UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Aspectos Clásicos de Teorías No–conmutativas: Lagrangiano, Simetrías, y una Deformación de la Gravedad

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

Ignacio Cortese Mombelli

DIRECTOR DE TESIS: Dr. José Antonio García Zenteno

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. José David Vergara Oliver

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos

posgrado en ciencias físicas
u n a m

Ciudad Universitaria, México, D.F. Marzo , 2010

A Tamara…

AGRADECIMIENTOS

Especial agradecimiento quiero expresar a Amparo que se ha fletado esta historia interminable a mi lado y siempre atenta a las severas fluctuaciones que este tabajo ha implicado en muchos aspectos de mi vida.

Otros que merecen un agradecimiento especial son mami y papi, y Chuy y Álvaro, todos ellos testigos de casi todo el desarrollo, siempre poniendo algo de voluntad para entender de qué va la cosa en este negocio, y además aportando su parte de ayuda cuando ha sido necesario crear tiempos y disposiciones.

Por supuesto siento enorme gratitud de haberme topado al Antonio a principios de este siglo, y que me mantuviera a flote sobre todo en las malas épocas. Gracias a él y a sus cuentos (todos ellos).

Ni qué decir del mismo Antonio y Luis, David, Alberto, Hernando, Rodolfo, Merced y Hugo que se aventaron el tiro de echarle un ojo a esta tesis y convencerme que no es un trabajo tan a la deriva como podría parecer a primera vista.

Me faltan hartos: Por un lado a Teto, Nettel, Tíber, Roberto, Alexander, Adolfo, Elías, Mauricio, Eduardo, William, Mariano, Héctor, Yuri, Benjamín, Ulises, Belinka, Chucho y una miriada más de compañeros con los que hemos tenido cansadas discusiones a veces con tino. Y por otro lado a Lev, Alejandra, Troll, Darío, Natalia, Enrique, Niza, Sandra, Gustavo, Miguel, Oliva, Anselmo, Litzahaya, Xitlali, Carlos, Dieter, otra Alejandra, Alf, Iván, Fabián, Rubén, Michelle, Alejandro, Nicolás, Daniel, otro Miguel, Israel, Yuri, Jorge, Omar, Raúl y todos los que andan por ahí en unas y otras órbitas un tanto más lejanas.

Gracias también a Rocío, Manuel, y Yanalté por su labor en la coordinación del PCF, y su interés por la evolución del trabajo de doctorado del cual esta tesis es su más reciente consecuencia.

No está de más mencionar que el trabajo de doctorado en el que se desarrolló la investigación a la que se refiere esta tesis fue posible gracias al financiamiento de CONACYT (becario número 177636), y de PAPIIT-DGAPA-UNAM (proyecto IN116408).

ÍNDICE GENERAL

Introducción

Es conocido y aceptado ampliamente en la física teórica que algunas de las teorías fundamentales más arraigadas en la física del siglo XX tienen ciertas limitaciones para explorar las escalas más pequeñas de longitud, mucho más pequeñas que las alcanzadas por los experimentos en altas energías más sofisticados. Esto es en la actualidad motivo de reflexión sobre la validez de algunas de las concepciones y principios constructivos de dichas teorías en el régimen de energía característico de estas escalas. Para describir los fenómenos físicos que se dan a escalas de energía que llegan hasta los 10^{14} eV, que es la escala de energía de operación del LHC (o tal vez hasta los 10^{20} eV, energía que pueden alcanzar los rayos cósmicos ultraenergéticos), existen teorías cuánticas de campo que describen la dinámica de partículas e interacciones dominantes en ese régimen con bastante exactitud. Sin embargo, se cree que para entender los fenómenos físicos presentes en regímenes de energía mayores posiblemente hacen falta ideas fundamentales nuevas, ideas que por ejemplo permitan reunir aspectos cuánticos y gravitacionales de un sistema físico en una teoría consistente.

En este panorama la investigación reciente en física teórica de altas energías y áreas relacionadas está marcada por profundas reconsideraciones de conceptos fundamentales aceptados por la física del siglo pasado. Uno de ellos es la concepción del espacio–tiempo: Usualmente considerado un escenario donde la dinámica de un sistema físico tiene lugar, se sospecha que en un cierto régimen de energía muy alta (entre los 10^5 GeV y la escala caracterizada por la masa de Planck $m_P \sim 10^{19}$ GeV) algunas propiedades intrínsecas del espacio–tiempo y de la física que tiene lugar ahí son muy distintas de las convencionales.

En el contexto de las teorías cuánticas, en el régimen de energía que abarca desde la escala característica de los estados ligados de atómos o moléculas (que ronda los $\sim 10^1 - 10^3$ eV) a la escala de operación de aceleradores de partículas elementales ($\sim 10^0 - 10^2$ TeV), la concepción del espacio–tiempo es el de un espacio suave que sirve de escenario a la dinámica de sistemas de partículas y/o campos, y sobre el que podemos definir sistemas de referencia con coordenadas "bien portadas". Sin embargo, resultados recientes en teoría de cuerdas abiertas y gravedad cuántica de lazos sugieren la idea de que la concepción de variedad diferencial, que es como entedemos matemáticamente al espacio–tiempo, no es adecuada para describir fenómenos que ocurren en las escalas más pequeñas de longitud[1]. En su lugar, el espacio–tiempo en esas escalas tiene una estructura cuantizada o *no–conmutativa* [55, 56, 58, 94, 121]. Esta idea ha generado un área de trabajo muy activa en la búsqueda de nueva física, desde aspectos fenomenológicos, teóricos, e incluso matemáticos.

Hacerse de una idea intuitiva del carácter de la geometría no–conmutativa puede ser muy difícil porque en un espacio no–conmutativo (o cuya geometría es no–conmutativa) no existe la noción ordinaria de punto. Una visualización de este hecho consiste en atribuirle una incertidumbre natural a la localización de pun-

[1]Tal vez comparables a la longitud de Planck $\lambda_P \sim 10^{-35}$ m (la masa y la longitud de Planck están relacionadas por $m_P \sim \frac{1}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\lambda_P}$).

tos en estos espacios. Así como en mecánica cuántica la no conmutatividad algebraica de la posición y el momento implica una incertidumbre fundamental para la determinación simultánea de estos observables asociados a una partícula en cualquier estado físico, con un álgebra de Heisenberg caracterizada por relaciones algebraicas no–conmutativas entre los operadores asociados a las coordenadas de la posición de una partícula podemos modelar la indeterminación de ésta en el espacio–tiempo.

La aproximación formal de esta idea para estudiar modelos físicos en el ámbito de la geometría no–conmutativa está basada (de manera casi estándar) en la correspondencia o equivalencia entre geometría y álgebra dada por el teorema de Gel'fand-Neimark. Por este teorema un espacio de Hausdorff localmente compacto M corresponde a una álgebra-C^* $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ de funciones contínuas en M. A cada elemento u objeto geométrico le corresponde un elemento en el álgebra–C^* (por ejemplo, a un punto de la variedad le corresponde el ideal de funciones que se anulan en dicho punto). Así, si a una variedad suave M le corresponde una cierta álgebra–C^* conmutativa $\mathcal{A}$, concebimos la estructura geométrica del espacio no–conmutativo mediante una generalización de la estructura conmutativa de $\mathcal{A}$ a una estructura no–conmutativa. La generalización es tal que a las coordenadas $\hat{x}^\mu$ asociadas a un punto del espacio–tiempo y vistas como elementos del álgebra no–conmutativa les pasa que

$$\hat{x}^\mu \hat{x}^\nu \neq \hat{x}^\nu \hat{x}^\mu.$$

Lo usual es interpretar a estas coordenadas como generadores del álgebra de funciones que toman valores en el espacio no–conmutativo, y representar esta última con un álgebra de funciones clásicas deformada con la correspondencia de Weyl-Wigner-Moyal (en la primera sección del capítulo 3 presentamos un resumen de las ideas principales de este formalismo).

La no–conmutatividad de las coordenadas no es del todo inusual en física. Uno de los ejemplos más sencillos donde se presentan estas relaciones es el de una partícula cargada moviéndose en un plano en la presencia de un campo magnético constante perpendicular al mismo (en el nivel de Landau más bajo). El lagrangiano de este sistema está dado por

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + e\vec{v}\cdot\vec{A} - V(\vec{x}), \quad \text{con} \quad \vec{A} = (0, Bx, 0).$$

En el límite de campos B muy intensos el término cinético es dominado por el potencial, y este lagrangiano se reduce al lagrangiano de primer orden $L \to L = eBx\dot{y} - V$. De este lagrangiano tenemos que $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = eBx$, es decir, x y y son variables conjugadas. Al cuantizar el sistema se proyecta en el nivel de energía más bajo, y de $\{p_y, y\} = -1$ para el paréntesis de la teoría tendremos que

$$\{x, y\} = -\frac{1}{eB} \quad \Longrightarrow \quad [\hat{x}, \hat{y}] = i\theta, \quad \theta \equiv -\frac{\hbar}{eB}, \tag{1}$$

la última expresión siendo el conmutador cuántico correspondiente[2].

En analogía con este sencillo ejemplo, en teoría de cuerdas aparecen teorías de norma con coordenadas no–conmutativas a partir de un modelo sigma con condiciones de borde particulares. Dada la métrica $G_{\mu\nu}$ en el espacio plano, la acción de Polyakov para una cuerda abierta bosónica con coordenadas X^μ en la presencia de Dp-branas y un campo de fondo con potencial constante y antisimétrico dado por una 2-forma de Neveu–Schwarz $B_{\mu\nu}$ es

$$S_\Sigma = \frac{1}{4\pi l_s^2}\int_\Sigma \Big(G_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - 2\pi i l_s^2 B_{\mu\nu}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \Big).$$

[2]Una exposición breve y buena de este problema está presentada en la tesis reciente [90].

La cuerda se acopla con este potencial a través del término

$$\int_{\Sigma} B_{\mu\nu}\epsilon^{ab}\partial_a X^{\mu}\partial_b X^{\nu} = \oint_{\partial\Sigma} B_{\mu\nu} X^{\mu}\partial_t X^{\nu}, \tag{2}$$

donde Σ es la hoja de mundo de la cuerda, $\partial\Sigma$ su borde, y ∂_t la derivada tangencial a éste. Esta interacción es un término de frontera que no modifica la dinámica de la cuerda a menos que la hoja de mundo de la misma tenga borde, esto es que haya D-branas presentes. En este caso la interacción entre B y la cuerda modifica las condiciones de frontera que cumplen las coordenadas de la cuerda, y así el propagador cuántico correspondiente. Si el campo de fondo sólo tiene componentes espaciales B_{ij}, en el límite $G_{\mu\nu} \sim T^{-2} \to 0$ de bajas energías (con $T = \frac{1}{2\pi\ell_s^2}$ la tensión de la cuerda) el término cinético de la acción de Polyakov es dominado por el término (2), y este modelo produce una teoría de campos no–conmutativa con un producto de los del tipo de Moyal [105, 107]. Si se permite no–conmutatividad del espacio con el tiempo, un cierto límite de bajas energías particular produce una teoría de cuerdas abiertas no–conmutativa [106].

La introducción de coordenadas no–conmutativas en teorías de campo fue formalizada por primera vez en el trabajo de Snyder [108, 109] en los 40's, a raíz de una sugerencia o propuesta originalmente de Heisenberg [94, 111] como un mecanismo para introducir un corte ultravioleta natural que curara algunas divergencias en la teoría cuántica de campos. Básicamente la idea es que una estructura no–conmutativa del espacio–tiempo implica una escala de longitud fundamental que en el espacio de momentos representa un corte en energías altas. Aunque la propuesta de Snyder proporciona un mecanismo consistente con la invariancia de Lorentz, la idea completa fue ignorada y la atención dirigida al mecanismo de renormalización, formalizado y con buenos resultados alrededor de la misma época. En la actualidad, el vínculo entre la geometría no–conmutativa y la teoría de cuerdas abiertas condensado en la forma de teorías de campo no–conmutativas (TCNC) ha revivido esta idea colocándolas en un punto intermedio entre la teoría de cuerdas y las teorías de campo convencionales. En este sentido, uno podría considerar a las TCNC como posibles generalizaciones de teorías de campo y de norma que no habían sido consideradas previamente.

La definición estándar de una TCNC es la de un teoría de campos definida en un espacio–tiempo donde las coordenadas satisfacen la relación básica

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu - \hat{x}^\nu \hat{x}^\mu = i\theta^{\mu\nu},$$

con $\theta^{\mu\nu}$ una matriz constante en el caso canónico. Es posible representar el álgebra no–conmutativa generada libremente por las coordenadas $\hat{x}^\mu$ con el álgebra clásica de funciones sobre el espacio–tiempo ordinario con coordenadas x^μ sustituyendo el producto entre funciones por un producto no conmutativo. Este procedimiento se lleva a cabo con el formalismo de deformación en un parámetro de Weyl-Wigner-Moyal[3], en el que si la teoría tiene un contenido de campos $\phi, \psi, \cdots \in \mathcal{A}$ que se multiplican con el producto puntual ordinario $(\phi \cdot \psi)(x) \equiv \phi(x)\psi(x)$, la deformación no–conmutativa reemplaza este producto por el producto-$\star$ de Moyal definido por

$$(\phi \star \psi)(x) \equiv \phi(x) e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\overleftarrow{\partial}_\alpha \overrightarrow{\partial}_\beta} \psi(x),$$

de tal manera que el conmutador $[A, B]_\star \equiv A \star B - B \star A$ da la relación entre las

[3]Una buena introducción a este formalismo puede encontrarse en [74]. El resumen de las ideas principales del mismo que presentamos en la sección 3.1 del capítulo 3 está basado en esta referencia.

coordenadas ordinarias del espacio–tiempo

$$[x^\mu, x^\nu]_\star = i\theta^{\mu\nu}.$$

Mediante este mecanismo toda la estructura no–conmutativa intrínseca del espacio–tiempo la hemos transferido a una propiedad de los campos, codificada en la definición del álgebra a la que pertenecen. Esta construcción se hace para el espacio–tiempo plano, coordenadas cartesianas, y θ constante. Para casos donde por ejemplo θ es una función del punto (y asociada a una estructura de Poisson más general), existen deformaciones similares y el producto no–conmutativo en esos casos es el producto de Kontsevich [32, 33, 89, 105].

Esta definición de TCNC como deformaciones de teorías ordinarias o conmutativas está inspirada en el formalismo de cuantización por deformación de la mecánica clásica [19]. Es posible introducir con el mismo espíritu este tipo de deformaciones no–conmutativas en el contexto de la mecánica cuántica, pero ahí la estructura que se deforma no es el álgebra de funciones de las coordenadas del espacio–tiempo, sino la estructura simpléctica definida en el espacio fase del formalismo clásico de primer orden. La definición de un sistema clásico no–conmutativo en esta aproximación consiste en tomar un hamiltoniano de la forma $H = T + V$, una estructura simpléctica que implementa la no–conmutatividad entre las coordenadas (como en (1)), y utilizar la transformación de Darboux que lleva las variables del espacio fase así definidas a las variables canónicas "conmutativas" regresando la estructura simpléctica a su forma estándar. Este procedimiento sin embargo tiene como resultado final un hamiltoniano modificado con nuevos términos de interacción que podrían no preservar las simetrías originales del problema, y ser no–locales cuando el sistema se cuantiza. Estas dos versiones clásicamente equivalentes del sistema físico (antes y después de la transformación de

Darboux), no lo son a nivel cuántico porque la transformación de Darboux no es unitaria. Este tipo de no–conmutatividad simpléctica ha sido aplicada también en teoría de campos [30, 44, 51, 62, 67]. Las teorías resultantes se llaman *teorías de campo simplecto–no–conmutativas*, e incluyen efectos de la no–conmutatividad mediante la deformación de una estructura simpléctica tal que el paréntesis de Poisson entre campos en puntos diferentes del espacio es distinto de cero. El parámetro que controla la no–conmutatividad simpléctica se puede usar como un corte natural y/o como un modelo de violación de la invariancia de Lorentz a una cierta escala de energía.

Contenido de la tesis

Este trabajo de tesis está dividido en dos partes. En la parte I estudiamos las consecuencias de la no–conmutatividad simpléctica en el espacio *configuración* de un sistema de partículas. Es conocido que podemos especificar el contenido dinámico de un sistema clásico de tres diferentes y equivalentes maneras: a) con las ecuaciones de movimiento en el espacio configuración (definiendo las fuerzas), b) con una función lagrangiana en el espacio tangente al espacio configuración, o c) con una estructura simpléctica σ y una función hamiltoniana en el espacio fase.

Para cuantizar un sistema de partículas que interactúan necesitamos proveer información de la dinámica global del sistema clásico. Esta información global es usada por la teoría cuántica para tomar en cuenta las fluctuaciones del sistema alrededor de sus soluciones clásicas. En este sentido, la información clásica provista en la forma a) no es suficiente para cuantizar el sistema físico correspondiente. Cuando uno quiere cuantizar un sistema en el espacio configuración lo usual es proveer la información dinámica mediante un lagrangiano $L(x, \dot{x})$ con el que se calculan las amplitudes de transición usando la integral de caminos de Feynman. Sin embargo, para la cuantización de un sistema clásico no–conmutativo, la manera natural de especificar la información dinámica es en la forma c) de primer orden. En el capítulo 1 veremos que el caso general los sistemas no–conmutativos así definidos no tienen lagrangiano en el espacio configuración. Por lo tanto, para estudiar las consecuencias de la no–conmutatividad simpléctica ahí especificaremos el contenido dinámico del sistema físico mediante las ecuaciones de movimiento de segundo orden de Newton, y tomaremos como una definición la estructura simpléctica no–conmutativa del formalismo de primer orden que querríamos cuantizar para obtener coordenadas no–conmutativas. Así, confrontando la información proveniente de estos dos esquemas en principio independientes, veremos que la última no puede ser especificada de manera arbitraria, sino que debe satisfacer ciertas condiciones de consistencia o compatibilidad con las fuerzas que definen las ecuaciones de segundo orden.

Estas condiciones de compatibilidad han sido estudiadas para el caso de la estructura simpléctica estándar (o “conmutativa”) por los autores de [81]. El primer antecedente de este tipo de análisis es una idea de Feynman discutida por Dyson en [61] en la que se propone buscar todas las fuerzas que sean compatibles con los conmutadores cuánticos canónicos entre los operadores asociados a la posición y la velocidad de una partícula. El resultado de Feynman es que la fuerza más general compatible con estos conmutadores tiene la forma de la fuerza de Lorentz, y en este sentido ésta es toda la física consistente con las relaciones de incertidumbre de Heisenberg estándar. Este análisis de Feynman ha sido extrapolado al ámbito no–conmutativo por los autroes de [20, 23, 28].

Desde el punto de vista del análisis llevado a cabo en [81] los autores encontraron que las condiciones de consistencia dinámicas entre las relaciones de conmutación canónicas y un conjunto dado de ecuaciones de movimiento en el espacio configuración son precisamente las condiciones de Helmholtz del problema inverso del cálculo de variaciones para la existencia del lagrangiano de dichas ecuaciones de movimiento. Aquí mostraremos que las condiciones de consistencia dinámicas análogas en el caso no–conmutativo pueden escribirse como la suma de las condiciones de Helmholtz para las ecuaciones de movimiento dadas y términos proporcionales a los parámetros $\theta^{\mu\nu}$.

En un segundo paso en esta línea de ideas, en el capítulo 2 mostraremos que las condiciones de compatibilidad deformadas son las condiciones de integrabilidad de Helmholtz pero de un conjunto de ecuaciones de tercer orden, que tienen una estructura tal que hace que entre sus soluciones esté un subconjunto que corresponde a todas las soluciones de las ecuaciones de segundo orden originales. Así, resultará que los sistemas que cumplan con las condiciones de compatibilidad dinámica deformadas tienen una formulación variacional, y con ésta uno podría plantearse el problema de la cuantización de estos sistemas físicos en el espacio configuración no–conmutativo.

De los resultados que obtenemos en esta parte concluimos que la cuantización de un conjunto de ecuaciones de movimiento dadas en el espacio configuración se puede realizar usando relaciones de conmutación conmutativas o no–conmutativas siempre que las correspondientes condiciones de compatibilidad o consistencia sean satisfechas. Si un sistema dinámico en particular admite las dos cuantizaciones, obviamente éstas no serán equivalentes. Podría pasar que la cuantización usando relaciones de conmutación conmutativas no pueda realizarse dado que el sistema no tiene lagrangiano, pero sí pueda realizarse consistentemente con relaciones no–conmutaivas si las condiciones de compatibilidad deformadas se satisfacen. Resulta que existe una solución genérica a las nuevas condiciones de consistencia que aquí presentamos, análoga a la solución estándar $L = T - V$ del problema inverso del cálculo de variaciones para fuerzas que provienen de un potencial.

En la parte II de esta tesis estudiamos dos temas de debate actual en la literatura sobre TCNC. El primer tema, que trabajamos en el capítulo 3, trata sobre la implementación de simetrías del espacio–tiempo plano sobre el lagrangiano de una TCNC arbitraria. La definición de estas simetrías tiene varios problemas. Uno de ellos es que las relaciones no-conmutativas entre las coordenadas del espacio-tiempo no transforman de manera covariante si los parámetros no–conmutativos han de mantenerse como las componentes de una matriz constante (en el caso canónico). Este hecho implica en particular que la concepción usual de covariancia de Lorentz no aplica en TCNC. En tales condiciones, la clasificación de partículas en términos de las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré pierde validez en este contexto.

Recientemente ha sido puesta mucha atención en un tipo de simetrías para TCNC llamadas *simetrías twist*[4]. Este tipo de simetrías resultan de considerar la deformación de la acción de transformaciones del espacio–tiempo congruente con la del producto ordinario entre campos que resulta en el producto-$\star$ de Moyal (en el apéndice B presentamos las ideas básicas de la deformación de esta acción mediante la deformación del *coproducto* definido en la estructura de Hopf del álgebra de transformaciones que actúan sobre los campos). Una de las características de las simetrías twist del espacio–tiempo es que dejan invariantes los parámetros no–conmutativos implementando al mismo tiempo un tipo de covariancia en TCNC fundamentada en el grupo de Poincaré estándar. Este hecho permite recuperar la

[4]La traducción literal al idioma español de la nomenclatura para este tipo de simetrías es simetrías “torcidas”. En este trabajo utilizaremos el adjetivo “twist” en la pronunciación que en español parece más natural.

clasificación estándar de partículas a través de campos escalares, vectoriales, etc.

Para el caso de transformaciones lineales twist de las coordenadas, la transformación correspondiente del producto-$\star$ de dos campos contiene una parte que puede identificarse con la transformación de dicho producto debido a la transformación de los parámetros $\theta^{\mu\nu}$ como si fueran las componentes de un tensor. Con base en esta observación definiremos una implementación variacional de simetrías del espacio–tiempo que consiste básicamente en complementar la derivada variacional ordinaria en teoría de campos actuando sobre el lagrangiano de una TCNC con una variación de sus términos asociada al cambio en $\theta^{\mu\nu}$. Esta implementación es posible hasta transformaciones del grupo de Weyl (que es el grupo de Poincaré al que le agregamos las dilataciones), pues resulta que éstas son las únicas transformaciones que garantizan la invariancia explícita del producto-$\star$ cuando los parámetros $\theta^{\mu\nu}$ con los que está definido transforman como las componentes de un tensor. En estos términos resulta además que la propuesta de implementación de simetrías que hacemos coincide con la acción de las simetrías twist, aunque estas dos construcciones tengan puntos de partida muy diferentes (como que la primera trasforma los parámetros $\theta^{\mu\nu}$ explícitamente mientras que la segunda -implícitamente en la construcción- no lo hace).

El segundo tema que tratamos en este contexto es una propuesta de gravedad no–conmutativa. Desde que la teoría de cuerdas encontró deformaciones de la gravedad de Einstein se ha invertido mucho esfuerzo para entender ésta y otras posibles deformaciones de la gravedad, en particular deformaciones en la dirección no–conmutativa. Esta última idea, motivada por la no–conmutatividad del espacio–tiempo vía la deformación con producto-$\star$ de Moyal, ha sido un tema de discusión recurrente en los últimos años. Por un lado tenemos modelos que modifican la acción de gravedad usual sustituyendo los productos usales entre campos en ella por el producto-$\star$. Uno de los problemas que aparecen inmediatamente en esta aproximación viene del hecho de que el producto-$\star$ de Moyal no es invariante ante difeomorfismos, la simetría básica de la teoría. Una solución a este problema ha sido propuesta recientemente en [10] basada en la idea de simetrías twist. A pesar de que esta aproximación tiene algunos logros importantes (como recuperar la idea de que el producto-$\star$ de tensores es un tensor del rango que uno esperaría intuitivamente), tiene también algunos problemas ineludibles, entre ellos el que está basada en técnicas del espacio–tiempo plano. Más aun, ha sido mostrado [1] que la deformación de la gravedad de Einstein en este contexto no coincide con la deformación obtenida desde el punto de vista de teoría de cuerdas. Otras aproximaciones para deformar la gravedad basadas en la deformación de teorías de norma usando el mapeo de Seiberg-Witten han sido intentadas. Este tipo de deformaciones tienen varios problemas en el hecho de que la derivada covariante no se puede usar para construir un producto-$\star$ de Moyal asociativo.

En el capítulo 4 presentaremos una idea diferente para deformar la gravedad usando las herramientas de deformaciones consistentes de teorías de norma (en el apéndice C presentamos las ideas básicas de este método). La idea está basada en una deformación no polinomial de la acción de Maxwell que modifica tanto la acción como la simetría de norma de una manera peculiar mezclando propiedades de la simetría de norma original con simetrías globales del espacio–tiempo [24]. Inspirándose en la acción deformada resultante es posible reconstruir la acción de la relatividad general como una teoría de norma de las traslaciones del espacio–tiempo. La base de la deformación en cuestión es de hecho la localización de simetrías globales de la métrica plana del espacio–tiempo. La simetría de norma deformada que resulta incorpora la invariancia de la acción deformada bajo difeomorfismos.

Llevando a cabo esta deformación no polinomial simultáneamente con la deformación no–conmutativa de la acción libre de Maxwell obtenemos una teoría de norma no–conmutativa que es invariante bajo difeomorfismos. En este punto aún no tendremos un modelo de gravedad no–conmutativa, sino que con la misma inspiración usada en el caso conmutativo para reconstruir el lagrangiano de la relatividad general, calcularemos las correcciones no–conmutativas correspondientes a la gravedad.

Cerraremos la presentación de este trabajo de tesis con algunas conclusiones y perspectivas sobre los temas estudiados.

RESUMEN

ASPECTOS CLÁSICOS DE TEORÍAS NO–CONMUTATIVAS: LAGRANGIANO, SIMETRÍAS, Y UNA DEFORMACIÓN DE LA GRAVEDAD

Ignacio Cortese Mombelli
Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México
Doctor en Ciencias

Esta tesis está compuesta de dos partes. En la primera parte estudiamos la definición de no–conmutatividad simpléctica en mecánica clásica como una manera de introducir operadores de coordenadas no–conmutativas en mecánica cuántica. En este contexto estamos particularmente interesados en las consecuencias de esta construcción en el espacio cofiguración. Aquí, si especificamos la información dinámica de un sistema físico mediante las ecuaciones de Newton, y proponemos una estructura simpléctica no necesariamente canónica en el formalismo de primer orden para el mismo, resulta que la última no puede darse de manera arbitraria sino que debe cumplir con ciertas condiciones de compatibilidad con la fuerza que define las ecuaciones de movimiento. De estas condiciones de compatibilidad para el caso canónico resulta que sólo los sistemas dinámicos lagrangianos pueden cuantizarse consistentemente con las relaciones de conmutación estándar entre posición y momento. Del análisis de compatibilidad análogo para el caso no–conmutativo obtenemos que es posible cuantizar consistentemente con relaciones no–conmutativas sistemas cuyas ecuaciones de movimiento no tienen lagrangiano. Sorpresivamente, para los mismos sistemas es posible construir una formulación variacional en el espacio configuración considerando un sistema au-

xiliar de tercer orden que tiene como un subconjunto de soluciones todas las órbitas del sistema de segundo orden de partida.

En la segunda parte tratamos dos temas en teorías de campos no–conmutativas (TCNC) que están siendo debatidos intensamente en la literatura. El primer tema es la invariancia de la acción en estas teorías asociada con simetrías del espacio–tiempo. El segundo tema es una propuesta de construcción de un modelo de gravedad no–conmutativa basado en el método de deformaciones consistentes de teorías de norma. Sobre la implementación de simetrías del espacio–tiempo proponemos una implementación de la invariancia de Lorentz en TCNC interpretando los parámetros no–conmutativos como las componentes de un tensor covariante. Más que la invariancia de estos parámetros, la guía que usamos es la invariancia del producto de Moyal con el que se define el lagrangiano de una TCNC en el formalismo de Weyl-Wigner-Moyal.

En contraste con las transformaciones de Lorentz del espacio–tiempo, la invariancia ante traslaciones puede implementarse de la manera usual en teoría de campos independientemente de la interpretación que pongamos sobre los parámetros no–conmutativos. Usaremos este hecho para la construcción de un modelo de gravedad no–conmutativa. La idea es hacer locales estas simetrías globales de la métrica de fondo de una teoría de norma mediante un procedimiento indirecto que proviene de hacer una deformación consistente de la misma. Haremos luego una identificación de una teoría para la gravedad definiendo un diccionario entre las variables de la teoría de norma deformada con las variables de la gravedad en la versión de primer orden en términos de las tétradas. La generalización de esta construcción al caso no–conmutativo nos permitirá eludir algunos obstáculos encontrados en otras aproximaciones con el mismo objetivo.

ABSTRACT

CLASSICAL ASPECTS OF NONCOMMUTATIVE THEORIES: LAGRANGIAN, SYMMETRY, AND A DEFORMATION OF GRAVITY

Ignacio Cortese Mombelli

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias

This thesis has two parts. We dedicated the first part to study the definition of symplectic noncommutativity in classical mechanics which leads under canonical quantization to noncommutative coordinate operators in quantum mechanics. In this context we are particularly interested in the consequences in configuration space coming from this setup. If we specify the dynamical content of a physical system through its Newtonian equations of motion, and we give a noncanonical symplectic structure in the first order formalism for the same physical system, the later can not be arbitrary, but must satisfy some compatibility conditions with the force defining the equations of motion. This analysis has been studied in the canonical case and the result is that only Lagrangian systems can be consistently quantized with standard commutation relations between coordinates and momenta operators. From the noncommutative generalization we conclude that some non Lagrangian systems can be consistently quantized with noncommutative relations between coordinate operators. Surprisingly, for those systems of equations there is a variational formulation in configuration space through a third order auxiliary system of differential equations. The space of solutions of the original equations of motion form a solution subset of this auxiliary system.

In the second part we deal with two issues in noncommutative field theory (NCFT) under intensive debate in recent literature. On one hand we study the invariance of the action of any of these theories associated to spacetime symmetries. On the other hand we construct a noncommutative gravity model based on the consistent deformations of gauge theories method. To implement spacetime symmetries in NCFT we interpret the noncommutative parameters as the components of a covariant tensor, and as a consequence we are able to achieve Lorentz invariance in the usual way. Instead of the strict invariance of these parameters we use as guidance the invariance of the Moyal product which is used to define the Lagrangian of a NCFT in the Weyl-Wigner-Moyal formalism.

In contrast to Lorentz transformations, invariance under translations are implemented in the usual way in field theory independently of the interpretation we use for the noncommutative parameters. This is because these symmetry transformations leave strictly invariant the noncommutative relations between coordinates. We will use this fact to construct a noncommutative gravity model. The general idea is to gauge these global symmetries of the background using a particular consistent deformation of a gauge theory. Then we identify a gravity theory with a dictionary between the variables in the deformed gauge theory and the variables of a theory for gravity in the first order formalism, where the tetrads are the basic degrees of freedom. The noncommutative generalization will be free of some obstacles other approaches have aiming in the same direction.

CAPÍTULO 1

Compatibilidad de la dinámica clásica de partículas con la no–conmutatividad del espacio

La idea de modelar con coordenadas no–conmutativas la transición del espacio–tiempo de una "fase" suave a una diferente, tal vez discreta o cuántica, ha motivado a varios autores para estudiar los efectos o consecuencias que puede tener la no–conmutatividad en el contexto de la mecánica cuántica de modelos simples de partículas. Una aproximación para estudiar estas consecuencias consiste en la cuantización canónica de un paréntesis de Poisson clásico "deformado" para funciones de las variables del espacio fase. Este paréntesis sería tal que evaluado en las coordenadas da como resultado la matriz de las relaciones no–conmutativas entre los operadores cuánticos correspondientes:

$$\{x^i, x^j\} = \theta^{ij} \Longrightarrow [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}.$$

Un sistema dinámico deformado con coordenadas no–conmutativas en el sentido anterior se define en el formalismo de primer orden de la mecánica clásica tomando una estructura simpléctica no estándar (cuya inversa define el paréntesis de Poisson mencionado), y la misma función hamiltoniana que se asocia usualmente al sistema dinámico que se está deformando. Esta construcción aparece como la manera más natural para introducir no–conmutatividad en la mecánica cuántica. La dinámica clásica de primer orden deformada puede después analizarse en el espacio configuración despejando las ecuaciones de movimiento de segundo orden para las coordenadas.

En este contexto nosotros estamos interesados precisamente en las consecuencias que puede tener en el espacio configuración la introducción de no–conmutatividad simpléctica en un formalismo de primer orden. En particular, nos interesan algunos aspectos de la formulación variacional de sistemas dinámicos definidos en este contexto, específicamente en la existencia o no del lagrangiano de segundo orden para los mismos.

Es pertinente advertir al lector sobre el carácter que tienen este capítulo y el siguiente. Nos proponemos analizar algunos sistemas dinámicos clásicos en los formalismos de primer y segundo orden, siempre con la mirada en que la cuantización de los mismos se llevaría a cabo por el método canónico o cualquiera equivalente. En otras palabras, las modificaciones a las teorías ordinarias que proponemos no tienen el objeto de plantear métodos de cuantización diferentes o alternativos, sino especular con cierta información o estructura de estos sistemas dinámicos que los métodos tradicionales de cuantización no habrían distinguido, y la resolución de los mecanismos experimentales o fenomenológicos tampoco[1].

Así, asumiendo que la concepción estándar de cuantización de teorías clásicas es válida, definimos la mecánica cuántica no–conmutativa de un sistema físico cuantizando canónicamente un paréntesis de Poisson correspondiente a una estructura simpléctica deformada en el formalismo de primer orden para el análogo clásico correspondiente a dicho sistema. Si quisiéramos hacer la cuantización del mismo sistema en el espacio configuración, tomaríamos el lagrangiano que da las ecuaciones de movimiento de segundo orden del sistema para introducirlo en la integral de caminos de Feynman. En el caso no–conmutativo esto no será posible, pues en el caso genérico este lagrangiano no existe. Tendremos que tomar un punto de partida diferente para confrontar a un sistema dinámico definido en el espacio configuración con su cuantización.

Este primer capítulo de la tesis lo hemos organizado en tres secciones con el siguiente contenido. En la primera sección estudiaremos la forma general que tienen los sistemas dinámicos de primer orden definidos en términos de una estructura simpléctica y una función hamiltoniana. Con base en esta forma general, presentamos la aproximación que ha sido utilizada por varios autores para definir una teoría clásica a partir de la cual (con los métodos de cuantización tradicionales) ha sido construída una mecánica cuántica no–conmutativa. En la segun-

[1]En el esquema general uno supone que los parámetros de no–conmutatividad serían muy pequeños, mucho más pequeños que cualquier constante o parámetro característico de estos experimentos u observaciones.

En el caso estándar o "conmutativo", la cuantización canónica del paréntesis $\{x^i, p_j\} = \delta^i_j$ incorpora las unidades apropiadas en el conmutador de los operadores correspondientes a estas variables mediante $\hbar$, y decimos que la descripción de un fenómeno o experimento no puede desdeñar aspectos cuánticos del sistema físico en cuestión si la cantidad de acción involucrada en la evolución del mismo es (del orden de o) comparable a $\hbar$.

De manera análoga, la cuantización canónica de las relaciones $\{x^i, x^j\} = \theta^{ij}$ deberá incorporar las unidades correspondientes en el conmutador entre los operadores de posición mediante una constante ϑ con unidades de longitud al cuadrado (pues los parámetros θ^{ij} en estas relaciones son cantidades adimensionales) que sería comparable tal vez al cuadrado de la longitud de Planck.

da sección analizaremos las ecuaciones de movimiento de segundo orden para las coordenadas no–conmutativas, y la posibilidad de que las mismas provengan de una función lagrangiana (de segundo orden). El resultado de este análisis es que no existe un lagrangiano cuadrático en las velocidades para la dinámica de estos sistemas físicos no–conmutativos. Sin embargo, existe un lagrangiano para dicha dinámica que depende de todas las derivadas de las coordenadas con respecto al tiempo (y en este sentido no–local).

La última sección constituye el núcleo del capítulo. Aquí presentaremos un análisis de compatibilidad o consistencia dinámica entre un sistema de ecuaciones de movimiento de segundo orden dado y la estructura simpléctica no–conmutativa del formalismo de primer orden para el mismo. Este tipo de análisis tiene antecedente en un resultado no publicado de Feynman donde muestra que la única interacción para una partícula cuántica que sea compatible con localidad y las relaciones de conmutación canónicas entre los operadores de posición y momento es la fuerza de Lorentz de la electrodinámica. Al parecer[2] la intención original de Feynman contemplaba la posibilidad de detectar física compatible con mecánica cuántica que no necesariamente fuera de la forma lagrangiana o hamiltoniana. Sin embargo, ha sido mostrado que las hipótesis mismas de su análisis llevan implícita una conexión con el problema inverso del cálculo de variaciones sobre la existencia del lagrangiano para la dinámica en cuestión [81].

El problema de Feynman ha llamado la atención de varios autores. Ha sido extendido por ejemplo para incluir grados de libertad internos (espín) en el conexto de variedades de Poisson más generales que la simpléctica (ver [29] y las referencias ahí citadas). Nosotros aquí presentaremos la versión del problema en el contexto de estructuras simplécticas no–conmutativas, que llevan implícita de alguna ma-

[2]Este análisis de Feynman fue rescatado por Dyson [61] y reinterpretado como una deducción independiente del electromagnetismo.

nera la introducción de no–localidad. Este análisis y los resultados que obtenemos lo hemos reportado en [47].

1.1. No–conmutatividad en mecánica clásica

Para en parte fijar la notación con la que trabajaremos en este capítulo y el siguiente[3], en esta sección presentamos un breve resumen de la estructura general del formalismo de primer orden de la mecánica clásica. El objeto principal es presentar la forma de los lagrangianos de primer orden, y explicar cómo se introduce no–conmutatividad de las coordenadas a través de una elección particular de la estructura simpléctica que define el paréntesis de Poisson entre funciones en el espacio fase.

1.1.1. Sistemas dinámicos y formalismo de primer orden

Dado un sistema dinámico no singular[4] de partículas con N grados de libertad representados por las variables de configuración $x^i(t)$ funciones del tiempo, y que interactúan entre ellas o con un campo externo de acuerdo con las ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{M}_i(\ddot{x}, \dot{x}, x; t) \equiv \ddot{x}^i(t) - F^i(x, \dot{x}; t) = 0 \tag{1.1}$$

para $i = 1, \ldots, N$, la cuantización canónica del mismo [53] se realiza usualmente a partir del formalismo clásico de primer orden en el espacio fase para dicho sistema, definido por una estructura o matriz simpléctica σ y una función hamil-

[3] A menos que sea explícitamente indicado, en toda la tesis usaremos la convención de Einstein sobre la suma de índices repetidos, y los parámetros como la masa, la frecuencia, etc. de sistemas físicos en particular se tomarán igual a 1.

