presentan en las siguientes secciones.

6.3 Resolvedores de Riemann aproximados

Resolver un problema de Riemann exactamente involucra cálculos que consumen mucho tiempo de cómputo, que es particularmente costoso en el caso de hidrodinámica relativista multidimensional, debido al acople de las ecuaciones por el factor de Lorentz. Como alternativa, se utilizan resolvedores de Riemann aproximados, estos se basan en la solución exacta del problema de Riemann para una versión aproximada de las ecuaciones originales.

En el caso de la aproximación local por características, el flujo numérico se calcula de acuerdo con alguna forma genérica de flujo, haciendo uso de la información característica del sistema, ejemplos de estos resolvedores son el de Roe [84] y el de Harten Lax, Van Leer y Einfeldt [85].

El resolvedor aproximado de Harten, Lax, Van Leer y Einfeldt (HLL) se basa en una solución aproximada al problema de Riemann con un único estado intermedio:

$$u^{hll} = \begin{cases} u^L & \text{si } x < s_L t, \\ u^{hll} & \text{si } s_L t < x < s_R t, \\ u^R & \text{si } x > s_R t, \end{cases} \quad (6.71)$$

³El marco local se escoge para que coincida con el eje t por simplicidad.

Donde s_L y s_R son las cotas mínima y máxima para las velocidades de las señales y

$$u^{hllc} = \frac{s_R u^R - s_L u^L - F(u^R) + F(u^L)}{s_R - s_L}, \quad (6.72)$$

el flujo numérico esta dado por:

$$F = \frac{s_R^+ F(u^L) - s_L^- F(u^R) + s_R^+ s_L^- (u^R - u^L)}{s_R^+ - s_L^-} \quad (6.73)$$

con $s_L^- = \min(0, s_L)$ y $s_R^+ = \max(0, s_R)$

Es común utilizar las velocidades características del sistema como s_R, s_L

El último término que aparece en el flujo aproximado representa la viscosidad numérica del esquema, y hace uso explícito de la información característica de las matrices jacobianas. Esta información se usa para determinar la disipación numérica adecuada para obtener representaciones exactas de las soluciones discontinuas sin una difusión excesiva y evitando el fenómeno de Gibbs.

El resolvidor aproximado de Roe consiste en hacer una aproximación lineal de coeficientes constantes a la ecuación original y en la siguientes secciones se mostrará a detalle como se obtienen los flujos numéricos bajo esta suposición.

6.3.1 Resolvidor de HLLC

Consideremos el problema en una dimensión 6.7 con datos iniciales 6.9 y fijémonos una celda de prueba, ó celda de control [82] en la que la estructura que surge de la solución del problema de Riemann esta contenida en $[x_L, x_R] \times [0, T]$, si s_L y s_R son las velocidades máximas con las que se propaga una perturbación de los datos iniciales u_L y u_R , entonces

$$x_L < T s_L, \quad x_R < T s_R \quad (6.74)$$

En la figura (6.4) se muestra el esquema del volumen de control.

La forma integral de la ley de conservación $u_t + F(u)_x = 0$ dentro del volumen de control es:

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} u(x, 0) dx + \int_0^T F(u(x_L, t)) dt - \int_0^T F(u(x_R, t)) dt \quad (6.75)$$

Si evaluamos el lado derecho tendremos lo que se conoce como *condición de consistencia*:

$$\int_{x_L}^{x_R} u(x, T) dx = x_R u^R - x_L u^L + T(F_L - F_R) \quad (6.76)$$

con la notación $F_L = F(u_L)$ y $F_R = F(u_R)$ (u_L y u_R son constantes).

Si expandemos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \int_{x_L}^{x_R} u(x, T) dx &= \int_{x_L}^{T s_R} u(x, T) dx + \int_{T s_L}^{T s_R} u(x, T) dx + \int_{T s_R}^{x_R} u(x, T) dx \\ &= (T s_L - x_L) u_L + \int_{T s_L}^{T s_R} u(x, T) dx + (x_R - T s_R) u_R, \end{aligned} \quad (6.77)$$

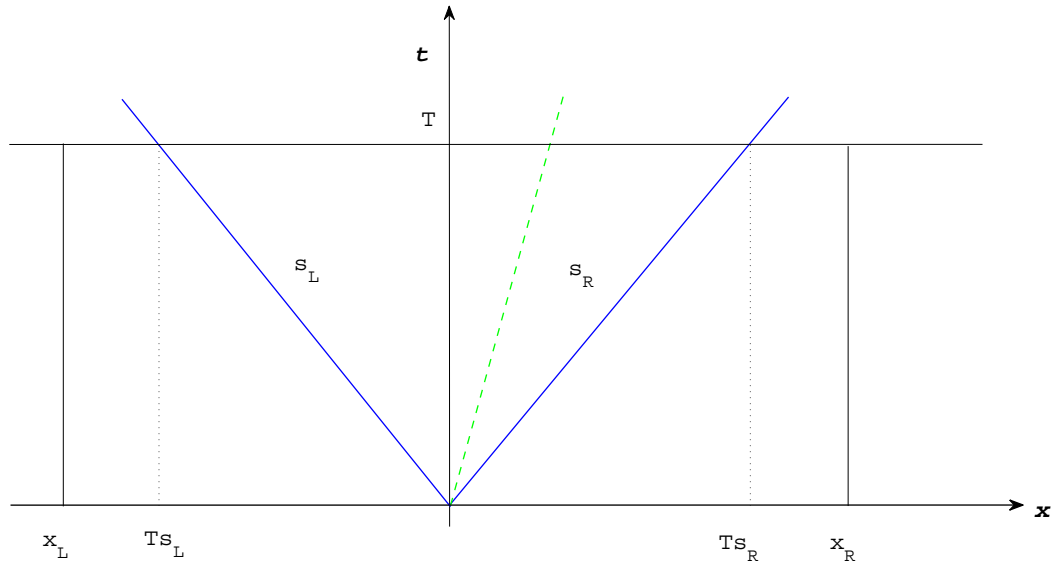


Figura 6.4: Volumen de control, s_L y s_R son las velocidades máximas que surgen del problema de Riemann.

al igualar esta expresión con (6.76) tendremos:

$$x_R u_R - x_L u_L + T(F_L - F_R) = (T s_L - x_L) u_L + (x_R - T s_R) u_R + \int_{T s_L}^{T s_R} u(x, T) dx, \quad (6.78)$$

simplificando y despejando el término integral

$$\int_{T s_L}^{T s_R} u(x, T) dx = T(F_L - F_R + s_R u_R - s_L u_L). \quad (6.79)$$

Si dividimos entre $T(s_R - s_L)$, que es el tamaño del volumen donde esta contenida toda la información del problema de Riemann, tendremos un promedio integral de la solución exacta entre las ondas más rápidas a un tiempo T , una vez que se conocen las velocidades de las señales s_L y s_R el resultado es el estado:

$$u^{hllc} := \frac{1}{T(s_R - s_L)} \int_{T s_L}^{T s_R} u(x, T) dx = \frac{s_R u_R - s_L u_L + F_L - F_R}{s_R - s_L}. \quad (6.80)$$

Para hallar el flujo numérico, integramos sobre la región $[x_L, 0] \times [0, T]$ la ley de conservación

$$\int_{x_L}^0 u(x, T) dx = \int_{x_L}^0 u(x, 0) dx + \int_0^T F(u(x_L, t)) dt - \int_0^T F(u(0, t)) dt, \quad (6.81)$$

el lado izquierdo lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \int_{x_L}^0 u(x, T) dx &= \int_{x_L}^{Ts_L} u(x, T) dx + \int_{Ts_L}^0 u(x, T) dx \\ &= u_L(Ts_L - x_L) + \int_{Ts_L}^0 u(x, T) dx, \end{aligned} \quad (6.82)$$

mientras que el primer término del lado derecho

$$\begin{aligned} \int_{x_L}^0 u(x, 0) dx &= \int_{x_L}^{Ts_L} u(x, 0) dx + \int_{Ts_L}^0 u(x, 0) dx \\ &= u_L(Ts_L - x_L) - Ts_L u_L, \end{aligned} \quad (6.83)$$

finalmente al escribir en (6.81) los resultados anteriores tendremos

$$\int_{Ts_L}^0 u(x, T) dx = -Ts_L u_L + TF_L - TF_{0L} \quad (6.84)$$

donde hemos definido el estado

$$F_{0L} := \int_0^T F(u(0, t)) dt, \quad (6.85)$$

Despejando F_{0L} de la expresión (6.84)

$$F_{0L} = -\frac{1}{T} \int_{Ts_L}^0 u(x, T) dx + (F_L - s_L u_L), \quad (6.86)$$

y sustituyendo el estado constante u^{hllc}

$$\begin{aligned} F_{0L} &= s_L u^{hllc} + F_L - s_L u_L \\ &= F_L + s_L (u^{hllc} - u_L) \\ &= F_L + s_L \left(\frac{s_R u_R - s_L u_L - F_R + F_L}{s_R - s_L} - u_L \right) \\ &= F_L + \frac{1}{s_R - s_L} (s_L s_R u_R + s_L F_L - s_L F_R - s_L s_R u_L) \\ &= \frac{1}{s_R - s_L} (s_R F_L + s_L s_R u_R - s_L F_R - s_L s_R u_L), \end{aligned}$$

Si se integra sobre el lado derecho de la celda de prueba, se obtienen expresiones equivalentes:

$$F_{0R} = \frac{1}{T} \int_0^{Ts_R} u(x, T) dx + (F_R - s_R u_R), \quad (6.87)$$

y

$$F_{0R} = \frac{1}{s_R - s_L} (s_R F_L + s_L s_R u_R - s_L F_R - s_L s_R u_L),$$

el resultado $F_{0R} = F_{0L}$ es el flujo $HLLC$

$$F^{hllc} = \frac{1}{s_R - s_L} (s_R F_L - s_L F_R + s_L s_R (u_R - u_L)). \quad (6.88)$$

6.3.2 Resolvedor de Roe

Roe [84] resolvió el problema de Riemann para la ley de conservación (6.2) al introducir la matriz jacobiana del sistema $A_{ij} := \frac{\partial f_i(u_j)}{\partial u_j}$ para obtener:

$$\partial_t u_j + A_{ij} \partial_x u_j = 0,$$

En este enfoque, se aproxima la matriz A por una matriz de coeficientes constantes $\tilde{A} = \tilde{A}(u^L, u^R)$ que es función de los estados (u^L, u^R) , se trata entonces de resolver *exactamente* un problema de Riemann de la forma:

$$\partial_t u_j + A_{ij} \partial_x u_j = 0, \quad u_j(x, 0) = \begin{cases} u_L & x < 0, \\ u_R & x > 0, \end{cases} \quad (6.89)$$

Para recuperar la solución correcta, la matriz de aproximación de Roe debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. *Hiperbolicidad.* \tilde{A} debe tener valores propios reales $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(u^L, u^R)$ y un conjunto de vectores propios linealmente independientes

$$k_i^{(1)}, k_i^{(2)} \dots k_i^{(m)}, \quad (6.90)$$

Esta condición es necesaria para preservar el carácter matemático del sistema original.

2. *Consistencia.* Se debe cumplir que:

$$\tilde{A}(u_L, u_R) \Rightarrow f(u), \quad \text{cuando} \quad \begin{array}{l} u_L \Rightarrow u \\ u_R \Rightarrow u \end{array} \quad (6.91)$$

Con esta condición se asegura que la aproximación tiende al flujo original en soluciones continuas.

3. *Conservación.* Debe satisfacer que:

$$f(u_R) - f(u_L) = \tilde{A} \cdot (u^R - u^L), \quad (6.92)$$

Esta condición además de preservar el carácter conservativo del sistema, garantiza que para discontinuidades aisladas, el problema se resuelve exactamente.

La dificultad del método de Roe surge al momento de encontrar las matrices \tilde{A} ya que su cálculo puede ser muy costoso computacionalmente.

Para resolver exactamente el problema de Riemann, debemos encontrar los flujos numéricos que aparecen en la discretización de la ley de conservación (6.48). La solución general de este problema linealizado está dado por (6.43),

$$u_j(x, t) = \sum_{i=1}^k \beta_i k_j^{(i)} + \sum_{i=k+1}^m \alpha_i k_j^{(i)},$$

donde k es el entero mas grande con $1 \leq k \leq m$ tal que $x/t \geq \lambda_k$ para $x/t = 0$ k es tal que $\lambda_k \leq 0$ y $\lambda_k > 0$.

Para no complicar la notación para la discretización, omitimos el índice para la j -ésima componente de la solución, escribiendo simplemente $u_i(x, t)$ (i etiqueta la celda en vez de $(u_j)_i(x, t)$). Si hacemos una descomposición de $u_{i+\frac{1}{2}}(0)$ en términos de los vectores propios de \tilde{A} obtendremos:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}(0) = u_L + \sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i k^{(i)}, \quad (6.93)$$

o utilizando los valores propios positivos

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}(0) = u_R - \sum_{i=k+1}^m \tilde{\alpha}_i k^{(i)}. \quad (6.94)$$

La expresión correcta para el flujo la obtenemos de la condición de consistencia (6.76) al integrar de T_{sL} a 0.

$$\int_{T_{sL}}^0 \tilde{u}_{i+1/2}(x, t) dx = T[\tilde{F}(u_L) - \tilde{F}(u_{i+1/2}(0))] - T_{sL} \tilde{u}_L, \quad (6.95)$$

integrando de 0 a T_{sR} .

$$\int_0^{T_{sR}} \tilde{u}_{i+1/2}(x, t) dx = T[\tilde{F}(u_{i+1/2}(0)) - \tilde{f}(u_R)] + T_{sR} \tilde{u}_R, \quad (6.96)$$

al sustituir para el estado izquierdo (6.95), la expresión (6.86):

$$\begin{aligned} F_{0L} &= F_L - s_L u_L - \frac{1}{T} \int_{T_{sL}}^0 \tilde{u}_{i+1/2}(x, T) dx, \\ &= F_L - s_L u_L - \left[\tilde{F}(u_L) - \tilde{F}(\tilde{u}_{i+1/2}(0)) \right] + s_L u_L \\ &= F_L + \tilde{F}(\tilde{u}_{i+1/2}(0)) - \tilde{F}(u_L), \end{aligned}$$

mientras que al sustituir el estado derecho (6.96) en (6.87)

$$\begin{aligned} F_{0R} &= F_R - s_R u_R + \frac{1}{T} \int_0^{T_{sL}} \tilde{u}_{i+1/2}(x, T) dx, \\ &= F_R - s_R u_R + \left[\tilde{F}(\tilde{u}_{i+1/2}(0)) - \tilde{F}(u_R) \right] + s_R u_R \\ &= F_R + \tilde{F}(\tilde{u}_{i+1/2}(0)) - \tilde{F}(u_R), \end{aligned}$$

al sustituir la expresión (6.93) para $\tilde{u}_{i+1/2}(0)$ y la suposición de que el flujo esta dado por $\tilde{F} = \tilde{A}u$

$$\begin{aligned} F_{0L} &= F_L + \tilde{A} \left(u_L + \sum_{\lambda_i \leq 0}^m \tilde{\alpha}_i k^{(i)} \right) - \tilde{A} u_L \\ &= F_L + \sum_{\lambda_i \leq 0}^m \tilde{\alpha}_i \lambda_i k^{(i)}, \end{aligned}$$

de igual modo al sustituir (6.94) para el lado derecho

$$\begin{aligned} F_{0R} &= F_R + \tilde{A} \left(u_R - \sum_{\lambda_i > 0}^m \tilde{\alpha}_i k^{(i)} \right) - \tilde{A} u_R \\ &= F_R - \sum_{\lambda_i > 0}^m \tilde{\alpha}_i \lambda_i k^{(i)}, \end{aligned}$$

sumando ambas expresiones tendremos:

$$F_{i+1/2}^{Roe} = F_{0L} = F_{0R} = \frac{1}{2}(F_L + F_R) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i=1}^m \tilde{|\lambda_i|} \alpha_i k^{(i)} \quad (6.97)$$

Para calcular el flujo numérico de Roe F^{Roe} , es suficiente con calcular los valores propios y vectores propios de \tilde{A} y ésta no se utiliza explícitamente.