[4] En esta tesis trabajaremos con sistemas dinámicos sin constricciones en el sentido de Dirac [54].

toniana H. Así visto, el espacio fase constituye una variedad simpléctica con N coordenadas y N momentos que denotamos de manera conjunta con $z^a = (x^i, p_j)$, para $a = 1, \ldots, 2N$. La estructura simpléctica es una matriz antisimétrica cuyas entradas son las componentes de la 2-forma simpléctica $\Omega \equiv \frac{1}{2}\sigma_{ab} dz^a \wedge dz^b$ definida en este espacio, no degenerada (que hace a σ invertible), y cerrada ($d\Omega = 0$) por construcción. Con la matriz inversa de σ, cuyas componentes denotamos con σ^{ab}, definimos el paréntesis de Poisson de la teoría como

$$\{f(z), g(z)\} = \frac{\partial f}{\partial z^a}\sigma^{ab}\frac{\partial g}{\partial z^a},$$

para $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones de las variables del espacio fase. Notar que la matriz inversa de la matriz simpléctica está hecha de los paréntesis de Poisson entre las variables dinámicas

$$\sigma^{ab} = \{z^a, z^b\}.$$

Mientras que existe una forma estándar para la estructura simpléctica en este espacio dada por la matriz

$$\sigma = \omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

(aquí 0 y $\mathbb{1}$ son matrices cuadradas de $N \times N$, con entradas todas cero en el primer caso, y las de la matriz identidad en el segundo), el hamiltoniano tendrá en general la forma apropiada para reproducir las ecuaciones de primer orden que representan al sistema dinámico. Si este sistema es tal que las ecuaciones $\mathcal{M}_i(\ddot{x}, \dot{x}, x; t)$ provienen de un lagrangiano $L(x, \dot{x}) = T - V$ con T la energía cinética y V el potencial de interacción, el formalismo de primer orden canónico consiste en el hamiltoniano de la forma $H = T + V$ e igual a la energía del sistema (con T escrita en términos de los momentos canónicos $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$), y la estructura simpléctica dada por[5] ω. Las ecuaciones de primer orden canónicas se calculan con el lagrangiano (de primer orden) $L = \frac{1}{2}\omega_{ba}z^b\dot{z}^a - H(z) \simeq p_i\dot{x}^i - H(x,p)$ en el principio variacional ($\simeq$ significa igualdad módulo la derivada total de alguna función de las variables del espacio fase respecto al tiempo). Sin embargo, esta no es la única formulación de primer orden posible para tal sistema. De hecho, cualquier sistema de ecuaciones $\mathcal{M}_i(\ddot{x}, \dot{x}, x; t)$, tengan o no lagrangiano, puede reescribirse como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\dot{z}^a - f^a(z;t) = 0 \tag{1.2}$$

con el doble de variables, para el que podemos plantear el problema inverso del cálculo de variaciones de la siguiente manera [80].

Podemos construir un lagrangiano para el sistema de ecuaciones dado por

$$\frac{\delta L}{\delta z^a} = \sigma_{ab}(z)(\dot{z}^b - f^b) \tag{1.3}$$

(denotaremos con $\frac{\delta L}{\delta y}$ la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la variación del lagrangiano respecto a la variable y), donde σ_{ab} es una matriz antisimétrica no singular, estudiando las condiciones que resultan para la función lagrangiana general

$$L = \ell_a(z)(\dot{z}^a - f^a). \tag{1.4}$$

Usando (1.3) podemos ver que $\ell_a(x)$ debe satisfacer la condición

$$\mathcal{L}_f \ell_a = \frac{\partial \ell_a}{\partial z^b} f^b + \frac{\partial f^b}{\partial z^a}\ell_b = 0, \tag{1.5}$$

donde $\mathcal{L}_f$ es la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial f^a, para que las ecua-

[5] Las variables para el espacio fase en este caso son $z^i = x^i$, y $z^{i+N} = p_i$.

ciones de movimiento asociadas al lagrangiano (1.4) sean equivalentes al conjunto (1.2). Así, σ estaría dada por este "potencial" de acuerdo con

$$\sigma_{ab} = \frac{\partial \ell_b}{\partial z^a} - \frac{\partial \ell_a}{\partial z^b}. \tag{1.6}$$

La condición (1.5) siempre tiene solución (al menos localmente), y por lo tanto siempre es posible construir un principio variacional para este sistema de primer orden.

En particular, el sistema (1.2) tiene forma hamiltoniana si podemos encontrar una función $H(z)$ tal que

$$\ell_a f^a = H(z), \qquad \sigma_{ab} f^b = \frac{\partial H}{\partial z^a}. \tag{1.7}$$

Al revés, dada $H(z)$ de un sistema hamiltoniano, la función ℓ_a satisface (1.5), y la estructura simpléctica está dada por σ_{ab} ($\sigma = d\ell$). En este caso, si la estructura simpléctica es constante el lagrangiano de primer orden $L = \frac{1}{2}\sigma_{ba} z^b \dot{z}^a - H(z)$ en el principio variacional da las ecuaciones $\frac{\delta L}{\delta z^a} = \sigma_{ab}\dot{z}^b - \frac{\partial H}{\partial z^a} = 0$ equivalentes al sistema (1.2).

Es sencillo convencerse que el potencial ℓ_a y la estructura simpléctica σ relacionada con éste no son únicos. Para ilustrar esta situación veamos el siguiente ejemplo donde definimos el sistema de ecuaciones no lagrangianas en $N = 2$

$$\ddot{x} + x = 0$$
$$\ddot{y} + \dot{x} = 0.$$

Este sistema puede reescribirse en términos del sistema de ecuaciones de primer orden

$$
\dot{z}^1 = z^3, \qquad \dot{z}^3 = -z^1,
$$
$$
\dot{z}^2 = z^4, \qquad \dot{z}^4 = -z^3,
$$

con $z^1 = x,\ \ z^2 = y,\ \ z^3 = \dot{x},\ \ z^4 = \dot{y}$, que provienen del lagrangiano construído con la estructura simpléctica

$$
\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 \\ -\sigma_{12} & 0 & 0 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{12} \\ 0 & \sigma_{12} & -\sigma_{12} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.8}
$$

y el hamiltoniano $H = -\frac{\sigma_{13}}{2}(z^1)^2 - \frac{(\sigma_{12}+\sigma_{13})}{2}(z^3)^2 + \frac{\sigma_{12}}{2}(z^4)^2 + \sigma_{12}z^1z^4$. Mientras σ_{12}, σ_{13} no anulen el determinante de σ dado por $\det(\sigma) = (\sigma_{12})^2(\sigma_{12}+\sigma_{13})^2$, éstas componentes pueden ser cualquier número real[6]. Esto es una muestra del hecho general sobre la no unicidad de σ y H para un sistema de primer orden dado. Es decir, una vez definido este sistema de ecuaciones de primer orden, hay más de una pareja (σ, H) tal que el lagrangiano de primer orden construído con ellas da este sistema de ecuaciones (obviamente una definición diferente de este sistema partiendo de las ecuaciones de segundo orden tendrá una estructura simpléctica y un hamiltoniano diferentes también). La equivalencia clásica de dos formula-

[6]En realidad sobre las componentes de σ hay otra condición (que en este ejemplo particular se puede lograr para cualquier elección de las mismas permitida por $\det(\sigma) \neq 0$). El principio variacional de primer orden que definimos con ella y el hamiltoniano respectivo requiere de condiciones en los bordes, en los tiempos inicial y final. En el caso hamiltoniano canónico estas provienen de las coordenadas x^i evaluada en estos tiempos. Esta información no es más ni menos que la que proviene de las condiciones iniciales del problema de segundo orden original. En el caso general, en el formalismo de primer orden (canónico o no) se deben fijar en los bordes sólo la mitad de las variables, y para ello se escogen cualesquiera variables suficientes que "conmuten" en el paréntesis de Poisson definido con la matriz inversa de σ.

ciones de primer orden diferentes para el mismo sistema está garantizada por el teorema de Darboux [6]. Por ejemplo, si un sistema de primer orden dado tiene una σ y un hamiltoniano H, de este teorema se desprende que siempre es posible encontrar un conjunto de variables para el espacio fase en el que la estructura simpléctica está dada por ω.

Para ver un ejemplo explícito de dos formulaciones simplécticas diferentes para un mismo sistema de ecuaciones y la transformación de Darboux que las conecta, veamos el caso del oscilador armónico en $N = 2$. Las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{x} + x = 0$$
$$\ddot{y} + y = 0$$

provienen del lagrangiano $L_{OA} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, del que podemos calcular los momentos canónicos $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$ y $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y}$. El lagrangiano de primer orden canónico $L = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - [\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)]$ tiene como ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \delta x: &\quad \dot{p}_x = -x, &\qquad \delta p_x: &\quad \dot{x} = p_x, \\ \delta y: &\quad \dot{p}_y = -y, &\qquad \delta p_y: &\quad \dot{y} = p_y. \end{aligned}$$

En la notación $z^1 = x,\ z^2 = y,\ z^3 = p_x,\ z^4 = p_y$ estas ecuaciones de movimiento se escriben

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= z^3, &\qquad \dot{z}^3 &= -z^1, \\ \dot{z}^2 &= z^4, &\qquad \dot{z}^4 &= -z^2, \end{aligned}$$

y para ellas el lagrangiano de primer orden más general tiene como estructura simpléctica

$$\sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & -\mathbb{A} \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\sigma_{13} & -\sigma_{14} \\ -\sigma_{14} & -\sigma_{24} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{B} = \sigma_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} z^t \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ -\mathbb{B} & \mathbb{A} \end{pmatrix} z$$

(z es el vector columna con componentes z^a). Sobre las componentes σ_{ab} sólo hay un par de condiciones. La primera es que no anulen el determinante de la matriz simpléctica: $\det(\sigma) = [\sigma_{13}\sigma_{24} - (\sigma_{12})^2 - (\sigma_{14})^2]^2 \neq 0$; la segunda es que conmuten en el paréntesis de Poisson suficientes variables para fijar en los bordes de acuerdo con la prescripción ordinaria del principio variacional (ver pie de página 6).

El lagrangiano de primer orden canónico corresponde a la elección $\mathbb{A} = \mathbb{1}$ y $\mathbb{B} = 0$, para la que $\sigma = \omega$. Cualquier otra elección (que cumpla con los dos requisitos mencionados) constituye una descripción variacional diferente y válida para el sistema de ecuaciones de primer orden definidas para el oscilador armónico. Para cualquiera de estas descripciones, una transformación de Darboux que mapea σ a ω es el cambio de variables $z' = \mathbb{D}z$ con

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -\sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_{12}\sigma_{14}}{e} & 0 & 1 & \frac{\sigma_{14}\sigma_{24}}{e} \\ \sigma_{12} & 0 & -\sigma_{14} & -\sigma_{24} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad e \equiv \sigma_{13}\sigma_{24} - (\sigma_{12})^2.$$

El lagrangiano de primer orden en las nuevas variables z' tendrá la forma

$$L = \frac{1}{2} z'^t \omega \dot{z}' - \frac{1}{2} z'^t h z', \quad \text{con} \quad h = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_{24}}{e} & \frac{\sigma_{14}\sigma_{24}}{e} & 0 & -\frac{\sigma_{12}}{e} \\ \frac{\sigma_{14}\sigma_{24}}{e} & -\sigma_{24} & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} & -\frac{e\sigma_{13}}{e-(\sigma_{14})^2} & -\frac{\sigma_{13}\sigma_{14}}{e-(\sigma_{14})^2} \\ -\frac{\sigma_{12}}{e} & 0 & -\frac{\sigma_{13}\sigma_{14}}{e-(\sigma_{14})^2} & -\frac{\sigma_{13}}{e-(\sigma_{14})^2} \end{pmatrix}.$$

A pesar de la equivalencia clásica de la formulación canónica para $\mathbb{A} = \mathbb{1}$ y $\mathbb{B} = 0$, y la correspondiente a cualquier otra elección permitida de estas matrices, es importante notar que las teorías cuánticas que provienen de estas dos formulaciones no son equivalentes. Esto se debe a que la transformación $\mathbb{D}$ no es canónica (dado que cambia la estructura simpléctica y así el paréntesis de Poisson), y por lo tanto la misma transformación en términos de los operadores cuánticos $\hat{z}^a$ correspondientes a las variables del espacio fase (en el esquema de Heisenberg por ejemplo) no es unitaria.

La libertad de elección de la pareja (σ, H) a nivel clásico implica que no tendríamos una motivación *a priori* para preferir una estructura simpléctica por encima otra; a nivel cuántico esta libertad implica ambigüedades en la cuantización de un sistema dinámico dado, ambigüedades que no tienen que ver con las más comunes asociadas al problema de la elección de ordenamiento o del producto interno en el espacio de Hilbert de estados físicos, sino con la inequivalencia mencionada en el párrafo anterior [97]. Es así que esta libertad clásica (y ambigüedad cuántica) nos permite preescibir una manera de introducir no–conmutatividad en mecánica cuántica.

Para un sistema dinámico dado uno podría por ejemplo elegir en su descripción clásica de primer orden una σ particular[7] para definir con su inversa un paréntesis

[7]Siempre que su determinante no se anule y “conmuten” en el paréntesis de Poisson sufi-

de Poisson tal que evaluado en las coordenadas de como resultado una constante diferente de cero

$$\{x^i, x^j\} = \theta^{ij} \neq 0. \tag{1.9}$$

Este paréntesis de Poisson cuantizado con las reglas estándar da relaciones no–conmutativas entre los operadores asociados a las coordenadas de la posición de una partícula. En los últimos años esta manera de introducir no–conmutatividad en mecánica cuántica ha sido estudiada desde el punto de vista canónico y en el contexto de la integral funcional [45, 63–66].

Para definir un modelo de estos, como por ejemplo el potencial central no–conmutativo no se parte de algunas ecuaciones de movimiento de segundo orden como (1.1), sino que se elige una estructura simpléctica tal que se cumplan las relaciones (1.9) con θ^{ij} las componentes de una matriz antisimétrica, real y constante, y se toma el hamiltoniano típico para el problema del potencial central (en el espacio estándar o "conmutativo"). Luego se cuantiza el sistema con las reglas de correspondencia usuales, haciendo operadores las variables del espacio fase, conmutadores los paréntesis de Poisson entre éstas, y calculando una base apropiada para el espacio de Hilbert. Las representaciones de los operadores asociados a las coordenadas y los momentos se ven modificadas con respecto a la cuantización estándar de los mismos sistemas físicos [104].

En este trabajo no abordaremos este tipo de problemas asociados a la no covariancia del método de cuantización canónica [97] en el sentido de la inequivalencia expresada en los párrafos anteriores. Nos interesa más bien analizar en el propio contexto clásico algunos problemas que implica la introducción de no–

cientes variables para fijar en los bordes del principio variacional.

conmutatividad simpléctica en el espacio de las variables de configuración. Para ello primero veremos cómo es la estructrua general de este tipo de no–conmutatividad.

1.1.2. Estructura general de sistemas de primer orden y sistemas dinámicos no–conmutativos

Tomemos como punto de partida un conjunto de $2N$ ecuaciones de movimiento de primer orden en el espacio fase de la forma (1.2) para las variables z^a (sin dependencias explícitas en el tiempo). La estructura general del lagrangiano de primer orden para este sistema dinámico será

$$L = \ell_a(z)\dot{z}^a - H(z), \tag{1.10}$$

donde la matriz simpléctica está dada por $\sigma(z) = d\ell(z)$ con d la derivada exterior (en componentes $\sigma_{ab} = \frac{\partial \ell_b}{\partial z^a} - \frac{\partial \ell_a}{\partial z^b}$), y H es el hamiltoniano. La estructura simpléctica tendrá la forma general dada por la matriz

$$\sigma = \begin{pmatrix} B & -A \\ A^t & C \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

donde B y C son matrices antisimétricas de $N \times N$, y A^t es la matriz transpuesta de A (ambas también de $N \times N$). Se define el paréntesis de Poisson para funciones en este espacio como

$$\{f(z), g(z)\} = \frac{\partial f}{\partial z^a}\sigma^{ab}\frac{\partial g}{\partial z^a}, \tag{1.12}$$

con σ^{ab} las componentes de la matriz inversa de σ dada por

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} (A^t)^{-1} C M^{-1} A^{-1} & N^{-1}(A^t)^{-1} \\ -M^{-1}A^{-1} & A^{-1}BN^{-1}(A^t)^{-1} \end{pmatrix},$$

con $M = 1 + A^{-1}B(A^t)^{-1}C$ y $N = 1 + (A^t)^{-1}CA^{-1}B$.

Para el paréntesis de Poisson entre las variables z^a se tiene que

$$\{z^a, z^b\} = \sigma^{ab},$$

de tal manera que si las primeras N variables z^i corresponden a las coordenadas x^i del espacio configuración, la no–conmutatividad entre éstas se introduce mediante la matriz C, pues se tiene que

$$\{x^i, x^j\} = ((A^t)^{-1} C M^{-1} A^{-1})^{ij}.$$

De manera similar, no–conmutatividad entre las variables de momento se obtiene mediante la matriz $B \neq 0$. Esta no–conmutatividad no llama mucho la atención porque se puede ignorar haciendo una redefinición de los momentos (el mismo estilo de redefinición que se utiliza en el acomplamiento mínimo de un potencial electromagnético con una partícula cargada).

Aunque los argumentos que presentaremos a continuación son completamente generales, para darle simplicidad a algunas expresiones tomaremos de ahora en adelante x^i como coordenadas cartesianas. Para definir un sistema dinámico no–conmutativo tomamos una estructura simpléctica constante con $C \neq 0$, y como hamiltoniano $H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ para $z^i = x^i$ y $z^{i+N} = p_i$ los momentos. La identidad o "nombre" del sistema físico está aquí representada por el potencial $V(x)$. Las ecuaciones de movimiento que vienen del lagrangiano (1.10) en el caso de σ constante son

$$\frac{\delta L}{\delta z^a} = \sigma_{ab}\dot{z}^b - \frac{\partial H}{\partial z^a} = 0,$$

y en el caso no–conmutativo toman entonces la forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta x^i} &= B_{ij}\dot{x}^j - A_{ij}\dot{p}_j - \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0, \\ \frac{\delta L}{\delta p_i} &= (A^t)_{ij}\dot{x}^j + C_{ij}\dot{p}_j - p_i = 0. \end{aligned}$$

Para la estructura simpléctica tal que

$$\{x^i, x^j\} = \theta^{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x^i, p_j\} = \delta^i_j, \tag{1.13}$$

correspondiente a la elección $A = \mathbb{1}$, $B = 0$, y $C = \theta$, las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x}^i + \theta^{ij}\dot{p}_j - p_i = 0, \tag{1.14a}$$

$$-\dot{p}_i - \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0 \tag{1.14b}$$

representan al *sistema dinámico no–conmutativo para el potencial V*.

Es frecuente en la literatura hacer sobre este sistema la transformación de Darboux que "regresa" la estructura simpléctica no–conmutativa a la forma estándar dada por la matriz ω. Por ejemplo, en el caso de la estructura simpléctica (1.11) con $B = 0$ esta transformación es $z' = \mathbb{D}z$, con

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} A^t & \frac{1}{2}C \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Luego de esta transformación el lagrangiano de primer orden en este caso toma la forma

$$L = \frac{1}{2}z'^t\omega\dot{z}' - \Big(\frac{1}{2}p'^t p' + V[(A^{-1})^t x' - \frac{1}{2}(A^{-1})^t C p']\Big),$$

donde se puede ver que el potencial puede adquirir una dependencia de los momentos. La cuantización de este sistema, además de constituir una teoría cuántica diferente a la que se obtiene de cuantizar el sistema clásico formulado con la σ original y $H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$, implica una dependencia de V en los momentos que puede hacer a la ecuación de Schrödinger muy complicada, o la integración de estas variables en la integral funcional prácticamente imposible.

En adelante dejaremos el contexto de primer orden para la mecánica clásica como la definimos en esta sección, y nos propondremos analizar las consecuencias de este tipo de no–conmutatividad en el espacio configuración. Así, en la siguiente sección analizaremos la forma de las ecuaciones de segundo orden que se despejan de (1.14) para las coordenadas x^i, y si las mismas pueden ser formuladas en términos de un lagrangiano en el espacio tangente.

1.2. Ecuaciones de segundo orden y lagrangiano

En esta sección nos preguntamos si es posible construir un lagrangiano para las ecuaciones de segundo orden que se despejan del sistema (1.14) para las coordenadas x^i del espacio configuración. Aunque es posible primero hacer la transformación de Darboux que "endereza" la estructura simpléctica escribiendo el sistema dinámico en un conjunto de variables canónicas conmutativas y luego abordar el problema que nos proponemos, esto implicaría mezclar las coordenadas y momentos originales en unas nuevas coordenadas cuya interpretación geométrica no nos es clara. Aún más, aunque el lagrangiano para las ecuaciones de segundo orden de estas nuevas coordenadas existiera, no sería un lagrangiano para las ecuaciones de movimiento de las variables x^i.

1.2.1. Ecuaciones de movimiento para las coordenadas

De las ecuaciones de movimiento no-conmutativas de primer orden (1.14) para un hamiltoniano de la forma $H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ y una estructura simpléctica tal que se tienen los paréntesis (1.13) es sencillo despejar las ecuaciones de movimiento de segundo orden para las coordenadas. Tomando $\dot{p}_i$ de (1.14b) y sustituyéndolo en (1.14a) luego de derivar esta última ecuación con respecto al tiempo, nos deja el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} + \theta^{ij}\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x^j}, \tag{1.15}$$

que define la *fuerza no–conmutativa para el potencial V*

$$F^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} + \theta^{ij}\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x^j}. \tag{1.16}$$

Hay un par de observaciones pertinentes sobre el despeje de ecuaciones de movimiento que acabamos de hacer. La primera es en relación al mapeo de condiciones iniciales del sistema de primer orden (1.14). El mapeo correcto de las condiciones iniciales $x^i(t_0) = x^i_0$, $p_j(t_0) = p_{j_0}$ en el espacio fase (donde t_0 es el tiempo inicial) al espacio configuración debe ser

$$x^i(t_0) = x_0^i,$$
$$\left[\dot{x}^i - \theta^{ik}\frac{\partial V}{\partial x^k}\right](t_0) = p_{i0}.$$

Este mapeo es altamente no estándar, pues involucra a la dinámica a través de la matriz simpléctica σ y el potencial $V(x)$, además de las usuales posiciones, velocidades, y momentos iniciales. Obviamente se recupera el mapeo usual en el caso estándar o conmutativo cuando $\theta \to 0$.

La segunda observación es que el despeje de momentos que hicimos no es "variacionalmente admisible", o en otras palabras, como variables auxiliares. En la sección que sigue analizamos más de cerca este problema, pero el resultado esencial es que como los momentos no son variables auxiliares no es posible construir el lagrangiano de segundo orden para las ecuaciones (1.15) a partir del lagrangiano de primer orden (1.10) sustituyendo los momentos como función de las coordenadas y velocidades.

1.2.2. Variables auxiliares y lagrangiano no–local para las ecuaciones (1.15)

Consideremos la acción

$$S = \int dt L(x, \dot{x}, \ddot{x}, ...),$$

donde el lagrangiano depende de las variables $x^a, a = 1, 2..., N$ y sus derivadas con respecto al tiempo hasta un orden finito. Las ecuaciones de Euler-Lagrange que provienen de esta acción son

$$\frac{\delta L}{\delta x^a} = \sum\nolimits_{n=0} (-1)^n D^n \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{x^a}},$$

donde D es la derivada total respecto al tiempo

$$D = \dot{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \ddot{x}^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} + \cdots + \frac{\partial}{\partial t},$$

y $\overset{(n)}{x^a} \equiv \frac{d^n x^a}{dt^n}$.

Supongamos que las coordenadas del problema pueden separarse en dos grupos

$$x^a \rightarrow (y^i, z^\alpha)$$

tal que las del segundo grupo pueden despejarse algebraicamente, usando sus propias ecuaciones de movimiento, en términos de las del primer grupo y sus derivadas

$$\frac{\delta L}{\delta z^\alpha} = 0 \Leftrightarrow z^\alpha = Z^\alpha(y^i, \dot{y}^i, \ddot{y}^i, ...). \tag{1.17}$$

El procedimiento para obtener las variables z^α en términos de las variables y^i y sus derivadas debe ser puramente algebraico[8], y en tal caso se dice que z^α son *variables auxiliares*. El lagrangiano reducido para el resto de las variables y^i se define por

$$L_R(y^i, \dot{y}^i, \ddot{y}^i, ...) = L(y^i, Z^\alpha, \dot{y}^i, \dot{Z}^\alpha, ...).$$

[8]Existen algunos ejemplos particulares donde el despeje de las variables z^α se puede hacer por integración. Hasta donde sabemos no hay una generalización sistemática de esta idea para el caso no–conmutativo.

Cuando un problema tiene variables auxiliares, el sistema de ecuaciones original

$$\frac{\delta L}{\delta y^i} = 0, \qquad \frac{\delta L}{\delta z^\alpha} = 0,$$

es equivalente al sistema

$$\frac{\delta L_R}{\delta y^i} = 0, \qquad z^\alpha = Z^\alpha.$$

Esto puede verse fácilmente usando la regla de la cadena

$$\frac{\delta L_R}{\delta y^i} = \frac{\delta L}{\delta y^i} + \frac{\delta L}{\delta z^\alpha}\frac{\partial Z^\alpha}{\partial y^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta z^\alpha}\frac{\partial Z^\alpha}{\partial \dot{y}^i}\right) + ...(-1)^k \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}}\left(\frac{\delta L}{\delta z^\alpha}\frac{\partial Z^\alpha}{\partial \overset{(k)}{y^i}}\right). \tag{1.18}$$

Las ecuaciones $\frac{\delta L}{\delta z^\alpha} = 0$ implican que $z^\alpha = Z^\alpha$ (por hipótesis) y $\frac{\delta L_R}{\delta y^i} = 0$ (por la ecuación (1.18)). También es fácil ver que las ecuaciones $\frac{\delta L_R}{\delta y^i} = 0$ y $z^\alpha = Z^\alpha$ implican que $\frac{\delta L}{\delta z^\alpha} = 0$ (por hipótesis) y $\frac{\delta L}{\delta y^i} = 0$ (por (1.18)).

Por ejemplo, en el caso hamiltoniano canónico el lagrangiano de primer orden es

$$L = \dot{x}p - \frac{1}{2}p^2 - V(x),$$

y el lagrangiano reducido luego de la eliminación de los momentos es

$$L_R = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x).$$

Si hacemos uso de la regla de la cadena (1.18) tenemos que

$$\ddot{x} + V'(x) = \frac{\delta L}{\delta x} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta p}$$

(con $V'(x) \equiv \frac{dV}{dx}$), donde se ve explícitamente la equivalencia entre los dos formalismos. Si fijamos las condiciones iniciales en x y p en un tiempo inicial t_0 para las ecuaciones de movimiento de $L(x, p, \dot{x}, \dot{p})$, entonces las condiciones iniciales para el sistema reducido $\ddot{x} + V'(x) = 0$ son las posiciones y velocidades iniciales al tiempo t_0 de la dinámica newtoniana.

Ahora, de las ecuaciones de movimiento no–conmutativas de primer orden (1.14), las que corresponden a los momentos son (1.14a), de las que se tiene que

$$p_i = \dot{x}^i + \theta^{ij}\dot{p}_j. \tag{1.19}$$

Vemos que las variables momento no son auxiliares, pues no pueden ser despejadas de sus propias ecuaciones de movimiento en términos de las coordenadas y velocidades. Lo que sí se puede hacer es despejar los momentos como funciones de las coordenadas y sus derivadas de todos los órdenes utilizando recursivamente las ecuaciones (1.19):

$$p_i = \dot{x}^i + \theta^{ii_1}\ddot{x}^{i_1} + \theta^{ii_1}\theta^{i_1 i_2}\dddot{x}^{i_2} + \cdots = \dot{x}^i + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{ii_1}\theta^{i_1 i_2}\ldots\theta^{i_{n-1}i_n} \overset{(n+1)}{x^{i_n}} \tag{1.20}$$

($i_0 \equiv i$). Podemos escribir la última expresión de una manera formal:

$$\begin{aligned}
& \delta^{ij} p_j = \dot{x}^i + \theta^{ij}\dot{p}_j \quad \Rightarrow \quad (\delta^{ij} - \theta^{ij}\frac{d}{dt})p_j = \dot{x}^i \\
\Rightarrow \quad & (1 + \theta\frac{d}{dt})_{ki}(1 - \theta\frac{d}{dt})^{ij} p_j = (1 + \theta\frac{d}{dt})_{ki}\dot{x}^i \\
\Rightarrow \quad & \delta^j_k p_j = p_k = (1 + \theta\frac{d}{dt})_{ki}\dot{x}^i,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

donde $(1 + \theta\frac{d}{dt})_{jk}$ es el operador inverso de $(1 - \theta\frac{d}{dt})^{jk}$ (dado por la serie geométrica $\frac{1}{1-\theta\frac{d}{dt}} = 1 + \theta\frac{d}{dt} + \theta^2\frac{d^2}{dt^2} + \ldots$).

Si los momentos no son variables auxiliares, no es posible sustituirlos en el lagrangiano de primer orden (1.10) para obtener el lagrangiano de segundo orden para las ecuaciones (1.15)[9]. Sin embargo, sustituyendo los momentos (1.20) en función de las coordenadas y todas las derivadas de estas respecto al tiempo en el lagrangiano de primer oden se obtiene un lagrangiano que depende de las coordenadas y sus derivadas de todos los órdenes (y en este sentido no–local), cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange tienen en su espacio de soluciones las del sistema (1.15). (Este análisis lo hemos llevado a cabo en la referencia [46].)

Por ejemplo, en el caso no–conmutativo en dos dimensiones el lagrangiano de primer orden correspondiente a un hamiltoniano de la forma $H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ es

$$L = \left(\dot{x}p_x - y\dot{p}_y + \theta\dot{p}_y p_x\right) - H(x, y, p_x, p_y), \tag{1.22}$$

de cuyas ecuaciones de movimiento se obtienen para los momentos despejados en términos de las coordenadas y todas sus derivadas respecto al tiempo

$$p_x = (1 + \theta^2 \frac{d^2}{dt^2})^{-1} \frac{d}{dt}(x + \theta\dot{y}), \quad p_y = (1 + \theta^2 \frac{d^2}{dt^2})^{-1} \frac{d}{dt}(y - \theta\dot{x}).$$

Sustituyendo estas "funciones" en (1.22) se obtiene el lagrangiano no–local en el espacio configuración

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} \circledast \dot{x} + \dot{y} \circledast \dot{y}) + \frac{\theta}{2}(\dot{x} \circledast \ddot{y} - \dot{y} \circledast \ddot{x}) - V(x, y), \tag{1.23}$$

[9] Esto no quiere decir que no hay lagrangiano para estas ecuaciones en algún caso particular. Por ejemplo, para $V = \frac{k}{2}x^i x^i$ tendríamos las ecuaciones de Newton no–conmutativas

$$m\ddot{x}^i + kx^i - k\theta^{ij}\dot{x}^j = 0,$$

para las que se tiene el lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i - \frac{k}{2}x^i x^i + \frac{k}{2}\theta^{ij}x^i\dot{x}^j$$

(θ^{ij} tiene un efecto aquí muy similar al de un campo magenético constante y homogéneo en el caso conmutativo).

donde

$$\circledast \equiv (1+\theta^2\frac{d^2}{dt^2})^{-1}.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este lagrangiano son

$$\frac{\delta L}{\delta x} = V_x + (1+\theta^2\frac{d^2}{dt^2})^{-1}\frac{d^2}{dt^2}(x+\theta\dot{y}) = 0, \tag{1.24a}$$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = V_y + (1+\theta^2\frac{d^2}{dt^2})^{-1}\frac{d^2}{dt^2}(y-\theta\dot{x}) = 0 \tag{1.24b}$$

(con $V_x \equiv \frac{\partial V}{\partial x}$ y $V_y \equiv \frac{\partial V}{\partial y}$). Tanto el lagrangiano (1.23) como las ecuaciones (1.24) se pueden ver como deformaciones del lagrangiano conmutativo estándar $L = T - V$ y sus ecuaciones de movimiento en el sentido de que estos se obtienen haciendo $\theta \to 0$.

Ahora, es sencillo ver que se cumplen las relaciones

$$\begin{pmatrix} 1+\theta^2\frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & 1+\theta^2\frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta L}{\delta x} \\ \frac{\delta L}{\delta y} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ddot{x} + \theta\dddot{y} + V_x + \theta^2 (V_x)^{\cdot\cdot} \\ \ddot{y} - \theta\dddot{x} + V_y + \theta^2 (V_y)^{\cdot\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta\frac{d}{dt} \\ -\theta\frac{d}{dt} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} + V_x - \theta (V_y)^{\cdot} \\ \ddot{y} + V_y + \theta (V_x)^{\cdot} \end{pmatrix},$$

y por lo tanto toda solución de las ecuaciones $\ddot{x} + V_x - \theta(V_y)^{\cdot} = 0$ y $\ddot{y} + V_y + \theta(V_x)^{\cdot} = 0$ que aparecen en el miembro derecho de la ecuación anterior será solución de (1.24).

En síntesis, siguiendo el algoritmo estándar que consiste en despejar los momentos de sus propias ecuaciones de movimiento de primer orden, aunque estos resultaran función de las coordenadas y de todas las derivadas de éstas (no sólo de las velocidades), es posible construir un lagrangiano no–local cuyas “ecuaciones de movimiento" tienen como soluciones las del sistema (1.15). Un ejemplo en $N = 2$ es el lagrangiano (1.23). La dependencia de este lagrangiano en todas las derivadas de las coordenadas no lo hace un objeto muy útil para trabajar con los métodos y herramientas estándar del análisis clásico en el espacio configuración. Probablemente tampoco pueda servir mucho para analizar la cuantización de sistemas no–conmutativos desde el punto de vista de la integral de caminos en el mismo. En lo que sigue no trabajaremos más con este lagrangiano, y estudiaremos la no–conmutatividad en el espacio configuración desde un punto de vista diferente.

1.3. Compatibilidad dinámica

El contenido dinámico de una teoría clásica puede especificarse de tres equivalentes maneras: Por sus ecuaciones de movimiento, por la función lagrangiana de segundo orden en el haz tangente (si esta existe), o por la de primer orden en el espacio fase construída con una estructura simpléctica y una función hamiltoniana. Sin embargo, la cuantización de una teoría requiere de información global acerca del sistema para tomar en cuenta fluctuaciones alrededor de sus soluciones clásicas. Las ecuaciones de movimiento no proveen de información suficiente en este sentido; la función lagrangiana (de segundo o primer orden) en la integral de caminos sí. En el caso de sistemas dinámicos no–conmutativos vimos que la construcción del lagrangiano en el espacio configuración tiene serios obstáculos. En esta sección presentaremos una perspectiva un tanto indirecta de este problema.

Si especificamos la dinámica de un sistema clásico mediante sus ecuaciones de movimiento de segundo orden en el espacio configuración, y simultáneamente definimos una estructura simpléctica no–conmutativa en el formalismo de primer orden correspondiente, resulta que ésta no puede ser arbitraria, sino que debe satisfacer ciertas condiciones de compatibilidad o consistencia con la fuerza de las ecuaciones de movimiento. Es decir, las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico y las relaciones de conmutación entre los operadores cuánticos asociados a las variables del espacio fase correspondiente deben ser compatibles para que la cuantización de dicho sistema se considere consistente[10].

En el caso conmutativo ($\theta = 0$) estas condiciones de compatibilidad fueron estudiadas por los autores de [81]. Suponiendo las relaciones de conmutación generales entre los operadores cuánticos correspondientes a las coordenadas y velocidades dados por

$$[\hat{x}^i, \hat{\dot{x}}^j] = iG^{ij}(\hat{x}, \hat{\dot{x}}), \quad \text{y} \quad [\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0, \tag{1.25}$$

aplican sobre las relaciones análogas en la teoría clásica (en términos del paréntesis de Poisson) la derivada respecto al tiempo

$$\frac{D}{Dt} = F^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

que es la proyección de la derivada total sobre la dirección tangente a las trayectorias clásicas que son solución de las ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{M}_i(t) = \ddot{x}^i(t) - F^i(x, \dot{x}; t)0. \tag{1.26}$$

De este sencillo cálculo resulta un conjunto de condiciones que el sistema dinámico debe cumplir, y que coinciden exactamente con las condiciones de Helmholtz del problema inverso del cálculo de variaciones irrestricto que garantiza la existencia de un lagrangiano para el sistema de ecuaciones $\mathcal{M}'_i = g_{ij}\mathcal{M}_j$ equivalente a (1.26). g_{ij} es la matriz inversa del análogo clásico de G^{ij} de las relaciones (1.25).

[10]Seguimos en el entendido de que eventualmente es con (la inversa de) esta estructura simpléctica que definiríamos los conmutadores cuánticos entre los operadores asociados a las variables del espacio fase mediante las reglas usuales de cuantización.

Estas condiciones resultan de la ecuación de “integrabilidad”

$$\frac{\delta \mathcal{M}'_i(s)}{\delta x^j(t)} = \frac{\delta \mathcal{M}'_j(t)}{\delta x^i(s)}.$$

Los autores concluyen que dado que las relaciones de conmutación (1.25) contienen la información sobre la existencia del lagrangiano para el sistema físico descrito por esas ecuaciones, sólo es consistente cuantizar sistemas dinámicos de este tipo.

En comparación con ese análisis, aquí hemos tomado la estructura simpléctica (1.11) con $C \neq 0$ correspondiente a relaciones no–conmutativas entre las coordenadas, y deducido el conjunto de condiciones de consistencia resultantes[11]. Las condiciones de compatibilidad que obtenemos no coinciden con las de Helmholtz del problema inverso para las ecuaciones de movimiento, aunque pueden escribirse como éstas pero modificadas por términos proporcionales a los parámetros θ^{ij}.

1.3.1. Condiciones para la estructura simpléctica no–conmutativa

Tomemos un sistema dinámico cuya identidad está dada por la fuerza F^i que define sus ecuaciones de movimiento de segundo orden

$$\ddot{x}^i - F^i(x, \dot{x}, t) = 0 \tag{1.27}$$

en el espacio configuración representado por la variedad M. Supongamos además que en el formalismo de primer orden para este sistema se elige una estructura simpléctica tal que se tienen los paréntesis de Poisson entre coordenadas y veloci-

[11] De la presentación que hacemos en la siguiente sección puede extraerse el porcedimiento preciso de los autores de [81] haciendo $\theta \to 0$.

dades (independientemente de cuál sea la definición de los momentos)

$$\{x^i, \dot{x}^j\} = g^{ij}(x, \dot{x}, \theta), \qquad \{x^i, x^j\} = \theta^{ij}, \tag{1.28}$$

con g^{ij} las componentes de una matriz simétrica y θ^{ij} las de una antisimétrica y constante. Decimos que la fuerza $F^i(x, \dot{x}; t)$ y las relaciones (1.28) son compatibles dinámicamente si podemos encontrar g^{ij} y una matriz b^{ij} función de g^{ij}, θ^{ij} y F^i antisimétrica tal que

$$b^{ij} = \{\dot{x}^i, \dot{x}^j\}, \tag{1.29}$$

y para $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ se cumplan la identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

y la regla de Leibniz

$$\frac{D}{Dt}\{f, g\} = \{\frac{D}{Dt}f, g\} + \{f, \frac{D}{Dt}g\}, \tag{1.30}$$

con

$$\frac{D}{Dt} = F^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{1.31}$$

la derivada direccional en la dirección tangente a las curvas solución a las ecuaciones de movimiento (1.27). La condición (1.30) no es la regla de Leibniz estándar; de hecho contiene toda la consistencia dinámica que estamos pidiendo entre la fuerza que define el campo vectorial tangente al movimiento del sistema, y el paréntesis de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$.

En resumen, dada la fuerza $F^i(x, \dot{x}; t)$ que define las ecuaciones (1.27), y que $\theta^{ij} \neq 0$, nos preguntamos si es posible encontrar g^{ij} y b^{ij} para las relaciones (1.28) y (1.29) tal que se cumplan la identidad de Jacobi y la regla (1.30) con la derivada (1.31).

En el caso $\theta^{ij} = 0$ estas condiciones de consistencia dinámica coinciden con las condiciones de Helmholtz del problema inverso del cálculo de variaciones no restringido para las ecuaciones de movimeinto (1.27) [4, 5, 81]. Si estas condiciones son satisfechas existe $L(x, \dot{x}; t)$ y g_{ij} (inversa de g^{ij}) tal que

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} = g_{ij}(\ddot{x}^j - F^j(x, \dot{x}; t)).$$

Si tales condiciones no tienen solución por un lado no existe lagrangiano para las ecuaciones de movimiento, y por otro no pueden hacerse compatibles la estructura simpléctica y la fuerza que define este sistema dinámico. Esto último implica que la cuantización del mismo no es consistente[12].

Veamos ahora cuáles son las condiciones de compatibilidad dinámica en el caso no–conmutativo. De aplicar (1.31) a la segunda relación en (1.28) se tiene

$$0 = \frac{D}{Dt}\theta^{ij} = \frac{D}{Dt}\{x^i, x^j\} = \{\dot{x}^i, x^j\} + \{x^i, \dot{x}^j\} = -g^{ji} + g^{ij},$$

que es la condición de simetría del primer paréntesis en (1.28). De manera similar se obtienen las siguientes condiciones

$$\{x^i, g^{jk}\} = \{x^j, g^{ik}\}, \tag{1.32a}$$
$$\frac{D}{Dt}g^{ij} = \frac{1}{2}\{x^i, F^j\} + \frac{1}{2}\{x^j, F^i\}, \tag{1.32b}$$
$$\frac{D}{Dt}b^{ij}(g, \theta, F) = \{\dot{x}^i, F^j\} - \{\dot{x}^j, F^i\}. \tag{1.32c}$$

La condición (1.32a) es consecuencia directa de la identidad de Jacobi

[12] Siguiendo a [81], si la función lagrangiana no existe entonces no es posible realizar la cuantización consistente del sistema dinámico. Este es el contenido del título–lema *"No Lagrangian?, No quantization!"* de ese trabajo.

$\{x^i, \{x^j, \dot{x}^k\}\} + \{x^j, \{\dot{x}^k, x^i\}\} + \{\dot{x}^k, \{x^i, x^j\}\} = 0$, (1.32b) de derivar la primera relación de (1.28) y sumarle la misma ecuación simetrizada en sus índices libres, y (1.32c) viene de derivar la definición de b^{ij} (1.29). En esta última ecuación debe usarse que

$$b^{ij} = -\frac{1}{2}\{x^i, F^j\} + \frac{1}{2}\{x^j, F^i\} = \frac{1}{2}(\theta^{jk}\frac{\partial F^i}{\partial x^k} - \theta^{ik}\frac{\partial F^j}{\partial x^k}) + \frac{1}{2}(g^{jk}\frac{\partial F^i}{\partial \dot{x}^k} - g^{ik}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^k}), \quad (1.33)$$

que se obtiene usando la definición de g^{ij}, y (1.32b). Las condiciones de compatibilidad (1.32) son ecuaciones para g^{ij} y F^i dado θ^{ij}. La solución para g^{ij} se incorpora en (1.33) para calcular b^{ij}.

Introduciendo la matriz g_{ij} inversa de g^{ij}, podemos reescribir estas condiciones como

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad (1.34a)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j} + L^\theta_{ijk} = 0, \quad (1.34b)$$

$$\frac{D}{Dt}g_{ij} = -\frac{1}{2}\left(g_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} + g_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i}\right) + M^\theta_{ij}, \quad (1.34c)$$

$$\frac{D}{Dt}t_{ij} = g_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial x^j} - g_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial x^i} + N^\theta_{ij}, \quad (1.34d)$$

donde

$$t_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} - g_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i}).$$

Las ecuaciones (1.34) son las condiciones de Helmholtz del problema inverso del cálculo de variaciones para las ecuaciones (1.27) modificadas por los términos L^θ_{ijk}, M^θ_{ij}, y N^θ_{ij}, donde de hecho se reúne toda la dependencia en θ. Explícitamente estos términos son

$$L^{\theta}_{ijk} = \theta^{sl} g_{sk} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \theta^{rl} g_{rj} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}, \tag{1.35a}$$

$$M^{\theta}_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ir} (\theta^{rn} \frac{\partial F^s}{\partial x^n} + \theta^{sn} \frac{\partial F^r}{\partial x^n}) g_{js}, \tag{1.35b}$$

$$N^{\theta}_{ij} = g_{li} g_{mj} (-\frac{D}{Dt} a^{lm} + a^{lk} \frac{\partial F^m}{\partial \dot{x}^k} - a^{mk} \frac{\partial F^l}{\partial \dot{x}^k}) + g^{lk} (t_{lj} M^{\theta}_{ik} - t_{li} M^{\theta}_{jk}), \tag{1.35c}$$

donde

$$a^{ij} \equiv \frac{1}{2} (\theta^{jk} \frac{\partial F^i}{\partial x^k} - \theta^{ik} \frac{\partial F^j}{\partial x^k}).$$

En el caso en que las condiciones subsidiarias $L^{\theta}_{ijk} = M^{\theta}_{ij} = N^{\theta}_{ij} = 0$ sean satisfechas, las condiciones de compatibilidad (1.34) coinciden de nuevo con las condiciones de Helmholtz para el sistema de ecuaciones (1.27) (a pesar de que $\theta^{ij} \neq 0$), y de ser satisfechas por el sistema dinámico, éste tendrá lagrangiano. En tal caso, siguiendo el argumento de [81], sería consistente cuantizarlo tanto con relaciones de conmutación ordinarias como con relaciones no–conmutativas entre las coordenadas. Es fácil ver que el oscilador armónico definido por la fuerza $F^i \sim -\partial_i(\frac{1}{2} x^j x^j)$ es un ejemplo de este caso.

Es posible preguntarse si las condiciones (1.34) son condiciones de Helmholtz de algún sistema de ecuaciones diferenciales. De este problema nos ocupamos en el capítulo siguiente, y el resultado es que sí lo son, aunque de un sistema de tercer orden en derivadas en el tiempo. Porque nos será útil en el próximo capítulo, en la siguiente sección expresamos la versión simpléctica en el espacio fase de las condiciones de compatibilidad dinámica (1.34).

1.3.2. Versión simpléctica de la condiciones de compatibilidad

El núcleo del análisis de la sección anterior está en la condición (1.30) entre el campo vectorial definido por la fuerza que define el flujo newtoniano de la dinámica, y el paréntesis de Poissón definido con la estructura simpléctica no–conmutativa. Hecha esta identificación las condiciones de compatibilidad dinámica (1.34) se pueden expresar de una manera muy compacta en el espacio de $2N$ variables del formalismo de primer orden correspondiente.

Sea el conjunto de variables z^a con $a \in \{1, \ldots, 2N\}$ tal que

$$z^a = \begin{cases} x^a, & a = 1, \ldots N \\ \dot{x}^{a-N}, & a = N+1, \ldots 2N. \end{cases} \tag{1.36}$$

En estas variables las ecuaciones de movimiento (1.27) se escriben

$$\dot{z}^a = G^a(z), \quad \text{con} \begin{cases} G^a = z^{a+N}, & a = 1, \ldots N \\ G^a = F^{a-N}, & a = N+1, \ldots 2N, \end{cases}$$

y la derivada direccional (1.31) como

$$\frac{D}{Dt} = G^a \frac{\partial}{\partial z^a} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Supongamos que para escribir el lagrangiano de primer orden en este formalismo tomamos como estructura simpléctica σ la inversa de la matriz con componentes

$$\sigma^{ab} \equiv \{z^a, z^b\},$$

siendo $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ el paréntsis de Poisson

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial z^a}\sigma^{ab}\frac{\partial g}{\partial z^b}.$$

La condición de compatibilidad dinámica (1.30) se escribe

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\{f,g\} &= \{\frac{Df}{Dt},g\} + \{f,\frac{Dg}{Dt}\} \\ &= \Big(\frac{D}{Dt}\frac{\partial f}{\partial z^a}\Big)\sigma^{ab}\frac{\partial g}{\partial z^b} + \frac{\partial f}{\partial z^a}\Big(\frac{D}{Dt}\sigma^{ab}\Big)\frac{\partial g}{\partial z^b} + \frac{\partial f}{\partial z^a}\sigma^{ab}\Big(\frac{D}{Dt}\frac{\partial g}{\partial z^b}\Big),\end{aligned} \tag{1.37}$$

y es fácil ver que ésta es equivalente a la ecuación

$$\mathcal{L}_G\sigma^{ab} = 0 \tag{1.38}$$

(habiendo supuesto $\frac{\partial\sigma^{ab}}{\partial t} = 0$), donde $\mathcal{L}_G$ es la derivada de Lie[13] en la dirección del campo vectorial definido por la fuerza G^a. En términos de las componentes σ_{ab} de la matriz simpléctica escrita como

$$\sigma = \begin{pmatrix} B & A \\ -A^t & C \end{pmatrix}, \tag{1.39}$$

la condición (1.38) es equivalente a

$$\mathcal{L}_G\sigma_{ab} = 0,$$

[13]La derivada de Lie del vector v en la dirección del vector w se define como

$$\mathcal{L}_w(v) = [w,v] = (w^a\frac{\partial v^b}{\partial z^a} - v^a\frac{\partial w^b}{\partial z^a})\frac{\partial}{\partial z^b}.$$

de donde se obtienen las condiciones de compatibilidad

$$\frac{D}{Dt}A^S_{ij} + A_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} + A_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i} - C_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial x^i} - C_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial x^j} = 0, \tag{1.40a}$$

$$\frac{D}{Dt}A^A_{ij} + A_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} - A_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i} + C_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial x^j} - C_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial x^i} + 2B_{ij} = 0, \tag{1.40b}$$

$$\frac{D}{Dt}B_{ij} + A_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial x^j} - A_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial x^i} = 0, \tag{1.40c}$$

$$\frac{D}{Dt}C_{ij} + C_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} - C_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i} + A^A_{ij} = 0, \tag{1.40d}$$

donde B y C son matrices antisimétricas de $N \times N$, y $A^{(A)S}$ es la parte (anti)simétrica de A (también de $N \times N$) definida por ($A^A = A - A^t$) $A^S = A + A^t$.

Usando (1.40b) y (1.40d) se obtiene $B = B(A, C, F)$ como

$$\begin{aligned} B_{ij}(A,C,F) = -\frac{1}{2}\Bigg(& -\frac{D^2}{Dt^2}C_{ij} + \frac{D}{Dt}\left(C_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{D}{Dt}\left(C_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j}\right) \\ & + A_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} - A_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i} - C_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial x^i} + C_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial x^j}\Bigg), \end{aligned} \tag{1.41}$$

y el conjunto anterior de condiciones se reduce a

$$\frac{D}{Dt}A^S_{ij} + A_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} + A_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i} - C_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial x^i} - C_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial x^j} = 0, \tag{1.42a}$$

$$\frac{D}{Dt}B_{ij}(A,C,F) + A_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial x^j} - A_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial x^i} = 0, \tag{1.42b}$$

$$\frac{D}{Dt}C_{ij} + C_{ik}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^j} - C_{jk}\frac{\partial F^k}{\partial \dot{x}^i} + A^A_{ij} = 0. \tag{1.42c}$$

El conjunto de ecuaciones (1.34) y (1.42) tienen exactamente el mismo contenido: Ambas son expresiones explícitas para la condición de compatibilidad dinámica (1.37).

1.3.3. Algunas soluciones de las condiciones (1.34)

Para ilustrar el significado de la compatibilidad dinámica que hemos presentado en las secciones anteriores tomaremos un par de ejemplos: Un sistema que tiene lagrangiano y también satisface las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas, y un sistema que no tiene lagrangiano y puede cuantizarse consistentemente con las relaciones no–conmutativas entre las coordenadas.

Sistema con lagrangiano Supongamos que para un sistema de ecuaciones de movimiento definidas por una fuerza F^i se puede encontrar g^{ij} tal que existe una función lagrangiana para dicho sistema de ecuaciones. Para que la cuantización no–conmutativa de este sistema sea consistente las condiciones subsidiarias $L^{\theta}_{ijk} = 0$, $M^{\theta}_{ij} = 0$, $N^{\theta}_{ij} = 0$ deben ser satisfechas. Para ello debe pasar que

$$\theta^{in}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^n} - \theta^{jn}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n} = 0, \tag{1.43a}$$

$$\theta^{in}\frac{\partial F^j}{\partial x^n} + \theta^{jn}\frac{\partial F^i}{\partial x^n} = 0, \tag{1.43b}$$

$$-\frac{D}{Dt}a^{lm} + a^{lk}\frac{\partial F^m}{\partial \dot{x}^k} - a^{mk}\frac{\partial F^l}{\partial \dot{x}^k} = 0. \tag{1.43c}$$

Estas condiciones resultan muy restrictivas. Por ejemplo, en el caso de fuerzas provenientes de un potencial proporcional a r^n con $r = \sqrt{x^i x^i}$, las únicas soluciones a (1.43b) son $n = 0, 2$. Así, de entre las fuerzas centrales isotrópicas sólo el oscilador armónico admite cuantizaciones tanto conmutativa como no–conmutativa (con $g^{ij} = \delta^{ij}$). Esto quiere decir que para este sistema podemos dar dos diferentes σ's con sus dos hamiltonianos correspondientes que tienen las mismas ecuaciones de movimiento de segundo orden en el espacio configuración, y la cuantización de ambas es consistente en el sentido de la sección 1.3.1. Dichas cuantizaciones no son equivalentes como fue comentado en la sección 1.1.1. La no equivalencia de las cuantizaciones se puede ver explícitamente en cómo θ rompe la degeneración del espectro del oscilador armónico en dos dimensiones. En el caso no–conmutativo éste está dado por[14] ($\hbar = 1$)

$$E_{m,n} = \omega[(m+n) + \theta\omega(m-n) + 1], \tag{1.44}$$

donde n, m son dos enteros no negativos, y ω es la frecuencia del oscilador isotrópico. (Este resultado lo hemos reportado en [47].)

Es importante notar que la cuantización del oscilador armónico que da el espectro (1.44) parte de sus ecuaciones de movimiento usuales y una estructura simpléctica compatible en el sentido que hemos expuesto en este capítulo. El sistema dinámico así definido es el oscilador armónico estándar bajo cuantización canónica no estándar. La cuantización del oscilador armónico no–conmutativo que tiene por ecuaciones de movimiento de primer orden al conjunto (1.14) para $V = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ es distinta. Ahí el punto de partida es el hamiltoniano usual de oscilador armónico en dos dimensiones, y la estructura simpléctica que implementa la no–conmutatividad de las coordenadas del espacio configuración. Este sistema no es el oscilador armónico estándar (como se ve de sus ecuaciones de segundo orden para las coordenadas dadas por la fuerza (1.16) correspondiente). En el siguiente ejemplo veremos que este sistema es un caso particular de una categoría de soluciones genéricas a las condiciones de compatibilidad (1.34).

Solución genérica Un sistema de ecuaciones de movimiento que esperamos sea compatible con la estructura simpléctica no–conmutativa son las que provienen del problema de primer orden con hamiltoniano $H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$ y paréntesis de

[14] El espectro del caso conmutativo es el espectro típico del oscilador armónico en dos dimensiones, que puede leerse de (1.44) haciendo cero el parámetro θ.

Poisson dado por (1.13). Estamos hablando de las ecuaciones (1.15), calculadas a partir de las ecuaciones de primer orden (1.14) despejando $\dot{p}_i$ de (1.14b) y sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.14a) (luego de derivarla con respecto al tiempo). Sustituyendo la fuerza (1.16) en (1.32), y suponiendo que $g^{ij}(x)$ depende sólo de coordenadas, las condiciones de compatibilidad se escriben

$$\theta^{il}\frac{\partial g^{il}}{\partial x^l} - \theta^{jl}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = 0, \tag{1.45a}$$

$$\frac{d}{dt}g^{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ik}\theta^{jl}V_{kl} - \theta^{il}V_{jl} + \theta^{ik}\theta^{jl}\frac{d}{dt}V_{lk} + (i \leftrightarrow j)\right), \tag{1.45b}$$

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}b^{ij} = g^{il}V_{jl} - \theta^{jl}g^{ik}\frac{d}{dt}V_{lk}+ \\ \frac{1}{2}\theta^{jl}V_{lk}\left(\theta^{ik}V_{kr} - \theta^{kr}V_{ir} + \theta^{ir}g^{kn}V_{rn} - \theta^{kr}g^{in}V_{rn}\right) - (i \leftrightarrow j),\end{aligned} \tag{1.45c}$$

donde hemos usado la notación $V_l \equiv \frac{\partial V}{\partial x^l}$, y que

$$b^{ij} = \frac{1}{2}\left(\theta^{il}V_{jl} - \theta^{jl}g^{in}V_{ln} - \theta^{jl}V_{il} + \theta^{il}g^{jn}V_{ln}\right).$$

Poniendo como prueba

$$g^{ij} = \delta^{ij} + \theta^{in}\theta^{jm}V_{nm} \tag{1.46}$$

en la condición (1.45b), ésta y el resto de las condiciones de compatibilidad para cualquier potencial $V(x)$ resultan satisfechas. Así, los paréntesis de Poisson

$$\{x^i, \dot{x}^j\} = \delta^i_j + \theta^{in}\theta^{jm}V_{nm}, \quad \{x^i, x^j\} = \theta^{ij}, \tag{1.47a}$$

$$\{\dot{x}^i, \dot{x}^j\} = \theta^{il}V_{jl} + \frac{1}{2}\theta^{il}\theta^{jr}\theta^{ns}V_{ln}V_{rs} - (i \leftrightarrow j), \tag{1.47b}$$

y las fuerzas del tipo (1.16) son dinámicamente compatibles, y su cuantización consistente.

En conclusión, las fuerzas (1.16) que definen las ecuaciones de movimiento del tipo (1.15) constituyen una categoría genérica de sistemas dinámicos caracterizados o distinguibles por la función potencial $V(x)$ compatibles con la estructura simpléctica no–conmutativa asociada a los paréntesis (1.47), y así su cuantización es consistente. Esta solución genérica a las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas es análoga al tipo de fuerzas $\vec{F} = -\nabla V(x)$ para el caso conmutativo de las condiciones de compatibilidad dinámica.

Tomemos el ejemplo particular de las ecuaciones (1.15) en dos dimensiones con potencial $V = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ (independiente de y). Este sistema no tiene lagrangiano. Las ecuaciones de movimiento de segundo orden son explícitamente

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x, \\ \ddot{y} &= -\theta\omega^2 \dot{x}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Es conocido de hace mucho que no existe lagrangiano para estas ecuaciones de movimiento [57]. En [81] este sistema se presenta como un ejemplo de un sistema que al no tener lagrangiano no es posible una cuantización conmutativa consistente del mismo. Aquí, este sistema es un ejemplo particular del tipo de solución genérica dada por la fuerza no–conmutativa (1.16).

Un formalismo de primer orden para el sistema (1.48) es el constituído por el hamiltoniano estándar $H = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$, y la estructura simpléctica tal que

$$\{x, y\} = \theta, \quad \{x, p_x\} = 1, \quad \{y, p_y\} = 1,$$

y el resto de los paréntesis de Poissón básicos iguales a cero. Bajo la cuantización por integrales de camino de este sistema, tomando como base para el espacio de Hilbert al conjunto de autoestados comunes a dos operadores que conmutan como sería una componente de la posición y una del momento $\{|x', p'_y\rangle\}$, el propagador resulta

$$\langle x'', p''_y; t''|x', p'_y; t'\rangle \;=\; \frac{e^D}{\sqrt{\operatorname{sen}(\omega T)}} e^{-\frac{i}{2}k^2 T + i\frac{\omega}{2}\operatorname{ctg}(\omega T)(x'^2 + x''^2) - i\frac{\omega}{\operatorname{sen}(\omega T)}x'x''}, \quad (1.49)$$

donde k es el valor constante de p_y, y $T = t'' - t'$ [45]. La constante D se puede determinar usando la condición de que en el límite de (1.49) cuando $t'' \to t'$ el propagador se vuelve una delta de Dirac[15].

1.3.4. Comentarios finales

Como último comentario vale la pena mencionar que el primer antecedente del tipo de análisis llevado a cabo en [81] y generalizado aquí al caso no–conmutativo es una idea de Feynman para buscar nueva física compatible con los principios de mecánica cuántica. Mediante una prueba de compatibilidad como la que aquí hemos realizado entre una versión de la ecuación de Newton para operadores cuánticos y los conmutadores canónicos entre las posición y el momento, Feynman motiva o deduce la forma de la fuerza de Lorentz como la más general posible consistente con la mecánica cuántica en este sentido. Como esta fuerza no representa nueva física, Feynman nunca publicó su análisis; éste fue comentado por Dyson [61] como una deducción independiente del electromagnetismo. Dyson hace notar que el centro del argumento de Feynman es no imponer la existencia de la función lagrangiana o hamiltoniana para los sistemas compatibles con la mecánica cuántica, sino sólo que las ecuaciones de movimiento clásicas sean de segundo orden. El replanteamiento de este análisis realizado por los autores de [81] implica al respecto que de hecho la existencia del lagrangiano de segundo orden es

[15] Este resultado no depende del parámetro no–conmutativo θ, pero esto es un efecto de la elección de la base para el espacio de Hilbert.

condición necesaria para la cuantización consistente de un sistema físico, con la estructura de conmutadores estándar. En nuestra generalización, vemos que es posible cuantizar algunos sistemas que no tienen lagrangiano si estos son compatibles con la estructura no–conmutativa del espacio. En este último sentido, la nueva física se introduce (por sus propias motivaciones) mediante una estructura peculiar del espacio configuración, y los (nuevos) sistemas físicos que se podrían cuantizar consistentemente serían los que son compatibles con esta estructura.

Sin embargo, el carácter de los sistemas físicos que se pueden entonces cuantizar consistentemente con relaciones no–conmutativas (inherentes al espacio por hipótesis) adquiere un carácter más dramático en el siguiente capítulo, cuando veamos que al final estos sistemas también provienen de una formulación variacional.

CAPÍTULO 2

Formulación variacional de la mecánica no–conmutativa

En el capítulo anterior nos preguntamos si las condiciones (1.34) de compatibilidad dinámica entre una fuerza F^i dada y la estructura simpléctica que define los paréntesis de Poisson no–conmutativos coinciden con las condiciones de Helmholtz para la existencia del lagrangiano de algún sistema de ecuaciones diferenciales, como sucede en el caso conmutativo. En este capítulo respondemos a esta pregunta, y encontramos que en efecto dichas condiciones son de Helmholtz pero de un sistema de ecuaciones de tercer orden en derivadas en el tiempo, definido por las ecuaciones de movimiento de segundo orden y sus derivadas. Esta forma particular para este sistema hace que un subconjunto de sus soluciones sean las órbitas del sistema de ecuaciones movimiento de segundo orden (1.27).

Este resultado (que hemos reportado en [48]) nos permitirá encontrar un lagrangiano en el espacio configuración para los sistemas dinámicos definidos por la fuerza no–conmutativa (1.16). Luego podemos usar este lagrangiano en el teorema de Noether para calcular algunas cantidades conservadas de las ecuaciones de movimiento correspondientes a esta fuerza. La existencia de dicho lagrangiano está garantizada en tanto estos sistemas cumplen con las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas, y por lo tanto con las condiciones de Helmholtz mencionadas.

El presente capítulo está organizado en tres secciones. En la primera mostraremos la equivalencia entre las condiciones de compatibilidad (1.34) y las condiciones de Helmholtz del sistema de ecuaciones de diferenciales de tercer orden construído con las ecuaciones newtonianas. En el apéndice A hemos escrito estas condiciones explicitamente. En la segunda sección calcularemos el lagrangiano para el sistema de tercer orden construído con las ecuaciones de movimiento en el espacio configuración definidas por la fuerza (1.16).

Con base en un lagrangiano como el mencionado en el párrafo anterior es posible plantearse cuantizar sistemas que cumplen o satisfacen las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas por el método de la integral de caminos de Feynman. Sobre esto comentaremos en la última sección del capítulo (a manera de epílogo).

2.1. Ecuaciones de tercer orden y las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas

Dadas las ecuaciones de movimiento de segundo orden

$$\ddot{x}^i - F^i(x, \dot{x}) = 0 \tag{2.1}$$

para $i = 1, \ldots, N$, consideremos las ecuaciones de tercer orden

$$K_{ij}\frac{d}{dt}(\ddot{x}^j - F^j(x, \dot{x})) + M_{ij}(\ddot{x}^j - F^j(x, \dot{x})) = 0,$$

donde K y M son un par de matrices de $N \times N$ (que supondremos pueden ser funciones de x, $\dot{x}$, y $\ddot{x}$[1]). Estas ecuaciones tienen como un subconjunto de soluciones a las órbitas del sistema de segundo orden (2.1). Claramente se alejan del paradigma newtoniano de la dinámica clásica, mas no de una forma arbitraria: Son una combinación funcional del sistema de ecuaciones de movimiento inicial y su primera derivada con respecto al tiempo. La forma general de un sistema de ecuaciones diferenciales de tercer orden que admite en su espacio de soluciones a todas las órbitas solución del problema (2.1) debe tener la forma (2.2).

Estas ecuaciones diferenciales no son nuevas y han sido estudiadas en el contexto de la equivalencia entre las simetrías de un lagrangiano y las de sus ecuaciones de movimiento [79]. En general, las simetrías de un sistema de ecuaciones de movimiento de segundo orden son las mismas o más que las simetrías del lagrangiano del que provienen. La definición de simetría de las ecuaciones de movimiento es que tal transformación mapee una de sus soluciones a otra. Por otro lado, tenemos una simetría del lagrangiano si una transformación de las variables dinámi-

[1]Más adelante relacionaremos estas matrices con la estructura simpléctica no–conmutativa.

cas produce un nuevo lagrangiano que difiere del original por una derivada total, o si las ecuaciones de movimiento del nuevo lagrangiano son proporcionales a las del lagrangiano original (es decir, si los lagrangianos son *s-equivalentes*[2]). En el primer caso hablamos de simetrías noetherianas, y en el segundo de simetrías de s-equivalencia. Para que las simetrías de un lagrangiano coincidan con las de sus ecuaciones de movimiento hay que tomar en cuenta otro tipo de simetrías además de estas dos. Estas nuevas simetrías producen lagrangianos cuyas ecuaciones de movimiento son de la forma (2.2). Los detalles sobre las características de estas últimas simetrías pueden consultarse en la referencia [79].

En la siguiente sección veremos que las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas (1.42) que obtuvimos en el capítulo anterior coniciden con las condiciones de Helmholtz para las ecuaciones de tercer orden (2.2). Estas últimas están presentadas en el apéndice A. En general se tiene que si un lagrangiano depende de acelaraciones ($\ddot{x}$) sus ecuaciones de movimiento son de cuarto orden en derivadas en el tiempo; si esta dependencia es lineal, son de tercero. En relación a las ecuaciones (2.2) y el problema inverso para ellas, corresponde aplicarle las condiciones de Helmholtz (A.3) para ecuaciones de movimiento de cuarto orden, de donde se obtienen las ecuaciones (A.5,A.6).

[2]Esto significa que el espacio de soluciones de las ecuaciones de movimiento de ambos lagrangianos es el mismo. Las ecuaciones de movimiento del nuevo lagrangiano podría tener más soluciones que el sistema dinámico original, y en ese caso la simetría no es de s-equivalencia sino de *subordinación* al lagrangiano original [79].

2.1.1. Condiciones de compatibilidad no–conmutativas *vs.* condiciones de Helmholtz

No es difícil ver que las condiciones de Helmholtz (A.5,A.6) para las ecuaciones

$$\mathcal{M}_i(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x},t) \equiv K_{ij}\frac{d}{dt}\big(\ddot{x}^j - F^j(x,\dot{x})\big) + M_{ij}\big(\ddot{x}^j - F^j(x,\dot{x})\big) = 0, \qquad (2.2)$$

coinciden con las condiciones de compatibilidad (1.42) si hacemos las siguientes identificaciones:

1. Las soluciones del sistema de ecuaciones de movimiento de segundo orden (2.1), subconjunto de las órbitas de (2.2), son las únicas órbitas relevantes y con contenido físico. Esto implica proyectar la derivada respecto al tiempo (A.4), que se usa en las condiciones (A.5,A.6), como

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \to \frac{D}{Dt} \equiv \dot{F}^i\frac{\partial}{\partial\ddot{x}^i} + F^i\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i} + \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}, \qquad (2.3)$$

   y evaluar al final de cada cálculo $\ddot{x}^i = F^i$ y $\dddot{x}^i = \dot{F}^i\,|_{\ddot{x}=F}$. Con estas proyecciones hacemos explícito que sólo estamos interesados en las soluciones de (2.2) que son soluciones del sistema de ecuaciones de movimiento (2.1).

2. Tomamos A y C de la estructura simpléctica (1.39) como los coeficientes K y M en (2.2). Explícitamente,

$$K_{ij} = C_{ij}, \qquad M_{ij} = -A_{ij} + \frac{d}{dt}C_{ij}. \qquad (2.4)$$

Tomando en cuenta estas identificaciones, de la condición (A.5a) tenemos que

$$C_{ik} + C_{ki} = 0,$$

que se cumple por construcción. De (A.5b) obtenemos

$$\frac{D}{Dt}C_{ik} = C_{kj}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i} - C_{ij}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^k} - A^A_{ik},$$

que es exactamente la condición de compatibilidad (1.42c). De la penúltima condición (A.6a) tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt}\left(A^S_{ik} + C_{ij}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^k} + C_{kj}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i}\right) \\ = \;& C_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^k} + C_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^i} + (-A_{ij} + \frac{D}{Dt}C_{ij})\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^k} + (-A_{kj} + \frac{D}{Dt}C_{kj})\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i}. \end{aligned}$$

Debe notarse que todas las derivadas de cualquier función respecto al tiempo (como $\dot{F}^i$) se proyectan siempre sobre la dirección tangente a las órbitas solución del sistema (2.1) al final del cálculo. Usando el conmutador de operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}\frac{d}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial}{\partial x^k},$$

y luego (2.3), de la expresión anterior se obtiene exactamente la condición de compatibilidad (1.42a). De la última condición (A.6b) se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{D}{Dt}\Big(-C_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^k} + C_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^i} \\ &\qquad - (-A_{ij} + \frac{D}{Dt}C_{ij})\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^k} + (-A_{kj} + \frac{D}{Dt}C_{kj})\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i} - \frac{D^2}{Dt^2}C_{ik}\Big) \\ &\qquad\qquad = -C_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial x^k} + C_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial x^i} \\ &\qquad\qquad\qquad - (-A_{ij} + \frac{D}{Dt}C_{ij})\frac{\partial F^j}{\partial x^k} + (-A_{kj} + \frac{D}{Dt}C_{kj})\frac{\partial F^j}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Usando la definición (1.41) esta última expresión conicide exactamente con (1.42b).

Hagamos énfasis en algunas observaciones sobre el resultado obenido.

- Hemos visto que las condiciones de compatibilidad (1.42) entre la estructura simpléctica no–conmutativa (1.39) y la fuerza F^i que define las ecuaciones de movimiento de segundo orden (2.1) son las condiciones de Helmholtz (A.5,A.6) para que el sistema de ecuaciones diferenciales

$$C_{ij}\frac{d}{dt}(\dddot{x}^j - F^j) + (-A_{ij} + \frac{d}{dt}C_{ij})(\ddot{x}^j - F^j) = 0 \tag{2.5}$$

provenga de un lagrangiano. Esta conicidencia además se da si consideramos sólo el sector de soluciones de estas ecuaciones que es compatible con el flujo newtoniano de las ecuaciones (2.1). Esto implica proyectar la derivada total respecto al tiempo como

$$\frac{D}{Dt} = \dot{F}^i\frac{\partial}{\partial \ddot{x}^i} + F^i\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Por lo tanto, en el espacio no–conmutativo la dinámica newtoniana consistente con éste puede formularse en términos variacionales con el lagrangiano para el sistema auxiliar de ecuaciones de tercer orden (2.5), que tiene la característica peculiar de ser una combinación funcional del sistema (2.1) y su derivada respecto al tiempo. Los coeficientes de esta combinación están completamente determinados por la estructura simpléctica no–conmutativa.

- Para que exista la formulación variacional de un sistema dinámico compatible con la estructura simpléctica no–conmutativa son relevantes sólo las órbitas solución al sistema de segundo orden (2.1). Esto quiere decir que este conjunto de soluciones a las ecuaciones de movimiento tiene origen variacional, aunque altamente no estándar. Si identificamos a un sistema dinámico compatible con una estructura simpléctica, sea en el caso conmutativo o no–conmutativo, no con sus ecuaciones de movimiento sino con su espacio de soluciones, en ambos casos resulta que éste tiene un origen variacional. Esto refuerza la idea (motivada en [81]) de que un sistema físico se puede cuantizar consistentemente con relaciones conmutativas o no–conmutativas sólo si puede plantearse en términos lagrangianos.

- Como vimos en el capítulo 1, las ecuaciones de Newton deformadas

$$\ddot{x}^i + \frac{\partial V}{\partial x^i} - \theta^{ij}\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x^j} = 0 \tag{2.6}$$

  no admiten una formulación variacional para cualquier V. El resultado que estamos obteniendo ahora es una confirmación de ello, pues es el sistema auxiliar de tercer orden (2.5) correspondiente a estas ecuaciones de movimiento el que sí la admite. En la siguiente sección calcularemos el lagrangiano para este sistema de ecuaciones diferenciales.

- Tal vez no sea sorprendente que para un sistema de ecuaciones de movimiento que no admite formulación variacional exista un sistema de ecuaciones diferenciales de mayor orden como (2.5) que sí lo hace. Lo que sí llama la atención es que tal sistema sea de tercer orden en derivadas en el tiempo y no más alto, como el caso del lagrangiano de la sección 1.2.2 (función de la derivada de las coordenadas respecto al tiempo de todos los órdenes).

2.2. Lagrangiano no–conmutativo asociado a (2.6)

Con base en la equivalencia mostrada en la sección anterior entre las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas y las condiciones de Helmholtz del sistema de ecuaciones de tercer orden auxiliar (2.2) podemos saber que para cualquier sistema dinámico compatible con la estructura simpléctica no–conmutativa, este sistema auxiliar tiene lagrangiano.

Este es el caso de las ecuaciones de movimiento de segundo orden (2.6) para un potencial V que resuelven las condiciones de compatibilidad dinámica (1.42) con la estructura simpléctica no–conmutativa asociada a los paréntesis (1.47). Por lo tanto, las ecuaciones de tercer orden (2.5) para este caso

$$\theta^{ij}\frac{d}{dt}(\ddot{x}^j + V_j - \dot{V}^j) + (\delta_{ij} - \theta^{jk}V_i^k)(\ddot{x}^j + V_j - \dot{V}^j) = 0 \tag{2.7}$$

(con $V_i \equiv \frac{\partial V}{\partial x^i}$, y $V^i \equiv \theta^{ij}V_j$), donde hemos sustituído A y C de la estructura simpléctica (1.39) dadas por

$$A_{ij} = -\delta_{ij} + \theta^{jk}V_i^k, \tag{2.8a}$$

$$B_{ij} = V_j^i - V_i^j - \theta^{kl}V_i^l V_j^k, \tag{2.8b}$$

$$C_{ij} = \theta^{ij}, \tag{2.8c}$$

satisfacen las condiciones de Helmholtz, y en consecuencia tienen lagrangiano. A continuación nos proponemos calcularlo.

2.2.1. Lagrangiano para las ecuaciones (2.7)

Lo más sencillo es proponer el lagrangiano lineal en aceleraciones más general, calcular sus ecuaciones de Euler-Lagrange, y compararlas con (2.7). El lagrangiano que resulta de este cálculo es

$$L(\ddot{x}, \dot{x}, x) = L_0 - \frac{1}{2}\theta^{ij}\dot{x}^i\dot{V}^j + \frac{1}{2}\theta^{ij}\ddot{x}^j(\dot{x}^i - V^i) + \frac{1}{2}\theta^{ij}V^i\dot{V}^j - \frac{1}{2}V^iV^i, \tag{2.9}$$

con $L_0 = T - V$ el lagrangiano no deformado. El lagrangiano (2.9) admite la formulación simpléctica siguiente. Tomando como variables al conjunto dado en (1.36), el lagrangiano de primer orden se escribe

$$L = \ell_a(z)\dot{z}^a + \mathcal{V}(z) = j_i(x,\dot{x})\dot{x}^i + k_i(x,\dot{x})\ddot{x}^i + \mathcal{V}(x),$$

donde

$$\begin{aligned} j_i &= \frac{1}{2}\dot{x}^i - \frac{1}{2}\theta^{ij}\dot{V}^j + \frac{1}{2}\theta^{kj}V^k V^j_i, \\ k_i &= \frac{1}{2}\theta^{ki}(\dot{x}^k - V^k), \\ \mathcal{V} &= -V - \frac{1}{2}V^i V^i. \end{aligned}$$

La estructura simpléctica (2.8) en términos de j_i y k_i está dada por

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\partial j_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial k_j}{\partial x^i} = -\delta_{ij} + \theta^{jk}V^k_i, \\ B_{ij} &= \frac{\partial j_i}{\partial x^j} - \frac{\partial j_j}{\partial x^i} = V^i_j - V^j_i - \theta^{kl}V^l_i V^k_j, \\ C_{ij} &= \frac{\partial k_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial k_j}{\partial \dot{x}^i} = \theta^{ij}. \end{aligned}$$

El lagrangiano (2.9) no es único en tanto j_i y k_i son potenciales simplécticos.

2.2.2. Principio variacional no–conmutativo

El principio variacional del cual obtenemos las ecuaciones de tercer orden auxiliares (2.2) para un sistema dinámico compatible con la estructura simpléctica no–

conmutativa consiste, como es habitual, en hallar el extremal de la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\ddot{x}, \dot{x}, x) dt, \tag{2.10}$$

definida integrando el lagrangiano correspondiente sobre un intervalo de tiempo (t_1, t_2). Es necesario hacer algunas precisiones sobre esta prescripción para el caso que nos ocupa. Para ello tomemos como ejemplo el lagrangiano (2.9) que da las ecuaciones (2.7).

En el argumento de esta y la sección anterior hemos hecho énfasis en que nuestro interés principal es la dinámica de sistemas newtonianos de segundo orden, que en el caso de las ecuaciones (2.7) es la información contenida en las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{x}^i + V_i - \dot{V}^i = 0, \tag{2.11}$$

y no en la dinámica completa de tercer orden del sistema auxiliar (2.7) que construímos con ellas. Es válido preguntarse si esto está contenido en el principio variacional de cual obtenemos estas ecuaciones, dado que es tomando en cuenta solamente las soluciones de este sistema de segundo orden, que es un subconjunto de todas las soluciones del sistema (2.7), que las condiciones de compatibilidad dinámica coinciden con las condiciones de Helmholtz que garantizan la existencia del lagrangiano para este último.

De la ecuación para la variación arbitraria de la acción (2.10) en el principio variacional

$$\delta S[x(t)] = 0, \tag{2.12}$$

podrían en principio obtenerse más de un extremal, uno que corresponde a una solución del problema de tercer orden general, y otro que corresponde a una solución de las ecuaciones de movimiento de segundo orden (2.11). Tomemos por ejemplo el sistema de ecuaciones dadas por el tiro parabólico. La integración directa de $\ddot{x} = 0$ y $\ddot{y} = -g$ da como solución

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{2.13}$$

con $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ las condiciones iniciales a $t = 0$. Esta será también solución de las ecuaciones de tercer orden

$$\theta(\dddot{y}) + (\ddot{x}) = 0, \quad -\theta(\dddot{x}) + (\ddot{y} + g) = 0,$$

que si integramos dos veces resulta el sistema acoplado

$$\theta\dot{y} + x = k_1 t + k_1', \quad -\theta\dot{x} + y + \frac{g}{2} t^2 = k_2 t + k_2'.$$

La última integración de este sistema implicará incorporar dos constantes más que deben fijarse por condiciones iniciales (las posiciones, velocidades y aceleraciones a $t = 0$). El comportamiento de este sistema es muy diferente en general al del tiro parabólico.

Si quisiéramos usar la acción (2.10) para cuantizar el sistema por el método de la integral de caminos de Feynman lo razonable sería postular que sólo son físicas las soluciones de (2.7) que son órbitas de las ecuaciones de movimiento de segundo orden (2.11), y además sólo considerar aquellos caminos que perturban la órbita clásica que no se salen del espacio de soluciones de este sistema[3]. No descartamos que perturbaciones que exploren el exterior de este espacio puedan tener información física relevante para la dinámica de tercer orden completa y su cuantización.

[3] Esto sería lo razonable porque eso significaría hacer la cuantización en el espacio configuración donde están definidas estas ecuaciones de movimiento.

Este es un problema abierto que requeriría primero interpretar el significado de "cuantización" de esa dinámica.