6.4 Flujo en las interfases

El teorema de Godunov [83, 86] afirma que los esquemas lineales para resolver ecuaciones diferenciales parciales monótonos (que no generan nuevos extremos) son a lo más de primer orden de exactitud, esto es una limitante muy grave cuando se intenta describir un flujo con mucha precisión. Se utilizan en los esquemas de alta resolución para evitar oscilaciones espurias que surgen al utilizar esquemas con una discretización espacial con alto orden, debido a las discontinuidades o gradientes muy grandes en la solución.

La idea para obtener un grado de exactitud más alto, es reemplazar las aproximaciones constantes por pedazos de Godunov, que son a primer orden, por funciones reconstruidas de estados promediados sobre una celda y que se obtienen de un paso de tiempo previo. Para cada celda, los estados derecho e izquierdo se obtienen mediante un limitador de pendiente y son utilizados para calcular los flujos en las fronteras de las celdas para resolver el problema de Riemann.

Interpolaciones exactas (lineales o de orden mayor) fueron derivadas asumiendo que los datos eran suaves, si los datos tienen una discontinuidad, estas interpolaciones siempre causan oscilaciones en la solución [87]. Para prevenir estas oscilaciones, Van Leer introdujo una restricción de monotonicidad para su esquema. En regiones suaves con pendiente diferente de cero, la restricción es redundante si la malla es lo suficientemente fina y el esquema es segundo orden. En una discontinuidad, la restricción toma efecto para prevenir oscilaciones. La mayor desventaja de la restricción es que tiene efectos adyacentes en los extremos y causa pérdida de precisión, degenerándose a primer orden. En otras palabras, alta resolución en las discontinuidades se obtiene a expensas de la precisión cerca de los extremos. A continuación mostramos como calcular la aproximación lineal de la función en la interfase.

Se debe encontrar la pendiente de la recta que une a los valores medios de la celda \tilde{u}_i y \tilde{u}_{i+1} :

$$\Delta Q^{i+\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (6.98)$$

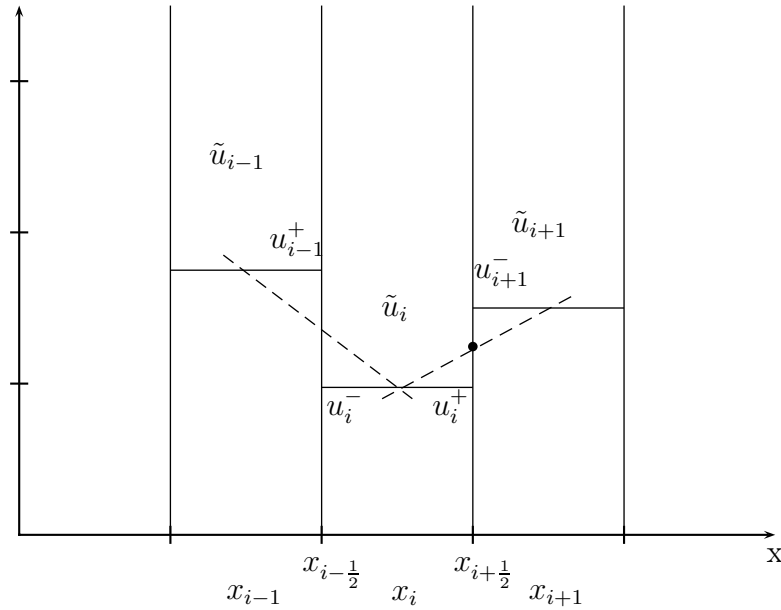


Figura 6.5: Extrapolación en las interfaces para encontrar los valores de u_i^\pm .

Luego se calcula la pendiente $\Delta Q^{i-\frac{1}{2}}$ de la recta que une a \tilde{u}_{i-1} y \tilde{u}_i .

De estas pendientes, se escoge la que tiene un valor absoluto menor s_i y servirá para extrapolar el valor de la función en el centro de la celda, como:

$$u_i^+ = \tilde{u}_i + s_i(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i), \quad (6.99)$$

Correspondiente a una interpolación lineal ⁴

Para construir el valor de \tilde{u} en la interfase $i - \frac{1}{2}$, tomamos la misma pendiente s_i y extrapolamos mediante:

$$u_i^- = \tilde{u}_i + s_i(x_{i-\frac{1}{2}} - x_i). \quad (6.100)$$

Este método de reconstrucción se conoce como limitador de pendiente *minmod* y pertenece a los métodos MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) que nos permiten elevar el orden de aproximación sin introducir oscilaciones, se escribe en general como:

$$u_i^\pm = \tilde{u}_i + s_i(x_{i\pm\frac{1}{2}} - x_i) \quad (6.101)$$

⁴Existen interpolaciones más precisas utilizando funciones cuadráticas ya sea mediante parábolas [88, 89] o hipérbolas [90] incrementando a tercer orden la aproximación, incluso pueden utilizarse polinomios con orden mucho mayor, aquí nos restringimos con las aproximaciones lineales que producen segundo orden.

con la pendiente obtenida a partir de:

$$s_i := \begin{cases} \min(|\Delta Q^{i+\frac{1}{2}}|, |\Delta Q^{i-\frac{1}{2}}|) & \text{si } (\Delta Q^{i+\frac{1}{2}}) * (\Delta Q^{i-\frac{1}{2}}) > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (6.102)$$

Existen muchos otros limitadores de pendiente, que se basan en diferentes pesos dados a las rectas. Algunos ejemplos son:

Van Leer: $L(a, b) = \mathcal{L}(a, b) \frac{2|a| \cdot |b|}{|a| + |b|}$,

MC: $L(a, b) = \mathcal{L}(a, b) \cdot \min\{\frac{|a+b|}{2}, 2|a|, 2|b|\}$,

Superbee: $L(a, b) = \mathcal{L}(a, b) \cdot \max\{\min\{2|a|, |b|\}, \min\{|a|, 2|b|\}\}$.

Con $\mathcal{L}(a, b) = a/|a|$ si a y b tienen el mismo signo y cero en otro caso.

En general no hay un limitador que sea mejor que otro, así que es necesario probar cual es el limitador que mejor se ajusta al problema que se quiere resolver.

6.4.1 Método de líneas

El método de líneas es uno de los métodos numéricos mas eficientes para resolver ecuaciones diferenciales parciales que describen fenómenos físicos. Se ha aplicado a diversos problemas en física teórica, destacándose a relatividad numérica y la teoría electromagnética. El método de líneas consiste en reducir la solución de una ecuación diferencial parcial a la solución de una ecuación diferencial ordinaria, esto se hace asumiendo que la discretización de la función u en volúmenes finitos⁵, es decir:

$$u_i = \int_{x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i}^{x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i} u \, dx, \quad (6.103)$$

que nos conduce a la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} u_i = \mathbf{f}(u(x_i - \frac{1}{2}\Delta x_i, t)) - \mathbf{f}(u(x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i, t)), \quad (6.104)$$

Este procedimiento semi analítico, ahorra tiempo de computo, porque la solución a las ecuaciones ordinarias puede hacerse de manera mucho mas eficiente.

Para resolver esta ecuación diferencial, hay que tomar en consideración varios aspectos, el primero es contar con un resolvidor de ecuaciones diferenciales ordinarias puntual, como los métodos Runge Kutta. El segundo es la manera en que se reconstruye la función u en los puntos espaciales, $x_i \pm \frac{1}{2}\Delta x_i$. El tercero es un método para calcular los flujos numéricos \mathbf{f} dada la reconstrucción.

⁵La discretización puede ser utilizando diferencias finitas, pero para nuestros fines nos referimos a volúmenes finitos

Los métodos de tipo Runge Kutta son los más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias porque son de variación total acotada y son útiles al tratar con ecuaciones *duras*, ecuaciones que involucran diferentes órdenes de magnitud, ejemplos de estos son los SSPRK (Strong Stability Preserving) Runge Kutta [91].

La idea es tomar un número de pasos de tiempo a primer orden y combinarlos para obtener un método de orden superior, un método de orden N se escribe como:

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u_i^n \\ u^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{ik} u^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} \mathbf{f}(u^{(k)}) \right) \\ u^{n+1} &= u^{(N)}. \end{aligned}$$

Si todos los coeficientes α_{ik} , β_{ik} son positivos, entonces esto es una combinación convexa de los operadores de Euler en dirección de flujo con Δt reemplazado por $\beta_{ik} \Delta t / \alpha_{ik}$. La condición CFL restringe el paso de tiempo total por un factor c , definido como

$$c = \min \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}}, \quad (6.105)$$

Estos métodos son de variación total acotada cuando los coeficientes α_{ik}, β_{ik} son positivos.

Existen métodos TVD explícitos de segundo y tercer orden, sin embargo Gottlieb y Shu [92, 93] mostraron que no existen métodos TVD de cuarto orden. El método Runge Kutta de segundo orden explícitamente se escribe como:

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t \mathbf{f}(u^n), \quad (6.106)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{2} u^n + \Delta t \mathbf{f}(u^{(1)}). \quad (6.107)$$

Mientras que el de tercer orden es:

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t \mathbf{f}(u^n), \quad (6.108)$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{4} \left(3u^n + u^{(1)} + \Delta t \mathbf{f}(u^{(1)}) \right), \quad (6.109)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3} \left(3u^n + 2u^{(1)} + 2\Delta t \mathbf{f}(u^{(2)}) \right). \quad (6.110)$$

El método de cuarto orden no es estrictamente TVD [94] pero es ampliamente utilizado, su forma explícita es:

$$u^{(1)} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{f}(u^n), \quad (6.111)$$

$$u^{(2)} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{f}(u^{(1)}), \quad (6.112)$$

$$u^{(3)} = u^n + \Delta t \mathbf{f}(u^{(2)}), \quad (6.113)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{6} \left(-2u^n + 2u^{(1)} + 4u^{(2)} + 2u^{(3)} + \Delta t \mathbf{f}(u^{(3)}) \right). \quad (6.114)$$

Estos métodos son muy robustos y fáciles de programar por lo que son idóneos para resolver las ecuaciones para la dinámica de fluidos.

Capítulo 7

Hidrodinámica Relativista

Por hidrodinámica relativista se debe entender al estudio de flujos en presencia de campos gravitacionales intensos o cuando la velocidad del flujo es comparable con la velocidad de la luz. Los efectos de relatividad general deben ser tomados en cuenta cuando se estudian campos gravitacionales intensos como aquellos en la vecindad de estrellas de neutrones o cerca de agujeros negros.

Para resolver las ecuaciones de Euler relativistas es necesario aplicar técnicas numéricas que permitan encontrar las soluciones correctas, como las mostradas en el capítulo anterior

Las ecuaciones de la hidrodinámica utilizadas frecuentemente en astrofísica son las ecuaciones de Euler, que representan un caso especial de la dinámica de gases no viscosos e incompresibles.

7.1 Dinámica de Fluidos

Para el estudio de un fluido se asume que el comportamiento macroscópico es perfectamente continuo en estructura y las cantidades físicas como presión, momento y densidad contenidas en un elemento de volumen están uniformemente distribuidas, es decir se considera al sistema lo suficientemente grande para verlo como un campo continuo. En la aproximación de fluido se asume también que el camino libre medio de las partículas es mucho menor que la longitud característica macroscópica del sistema.

Existen dos formulaciones para describir la dinámica de un fluido, la formulación lagrangiana y la euleriana. En la formulación lagrangiana se describe la evolución del flujo siguiendo el movimiento individual de una porción de fluido. En la descripción euleriana no se está ligado a una porción del fluido sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido, el valor de una propiedad en un punto y en un instante determinado es el de la porción de fluido que ocupa dicho punto en ese instante. Aquí nos concentraremos en la formulación euleriana.

Las variables fundamentales o primitivas para la descripción de un fluido son $(\rho, p, v^i, \varepsilon)$, la densidad, presión, velocidad y energía interna.

En el caso clásico la dinámica para un elemento de fluido no viscoso esta dada por las ecuaciones de conservación de la masa

$$\partial_t \rho + \partial_k (\rho v^k) = 0, \quad (7.1)$$

la ecuación de Euler que es la generalización de la segunda ley de Newton

$$\partial_t S_i + \partial_k (S_i v^k + p \delta_i^k) = 0, \quad (7.2)$$

y la conservación de la energía,

$$\partial_t E + \partial_k [(E + p)v^k] = 0, \quad (7.3)$$

Donde $S_i := \rho v_i$, y $E = \rho \epsilon + \rho v^2/2$. El conjunto de ecuaciones (7.1, 7.2, 7.3) dan la dinámica completa de un elemento de fluido, sin embargo no podemos resolverlas directamente pues no es un sistema cerrado porque tiene más incógnitas que ecuaciones. Para tener un sistema bien planteado hace falta una ecuación ó una relación extra entre las variables, ésta relación esta dada por la ecuación de estado, comunmente dada por $p = p(\rho, \epsilon)$.

7.2 Ecuación de Estado

Un sistema en equilibrio termodinámico puede describirse completamete por las variables termodinámicas simples como la presión p y el volumen específico \tilde{V} . Una familia de estados en equilibrio termodinámico puede describirse mediante una curva en un diagrama $p - \tilde{V}$ cada una caracterizada por un valor particular de la temperatura T . En estos casos se pueden relacionar las variables mediante una *ecuación de estado térmica*:

$$T = T(p, \tilde{V}), \quad (7.4)$$

o dos posibles relaciones:

$$p = p(T, \tilde{V}), \quad \tilde{V} = \tilde{V}(T, p), \quad (7.5)$$

La relación $p - \tilde{V} - T$ cambia de sustancia a sustancia, para gases térmicamente ideales se tiene la relación:

$$T = \frac{p\tilde{V}}{R}, \quad (7.6)$$

en donde R es una constante que depende del gas considerado. La primera ley de la termodinámica enuncia que para un sistema no adiabático el cambio en la energía interna $\Delta \epsilon$ en un proceso estará dada por:

$$\Delta \epsilon = \Delta W + \Delta Q, \quad (7.7)$$

donde ΔW es el trabajo hecho sobre el sistema y ΔQ es el calor transmitido hacia el sistema. Tomando el trabajo como $-p d\tilde{V}$ es posible escribir en términos infinitesimales:

$$dQ = d\epsilon + p d\tilde{V}. \quad (7.8)$$

La energía interna puede relacionarse con p y \tilde{V} vía una *ecuación de estado calórica*.

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \tilde{V}), \quad (7.9)$$

Para un gas ideal calórico se tiene la expresión:

$$\varepsilon = \frac{p\tilde{V}}{\gamma - 1} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (7.10)$$

donde γ es una constante dependiente del gas y $\rho = 1/\tilde{V}$.

Las ecuaciones de estado térmica y calórica para un material están íntimamente relacionadas, ambas son necesarias para una descripción termodinámica completa. Al escoger una ecuación de estado térmica se restringe la elección de la ecuación de estado calórica, pero no la determina. Para las ecuaciones de Euler clásicas únicamente se necesita la ecuación de estado calórica, es decir $p = p(\rho, \varepsilon)$ a menos que se necesite la temperatura para cualquier otro propósito, en cuyo caso es necesario dar la ecuación de estado térmica explícitamente.

7.2.1 Gases ideales

Un gas ideal es aquel que tiene la ecuación de estado

$$pV = nRT, \quad (7.11)$$

donde V es el volumen, $R = 8.134 \times 10^3 \text{ J kilomoles}^{-1}\text{K}^{-1}$ es la constante universal de los gases y T es la temperatura medida en Kelvins. Un mol de sustancia es numéricamente igual a ω gramos y contiene 6.02×10^{23} partículas de la sustancia, donde ω es la masa atómica relativa. R esta relacionada con la constante de Boltzman como $k = R/N_A$. N_A es el número de avogadro y N es el número de moléculas $N = N_A n$, una división por unidad de masa $m = n\omega$ nos conduce a:

$$\tilde{V} = \tilde{V}(T, p) = \frac{RT}{p}, \quad (7.12)$$

La expansibilidad volumétrica α y la compresibilidad β se definen como:

$$\alpha := \frac{1}{\tilde{V}} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial T} \right)_p, \quad \beta := -\frac{1}{\tilde{V}} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial p} \right)_T, \quad (7.13)$$

y para el gas ideal:

$$\alpha = \frac{1}{T}, \quad \beta = \frac{1}{p}, \quad (7.14)$$

que implica que:

$$\frac{1}{\tilde{V}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tilde{V}} \right)_T = 0, \quad (7.15)$$

que indica que para gases ideales, con ecuación de estado (7.11) la energía interna es función únicamente de la temperatura $\varepsilon = \varepsilon(T)$ en el caso particular que $\varepsilon = c_v T$, donde la capacidad

térmica a volumen constante c_v es constante, se habla de un gas calóricamente ideal o un gas politrópico, es posible relacionar c_p , la capacidad calorífica a presión constante $c_p = \partial \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p$ y c_v mediante la relación general:

$$c_p = c_v + \frac{\alpha^2 T \tilde{V}}{\beta}, \quad (7.16)$$

para gases ideales se convierte en:

$$c_p - c_v = R, \quad (7.17)$$

Se define el cociente de calores específicos

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (7.18)$$

utilizando (7.17) se obtiene:

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad (7.19)$$

para un gas politrópico, γ es una constante y para un gas térmicamente ideal γ es función de la temperatura.

Para determinar la ecuación de estado politrópica es necesario determinar las capacidades caloríficas específicas y se hace con el siguiente argumento.

Una molécula tiene \mathcal{N} grados de libertad, tres de los cuales son traslacionales, otros pueden ser rotacionales o vibratorios. De la teoría cinética se sigue que el valor promedio de la energía es $\frac{1}{2}kT$ con k la constante de Boltzman, y el teorema de equipartición nos dice que es el mismo para cada grado de libertad. La energía promedio total para N moléculas es:

$$N \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathcal{N} N k T, \quad (7.20)$$

y por lo tanto la energía interna específica es:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mathcal{N} R T, \quad (7.21)$$

utilizando la expresión para c_v :

$$c_v = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{N} R, \quad (7.22)$$

se llega a la siguiente expresión:

$$c_p = \frac{\mathcal{N} + 2}{2} R, \quad (7.23)$$

sustituyendo el coeficiente de calores específicos:

$$\gamma = \frac{\mathcal{N} + 2}{\mathcal{N}}, \quad (7.24)$$

y de la ecuación de gases ideales térmicos (7.12) se tiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mathcal{N} p \tilde{v}, \quad (7.25)$$

de las expresiones (7.17, 7.22, 7.23)

$$M = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad (7.26)$$

se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{pv}{\gamma - 1} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (7.27)$$

que es la expresión para la energía interna específica. De la primera ley, asumiendo que la cantidad de calor es proporcional a la entropía S mediante la temperatura $\Delta Q = TdS$

$$TdS = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{dp}{\rho(\gamma - 1)} - \frac{p}{\gamma - 1} \frac{d\rho}{\rho^2} - \frac{dp}{\rho(\gamma - 1)} - \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (7.28)$$

que en el caso de un gas politrópico, s es constante con lo que se obtiene:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{p\gamma}{\rho^2} d\rho. \quad (7.29)$$

que después de integrarse:

$$p = \kappa\rho^\gamma. \quad (7.30)$$

en donde la constante de integración es función de la entropía.

En el caso relativista el tensor de energía momento para el fluido perfecto es:

$$T^{\mu\nu} = \rho hu^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (7.31)$$

en donde ρ es la densidad de masa en reposo, p la presión y h la entalpía específica definida como $h = 1 + \varepsilon + p/\rho$ con ε la energía interna específica. u^μ es la cuadrivelocidad del fluido y $g_{\mu\nu}$ define la métrica del espacio tiempo. Para dar una descripción conveniente de la dinámica de fluidos en Relatividad General, es necesario introducir algunos conceptos que se definen en las siguientes secciones.

7.3 Variables ADM

Considerando un espacio tiempo \mathcal{M} que permite una foliación, podemos llenarlo con hipersuperficies Σ_t parametrizadas por una función de tiempo global t [95]. Las hipersuperficies quedan definidas por la condición $t = cte$. Un campo vectorial importante en la descomposición 3+1 es el vector t^μ que forma el conjunto de vectores tangentes a las curvas dibujadas por $x^i = cte$, con x^i las coordenadas espaciales. En el contexto de la formulación 3+1 de la Relatividad General, la dinámica del espacio-tiempo estará dada por la evolución de la tres-geometría. Las hipersuperficies representan una familia de subespacios Riemannianos de dimensión tres dotados de una métrica inducida sobre la variedad tridimensional. Resulta natural considerar a la tres-métrica inducida por g_{ab} sobre Σ_t como una variable dinámica.

Se asume que se puede definir un sistema de coordenadas adaptadas locales sobre Σ_t tal que $x^\nu = (t, x^1, x^2, x^3)$ representa también un sistema local de coordenadas de \mathcal{M} , es decir, las hipersuperficies pueden representarse por el sistema de ecuaciones paramétricas $x^\mu = x^\mu(x^a, t)$.

El vector de corrimiento se define como la proyección del vector t^ν sobre la hipersuperficie Σ_t

$$\beta^\mu := P^\mu{}_\nu t^\nu, \quad P^\mu{}_\nu := \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu. \quad (7.32)$$

descomponemos entonces el vector t^μ , ortogonalmente como:

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu, \quad (7.33)$$

En donde se ha introducido α la función de lapso, como la proyección del vector t^μ a lo largo del vector normal n^μ . Hay que notar que la elección de las funciones de lapso y corrimiento no están dadas a priori por la geometría de las hipersuperficies Σ_t sino se pueden fijar a cada instante de tiempo para indicar la forma en que evolucionan las hipersuperficies.¹

Puesto que estamos considerando el sistema de coordenadas adaptadas podemos obtener las componentes contravariantes del vector $n_\alpha := (-\alpha, 0, 0, 0)$. Además, gracias a la condición de normalización, encontramos que su componente temporal covariante es $n^t = 1/\alpha$ y por la definición del vector de corrimiento:

$$\beta^t = 0,$$

lo cual implica por (7.33) que:

$$n^\alpha = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha). \quad (7.34)$$

Si se utilizan las componentes contravariantes del vector normal y la condición de normalización, se puede encontrar la componente g^{00} a partir de:

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{00} \alpha^2 = -1,$$

por lo cual $g^{00} = -1/\alpha^2$. La tres-métrica es:

$$\gamma^{ij} = g^{ij} + n^i n^j, \quad (7.35)$$

y si se escribe la métrica en forma matricial:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

con inversa:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^i \beta_i & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}. \quad (7.37)$$

El elemento de línea queda como:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (7.38)$$

las variables α , β_i y γ_{ij} se conocen como variables ADM², que corresponden a las diez componentes linealmente independientes de la métrica $g_{\mu\nu}$.

¹Sin embargo que se requiere que t^μ no sea tangente a la hipersuperficie.

²Arnowitt-Deser-Misner propusieron éstas variables fundamentales en la descomposición 3+1.[96]

Un concepto fundamental en la formulación Einsteiniana de la gravedad es el de curvatura, ya que es así como se describe el espacio-tiempo se define la curvatura “extrínseca” o segunda forma fundamental como:

$$K_{ij} = \gamma_i^k \nabla_k n_j, \quad (7.39)$$

que es la proyección sobre la hipersuperficie del cambio (expresado por la derivada covariante ∇_k) de su vector normal y puede escribirse en forma equivalente como:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{ij}, \quad (7.40)$$

donde \mathcal{L}_n se refiere a la derivada de Lie en dirección del vector normal³.

Basta utilizar la linealidad de la derivada de Lie para escribirla en términos del vector de corrimiento como:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} - D_j \beta_i - D_i \beta_j \right), \quad (7.41)$$

donde se ha introducido D_i que se refiere al operador de derivada covariante compatible con γ_{ij} . Es importante señalar que esta ecuación es puramente geométrica y corresponde a la evolución de la tres métrica:

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + D_j \beta_i + D_i \beta_j, \quad (7.42)$$

7.4 Observadores Eulerianos

En la formulación euleriana de la hidrodinámica, el sistema de referencia desde el cual se hace la descripción del fluido, está formado por observadores que se mueven perpendicularmente a las superficies Σ_t . En otras palabras el sistema euleriano consiste en la base de vectores (n^μ, ∂_i) . En un sistema coordinado \mathcal{S} se tiene:

$$u^\mu = \frac{(dt, dx^i)}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau} \right). \quad (7.43)$$

En el sistema de referencia euleriano, por otra parte:

$$u^\mu = \frac{(\alpha dt, \beta^i dt + dx^i)}{d\tau} = (\alpha u^0, u^i + \beta^i u^0) = \alpha u^0 \left(1, \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha} \right). \quad (7.44)$$

y el factor de Lorentz:

$$W = -n_\mu u^\mu = \alpha u^0 \quad (7.45)$$

³La curvatura extrínseca de una hipersuperficie no tiene significado para la tres geometría concebida por sí misma, adquiere su significado e importancia al ser considerada inmersa en una variedad de dimensión mayor.

Se define la 3-velocidad como:

$$v^i = \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha}. \quad (7.46)$$

Para encontrar la forma covariante asociada, se utiliza la métrica inducida en la superficie γ_{ij}

$$\begin{aligned} v_i &= \gamma_{ij}v^j = \gamma_{ij} \left(\frac{u^j}{\alpha u^0} + \frac{\beta^j}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha u^0} (\gamma_{ij}u^j + \beta_i u^0) \\ &= \frac{1}{\alpha u^0} (g_{ij}u^j + g_{i0}u^0) \\ &= \frac{u_i}{\alpha u^0} \end{aligned}$$

y por tanto el factor de Lorentz se puede calcular en términos de la métrica espacial y la 3-velocidad a partir de la condición de ortonormalidad de la 4-velocidad, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -1 &= g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \\ &= -\alpha^2(u^0)^2 + \gamma_{ij}(u^i + \beta^i u^0)(u^j + \beta^j u^0) \\ &= -\alpha^2(u^0)^2 \left[1 - \gamma_{ij} \left(\frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \left(\frac{u^j}{\alpha u^0} + \frac{\beta^j}{\alpha} \right) \right] \\ &= -\alpha^2(u^0)^2 (1 - \gamma_{ij}v^i v^j). \end{aligned}$$

de modo que se recupera la forma conocida para el factor de Lorentz.

$$W = \alpha u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{ij}v^i v^j}}. \quad (7.47)$$

Las ecuaciones de la hidrodinámica relativista se pueden derivar de las leyes fundamentales de conservación. La conservación del número de bariones y la conservación de la energía-momento. Para ver estas derivaciones primero introducimos, algunas variables, el flujo de masa en reposo

$$J^\mu = \rho u^\mu, \quad (7.48)$$

y las variables conservadas que se definen como:

$$D = -J^\mu n_\mu = -\rho u^\mu n_\mu = \rho W, \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} S_j &= -T^\mu_\nu n_\mu (\partial_j)^\nu = \alpha T_j^0 = \alpha \rho h u^0 u_j = \rho h W^2 \frac{u_j}{W} \\ &= \rho h W^2 v_j \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$E = T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = \alpha^2 T^{00} = \alpha [\rho h u^0 u^0 + p g^{00}] \quad (7.51)$$

$$= \rho h W^2 - p \quad (7.52)$$

Es conveniente, por propósitos numéricos y para recuperar el límite newtoniano en las ecuaciones dinámicas, definir una variable que es la densidad de energía menos la densidad. [97]

$$\tau = E - D \quad (7.53)$$

Con las definiciones anteriores, podemos escribir el tensor de energía momento del fluido perfecto en términos de las variables conservadas,

$$T^{00} = \frac{1}{\alpha^2} E, \quad (7.54)$$

$$T^{0i} = \frac{1}{\alpha} \rho h W^2 \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \frac{\beta^i}{\alpha}, \quad (7.55)$$

$$T^0{}_i = \frac{1}{\alpha} S_i, \quad (7.56)$$

$$T^i{}_j = S_j \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \delta^i{}_j. \quad (7.57)$$

La conservación de número de bariones esta expresada por: $J^\mu{}_{;\mu} = 0$

$$\begin{aligned} J^\mu{}_{;\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} J^\mu)_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \rho u^\mu)_{;\mu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\alpha \sqrt{\gamma} \rho \frac{W}{\alpha} \right)_{;0} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \rho W \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right]_{;i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{\gamma} D)_{;0} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} D \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right]_{;i} \end{aligned}$$