En el caso que nos ocupa, sucede algo curioso. Veamos de nuevo el ejemplo del tiro parabólico. Si en el proceso de integración de las ecuaciones de tercer orden fijamos las mismas condiciones iniciales para $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ en $t = 0$, y tomamos además como aceleraciones iniciales las que vendrían de las ecuaciones de Newton ($\ddot{x}_0 = 0$ y $\ddot{y}_0 = -g$), el sistema adquiere el siguiente aspecto

$$\ddot{x} + \frac{1}{\theta^2}x = \frac{\dot{x}_0}{\theta^2}t + \frac{x_0}{\theta^2}, \quad \ddot{y} + \frac{1}{\theta^2}y = -\frac{g}{2\theta^2}t^2 + \frac{\dot{y}_0}{\theta^2}t + \frac{y_0}{\theta^2} - g.$$

A primera vista este sistema parece tener más soluciones que las del tiro parabólico (2.13), pero resulta que no es así (y es sencillo verlo calculando la solución general y luego imponiendo las condiciones iniciales).

Parece entonces que la manera de controlar que de la variación de (2.10) obtengamos las ecuaciones (2.7) y la dinámica clásica en la que estamos interesados es prescribir las condiciones de borde correctamente. En el caso conmutativo usualmente se toman como condiciones de borde en el principio variacional las coordenadas para las posiciones inicial y final. En el caso no–conmutativo no tenemos esta posibilidad, pues desde el punto de vista del formalismo de primer orden es necesario fijar en los bordes variables que conmuten en el paréntesis de Poisson. Para el caso de las ecuaciones (2.7) la elección más natural es

$$(\dot{x}^i - V^i)(t_1) \equiv Q^i(t_1), \quad (\dot{x}^i - V^i)(t_2) \equiv Q^i(t_2), \quad \text{con} \quad \delta Q^i(t_1) = \delta Q^i(t_2) = 0. \tag{2.14}$$

Estas condiciones de borde[4] nos dan un buen control sobre las variaciones de la ac-

[4] Q^i corresponden de hecho a las variables momento en el formalismo de primer orden del cual provienen las ecuaciones (2.11) (ver ecuaciones (1.14)).

ción (2.10), pues contiene la información correcta de la que se obtiene la dinámica newtoniana que nos interesa.

Para verlo hagamos una variación general de esta acción. Los términos de borde que se producen se pueden leer en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta x^i} \delta x^i dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} \delta \dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} \right) \delta x^i + \delta X \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2},$$

que (con $X = -(x^j Q^j)$) en nuestro caso da

$$\left(\frac{1}{2} \theta^{kj} Q^k - x^j \right) \delta Q^j - \left(\theta^{kj} (\ddot{x}^k + V_k - \dot{V}^k) \right) \delta x^j.$$

Para satisfacer el criterio (2.12) estos términos de frontera deben anularse, y para ello necesitamos las condiciones (2.14) pero además, por el segundo término, imponer a mano las ecuaciones de movimiento newtonianas no–conmutativas de segundo orden a los tiempos t_1 y t_2. Como es necesario imponer las ecuaciones de movimiento de Newton en las fronteras a los tiempos t_1 y t_2, la utilización de la acción (2.10) y el principio variacional clásico (2.12) para la cuantización del sistema no es aún clara para nosotros.

Queremos enfatizar que desde nuestro punto de vista —proveniente de la compatibilidad dinámica entre las ecuaciones de movimiento de segundo orden y la estructura simpléctica no–conmutativa— la única manera de formular el principio variacional (2.12) debe ser en términos de un sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales de tercer orden. A pesar de que las propiedades globales de este principio variacional no están bien entendidas, puede usarse para estudiar la relación entre simetrías y cantidades conservadas mediante una versión extendida del teorema de Noether. Veremos en la siguiente sección cómo funciona esta idea.

2.2.3. Teorema de Noether

Siguiendo el procedimiento estándar [78] deducimos aquí la versión extendida del teorema de Noether cuando el lagrangiano depende de aceleraciones, y luego lo aplicamos al caso del lagrangiano (2.9) para potenciales centrales.

La transformación $\delta x^i = \lambda \epsilon^i(x, \dot{x})$ con $\lambda \ll 1$ es una simetría noetheriana de un lagrangiano dado si su variación es la derivada total de una función:

$$\delta L = \frac{dG}{dt}.$$

Si $L = L(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ de esta ecuación tendremos que

$$\frac{\delta L}{\delta x^i}\delta x^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\delta \dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right)\delta x^i - G\right) = 0.$$

Como estamos interesados en el subespacio de soluciones a las ecuaciones de tercer orden (2.2) definidas por la proyección $\ddot{x}^i = F^i$ y $\dddot{x}^i = \dot{F}^i$, la carga conservada resultante se escribe

$$K(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\frac{D}{Dt}\epsilon^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\epsilon^i - \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right)\epsilon^i - G, \tag{2.15}$$

donde no debemos perder de vista que cualquier dependencia de K en $\ddot{x}^i$ debe ser reemplazada por F^i. Este procedimiento es consistente y útil para obtener leyes de conservación para casos particulares como el de las ecuaciones (2.11) definidas por un potencial V.

Nuestro primer ejemplo es la aplicación de este teorema de Noether extendido para obtener la ley de conservación de la energía debida a la invariancia ante traslaciones en el tiempo. En este caso $\delta x^i = \dot{x}^i \delta t$, donde $\delta t << 1$ es un parámetro infinitesimal. Para el caso del lagrangiano (2.9) la cantidad conservada (2.15) asociada a esta simetría es

$$E = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\frac{D}{Dt}\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right)\dot{x}^i - L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V + V^k(\frac{1}{2}V^k - \dot{x}^k). \qquad (2.16)$$

Llamamos a esta cantidad la "energía" por obvias razones. Por el mismo procedimiento llamamos "momento lineal" a la cantidad

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i}\right)$$

que resulta de la invariancia del lagrangiano ante traslaciones en la dirección de x^i.

Potencial central Para ilustrar el comportamiento del lagrangiano (2.9) insertamos un potencial de la forma $V(r)$ donde $r = \sqrt{x^i x^i}$. El lagrangiano en este caso es explícitamente (hasta una derivada total)

$$L = L_0 + \frac{1}{2}\theta^{ij}\dot{x}^i\ddot{x}^j + \theta^{ij}\theta^{jl}\frac{V'}{r}\ddot{x}^i x^l + \frac{1}{2}\theta^{ij}\theta^{jl}\left(\frac{V'}{r}\right)^2\left(x^i x^l - \theta^{ik}\dot{x}^k x^l\right). \qquad (2.17)$$

donde V' es la derivada de $V(r)$ respecto a su argumento.

Los términos en la expresión anterior están organizados en potencias de θ. Es notable que aun la partícula libre no–conmutativa ($V = 0$) tiene una dependencia lineal en este parámetro[5]. Esto es así porque de este lagrangiano se deducen las ecuaciones diferenciales de tercer orden (2.7).

En el caso conmutativo los sistemas definidos por potenciales del tipo $V(r)$ son invariantes ante rotaciones arbitrarias de las coordenadas (*i.e.*, rotaciones alrede-

[5]Las ecuaciones de segundo orden (2.11) para la partícula libre no–conmutativa son las mismas que las del caso conmutativo.

dor de cualquier eje y cualquier combinación de estas). Examinando el cambio del lagrangiano (2.17) ante el cambio infinitesimal de las coordenadas

$$\delta x^i = \lambda \omega^i{}_j x^j, \qquad \text{con} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji},$$

correspondiente a estas transformaciones se puede ver que no cualquier rotación es una simetría de este sistema. La condición para obtener una invariancia ante estas transformaciones es que las matrices θ y ω conmuten. Esta condición se obtiene de hecho desde la formulación de primer orden para las ecuaciones de Newton deformadas para este potencial $\ddot{x}^i = -x^i \frac{V'}{r} + \theta^{ij}\left(x^j \frac{V'}{r}\right)$.

En ese contexto, si aplicamos una transformación lineal $z \mapsto z' = \Lambda z$ a la parte que depende de velocidades en el lagrangiano de primer orden tendremos que

$$z^t \sigma \dot{z} = z'^t \left((\Lambda^{-1})^t \sigma \Lambda^{-1} \right) \dot{z}'$$

con σ la estructura simpléctica, y por lo tanto Λ da una transformación canónica del sistema si $(\Lambda^{-1})^t \sigma \Lambda^{-1} = \sigma$. En el caso de rotaciones ($\Lambda \in SO(N)$) esta condición es la misma que $\Lambda\sigma = \sigma\Lambda$.

Un caso particular de estas transformaciones es $\omega = \theta^{-1}$ ($(\theta^{-1})_{ij} \equiv \theta_{ij}$). Para estas simetrías tenemos la cantidad conservada

$$K = E + \dot{x}^i \theta_{ij} x^j + rV' - V, \tag{2.18}$$

con E la energía (2.16). Por lo tanto

$$J \equiv \dot{x}^i \theta_{ij} x^j + rV' - V = \frac{\theta_{ij}}{2} \Big(\dot{x}^i x^j - \dot{x}^j x^i + \frac{2}{N} \theta^{ij} (V - rV') \Big) \equiv \frac{\theta_{ij}}{2} J^{ij} \tag{2.19}$$

es una cantidad conservada. Tomemos el caso $N = 3$. Notar que lo que se conserva es el escalar J y no las componentes J^{ij} con las que podríamos armar un vector $\vec{J} \equiv (J^{23}, J^{31}, J^{12})$ de "momento angular". Esto es consecuencia de que ω arbitraria no da una simetría del lagrangiano (2.17) sino sólo aquellas que conmuten con la matriz θ, y con las cuales construímos la combinación que da (2.19).

2.3. Epílogo: Cuantización de sistemas no–lagrangianos y las ecuaciones (2.2)

Con la formulación variacional para los sistemas dinámicos compatibles con la estructura simpléctica no–conmutativa bajo control uno se pregunta de inmediato si la acción (2.10) puede utilizarse para construir la cuantización en el espacio configuración de estos sistemas en el espíritu de la integral de caminos de Feynman. Existe en la literatura una idea concreta sobre esta cuestión.

Recientemente ha sido propuesto un método de cuantización de sistemas dinámicos con ecuaciones de movimiento que no necesariamente tienen formulación lagrangiana [84, 93]. El núcleo de este esquema reside en la introducción de una estructura que generaliza el formalismo variacional lagrangiano más o menos en el mismo sentido en que la geometría de Poisson generaliza la geometría simpléctica. Dicha estructura también puede motivarse en una generalización de la ecuación de Schwinger-Dyson para el caso de sistemas dinámicos que no provienen de una formulación variacional [92]. A continuación presentamos un breve resumen de las ideas principales de esta propuesta de cuantización de sistemas no–lagrangianos[6].

[6]Otra propuesta para el mismo tipo de problemas que va por líneas similares puede encontrarse en las referencias más recienes [87, 88].

2.3.1. Ancla de Lagrange

En el formalismo lagrangiano usual un sistema dinámico se especifica por el funcional de acción $S([x]) : N \to \mathbb{R}$ definido en el espacio de órbitas sobre el espacio configuración del sistema. Las órbitas solución son las que minimizan S, lo que lleva a las ecuaciones de movimiento

$$\mathcal{M}_i(t) \equiv \frac{\delta S}{\delta x^i(t)} = 0.$$

Consecuencia de esta relación es que para el conjunto $\mathcal{M}_i$ se cumple el criterio de Helmholtz expresado como

$$\frac{\delta \mathcal{M}_i(s)}{\delta x^j(t)} - \frac{\delta \mathcal{M}_j(t)}{\delta x^i(s)} = 0. \tag{2.20}$$

Esta idea se puede parafrasear de la siguiente manera: Si tomamos las ecuaciones $\mathcal{M}_i$ como las componentes de una 1-forma $\mathcal{M} = dS$ en la variedad de dimensión infinita a la que pertenecen todas las órbitas, el criterio de Helmholtz se escribe como la cerradura de dicha 1-forma $d\mathcal{M} = 0$. Localmente este criterio también es una condición necesaria para que las ecuaciones $\mathcal{M} = 0$ provengan del principio de acción.

Así, el formalismo lagrangiano estándar requiere que las ecuaciones de movimiento satisfagan dos condiciones: (i) deben ser las componentes de una 1-forma en el haz cotangente T^*N al espacio de todas las órbitas N, y (ii) ésta debe ser cerrada para cumplir con el criterio de Helmholtz.

El primer paso para generalizar esta estructura consiste en reemplazar el haz cotangente T^*N por un haz vectorial arbitrario $\mathcal{E} \dashrightarrow N$ sobre el espacio de órbitas, con $\mathcal{E}$ no necesariamente de la misma dimensión que T^*N. Las ecuaciones de movimiento serán ahora las componentes de una sección $\mathcal{M} = \mathcal{M}_a e^a$ en este haz vectorial, donde e^a es una base local en $\mathcal{E}$. La dinámica de un sistema estará dada entonces por las ecuaciones

$$\mathcal{M}_a(t) = 0.$$

El siguiente paso es la generalización del criterio de integrabilidad de Helmholtz. Para ver qué forma tiene esta generalización veamos primero el caso en que la dimensión de $\mathcal{E}$ es la misma que la de T^*N. En ese caso, el criterio de Helmholtz se satisface si podemos encontrar un isomorfismo $\Lambda : \mathcal{E} \to T^*N$ tal que $\mathcal{M}' = \Lambda\mathcal{M}$ es una forma cerrada. En coordenadas locales esto es

$$\mathcal{M}'_i(t) = \Lambda_i^a(t)\mathcal{M}_a(t),$$

con Λ_i^a una matriz invertible. De la condición $d\mathcal{M}' = 0$ se obtiene que

$$\frac{\delta\mathcal{M}_a(s)}{\delta x^i(t)} = \int dudv\mathcal{M}_b(u)C^b_{ac}(u,s,v)\Lambda_i^c(v,t) + \int duG_{ac}(s,u)\Lambda_i^c(u,t), \tag{2.21}$$

con G y C funcionales de estructura simétricos y antisimétricos respectivamente en los índices de abajo.

Como Λ es un isomorfismo de haces vectoriales, existe el mapeo inverso $V = \Lambda^{-1} : \mathcal{E}^* \to TN$ que constituye una sección con componentes V_a^i: $V = V_a^i e^a \otimes \partial_i$. De (2.21) la condición de integrabilidad de Helmholtz (2.20) para $\mathcal{M}'$ se traduce en la siguiente relación entre V y $\mathcal{M}$:

$$V_a^i(t,u)\frac{\delta\mathcal{M}_b(s)}{\delta x^i(u)} - V_b^i(s,u)\frac{\delta\mathcal{M}_a(t)}{\delta x^i(u)} = C^d_{ba}(u,t,s)\mathcal{M}_d(u). \tag{2.22}$$

Ahora nos olvidamos del factor integrante Λ, y tomamos esta relación como la definición de la condición de integrabilidad, válida incluso cuando la dimensión de $\mathcal{E}$ no es igual a la de T^*N. El mapeo V sujeto a las relaciones (2.22) se denomina *ancla de Lagrange*, y constituye el ingrediente principal de la generalización del formalismo lagrangiano propuesta por los autores de [84]. Cuando las ecuaciones de movimiento son lagrangianas, la relación (2.22) se vuelve el criterio de Helmholtz con $V_i^j = \Lambda_i^j = \delta_i^j$. En el caso más general, no se pide que V sea invertible, y por lo tanto puede no existir factor integrante para las ecuaciones de movimiento.

2.3.2. Ecuación de Schwinger-Dyson generalizada

En términos similares a los de la generalización del formalismo lagrangiano, en el contexto general de las teorías de campo es posible plantear la generalización de la ecuación de Schwinger-Dyson (SD) para sistemas dinámicos cuyas ecuaciones de movimiento clásicas no provienen de un principio variacional [92]. La función generadora de funciones de Green que es solución de la ecuación de SD generalizada define los propagadores cuánticos para dichos sistemas.

Si un sistema dinamico está descrito por las ecuaciones lagrangianas $\mathcal{M}_i(\phi) = \frac{\delta S}{\delta \phi^i}$ para los campos ϕ^i, la ecuación de SD estándar para la función generadora $Z(J)$ es

$$\hat{\mathbb{T}}_i Z(J) = 0, \quad \text{con} \quad \hat{\mathbb{T}}_i = -J_i + \mathcal{M}_i(i\hbar \frac{\partial}{\partial J}).$$

Para evitar mayores restricciones sobre $Z(J)$, a los operadores $\hat{\mathbb{T}}_i$ se les pide que conmuten. Estos operadores pueden ser vistos como la cuantización canónica de las constricciones de primera clase

$$\mathbb{T}_i(\phi, J) = \mathcal{M}_i(\phi) - J_i,$$

con $\{\mathbb{T}_i, \mathbb{T}_j\} = 0$ en el paréntesis de Poisson canónico, donde J_i es considerado el momento conjugado de ϕ^i. En la representación de coordenadas se tiene que

$$\hat{\mathbb{T}}_i = \mathcal{M}_i(\phi) + i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi^i}.$$

Imponiendo esta constricción entre operadores en el estado $\Psi(\phi)$ (que es la transformada de Fourier de $Z(J)$) tenemos que

$$\left[\mathcal{M}_i(\phi) + i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi^i}\right] \Psi(\phi) = 0,$$

que para el caso de ecuaciones lagrangianas la solución está dada por la amplitud de probabilidad de Feynman

$$\Psi(\phi) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(\phi)}.$$

Para la generalización de este esquema análoga a la del formalismo lagrangiano anterior, podemos tomar la siguiente función de prueba para el análogo clásico del operador $\hat{\mathbb{T}}_i$ generalizado cuando las ecuaciones de movimiento $\mathcal{M}_a$ no son lagrangianas

$$\mathbb{T}_a(\phi, J) \equiv \mathcal{M}_a(\phi) - V^i_a J_i + \mathcal{O}(J^2).$$

Imponiendo la condición de que estas constricciones sean de primera clase $\{\mathbb{T}_a, \mathbb{T}_b\} = U^c_{ab} \mathbb{T}_c$ con $U^c_{ab}(\phi, J) = C^c_{ab}(\phi) + \mathcal{O}(J)$, se obtiene un conjunto infinito de relaciones entre los coeficientes de estructura que aparecen en $\mathbb{T}_a$. En particular para cero orden en J se tiene que

$$V^i_a \frac{\delta \mathcal{M}_b}{\delta \phi^i} - V^i_b \frac{\delta \mathcal{M}_a}{\delta \phi^i} = C^d_{ba} \mathcal{M}_d,$$

que son las relaciones que satisface el ancla de Lagrange V_a^i. Así, vemos que esta estructura tiene otro orígen independiente en la generalización de la ecuación de SD para sistemas no–lagrangianos.

2.3.3. Relación de este esquema con el principio variacional para las ecuaciones (2.2)

En relación al tema que hemos tratado en la sección 2.1 sobre la equivalencia entre las condiciones de compatibilidad dinámica no–conmutativas y las condiciones de Helmholtz de las ecuaciones de tercer orden (2.2), en términos de la cuantización de sistemas no–lagrangianos podemos reinterpretar este problema como sigue.

Empezando con las ecuaciones de movimiento de segundo orden $\mathcal{M}_i(t) = \ddot{x}^i - F^i$ compatibles con la estructura simpléctica no–conmutativa, buscamos un factor integrante

$$\Lambda^i_j(t,s) = M_{ij}\delta(t-s) + K_{ij}\frac{d}{dt}\delta(t-s),$$

tal que las ecuaciones $\Lambda^i_j(t,s)\mathcal{M}_j(s)$ provengan de una formulación variacional. Podemos tratar a Λ como la perturbación de M por K, siendo estos dos operadores invertibles. El ancla de lagrange en este caso es el inverso de Λ. Explícitamente, si $\Lambda = M + \alpha K$ con α un parámetro de perturbación, entonces el ancla

$$V = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s (-M^{-1}N)^s M^{-1} \equiv V^{(0)} + \alpha V^{(1)} + \ldots$$

es un operador diferencial que se puede escribir en potencias de α, siendo $V^{(0)} = M^{-1}$.

Si con el ancla de Lagrange V definimos una distribución en el espacio de órbitas

$$V_j(t) = -i \int ds V_j^i(t,s) \frac{\delta}{\delta x^i(s)},$$

combinando este campo vectorial con las ecuaciones de movimiento originales podemos definir el operador de SD generalizado

$$\hat{\mathbb{T}}_i(t) = \mathcal{M}_i(t) + V_i(t).$$

Este puede verse como resultado de la cuantización canónica de las constricciones de primera clase $\mathbb{T}_i(t) \approx 0$ para su análogo clásico en el haz cotangente al espacio de órbitas. Ahí, la estructura de Poisson canónica está determinada por los paréntesis de Poisson $\{x, x\} = \{p, p\} = 0$ y $\{x^i(t), p_j(s)\} = \delta^i_j \delta(t-s)$. Imponiendo las constricciones de primera clase mencionadas es posible encontrar para el análogo clásico del operador de SD la expresión

$$\mathbb{T}_i(t) = \mathcal{M}_i(t) + \sum_{s=0}^{\infty} V_j^i(x, \dot{x}, \dots) \frac{d^s p_i}{dt^s}.$$

La correspondiente ecuación de SD generalizada para la amplitud de probabilidad es

$$\hat{\mathbb{T}}_i \Psi(x) = 0.$$

Si el ancla de Lagrange es invertible como en este caso tenemos que

$$\Psi(x) \sim e^{\frac{i}{\hbar} S([x])},$$

con S un funcional de acción como el dado por (2.10) de la formulación variacional construída en la sección 2.2 para las ecuaciones (2.7). Este funcional de acción contiene derivadas de alto orden en tanto $K \neq 0$. La amplitud de probabilidad $\Psi(x)$ es una función sólo de las coordenadas, cosa que no se puede lograr con la cuantización canónica del formalismo de primer orden dado por un hamiltoniano y la estructura simpléctica no–conmutativa.

Con esta discusión terminamos el tema que hemos abordado en esta primera parte de la tesis, en relación a los efectos de la no–conmutatividad de las coordenadas en la dinámica de sistemas de partículas en el espacio configuración. En la segunda parte pasaremos al contexto de teorías de campo donde estudiaremos dos aspectos de la introducción de coordenadas no–conmutativas en el espacio de Minkowski: La implementación de simetrías del espacio–tiempo y una deformación no–conmutativa de la gravedad. La definición de teorías de campo no–conmutativas es diferente a la construcción simpléctica de la mecánica clásica no–conmutativa que hemos presentado aquí. En campos se toma el lagrangiano de un cierto modelo clásico "conmutativo" (como el del campo escalar, o de la teoría de Maxwell libre) y se sustituyen todos los productos entre campos por el producto-$\star$ de Moyal [58]. Si existe algún problema interesante en la relación de esta formulación con el problema inverso del cálculo de variaciones en teorías de campo [77] en esta tesis no lo trataremos.

CAPÍTULO 3

Simetrías del espacio–tiempo en teorías de campo no–conmutativas

Llamamos teorías de campo no–conmutativas (TCNC) a teorías de campo construídas sobre el espacio–tiempo plano cuya estructura en un grado de resolución muy alto es tal que las coordenadas no conmutan [94, 121] y cumplen con las relaciones

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \equiv \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu - \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu = i\theta^{\mu\nu}. \tag{3.1}$$

Formalmente tomamos a $\hat{x}^\mu$ como los generadores del álgebra a la que pertenecen los campos, y en el caso más general los parámetros no–conmutativos $\theta^{\mu\nu}(\hat{x})$ serían una función de estos generadores. En el caso canónico que consideraremos en esta tesis estos parámetros son constantes y elementos de una matriz antisimétrica. Representarían constantes fundamentales (tanto como la velocidad de la luz c o la constante de Planck $\hbar$), con unidades de longitud al cuadrado y probablemente comparables a la longitud de Planck: $\sqrt{\theta} \sim \lambda_P \sim 10^{-33}$ cm.

En una teoría de campos convencional las constantes fundamentales tienen el mismo valor en todos los marcos de referencia inerciales, conectados estos por transformaciones del grupo de Poincaré. En el caso de TCNC el subgrupo de traslaciones globales en el espacio–tiempo $\hat{x}^\mu \mapsto \hat{x}'^\mu = \hat{x}^\mu + a^\mu$ deja invariante la relación (3.1), pero el subgrupo de transformaciones de Lorentz no. Este hecho pone en aprietos al concepto usual de covariancia y varios aspectos relacionados con ésta en teorías de campo y su cuantización (como la conexión entre espín y estadística [3, 13]). Ante esta situación podríamos plantear el siguiente dilema: O bien hace falta una interpretación diferente de $\theta^{\mu\nu}$ que sea congruente con la concepción usual de covariancia, o esta concepción no aplica en TCNC y en su caso debe ser abandonada, restringida o sustituída.

En este capítulo abordaremos el problema de la implementación de simetrías del espacio–tiempo en TCNC, con particular atención en este conflicto entre las relaciones (3.1) y la concepción usual de covariancia en teorías de campo clásicas. Para ello usaremos la definición de TCNC en el formalismo de la correspondencia de Weyl-Wigner-Moyal, cuyos elementos básicos presentamos en la primera sección. Estudiaremos en particular un tipo de implementación de simetrías en este contexto llamadas simetrías *twist*, cuya construcción presentaremos en la sección 3.2. Luego, en la sección 3.3, propondremos una implementación variacional de transformaciones lineales de las coordenadas del espacio–tiempo que se puede contrastar con las correspondientes simetrías twist[1]. Esta implementación resulta muy similar a la usual en teorías de campo, y está fundamentada en tratar a $\theta^{\mu\nu}$ como las componentes de un tensor (y en este sentido reinterpretar su papel en las

[1]De este trabajo tenemos en preparación un artículo para arbitraje [50].

relaciones (3.1)). Nuestra aproximación es clásica y su objetivo es tener una mejor comprensión de las simetrías, el principio variacional, y eventualmente el teorema de Noether en TCNC. En la última sección haremos algunas observaciones a manera de resumen y conclusión.

3.1. Contexto formal y motivación

En esta primera sección presentamos de manera breve los conceptos básicos del formalismo de Weyl-Wigner-Moyal de cuantización por deformación en un parámetro [72, 96, 118, 119], y después una motivación para el problema que queremos abordar en este contexto. El objetivo central de la primera parte es introducir el producto-$\star$ con el cual se define la generalización no–conmutativa de una teoría de campo dada (definición que usaremos en este capítulo y el siguiente). La idea básica del formalismo es que toda la no–conmutatividad inducida por las relaciones (3.1) entre las coordenadas se realiza mediante una *deformación* del álgebra de funciones clásicas evaluadas en el espacio–tiempo ordinario. Esta deformación se lleva a cabo mediante el reemplazo del producto puntual usual conmutativo entre funciones por el producto-$\star$ de Moyal (no conmutativo). Es el mismo tipo de procedimiento que se utiliza en el formalismo de cuantización por deformaciones de un sistema mecánico en el espacio fase, método que es equivalente al de cuantización canónica [19].

3.1.1. Deformación de Weyl-Wigner-Moyal

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones clásicas que toman valores en puntos en el espacio–tiempo de D dimensiones, y $\mathcal{A}_\vartheta$ la extensión de ésta que incluye todas las series formales en potencias de un parámetro que denotamos por ϑ: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta^n f_n(x)$, con $f_n(x) \in \mathcal{A}$. El mapeo o correspondencia de Weyl-Wigner definido por

$$F(\hat{x}) \equiv \int (dx)^D f(x) \mathcal{W}(x,\hat{x}), \quad \text{con} \quad \mathcal{W}(x,\hat{x}) \equiv \int \frac{(dk)^D}{(2\pi)^D} e^{ik\cdot\hat{x}} e^{-ik\cdot x}, \tag{3.2}$$

y $k \cdot x \equiv k_\mu x^\mu$, lleva $f(x) \in \mathcal{A}_\vartheta$ a una función $F(\hat{x}) \in \hat{\mathcal{A}}$ de las coordenadas no–conmutativas que satisfacen las relaciones $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\vartheta\theta^{\mu\nu}$ (las hemos reparametrizado tal que ϑ aparece en (3.1) explícitamente), con $\hat{\mathcal{A}}$ el álgebra generada por todos los polinomios en $\hat{x}^\mu$. En este lenguaje $f(x) \in \mathcal{A}_\vartheta$ se denomina "símbolo de Weyl" de $F(\hat{x})$, y constituye una representación de esta función en el espacio de coordenadas x^μ[2].

Con esta correspondencia podemos definir una noción de traza en el álgebra no conmutativa mediante la integral en el álgebra de símbolos de Weyl

$$\mathfrak{tr}[F] = \int (dx)^D f(x)$$

(usando alguna condición de normalización sobre $\mathcal{W}(x,\hat{x})$), y con ésta puede definirse el mapeo inverso de (3.2) mediante

$$f(x) = \mathfrak{tr}[F(\hat{x})\mathcal{W}(x,\hat{x})],$$

que va de $\hat{\mathcal{A}}$ al álgebra de series formales $\mathcal{A}_\vartheta$.

Es sencillo ver que bajo el mapeo de Weyl-Wigner (3.2) al producto entre funciones de las coordenadas no–conmutativas en $\hat{\mathcal{A}}$ le corresponde el producto-$\star$ de

[2] El operador $\mathcal{W}(x,\hat{x})$ está básicamente definido por dos transformadas de Fourier entre los espacios de coordenadas y momentos k, y lleva implícito en él alguna prescripción de ordenamiento para $F \in \hat{\mathcal{A}}$.

Groenewold-Moyal entre los símbolos de Weyl correspondientes

$$FG(\hat{x}) = \int (dx)^D (f \star g)(x) \mathcal{W}(x, \hat{x}), \tag{3.3}$$

con

$$(f \star g)(x) \equiv f(x) e^{\frac{i\vartheta}{2}\theta^{\alpha\beta} \overleftarrow{\partial}_\alpha \overrightarrow{\partial}_\beta} g(x) \tag{3.4}$$

(para ver los detalles de la deducción se pueden consultar las referencias [58, 74, 111]; ésta consiste básicamente en usar el mapeo (3.2), su inverso, y la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff). Este producto es un ejemplo particular de la deformación de un producto en un parámetro en el formalismo de cuantización por deformaciones [19], y es el único que a primer orden en ϑ deforma al producto usual de funciones con un paréntesis de Poisson que se define con la matriz $\theta^{\mu\nu}$ (como el que utilizamos en la sección 1.1 del primer capítulo de esta tesis). El subíndice de $\mathcal{A}_\vartheta$ en la notación que hemos usado indica el sentido de deformación no–conmutativa que se implementa con este método: Tomando el límite $\vartheta \to 0$ el producto-$\star$ regresa al prodcuto usual (conmutativo) entre funciones, y el álgebra deformada $\mathcal{A}_\vartheta$ regresa al ágebra $\mathcal{A}$ de funciones clásicas. Como las relaciones de conmutación entre las coordenadas del espacio–tiempo se realiza con

$$[x^\mu, x^\nu]_\star = i\vartheta\theta^{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

siendo $[f(x), g(x)]_\star \equiv f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x)$ el conmutador para símbolos en $\mathcal{A}_\vartheta$, en el límite $\vartheta \to 0$ las coordenadas vuelven a ser conmutativas.

En estos términos, la generalización no–conmutativa de una teoría de campos se construye de la siguiente manera. Dado el lagrangiano de una teoría clásica ordinaria (o "conmutativa"), como la del campo escalar $\phi(x)$ con potencial de interacción $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ cuya generalización no–conmutativa está definida por el lagrangiano para las funciones de las coordenadas no–conmutativas $\hat{\phi}(\hat{x})$

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \hat{\phi}(\hat{x})\partial^\mu \hat{\phi}(\hat{x}) - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2(\hat{x}) + \frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}(\hat{x})^4 \tag{3.6}$$

módulo las relaciones (3.1), en el contexto de la deformación de Weyl-Wigner-Moyal esta teoría se representa con el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x) \star \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2(\phi \star \phi)(x) + \frac{\lambda}{4!}(\phi \star \phi \star \phi \star \phi)(x), \tag{3.7}$$

que se obtiene sustituyendo todos los productos entre campos y sus derivadas en el lagrangiano clásico no deformado por el producto-$\star$ (3.4). El lagrangiano (3.7) debe entenderse como un lagrangiano clásico cuya cuantización da la *teoría cuántica de campos no–conmutativa* correspondiente a la teoría $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$.

Es fácil ver (usando la traza en $\hat{\mathcal{A}}$ definida con la coorrespondencia de Weyl) que la integral del producto-$\star$ de funciones satisface las identidades

$$\int (dx)^D (f \star g)(x) = \int (dx)^D (g \star f)(x) \simeq \int (dx)^D f(x) g(x), \quad \text{y} \tag{3.8a}$$

$$\int (dx)^D (f \star g \star h)(x) = \int (dx)^D (h \star f \star g)(x) \tag{3.8b}$$

($\simeq$ quiere decir igualdad módulo términos de borde). En consecuencia, la parte libre del lagrangiano no–conmutativo (3.7) es idéntica a la del lagrangiano correspondiente de la teoría no deformada (o conmutativa). Este es un ejemplo de un hecho general: Las TCNC se diferencían de sus teorías de campos no deformadas en los términos de interacción.

Con el formalismo arriba expuesto las características de una teoría de campos definida con base en funciones de las coordenadas no–conmutativas pueden ser estudiadas mediante la teoría definida en el álgebra de series formales y funciones clásicas que se multiplican con el producto-$\star$. Aunque para el formalismo aquí presentado $\theta^{\mu\nu}$ es una constante, el mismo puede definirse para una estructura de Poisson no–conmutativa más general, en cuyo caso el producto-$\star$ que deforma al álgebra de funciones original es el producto de Kontsevich [32, 89].

3.1.2. Motivación

El formalismo de la correspondencia de Weyl-Wigner-Moyal ha resultado muy útil para estudiar varios aspectos de las TCNC, como soluciones solitónicas estables, el fenómeno de mezcla de divergencias UV/IR en la expansión perturbativa de la teoría cuántizada, y en general aspectos no locales propios de este tipo de teorías [52, 70, 75]. Un problema que ha sido discutido por varios años es el de la implementación de simetrías del espacio–tiempo consistentes con las relaciones (3.5) entre las coordenadas. Si buscamos imponer la invariancia de estas relaciones, las transformaciones de coordenadas que lo hacen resultan severamente restringidas: Dada una transformación infinitesimal $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, y cómo transforma el conmutador-$\star$ entre ellas

$$[x'^\mu, x'^\nu]_\star = i\vartheta\theta^{\mu\nu} + i\vartheta(\theta^{\rho\nu}\partial_\rho\xi^\mu + \theta^{\mu\rho}\partial_\rho\xi^\nu) + O(\xi^2),$$

para que θ sea invariante debe cumplirse que $\theta^{\rho\nu}\partial_\rho\xi^\mu + \theta^{\mu\rho}\partial_\rho\xi^\nu = 0$[3]. En esta dirección, en el caso de $D = 4$ existe un marco de referencia en el que la matriz $\theta^{\mu\nu}$ es antidiagonal por bloques, y así el subgrupo más grande del grupo de Lorentz

[3]Una solución no trivial de esta ecuación es $\xi^\mu = \theta^{\mu\sigma}\partial_\sigma f(x)$ con cualquier función bien portada $f(x)$. Estas transformaciones preservan el elemento de volumen $(dx')^D = (dx)^D$ pues el determinante del jacobiano es 1, y con ellas en [27] ha sido construído un modelo de gravedad no–conmutativa haciendo local el grupo de Lorentz. La teoría resultante es una deformación no–conmutativa de la gravedad unimodular.

que preserva las relaciones no–conmutativas es $O(1,1) \times SO(2)$, donde el factor $O(1,1)$ actúa sobre el subespacio (x^0, x^1) mientras que $SO(2)$ implementa rotaciones en (x^2, x^3) [2]. El problema en este caso es que ambos grupos son abelianos y sus únicas representaciones irreducibles son unidimensionales, y por lo tanto no hay representaciones espinoriales, vectoriales, etc.

Recientemente la comunidad ha puesto mucha atención en un tipo de transformaciones de simetría del espacio–tiempo en TCNC que tiene entre otras propiedades la de dejar explícitamente invariante a la relación (3.5) bajo cualquier difeomorfismo. Estas son las llamadas simetrías *twist* [8, 34], y se definen con base en una deformación del coproducto de la estructura de Hopf subyacente al álgebra de Lie de transformaciones de los campos (ver secciones B.2 y B.3 del apéndice B). El coproducto del álgebra de transformaciones define la regla con la que una de éstas actúa sobre la multiplicación de dos campos (como la regla de Leibniz), y su deformación puede entenderse como la congruencia entre esta regla y la deformación del producto en el producto-$\star$ con la que se multiplican los campos en el álgebra de funciones deformada[4]. Uno de los atractivos de la implementación twist de transformaciones del espacio–tiempo es que proporciona una forma de la invariancia de Lorentz que permite rescatar todas sus representaciones vectoriales, espinoriales, etc., y así la interpretación usual de partículas en teorías de campos.

Más allá de las globales, la definición de simetrías locales de teorías de norma no–conmutativas en el espacio de Moyal también tiene limitaciones[5]. El problema principal en este caso es que el álgebra de transformaciones de norma definidas

[4]Mediante la implementación twist de los difeomorfismos también ha sido propuesto un modelo de gravedad no–conmutativa [10], e incluso un teorema de Noether para este tipo de simetrías del espacio–tiempo [11, 82].

[5]Aquí el carácter de $\theta^{\mu\nu}$ ante transformaciones de norma no se distingue del de las coordenadas.

con el producto-$\star$ en general no cierra en el álgebra de Lie de los generadores del grupo interno, sino en el *álgebra envolvente* de ésta que se genera con todos los polinomios en los generadores del álgebra de Lie (ver sección B.1 del apéndice B). Sólo en algunos casos dichas transformaciones sí cierran dentro del mismo grupo de norma. Uno de ellos es $\mathcal{U}(n)$, el grupo de matrices unitarias de $n \times n$, y aunque es posible definir el grupo unitario no–conmutativo (denotado $\mathcal{U}_\star(n)$), sus representaciones están restringidas a la fundamental, anti–fundamental, y adjunta [37, 95]. Los campos de materia en ese caso no pueden tener más de dos cargas de grupos de norma no–conmutativos. En el caso general parecería que la teoría tendrá una infinidad de parámetros de norma, y la misma cantidad de componentes del campo de norma no–conmutativo (una por cada elemento de la base del álgebra envolvente).

Sin embargo, y por fortuna, esta situación tiene un revés. En teorías de norma no–conmutativas es posible reescribir la acción como una serie perturbativa en el parámetro ϑ donde cada término es invariante de la simetría de norma no deformada o conmutativa[6]. Esto se logra mediante una redefinición de los campos y parámetros que se conoce como el mapeo de Seiberg-Witten (SW), y que es resultado de la equivalencia de dos métodos de regularización (separación de puntos y Pauli-Villars) en la teoría de norma no–conmutativa resultado del límite de baja energía de una teoría de cuerdas abiertas en presencia de un campo de fondo constante [107]. Con el mapeo de SW puede verse que todos los coeficientes de los polinomios en los generadores T_a del álgebra de simetría son funciones del primero de ellos, y así en realidad la teoría de norma no–conmutativa tiene un número finito de parámetros y componentes del campo de norma. Usando el mapeo de SW ha sido explorada la definición de otros grupos de norma no–conmutativos, especí-

[6]Este hecho se pude estudiar en el contexto de deformaciones consistentes de teorías de norma de una manera muy directa (ver sección C.2.2 del apéndice C).

ficamente grupos unitarios especiales, y con ellos se ha construído una versión del modelo estándar no–conmutativo [26, 38, 120]. También, usando este mapeo ha sido estudiada la invariancia de teorías de Yang-Mills no–conmutativas bajo transformaciones de la métrica de fondo plana, que en el caso ordinario o conmutativo incluye todas las transformaciones del grupo conforme [14]. El resultado es que tanto dilataciones como transformaciones conformes especiales resultan obstruídas, y las del grupo de Poincaré restringidas a las que preservan $\theta^{\mu\nu}$.

El hecho de que una teoría de norma no–conmutativa se pueda mapear a una teoría en términos de los campos y transformaciones de norma usuales en el espacio–tiempo conmutativo, pone algunas preguntas directas en torno a la equivalencia de las simetrías del espacio–tiempo de cada lado de la equivalencia. En particular, ¿cuál es la relación, si la hay, entre la versión twist de las simetrías del espacio–tiempo en el espacio de Moyal con las simetrías en la teoría que resulta del mapeo de SW? ¿Es posible calcular una corriente conservada en el lado conmutativo y luego regresar a la teoría no–conmutativa usando el mapeo de SW (inverso) y obtener la correspondiente versión de la corriente conservada del lado no–conmutativo? La simetría asociada en ese caso, ¿sería la simetría twist?