En el sistema euleriano los vectores base \mathbf{e}_μ se expresan como:

$$\mathbf{e}_\mu = \{\mathbf{n}, \partial_i\} \quad (7.58)$$

y al expresar la ley de conservación en este sistema tendremos:

$$(T^\mu{}_\nu (\mathbf{e}_\gamma)^\nu)_{;\mu} = T^\mu{}_{\nu;\mu} (\mathbf{e}_\gamma)^\nu + T^{\mu\nu} (\mathbf{e}_\gamma)_{\nu;\mu} = T^{\mu\nu} ((\mathbf{e}_\gamma)_{\nu;\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda (\mathbf{e}_\gamma)_\lambda) \quad (7.59)$$

tendremos para $\gamma = 0$

$$(T^\mu{}_\nu (\mathbf{e}_0)^\nu)_{;\mu} = (T^{\mu\nu} n_\nu)_{;\mu} = (-\alpha T^{\mu 0})_{;\mu} \quad (7.60)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}} [(\sqrt{-g} \alpha T^{00})_{;0} + (\sqrt{-g} \alpha T^{i0})_{;i}] \quad (7.61)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{\gamma} \alpha^2 T^{00})_{;0} + \left(\sqrt{-g} \alpha \left[\frac{1}{\alpha} \rho h W^2 \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \frac{\beta^i}{\alpha} \right] \right)_{;i} \right] \quad (7.62)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{\gamma} E)_{;0} + \left(\sqrt{-g} \left[E \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p v^i \right] \right)_{;i} \right] \quad (7.63)$$

y

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} ((\mathbf{e}_0)_{\nu;\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda (\mathbf{e}_0)_\lambda) &= -T^{\mu 0} (\alpha)_{;\mu} + \alpha \Gamma_{\nu\mu}^0 T^{\mu\nu} \\ &= \alpha [-T^{\mu 0} (\ln \alpha)_{;\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^0 T^{\mu\nu}], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{\gamma} E)_{,0} + \left(\sqrt{-g} \left[E \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p v^i \right] \right)_{,i} \right] = \alpha [T^{\mu 0} (\ln \alpha)_{,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^0 T^{\mu\nu}], \quad (7.64)$$

si consideramos ahora $\gamma = j$:

$$\begin{aligned} (T^\mu{}_\nu (\mathbf{e}_0)^\nu)_{;\mu} &= (T^\mu{}_j)_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [(\sqrt{-g} T^\mu{}_j)_{,\mu}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} [(\sqrt{-g} T^0{}_j)_{,0} + (\sqrt{-g} T^i{}_j)_{,i}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{\gamma} S_j)_{,0} + \left(\sqrt{-g} \left[S_j \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \delta_j^i \right] \right)_{,i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} \left((\mathbf{e}_j)_{\nu,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda (\mathbf{e}_j)_\lambda \right) &= T^{\mu\nu} \left[(g_{\nu\lambda} (\mathbf{e}_j)^\lambda)_{,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda\sigma} (\mathbf{e}_j)^\sigma \right] \\ &= T^{\mu\nu} (g_{\nu j,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda j}), \end{aligned}$$

de modo que tendremos, después de igualar términos:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{\gamma} S_j)_{,0} + \left(\sqrt{-g} \left[S_j \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \delta_j^i \right] \right)_{,i} \right] = T^{\mu\nu} (g_{\nu j,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda j}), \quad (7.65)$$

Las ecuaciones se escriben de manera compacta como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} \mathbf{f}^i) = \mathbf{S} \quad (7.66)$$

con el vector de estado

$$\mathbf{q} = (D, S_j, \tau), \quad (7.67)$$

los flujos

$$\mathbf{f}^i = \left(D \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right), S_j \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \delta_j^i, \tau \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p v^i \right), \quad (7.68)$$

y las fuentes \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \alpha \sqrt{\gamma} \left(0, T^{\mu\nu} (g_{\nu j,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda j}), \alpha (T^{\mu 0} (\ln \alpha)_{,\mu} - T^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0) \right). \quad (7.69)$$

Las ecuaciones se escriben de forma conservativa para explotar su carácter hiperbólico y para construir un esquema numérico basado en la solución de problemas de Riemann locales como los que describimos en capítulos anteriores. Para el resolutor aproximado de Roe por ejemplo, necesitamos los vectores y valores propios de la matriz $\frac{\partial \mathbf{f}^i}{\partial \mathbf{q}}$ y para el HLLC los valores propios.

Los correspondientes valores propios en la dirección x , para $\frac{\partial \mathbf{f}^x}{\partial \mathbf{q}}$ son:

$$\lambda_0 = \alpha v^x - \beta^x \quad (\text{con multiplicidad tres}), \quad (7.70)$$

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \frac{\alpha}{1 - v^2 c_s^2} \left\{ v^x (1 - c_s^2) \pm c_s \sqrt{(1 - v^2) [\gamma^{xx} (1 - v^2 c_s^2) - v^x v^x (1 - c_s^2)]} \right\} \\ &= \beta^x, \end{aligned} \quad (7.71)$$

con c_s la velocidad local del sonido $hc_s^2 = \chi + \frac{p}{\rho^2}\kappa$, con $\chi \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}$ y $\kappa \equiv \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$. Los vectores propios son:

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{\mathcal{K}}{hW}, v_x, v_y, v_z, 1 - \frac{\mathcal{K}}{hW} \right), \quad (7.72)$$

$$\mathbf{r}_2 = (Wv_y, h(\gamma_{xy} + 2W^2v_xv_y), h(\gamma_{yy} + 2W^2v_yv_y), h(\gamma_{zy} + 2W^2v_zv_y), Wv_y(2hW - 1)), \quad (7.73)$$

$$\mathbf{r}_3 = (Wv_z, h(\gamma_{xz} + 2W^2v_xv_z), h(\gamma_{yz} + 2W^2v_yv_z), h(\gamma_{zz} + 2W^2v_zv_z), Wv_z(2hW - 1)), \quad (7.74)$$

$$\mathbf{r}_\pm = (1, hWC_\pm^x, hWv_y, hWv_z, hW\tilde{\mathcal{A}}_\pm^x - 1), \quad (7.75)$$

en donde se utilizaron las siguientes definiciones:

$$\mathcal{K} \equiv \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa} - c_s^2}, \quad \tilde{\kappa} \equiv \kappa/\rho, \quad C_\pm^x \equiv v_x - \mathcal{V}_\pm^x, \quad (7.76)$$

$$\mathcal{V}_\pm^x \equiv \frac{v^x - \Lambda_\pm^x}{\gamma^{xx} - v^x\Lambda_\pm^x}, \quad \tilde{\mathcal{A}}_\pm^x \equiv \frac{\gamma^{xx} - v^xv^x}{\gamma^{xx} - v^x\Lambda_\pm^x}, \quad (7.77)$$

$$\Lambda_\pm^i \equiv \tilde{\lambda}_\pm + \tilde{\beta}^i, \quad \tilde{\lambda} \equiv \lambda/\alpha, \quad \tilde{\beta}^i \equiv \beta^i/\alpha. \quad (7.78)$$

Algunas veces, sobre todo cuando se trabaja en espacios tiempo dinámicos, es mejor tener las fuentes (7.69) en términos de las variables ADM en vez de la métrica completa $g_{\mu\nu}$, su cálculo requiere principalmente de los 4-símbolos de Christoffel escritos en las variables ADM que se encuentran en [23], después de desarrollar, los términos de fuentes quedan como:

Para S_j (sin el término $\alpha\sqrt{\gamma}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{S_j} &= T^{\mu\nu} (g_{\nu j, \mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\lambda j}) = T^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu j} \\ &= T^{00} \left(\frac{1}{2} \beta^l \beta^m \partial_j \gamma_{lm} - \alpha \partial_j \alpha \right) \\ &\quad + T^{0i} (\beta^l \partial_j \gamma_{il}) \\ &\quad + \frac{1}{2} T^{lm} \partial_j \gamma_{lm} \\ &\quad + \frac{\rho h W^2 v_l}{\alpha} \partial_j \beta^l. \end{aligned} \quad (7.79)$$

y para τ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\tau &= \alpha (T^{\mu 0} (\ln \alpha)_{, \mu} - T^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0) \\ &= T^{00} (\beta^i \beta^j K_{ij} - \beta^i \partial_i \alpha) \\ &\quad + T^{0i} (-\partial_i \alpha + 2\beta^j K_{ij}) \end{aligned} \quad (7.81)$$

$$+ T^{lm} K_{lm}. \quad (7.82)$$

7.5 Reconstrucción de las variables primitivas

La solución del problema de Riemann requiere conocer el valor de la presión y sus derivadas, por ejemplo para calcular la velocidad del sonido en ese medio. Dada la relación funcional, entre las variables conservadas y las primitivas, un procedimiento para ir de un lado a otro no puede darse en forma cerrada, en su lugar se debe dar un algoritmo iterativo (o un resolutor para ecuaciones algebraicas en el caso de un gas ideal) que consume tiempo de cómputo, así que se vuelve necesario dar un algoritmo para recuperar las variables primitivas que sea eficiente, aquí se presenta uno muy conocido [75] y es el que utilizamos en los códigos que presentaremos más tarde, se basa en la ecuación de estado para obtener la presión partiendo de las variables conservadas. El algoritmo comienza tomando un valor \bar{p} de prueba, usualmente el obtenido en un paso anterior, con este valor se puede calcular

$$v_i(\bar{p}) = \frac{S_i}{\tau + \bar{p} + D} \quad (7.83)$$

y luego calcular el factor de Lorentz,

$$W(\bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^i(\bar{p})v_i(\bar{p})}}, \quad (7.84)$$

lo que permite encontrar la densidad

$$\rho(\bar{p}) = \frac{D}{W(\bar{p})} \quad (7.85)$$

y la energía interna,

$$\varepsilon = \frac{\tau + D(1 - W(\bar{p})) + p(1 - W(\bar{p})^2)}{DW(\bar{p})}. \quad (7.86)$$

El valor de prueba \bar{p} no satisface la ecuación de estado $p = p(\rho_0, \varepsilon)$ así que se debe tener un error cometido con la aproximación de la forma:

$$f(\bar{p}) = p(\rho_0, \varepsilon) - \bar{p}, \quad (7.87)$$

El cero de $f(\bar{p})$ en el dominio físicamente aceptable $\bar{p} \in (p_{\min}, \infty)$ determina la presión que satisface la ecuación de estado. La monotonicidad de $f(p)$ en el dominio asegura la unicidad de la solución. Donde p_{\min} , se define como [98]:

$$p_{\min} = |S^i S_i| - \tau - D, \quad (7.88)$$

que se obtiene tomando en cuenta que $v = v^i v_i \leq 1$. Las raíces de la ecuación (7.87) se obtienen mediante un método tipo Newton-Raphson.

Capítulo 8

Aplicaciones astrofísicas

8.1 Acreción esférica hacia un agujero negro

La acreción de Michel (o acreción de Bondi en el caso no relativista [99]), involucra la caída radial y esféricamente simétrica de un gas hacia un agujero negro. En la aproximación de fluido de prueba no se considera la autogravedad del gas.

Comencemos considerando un agujero negro de Schwarzschild, rodeado por una nube de gas. Esta puede ser una aproximación razonable a una situación real de un agujero o una estrella, una vez que el momento angular, el campo magnético y el movimiento de bulto del gas con respecto al agujero pueden despreciarse.

Para tipos más generales de acreción como sistemas binarios cercanos o núcleos activos de galaxias, la acreción esféricamente simétrica y radial deja de ser una buena aproximación [100]. Sin embargo, el problema de acreción esférica es de gran importancia teórica porque introduce algunos de los conceptos principales que tienen validez en problemas más generales, además, es posible dar un tratamiento exacto que permite ganar algo de intuición para problemas mucho más complicados.

Para tratar este problema matemáticamente se considera el espacio tiempo esféricamente simétrico descrito por la métrica de Schwarzschild descrito en coordenadas de Eddington Finkelstein.

Las ecuaciones básicas son las leyes de conservación de masa y flujo de energía:

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu}(\sqrt{-g} \rho u^{\mu}) = 0, \quad (8.1)$$

$$\nabla_{\mu}(T_0^{\mu}) = 0, \quad (8.2)$$

suponiendo que el fluido se mueve únicamente en dirección radial, $u^{\mu} = (u^t, u^r, 0, 0)$ y las variables del fluido son independientes de θ y ϕ , suponemos además que se ha alcanzado un estado estacionario, $\partial_t = 0$

$$\partial_r(\sqrt{-g} \rho u^r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} \rho u^r = C_1, \quad (8.3)$$

y

$$\partial_r(\sqrt{-g}\rho h u^r u_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g}\rho h u^r u_t = C_2, \quad (8.4)$$

si dividimos la ecuación (8.4) entre (8.3) y elevamos al cuadrado siguiendo el artículo de Michel [101]

$$(hu_t)^2 = C_3, \quad (8.5)$$

con $C_3 = C_2/C_1$ y al sacar la derivada total

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(hu_t)^2 d\rho + \frac{\partial}{\partial u}(hu_t)^2 du + \frac{\partial}{\partial r}(hu_t)^2 dr = 0, \quad (8.6)$$

en donde $u = u^r$. Al expandir las derivadas se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(hu_t)^2 d\rho = 2hu_t^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho h}{\rho} \right) d\rho = 2hu_t^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho h)}{\partial \rho} - \frac{\rho h}{\rho^2} \right) d\rho, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(hu_t)^2 du = 2h^2 u_t \frac{\partial u_t}{\partial u} du, \quad (8.8)$$

para obtener la dependencia de u_t con u debemos trabajar un poco más con el espacio tiempo, de la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$ se obtiene que:

$$g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{tr}u^t u + g_{rr}u^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad u^t = \frac{1}{g_{tt}} \left(-g_{rr}u \pm \sqrt{(g_{tr}^2 - g_{tt}g_{rr})u^2 - g_{tt}} \right), \quad (8.9)$$

y en el espacio tiempo de Schwarzschild

$$g_{tr}^2 - g_{tt}g_{rr} = \left(\frac{2M}{r} \right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{2M}{r} \right) = 1, \quad (8.10)$$

por lo tanto

$$u^t = \frac{1}{g_{tt}} \left(-g_{rr}u \pm \sqrt{u^2 - g_{tt}} \right), \quad (8.11)$$

al bajar el índice para obtener la componente covariante $u_t = g_{tt}u^t + g_{rt}u$ se obtiene

$$u_t = \pm \sqrt{u^2 - g_{tt}}, \quad (8.12)$$

de modo que $\frac{\partial u_t}{\partial u} = \pm \frac{u}{u_t}$. Sustituyendo en (8.8)

$$\frac{\partial}{\partial u}(hu_t)^2 du = 2h^2 u_t \frac{\partial u_t}{\partial u} du = 2h^2 u_t \left(\frac{u}{u_t} \right) du = 2h^2 u du, \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(hu_t)^2 dr &= h^2 2u_t \frac{\partial u_t}{\partial r} = h^2 2u_t \frac{1}{2u_t} \left(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) dr \\ &= h^2 \left(\frac{2M}{r^2} \right) dr. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Sumando todos los términos de la derivada total y dividiendo entre h^2 se obtiene:

$$2u_t^2 \left(\frac{1}{\rho h} \frac{\partial(\rho h)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) d\rho + 2u du + \left(\frac{2M}{r^2} \right) dr = 0, \quad (8.15)$$

que se puede escribir de la siguiente forma:

$$2u_t^2 V^2 \frac{d\rho}{\rho} + 2u du + \left(\frac{2M}{r^2} \right) dr, \quad (8.16)$$

en donde

$$V^2 = \frac{\partial \ln(\rho h)}{\partial \ln(\rho)} - 1. \quad (8.17)$$

Si se sustituye que $\sqrt{-g} = r^2$ en (8.3) y se deriva, se llega a:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + 2\frac{dr}{r} = 0, \quad (8.18)$$

al sustituir $\frac{d\rho}{\rho}$ en (8.16) se obtiene:

$$-2u_t^2 V^2 \left(\frac{du}{u} + 2\frac{dr}{r} \right) + 2u du + \left(\frac{2M}{r^2} \right) dr = 0. \quad (8.19)$$

Al agrupar y dividir entre $-2u_t^2$ obtenemos la ecuación.

$$\frac{du}{u} \left(V^2 - \frac{u^2}{u_t^2} \right) + \frac{dr}{r} \left(2V^2 - \frac{M}{ru_t^2} \right) = 0. \quad (8.20)$$

Para encontrar los perfiles, tanto en la densidad como en la velocidad radial, es necesario, suponer una ecuación de estado, en este caso tomaremos la ecuación para un polítopo de la forma $p = \kappa \rho^\gamma$. Con esta ecuación cerramos el sistema, solo nos queda fijar las constantes C_1, C_2 que aparecieron al integrar las ecuaciones de conservación. La forma más común de hacerlo es dar la posición del punto crítico, es decir el punto en donde la velocidad del fluido coincide con la velocidad del sonido así como la densidad en ese punto, hay que recordar que en infinito la velocidad de las partículas es cero, mientras que cerca del agujero negro tendrán una velocidad muy grande, de hecho, comparable con la velocidad de la luz.

Si denotamos a esta posición como r_c El punto crítico se localiza donde los factores entre paréntesis de la ecuación (8.20) se anulan simultáneamente

$$u_c^2 = \frac{M}{2r_c}, \quad V_c^2 = \frac{u_c^2}{1 - 3u_c^2} = \frac{u}{u_t}. \quad (8.21)$$

Al sustituir los valores de r_c y ρ_c es posible encontrar la constante κ como sigue:

La entalpía, multiplicada por la densidad, para un polítopo es

$$\rho h = \rho + p + \rho \epsilon = \rho + \frac{\kappa \gamma \rho^\gamma}{\gamma - 1}. \quad (8.22)$$

Sustituyendo en la expresión (8.17), después de simplificar se llega a:

$$V^2 = \frac{(\gamma - 1)\kappa \gamma \rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1 + \kappa \gamma \rho^{\gamma-1}}, \quad (8.23)$$

con esta expresión, se obtiene el valor de la constante del polítropo κ

$$\kappa = \frac{(\gamma - 1)V_c^2}{\gamma\rho^{\gamma-1}(\gamma - 1 - V_c^2)} \quad (8.24)$$

que se utiliza para encontrar la entalpía y finalmente sustituir en (8.3) y (8.4) para tener el valor de las constantes. Se define una función $f = f(u, r) = h^2u_t^2 - C_3$, únicamente de u y r con:

$$h^2u_t^2 - C_3 = 1 + \frac{\kappa\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1} = 1 + \frac{\kappa\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{C_1}{ur^2} \right) - C_3. \quad (8.25)$$

Para cada valor de r en el dominio debemos encontrar el valor de u que satisfaga $f = 0$, y luego sustituir en (8.3, 8.4) para encontrar la densidad. Usualmente, no se requiere la componente radial de la cuadrivelocidad, sino la 3- velocidad del fluido ver [102],

$$v^r = \frac{1}{\alpha}(u^r/u^t + \beta^r) \quad (8.26)$$

que en el caso de Schwarzschild queda:

$$v^r = \sqrt{\frac{r + 2M}{r}} \left(\frac{u(r - 2M)}{2Mu - \sqrt{u^2 + 1} - 2M/r} + \frac{2M}{r + 2M} \right), \quad (8.27)$$

Al conocer el perfil de la velocidad y la densidad se resuelve completamente el problema de acreción estacionara hacia un agujero negro. Como paso siguiente, consideraremos la acreción dinámica del gas, permitiendo que las variables de estado dependan del tiempo. Para atacar este problema necesitamos resolver las ecuaciones de hidrodinámica relativista en un espacio de Schwarzschild y por lo tanto, utilizar las herramientas que hemos desarrollado en secciones anteriores aplicados a las ecuaciones de Euler relativistas en simetría esférica.

Como ejemplo de solución numérica, se ha tratado de reproducir la solución estacionaria de la acreción esférica y se han considerado además, pequeñas desviaciones de la solución estacionaria. A continuación se escriben de manera explícita, el vector de estado, los flujos, la métrica y las componentes de la curvatura extrínseca que se utilizan para resolver numéricamente la evolución del fluido de prueba.

En simetría esférica, las componentes del vector de estado que describen al flujo, dentro, en la formulación de Valencia son:

$$\mathbf{u} = (D, S_r, \tau), \quad (8.28)$$

Para encontrar la evolución de este vector según las ecuaciones de Euler se necesitan los flujos, escritos en este sistema de coordenadas particular son.

$$\mathbf{f} = (Dv_r, S_r v + p, S_r - Dv_r), \quad (8.29)$$

las componentes del tensor de energía momento del fluido perfecto, diferentes de cero son: son:

$$T^{tt} = \rho h u^t u^t + p g^{tt} = \frac{1}{\alpha^2} (\tau + D), \quad (8.30)$$

$$T^{tr} = (\tau + p + D) \frac{1}{\alpha} \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) + \frac{\beta^r}{\alpha^2}, \quad (8.31)$$

$$T^{\theta\theta} = p g^{\theta\theta}, \quad (8.32)$$

$$T^{\phi\phi} = p g^{\phi\phi}. \quad (8.33)$$

Recordando la forma matricial de la métrica inversa en términos de las variables 3 + 1

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} + \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Para el espacio tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington Finkelstein

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m}{r}}}, \quad \beta^r = \frac{2m}{r} \frac{1}{1 + \frac{2m}{r}}, \quad (8.35)$$

Las componentes de la métrica espacial son,

$$\gamma_{rr} = 1 + \frac{2m}{r}, \quad (8.36)$$

$$\gamma_{\theta\theta} = r^2, \quad \gamma_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta), \quad (8.37)$$

y la curvatura:

$$K_{rr} = -\frac{2m}{r^2} \frac{1 + \frac{m}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2m}{r}}}, \quad K_{\theta\theta} = 2m \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m}{r}}} \quad (8.38)$$

la traza de la curvatura es:

$$K = \frac{2m}{r^2} \frac{1 + \frac{3m}{r}}{\left(1 + \frac{2m}{r}\right)^{3/2}} \quad (8.39)$$

Con estas componentes explícitas podemos calcular las fuentes para las ecuaciones de evolución del fluido.

8.1.1 Acreción tipo Michel como dato inicial

Como primer ejemplo de una evolución hidrodinámica, consideramos el modelo de Michel descrito anteriormente. Aunque se refiere a una solución estacionaria, un código numérico debe ser capaz de mantener esta solución y por lo tanto constiyute una primera prueba para la evolución.

Hemos considerado soluciones del gas acretando cuando se tiene el punto crítico tanto dentro como fuera de la malla.

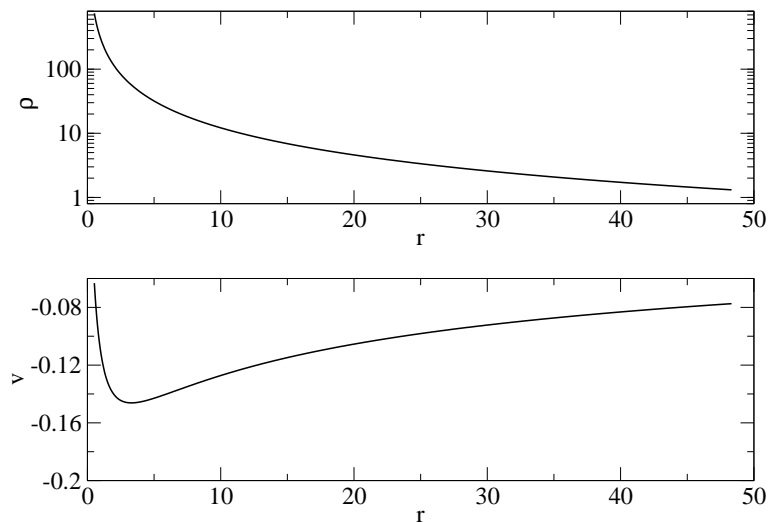


Figura 8.1: Densidad en escala logarítmica (panel superior) de la distribución de gas cayendo hacia el agujero negro, en el panel inferior se grafica la magnitud de la velocidad $v^i v_i$. El punto crítico está localizado en $r_c = 400$.

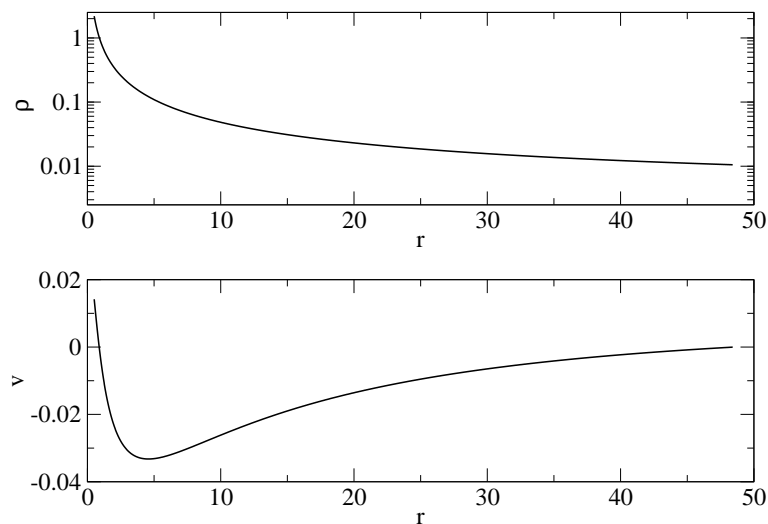


Figura 8.2: Al igual que en la figura 8.1. En este caso el punto crítico está localizado en $r_c = 8.0$

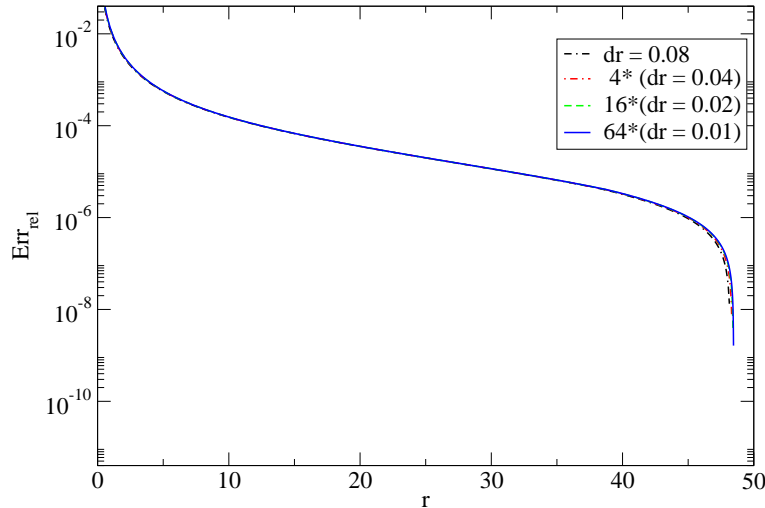


Figura 8.3: Error relativo $Err_{rel} = abs(\frac{\rho_M - \rho}{\rho_M})$ entre la solución estacionaria de Michel ρ_M a $t = 0$ y ρ después de $t \sim 500$ utilizando diferentes resoluciones. Err_{rel} está en escala logarítmica. Se ha multiplicado por 4,16,64, correspondiendo la resolución utilizada, para mostrar convergencia a segundo orden.

En la figura 8.1 se muestran los perfiles de densidad de masa y velocidad para el caso en que el punto crítico esta localizado fuera de la malla $r_c = 400$ con una densidad $\rho_c = 10^{-2}$.

En la figura 8.2 se muestra la velocidad cuando el punto crítico esta dentro de la malla $r_c = 8.0$

Se han hecho simulaciones utilizando resoluciones de $\Delta r = \{0.01, 0.02, 0.04\}$ de modo que los puntos en la malla numérica están en un intervalo de $0.5 \leq r \leq 48$, nótese que gracias a que estamos utilizando coordenadas de Eddington-Finkelstein, podemos considerar regiones interiores al horizonte de eventos. Como es natural, para verificar la validez de nuestros resultados tomamos el error relativo entre la solución exacta de Michel, con respecto a los datos obtenidos después de una evolución, en la figura 8.3 se muestra el error relativo a un tiempo $t \sim 500$. Los errores decrecen cuando la malla se refina. Como puede verse del comportamiento del error relativo bajo un refinamiento de la malla, el código es convergente a segundo orden en Δr para soluciones continuas.

8.1.2 Inyección de flujo a través de la frontera

Como segundo ejemplo, consideramos como dato inicial una distribución de densidad muy baja, representada por una perturbación en la solución de Michel de la forma

$$\rho = 10^{-5} \rho_M. \quad (8.40)$$

Luego, desde la frontera externa se inyecta flujo con densidad correspondiente a la solución de Michel desde un reservorio infinito. Lo que obtenemos es que se recupera la solución de Michel

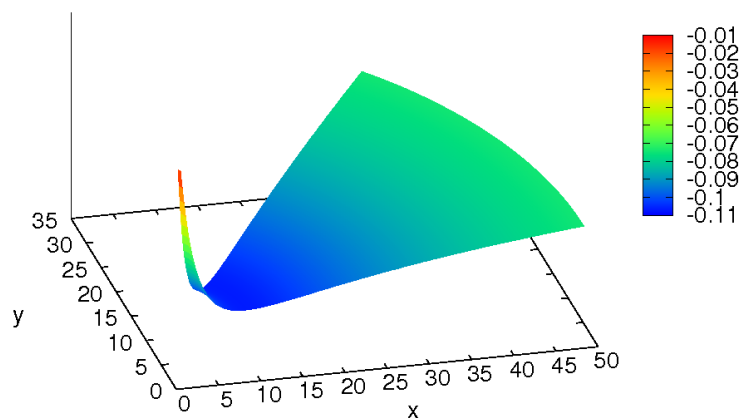


Figura 8.4: Proyección tridimensional de un corte en la velocidad de la figura 8.2

estacionaria transcurrido cierto tiempo, los valores de los parámetros para los datos iniciales que escogimos son $r_c = 400$ y $\rho_c = 10^{-2}$. Como resultado se muestra en la figura 8.6 el error relativo en la densidad una vez que se ha alcanzado el flujo estacionario.