En las siguientes secciones de este capítulo más que una investigación exhaustiva abordamos algunos aspectos particulares y básicos del problema de la construcción de simetrías del espacio–tiempo en TCNC. Uno de estos aspectos es por ejemplo si el producto-$\star$ con el que se multiplican dos campos cambia o no bajo transformaciones de coordenadas. Veremos que la invariancia del producto-$\star$ bajo transformaciones del espacio–tiempo determina las posibles simetrías de la métrica de fondo plana.

3.2. Transformaciones twist del espacio-tiempo

En esta sección planteamos el siguiente problema: ¿Que le sucede al producto-$\star$ de Moyal de dos tensores bajo transformaciones de las coordenadas del espacio–tiempo? ¿Es el producto-$\star$ de dos tensores un tensor? O más en general, ¿es el producto-$\star$ de dos campos en dos representaciones un elemento del producto de esas representaciones? El tipo de transformaciones twist dan una respuesta posible a estas preguntas.

Para verlo consideremos un difeomorfismo del espacio–tiempo generado por el campo vectorial $\xi(x) = \xi^\mu \partial_\mu$, y dos campos ϕ_1, ϕ_2 que transforman de acuerdo con dos representaciones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ dadas por un par de operadores diferenciales

$$\phi'_{1,2} = \mathcal{D}_{1,2}(\xi)\phi_{1,2}. \tag{3.9}$$

Decimos que la acción de $\mathcal{D}$ sobre el campo ϕ es "primaria" y exactamente la que sería en el caso de una teoría de campos conmutativa estándar. Esto es parte de la prescripción para simetrías twist: Los campos primarios[7] de una teoría no–conmutativa transforman bajo simetrías twist exactamente como transforman los campos de la teoría conmutativa de la que aquella es una deformación.

Para evaluar la acción de un difeomorfismo sobre el producto-$\star$ de dos campos usaremos aquí la definición

$$(\phi \star \psi)(x) = m_\star(\phi \otimes \psi)(x) = m[\mathcal{F}^{-1}(\phi \otimes \psi)](x)$$

(donde m es el producto puntual ordinario $\phi \cdot \psi(x) = m[\phi \otimes \psi](x) = \phi(x) \cdot \psi(x)$)

[7]Los campos fundamentales y sus transformaciones son objetos "primarios" del modelo; el producto-$\star$ de dos campos no es primario, es un objeto "compuesto" o derivado.

en términos del operador[8]

$$\mathcal{F}^{-1} \equiv \exp\big(\frac{i\vartheta}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta/2)^n}{n!}\theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}\left(\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_n}\otimes\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_n}\right). \tag{3.10}$$

La prescripción que define la acción de una transformación twist sobre el producto-$\star$ entre un par de campos correspondientes a dos representaciones es que *el producto $\phi_1 \star \phi_2$ transforma en la representación* $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$, producto de las representaciones respectivas de los campos. En el caso de tensores, es esta condición la que implica que $T_1{}^{p_1}_{q_1}(x) \star T_2{}^{p_2}_{q_2}(x)$ transforme covariantemente como un tensor del tipo $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$, como lo presentan los autores de [10].

Imponer esta condición sobre el producto-$\star$ de dos campos implica que

$$(\mathcal{F}^{-1}\phi_1 \otimes \phi_2)' = [\mathcal{D}_1(\xi) \otimes \mathcal{D}_2(\xi)](\mathcal{F}^{-1}\phi_1 \otimes \phi_2) = \mathcal{F}'^{-1}\phi_1' \otimes \phi_2', \tag{3.11}$$

de donde puede extraerse un cambio en $\mathcal{F}^{-1}$ debido a la transformación de los campos bajo un difeomorfismo del espacio–tiempo

$$\mathcal{F}'^{-1} = [\mathcal{D}_1(\xi) \otimes \mathcal{D}_2(\xi)]\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{D}_1^{-1}(\xi) \otimes \mathcal{D}_2^{-1}(\xi)].$$

La versión infinitesimal de la ecuación anterior es

$$\delta_\xi \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\vartheta/2)^n}{n!}\theta^{\mu_1\nu_1}...\theta^{\mu_n\nu_n}\{[\partial_{\mu_1}, [\partial_{\mu_2}, ...[\partial_{\mu_n}, \delta_{\xi,1}]...]] \otimes \partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}...\partial_{\nu_n}$$
$$+ \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n} \otimes [\partial_{\nu_1}, [\partial_{\nu_2}, ...[\partial_{\nu_n}, \delta_{\xi,2}]...]]\}, \tag{3.12}$$

[8] En el esquema formal de álgebras de Hopf este operador deforma al producto de un álgebra de funciones, y al mismo tiempo al coproducto con el que las transformaciones actúan sobre la multiplicación entre éstas (ver apéndice B).

donde $\delta_{\xi,1,2}$ es la forma infinitesimal de los operadores diferenciales $\mathcal{D}_{1,2}$, y $[\partial_\mu, \delta_\xi]$ quiere decir el conmutador entre la derivada parcial y el operador δ_ξ asociado a la representación de cada campo. Así, el cambio infinitesimal de $\phi_1 \star \phi_2$ está dado por

$$\begin{aligned}\delta_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x)) &= m[\mathcal{F}'^{-1}\phi_1' \otimes \phi_2'](x) - m[\mathcal{F}^{-1}\phi_1 \otimes \phi_2](x) \\ &= \delta_{\xi,1}\phi_1(x) \star \phi_2(x) + \phi_1(x) \star \delta_{\xi,2}\phi_2(x) + \phi_1(x)(\delta_\xi \star)\phi_2(x),\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde todos los términos de esta ecuación están evaluados en el mismo punto, y el último es explícitamente

$$\begin{aligned}\phi_1(x)(\delta_\xi \star)\phi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\vartheta/2)^n}{n!}\theta^{\mu_1\nu_1}...\theta^{\mu_n\nu_n} \\ \{[\partial_{\mu_1}, [\partial_{\mu_2}, ...[\partial_{\mu_n}, \delta_{\xi,1}]...]]\phi_1 \star \partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}...\partial_{\nu_n}\phi_2 \\ + \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n}\phi_1 \star [\partial_{\nu_1}, [\partial_{\nu_2}, ...[\partial_{\nu_n}, \delta_{\xi,2}]...]]\phi_2\}.\end{aligned}$$

Este resultado es una de las características principales de la acción de una transformación twist sobre el producto-$\star$ de dos campos. La expresión anterior es la misma que se obtiene deformando con un twist el coproducto de la estructura de Hopf subyacente al álgebra de transformaciones de la teoría en cuestión. Como resultado de esta deformación las transformaciones infinitesimales no actúan con la regla de Leibniz sobre el producto-$\star$ de dos campos, como se puede ver en (3.13). En la construcción aquí expuesta[9], que parte desde un punto de vista más intuitivo que formal, esta característica de las transformaciones twist se atribuye al hecho de que el producto-$\star$ sufre un cambio inducido por la transformación de

[9]Ésta está tomada de [1] y es totalmente autocontenida e independiente de la construcción en términos de álgebras de Hopf [8] y el twist de Drinfeld [59, 60]. Para revisar esta última puede consultarse el apéndice B (sección B.3), y las referencias [8–10, 34].

los campos.

Conviene hacer énfasis en esta observación sobre la definición de transformaciones twist para luego contrastarla con el análisis que haremos en la siguiente sección. El cambio o transformación del producto-$\star$ dado infinitesimalmente por (3.12) no corresponde a un cambio o variación por sí mismo, sino a un cambio inducido por las transformaciones que sufren los campos. Esta forma de verlo es congruente con el concepto usual de simetría: Si cambiáramos el producto del álgebra ella misma cambiaría, y la idea de transformación de simetría como un homomorfismo del álgebra de funciones en sí misma se pierde.

La manera de garantizar aquí la invariancia del producto-$\star$ es postulando que ni θ ni las derivadas parciales que lo definen cambian cuando se aplica una transformación de simetría dada por el difeomorfismo ξ. En particular, si ϕ transforma en la representación $\mathcal{R}$ de un grupo de simetría, entonces $\partial_{\mu_1}....\partial_{\mu_n}\phi$ transforma bajo la misma representación[10]. Al final la prescripción es congruente, ya que si hacemos la transformación twist explícita de $[x^\mu, x^\nu]_\star$ (usando (3.13)) resulta que θ es invariante bajo cualquier difeomorfismo: $\delta_\xi \theta^{\mu\nu} = \frac{1}{i\vartheta}\delta_\xi([x^\mu, x^\nu]_\star) = 0$.

En este contexto θ es una matriz de parámetros constantes, y por consistencia las coordenadas x^μ deben ser escalares. Esto implica que dichas coordenadas no pueden constituir sistemas de referencia. Aún así, con estas simetrías ha sido estudiada la invariancia de Poincaré twist de TCNC [113]. Como el álgebra de transformaciones sobre los campos primarios es la misma que en el caso conmutativo, la clasificación de partículas en términos de sus representaciones finitas sigue siendo la misma que en aquel. No es claro aún si las simetrías twist pueden ser usadas como principios de simetría para construir interacciones consistentes en TCNC [40], aunque tal vez pueden ser consideradas como un primer paso en esa direc-

[10]Este hecho ha sido notado también en el caso de transformaciones de norma twist [39, 40].

ción. Sin embargo, es aún un problema abierto construir corrientes conservadas asociadas a estas simetrías (no existe formulación del teorema de Noether para ellas).

Por otro lado, han sido propuestas teorías de norma no–conmutativas con simetrías de norma twist como elemento constructivo [12, 116]. Sin embargo, parece que tales simetrías no están en armonía con los principios de una teoría de norma. En el caso conmutativo, dada una teoría con campos de materia que tienen simetrías internas globales, al hacerlas locales resulta que las derivadas parciales de los campos no pertencen a la representación del álgebra de Lie del grupo de norma a la que pertenecen los campos, y por esto se introducen los campos de norma. En el caso no–conmutativo, si la simetría de norma es una simetría twist, las derivadas de los campos pertenecen a la representación a la que pertenecen los campos, y pareciera que los campos de norma nunca son necesarios [39]. Para hacer congruente la construcción se ha intentado introducir un twist definido con derivadas covariantes en lugar de derivadas parciales [40], pero esto no resuelve el problema porque no satisface la definición de un twist como deformación de la estructura de Hopf del álgebra de transformaciones de los campos.

3.3. Implementación variacional modificada

Por definición una simetría de un sistema físico es una transformación de las variables dinámicas que lleva una solución a las ecuaciones de movimiento a otra. En el caso de una TCNC, el espacio de soluciones es un subconjunto del álgebra (deformada) no–conmutativa a la que pertenecen los campos, en la que los mismos se multiplican con el producto-$\star$. Si una transformación cambia este producto, cambia el álgebra de funciones, y se pierde la idea convencional de simetría. Es razonable entonces pedir que cualquier implementación de simetrías en el espacio de Moyal deje invariante al producto-$\star$. En el caso de transformaciones o difeomorfismos twist del espacio–tiempo, la invariancia del producto-$\star$ se postula. Las componentes de θ son elementos de una matriz constante (es decir, números) que no transforman, y esto es complementado con el hecho de que las derivadas parciales que aparecen en la definición del producto-$\star$ no transforman tampoco[11].

Con base en esta idea, en esta sección haremos un análisis simple de la invariancia del producto-$\star$ que da como resultado la posibilidad de implementar como simetrías del espacio–tiempo hasta transformaciones lineales en las coordenadas. El aspecto clave de este análisis será que trataremos a $\theta^{\mu\nu}$ como las componentes de un (2,0)-tensor. Esto hace a estas transformaciones completamente diferentes de las prescritas para la invariancia twist de una TCNC. Así también es diferente el papel de estos parámetros en las relaciones no–conmutativas entre las coordenadas (sobre esto comentaremos más adelante). Luego veremos que para estas transformaciones puede implementarse una prescripción variacional para lograr la invariancia de la acción de una TCNC en el espacio de Moyal, o en su expansión en ϑ con el producto puntual usual, que es análoga a la prescripción de simetria twist (que sólo tiene sentido en el espacio de Moyal).

Es necesario remarcar que los dos conceptos de simetría en cuestión no son comparables pues parten de distintas hipótesis en lo que respecta a las propiedades de transformación de $\theta^{\mu\nu}$. A pesar de ello, la prescripción variacional que propondremos puede usarse para simplificar enormemente la demostración de la invariancia de cantidades físicas bajo la simetria twist, pues vamos a ver que, para el caso de transformaciones lineales en las coordenadas, el resultado de ambas sobre

[11] Esta es una manera de leer la ecuación (3.11), pues el operador $\mathcal{F}^{-1}$ aplica n derivadas parciales a los campos en el término que tiene n θ's, y sin embargo éste aún transforma con el producto de las representaciónes $\mathcal{R}$ de los campos –independientemente de cuáles sean éstas–.

el producto-$\star$ de dos campos arbitrarios es el mismo.

3.3.1. Invariancia del producto-$\star$

Consideremos las posibles propiedades de transformación del producto-$\star$ bajo todas las simetrías de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ del espacio–tiempo plano en D dimensiones. Estas provienen de la ecuación de Killing conforme

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \xi^\sigma, \tag{3.14}$$

cuya solución general es

$$\xi^\mu = a^\mu + \lambda^\mu{}_\nu x^\nu + c x^\mu + b^\nu \eta_{\nu\rho} x^\rho x^\mu - \frac{1}{2} b^\mu \eta_{\nu\rho} x^\nu x^\rho. \tag{3.15}$$

El parámetro a^μ corresponde a traslaciones, $\lambda_{\mu\nu}$ a transformaciones de Lorentz, c a dilataciones, y b^μ a transformaciones conformes especiales. Al implementar cualquiera de las simetrías (3.15) sobre un producto-$\star$ entre campos permitiremos que todos los factores transformen, incluso el producto-$\star$. Para esto, a diferencia de lo que pasa en simetrías twist, supondremos que $\theta^{\mu\nu}$ transforma como las componentes de un (2,0)-tensor (sea en la definición del producto-$\star$, o en cualquier otra expresión que contenga los campos, sus derivadas, la métrica de fondo, y θ). Así, el cambio infinitesimal de θ, del mismo orden infinitesimal que la variación de las coordenadas, está dado por la derivada de Lie como

$$\delta\theta^{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\xi \theta^{\mu\nu} = -\xi^\rho \partial_\rho \theta^{\mu\nu} + \partial_\rho \xi^\mu \theta^{\rho\nu} + \partial_\rho \xi^\nu \theta^{\mu\rho}. \tag{3.16}$$

Si $\theta'^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \delta\theta^{\mu\nu}$, es fácil ver que sólo transformaciones afines $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, con $\xi^\mu = B^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ (donde $B^\mu{}_\nu$ y a^μ son una matriz y un vector constantes respectivamente), son tales que θ' es independiente de las coordenadas. De las simetrías (3.15) sólo las transformaciones de Weyl son de esta forma. Lo que queremos mostrar a continuación es que el producto-$\star$ es invariante ante este grupo de transformaciones del espacio–tiempo.

Para verlo tomemos la definición del producto-$\star$ en términos del operador (3.10). Si luego de una transformación de Weyl el nuevo producto-$\star'$ se escribe en términos de un operador análogo $\mathcal{F}'^{-1}$ en el parámetro no-conmutativo transformado θ' constante[12] y las derivadas parciales transformadas de acuerdo con la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'^{-1} &\equiv \exp\left(\frac{i\vartheta}{2}\theta'^{\alpha\beta}\partial'_\alpha \otimes \partial'_\beta\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta/2)^n}{n!}\theta'^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta'^{\mu_n\nu_n}\left(\partial'_{\mu_1}\cdots\partial'_{\mu_n}\otimes\partial'_{\nu_1}\cdots\partial'_{\nu_n}\right),\end{aligned}$$

en esta expansión se tiene para el término de orden n en ϑ

$$\begin{aligned}\theta'^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta'^{\mu_n\nu_n} &= \left(\theta^{\mu_1\nu_1}+\delta\theta^{\mu_1\nu_1}\right)\cdots\left(\theta^{\mu_n\nu_n}+\delta\theta^{\mu_n\nu_n}\right) \\ &= \theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}+\delta\left(\theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}\right) \\ &= \theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}+\sum_{i=1}^{n}\theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\delta\theta^{\mu_i\nu_i}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n},\end{aligned}$$

[12]Sólo así el producto-$\star'$ es un producto de Moyal.

y para el producto de n derivadas parciales[13]

$$\begin{aligned}\partial'_{\rho_1}\cdots\partial'_{\rho_n} &= (\delta^{\sigma_1}_{\rho_1}-\partial_{\rho_1}\xi^{\sigma_1})\partial_{\sigma_1}\cdots(\delta^{\sigma_n}_{\rho_n}-\partial_{\rho_n}\xi^{\sigma_n})\partial_{\sigma_n}\\ &= (\delta^{\sigma_1}_{\rho_1}-\partial_{\rho_1}\xi^{\sigma_1})\cdots(\delta^{\sigma_n}_{\rho_n}-\partial_{\rho_n}\xi^{\sigma_n})\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_n}\\ &= \left(\delta^{\sigma_1}_{\rho_1}\cdots\delta^{\sigma_n}_{\rho_n}-\sum_{i=1}^{n}\delta^{\sigma_1}_{\rho_1}\cdots(\partial_{\rho_i}\xi^{\sigma_i})\cdots\delta^{\sigma_n}_{\rho_n}\right)\partial_{\sigma_1}\cdots\partial_{\sigma_n},\end{aligned}\tag{3.17}$$

donde hemos usado que $\partial_\rho\xi^\sigma$ es una constante. Así, tenemos al final que

$$\begin{aligned}&\theta'^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta'^{\mu_n\nu_n}\partial'_{\mu_1}\cdots\partial'_{\mu_n}\otimes\partial'_{\nu_1}\cdots\partial'_{\nu_n}=\theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_n}\otimes\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_n}\\ &-\sum_{i=1}^{n}[\theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}(\delta^{\alpha_1}_{\mu_1}\cdots\delta^{\alpha_n}_{\mu_n}\delta^{\beta_1}_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_i}\xi^{\beta_i}\cdots\delta^{\beta_n}_{\nu_n}\\ &\qquad+\delta^{\alpha_1}_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_i}\xi^{\alpha_i}\cdots\delta^{\alpha_n}_{\mu_n}\delta^{\beta_1}_{\nu_1}\cdots\delta^{\beta_n}_{\nu_n})\\ &\quad-\theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\delta\theta^{\mu_i\nu_i}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}\delta^{\alpha_1}_{\mu_1}\cdots\delta^{\alpha_n}_{\mu_n}\delta^{\beta_1}_{\nu_1}\cdots\delta^{\beta_n}_{\nu_n}]\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_n}\otimes\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_n}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

El término i'ésimo en la suma de la expresión anterior se puede reescribir de la forma

$$\begin{aligned}&\theta^{\mu_1\nu_1}\cdots\theta^{\mu_{i-1}\nu_{i-1}}\Big[\delta^{\alpha_1}_{\mu_1}\cdots\delta^{\alpha_{i-1}}_{\mu_{i-1}}\delta^{\beta_1}_{\nu_1}\cdots\delta^{\beta_{i-1}}_{\nu_{i-1}}\Big(\theta^{\mu_i\nu_i}\delta^{\alpha_i}_{\mu_i}\partial_{\nu_i}\xi^{\beta_i}+\theta^{\mu_i\nu_i}\partial_{\mu_i}\xi^{\alpha_i}\delta^{\beta_i}_{\nu_i}\\ &\qquad-\delta\theta^{\mu_i\nu_i}\delta^{\alpha_i}_{\mu_i}\delta^{\beta_i}_{\nu_i}\Big)\delta^{\beta_{i+1}}_{\nu_{i+1}}\cdots\delta^{\beta_n}_{\nu_n}\delta^{\alpha_{i+1}}_{\mu_{i+1}}\cdots\delta^{\alpha_n}_{\mu_n}\Big]\theta^{\mu_{i+1}\nu_{i+1}}\cdots\theta^{\mu_n\nu_n}.\end{aligned}$$

Si pasa que

$$\theta^{\alpha_i\nu_i}\partial_{\nu_i}\xi^{\beta_i}+\theta^{\mu_i\beta_i}\partial_{\mu_i}\xi^{\alpha_i}-\delta\theta^{\alpha_i\beta_i}=0,\tag{3.19}$$

resulta entonces de (3.18) que $\mathcal{F}'^{-1}=\mathcal{F}^{-1}$ y por lo tanto $\star'=\star$. La expresión (3.19) corresponde a la transforamción de $\theta^{\mu\nu}$ como las componentes de un (2,0)-tensor constante. Por lo tanto, si transformamos de manera covariante a $\theta^{\mu\nu}$ y las

[13] Con $\partial'_\mu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu$ y $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}=\delta^\nu_\mu-\partial_\mu\xi^\nu$.

derivadas parciales, el producto-$\star$ es invariante bajo transformaciones de Weyl. Estas son las únicas transformaciones tales que $\partial_\rho \xi^\sigma$ es una constante y así hacen verdadera la ecuación (3.17). Ésta es básica para lograr la invariancia del producto-$\star$. Al mismo tiempo, sólo éstas transforman a θ en un tensor θ' constante. Transformaciones de mayor orden en las coordenadas, como las transformaciones conformes especiales, no hacen verdadera la ecuación (3.17), y dejarían una θ' dependiente de las coordenadas. A pesar de que θ es diferente en diferentes marcos de referencia, como transforma como un tensor pueden construirse algunos invariantes como por ejemplo $\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}$. Este objeto y no $\theta^{\mu\nu}$ sería un observable de la teoría.

El argumento llevado a cabo es en pocas palabras una justificación heurística de cuáles son las simetrías globales del espacio–tiempo permitidas en TCNC. Hemos fundamentado esta limitante en la invariancia del producto-$\star$, que nos asegura que el álgebra de funciones donde vive el espacio de soluciones no está cambiando. Con base en esta idea, construímos en los siguientes párrafos una implementación de estas simetrías del espacio–tiempo sobre la acción de una TCNC en términos de una derivada variacional modificada.

3.3.2. Derivada variacional modificada

Examinemos por un momento la trasformación twist del producto-$\star$ de dos campos escalares $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ bajo un cambio infinitesimal y lineal de las coordenadas. Esto es, dada la transformación de coordenadas $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu$ con $\xi^\mu = B^\mu_\nu x^\nu$, se tiene que $\delta_\xi \phi_{1(2)} = -\xi^\rho \partial_\rho \phi_{1(2)}$, y así la ecuación (3.13) correspondiente a la variación $\delta_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x))$ está dada por los dos primeros términos que contienen la transformación primaria de los campos, y un tercero que explícitamente es

$$\phi_1(x)(\delta_\xi\star)\phi_2(x) = \frac{(-i\vartheta)}{2}\theta^{\mu\nu}\Big([\partial_\mu, \delta_{\xi,1}]\phi_1 \star \partial_\nu\phi_2 + \partial_\mu\phi_1 \star [\partial_\nu, \delta_{\xi,2}]\phi_2\Big) + \mathcal{O}(\vartheta^2),$$

con $[\partial_\mu, \delta_{\xi,1(2)}]\phi_{1(2)} = -(\partial_\mu\xi^\rho)\partial_\rho\phi_{1(2)} = -B^\rho{}_\mu\partial_\rho\phi_{1(2)}$. Es fácil convencerse que en tanto ξ^μ es lineal en las coordenadas, términos de mayor orden en ϑ de la expresión anterior se anulan. La forma final de la transformación twist de la multiplicación de los campos es

$$\begin{aligned}\delta_\xi(\phi_1(x)\star\phi_2(x)) &= (-\xi^\rho\partial_\rho\phi_1)\star\phi_2 + \phi_1\star(-\xi^\rho\partial_\rho\phi_2)\\ &\quad + i\frac{\vartheta}{2}\Big(\theta^{\rho\nu}B^\mu{}_\rho + \theta^{\mu\rho}B^\nu{}_\rho\Big)\partial_\mu\phi_1\star\partial_\nu\phi_2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Lo que queremos hacer notar aquí es que el último término se obtiene también haciendo la variación de $\phi_1\star\phi_2$ con respecto a $\theta^{\mu\nu}$, tomando $\delta\theta^{\mu\nu} \equiv -\mathcal{L}_\xi\theta^{\mu\nu}$:

$$\delta_\theta(\phi_1\star\phi_2) \equiv \frac{1}{2}(\delta\theta^{\mu\nu})\frac{\partial(\phi_1\star\phi_2)}{\partial\theta^{\mu\nu}} = i\frac{\vartheta}{2}\Big(\theta^{\rho\nu}B^\mu{}_\rho + \theta^{\mu\rho}B^\nu{}_\rho\Big)\partial_\mu\phi_1\star\partial_\nu\phi_2,$$

con la condición de "ortogonalidad" $\frac{\partial\theta^{\alpha\beta}}{\partial\theta^{\mu\nu}} = \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu$ (el factor $\frac{1}{2}$ frente a $\delta\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$ está porque la suma implícita sobre los índices repetidos corre en todos los valores de éstos, pero hay la mitad de compontentes $\theta^{\mu\mu}$ independientes).

Con base en esta observación veremos que es posible modificar de manera general la implementación variacional usual de transformaciones de Weyl sobre la acción de una teoría de campos con una variación de la misma proveniente de un cambio en los parámetros $\theta^{\mu\nu}$ y obtener así la invariancia de una TCNC ante simetrías del espacio–tiempo. En esta sección construímos así las simetrías de una TCNC correspondientes a las transformaciones de invariancia del producto-$\star$ de la sección anterior.

Junto con la hipótesis asumida sobre el carácter tensorial de $\theta^{\mu\nu}$ bajo transformaciones de Weyl de la sección anterior, asumiremos además que el contenido de campos de una TCNC está en las representaciones a la que pertenecen en la teoría de la cual ésta es su deformación no–conmutativa (justo como en el caso de simetrías twist, donde los campos primarios transforman de acuerdo con la prescripción (3.9)). Por ejemplo, para la teoría no–conmutativa del campo escalar, $\phi(x)$ representa un escalar de Lorentz. Igualmente A_μ es un vector en la teoría de Maxwell libre no–conmutativa[14].

Consideremos la implementación variacional usual de simetrías del espacio–tiempo en teorías de campo. Denotemos de manera genérica por ϕ_a los campos de una TCNC, con a un índice que indica la representación $\mathcal{R}_a$ a la que pertenece ϕ_a, y por $\delta_\xi\phi_a$ la variación de los campos bajo transformaciones de coordenadas dadas por $\xi^\mu = a^\mu + \lambda^\mu{}_\nu x^\nu + cx^\mu = a^\mu + B^\mu{}_\nu x^\nu$, con $B^\mu{}_\nu \equiv \lambda^\mu{}_\nu + c\delta^\mu_\nu$. La derivada variacional[15] que implementa la transformación de coordenadas sobre la acción es

$$W^\phi_\xi \equiv \delta_\xi\phi_a(y)\frac{\delta}{\delta\phi_a(y)}, \tag{3.21}$$

que actúa sobre el producto-$\star$ entre dos objetos U yV que dependen de los campos y sus derivadas como una derivación (por construcción)

$$W^\phi_\xi(U\star V) = (W^\phi_\xi U)\star V + U\star(W^\phi_\xi V).$$

Esta derivada no sirve para definir simetrías del espacio–tiempo de una TCNC, y su problema es que no trata al producto-$\star$ de dos campos como un objeto en

[14]Referirse a la teoría de Maxwell "libre" no–conmutativa puede sonar a una contradicción, ya que en este caso la teoría no es libre sino que se acopla con una especie de campo de fondo dado por θ, a todos los órdenes de este parámetro.

[15]Estamos usando la convención de que por cada conjuto de coordenadas del espacio–tiempo repetido hay una integral implícita sobre el mismo.

el producto de las representaciones correspondientes (como sí lo logran las simetrías twist asumiendo esto como un postulado). Por ejemplo, es fácil ver que el producto-$\star$ de dos campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 transforma de acuerdo con la regla

$$\begin{aligned} W_\xi^\phi[\phi_1(x)\star\phi_2(x)] &= (W_\xi^\phi\phi_1(x))\star\phi_2(x)+\phi_1(x)\star(W_\xi^\phi\phi_2(x)) \\ &= -\xi^\alpha\partial_\alpha(\phi_1(x)\star\phi_2(x)) - i\frac{\vartheta}{2}(\theta^{\rho\beta}B^\alpha_\rho+\theta^{\alpha\rho}B^\beta_\rho)\partial_\alpha\phi_1\star\partial_\beta\phi_2, \end{aligned}$$

usando las identidades generales

$$\begin{aligned} x^\alpha(\phi\star\psi) &= (x^\alpha\phi)\star\psi-\frac{i\vartheta}{2}\theta^{\alpha\beta}(\phi\star\partial_\beta\psi) \\ &= \phi\star(x^\alpha\psi)+\frac{i\vartheta}{2}\theta^{\alpha\beta}(\partial_\beta\phi\star\psi). \end{aligned} \tag{3.22}$$

La expresión anterior implica que $\phi_1(x)\star\phi_2(x)$ no transforma como un escalar.

El hecho anterior implica que W_ξ^ϕ no puede proveernos de una simetría para la TCNC en cuestión. Sin embargo, esta derivada variacional puede "complementarse" con una variación de los términos de la acción debida a la transformación de $\theta^{\mu\nu}$

$$\boxed{W_\xi\equiv W_\xi^\phi+W_\xi^\theta}, \tag{3.23}$$

donde el término W_ξ^θ actúa sobre el producto $U\star V$ como

$$W_\xi^\theta(U\star V)=(W_\xi^\theta U)\star V+U\star(W_\xi^\theta V)+\frac{i\vartheta}{2}(\delta\theta^{\alpha\beta})(\partial_\alpha U\star\partial_\beta V), \tag{3.24}$$

con $W_\xi^\theta U\equiv\frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial\theta^{\alpha\beta}}$, y $\delta\theta^{\alpha\beta}\equiv-\mathcal{L}_\xi\theta^{\alpha\beta}=\partial_\rho\xi^\alpha\theta^{\rho\beta}+\partial_\rho\xi^\beta\theta^{\alpha\rho}$.

La caracterítica básica detrás de la definición (3.23), que es el paunto central de esta sección , es que con ella el producto-$\star$ de campos transforma en la representación correspondiente al producto de las representaciones a las que pertenecen los factores. Por ejemplo, bajo la acción de W_ξ la intensidad de campo $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star$ de la teoría de Maxwell no–conmutativa transforma como un tensor: $W_\xi \hat{F}_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\xi \hat{F}_{\mu\nu}$, de manera análoga a las propiedades de transformación del tensor de intensidad de campo no deformado $F_{\mu\nu}$ en la teoría conmutativa correspondiente. Este hecho es suficiente para que la implementación dada por (3.23) de una simetría del espacio–tiempo en TCNC. De manera colateral, W_ξ no es una derivación del producto-$\star$ de dos campos básicamente debido al tércer término en la ecuación (3.24).

Comparado con las simetrías twist, la implementación que hemos definido en esta sección es similar a aquella en un aspecto básico: Ambas reconocen el producto-$\star$ de dos campos en la representación correspondiente al producto de las representaciones a la que pertenece cada campo. Sin embargo, estas dos simetrías son distintas en varios aspectos. La primera distingue a los campos como objetos primarios y el producto-$\star$ entre ellos como un objeto no primario ("secundario", o derivado), mientras que la acción de (3.23) contempla a todos los objetos del modelo (θ, los campos, y sus derivadas) en el mismo nivel. En este mismo sentido las transformaciones de simetría twist no cambian $\theta^{\mu\nu}$ siendo éstas las componentes de una matriz, mientras que para la implementación variacional éstas son las componetes de un tensor que transforma covariantemente[16], lo que implica incluso considerar explícitamente la dependencia de los campos con respecto a este parámetro (ver (3.24)).

Hasta donde vimos, y por las restricciones impuestas por la invariancia del producto-$\star$, la implementación variacional modificada que hemos definido sólo funciona para simetrías de Weyl, mientras que la prescripción twist de simetrías se puede

[16]Esto es complementado en el primer caso con que las derivadas de los campos transforman en la misma representación que los campos mismos, mientras que (3.23) da cuenta del carácter de los índices de las derivadas parciales de los campos mediante la derivada variacional (3.21).

implementar para cualquier difeomorfismo del espacio–tiempo. En este caso particular, y cuando los campos no dependen en su argumento de θ, ambas simetrías dan el mismo resultado aplicadas sobre el producto-$\star$ de dos campos en cualquier representación. Esto es, dado ϕ_1 y ϕ_2 tal que $\frac{\partial \phi_{1(2)}}{\partial \theta} = 0$, y el cambio de coordenadas $x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu$ con $\xi^\mu = B^\mu_\nu x^\nu$, se tiene para la transformación twist que

$$\begin{aligned}
&\delta_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x)) \\
&\qquad = \delta_{\xi,1}\phi_1(x) \star \phi_2(x) + \phi_1(x) \star \delta_{\xi,2}\phi_2(x) + \frac{i\vartheta}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi_1 \star \partial_\beta\phi_2), \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

mientras que para la implementación variacional recién definida

$$\begin{aligned}
W_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x)) &= W^\phi_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x)) + W^\theta_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x)) \\
&= (W^\phi_\xi \phi_1(x)) \star \phi_2(x) + \phi_1(x) \star (W^\phi_\xi \phi_2(x)) + \frac{i\vartheta}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi_1 \star \partial_\beta\phi_2),
\end{aligned}$$

donde

$$\delta\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\rho\beta}\partial_\rho\xi^\alpha + \theta^{\alpha\rho}\partial_\rho\xi^\beta.$$

Como tanto la implementación twist y variacional toman los campos en sus representaciones usuales, de (3.21) se tiene para ϕ_1 (y análogamente para ϕ_2)

$$W^\phi_\xi \phi_1(x) = (\delta_\xi\phi_a(y))\frac{\delta\phi_1(x)}{\delta\phi_a(y)} = (\delta_\xi\phi_a(y))\delta^a_1\delta(x-y) = \delta_{\xi,1}\phi_1(x)$$

(δ^a_1 indica que el índice a se fija en el índice correspondiente a la representación del campo ϕ_1). Por lo tanto $W_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x)) = \delta_\xi(\phi_1(x) \star \phi_2(x))$, y la simetría twist y la implementación variacional W_ξ dan el mismo resultado actuando sobre el producto-$\star$ de dos campos (y así sobre el lagrangiano de un modelo dado).

Una ventaja de la definición que hemos construído sobre la prescripción twist es que, por tratar a todos los objetos del modelo en el mismo nivel (sin distinción de objetos primarios y derivados), se puede aplicar en cualquier contexto, en el espacio de Moyal con producto-$\star$, o a cualquier expansión en ϑ de la acción no–conmutativa. Por ejemplo, en el caso de teorías de norma no–conmutativas, la implementación variacional modificada propuesta puede aplicarse a la expasión en ϑ en los campos "conmutativos" luego del mapeo de SW. Siendo así, y en vista de la equivalencia del párrafo anterior, podríamos (aventurarnos a) afirmar que la implementación variacional que hemos definido es la representación de la simetría twist en la teoría de norma conmutativa equivalente luego del mapeo de SW.

La equivalencia entre las simetrías twist tomando θ como una matriz, y la implementación dada por (3.23) asumiendo la interpretación de θ como un tensor ya había sido notado por los autores de [101, 102]. En esta referencia además los autores afirman que el carácter tensorial de θ está oculto en el formalismo de las transformaciones de Lorentz twist, y que de hecho esta covariancia puede entenderse en el marco del modelo de no–conmutatividad que proviene de las relaciones de incertidumbre asociadas a la imposibilidad de localizar puntos en las escalas más pequeñas de longitud [55, 56].

En la siguiente sección veremos que usando la implementación de simetrías dada por (3.23) se puede probar la invariancia de Weyl de la teoría de Yang-Mills no–conmutativa.

3.3.3. Invariancia de Weyl de Yang-Mills no–conmutativa

El análisis de simetrías globales que queremos presentar aquí puede plantearse para una teoría de norma en el espacio de Moyal o para su teoría equivalente por medio del mapeo de SW. Para los propósitos del siguiente capítulo nos será útil trabajar con la teoría no–conmutativa de Yang-Mills (YMNC) luego del mapeo de SW de los campos y parámetros de norma.

Usando este mapeo, la teoría de YMNC con su simetría de norma-$\star$ se escribe en términos de una teoría con infinitos vértices (locales), y la simetría de norma usual (conmutativa) de Yang-Mills. La redefinición $\hat{A}^B_\mu \equiv f^B_\mu([A],\theta;\vartheta)$ del campo de norma no–conmutativo en términos del campo A^B_μ conmutativo se sustituye en la acción no–conmutativa

$$S_{YMNC} = -\frac{1}{4}\int (dx)^4 \mathrm{tr}\Big[\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}\left(\hat{A} = f([A],\theta;\vartheta)\right)\Big] \equiv \int (dx)^D L^{ef}([A],\theta;\vartheta), \tag{3.26}$$

y de esta manera se define el lagrangiano efectivo L^{ef} de la teoría de YMNC en el espacio conmutativo. La traza en la expresión anterior se toma sobre el índice B que corre en el conjunto de generadores del grupo de Lie de norma (ver sección B.1 del apéndice B).

El término a primer orden en el parámetro de deformación ϑ del lagrangiano efectivo está dado por [14]

$$\begin{aligned} S_{YMNC} &= \int (dx)^4 (L^{ef(0)}([A],\theta) + L^{ef(1)}([A],\theta;\vartheta) + O(\vartheta^2)) \\ &\equiv -\frac{1}{4}\int (dx)^D \mathrm{tr}\Big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i\vartheta\theta^{\alpha\beta}}{2}(-F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 4F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}F^{\mu\nu}) + O(\vartheta^2)\Big). \end{aligned} \tag{3.27}$$

A órdenes mayores en ϑ la expresión de L^{ef} es bastante complicada [96, 114] y con muchos términos. Sin embargo, el mapeo del tensor de intensidad de campo $\hat{F}_{\mu\nu}$

tendrá la forma genérica

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \vartheta\theta^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta\mu\nu} + \vartheta^2 \theta^{\alpha_1\beta_1}\theta^{\alpha_2\beta_2} f_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\mu\nu} + ... \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta^n \theta^{\alpha_1\beta_1} ... \theta^{\alpha_n\beta_n} f_{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n\mu\nu}, \quad (3.28)$$

donde las expresiones $f_{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n\mu\nu}$ pueden contener a $A_\rho, F_{\mu\nu}$ y sus derivadas[17] (pero no a θ). Por simplicidad en la notación definimos para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ las expresiones

$$\overset{(n)}{f}_{\mu\nu} \equiv \theta^{\alpha_1\beta_1} ... \theta^{\alpha_n\beta_n} f_{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n\mu\nu} \quad (3.29)$$

(con $\overset{(0)}{f}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}$). En esta notación, el índice (n) indica que tal expresión está constituída por n factores $\theta^{\mu\nu}$'s, y un factor que tiene n pares de índices que se contraen con éstas. Todos los índices de este factor provienen de su dependencia en $A_\rho, F_{\mu\nu}$ y sus derivadas, y por lo tanto se portan como índices tensoriales para transformaciones lineales de las coordenadas del espacio–tiempo. Hemos asumido que $\theta^{\mu\nu}$ es un tensor de tipo $(2, 0)$, y así las expresiones (3.29) son tensores de tipo $(0, 2)$ (como lo es $\hat{F}_{\mu\nu}$).

El lagrangiano efectivo de (3.26) se expande usando esta notación en una serie perturbativa en el parámetro ϑ de la forma

$$L^{ef} = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta^k L^{ef(k)}, \qquad \text{donde} \qquad L^{ef(k)} = \sum_{i=0}^{k} \overset{(i)}{f}_{\mu\nu} \overset{(k-i)}{f}{}^{\mu\nu} .$$

Lo que queremos hacer notar aquí es que todos los términos de L^{ef} son de la forma

$$\overset{(n)}{f}_{\mu\nu} \overset{(m)}{f}{}^{\mu\nu}, \qquad n, m \in \{0, 1, 2, ... \quad | \quad n + m = k\}, \quad (3.30)$$

[17] Con la "condición inicial" $\theta^{\alpha_1\beta_1} ... \theta^{\alpha_n\beta_n} f_{\alpha_1\beta_1...\alpha_n\beta_n\mu\nu} \mid_{n=0} \equiv F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$.

para toda $k = 0, 1, 2, ...$ Si cada una de estas expresiones es invariante (en el sentido noetheriano) ante una transformación de simetría dada, entonces dicha transformación será una simetría de la acción (3.26) completa[18]. En particular esto pasa para las transformaciones de Weyl que estudiamos en la sección 3.3.2.