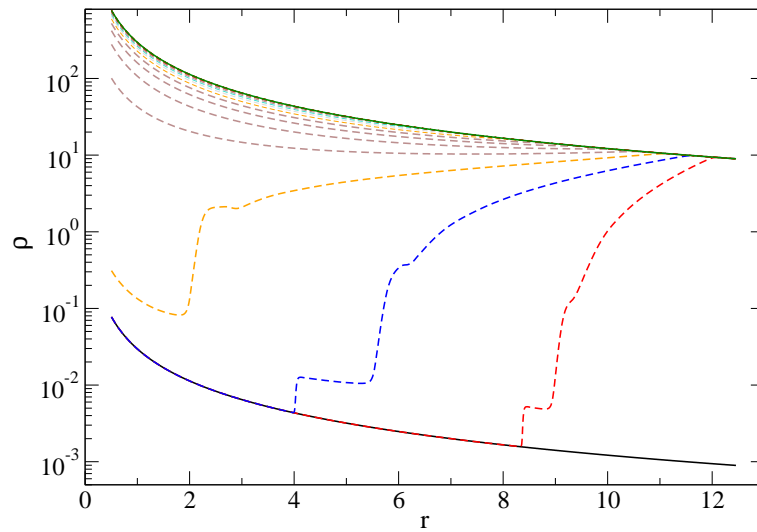


Figura 8.5: Se muestra la densidad en escala logarítmica, para un polítopo en caída radial cuando el punto crítico está dentro de la malla numérica, $r_c = 8$, y se inyecta flujo desde la frontera. Inicialmente hay una región de subdensidad, conforme pasa el tiempo, por la frontera externa se está inyectando un fluido con la densidad de Michel y se observa como este perfil domina la solución para alcanzar el estado estacionario.

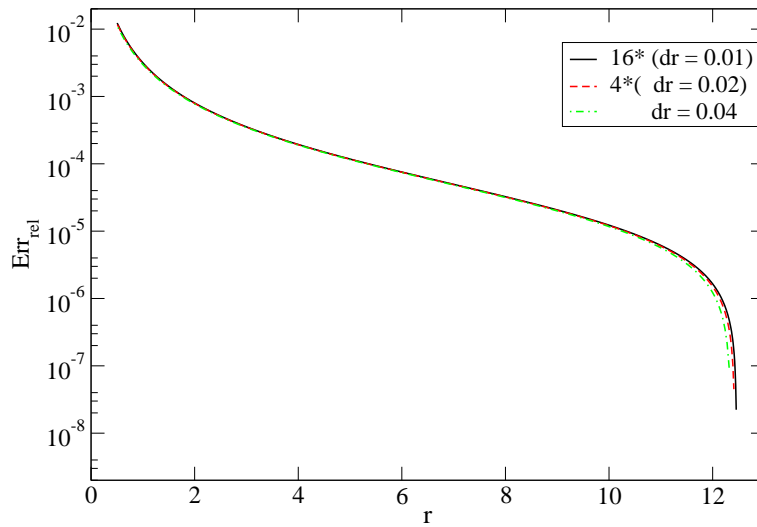


Figura 8.6: El error relativo (en escala logarítmica) entre la solución estacionaria de Michel y la que se alcanza con el código después de $t \sim 120$. Se multiplica por 4 y 16 para observar segundo orden de convergencia

8.2 Discos de acreción

Los discos de acreción están presentes en una gran variedad de sistemas astrofísicos y a todas las escalas espaciales, que van desde sistemas protoplanetarios hasta núcleos activos de galaxias [100]. Frecuentemente, en el centro de estos discos se encuentra un objeto compacto (enana blanca, estrella de neutrones o agujero negro). Los discos permiten, en principio, conocer las características más fundamentales del objeto central como son su masa, momento angular, carga, etc. En el caso de que éste sea un agujero negro, el estudio implica hacer observaciones, mediciones o en el mejor de los casos, predicciones aplicables a teorías de gravedad en el régimen de campo fuerte.

Los discos de acreción se forman cuando el entorno de un objeto masivo (el medio interestelar, circun nuclear o una estrella compañera si de lo que se trata es un sistema estelar binario) proporciona materia y energía que desciende el pozo de potencial gravitacional, liberando energía durante el proceso mediante disipación, y la radiación al exterior, además de que da la generación de calor debido a los esfuerzos viscosos actuando sobre el movimiento de la materia.

En esta sección se presentará el formalismo para estudiar discos de acreción alrededor de agujeros negros en el contexto de la relatividad numérica.

Los modelos aquí presentados asumen que el disco se encuentra en equilibrio hidrostático y que su autogravedad no es importante, se considera también que está descrito por una ecuación de estado barotrópica.

La cuadrivelocidad de los elementos de fluido se asume de la forma: $u^\mu = (u^t, 0, 0, u^\phi)$ y su velocidad angular Ω y momento angular por unidad de masa l como:

$$\Omega = u^\phi/u^t, \quad l = -u_\phi/u_t.$$

Se supone también que el espacio tiempo es estacionario, axialmente simétrico y las rotaciones conmutan con las traslaciones temporales ¹ de modo que esta descrito por una métrica de la forma:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{t\phi}dtd\phi + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (8.41)$$

que contiene a la métrica de Schwarzschild y la de Kerr como casos particulares.

Con las definiciones anteriores se tiene que:

$$\Omega = -\frac{g_{tt}l + g_{t\phi}}{g_{t\phi}l + g_{\phi\phi}}, \quad l = -\frac{g_{\phi\phi}\Omega + g_{t\phi}}{g_{t\phi}\Omega + g_{tt}} \quad (8.42)$$

Por otro lado, las ecuaciones de movimiento $h^\mu{}_i \nabla_\nu T^\nu{}_\mu = 0$ para un fluido perfecto (7.31) se escriben como:

$$\frac{\nabla_i p}{\rho h} = -\nabla_i \ln(u_t) + \frac{\Omega \nabla_i l}{1 - \Omega l}. \quad (8.43)$$

¹es decir existe un grupo uniparamétrico de curvas que son tipo tiempo, un grupo uniparamétrico de isometrías cuyas órbitas son cerradas y la acción de ambos grupos conmutan [103]

en donde h_i^k es el proyector a las superficies normales a u^μ . Su forma integral es:

$$\int_0^p \frac{dp}{\rho_0 h} = W_{in} - W = -\ln \frac{u_t}{(u_t)_{in}} + F(l),$$

$$F(l) = \int_{l_{in}}^l \frac{\Omega dl}{1 - \Omega l}.$$

La cantidad $\tilde{W} = \int_0^p \frac{dp}{\rho_0 h}$ es igual en el límite Newtoniano al potencial gravitacional más el término centrífugo y esta relación es la forma integral de la ecuación de equilibrio hidrostático [104], en infinito se debe tener $\tilde{W} = 0$.

De la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$ se obtiene:

$$(u_t)^2 = -\frac{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi} + 2l g_{t\phi} + l^2 g_{tt}}, \quad (8.44)$$

Aquí nos restringiremos al caso cuando la distribución de momento angular en el disco es constante, $l = l_0$ siguiendo la ref. [105] esto se hace para simplificar las ecuaciones y porque en algunos casos, puede considerarse que el disco sigue esta distribución [106]. Por lo tanto

$$\tilde{W}(r, \theta) - \tilde{W}_{in} = \ln(-u_t(r, \theta)) - \ln(-u_{in}(r, \theta)) \quad (8.45)$$

con \tilde{W}_{in} , una constante que se fija con el valor de \tilde{W} en infinito. Para calcular las variables hidrodinámicas, se consideran fluidos isentrópicos donde:

$$\tilde{W} = \int_0^p \frac{dp}{\rho_0 h} = \ln(u_t), \quad (8.46)$$

De (8.46) puede verse que la materia puede llenar las equipotenciales cerradas, ya que muestra la conexión de la distribución de la densidad con el potencial, una de estas superficies, dependiendo del valor del momento angular tiene un vértice o (*cusp*) por el cual acreta materia. Este punto se encuentra entre la órbita circular marginalmente acotada de una partícula libre r_{mb} y la órbita marginalmente estable, la prueba se basa en el hecho que la posición del centro del disco y el vértice pueden encontrarse de manera sencilla [106], en estos puntos el fluido se mueve libremente, no hay gradientes de presión ni de potencial ($\nabla_i \tilde{W} = 0 = \nabla_i p$) por lo tanto en estos puntos se tiene: $l_0 = l_k$ con l_k el momento angular kepleriano del movimiento circular.

El comportamiento de las superficies equipotenciales depende de la distribución de momento angular:

Las equipotenciales pueden ser cerradas $\tilde{W} < 0$, o abiertas $\tilde{W} > 0$, (se considera que el caso marginal $\tilde{W} = 0$ es cerrado en infinito). La geometría de las equipotenciales esta fija por el valor de l_0 , en particular, la presencia del vértice en el plano ecuatorial (en el cual las superficies equipotenciales se autointersectan formando un vértice, esta relacionada con las soluciones de

$$l_k(r) = l_0, \quad (8.47)$$

en donde l_k es el momento angular kepleriano para partículas de prueba [106]. Para entender esta relación hay que notar que los extremos locales del potencial $\tilde{W}(r, \theta) = \ln(u_t)$ en el plano

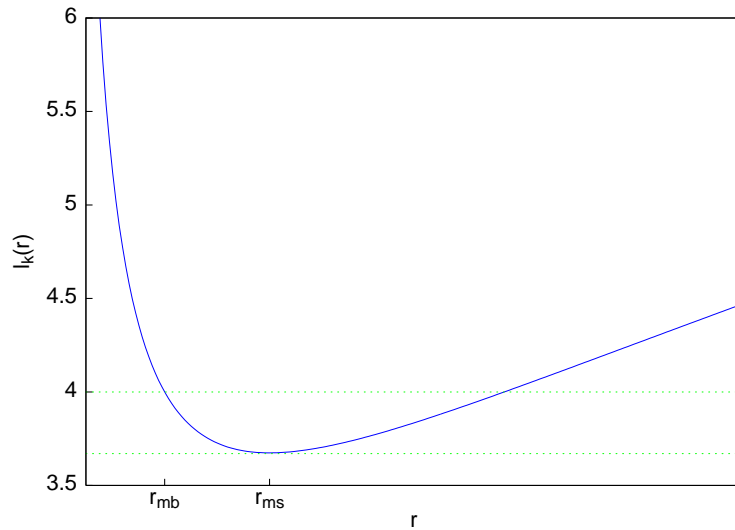


Figura 8.7: Momento angular kepleriano (geodésicas en caída radial) sobre el plano ecuatorial, para el agujero negro de Schwarzschild, $l_k = \frac{r\sqrt{2}}{r-2M} r_{mb} = 4$ y $r_{ms} = 6$

ecuatorial identifican las posiciones de dos puntos keplerianos de la solución. En estos puntos un elemento de fluido orbitando no experimenta ninguna aceleración debida a los gradientes de presión. La fuerza centrífuga balancea exactamente la fuerza gravitacional (y por lo tanto son partículas libres siguiendo geodésicas, de ahí que su momento angular es l_k).

Estos puntos (en realidad son círculos ya que r es la coordenada radial) corresponden a las posiciones del vértice r_{cusp} y el máximo de la densidad de masa en reposo.

El comportamiento de la función l_k se muestra en la figura 8.7, el punto r_{ms} es la cota superior para la localización del vértice, y el límite inferior para el centro del disco. Si la materia llena una superficie equipotencial con el vértice se lleva a cabo la acreción a través de él por los gradientes de presión y no por viscosidad, como ocurre en el caso de los discos delgados [100], hay que recordar que todas las órbitas circulares con $r < r_{ms}$ son inestables y por tanto las partículas caeran en el agujero negro.

La existencia del vértice para cualquier distribución de momento angular estable es típica porque la distribución de momento angular es estable si aumenta hacia afuera [107]. Una distribución de momento angular general puede por tanto, cruzar la kepleriana por dos puntos, exactamente como ocurre con el caso de momento angular constante.

Para un agujero negro de Schwarzschild, el potencial es:

$$\tilde{W} = \ln(-u_t) = \ln \left(r \sin \theta \sqrt{\frac{r-2M}{r^3 \sin^2 \theta - (r-2M)l^2}} \right), \quad (8.48)$$

El vértice está localizado entre el radio de la última órbita estable $r_{ms} = 6$ correspondiente al mínimo de l_k y el radio de la órbita marginalmente acotada $r_{mb} = 4$, los correspondientes valores

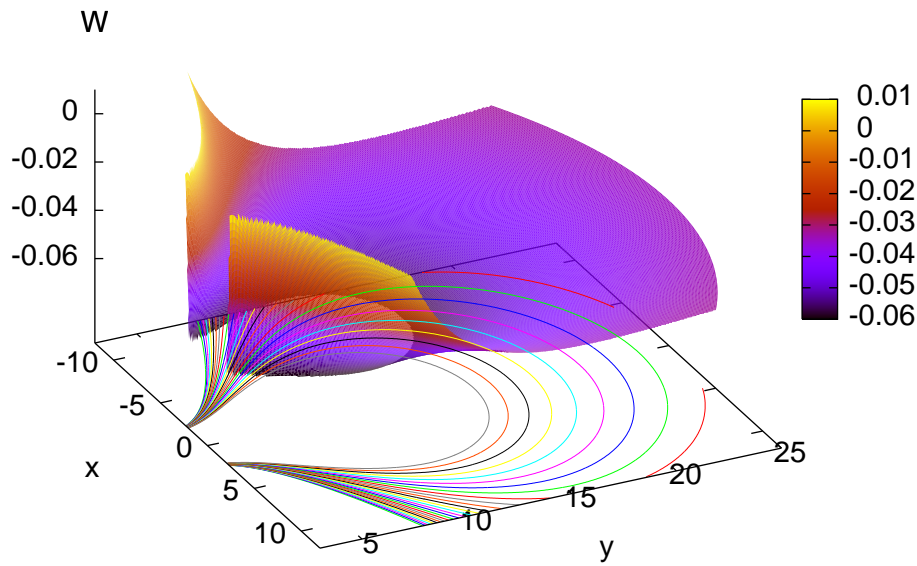


Figura 8.8: Si $l_0 < l_{ms}$ no se cierran las equipotenciales, así que no se puede formar un disco, $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 3.17$, $l_{mb} = 4.0$.

de l_k , son $l_k(r_{ms}) := l_{ms} = 3.67$ y $l_k(r_{mb}) = l_{mb} = 4$. Dependiendo de la forma que tenga el potencial es posible confinar una distribución de materia o formar un toro.

Hay cinco posibilidades para la forma del toro dependiendo del valor de l_0 con respecto a los valores keplerianos l_{ms} y l_{mb} :

- $l_0 < l_{ms}$. No se puede formar un toro figura 8.8.
- $l_0 = l_{ms}$. El disco existe como un anillo infinitesimal, el vértice es igual al centro, localizado en el círculo $r = r_{ms}$, figura 8.9.
- $l_0 = l_{mb}$. El vértice esta localizado sobre la superficie equipotencial marginalmente cerrada, figura 8.10.
- $l_0 > l_{mb}$. Los discos que se forman no tienen vértice por lo tanto no se puede llevar a cabo la acreción por medio de gradientes de presión, figura 8.11, se dice que están cerrados en infinito.
- $l_{ms} < l_0 < l_{mb}$. Hay muchos discos pero sólo uno que posee un vértice, ver figura 8.12.

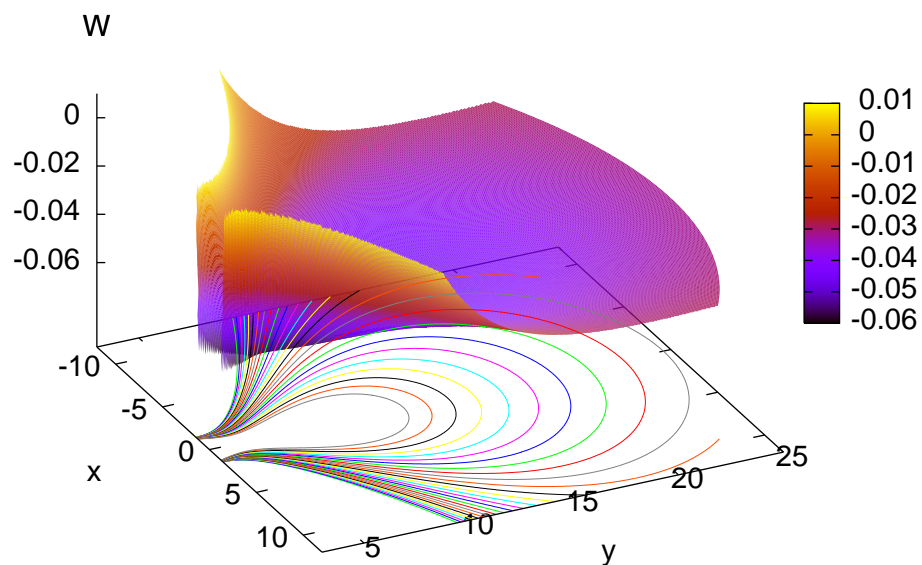


Figura 8.9: Cuando el momento angular es igual a l_{ms} , existe un anillo infinitesimal en donde se forma el disco, $l_{ms} = 3.67 = l_0$, $l_{mb} = 4.0$.

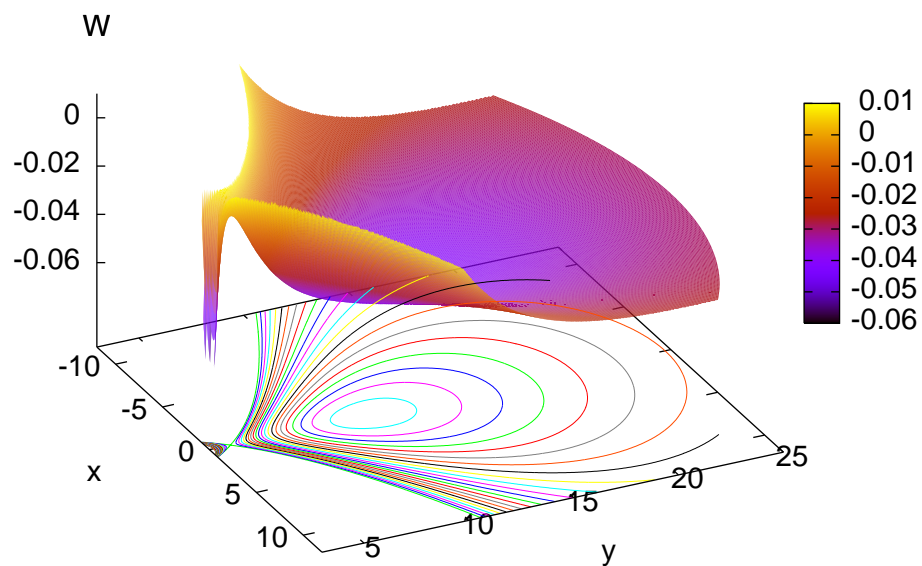


Figura 8.10: En el caso $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 4.0 = l_{mb}$ se forman discos pero ninguno tiene un vértice.

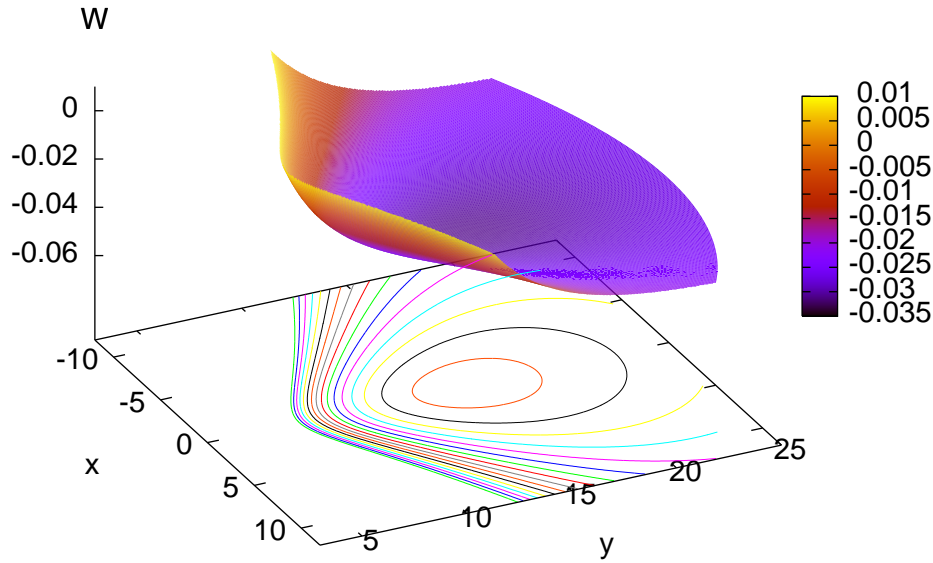


Figura 8.11: No se pueden formar discos, $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 4.17$, $l_{mb} = 4.0$

En la configuración $l_{ms} < l_0 < l_{mb}$ existe un vértice que es el equivalente al punto L_1 de Lagrange por el cual se lleva a cabo la acreción hacia el agujero negro debida unicamente a los gradientes de presión.

Los extremos locales del potencial $W(r, \theta) = \ln(u_t)$ en el plano ecuatorial identifican las posiciones de dos puntos keplerianos de la solución. En estos puntos un elemento de fluido no experimentan ninguna aceleración debida a los gradientes de presión. La fuerza centrífuga balancea exactamente la fuerza gravitacional. Estos puntos corresponden a las posiciones del vértice r_{cusp} y el máximo de la densidad de masa en reposo, es decir el centro del toro.

Para obtener la distribución de la densidad se utiliza la entalpía específica, relacionada con el potencial a través de (8.46).

$$h = \exp(\tilde{W}_{in} - \tilde{W}), \quad (8.49)$$

y para un gas politrópico la densidad es:

$$\rho = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\exp(\tilde{W}_{in} - \tilde{W}) - 1}{\kappa} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (8.50)$$

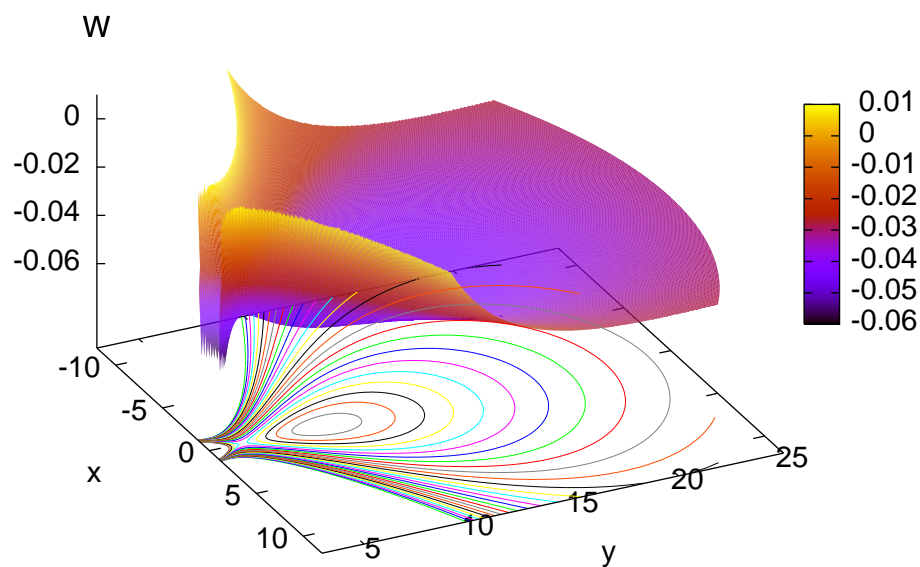


Figura 8.12: El caso de principal interés es cuando se tiene un vértice, y centro, $l_{ms} < l_0 < l_{mb}$. $l_{ms} = 3.67$, $l_0 = 3.85$, $l_{mb} = 4.0$

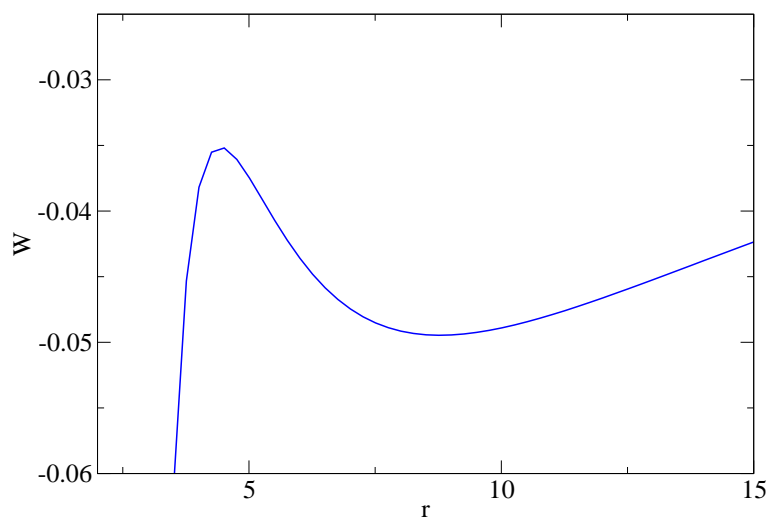


Figura 8.13: Los extremos locales del potencial, corresponden a las posiciones del vértice r_{cusp} y el centro del toro.

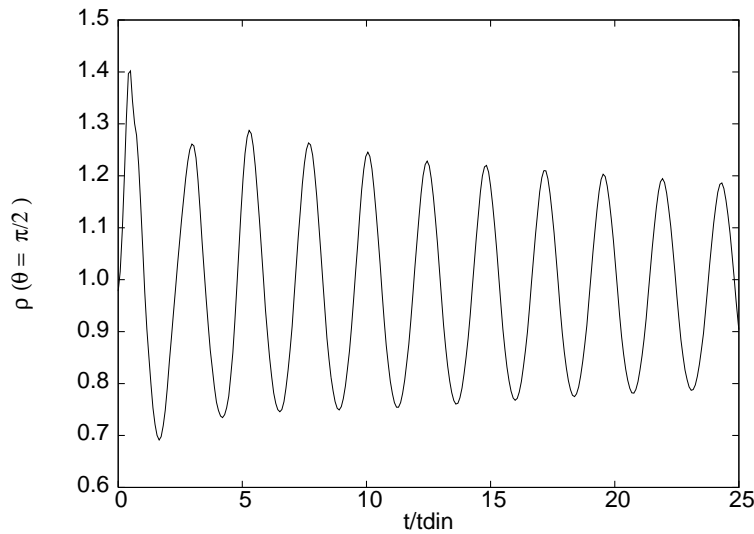


Figura 8.14: Se presenta la densidad central del disco ($\times 10^{-7}$) cuando la solución estacionaria es perturbada con valor de $\eta = 0.02$. El tiempo está escalado con el tiempo dinámico definido como $t_{din} = 2\pi/\Omega_c$ con Ω_c la velocidad angular (8.41) del centro del disco.

Con la presión dada por $p = \kappa\rho^\gamma$.

Para estudiar la subsecuente evolución hidrodinámica de los discos construidos, es necesario especificar las variables conservadas mediante eqs. (7.49, 7.50 y 7.51) y así utilizar los esquemas numéricos construidos. Por ejemplo, se toman como dato inicial los valores de la densidad, presión, energía y velocidad de los discos estacionarios para probar la habilidad del código de mantener las soluciones estacionarias, tal como hicimos en el caso de acreción de Michel. Posteriormente se realizaron evoluciones perturbando la solución estacionaria con una velocidad radial que es un múltiplo de la velocidad de Michel, de la forma

$$v^r = \eta v_M^r \quad (8.51)$$

con valores de $\eta = 0.01 \sim 0.2$ éstas evoluciones se hicieron mediante un código axialmente simétrico extensión del utilizado para hacer las evoluciones de acreción esférica. En la figura 8.14 está graficada la densidad central, en el plano ecuatorial del toro como función del tiempo. El disco llena una de las equipotenciales que no poseen vértice de la figura 8.12. Debido a la perturbación por un momento desborda el lóbulo que lo contiene y hay acreción. Conforme transcurre el tiempo el disco oscila para alcanzar nuevamente su estado estacionario.

Existe la posibilidad de estudiar las oscilaciones de los discos así como los modos de oscilación tal como se ha hecho en [108, 109], sin embargo, aquí solo nos enfocamos en la posibilidad de realizar una evolución del disco, futuros trabajos están dirigidos a obtener la respuesta gravitacional del agujero negro ante las perturbaciones producidas por la acreción periódica del disco.