Del enunciado usual del teorema de Noether [78], una transformación $\phi^a \mapsto \phi^a + Q^a([\phi], x)$ de los campos de una teoría es una simetría del lagrangiano $L([\phi], x)$ si existe j^μ tal que

$$\frac{\delta L}{\delta \phi^a} Q^a + \partial_\mu j^\mu = 0.$$

En el caso del lagrangiano no–conmutativo de (3.26) denotamos esta condición con

$$\frac{\delta L^{ef}}{\delta A^A_\mu} Q^A_\mu + \partial_\mu j^\mu = 0.$$

Junto con la expansión en potencias de ϑ del lagrangiano L^{ef} proveniente del mapeo de SW, en el caso más general podemos sustituir en la ecuación anterior una expansión similar para Q^A_μ dada por

$$Q^A_\mu \equiv Q^{(0)A}_\mu + \vartheta Q^{(1)A}_\mu + \vartheta^2 Q^{(2)A}_\mu + \ldots,$$

para contemplar la posibilidad de que la transformación de los campos se deforme. Así, a cada orden k en ϑ se tienen ecuaciones de consistencia similares a las que se obtienen en el caso de deformaciones consistentes de simetrías de norma (ver ecuación (C.2) en el apéndice C). A cero orden en ϑ estas ecuaciones implican la invariancia de Weyl usual de Yang-Mills conmutativa, satisfecha con $Q^{(0)A}_\mu \equiv \delta_\xi A^A_\mu = -\mathcal{L}_\xi A^A_\mu$ y $j^{(0)\mu} = -\xi^\mu L^{ef(0)}$[19]. A primer orden en ϑ la ecuación

[18]En la acción aparacen factores asociados a la métrica que no hemos escrito explícitamente. La expresión $\sqrt{-\eta}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}$ es invariante en $D = 4$ bajo el grupo conforme completo.

[19]En el mismo sentido del lagrangiano y las simetrías deformadas, si las ecuaciones de consistencia tienen solución la corriente también se ve deformada en potencias de ϑ: $j^\mu = j^{(0)\mu} + \vartheta j^{(1)\mu} +$

de consistencia toma la forma

$$\frac{\delta L^{ef(1)}}{\delta A^A_\mu}\delta_\xi A^A_\mu + \frac{\delta L^{ef(0)}}{\delta A^A_\mu} Q^{(1)A}_\mu + \partial_\mu j^{(1)\mu} = 0. \tag{3.31}$$

Esta ecuación tiene la solución trivial $Q^{(1)A}_\mu = 0$ si $\delta_\xi A^A_\mu$ es una simetría del lagrangiano a primer orden en ϑ. Esto último se cumple bajo las simetrías de Weyl que hemos prescrito en la sección 3.3.2, y el hecho de transformar θ como un tensor es crucial para ello. Así, de la solución a (3.31) uno podría calcular la corrección $j^{(1)\mu}$ a primer orden en ϑ a la corriente conservada.

Este análisis ya ha sido estudiado por los autores de [14] pero tomando $\theta^{\mu\nu}$ como las componentes de una matriz. De acuerdo con este análisis sólo transformaciones de Poincaré que además preserven θ (en la forma $\mathcal{L}_\xi\theta^{\mu\nu} = 0$) serían simetrías globales de la teoría de Yang-Mills no–conmutativa. La diferencia entre aquel análisis y el que hacemos aquí es que nosotros desde el principio tomamos θ como un tensor, y como tal transforma ante simetrías globales del espacio–tiempo. La restricción sobre las posibles simetrías globales de YMNC provienen en nuestro caso por las que hacen que el producto-$\star$ sea invariante.

De manera general, consideremos la acción de la derivada variacional modificada (3.23) sobre una cualquiera de las expresiones (3.29). Como $\partial_\sigma\xi^\rho$ es constante tenemos que $[\mathcal{L}, \partial_\mu] = 0$, y entonces

$$W_\xi \overset{(n)}{f_{\mu\nu}} = -\sum_{k=0} \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_k}\mathcal{L}_\xi A^A_\alpha \frac{\partial \overset{(n)}{f_{\mu\nu}}}{\partial A^A_{\alpha,\mu_1...\mu_k}} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial \overset{(n)}{f_{\mu\nu}}}{\partial\theta^{\alpha\beta}} = -\mathcal{L}_\xi \overset{(n)}{f_{\mu\nu}}$$

....

($\partial A^A_{\alpha,\mu_1,\ldots,\mu_k} \equiv \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_k} A^A_\alpha$). Usando la ecuación de Killing (3.14) tendremos que

$$\delta_\xi(\overset{(n)}{f}_{\mu\nu}\overset{(m)}{f}{}^{\mu\nu}) = -\mathcal{L}_\xi(\overset{(n)}{f}_{\mu\nu}\overset{(m)}{f}{}^{\mu\nu}) = -\partial_\rho(\xi^\rho \overset{(n)}{f}_{\mu\nu}\overset{(m)}{f}{}^{\mu\nu}).$$

Por lo tanto, las ecuaciones de consistencia similares a (3.31) para para todos los órdenes k en ϑ son satisfechas con $Q^A_\mu = Q^{(0)A}_\mu = \delta_\xi A^A_\mu$. De aquí podemos concluir que la simetría de Weyl en Yang-Mills no–conmutativa no está obstruída.

3.4. Discusión: Covariancia *vs.* Invariancia

En este capítulo hemos construído una implementación de simetrías del espacio–tiempo en TCNC que nos permite en particular reconocer la invariancia de Lorentz de las mismas. Para ello hemos tomado a los parámetros no–conmutativos $\theta^{\mu\nu}$ como las componentes de un tensor que transforma covariantemente, y no como elementos de una matriz. Así, en lugar de tener a este objeto como invariante de las transformaciones de simetría de la teoría, tenemos la invariancia del producto-$\star$ bajo las mismas. Esto nos permite tener hasta transformaciones lineales en las coordenadas como simetrías del espacio–tiempo plano. La implementación de las simetrías sobre el lagrangiano de un modelo dado se lleva a cabo mediante la derivada variacional modificada (3.23) que reconoce el carácter tensorial apropiado de multiplicaciones entre campos con producto-$\star$, considerando la dependencia de estos términos respecto a los campos, sus derivadas, y $\theta^{\mu\nu}$.

Esta derivada variacional modificada ya había sido reconocida por los autores de [21], donde se hacen compatibles esta simetría para la teoría de Yang-Mills no–conmutativa con la simetría de norma-$\star$ de la misma. En esta aproximación sin embargo el "ajuste" de la derivada variacional ordinaria con términos provenientes de la variación debida al cambio en $\theta^{\mu\nu}$ se hace de manera *ad hoc* para recuperar la simetría del espacio–tiempo en cuestión[20]. Aquí hemos visto que dicha modificación puede motivarse en la forma de las simetrías twist para el mismo tipo de transformación de coordenadas (aplicable a cualquier TCNC). La observación que usamos para construir la derivada variacional modificada (3.23) también nos permite hacer el siguiente planteamiento general sobre la variación de los campos y el producto-$\star$ entre ellos cuando cambiamos el punto en el que están evaluados estos objetos.

Sea la transformación del producto-$\star$ de dos campos dada por

$$\phi_1'(x';\theta') \star' \phi_2'(x';\theta') = (\mathcal{D}_1\phi_1(x;\theta)) \star (\mathcal{D}_2\phi_2(x;\theta)) \,, \tag{3.32}$$

cuando el punto y los parámetros no–conmutativos cambian del conjunto $\{x, \theta\}$ al conjunto $\{x', \theta'\}$. Como en el caso de simetrías twist, asumiremos que $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ actúan de acuerdo a las representaciones usuales de los campos; éstas son las del grupo $ISO(3,1)$ oridnario para el caso de la invariancia de Poincaré. Si la pareja $\{x', \theta'\}$ está dada por un desplazamiento infinitesimal arbitrario tanto para las coordenadas como los parámetros no–conmutativos, $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ y $\theta^{\mu\nu} \mapsto \theta'^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \delta\theta^{\mu\nu}$, de manera estándar y completamente general podemos definir dos tipos de transformaciones infinitesimales, una evaluada en el mismo punto y

[20]El cambio en los parámetros no–conmutativos se justifica en la distinción de dos tipos de transformaciones de Lorentz, las de *observador* y las de *partícula* [21, 31]. Las transformaciones de observador son tales que las configuraciones locales de las variables dinámicas y los campos de fondo (en este caso θ) transforman covariantemente, dejando la física intacta. Las transformaciones de Lorentz de partícula cambian solamente las configuraciones locales de las variables dinámicas en un marco fijo asociado a un cierto observador, y no cambian los campos de fondo, pero sí la física. En el espacio–tiempo plano estos dos tipos de transformaciones de Lorentz coinciden, pero cuando hay curvatura o campos de fondo no.

otra en puntos diferentes [78]

$$\gamma(\phi_1 \star \phi_2) \equiv \phi_1'(x';\theta') \star' \phi_2'(x';\theta') - \phi_1(x;\theta) \star \phi_2(x;\theta),$$
$$\hat{\gamma}(\phi_1 \star \phi_2) \equiv \phi_1'(x';\theta') \star' \phi_2'(x';\theta') - \phi_1(x';\theta') \star' \phi_2(x';\theta'),$$

relacionadas por la fórmula

$$\hat{\gamma}(\phi_1 \star \phi_2) = \gamma(\phi_1 \star \phi_2) - [\phi_1(x';\theta') \star' \phi_2(x';\theta') - \phi_1(x;\theta) \star \phi_2(x;\theta)].$$

En esta expresión no hemos asumido nada sobre la naturaleza del producto-$\star'$ transformado, ni una relación entre el cambio en las coordenadas ξ y el cambio $\delta\theta$. En el caso de transformaciones de Weyl tenemos que $\star = \star'$, y así la expresión anterior se escribe

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(\phi_1 \star \phi_2) = \gamma(\phi_1 \star \phi_2) - \Big[\phi_1(x;\theta) \star (\xi^\rho \partial_\rho \phi_2 + \frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta^{\alpha\beta}}) \\ + (\xi^\rho \partial_\rho \phi_1 + \frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta^{\alpha\beta}}) \star \phi_2(x;\theta)\Big],\end{aligned} \quad (3.33)$$

de donde podemos hacer dos observaciones:

1. La variación γ realiza la transformación de los campos de acuerdo con su representación. Esto es, si por ejemplo $\phi_{1,2} \equiv \phi_\mu$ es un campo vectorial, entonces se tiene que

$$\phi'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\phi_\nu \Rightarrow \gamma\phi_\mu \equiv \phi'_\mu(x') - \phi_\mu(x) = -(\partial_\mu \xi^\nu)\phi_\nu,$$

y así

$$\gamma(\phi_\mu \star \phi_\nu) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\phi_\alpha\right) \star \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\phi_\beta\right) - \phi_\mu \star \phi_\nu$$
$$= \phi_\mu \star (-\partial_\nu \xi^\beta \phi_\beta) + (-\partial_\mu \xi^\alpha \phi_\alpha) \star \phi_\nu .$$

2. Mientras tanto, el término entre paréntesis cuadrados en (3.33) toma en cuenta el cambio que proviene de la dependencia en las coordenadas del espacio–tiempo, y del cambio explícito en el parámetro θ.

Tomemos por ejemplo ϕ_1 y ϕ_2 dos tensores cualesquiera. De la sustitución en (3.33) de la acción de γ para las representaciones correspondientes a estos campos es fácil llegar al resultado siguiente

$$\hat{\gamma}(\phi_1 \star \phi_2) = \phi_1 \star \left(\delta_{2,\xi}\phi_2 - \frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta^{\alpha\beta}}\right) + \left(\delta_{1,\xi}\phi_1 - \frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta^{\alpha\beta}}\right) \star \phi_2 \tag{3.34}$$

($\delta_{1(2),\xi}$ es el operador infinitesimal correspondiente a $\mathcal{D}_{1(2)}$). Luego, si la variación de los parámetros no–conmutativos $\delta\theta^{\mu\nu} \equiv -\mathcal{L}_\xi \theta^{\mu\nu}$ corresponde a la de un tensor tipo $(2, 0)$, usando las identidades (3.22) en la expresión anterior es posible extraer e identificar el operador

$$\boxed{\hat{\gamma} = \delta_\xi - \frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha\beta}}}. \tag{3.35}$$

Este operador se comporta como derivación del producto-$\star$ entre campos (es decir, actúa sobre éste con la regla de Leibniz). La acción de $\hat{\gamma}$ sobre la multiplicación de dos tensores con producto-$\star$ de acuerdo con la regla de Leibniz como en (3.34) se dice que es una acción *covariante* sobre este producto[21]. Sería muy interesante tener una implementación covariante de simetrías del espacio–tiempo en este sentido,

[21] La acción de una transformación finita definida por un campo vectorial v sobre funciones que toman valores en una variedad diferencial es covariante si dicha acción es tal que

$$v(f \cdot g) = (vf) \cdot (vg).$$

que actuaran como derivaciones del producto-$\star$ como lo hace (3.35). Si así fuera, muchas de las concepciones geométricas usuales de transformaciones actuando sobre campos serían aplicables (como por ejemplo el teorema de Noether en su forma conocida).

Si δ_ξ ya corresponde a una simetría en TCNC, la pregunta sería si $\hat{\gamma}$ dada por (3.35) es o puede ser una simetría. Si tomamos δ_ξ como W_ξ de la prescripción (3.23) definida en la sección 3.3.2, entonces $\hat{\gamma}$ actúa de la misma manera sobre polinomios en θ, los campos, y sus derivadas que la derivada variacional (3.21). Con esta prescripción, $\delta_\xi \theta^{\mu\nu} = \delta\theta^{\mu\nu} \neq 0$, y así $\hat{\gamma}\theta^{\mu\nu} = 0$, es decir, $\hat{\gamma}$ no mueve los parámetros no–conmutativos. Sin embargo, como $\delta_\xi = W_\xi$ ya es una simetría, el término $\frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha\beta}}$ actuando sobre el lagrangiano tendría que contribuir con términos de borde para que $\hat{\gamma}$ diera también una simetría. Desafortunadamente este no es el caso.

Si en cambio en (3.35) implementamos δ_ξ como la simetría twist, entonces $\delta_\xi\theta^{\mu\nu} = 0$ y $\hat{\gamma}\theta^{\mu\nu} = -\delta\theta^{\mu\nu}$. Hay en la literatura una aproximación a las transformaciones del espacio–tiempo en TCNC que es congruente con esta segunda elección. La existencia del operador (3.35) ya había sido notada por los autores de [71], donde construyen de manera similar un conjunto de generadores de simetría deformados para TCNC que satisfacen el álgebra de Lie estándar del grupo de transformaciones de Weyl. Siguiendo la idea de [21] en torno a las transformaciones del espacio–tiempo desde el punto de vista de observador, los autores deforman los generadores diferenciales $G_\xi = -\xi^\rho\partial_\rho$ estándar del grupo de Weyl con un término proporcional al cambio en θ definiendo los nuevos generadores dados por

$$G^\theta_\xi \equiv G_\xi - \frac{1}{2}\delta_\xi\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha\beta}}. \tag{3.36}$$

En el caso infinitesimal $v = 1 + \epsilon\omega$, con $\epsilon \ll 1$, la expresión anterior implica que $\omega(f\cdot g) = (\omega f)\cdot g + f\cdot(\omega g)$ hasta términos proporcionales a ϵ^2.

Estos generadores satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los no deformados, y también la regla de Leibniz actuando sobre $f(x;\theta) \star g(x;\theta)$, con f, g funciones del espacio de parámetros (x, θ). La definición (3.36) llega hasta transformaciones afines de las coordenadas. La misma definición para transformaciones más generales (polinomios de mayor orden en las coordenadas) resulta obstruída en esta aproximación porque los generadores deformados resultantes no cumplen con la regla de Leibniz actuando sobre el producto-$\star$ entre funciones.

En comparación con las simetrías twist del espacio–tiempo, la acción de los generadores (3.36) no coincide con aquellas sino que se cumple la ecuación

$$m_\star(\Delta_\star(G) \triangleright f \otimes g) = G^\theta m_\star(f \otimes g) + \frac{1}{2}\delta_\xi \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \theta^{\mu\nu}} m_\star(f \otimes g),$$

con $m_\star(f \otimes g) = f \star g$, y $\Delta_\star$ el coproducto deformado (ver apéndice B). Desde nuestro punto de vista esta ecuación corrobora el hecho de que las simetrías twist y las simetrías generadas por $\hat{\gamma} + \frac{1}{2}\delta_\xi \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \theta^{\mu\nu}}$ (análogo a $G^\theta_\xi + \frac{1}{2}\delta_\xi \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \theta^{\mu\nu}} = G_\xi$) con $\hat{\gamma}$ la derivada variacional (3.21) dan el mismo resultado actuando sobre un producto-$\star$ entre campos.

En contraste con el argumento de los autores de [71], nosotros afirmamos que G^θ_ξ, o $\hat{\gamma}$ en nuestro análisis, no generan simetrías del espacio–tiempo, pues la acción de $\hat{\gamma}$ es comparable a la acción de la derivada variacional (3.21) (que es una derivación del producto-$\star$). Si la parte dada por δ_ξ en (3.35) realiza una simetría del espacio–tiempo (en la versión twist o en términos de la implementación definida en este capítulo), $\hat{\gamma}$ será una simetría también solamente si $\frac{1}{2}\delta\theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha\beta}}$ da términos de borde, pero éste no es el caso. Por lo tanto, no es posible tener simultáneamente transformaciones que sean covariantes del producto-$\star$ y den invariancias de una TCNC.

CAPÍTULO 4

Gravedad no–conmutativa

Existen sólidos argumentos que sustentan la idea de que el espacio–tiempo deja de ser una variedad suave en las escalas más pequeñas de longitud. La idea básica es que para explorar dentro de distancias de tamaño ℓ necesitamos proveer elementos de prueba cuya longitud de onda de Compton λ_C sea menor a ℓ: $\lambda_C = \frac{\hbar}{Mc} < \ell$, lo que implica que $M > \frac{\hbar}{c\ell}$. Siendo así, si $\ell \sim \lambda_P$ con λ_P la longitud de Planck, sería necesario contener energías del orden de la masa de Planck en un volumen muy pequeño. En ese régimen de energía, considerando simultáneamente el principio de Heisenberg y la teoría clásica de la gravedad de Einstein, surgen naturalmente relaciones de incertidumbre entre las coordenadas del espacio–tiempo [55, 56], lo que implica un límite fundamental en la posibilidad de hacer mediciones de la posición de los elementos de prueba. Este hecho es característica de varias aproximaciones a la cuantización de la gravedad, y en términos llanos implica que la distinción de puntos en el espacio–tiempo no es posible. En este sentido modificaciones de la gravedad debidas a la no–conmutatividad del espacio–tiempo, siendo ésta una manera de modelar una incertidumbre fundamental entre las coordenadas en el mismo, podrían dar algún tipo de información también presente en la gravedad cuántica. En un contexto más amplio esta es una de las varias extensiones o deformaciones de la gravedad en las pequeñas escalas que han sido estudiadas, entre ellas la corrección a la acción de Einstein-Hilbert que proviene de la teoría de cuerdas.

En este capítulo proponemos un modelo de gravedad no–conmutativa inspirado en una deformación consistente particular de teorías de norma[1] (en el apéndice C se presenta la idea general de este método). En el caso conmutativo, a partir del modelo deformado puede reconstruirse la acción de Einstein-Hilbert en el formalismo de primer orden de las tétradas. Esta acción resulta como un caso particular de modelos de gravedad construídos sobre el espacio–tiempo de Weitzenböck, caracterizado por tener curvatura nula y torsión diferente de cero. En el apéndice D presentamos las nociones básicas de la estructura de este espacio–tiempo.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección haremos un recuento muy breve de algunas aproximaciones a la gravedad no–conmutativa que pueden encontrarse en la literatura; el modelo que aquí propondremos puede ubicarse en el contexto general de estas aproximaciones. En la sección 4.2 presentaremos una deformación consistente de la teoría de Maxwell que es una manera de hacer locales simetrías globales del fondo de esta teoría de norma [24]. El resultado es una acción no polinomial en los campos que puede reescribirse como la teoría de Maxwell en un fondo curvo. Este resultado recuerda la manera en que puede obtenerse gravedad haciendo locales las simetrías globales del grupo de Poincaré [22, 85, 99, 115], y de hecho inspirándose el método aquí presentado es

[1]Este trabajo lo hemos enviado para arbitraje [49].

posible construir una teoría de gravedad haciendo locales sólo las traslaciones. En la sección 4.3 generalizaremos al caso no–conmutativo usando el mapeo de SW la deformación no polinomial mencionada, y con base en ella y la misma identificación que en el caso conmutativo propondremos un modelo de gravedad no–conmutativa.

4.1. Antecedentes

Existen varias propuestas de gravedad no–conmutativa, cada uno de ellas retomando algún aspecto relevante de cualquier modelo consistente de gravedad[2]. Un problema difícil es tener viva la noción de transformación general de coordenadas como simetría fundamental y mientras pretender que los parámetros $\theta^{\mu\nu}$ definidos por

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}$$

sean constantes, independientes del punto del espacio–tiempo. Como vimos en el capítulo anterior, imponer que $\theta^{\mu\nu}$ sea constante implica restricciones sobre las posibles simetrías globales de la métrica (plana) de fondo.

Para construir un modelo de gravedad no–conmutativo algunos autores han utilizado una formulación de la gravedad como teoría de norma, y desde esta perspectiva implementan una analogía del mapeo de SW definido para modelos de Yang-Mills no–conmutativos. En tanto no se conoce teoría de gravedad no–conmutativa consistente en el espacio de Moyal (y de hecho podrían existir serios obstáculos para encontrarla [1]), el mapeo de SW carece de sentido. Este mapeo se toma simplemente como una redefinición de campos y parámetros inspirada en

[2]En [117] puede encontrarse un breve recuento de las características retomadas por varias aproximaciones.

su definición en teorías de norma no–conmutativas. Por ejemplo, tomando como grupo de norma al grupo de Lorentz, las conexiones de espín como los campos de norma, y las transformaciones que preservan la no–conmutatividad canónica como simetría fundamental, en [27] el mapeo de SW se implementa sobre el tensor de Riemann imitando al resultado del mismo para el tensor de intensidad de campo de una teoría de Yang-Mills no–conmutativa. Al final se tiene una versión no–conmutativa de la gravedad "unimodular", dado que las transformaciones que preservan θ son las que conservan volúmenes. Se ha intentado generalizar estas propiedades de invariancia de $\theta^{\mu\nu}$ del espacio plano al espacio curvo tomándolas como las componentes de un tensor covariantemente conservado [73]. Ahí, sin deformar la geometría, se introducen correcciones no–conmutativas a la acción de Einstein-Hilbert probando los posibles acoplamientos entre $\theta^{\mu\nu}$ y el escalar y el tensor de curvatura.

En otra aproximación desde este punto de vista, en [42] se hace de norma primero $SO(4,1)$ y luego una contracción a $ISO(3,1)$. Así, los campos de norma son las conexiones de espín, y la contracción identifica algunas de éstas con las tétradas. Para introducir no–conmutatividad desde esta perspectiva las conexiones de espín se expanden en potencias de θ usando el mapeo de SW, y luego de la contracción se sustituyen en la acción de gravedad en el espacio de Moyal, que es la acción de Einstein-Hilbert habiendo reemplazado los productos ordinarios por productos-$\star$. Haciendo una expansión similar de las conexiones de espín en potencias de θ en [68] se presenta una generalización no–conmutativa de la gravedad topológica.

Una propuesta de gravedad no–conmutativa que ha recibido mucha atención recientemente proviene de la deformación twist de simetrías del espacio–tiempo en teorías de campo no–conmutativas [10]. Desde esta perspectiva primero se construye el álgebra de difeomorfismos twist, y a partir de ésta una geometría diferencial tal que el producto-$\star$ de dos tensores sea el tensor correspondiente. Luego se definen una métrica, una conexión compatible con ésta, la derivada covariante correspondiente, y el tensor de Riemman usando la definición usual sustituyendo todos los productos usuales por productos-$\star$. Algo que debe notarse de esta construcción es que está hecha en el espacio plano, y aún no existe generalización clara de la misma al espacio curvo. Sin embargo, la crítica más contundente de esta gravedad es que la acción no–conmutativa propuesta no tiene algunos vértices que provienen del límite de Seiberg-Witten de la gravedad en teoría de cuerdas [1]. Han sido estudiadas variantes de la gravedad no–conmutativa twist donde por ejemplo se le asigna dinámica a los parámetros no–conmutativos [11, 86]; de estas ideas aún no se conoce ninguna consecuencia importante. Hay también una propuesta que retoma la construcción de la gravedad haciendo locales simetrías globales del espacio–tiempo, pero haciendo de norma el grupo de transformaciones de Poincaré twist [35]. El resultado padece los mismos problemas que tiene introducir el twist en simetrías de norma de Yang-Mills no–conmutativa[3] [37].

También ha sido estudiada la gravedad en espacios no–conmutativos a partir de modelos matriciales de teorías de norma [110]. Existen soluciones a las ecuaciones de movimiento de ciertos modelos matriciales de Yang-Mills en D dimensiones que reproducen un espacio–tiempo de cuatro dimensiones con una estructura de Poisson no–conmutativa identificando cuatro campos con los operadores hermíticos asosciados a las coordenadas de dicho espacio. Estos espacios se interpretan como una "brana" sumergida en un espacio de más dimensiones. El resto de los campos se identifican con una métrica inducida en la brana, que en el límite semi-

[3] No es posible definir un producto-$\star$ (o un twist) con derivadas covariantes en lugar de derivadas parciales. En tal caso el producto se vuelve no–asociativo, y también se violan condiciones de coasociatividad en la estructura de Hopf del álgebra de transformaciones de simetría (ver apéndice B, sección B.3).

clásico del modelo matricial se acopla con la estructura de Poisson para dar lugar a una métrica efectiva que tiene dinámica y se interpreta gravitacionalmente. Esta teoría se cataloga como un modelo de espacio–tiempo emergente. Otros autores han explorado este tipo de relación entre teorías de norma no–conmutativas y gravedad [103, 122]. La gravedad no–conmutativa que propondremos en este capítulo podría entenderse como una especie de gravedad emergente, parecido al desarrollo de los autores de [103], donde la acción de Maxwell no–conmutativa hasta la corrección a primer orden en θ proveniente del mapeo de SW se factoriza de tal manera que se recupera algo como la teoría de Maxwell en un espacio curvo con una métrica definida como función del tensor de intensidad de campo. Este resultado no puede llevarse a cabo con correcciones a órdenes superiores en θ.

Es deseable que la deformación no–conmutativa de la gravedad incluya dos aspectos elementales. Por un lado queremos que en el modelo esté presente la noción de difeomorfismo *usual* de relatividad general; en otras palabras que el grupo de difeomorfismos aparezca como grupo fundamental de simetría. Por otro lado queremos que el modelo no–conmutativo resultante sea una deformación consistente del correspondiente modelo o teoría conmutativa; es decir, una deformación tal que haciendo cero el parámetro de deformación recuperemos la acción de Einstein-Hilbert.

Conseguimos involucrar estos dos elementos mediante la idea de deformaciones consistentes de teorías de norma [17, 69]. Este método ha sido estudiado para construir interacciones consistentes correspondientes a una determinada estructura de norma [18], y con el mismo puede verse que las teorías de norma no–conmutativas son de hecho una deformación consistente posible tal que la acción se modifica pero no la simetría de norma [14, 16]. El mapeo de SW es en esta sentido una redefinición de campos que hace manifiesto este hecho (ver sección C.2.2

del apéndice C).

No haremos comparaciones de nuestro resultado con intentos previos de gravedad no–conmutativa, ni tampoco en consecuencias fenomenológicas el mismo (como las modificaciones a soluciones tipo agujero negro de Schwarszchild [41]). El objeto de este capítulo es presentar de la manera más clara posible la idea básica de la construcción. No nos es evidente que la acción que obtenemos puede ser replanteada en la forma de una acción para los campos no–conmutativos en el espacio con producto-$\star$ de Moyal (y de hecho creemos que esto no es posible debido a las inconsistencias halladas en [1]). Todo lo que tenemos aquí es un modelo que involucra a las tétradas y sus derivadas en una serie formal en el parámetro no–conmutativo θ.

4.2. Deformación no polinomial de teorías de norma

El método de deformaciones consistentes de teorías de norma (que describimos en el apéndice C) puede usarse como un mecanismo sistemático para hallar nuevas interacciones consistentes con una estructura de norma dada. Ésta, como la acción, pueden resultar deformadas o no. Se ha visto que las deformaciones no triviales invariantes de Poincaré se agrupan en cuatro tipos [15]. Considerando N copias del lagrangiano de Maxwell libre $L^{(0)} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{N} F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$ como punto de partida, el resultado general a primer orden en el parámetro de deformación para la acción deformada $S([A])$ con el requisito mencionado puede tener los siguientes vértices:

1. Polinomios en el tensor de intensidad de campo $F_{\mu\nu}$, y sus derivadas.

2. Vértices de tipo Chern-Simons de la forma $A \wedge F \wedge \cdots \wedge F$.

3. Vértices cúbicos de tipo Yang-Mills $f_{abc}A^a_\mu A^b_\nu F^{\mu\nu c}$, para alguna f_{abc} totalmente antisimétrica.

4. Vértices de la forma $A_\mu j^\mu$, con j^μ una corriente noetheriana conservada invariante de norma de la teoría libre no deformada.

En los primeros dos casos la simetría de norma no se deforma, mientras que en el tercero sí. En lo que sigue consideraremos interacciones del último tipo, y luego la generalización no–conmutativa implicará considerar simultáneamente estos vértices con los del primer tipo.

4.2.1. Deformación no polinomial de la teoría de Maxwell (modelo de juguete)

Para hacer más sencilla la presentación de la idea primero hacemos la deformación consistente de la acción de Maxwell con un campo de norma A_μ

$$S^{(0)} = \int d^4x L^{(0)} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ en el espacio–tiempo plano con métrica

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,-).$$

Los índices del espacio–tiempo los bajamos y subimos con esta métrica. Por ejemplo, $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\nu}$. La acción de Maxwell es invariante bajo las transformaciones de norma (abelianas)

$$\delta^{(0)}_\lambda A_\mu = \partial_\mu\lambda, \tag{4.1}$$

y bajo transformaciones conformes *globales* (en $D = 4$ dimensiones)

$$\delta A_\mu = \xi^\nu F_{\nu\mu}, \tag{4.2}$$

donde ξ^μ es un vector de Killing conforme del espacio–tiempo plano solución de la ecuación

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho \xi^\rho. \tag{4.3}$$

La variación (4.2) es la forma covariante de norma de las transformaciones globales conformes, y hay una para cada vector de Killing ξ^μ solución de (4.3). Por ahora tomaremos una sóla de estas simetrías globales. La generalización o extensión de la idea al caso no–abeliano es básicamente incorporar en el modelo tantas simetrías del grupo conforme como sea posible.

Deformamos la teoría $S^{(0)}$ con un término de la forma $A_\mu j^\mu$, con j^μ la corriente conservada de esta teoría y asociada a las transformaciones globales (4.2). Esta corriente se escribe como $j^\mu = \xi^\nu T_\nu{}^\mu$ donde $T_\nu{}^\mu = -\frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + F_{\nu\rho}F^{\mu\rho}$ es el tensor de energía–momento conservado, simétrico, y de traza nula. Tal deformación tiene la forma

$$S^{(1)} = \int d^4x A_\mu \xi^\nu (-\frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + F_{\nu\rho}F^{\mu\rho}). \tag{4.4}$$

Estos vértices no son invariantes bajo la transformación (4.1), y por lo tanto la simetría también se deforma.

La deformación de la simetría de norma se obtiene como solución de las ecuaciones de consistencia (C.2) a cada orden en el parámetro de deformación[4]. A

[4]Hemos omitido el parámetro de deformación κ explícito en todas las expresiones. Éste puede ser reintroducido en los cálculos rescalando los campos y parámetros con κA_μ y $\kappa\lambda$, y dividiendo la densidad lagrangiana por κ^2.

primer orden en este parámetro la ecuación de consistencia es

$$\delta_\lambda^{(0)} S^{(1)} + \delta_\lambda^{(1)} S^{(0)} = 0,$$

y una solución es

$$\delta_\lambda^{(1)} A_\mu = \lambda \xi^\nu F_{\nu\mu}.$$

El procedimiento de deformación puede llevarse a cabo a todo orden en el parámetro de deformación [24], y el resultado es

$$L = -\frac{1}{4}(1 + \xi^\rho A_\rho)\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}, \qquad \delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + \lambda \xi^\nu \hat{F}_{\nu\mu}, \tag{4.5}$$

donde

$$\hat{F}_{\mu\nu} = E_\mu{}^\rho E_\nu{}^\sigma F_{\rho\sigma}, \qquad E_\mu{}^\rho \equiv \delta_\mu^\rho - \frac{\xi^\rho A_\mu}{(1 + \xi \cdot A)}.$$

La teoría deformada resultante es no polinomial en los campos A_μ. Una característica peculiar del lagrangiano (4.5) es que puede reescribirse en una especie de "espacio–tiempo curvo" con "métrica" dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e^\alpha{}_\mu e^\beta{}_\nu, \quad e^\alpha{}_\mu = \delta_\mu^\alpha + \xi^\alpha A_\mu, \tag{4.6}$$

cuya inversa y determinante son

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} E_\alpha{}^\mu E_\beta{}^\nu, \quad \text{y} \quad \det g = -(1 + \xi \cdot A)^2.$$

En esta notación el lagrangiano (4.5) toma la forma

$$L = -\frac{1}{4}\sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma},$$

que se ve como el lagrangiano de Maxwell en el espacio–tiempo curvo con métrica $g_{\mu\nu}$. La "métrica" (4.6) depende de los campos de norma A_μ y el campo vectorial de Killing ξ^μ. La expresión

$$e^\alpha{}_\mu = \delta^\alpha_\mu + \xi^\alpha A_\mu \tag{4.7}$$

juega el papel de un sistema ortonormal de "tétradas" en este espacio–tiempo curvo (con la propiedad $e^\mu{}_\alpha E_\nu{}^\alpha = \delta^\mu_\nu$). Si (4.7) funcionara como una redefinición de campos podríamos reescribir la acción deformada en términos sólo de las tétradas o de la métrica, pero esto no es posible pues tal expresión no tiene la misma cantidad de grados de libertad de cada lado. Sin embargo, en la extensión de este modelo de deformación al caso no–abeliano esta redefinición de campos será más plausible.

Por razones que serán claras un poco más adelante nos restringiremos al caso para el que

$$\partial_\rho \xi^\rho = 0,$$

es decir, al caso de transformaciones de Poincaré de la métrica de fondo. El vector de Killing correspondiente tiene la forma general $\xi^\rho = \Lambda^\rho{}_\alpha x^\alpha + a^\rho$, con $\Lambda^\rho{}_\alpha$ una matriz constante antisimétrica correspondiente a una rotación de Lorentz global, y a^ρ un vector constante correspondiente a una traslación global.

Redefiniendo el parámetro de norma como

$$\omega = \frac{\lambda}{(1+\xi \cdot A)}$$

(ω es tan arbitrario como λ), es sencillo mostrar que la transformación de norma deformada (4.5) se escribe como

$$\delta_\omega A_\mu = \partial_\mu \omega + \mathcal{L}_\varepsilon A_\mu = \partial_\mu \omega + \varepsilon^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \varepsilon^\nu, \tag{4.8}$$

donde $\varepsilon^\mu = \omega\xi^\mu$ y $\mathcal{L}_\varepsilon$ es la derivada de Lie en la dirección del vector ε^μ. Como consecuencia de esta regla de transformación para los campos de norma A_μ la "métrica" (4.6) trasforma como

$$\delta_\omega g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\varepsilon g_{\mu\nu} = \varepsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu}\partial_\mu \varepsilon^\rho + g_{\mu\rho}\partial_\nu \varepsilon^\rho$$

y las "tétradas"

$$\delta_\omega e^\nu{}_\mu = \varepsilon^\rho \partial_\rho e^\nu{}_\mu + (\partial_\mu \varepsilon^\rho) e^\nu{}_\rho - \frac{1}{2}\omega(\partial_\rho \xi^\nu - \eta^{\nu\sigma}\eta_{\rho\lambda}\partial_\sigma \xi^\lambda) e^\rho{}_\mu, \tag{4.9}$$

donde hemos usado (4.8) y el hecho de que ξ^μ satisface la ecuación (4.3). De la regla de transformación (4.9) se lee que $e^\alpha{}_\mu$ transforma bajo difeomorfismos ε^ρ como un vector del espacio–tiempo en el índice μ, y como un vector del espacio tangente en el índice α. Es importante notar que con el procedimiento llevado a cabo hasta ahora no hemos hecho local al grupo de Lorentz completo, pues sólo tenemos un parámetro de norma ω y necesitaríamos seis para conseguirlo. En este sentido este modelo de juguete no es posible relacionarlo con nada parecido a gravedad, y esto también se puede ver en que de la teoría de norma tenemos cuatro componentes A_μ, mientras que la gravedad necesita diez para $g_{\mu\nu}$. En este modelo la ecuación (4.7) no es una redefinición de campos (no es uno a uno), pero la extensión no–abeliana de esta deformación no polinomial que estudiamos en la siguiente sección tiene más campos y parámetros de norma, y en ese caso la ecuación análoga a (4.7) podrá considerarse una redefinición de campos.

4.2.2. Extensión no–abeliana del modelo anterior

En esta sección presentamos la extensión no–abeliana de la deformación no polinomial de la teoría de Maxwell de la sección previa. De esta manera incorporamos más parámetros locales en la deformación tal que al final podemos comparar la teoría no–abeliana resultante con la gravedad de Einstein.

La deformación de la simetría de norma (4.8) anterior es tal que sobre la métrica $g_{\mu\nu}(A,\xi)$ actúa como un difeomorfismo en la dirección del vector $\varepsilon^{\mu} \equiv \omega\xi^{\mu}$. Esto no implica desde luego que la teoría de Maxwell deformada es equivalente a la gravedad de Einstein bajo una redefinición de campos. La acción deformada resultante de hecho no puede ser planteada en términos sólo de $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas. Sin embargo, veremos en esta sección que a partir de la extensión no–abeliana del modelo de juguete podemos construir una acción para la gravedad que tiene la teoría de Einstein como caso particular. Ésta se recupera mediante una combinación específica de tres invariantes diferentes, uno de los cuales es análogo al lagrangiano obtenido mediante la deformación no polinomial.

Usaremos una teoría de norma no–abeliana con base en unos generadores T_A para $A = 1, 2, \ldots, N$ el índice del grupo interno y N el rango del álgebra de Lie correspondiente. El núcleo del argumento será identificar ésta con el álgebra de Lie de los vectores de Killing de la métrica de fondo. Si ${f_{AB}}^{C}$ son las constantes de estructura del grupo de norma, los vectores de Killing ξ^{μ}_{A} cierran entonces como[5]

$$\xi^{\nu}_{A}\partial_{\nu}\xi^{\mu}_{B} - \xi^{\nu}_{B}\partial_{\nu}\xi^{\mu}_{A} = {f_{BA}}^{C}\xi^{\mu}_{C},$$

[5] El subíndice A de la notación ξ^{μ}_{A} indica un generador particular del grupo de transformaciones definidas por los vectores de Killing. Por ejemplo, para el grupo de traslaciones ese subíndice denota cuatros vectores independientes: $\xi_0 = (a^0, 0, 0, 0)$, $\xi_1 = (0, a^1, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, 0, a^2, 0)$, y $\xi_3 = (0, 0, 0, a^3)$.

donde índices A del grupo repetidos implica que hay una suma sobre sus valores. Manejaremos implícitamente que estos índices se bajan y se suben con la métrica $\delta_{AB} = 0, 1$ para $A \neq B$, $A = B$ respectivamente.