Capítulo 9

Conclusiones

Para concluir, se presenta una breve discusión sobre las ideas presentadas en este trabajo. En los primeros capítulos se hizo una revisión de los conceptos básicos sobre ondas gravitacionales, estados de polarización, detección y energía transportada. Se desarrolló el formalismo de Newman Penrose para estudiar perturbaciones alrededor de la solución de agujero negro de Schwarzschild y Kerr. Como aplicaciones de este formalismo se estudió numéricamente la acreción dinámica de cáscaras de polvo hacia el agujero negro de Schwarzschild. Se mostró que existe una fuerte dependencia entre la compactidad de las cáscaras con la emisión de ondas gravitacionales. Si el ancho de la cáscara es comparable con el tamaño del agujero negro entonces la respuesta gravitacional son los modos característicos conocidos como modos cuasinormales de oscilación. Si el ancho de la cáscara es mayor que el tamaño característico del agujero negro entonces la señal gravitacional no tiene la forma de oscilaciones cuasiperiodicas. Para obtener estos resultados se desarrollaron códigos numéricos que permiten resolver las ecuaciones de perturbación utilizando diferencias finitas para la parte espacial y esquemas que preservan la estabilidad de las soluciones a lo largo del tiempo. El código desarrollado es muy robusto y puede utilizarse para estudiar otros fenómenos de acreción, como campos escalares o fluidos con presión. En particular se pretende estudiar la influencia de los gradientes de presión en la forma de las ondas gravitacionales. En el caso del agujero negro de Kerr, se utilizó un enfoque nuevo para resolver numéricamente la ecuación de perturbación que consistió en utilizar los armónicos esféricos con peso de espín para representar la parte angular de la función de onda, en vez de los esferoidales. Fue posible utilizar este enfoque gracias a la elección de la tétrada para representar las cantidades tensoriales, ya que se obtuvo una ecuación muy parecida al caso conocido de Schwarzschild. Con la descomposición de la parte angular en esta nueva base, se obtuvo una ecuación puramente radial temporal para los diferentes modos que conforman la función de onda. La ecuación para un modo involucra un acople no trivial entre los cuatro modos vecinos, dos por arriba y dos por debajo del modo l . Para estudiar el acople entre modos se resolvió numéricamente el sistema que resulta al permitir interacción entre modos y se mostró que para valores de m pequeños, comparados con l , es suficiente resolver para el modo principal pues las correcciones de los modos vecinos contribuyen muy poco a la forma de onda resultante. Esta descomposición fue por primera vez presentada en

un artículo de investigación y se espera sea utilizada para estudiar la influencia del acople entre los modos que componen la onda gravitacional. Con este enfoque será posible estudiar la señal gravitacional en tiempos tardíos con la finalidad de conocer la relación entre el decaimiento en amplitud de la onda con el tiempo. Se espera que este enfoque pueda utilizarse para estudiar otros fenómenos como la emisión gravitacional en la fase de órbita de un sistema binario en el cual las masas de los objetos son de diferentes ordenes de magnitud por ejemplo, cuando un agujero negro o una estrella de neutrones son capturados por un agujero negro supermasivo.

Se hizo un desarrollo de los métodos numéricos que se utilizan para describir numéricamente el flujo de materia hacia agujeros negros. Estos métodos son ampliamente utilizados en la comunidad de astrofísica porque permiten describir consistentemente las discontinuidades en los flujos. Para aplicar estos métodos se presentaron las ecuaciones que describen la dinámica de un fluido en la presencia de campos gravitacionales fuertes y velocidades cercanas a la velocidad de la luz, es decir en un contexto ultra relativista. Se presentaron algunos ejemplos sobre la aplicación de estos métodos como la acreción de un polítropo hacia un agujero negro de Schwarzschild poniendo énfasis en la parte dinámica del flujo. Se consideraron flujos supersónicos y subsónicos dentro de la malla computacional para recuperar la solución analítica que se describió con detalle. Se presentaron las soluciones analíticas y estacionarias de discos de acreción alrededor de agujeros negros en la aproximación de fluido de prueba y se mostraron los resultados de la solución numérica para la evolución de estos discos utilizando los algoritmos numéricos para flujos relativistas. Es importante recalcar la importancia de utilizar métodos numéricos que sean consistentes con la descripción física del problema, de otra forma se estarían pasando por alto fenómenos de interés que ayudarían a tener un mejor entendimiento de la naturaleza. Los nuevos códigos desarrollados por otro lado, pueden utilizarse para estudiar fenómenos astrofísicos, que involucren flujos relativistas como jets o estudiar otros modelos de acreción mas generales. Existe la posibilidad de adaptarlos a flujos que involucren campos electromagnéticos, esto es de gran relevancia porque se tendría una señal electromagnética, fácil de detectar, relacionada con la señal gravitacional.

Bibliografía

- [1] L. Lehner., *Class.Quant.Grav.* **18**, 25 (2001).
- [2] M. Alcubierre *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **21**, 589 (2004), gr-qc/0305023.
- [3] R. M. O’Leary, R. O’Shaughnessy, and F. A. Rasio, *Phys. Rev. D* **76**, 061504 (2007).
- [4] S. F. Portegies Zwart and S. McMillan, (1999).
- [5] W. C. M. Wagoner, R. V., *Astrophysical Journal* **210**, 764 (1976).
- [6] N. Andersson, , in *Iyer, B.R. (ed.) et al.: Black holes, gravitational radiation and the universe* 335-350.
- [7] <http://lisa.jpl.nasa.gov> .
- [8] <http://sci.esa.int/home/lisa> .
- [9] Virgo, <http://www.virgo.infn.it> .
- [10] Ligo, <http://www.ligo.caltech.edu/> .
- [11] K. D. Kokkotas, *Class. Quant. Grav.* **8**, 2217 (1991).
- [12] A. Nagar, O. Zanotti, J. A. Font, and L. Rezzolla, *Phys. Rev. D* **75**, 044016 (2007).
- [13] P. Papadopoulos and J. A. Font, *Phys. Rev.* **D63**, 044016 (2001).
- [14] R. Hulse and J. Taylor., *Astrophys. J.* **195**, L51 (1975).
- [15] J. H. Taylor and J. M. Weisberg., *Astrophys. J.* **253**, 908 (1982).
- [16] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Academic Press, San Francisco, 1973).
- [17] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford Press, Oxford, 1992).
- [18] B. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

- [19] K. D. Kokkotas, arXiv: astro-ph 0809.1602 (2008).
- [20] K. Thorne, in *Three Hundred Years of Gravitation*, edited by S. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1987), pp. 330–458.
- [21] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics* (Cambridge, Cambridge, 2004).
- [22] A. Buonanno, , prepared for GR17: 17th International Conference on General Relativity and Gravitation, Dublin, Ireland, 18-24 Jul 2004.
- [23] M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity* (Oxford Univ. Press, New York, 2008).
- [24] M. Ruiz, R. Takahashi, M. Alcubierre, and D. Nunez, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 2467 (2008).
- [25] B. Sathyaprakash and B. F. Schutz, *Living Reviews in Relativity* **12**, (2009).
- [26] B. Schutz, *Class. Quantum Grav.* **16**, A131 (1999).
- [27] H. T. Misao Sasaki, *Living Reviews in Relativity* **6**, (2003).
- [28] L. Blanchet, *Living Reviews in Relativity* **9**, (2006).
- [29] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, , new York, USA: Wiley (1983) 645 p.
- [30] S. Shapiro and A. Lightman, *Astrophys. J.* **207**, 263 (1976).
- [31] S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1114 (1972).
- [32] J. M. Bardeen and W. H. Press, *J. Math. Phys.* **14**, 7 (1973).
- [33] M. v. d. B. H. Bondi and A. Metzner, *Gravitational Waves in general relativity VII* (Proc. R. Soc. London, A269, London, 1962), pp. 21–52.
- [34] E. T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3**, 566 (1962), erratum in *J. Math. Phys.* **4**, 998 (1963).
- [35] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, England, 1983).
- [36] C. Beetle, M. Bruni, L. M. Burko, and A. Nerozzi, *Phys. Rev.* **D72**, 024013 (2005).
- [37] A. Nerozzi *et al.*, *Phys. Rev.* **D72**, 024014 (2005).
- [38] A. Nerozzi, M. Bruni, L. M. Burko, and V. Re, *AIP Conf. Proc.* **861**, 702 (2006).
- [39] P. Szekeres, *J. Math. Phys.* **6**, 1387 (1965).

- [40] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, and Cambridge University Press, Cambridge, 1980), pp. 1–425.
- [41] H. Stephani and J. Stewart, *General Relativity: An Introduction to the Theory of Gravitational Field* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [42] W. Kinnersley, *J. Math. Phys.* **10**, 1195 (1969).
- [43] T. Regge and J. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).
- [44] N. Andersson, *Progress of Theoretical Physics.* **136**, 183 (1999).
- [45] S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* **185**, 635 (1973).
- [46] S. Chandrasekhar, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **343**, 289 (1975).
- [47] E. N. Dorband *et al.*, *Phys. Rev.* **D74**, 084028 (2006).
- [48] J. N. Goldberg *et al.*, *J. Math Phys.* **8**, 2155 (1967).
- [49] A. Zenginoğlu, *Class. Quantum. Gravit.* **25**, 175013 (2008).
- [50] E. W. Leaver, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A402**, 285 (1985).
- [51] V. Ferrari and B. Mashhoon, *Phys. Rev. D* **30**, 295 (1984).
- [52] B. Schutz and C. Will, *apj* **291**, L33 (1985).
- [53] [www.r project.org](http://www.rproject.org/), .
- [54] C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev.* **D1**, 2870 (1970).
- [55] N. Andersson, *Phys. Rev.* **D51**, 353 (1995).
- [56] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, *Living Rev. Relativity* **2**, 2 On line article (1999).
- [57] <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/> .
- [58] V. Ferrari and L. Gualtieri, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 945 (2008).
- [59] E. Berti and V. Cardoso, *Phys. Rev.* **D74**, 104020 (2006).
- [60] D. Nuñez, J. C. Degollado, and C. Palenzuela, submitted .
- [61] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, *Class. Quant. Grav.* **26**, 163001 (2009).
- [62] E. Wigner, *Group Theory and Its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (New York: Academic Press, New York, U.S.A., 1959).

- [63] W. Krivan, P. Laguna, and P. Papadopoulos, *Phys. Rev. D* **54**, 4728 (1996).
- [64] M. Campanelli *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **18**, 1543 (2001).
- [65] E. Pazos-Avalos and C. O. Lousto, *Phys. Rev.* **D72**, 084022 (2005).
- [66] P. A. Sundararajan, G. Khanna, and S. A. Hughes, *Phys. Rev.* **D76**, 104005 (2007).
- [67] W. Krivan, P. Laguna, P. Papadopoulos, and N. Andersson, *Phys. Rev.* **D56**, 3395 (1997).
- [68] R. Lopez-Aleman, *AMS/IP Stud. Adv. Math.* **13**, 377 (1999).
- [69] J. C. Degollado, D. Nuñez, and C. Palenzuela, *General Relativity and Gravitation*. (2009).
- [70] D. Nuñez, J. C. Degollado, and C. Palenzuela, in preparation .
- [71] A. Harten, *SIAM J. Numer. Anal.* **21**, 1 (1984).
- [72] J. N. Philippe Grandclément, *Living Reviews in Relativity* **12**, (2009).
- [73] E. Chow and J. Monaghan, *J. Comput. Phys.* **134**, 296 (1997).
- [74] P. Laguna, W. Miller, and W. Zurek, *Astrophys. J.* **404**, 678 (1993).
- [75] J.-M. Martí and E. Müller, *Living Rev. Relativity* **6**, (2003).
- [76] B. van Leer, *J. Comput. Phys.* **32**, 101 (1979).
- [77] A. Harten, P. Lax, and B. van Leer, *SIAM Rev.* **25**, 35 (1983).
- [78] X. Liu and S. Osher, *J. Comput. Phys.* **142**, 304 (1998).
- [79] A. Kurganov and E. Tadmor, *J. Comput. Phys.* **160**, 241 (2000).
- [80] A. Lucas-Serrano, J. Font, J. Ibáñez, and J. Martí, *Astron. Astrophys.* **428**, 703 (2004).
- [81] T. Chung, *Computational Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2002).
- [82] E. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics – a practical introduction* (Springer, Berlin, Germany, 1997).
- [83] R. J. Leveque, *Numerical Methods for Conservation Laws* (Birkhauser Verlag, Basel, 1992).
- [84] P. Roe, *J. Comput. Phys.* **43**, 357 (1981).
- [85] B. Einfeldt, *SIAM J. Numer. Anal.* **25**, 294 (1988).
- [86] R. J. Leveque, in *Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow*, Vol. 27 of *Saas-Fee Advanced Courses*, edited by R. J. Leveque *et al.* (Springer, Berlin, Germany; New York, U.S.A., 1998), pp. 1–159.

- [87] D. Kuzmin, *J. Comput. Phys.* **219**, 513 (2006).
- [88] P. Colella and P. Woodward, *J. Comput. Phys.* **54**, 174 (1984).
- [89] J. Martí and E. Müller, *J. Comput. Phys.* **123**, 1 (1996).
- [90] A. Marquina, *SIAM J. Sci. Comput.* **15**, 892 (1994).
- [91] S. Gottlieb, *Journal of Scientific Computing* **25**, Nos. 1/2 (2005).
- [92] C. Shu, *Math. Comput.* **49**, 105 (1987).
- [93] D. Gottlieb and S. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, Vol. 26 of *Regional Conference Series in Applied Mathematics* (SIAM, Philadelphia, 1977).
- [94] S. Gottlieb and C. W. Shu, *Math. Comp* **67**, 73 (1998).
- [95] E.ourgoulhon, 3+1 formalism and Bases of Numerical Relativity, 2007.
- [96] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (John Wiley, New York, 1962), pp. 227–265.
- [97] J. A. Font, *Living Rev. Rel.* **11**, 7 (2007).
- [98] M. Aloy, J. Ibáñez, J. Martí, and E. Müller, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **122**, 151 (1999).
- [99] H. Bondi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **112**, 195 (1952).
- [100] A. King, J. Frank, and D. Raine, *Accretion Power in Astrophysics*, 3rd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, U.S.A., 2002).
- [101] F. C. Michel, *Astrophysics and Space Science* **15**, 153 (1972).
- [102] P. Papadopoulos and J. A. Font, *Phys. Rev.* **D58**, 024005 (1998).
- [103] R. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [104] M. Kozłowski, M. Jaroszynski, and M. Abramowicz, *Astron. Astrophys.* **63**, 209 (1978).
- [105] J. A. Font and F. Daigne, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **334**, 383 (2002).
- [106] M. Abramowicz, M. Jaroszynski, and M. Sikora, *Astron. Astrophys.* **63**, 221 (1978).
- [107] L. Qian *et al.*, *Astron. Astrophys.* **498**, 471 (2009).
- [108] O. Zanotti, L. Rezzolla, and J. Font, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **341**, 832 (2003).
- [109] O. Zanotti, J. Font, L. Rezzolla, and P. Montero, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **356**, 1371 (2005).