Consideremos el campo de norma no–abeliano A_μ^A, su asociado tensor de intensidad de campo $F_{\mu\nu}^A$ dado por

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f_{BC}{}^A A_\mu^B A_\nu^C, \tag{4.10}$$

y la simetría de norma

$$\delta_\omega^{(0)} A_\mu^A = D_\mu \omega^A,$$

donde la derivada covariante D_μ está dada por

$$D_\mu \omega^A = \partial \omega^A + A_\mu^B f_{BC}{}^A \omega^C. \tag{4.11}$$

Tomamos la acción usual de Yang-Mills dada por

$$S_{YM} = \int d^4x F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu},$$

y la deformamos usando la misma idea que en el caso del modelo de juguete de la sección anterior. Proponemos una simetría de norma deformada (extrapolación de (4.5))

$$\delta_\omega A_\mu^A = D_\mu \omega^A + \varepsilon^\nu \partial_\nu A_\mu^A + A_\nu^A \partial_\mu \varepsilon^\nu = D_\mu \omega^A + \mathcal{L}_\varepsilon A_\mu^A, \tag{4.12}$$

donde

$$\varepsilon^\mu = \omega^A \xi_A^\mu.$$

La cuestión importante ahora es si podemos construir una acción no–abeliana que sea invariante bajo las transformaciones (4.12). Esto se puede lograr en términos de los campos A^A_μ y $F^A_{\mu\nu}$ otra vez en un "espacio–tiempo curvo" con "métrica"

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e^\alpha{}_\mu e^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{A}_{\mu\nu} + \mathcal{A}_{\nu\mu} + \mathcal{A}_{\mu\rho}\mathcal{A}_\nu{}^\rho, \quad e^\nu{}_\mu = \delta_\mu{}^\nu + \mathcal{A}^\nu{}_\mu, \qquad (4.13)$$

donde estamos usando la notación

$$\mathcal{A}^\nu{}_\mu = \xi^\nu_A A^A_\mu.$$

(Notar que el contenido de campos del modelo que estamos presentando está dado por los campos de norma A^A_μ y no por las matrices $\mathcal{A}^\nu{}_\mu$.) Como en el modelo de juguete previo, bajo las transformaciones de norma (4.12) la "métrica" $g_{\mu\nu}(A,\xi)$ tienen las propiedades de transformación usuales bajo un difeomorfismo, pero generado por el campo vectorial $\varepsilon^\mu = \omega^A \xi^\mu_A$

$$\delta_\omega g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\varepsilon g_{\mu\nu}.$$

Las "tétradas" $e^\nu{}_\mu$ otra vez también transforman como vectores del espacio–tiempo en el índice μ y como un vector de Lorentz en el espacio tangente local en el ínice ν

$$\delta e^\nu{}_\mu = \varepsilon^\rho \partial_\rho e^\nu{}_\mu + e^\nu{}_\rho \partial_\mu \varepsilon^\rho - \frac{1}{2}\omega^A(\partial_\rho \xi^\nu_A - \eta^{\nu\sigma}\eta_{\rho\lambda}\partial_\sigma \xi^\lambda_A) e^\rho{}_\mu. \qquad (4.14)$$

La ecuación (4.14) es la extrapolación no–abeliana de (4.9). Podemos ver del último término de esta ecuación que ahora tendríamos suficientes parámetros ω^A de la teoría de norma para construir la invariancia bajo transformaciones de Lorentz locales de las "tétradas".

Las inversas de éstas están dadas por

$$E_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu - \hat{\mathcal{A}}_\mu{}^\nu, \qquad e^\rho{}_\nu E_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\rho, \qquad (4.15)$$

y la inversa de la métrica por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \hat{\mathcal{A}}_{\mu}{}^{\nu} - \hat{\mathcal{A}}_{\nu}{}^{\mu} + \hat{\mathcal{A}}_{\mu}{}^{\rho}\hat{\mathcal{A}}_{\nu\rho}, \qquad g^{\mu\nu} = \eta^{\sigma\rho}E_{\sigma}{}^{\mu}E_{\rho}{}^{\nu},$$

donde

$$\hat{\mathcal{A}}_{\mu}{}^{\rho} = \xi^{\rho}_{A}E^{A}_{B}A^{B}_{\mu},$$

y

$$E^{C}_{B}(\delta^{A}_{C} + \xi^{\mu}_{C}A^{A}_{\mu}) = \delta^{A}_{B}.$$

Con estos ingredientes podemos ahora escribir la acción de Yang-Mills deformada e invariante bajo las transformaciones de norma (4.12)

$$L = -\frac{1}{4}(1 + \xi^{\rho}_{A}A^{A}_{\rho})\hat{F}^{A}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}_{A} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F^{A}_{\mu\nu}F^{B}_{\rho\sigma}\delta_{AB}, \tag{4.16}$$

donde

$$\hat{F}^{A}_{\mu\nu} = E_{\mu}{}^{\rho}E_{\nu}{}^{\sigma}F^{A}_{\rho\sigma}. \tag{4.17}$$

En la siguiente sección veremos que la acción (4.16) no es la única acción invariante de las transformaciones de norma (4.12).

4.2.3. Relación con la gravedad de Einstein

La gravedad que podemos relacionar con la deformación no polinomial de la sección anterior proviene de una clase de teorías con invariancia ante difeomorfismos que se formulan en términos de la torsión y no de la curvatura de la conexión afín que se define en el espacio–tiempo. De hecho, el formalismo se construye con una conexión que no tiene curvatura. Una conexión con esta característica se llama conexión de Weitzenböck, y la pareja conformada por una variedad de Riemann y esta conexión se denomina espacio–tiempo de Weitzenböck (ver apéndice D y referencias [76, 99]).

Las teorías de gravedad que se pueden construir en este espacio–tiempo provienen de hacer de norma el grupo de traslaciones. Así, los grados de libertad básicos son las tétradas, y las simetrías las traslaciones locales. Con este mecanismo es posible construir tres lagrangianos invariantes, tal que combinándolos arbitrariamente se define una teoría de gravedad. Una teoría como esta se denomina "gravedad teleparalela", nombre que proviene de la noción de paralelismo absoluto que existe en estos modelos (los sistemas de tétradas son paralelos entre sí). La gravedad de Einstein resulta en este formalismo de una combinación específica de los tres invariantes mencionados. Para encontrar los coeficientes necesarios para construir esta combinación, se calcula la teoría linearizada y las condiciones sobre ellos para obtener la teoría de Fierz-Pauli.

Tomemos como base de la construcción la deformación no polinomial de la sección anterior, pero simplificada haciendo local sólo el grupo abeliano de traslaciones de la métrica de fondo. Así, la ecuación (4.13) es una redefinición de campos que intercambia el rol de A^A_μ con el de las tétradas $e^\nu{}_\mu$. Podemos definir entonces un nuevo tensor de "intesidad de campo" mediante

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\rho = \xi^\rho_A F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}^\rho{}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^\rho{}_\mu = \partial_\mu e^\rho{}_\nu - \partial_\nu e^\rho{}_\mu, \tag{4.18}$$

donde $F^A_{\mu\nu}$ es el tensor de intensidad de campo usual de la teoría de Yang-Mills (4.10). Los generadores ξ_A para traslaciones con $A = 0, 1, 2, 3$ (ver pié de página 5) tienen por componentes $\xi^\mu_a = \delta^\mu_A a^\mu$ (con a^μ constante, sin sumar sobre μ), y su papel es básicamente identificar el índice del grupo interno con el índice del espacio–tiempo. Como estamos haciendo de norma una simetría abeliana las constantes de estructura son cero. En ese caso la derivada covariante (4.11) se reduce a la derivada parcial usual.

La observación crucial para obtener la relación que estamos buscando es que el tensor de intensidad de campo (4.18) puede relacionarse con los coeficientes de rotación de Ricci $\Omega_{\mu\nu}{}^{\rho}$ de la construcción estándar de la gravedad de Weitzenböck[6]. Explícitamente tenemos que

$$\Omega_{\sigma\kappa}{}^{\rho} \equiv \hat{\mathcal{F}}_{\sigma\kappa}{}^{\rho} = E_{\sigma}{}^{\mu} E_{\kappa}{}^{\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\rho}. \tag{4.19}$$

De esta manera podemos ahora construir la acción de la gravedad inspirándonos en la deformación no polinomial de la teoría de Yang-Mills abeliana que hemos definido, y que representa la teoría de norma (libre) de las traslaciones hechas locales. En términos de $\Omega_{\mu\nu}{}^{\rho}$ y con base en el lagrangiano de la teoría de Yang-Mills deformada (4.16) construímos el invariante de Weitzenböck

$$I_1 \propto L = -\frac{1}{4} e \; \Omega_{\mu\nu}{}^{\rho} \Omega^{\mu\nu}{}_{\rho},$$

donde hemos hecho la identificación del factor $(1 + \mathrm{Tr}\,\mathcal{A})$ con el determinante de las tétradas. En este contexto no hay tensor de curvatura, y el lagrangiano más general de la teoría de gravedad se puede escribir como una combinación de los llamados invariantes de Weitzenböck

$$I_1 = \Omega_{\mu\nu\rho} \Omega^{\mu\nu\rho}, \quad I_2 = \Omega_{\mu\nu\rho} \Omega^{\rho\mu\nu}, \quad I_3 = \Omega_{\mu\rho}{}^{\rho} \Omega^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\sigma}.$$

[6]Hasta un factor numérico irrelevante, en este contexto $\Omega_{\mu\nu}{}^{\rho}$ es la torsión $T_{\mu\nu}{}^{\rho}$

El lagrangiano de Pellegrini-Plebański se construye con ellos y está dado por

$$L = ec^i I_i.$$

Para fijar los coeficientes c^i de manera que de la acción definida con el lagrangiano anterior se obtenga la acción de la relatividad general escribimos la parte linearizada. Si denotamos la parte simétrica y antisimétrica de $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ con $\mathcal{A}^s{}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{A}^a{}_{\mu\nu}$ respectivamente, y retenemos términos hasta segundo orden en $\mathcal{A}$, usando la redefinición $e \to 1 + \mathcal{A}$ en el lagrangiano de Pellegrini-Plebański el resultado es

$$\begin{aligned} S[\mathcal{A}^s, \mathcal{A}^a] = \int d^4x \Bigg[&\frac{1}{16}(2c_1 + c_2)\partial_\mu \mathcal{A}^s{}_{\nu\rho}\partial^\mu \mathcal{A}^{s\nu\rho} - \frac{1}{16}(2c_1 + c_2 - c_3)\partial_\mu \mathcal{A}^s{}_{\nu\rho}\partial^\nu \mathcal{A}^{s\mu\rho} \\ - \frac{1}{8}(c_3)\partial_\mu \mathcal{A}^s \partial_\nu \mathcal{A}^{s\nu\mu} &+ \frac{1}{16}(c_3)(\partial \mathcal{A}^s)^2 - \frac{1}{16}(4c_1 + 2(c_2 + c_3))\partial_\mu \mathcal{A}^s{}_{\nu\rho}\partial^\rho \mathcal{A}^{a\nu\mu} \\ &+ \frac{1}{16}\partial_\mu \mathcal{A}^a{}_{\nu\rho}\partial^\mu \mathcal{A}^{a\nu\rho} - \frac{1}{16}(2c_1 - 3c_2 - c_3)\partial_\mu \mathcal{A}^a{}_{\nu\rho}\partial^\rho \mathcal{A}^{a\nu\mu} \Bigg] \end{aligned}$$

(donde $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{s\mu}{}_\mu$). Para recuperar la acción de Fierz-Pauli necesitamos fijar los coeficientes de tal manera que se desacoplen la parte simétrica de la antisimétrica, de donde obtenemos la condición

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Esta condicion aún no fija los coeficientes. La elección para estos coeficientes congruente con esta condición y que elimina todos los términos que no corresponden a la acción de Fierz-Pauli es $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = -4$.

Al final podemos construir la acción completa (sin linearizar) y obtener así el lagrangiano

$$L_{EH} = e(\Omega_{\mu\nu\rho}\Omega^{\mu\nu\rho} + 2\Omega_{\mu\nu\rho}\Omega^{\rho\mu\nu} - 4\Omega_{\mu\rho}{}^\rho \Omega^\mu{}_\sigma{}^\sigma). \tag{4.20}$$

Este es el lagrangiano de Einstein-Hilbert escrito en el formalismo de primer orden (ver [100]). Es interesante notar que este lagrangiano es invariante ante todas las transformaciones de Poincaré locales, y no sólo ante las traslaciones locales (esto lo sabemos porque tales son las propiedades de la acción de Einstein-Hilbert). También es posible checar que la combinación de coeficientes encontrada es la combinación correcta que permite escribir la acción en términos de $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas. Al final de la siguiente sección calcularemos las correcciones a la gravedad provenientes de la no–conmutatividad mediante la misma identificación (4.19) que nos permitió llegar al lagrangiano (4.20).

4.3. Generalización no–conmutativa

El objetivo de esta sección es primero estudiar hasta dónde se puede generalizar al caso no–conmutativo el modelo no polinomial presentado en la sección previa, y de esta manera obtener una teoría de norma no–conmutativa invariante ante difeomorfismos. En un segundo paso queremos construir una teoría de gravedad no–conmutativa insipirada en la teoría deformada resultante.

La generalización no–conmutativa de una teoría de norma constituye de hecho una deformación consistente[7] del tipo que modifica la acción pero no la simetría (ver sección C.2.1 del apéndice C). En relación a la deformación presentada en la sección 4.2, uno puede preguntarse si la deformación no–conmutativa puede llevarse a cabo de manera equivalente a partir de la teoría de norma inicial (abeliana o no–abeliana), o al resultado de la deformación no polinomial de ésta. Implementaremos la deformación no–conmutativa en la teoría de norma original, pues

[7] Omitiremos el parámetro no–conmutativo ϑ de las expresiones que presentamos a continuación. En cualquier momento éste puede reincorporarse identificando que por cada tensor $\theta^{\mu\nu}$ hay un parámetro de deformación ϑ.

ésta está más entendida y bajo control. Para hacerlo usaremos el mapeo de SW en la acción de una teoría de norma no–abeliana no–conmutativa, cuya corrección a primer orden en ϑ para el tensor de intensidad de campo es

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + F^{(1)}_{\mu\nu}, \qquad F^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\theta^{\sigma\rho}(\{A_\sigma, \partial_\rho F_{\mu\nu}\} - \{F_{\mu\sigma}, F_{\nu\rho}\}),$$

donde $\{\cdot\,,\cdot\}$ es el anticonmutador entre los generadores del grupo interno. Asumiermos aquí la interpretación de θ como un tensor que transforma covariantemente bajo transformaciones del grupo de Poincaré, y usaremos de hecho la implementación de éstas construída en la sección 3.3.2 del capítulo 3. Esta nos permite partir de una acción con casi[8] todas las simetrías globales que tiene la acción inicial dee la deformación no polinomial de la sección 4.2.2.

Luego del mapeo de SW, la acción de Yang-Mills no–conmutativa (YMNC) tiene la siguiente forma a primer orden en el parámetro ϑ

$$S_{YMNC} = -\frac{1}{4}\int dx\left[F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + 2\vartheta\theta^{\alpha\beta}d_{bc}{}^a F^{\mu\nu}_a\left(F^b_{\mu\alpha}F^c_{\nu\beta} + \frac{1}{4}F^b_{\beta\alpha}F^c_{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(\vartheta^2)\right]. \quad (4.21)$$

Los coeficientes $d_{bc}{}^a$ son totalmente simétricos y provienen del anticonmutador entre los generadores del grupo interno.

Para escribir esta acción supusimos que los campos de norma no–conmutativos toman valores en el álgebra de Lie del grupo de norma. En el caso general de teorías de norma no–conmutativas los campos no–conmutativos viven en el álgebra envolvente del álgebra de Lie de los generadores del grupo interno en cuestión (ver sección B.1 del apéndice B). En el caso del grupo de norma que usaremos más adelante, además de que el conmutador entre los generadores cierra dentro del

[8]Como vimos en la sección 3.3.3 del capítulo anterior, bajo las transformaciones generadas por (3.23) la acción de la teoría de Yang-Mills no–conmutativa es invariante bajo transformaciones del grupo de Weyl, que incluye al grupo de Poincaré y las dilataciones.

grupo de norma, el anticonmutador lo hace también con las relaciones dadas por

$$\{T_a, T_b\} = d_{ab}{}^c T_c.$$

Así, con la noción usual de traza sobre los índices internos en una teoría de norma no–abeliana es posible calcular fácilmente términos que involucran uno o más anticonmutadores anidados entre los campos o los parámetros de norma. Adelante comentaremos un poco más acerca de esta cuestión.

Habiendo supuesto lo anterior, el mapeo de SW tiene dos papeles. Por un lado, mediante la redefinición de campos y parámetros regresa la simetría de norma-$\star$ a la simetría de norma usual de Yang-Mills, y por otro nos permite escribir los campos no–conmutativos en términos sólo de los campos conmutativos (estos son los campos de los que depende la acción (4.21)) [83]. Estos dos papeles nos facilitan el trabajo para hacer la generalización no–conmutativa de la deformación no polinomial de la sección 4.2.2.

Para realizar la construcción de la que proponemos obtener un modelo de gravedad no–conmutativa consideraremos sólo la primera corrección en ϑ de la acción (4.21). Veremos que la primera ecuación de consistencia en el parámetro κ de la deformación no polinomial ahora para la acción no–conmutativa (4.21) es satisfecha con la misma solución (para la deformación de la simetría de norma) que en el caso conmutativo expuesto en la sección 4.2. Conjeturamos que esto sucede con cualquier corrección no–conmutativa de orden ϑ^n proveniente del mapeo de SW, pero dada la dificultad para manipular (y de hecho conocer) de manera sistemática estos términos para $n \geq 2$ [114] sólo vamos a considerar la corrección a primer orden en ϑ. Esto nos será suficiente para ilustrar la construcción .

4.3.1. Generalización no–conmutativa de la deformación no polinomial de Maxwell

Como teoría inicial tomamos la acción de Maxwell y su simetría de norma dadas por

$$S^{(0)} = \int d^4x L^{(0)} = -\frac{1}{4}\int dx \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}, \qquad \delta^{(0)}A_\mu = \partial_\mu\lambda, \tag{4.22}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Deformamos esta acción a primer orden en el parámetro κ con dos términos, la corrección a primer orden en ϑ proveniente de la acción de Maxwell no–conmutativa (que denotamos por $S^{(1)}_{NC}$), junto con el mismo que da origen a la deformación no polinomial ($S^{(1)}_B$) de la sección 4.2.1. En términos del lagrangiano tenemos

$$\begin{aligned} L^{(1)} = L^{(1)}_B + L^{(1)}_{NC} &\equiv A_\mu j^\mu + \left(-\frac{1}{4}\right)2\theta^{\mu\sigma}F_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{4}\delta_\sigma{}^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\sigma\rho}F^{\nu\rho}\right) \\ &= A_\mu j^\mu + \left(-\frac{1}{4}\right)2\theta^{\mu\sigma}F_{\mu\nu}T_\sigma{}^\nu, \end{aligned}$$

donde hemos introducido al tensor de energía momento $T_\sigma{}^\nu$ de la teoría de Maxwell libre sólo por comodidad notacional. Tomamos la misma deformación de la simetría de norma a primer orden del modelo no polinomial de la sección 4.2.1

$$\delta^{(1)}A_\mu = \lambda\xi^\nu F_{\nu\mu}, \tag{4.23}$$

limitándonos al caso de ξ^ν una isometría del espacio–tiempo plano que cumple la ecuación de Killing

$$\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu = 0$$

($\partial_\rho \xi^\rho = 0$). La solución más general de esta ecuación está dada por las traslaciones con parámetro a^μ, y las transformaciones de Lorentz con parámetro $\Lambda^\mu{}_\nu$:

$$\xi^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{4.24}$$

El procedimiento de deformaciones consistentes requiere que sean satisfechas las ecuaciones de consistencia

$$\sum_{i=0}^{k} \delta^{(i)} L^{(k-i)} \simeq 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

a todos los órdenes en κ. Es fácil ver que a primer orden la ecuación de consistencia se satisface directamente. Esta ecuación es

$$\begin{aligned} \delta^{(0)} L^{(1)} + \delta^{(1)} L^{(0)} &= \delta^{(0)} L_B^{(1)} + \delta^{(0)} L_{NC}^{(1)} + \delta^{(1)} L^{(0)} \\ &\simeq \delta^{(0)} L_{NC}^{(1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

El segundo renglón de esta expresión resulta porque fijamos $\delta^{(1)}$ igual que en el caso conmutativo, y el tercero porque $L_{NC}^{(1)}$ está constituído sólo de F's (invariantes bajo la simetría de norma inicial).

A segundo orden en κ tendríamos que

$$\begin{aligned} \delta^{(0)} L^{(2)} + \delta^{(1)} L^{(1)} + \delta^{(2)} L^{(0)} &= \delta^{(0)} L_B^{(2)} + \delta^{(1)} L_B^{(1)} + \delta^{(2)} L^{(0)} + \delta^{(0)} L_{NC}^{(2)} + \delta^{(1)} L_{NC}^{(1)} \\ &\simeq \delta^{(0)} L_{NC}^{(2)} + \delta^{(1)} L_{NC}^{(1)}. \end{aligned}$$

El segundo renglón en esta ecuación de consistencia es resultado de fijar $\delta^{(2)}$ también como en el caso conmutativo de la sección 4.2.1. La ecuación de consistencia se reduce a

$$\delta^{(0)}L_{NC}^{(2)}+\delta^{(1)}L_{NC}^{(1)}\simeq 0,$$

de la que obtenemos $L_{NC}^{(2)}$. Esta ecuación se puede integrar (hasta términos de borde), pues el resto de elementos están determinados por la ecuación del orden anterior. La reescribimos como

$$\delta^{(0)}L_{NC}^{(2)}=\frac{\delta L_{NC}^{(2)}}{\delta A_\kappa}\delta^{(0)}A_\kappa+\delta^{(1)}L_{NC}^{(1)}\simeq 0, \tag{4.25}$$

y tomamos que $\delta^{(1)}\theta=0$ (es tan razonable que θ no transforme ante la transformación de norma modificada por $\delta^{(1)}$ como lo es que no transformen de norma las coordenadas del espacio–tiempo). Usando que $F_{\mu\nu}$ transforma de acuerdo a la regla

$$\delta^{(1)}F_{\mu\nu}=-\xi^\rho(\partial_\mu\lambda)F_{\nu\rho}+\xi^\rho(\partial_\nu\lambda)F_{\mu\rho}+\lambda\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu},$$

y $\delta^{(0)}A_\mu=\partial_\mu\lambda$, de la ecuación anterior encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{\delta L_{NC}^{(2)}}{\delta A_\kappa}=&\left(\frac{1}{4}2\theta^{\mu\sigma}\right)\Big[-\xi^\kappa F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda+\xi^\rho\delta^\kappa_{[\lambda}F_{\mu]\rho}T_\sigma{}^\lambda\\&+F_{\mu\lambda}(-\tfrac{1}{4}\delta^\lambda_\sigma\eta^{\gamma\alpha}\eta^{\delta\beta}+\delta^\alpha_\sigma\eta^{\lambda\gamma}\eta^{\delta\beta})(\xi^\rho\delta^\kappa_{[\alpha}F_{\beta]\rho}F_{\gamma\delta}+F_{\alpha\beta}\xi^\rho\delta^\kappa_{[\gamma}F_{\delta]\rho})\Big]+B,\end{aligned} \tag{4.26}$$

donde

$$B=\left(\frac{1}{4}2\theta^{\mu\sigma}\right)\Big[(\mathcal{L}_\xi\lambda)F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda+\lambda(\mathcal{L}_\xi F_{\mu\lambda})T_\sigma{}^\lambda+\lambda F_{\mu\lambda}(\mathcal{L}_\xi T_\sigma{}^\lambda)+(\partial_\rho\xi^\rho)\lambda F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda\Big].$$

Si $\mathcal{L}_\xi\theta^{\mu\sigma}=0$, que sucede para traslaciones y en general para el subgrupo del grupo de Poincaré que deja invariante θ (el mismo grupo que es usado en [27] para construir la gravedad no–conmutativa unimodular), podemos sumarle dicho término a B (con cualquier coeficiente)

$$\begin{aligned}
B &\equiv B + \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi \theta^{\mu\sigma}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}2\theta^{\mu\sigma}\right)\left[(\mathcal{L}_\xi\lambda)F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda + \lambda(\mathcal{L}_\xi F_{\mu\lambda})T_\sigma{}^\lambda + \lambda F_{\mu\lambda}(\mathcal{L}_\xi T_\sigma{}^\lambda) + (\partial_\rho\xi^\rho)\lambda F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda\right] \\
&+ \left(\frac{1}{4}2(\mathcal{L}_\xi\theta^{\mu\sigma})\right)\lambda F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda \\
&= \partial_\rho\left(\frac{1}{4}2\xi^\rho\theta^{\mu\sigma}\lambda F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda\right).
\end{aligned}$$

En ese caso podemos concluir que B es un término de borde, y por lo tanto la ecuación (4.26) tiene como solución

$$\begin{aligned}
L^{(2)}_{NC} = \left(\frac{1}{4}2\theta^{\mu\sigma}\right)&\Big[-\xi^\kappa A_\kappa F_{\mu\lambda}T_\sigma{}^\lambda + \xi^\rho A_{[\lambda}F_{\mu]\rho}T_\sigma{}^\lambda \\
&+F_{\mu\lambda}(-\tfrac{1}{4}\delta^\lambda_\sigma\eta^{\gamma\alpha}\eta^{\delta\beta} + \delta^\alpha_\sigma\eta^{\lambda\gamma}\eta^{\delta\beta})(\xi^\rho A_{[\alpha}F_{\beta]\rho}F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta}\xi^\rho A_{[\gamma}F_{\delta]\rho})\Big]. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

En la extensión de este modelo de juguete al caso no–abeliano veremos que la condición sobre ξ de que pertenezca al "grupo pequeño" de transformaciones que dejan invariante a θ puede ser relajada. Por el momento vemos que cuando $\lambda\mathcal{L}_\xi\theta = 0$ hay términos de borde en (4.25) natrulamente motivados y fáciles de identificar.

Si consideráramos términos provenientes del mapeo de SW a segundo orden en ϑ, las ecuaciones de consistencia que recién analizamos a segundo orden en κ incorporarían nuevos términos en $L^{(2)}_{NC}$. Estos términos son invariantes de las transformaciones de norma no deformadas y por lo tanto la ecuación (4.25) no se altera.

La solución para el lagrangiano en ese caso sería

$$
\begin{aligned}
L_{NC}^{(2)} = \frac{1}{4} 2\theta^{\mu\sigma} \Big[& -\xi^{\kappa} A_{\kappa} F_{\mu\lambda} T_{\sigma}{}^{\lambda} + \xi^{\rho} A_{[\lambda} F_{\mu]\rho} T_{\sigma}{}^{\lambda} \\
& + F_{\mu\lambda} (-\tfrac{1}{4} \delta_{\sigma}^{\lambda} \eta^{\gamma\alpha} \eta^{\delta\beta} + \delta_{\sigma}^{\alpha} \eta^{\lambda\gamma} \eta^{\delta\beta}) (\xi^{\rho} A_{[\alpha} F_{\beta]\rho} F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta} \xi^{\rho} A_{[\gamma} F_{\delta]\rho}) \Big] \\
& - \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \theta^{\alpha\beta} \Big[\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \\
& - F_{\mu\nu} F_{\alpha\rho} F_{\beta\sigma} F^{\rho\sigma} + 2 F_{\mu\alpha} F_{\nu\rho} F_{\beta\sigma} F^{\rho\sigma} \Big]. \quad (4.28)
\end{aligned}
$$

Conjeturamos que el procedimiento que nos llevó a la solución (4.27) para $L_{NC}^{(2)}$ puede ser continuado para encontrar $S_{NC}^{(3)}$, $S_{NC}^{(4)}$, $S_{NC}^{(5)}$, etc.[9], y así el resultado final sería la acción deformada en κ dada por

$$
L = -\frac{1}{4} (1 + \kappa \xi^{\rho} A_{\rho}) \Big(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} + 2\theta^{\mu\sigma} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{T}_{\sigma}^{\nu} \Big), \quad (4.29)
$$

donde $\hat{F}_{\mu\nu} = \kappa F_{\mu\nu} + \kappa^2 \frac{\xi^{\rho} A_{[\mu} F_{\nu]\rho}}{1 + \kappa \xi^{\sigma} A_{\sigma}}$, y $\hat{T}_{\sigma}^{\nu} = -\frac{1}{4} \delta_{\sigma}^{\nu} \hat{F}_{\alpha\beta} \hat{F}^{\alpha\beta} + \hat{F}_{\sigma\beta} \hat{F}^{\nu\beta}$, igual que en el modelo de la sección 4.2.1. La simetría de norma deformada de la acción definida con este lagrangiano es

$$
\delta_{\lambda} A_{\mu} = \partial_{\mu} \lambda + \lambda \xi^{\nu} \hat{F}_{\nu\mu}. \quad (4.30)
$$

Identificamos a (4.29) como la deformación no–conmutativa a primer orden en ϑ del modelo no polinomial reportado en [24], escrita en términos de los campos de la teoría conmutativa en el sentido contenido en el mapeo de SW.

La acción definida con el lagrangiano (4.29) es invariante bajo las transformaciones de norma (4.30) siempre que ξ esté en el grupo pequeño que deja invariante θ. Veamos esto con detalle. El primer término de (4.29) es invariante por construc-

[9] El hecho de que tomemos las mismas modificaciones a la simetría de norma $\delta_{\lambda}^{(1)}$, $\delta_{\lambda}^{(2)}$, $\delta_{\lambda}^{(3)}$, etc. del caso conmutativo nos pemite resolver las condiciones o ecuaciones de consistencia con las mismas modificaciones a la acción $S_B^{(3)}$, $S_B^{(4)}$, $S_B^{(5)}$, etc.

ción, y la transformación de norma de la corrección no–conmutativa de la acción a orden ϑ es tal que

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda\Big[(1+\xi^\rho A_\rho)\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma\Big] &= \delta_\lambda(1+\xi^\rho A_\rho)\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma + (1+\xi^\rho A_\rho)(\delta_\lambda\theta^{\mu\sigma})\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma \\
&+ (1+\xi^\rho A_\rho)\theta^{\mu\sigma}(\delta_\lambda\hat{F}_{\mu\nu})\hat{T}^\nu_\sigma + (1+\xi^\rho A_\rho)\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}(\delta_\lambda\hat{T}^\nu_\sigma) \\
&= (\xi^\rho\partial_\rho\lambda)\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma + 0 \\
&+ \lambda\theta^{\mu\sigma}\mathcal{L}_\xi(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma) \\
&= \mathcal{L}_\xi(\lambda)\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma + \lambda\theta^{\mu\sigma}\mathcal{L}_\xi(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma) \\
&= \theta^{\mu\sigma}\mathcal{L}_\xi(\lambda\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma) \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\delta_\lambda\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{1+\xi^\sigma A_\sigma}\mathcal{L}_\xi\hat{F}_{\mu\nu}$ (para ξ uno cualquiera de los vectores de Killing de la métrica de fondo), y que $\delta_\lambda\theta^{\mu\sigma} = 0$ y $\delta_\lambda\xi = 0$, pues δ_λ es una transformación de norma.

Luego, si asumimos que $\lambda\mathcal{L}_\xi\theta^{\mu\sigma} = 0$, que es lo mismo que $\mathcal{L}_\xi\theta^{\mu\sigma} = 0$ en este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda\Big[(1+\xi^\rho A_\rho)\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma\Big] &= \lambda\mathcal{L}_\xi(\theta^{\mu\sigma}) + \theta^{\mu\sigma}\mathcal{L}_\xi(\lambda\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma) \\
&= \lambda\mathcal{L}_\xi(\theta^{\mu\sigma})\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma + \theta^{\mu\sigma}\mathcal{L}_\xi(\lambda\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma) \\
&= \mathcal{L}_\xi(\lambda\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^\nu_\sigma). \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

En la extensión no–abeliana de la siguiente sección veremos que la condición análoga a esta se puede interpretar de otra manera. Ahí tendremos más parámetros de norma, y para que la acción sea invariante necesitaremos que $\omega^B\mathcal{L}_{\xi_B}\theta^{\mu\sigma} = 0$ (para un conjunto de índices internos B), que puede tomarse igualmente como una condición sobre los vectores de Killing globales ξ. Sin embargo, otra interpretación de esta condición es que podemos hacer locales menos simetrías del fondo de las que podemos lograr en el caso conmutativo. Esta es la interpretación que al final tomaremos.

De la ecuación (4.32) tendremos al final que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi}(\lambda\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^{\nu}_{\sigma}) &= \xi^{\rho}\partial_{\rho}\left[\lambda\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^{\nu}_{\sigma}\right] \\ &= \partial_{\rho}\left[\xi^{\rho}\lambda\theta^{\mu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{T}^{\nu}_{\sigma}\right],\end{aligned}$$

usando que $\partial_{\rho}\xi^{\rho} = 0$. La condiciones sobre ξ y $\delta\theta$ que aquí usamos son las mismas que los autores de [14] encontraron para la invariancia de la acción de Yang-Mills no–conmutativa (4.21) ante transformaciones del espacio–tiempo. Ahí los autores usan la interpretación de θ como los elementos de una matriz constante.

Es interesante notar que la acción no–conmutativa (4.29) tiene la misma forma que antes de la deformación no polinomial en κ, pero en términos de $\hat{F}$ y con el factor $(1 + \xi^{\rho}A_{\rho})$ enfrente. Esta característica nos permitirá reescribir nuevamente (4.29) en términos de una métrica "emergente".

Otra observación es que a pesar de haber logrado incorporar difeomorfismos como simetría básica (o como parte de la simetría básica) en una teoría no–conmutativa a primer orden en ϑ, aún necesitamos extender este modelo de juguete al caso no–abeliano para poder relacionarlo con un modelo de gravedad no–conmutativa (y otra vez una razón evidente es que (4.29) no tiene los grados de libertad suficientes).

4.3.2. Extensión no–abeliana

El siguiente paso de nuestra construcción consiste en incorporar la no–conmutatividad de la misma manera que en la sección anterior pero en el modelo no polinomial extendido al caso no–abeliano. Tomamos como teoría inicial la acción de YMNC en el espacio–tiempo plano con producto-$\star$ de Moyal definida por

$$L = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F^{A}_{\mu\nu} \star F_{\rho\sigma A},$$

donde

$$F^{A}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{A}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{A}_{\mu} - [A_{\mu}, A_{\nu}]^{A}_{\star}.$$

Del mapeo de SW hasta el término de primer orden en ϑ tenemos para el tensor de intensidad de campo

$$F^{C}_{\mu\nu} \to F^{C}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}d_{AB}{}^{C}\left(F^{A}_{\mu\alpha}F^{B}_{\nu\beta} - A^{A}_{\alpha}\partial_{\beta}F^{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}f_{DE}{}^{B}A^{A}_{\alpha}A^{E}_{\beta}F^{D}_{\mu\nu}\right),$$

y mientras tanto la simetría de norma regresa a la de Yang-Mills usual; el lagrangiano se escribe

$$L = -\frac{1}{4}\left(F^{A}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{A} + \theta^{\alpha\beta}d_{BC}{}^{A}F^{\mu\nu}_{A}(\frac{1}{4}F^{B}_{\beta\alpha}F^{C}_{\mu\nu} + F^{B}_{\mu\alpha}F^{C}_{\nu\beta})\right). \tag{4.33}$$

Estamos asumiendo la noción usual de traza sobre los índices de grupo en la teoría no–conmutativa, y que existen los coeficientes $d_{AB}{}^{C}$ tales que

$$\{T_A, T_B\} = d_{AB}{}^{C}T_C \tag{4.34}$$

para $\{\cdot,\cdot\}$ el anticonmutador. Como en la sección 4.2.2, definimos esta teoría con los generadores ξ_A del álgebra de Lie del grupo de Poincaré global tomándolo como el grupo interno. Aquí hace falta una aclaración. La identificación de los generadores del grupo de norma con los generadores del grupo de Poincaré nos permite calcular las constantes $d_{AB}{}^{C}$ de las relaciones (4.34) simplemente sustituyendo estos generadores en las mismas. De no suponer estas relaciones para la teoría de norma no–abeliana no–conmutativa, tendríamos que considerar los campos no–conmuativos originales primero en el álgebra envolvente del álgebra de Lie del grupo de Poincaré[10]. Luego el mapeo de SW nos regresa los campos conmutativos, pero las trazas en (4.33) quedarían implícitas dado que no tendríamos una fórmula explícita para ${d_{AB}}^C$.

La simetría de norma del lagrangiano (4.33) es

$$\delta_\omega A^A_\mu = D_\mu \omega^A,$$

con la derivada covariante definida en (4.11), y además la misma teoría es invariante ante las simetrías globales dadas por

$$\delta_B A^A_\mu = \xi^\nu_B F^A_{\mu\nu},$$

con $B = 1, \ldots, N$, y N el número de generadores que estemos tomando. La deformación no polinomial en κ del lagrangiano (4.33), análoga a la de la sección 4.2.2, da como resultado la teoría deformada

$$L = -\frac{1}{4}(1 + \xi^\rho_A A^A_\rho)\left(\mathrm{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}) + \theta^{\alpha\beta} {d_{BC}}^A \hat{F}^{\mu\nu}_A (\frac{1}{4}\hat{F}^B_{\beta\alpha}\hat{F}^C_{\mu\nu} + \hat{F}^B_{\mu\alpha}\hat{F}^C_{\nu\beta})\right), \qquad (4.35)$$

con $\hat{F}_{\mu\nu} = E^\rho_\mu E^\sigma_\nu F_{\rho\sigma}$, y E^ρ_μ las expresiones dadas en (4.15). La extensión no–abeliana de la transformación de norma deformada (4.30) es

$$\delta_\omega A^A_\mu = D_\mu \omega^A + \omega^B \xi^\nu_B \hat{F}^A_{\nu\mu}, \qquad (4.36)$$

[10]Algo similar se hace en la construcción de la gravedad no–conmutativa de la referencia [27].

y esta puede reescribirse como

$$\delta A^A_\mu = D_\mu \omega^A + \varepsilon^\nu \partial_\nu A^A_\mu + A^A_\nu \partial_\mu \varepsilon^\nu = D_\mu \omega^A + \mathcal{L}_\varepsilon A^A_\mu,$$

donde $\varepsilon^\mu = \omega^A \xi^\mu_A$.

Ahora, la acción definida con el lagrangiano (4.35) será invariante bajo la transformación de norma deformada (4.36) sólo si además imponemos la condición $\omega^A \mathcal{L}_{\xi_A} \theta^{\mu\nu} = 0$. Para ξ^μ_A en el grupo de Poincaré esta condición implica la ecuación

$$\omega^{A'} (\Lambda^\mu_{A'\rho} \theta^{\rho\nu} + \Lambda^\nu_{A'\rho} \theta^{\mu\rho}) = 0, \tag{4.37}$$

para A' los índices que corresponden a los generadores de transformaciones de Lorentz. Esta ecuación puede interpretarse de dos maneras: Una es que apagamos todas las transformaciones de Lorentz *locales* con $\omega^{A'} \Lambda_{A'} = 0$; estas simetrías globales quedarían prendidas, así como las traslaciones locales. La otra manera es similar a la condición impuesta en el caso de la generalización no–conmutativa del modelo no polinomial abeliano, e implica restringir las simetrías globales al subgrupo de las que dejan invariante al tensor $\theta^{\mu\nu}$. Las constantes de estructura f y los coeficientes d del grupo no son cero, pues éstas están asociadas con el grupo de Poincaré global, que en la primera interpretación está todo prendido. Es conveniente hacer énfasis en este punto, pues será central en la construcción que haremos a continuación.

El contenido de la condición (4.37) implica hacer locales menos simetrías de las que la deformación no polinomial es capaz de lograr en el caso conmutativo. Esto no representa una obstrucción para construir el modelo de gravedad no–conmutativa que estamos intentando, pues la simetría a partir de la cual queremos construir la gravedad es la que se obtiene de hacer locales sólo las traslaciones, y mientras la invariancia de Lorentz global sigue viva. Esta manera de hacer locales simetrías globales mediante la deformación no polinomial para nos permite construir un modelo de gravedad no–conmutativa libre de las obstrucciones encontradas en otros intentos.

4.3.3. Gravedad teleparalela no–conmutativa

Asumamos que la condición (4.37) implica apagar todas las transformaciones de Lorentz locales. La regla de transformación para las tétradas (4.14) se escribe entonces

$$\delta_\omega e^\nu{}_\mu = \varepsilon^\rho \partial_\rho e^\nu{}_\mu + e^\nu{}_\rho \partial_\mu \varepsilon^\rho,$$

de manera que sólo transforman por el contenido de su índice bajo del espacio–tiempo, y los marcos de referencia definidos con ellas son rígidos y paralelos entre sí. Esta noción de paralelismo absoluto está también presente en las teorías de gravedad teleparalela que se obtienen haciendo locales las traslaciones en el espacio–tiempo de Weitzenböck [99]. La condición (4.37) para tener la invariancia de norma del lagrangiano no–conmutativo (4.35) nos permite por lo tanto construir un modelo de gravedad teleparalela no–conmutativa.

Dado que hacemos locales sólo las traslaciones, construimos la gravedad a partir del lagrangiano (4.35) de la misma manera como lo hicimos en la sección 4.2.3 (ecuación (4.19)). Esto es, identificamos los coeficientes de rotación de Ricci Ω con $\hat{F}$ a través de

$$\Omega_{\sigma\kappa}{}^\rho = \hat{\mathcal{F}}_{\sigma\kappa}{}^\rho = E_\sigma{}^\mu E_\kappa{}^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\rho,$$

donde

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\rho = \xi^\rho_A F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}^\rho{}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^\rho{}_\mu = \partial_\mu e^\rho{}_\nu - \partial_\nu e^\rho{}_\mu.$$

Esta identificación es la clave principal para llegar al resultado de este capítulo. Sustituímos esta expresión en el lagrangiano no–conmutativo (4.35) para identificar la corrección no–conmutativa a orden ϑ del primero de los invariantes de Weitzenböck I_1,y luego calculamos las correcciones para el resto de los invariantes I_2 e I_3. Así, al final tendremos una versión no–conmutativa del lagrangiano de Pellegrini-Plebański

$$L_{GNC} = L_{PP} + L_{NC},$$

que es el resultado central de este capítulo. L_{PP} es el lagrangiano de Pellegrini-Plebański usual (que con los coeficientes apropiados recuperamos el lagrangiano de Einstein-Hibert (4.20)), y L_{NC} es su corrección no–conmutativa.

En términos de Ω el lagrangiano (4.35) se escribe

$$L_1 \equiv e\left(\Omega_{\mu\nu}{}^{\rho}\Omega^{\mu\nu}{}_{\rho} + \theta^{\alpha\beta}d_{\rho\sigma\delta}\Omega^{\mu\nu\rho}(\frac{1}{4}\Omega_{\beta\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\mu\nu}{}^{\delta} + \Omega_{\mu\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\nu\beta}{}^{\delta})\right), \tag{4.38}$$

para algunos coeficientes $d_{\rho\sigma\delta}$ totalmente simétricos elegidos tal que $d_{\rho\sigma\delta} = 1$ cuando los índices son iguales, y $d_{\rho\sigma\delta} = 0$ cuando dos son diferentes. (En otras palabras, la teoría no polinomial que hemos obtenido está constituída básicamente por cuatro copias de la deformación no polinomial de la teoría de Maxwell no–conmutativa.) Se ha hecho además la identificación de $\det(e^{\nu}{}_{\mu})$ con el factor que está en frente del lagrangiano no–conmutativo (4.38). Para identificar las versiones no–conmutativas de los invariantes I_i leemos de (4.38) los reemplazos en términos de Ω que deben hacerse. Estos son

$$\Omega_{\mu\nu}{}^{\rho} \to \Omega_{\mu\nu}{}^{\rho} + (\Omega_{NC})_{\mu\nu}{}^{\rho},$$

con

$$\boxed{(\Omega_{NC})_{\mu\nu}{}^{\rho} = \theta^{\alpha\beta} d_{\sigma\delta}{}^{\rho} (\frac{1}{4}\Omega_{\beta\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\mu\nu}{}^{\delta} + \Omega_{\mu\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\nu\beta}{}^{\delta})}. \tag{4.39}$$

Usando este diccionario puede escribirse el resto de los invariantes cuadráticos no–conmutativos relacionados con gravedad. Uno es

$$L_2 \equiv e \left(\Omega_{\mu\nu\rho}\Omega^{\rho\mu\nu} + \Omega^{\rho\mu\nu}(\Omega_{NC})_{\mu\nu\rho} + \Omega^{\mu\nu\rho}(\Omega_{NC})_{\rho\mu\nu}\right),$$

y el otro resulta de tomar en cuenta la traza de Ω_{NC}

$$(\Omega_{NC})_{\mu} \equiv (\Omega_{NC})_{\mu\nu}{}^{\nu} = \theta^{\alpha\beta} d_{\sigma\delta}{}^{\nu} (\frac{1}{4}\Omega_{\beta\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\mu\nu}{}^{\delta} + \Omega_{\mu\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\nu\beta}{}^{\delta}).$$

Así, el último invariantes es

$$L_3 \equiv e \left(\Omega_{\mu}\Omega^{\mu} + 2\Omega^{\mu}(\Omega_{NC})_{\mu}\right).$$

El lagrangiano de la gravedad no–conmutativa (a primer orden en ϑ) es

$$\begin{aligned} L_{GNC} &= L_{EH} \\ &\quad + 2e\Big(\Omega^{\rho\mu\nu}(\Omega_{NC})_{\rho\mu\nu} + \Omega^{\rho\mu\nu}(\Omega_{NC})_{\mu\nu\rho} + \Omega^{\mu\nu\rho}(\Omega_{NC})_{\rho\mu\nu} - 4\Omega^{\mu}(\Omega_{NC})_{\mu}\Big) \end{aligned}$$

con L_{EH} el lagrangiano de Einstein-Hilbert (4.20).

Esto concluye el tema que quisimos tratar en este capítulo. No hacemos aquí análisis fenomenológicos ni aplicaciones para encontrar deformaciones de soluciones concretas de la gravedad usual, así como la inclusión de otros grados de libertad (como materia). El objeto del análisis llevado a cabo consistía en presentar un modelo de gravedad no–conmutativa obtenido a partir de una aproximación diferente a las que se pueden encontrar en la literatura, que en particular es capaz de evitar el obstáculo relacionado con la invariancia o no de los parámetros no–conmutativos $\theta^{\mu\nu}$ cuando se implementa un difeomorfismo del espacio–tiempo.

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado algunas consecuencias provenientes de la introducción de no–conmutatividad del espacio–tiempo en teorías de partículas y campos, expresada por las relaciones

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

entre las coordenadas. Si bien la manera de implementar esta no–conmutatividad en estos dos contextos es diferente, ambas pueden verse como deformaciones de estructuras básicas estandarizadas de la formulación usual de esas teorías .

En el caso de la mecánica clásica (en la primera parte de la tesis), el ambiente natural para llevar a cabo la deformación no–conmutativa es el del formalismo de primer orden de la dinámica. La estructura deformada es el paréntesis de Poisson definido por una estructura simpléctica no estándar, y con este paréntesis y un hamiltoniano estándar $H = T + V$ se define lo que se ha llamado en la literatura un sistema mecánico no–conmutativo (ver sección 1.1). Las ecuaciones de movimiento de primer orden que describen la dinámica en presencia de no–

conmutatividad son

$$\dot{x}^i + \theta^{ij}\dot{p}_j - p_i = 0,$$
$$-\dot{p}_i - \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0.$$

La deformación se diseña de tal manera que la cuantización canónica del paréntesis de Poisson en cuestión produce relaciones de conmutación diferentes de cero entre los operadores hermitianos asociados a las coordenadas del espacio configuración de un sistema físico dado. En el caso canónico el esquema se arma para que el conmutador de dichos operadores devuelva una matriz constante.

Nosotros hemos abordado las implicaciones de este tipo de no–conmutatividad de una manera diferente. Estudiamos las consecuencias de la no–conmutatividad simpléctica en el espacio configuración, donde definimos la dinámica de un sistema de partículas con las ecuaciones de movimiento de segundo orden para unas fuerzas dadas

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}).$$

La justificación es que de esta manera primero le asignamos a un sistema físico la identidad que tiene ordinariamente mediante el concepto de fuerza, y luego lo exponemos a la no–conmutatividad de las coordenadas definiendo el paréntesis de Poisson de la formulación de primer orden[11]. De alguna manera esta postura es que más que buscar rastros de la no–conmutatividad en el ámbito de la mecánica clásica, como estaría manifestado en las ecuaciones de Newton deformadas

$$\ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} + \theta^{ij}\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x^j}$$

[11]De ahí que, por ejemplo, no hablamos del oscilador armónico no–conmutativo, sino del “oscilador armónico en el espacio no–conmutativo”.

(que vienen de las ecuaciones de primer orden no–conmutativas), hay que poner a prueba qué sistemas físicos (identificados mediante $\vec{F}$) serían suceptibles de explorar la no–conmutatividad del espacio consistentemente.

Como resultado, y siguiendo el espíritu del análisis de los autores de [81], la fuerzas y la estructura simpléctica que define el paréntesis de Poisson no–conmutativo deben ser consistentes cumpliendo las condiciones de compatibilidad expresadas en las ecuaciones (1.34). En el caso conmutativo, es decir, el caso del paréntesis de Poisson que corresponde a relaciones de conmutación estándar entre los operadores cuánticos hermitianos asociados a las coordenadas de la posición, las condiciones de compatibilidad dinámica implican que sólo pueden cuantizarse consistentemente con estas relaciones sistemas físicos clásicos que tienen lagrangiano de segundo orden. En contraste, una primera visualización de nuestro resultado es que sistemas que no tienen lagrangiano pueden cuantizarse consistentemente pero usando relaciones no–conmutativas entre las coordenadas.

Desde esta perspectiva, habría dinámica clásica de segundo orden asociada a sistemas de partículas que, cuantizada con relaciones no–conmutativas entre las coordenadas, es sensible a esta característica del espacio. Si es posible, es decir, si un sistema físico particular lo admite porque cumple con las condiciones subsidiarias $L^{\theta}_{ijk} = M^{\theta}_{ij} = N^{\theta}_{ij} = 0$ (ver (1.35)), podemos comparar las cuantizaciones conmutativa y no–conmutativa del mismo (ver por ejemplo el espectro modificado (1.44) del oscilador armónico de la sección 1.3.3) y sacar conclusiones sobre los comportamientos del mismo sistema a diferentes escalas[12].

En un segundo paso hemos visto que existe un sistema de ecuaciones diferenciales dado por (2.5) para el que las condiciones de compatibilidad no–conmutativas (asociadas de hecho a una colección amplia de posibles estrucuras simplécticas

[12]Bajo la idea de que θ es un parámetro físico relevante a escalas muy pequeñas de longitud.

no estándar) son condiciones para la existencia del lagrangiano de dicho sistema (ver sección 2.1). Sorpresivamente, éste es un sistema de tercer orden y no más. El principio variacional del que proviene este sistema de ecuaciones de tercer orden está condicionado a considerar como órbitas físicas sólo las del sistema de segundo orden original. No sabemos qué clase de información sobre el sistema físico pueden tener el resto de las soluciones a las ecuaciones de tercer orden, pero es un tema que valdría la pena explorar. La conclusión más notable por lo tanto es que, sea en el caso conmutativo o no–conmutativo, los sistemas físicos que se pueden cuantizar consistentemente serían los que tienen formulación variacional, al nivel de las ecuaciones de movimiento de segundo orden en el caso conmutativo (y el de la escala de energía característica de la dinámica cuántica usual), o, en el no–conmutativo (y así en una escala de energía mayor), de las ecuaciones de tercer orden construídas con ellas que tienen como soluciones las del sistema de ecuaciones de movimiento consistentes con la estructura simpléctica no–conmutativa.

Vimos que existe una manera de cuantizar los sistemas dinámicos definidos en el espacio no–conmutativo usando la formulación variacional mencionada en un contexto recientemente propuesto sobre la cuantización de sistemas no–lagrangianos. Una de las características interesantes que tendría este método es que nos permitiría calcular funciones de onda que dependan sólo de las coordenadas, lo que la cuantización canónica de estos sistemas desde el formalismo de primer orden está obstruído.

Aunque en el análisis que llevamos a cabo en esta primera parte de la tesis tomamos sistemas no singulares, lo más natural para hacer la extensión del argumento que incluya sistemas con constricciones es considerar la condición de compatibilidad dinámica con respecto al paréntesis de Dirac. En este contexto, las fuerzas no determinan completamente las aceleraciones, y en este sentido posiblemente sea necesario incorporar las condiciones apropiadas para definir correctamente la proyección de la derivada respecto al tiempo en la dirección tangente a las órbitas solución de las ecuaciones de movimiento, así como hacer congruente la compatibilidad dinámica en cuestión con las posibles transformaciones de norma que se tienen si las constricciones presentes son de primera clase.

En la segunda parte de esta tesis estudiamos dos temas en el contexto de teorías de campo no–conmutativas (TCNC) que han sido muy debatidos en la literatura reciente. Como vimos en el capítulo 3, la deformación no–conmutativa en teorías de campo se realiza básicamente mediante el reemplazo de todos los productos entre campos por el producto-$\star$ no conmutativo de Moyal. Este producto es una deformación en un parámetro del producto ordinario entre funciones tal que la modificación a primer orden en este parámetro se hace con un paréntesis de Poisson como el que estudiamos en la parte I, definido con una estructura simpléctica no–conmutativa constante. Esta deformación del producto es un ejemplo de un tipo de deformación de un álgebra en un parámetro conocida como cuantización de Weyl-Wigner-Moyal, método que es formalizado y generalizado en [19] al caso de deformaciones con estructuras de Poisson más generales. En esta aproximación toda la no–conmutatividad que proviene de la estructura geométrica del espacio–tiempo es absorbida por una estructura del álgebra de funciones a la que pertenecen los campos, específicamente en el producto con el que se multiplican éstos.

Los dos temas que estudiamos en este contexto fueron el de la implementación de simetrías del espacio–tiempo en una TCNC, y el de la formulación de un modelo no–conmutativo de gravedad basado en el método de deformaciones consistentes de teorías de norma. En el primero propusimos una implementación de simetrías del espacio–tiempo que nos permite aplicar la noción usual o estándar de covariancia de Lorentz en TCNC. Esto lo logramos permitiendo que los parámetros $\theta^{\mu\nu}$ transformen como las componentes de un tensor bajo transformaciones lineales de las coordenadas. Este tipo de transformaciones cambian los parámetros no–conmutativos pero los dejan constantes, y así no sólo se mantiene la noción del producto-$\star$ de Moyal (definido para $\theta^{\mu\nu}$ constante), sino que él mismo es invariante. Recientemente ha sido propuesto un modelo de TCNC construídas con el producto-$\star$ de Moyal pero incorporando un corte que impida que la no–localidad del mismo sea de largo alcance [91]. Aunque la introducción de este corte restringe la definición misma del producto-$\star$ de Moyal, es interesante preguntarse como se vería afectada la implementación de simetrías que construímos aquí basados justamente en la invariancia de este producto . Por ejemplo, sería interesante preguntarse si el corte o “amortiguamiento” que los autores proponen puede imponerse en la modificación de la derivada variacional asociada a la transformación del lagrangiano debida al cambio en θ, y si dicha modificación tiene alguna penetración en la región donde el producto-$\star$ regresaría al ordinario conmutativo.

La implementación de simetrías

$$W_\xi \equiv \delta_\xi \phi_a(y) \frac{\delta}{\delta \phi_a(y)} + \frac{1}{2} \delta \theta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha\beta}}$$

que propusimos (ecuación (3.23)) está inspirada en la forma que tienen las transformaciones twist del espacio–tiempo actuando sobre el producto-$\star$ de dos campos $\phi \star \psi$. Una de las características de estas transformaciones es que no actúan con la regla de Leibniz sobre dicha multiplicación entre campos, y para el caso de transformaciones lineales el término que hace que tal regla no valga tiene la forma de la variación de $\phi \star \psi$ con respecto a un cambio en $\theta^{\mu\nu}$ (esta lectura no se puede aplicar para transformaciones más generales que las lineales). Además de esta inspiración, resulta que ambas simetrías actuando sobre $\phi \star \psi$ coinciden, lo que nos hace pensar que la implementación que definimos puede verse como una reinterpretación de las simetrías twist (para transformaciones lineales de las coordenadas). Una de las ventajas de la implementación propuesta es que puede aplicarse tanto en el espacio de funciones con prodcuto-$\star$ o cualquier expansión en potencias de $\theta^{\mu\nu}$ del modelo definido con este producto. En particular, vimos que la teoría de Yang-Mills no–conmutativa es invariante ante transformaciones de Weyl. Esta invariancia de hecho la aplicamos en el capítulo 4 para realizar la deformación no polinomial de la acción de una teoría de norma no abeliana no–conmutativa a primer orden en $\theta^{\mu\nu}$.

Esta deformación consistente (de lo que ya era una deformación no–conmutativa) nos dio como resultado una teoría de norma no–conmutativa con invariancia ante difeomorfismos, lo cual es un resultado notable y aparentemente paradójico con respecto a la idea de mantener la no–conmutatividad independiente del punto. Para elaborar esta construcción nos basamos en la misma del caso conmutativo realizada en [24]. La deformación consistente estudiada por estos autores es un mecanismo para hacer locales simetrías globales de una teoría de norma. Así, haciendo locales sólo las traslaciones de coordenadas se puede reconstruir la acción de Einstein-Hilbert de la relatividad general. El mecanismo consiste en inspirarse en la acción deformada para construir los tres invariantes de Weitzenböck que combinados con ciertos coeficientes dan la acción de la gravedad escrita en el formalismo de las tétradas

$$L_{EH} = e(\Omega_{\mu\nu\rho}\Omega^{\mu\nu\rho} + 2\Omega_{\mu\nu\rho}\Omega^{\rho\mu\nu} - 4\Omega_{\mu\rho}{}^{\rho}\Omega^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\sigma}).$$

Esta combinación de coeficientes da un caso particular de las teorías teleparalelas de gravedad. Esta acción puede obtenerse también como la teoría libre que resulta de hacer locales sólo las traslaciones en el espacio plano en el sentido de Utiyama

[43, 115].

La generalización no–conmutativa de este modelo la llevamos a cabo partiendo de la acción de una teoría no abeliana no–conmutativa luego del mapeo de SW, a la que le hacemos la misma deformación no polinomial de [24]. Al final lo que resulta es una especie de mapeo de SW para los coeficientes de rotación de Ricci, cuya modificación a primer orden en θ está dada por

$$(\Omega_{NC})_{\mu\nu}{}^{\rho} = \theta^{\alpha\beta} d_{\sigma\delta}{}^{\rho} (\frac{1}{4}\Omega_{\beta\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\mu\nu}{}^{\delta} + \Omega_{\mu\alpha}{}^{\sigma}\Omega_{\nu\beta}{}^{\delta}).$$

Con ésta calculamos las modificaciones a este orden de los invariantes de Weitzenböck, que luego combinamos con los mismos coeficientes que en el caso conmutativo para construir una versión no–conmutativa de la gravedad

$$\begin{aligned} L_{GNC} &= L_{EH} \\ &+ 2e\left(\Omega^{\rho\mu\nu}(\Omega_{NC})_{\rho\mu\nu} + \Omega^{\rho\mu\nu}(\Omega_{NC})_{\mu\nu\rho} + \Omega^{\mu\nu\rho}(\Omega_{NC})_{\rho\mu\nu} - 4\Omega^{\mu}(\Omega_{NC})_{\mu}\right) + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned}$$

Aunque no hacemos mayores comparaciones con aproximaciones previas a un modelo semejante, el que aquí proponemos contiene correcciones a primer orden en $\theta^{\mu\nu}$, mientras que las correcciones del resto de modelos no–conmutativos de gravedad que han sido propuestos en la literatura empiezan con el segundo orden en este parámetro.

Varios autores han visto en la gravedad teleparalela un camino viable para construir la deformación no–conmutativa de la gravedad [36, 98, 112]. Creemos que en este sentido nuestra propuesta puede ser útil para explorar este tipo de correcciones a la gravedad en las escalas pequeñas de longitud.

APÉNDICE A

Condiciones de Helmholtz para ecuaciones de tercer orden

El problema inverso del cálculo de variaciones es un problema muy viejo que data de las últimas décadas del siglo XIX. El objetivo de este problema es determinar si para un conjunto de ecuaciones diferenciales (de movimiento) dadas existe un lagrangiano del cuál provienen. La respuesta al problema inverso depende fuertemente del número de grados de libertad, y de la estructura de las ecuaciones de movimiento en sí. Es posible formular este problema tanto para sistemas de ecuaciones en modelos de partículas en un número finito de grados de libertad, como en modelos de campos como funciones del espacio-tiempo [77]. Del planteamiento general del problema provienen las llamadas condiciones de integrabilidad de Helmholtz para el sistema de ecuaciones en cuestión.

Si un lagrangiano depende de hasta la n'ésima derivada respecto al tiempo de las variables dinámicas $\overset{(n)}{x}$, entonces en general sus ecuaciones de Euler-Lagrange son de orden $2n$. En el caso en que dicha dependencia sea lineal, las ecuaciones de movimiento son de orden $2n-1$ (y si además la dependencia lineal es tal que el coeficiente sólo depende de x, las ecuaciones son de orden $2n-2$). Las condiciones de Helmholtz para un sistema de ecuaciones de orden impar se leen de las condiciones de Helmholtz correspondientes a un sistema de ecuaciones del orden par inmediato superior.

Para los propósitos de esta tesis (específicamente el análisis del problema inverso para las ecuaciones (2.2)) consideraremos las condiciones de Helmholtz del caso no–restringido[1] del problema inverso del cálculo de variaciones para un sistema de ecuaciones de cuarto orden general

$$\mathcal{M}_i([x];t) = G_{ij}\big(\ddddot{x}^j - f^j(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x};t)\big) = 0 \tag{A.1}$$

(donde la notación $[x]$ en este caso significa una dependencia de las coordenadas y de sus derivadas respecto al tiempo hasta de cuarto orden). Estas condiciones se deducen de la condición básica de integrabilidad

$$\frac{\delta\mathcal{M}_i([x];t)}{\delta x^j(s)} = \frac{\delta\mathcal{M}_j([x];s)}{\delta x^i(t)} \tag{A.2}$$

($\frac{\delta}{\delta x^i(t)}$ es una variación funcional).

Si la condición (A.2) es satisfecha por una G_{ij} y una $f^j(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x};t)$, existe un lagrangiano $L(x,\dot{x},\ddot{x};t)$ que depende de las coordenadas, velocidades, y acelera-

[1] El problema inverso del cálculo de variaciones tiene dos casos: El caso restringido, y el no–restringido. El primero se pregunta por un lagrangiano para exactamente un conjunto dado de ecuaciones de movimiento; el segundo pregunta por un lagrangiano para alguna combinación de las ecuaciones de movimiento en cuestión (construída con la matriz G_{ij} en las ecuaciones (A.1)).

ciones generalizadas tal que sus ecuaciones de Euler-Lagrange son las ecuaciones (A.1). La condición (A.2) en componentes da lugar a las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \ddddot{x}^k} = \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \ddddot{x}^i}, \tag{A.3a}$$
$$\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \dddot{x}^k} + \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \dddot{x}^i} = 2\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \ddddot{x}^k} + \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \ddddot{x}^i}\right), \tag{A.3b}$$
$$\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \ddot{x}^k} - \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \ddot{x}^i} = \frac{3}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \dddot{x}^k} - \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \dddot{x}^i}\right), \tag{A.3c}$$
$$\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \dot{x}^k} + \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \ddot{x}^k} + \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \ddot{x}^i}\right) - \frac{\mathcal{D}^3}{\mathcal{D}t^3}\left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \ddddot{x}^k} + \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \ddddot{x}^i}\right), \tag{A.3d}$$
$$\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{1}{4}\frac{\mathcal{D}^3}{\mathcal{D}t^3}\left(\frac{\partial \mathcal{M}_i}{\partial \dddot{x}^k} - \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial \dddot{x}^i}\right). \tag{A.3e}$$

Aquí la derivada

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \equiv f^j \frac{\partial}{\partial \ddddot{x}^j} + \dddot{x}^j \frac{\partial}{\partial \ddot{x}^j} + \ddot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} + \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{A.4}$$

está definida por el campo vectorial tangente a las órbitas solución del sistema (A.1).

Aplicando (A.3a-A.3c) al caso del sistema de ecuaciones diferenciales de tercer orden (2.2) del capítulo 2 resultan las condiciones entre la fuerza F^i y las matrices K y M dadas por

$$K_{ik} + K_{ki} = 0, \tag{A.5a}$$
$$\begin{aligned} 3\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}K_{ik} = {} & K_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \ddot{x}^i} - K_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \ddot{x}^k} + (M_{ik} - M_{ki}) \\ & + \Big(\frac{\partial K_{ij}}{\partial \ddot{x}^k} - \frac{\partial K_{kj}}{\partial \ddot{x}^i}\Big)\frac{d}{dt}(\dddot{x}^j - F^j) + \Big(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \ddot{x}^k} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \ddot{x}^i}\Big)(\dddot{x}^j - F^j), \end{aligned} \tag{A.5b}$$

y aplicando (A.3d,A.3e) resultan las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\Big[-K_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \ddot{x}^i} - K_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \ddot{x}^k} + (M_{ik} + M_{ki}) \\
&\qquad + \big(\frac{\partial K_{ij}}{\partial \ddot{x}^k} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \ddot{x}^i}\big)\frac{d}{dt}(\ddot{x}^j - F^j) + \big(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \ddot{x}^k} + \frac{\partial M_{kj}}{\partial \ddot{x}^i}\big)(\ddot{x}^j - F^j)\Big] \\
&\qquad = \big(\frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{x}^k} + \frac{\partial K_{kj}}{\partial \dot{x}^i}\big)\frac{d}{dt}(\ddot{x}^j - F^j) + \big(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \dot{x}^k} + \frac{\partial M_{kj}}{\partial \dot{x}^i}\big)(\ddot{x}^j - F^j) \\
&\qquad - K_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^i} - K_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^k} - M_{kj}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i} - M_{ij}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^k}, \qquad \text{(A.6a)} \\
&\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\Big[K_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^i} - K_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial \dot{x}^k} + M_{kj}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i} - M_{ij}\frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{D}t^2}K_{ik} \\
&\qquad + \big(\frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial K_{kj}}{\partial \dot{x}^i}\big)\frac{d}{dt}(\ddot{x}^j - F^j) + \big(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \dot{x}^i}\big)(\ddot{x}^j - F^j)\Big] \\
&\qquad = \big(\frac{\partial K_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial K_{kj}}{\partial x^i}\big)\frac{d}{dt}(\ddot{x}^j - F^j) + \big(\frac{\partial M_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial x^i}\big)(\ddot{x}^j - F^j) \\
&\qquad + K_{kj}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial x^i} - K_{ij}\frac{\partial \dot{F}^j}{\partial x^k} + M_{kj}\frac{\partial F^j}{\partial x^i} - M_{ij}\frac{\partial F^j}{\partial x^k}. \qquad \text{(A.6b)}
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones son las que comparamos con las que resultan de la condición de compatibilidad dinámica en el caso no–conmutativo en la versión simpléctica (que da como resultado las ecuaciones (1.42)).

APÉNDICE B

Algebra envolvente, estructura de Hopf, y deformación twist

Con el ejemplo de construcción de teorías de norma no–abelianas no–conmutativas presentamos como surge la necesidad de introducir en este contexto al álgebra envolvente de un álgebra de Lie para definir en ella los campos no–conmutativos. Este ejemplo tiene el contenido básico detrás del concepto de álgebra envolvente.

Luego presentamos la definición básica de un álgebra de Hopf, y la manera de deformar su estructura mediante la introducción de un twist en el coproducto [60], que es uno de los elementos constructivos.

B.1. Álgebra envolvente de un álgebra de Lie

Dado un grupo (de Lie) de norma $\mathcal{G}$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con generadores T_a (a el índice interno del grupo) que satisfacen las relaciones

$$[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a = i f_{ab}{}^c T_c,$$

con $f_{ab}{}^c$ las constantes de estrucura de $\mathcal{G}$, una teoría de norma no–abeliana no–conmutativa para el campo $\hat{A}_\mu(x)$ se define con la acción

$$S = -\frac{1}{4}\int \mathfrak{tr}[\hat{F} \star \hat{F}],$$

donde $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star$ es el tensor de intensidad de campo no–conmutativo, y la simetría de norma-$\star$ (deformada) con parámetro de norma $\hat{\lambda}(x)$

$$\delta^\star_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu \equiv \partial_\mu \hat{\lambda} + i[\hat{A}_\mu, \hat{\lambda}]_\star.$$

Los términos $[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star$ en $\hat{F}^{\mu\nu}$, y $[\hat{A}_\mu, \hat{\lambda}]_\star$ en las transformaciones infinitesimales de norma-$\star$, así como el conmutador $[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2]$ que caracteriza la estructura de norma del modelo, no son expresiones en $\mathfrak{g}$ como en el caso conmutativo. Esto debido a que, por ejemplo, para el álgebra de transformaciones de norma-$\star$ se tiene que

$$[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2]_\star = \hat{\lambda}_1 \star \hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_2 \star \hat{\lambda}_1 \tag{B.1a}$$

$$= (\hat{\lambda}_1^a T_a) \star (\hat{\lambda}_2^b T_b) - (\hat{\lambda}_2^b T_b) \star (\hat{\lambda}_1^a T_a) \tag{B.1b}$$

$$= \frac{1}{2}\{\hat{\lambda}_1^a, \hat{\lambda}_2^b\}_\star [T_a, T_b] + \frac{1}{2}[\hat{\lambda}_1^a, \hat{\lambda}_2^b]_\star \{T_a, T_b\}, \tag{B.1c}$$

donde $\{T_a, T_b\} \equiv T_a T_b + T_b T_a$ es el anticonmutador entre los generadores del grupo de norma. En un álgebra de Lie el conmutador entre generadores cierra en la misma álgebra mediante las constantes de estructura del grupo, pero el anticonmutador en general no lo hará. Un caso donde el anticonmutador entre los generadores del grupo cierra dentro del mismo es el grupo de norma $\mathcal{U}(n)$.

Cuando el anticonmutador de generadores no cierra en el grupo de norma, desarrollos ulteriores de expresiones provenientes de la utilización recursiva del conmutador de transformaciones de norma requerirá considerar en general objetos con componentes en una base de polinomios homogéneos en los generadores T_a. Debido a esto, en general ni el campo ni los parámetros de norma estarán en el álgebra de Lie del grupo interno, sino que tendrán componentes en cada uno de los elementos de esta base

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu^a T_a + \hat{A}_\mu^{a_1 a_2} T_{(a_1} T_{a_2)} + \cdots + \hat{A}_\mu^{a_1 \ldots a_n} T_{(a_1} \ldots T_{a_n)} \ldots ,$$

con $T_{(a_1} \ldots T_{a_n)}$ el producto simetrizado de n generadores. El álgebra generada por los polinomios en T_a se llama el álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$.

Dada la necesidad de introducir el álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$, pareciera que la teoría de norma en cuestión requerirá de una infinidad de parámetros de norma, y de componentes del campo $\hat{A}_\mu$. Esta situación es sólo aparente, y se resuelve con el mapeo de Seiberg-Witten [107]. Con este mapeo se puede ver que todas las componentes $\hat{A}_\mu^{a_1 \ldots a_n}$ son funciones del campo conmutativo de la teoría de norma conmutativa correspondiente al álgebra de Lie inicial [83].

B.2. Álgebra de Hopf

Para fijar ideas tomamos como punto de partida un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. La presentación que hacemos aquí está basada en la introducción a estos conceptos presentada en las referencias [7, 8].

Un *álgebra* $\mathcal{A}$ sobre el campo $\mathbb{C}$ con unidad ι es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con un mapeo

$$m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

que llamamos multiplicación (y también denotamos con $\cdot$) bilineal y asociativo, es decir, tal que para $u, v, w \in \mathcal{A}$ y $a, b \in \mathbb{C}$

$$(av) \cdot (bw) = ab(v \cdot w),$$
$$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w).$$

Además para la unidad pasa que $\iota \cdot v = v = v \cdot \iota$. Podemos expresar estas propiedades diagramáticamente. Pedir que $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sea bilineal es lo mismo que $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sea lineal, con $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ el espacio vectorial formado por el producto directo de $\mathcal{A}$ consigo mismo. El que m sea asociativo se puede expresar con la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "id \otimes m"'] \arrow[dr, "m \otimes id"] & \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "m"'] & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "m"] \\
 & \mathcal{A} &
\end{tikzcd},$$

con $id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ el mapeo identidad ($id(v) = v$). La propiedad de la unidad es equivalente a la existencia del mapeo $\iota : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\iota \otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "m"] & \mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \arrow[l, "id \otimes \iota"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
 & \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

donde $\backsimeq$ denota el isomorfismo canónico entre $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ (o $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}$) y $\mathcal{A}$. Estamos usando la misma notacion para la unidad $\iota \in \mathcal{A}$ y para el mapeo anterior. La primera se recupera como $\iota(1) = \iota$.

Una *coalgebra* $\mathcal{A}$ sobre el campo $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial con un mapeo lineal $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ llamado coproducto, con $v \mapsto \Delta(v) = v_1 \otimes v_2$, que tiene la propiedad coasociativa

$$(id \otimes \Delta) \otimes \Delta = (\Delta \otimes id) \otimes \Delta,$$

y con un mapeo lineal $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ llamado counidad que satisface la propiedad

$$(id \otimes \epsilon)\Delta(v) = (\epsilon \otimes id)\Delta(v) = v.$$

Estas propiedades pueden expresarse diagramáticamente invirtiendo las flechas de los diagramas anteriores. La coasociatividad de Δ se expresa por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[ur, "id\otimes\Delta"] & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[ul, "\Delta\otimes id"'] \ , \\
& \mathcal{A} \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

mientras que las propiedades de la counidad se representa con la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes \mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "\epsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\epsilon"] & \mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \\
& \mathcal{A} \arrow[ul, "\backsimeq"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\backsimeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, una *bialgebra* $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial con estructura de álgebra y coálgebra que son compatibles, es decir, tales que

1. El coproducto Δ es un homomorfismo entre el álgebra $\mathcal{A}$ y el álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, donde el producto en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ está dado por $(v_1 \otimes v_2) \cdot (w_1 \otimes w_2) = v_1 \cdot w_1 \otimes v_2 \cdot w_2$, tal que

$$\Delta(v \cdot w) = \Delta(v) \cdot \Delta(w), \qquad \Delta(\iota) = \iota \otimes \iota. \tag{B.2}$$

2. La counidad $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras tal que

$$\epsilon(v \cdot w) = \epsilon(v) \cdot \epsilon(w), \qquad \epsilon(\iota) = 1. \tag{B.3}$$

Finalmente, un *álgebra de Hopf* es una biálgebra con un mapeo lineal $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ llamado antípoda tal que

$$m(S \otimes id)\Delta(v) = m(id \otimes S)\Delta(v) = \epsilon(v)\iota. \tag{B.4}$$

Este mapeo es único y antimultiplicativo: $S(v \cdot w) = S(w) \cdot S(v)$[1].

De la definición de biálgebra si sigue que $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y $\iota : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ son homomorfismos entre coálgebras, es decir, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta \circ m = m \otimes m \circ \hat{\Delta}, &\qquad \epsilon \otimes m = \hat{\epsilon}, \\ \text{y} \quad \Delta \circ \iota = \iota \otimes \iota \circ \Delta_{\mathbb{C}}, &\qquad \epsilon \circ \iota = \epsilon_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

donde el coproducto y la counidad en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ están dados por $\hat{\Delta}(v \otimes w) = (v_1 \otimes w_1) \otimes (v_2 \otimes w_2)$, y $\hat{\epsilon} = \epsilon \otimes \epsilon$, mientras $\Delta_{\mathbb{C}}$ es el coproducto en $\mathbb{C}$ que identifica esta álgebra con $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ y la counidad es $\epsilon_{\mathbb{C}} = id$. Al revés, si $\mathcal{A}$ es un álgebra y una

[1]En analogía con grupos, $S(v)$ es el inverso de v.

coálgebra, y m y ι son homomorfismos entre coálgebras entonces se sigue que Δ y ϵ son mapeos entre álgebras.

La definición de álgebra de Hopf es invariante bajo la inversión de las flechas de los diagramas correspondientes a las propiedades (B.2), (B.3), y (B.4), intercambiando las estructuras de álgebra y coálgebra, y con la misma antípoda. En este sentido, en términos de la observación anterior la estructura de álgebra y coálgebra en un álgebra de Hopf son conceptods duales.

B.3. Deformación por un twist

En el contexto de esta tesis el interés por la deformación de un álgebra de Hopf mediante la introducción de un twist tiene que ver con la construcción de espacios no–conmutativos como deformaciones de espacios ordinarios o conmutativos asociados a teorías de campos conocidas. En términos de la equivalencia entre geometría y álgebra que relaciona una variedad (que para el caso representa al espacio–tiempo) con el espacio de funciones contínuas sobre ella, induciendo una deformación no–conmutativa en este espacio de funciones esperamos realizar la deformación no-conmutativa de la variedad.

Este tipo de deformación requiere de los siguientes ingredientes. Tomemos la variedad M que representa al espacio–tiempo, y un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de transformaciones t que actúan sobre funciones contínuas f evaluadas en M ($f \in \mathcal{C}(M)$). Además, denotamos por $U\mathfrak{g}$ al álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$. $U\mathfrak{g}$ es un álgebra con la composición usual entre transformaciones $t_1 \circ t_2 \equiv t_1 t_2$ como producto, y el mapeo identidad como unidad (que denotamos por $\mathbb{1}$[2]).

[2]El mapeo identidad tiene dos papeles: Por un lado es el mapeo que lleva una función en sí misma (denotao por *id*), y es el elemento unidad (denotado por $\mathbb{1}$) que hace al espacio de transformaciones un álgebra.

Además de esto, necesitamos un elemento $\mathcal{F} \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ invertible al que llamamos *twist*, definido con generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. El álgebra $U\mathfrak{g}$ tiene una estructura de Hopf natural, cuyo coproducto $\Delta : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ es una extensión del coproducto definido sobre los elementos de $\mathfrak{g}$. Este es tal que

$$\Delta(t) \equiv t \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes t, \quad \text{con} \quad t \in \mathfrak{g},$$

y se extiende a todos los elementos de $U\mathfrak{g}$ mediante

$$\Delta(t_1 t_2) \equiv \Delta(t_1)\Delta(t_2) = t_1 t_2 \otimes \mathbb{1} + t_1 \otimes t_2 + t_2 \otimes t_1 + \mathbb{1} \otimes t_1 t_2,$$

y en general como $\Delta(t_1 t_2 \ldots t_n) = \Delta(t_1)\Delta(t_2)\ldots\Delta(t_n)$. En relación con el coproducto en $U\mathfrak{g}$, un twist $\mathcal{F}$ debe satisfacer la propiedad

$$(\mathcal{F} \otimes \mathbb{1})(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = (\mathbb{1} \otimes \mathcal{F})(id \otimes \Delta)\mathcal{F}. \tag{B.5}$$

Esta propiedad define al twist.

Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de campos vectoriales en el espacio–tiempo M, o una subálgebra generada por las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, el coproducto Δ dicta cómo transformaciones t actuarán sobre los productos entre funciones: Si m es la multiplicación ordinaria entre funciones $m(f \otimes g) = f \cdot g$, entonces una trasformación t actúa sobre este producto de acuerdo con la regla

$$\begin{aligned} t \triangleright (f \cdot g) = t \triangleright m(f \otimes g) = m(\Delta(t) f \otimes g) \\ = m((t \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes t) \triangleright f \otimes g) = (t \triangleright f)g + g(t \triangleright g). \end{aligned}$$

En este contexto podemos considerar el twist dado por

$$\mathcal{F} \equiv e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}},$$

donde $\theta^{\alpha\beta}$ es una matriz constante antisimétrica. Con este twist (que satisface la condición (B.5) porque el álgebra de derivadas parciales es abeliana) puede hacerse una reinterpretación de la deformación del producto-$\star$ de Moyal entre funciones en $\mathcal{C}(M)$. Denotamos este producto con el mapeo $m_\star$, y lo definimos como

$$f \star g \equiv m_\star(f \otimes g) = m(\mathcal{F}^{-1} f \otimes g),$$

con $\mathcal{F}^{-1} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}}$.

En estos términos las transformaciones $t \in U\mathfrak{g}$ sobre productos-$\star$ entre funciones queda ahora determinada por las identidades

$$\begin{aligned} t \triangleright m_\star(f \otimes g) &= t \triangleright m(\mathcal{F}^{-1} f \otimes g) \\ &= m(\Delta(t)\mathcal{F}^{-1} f \otimes g) = m(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\Delta(t)\mathcal{F}^{-1} f \otimes g) \\ &= m_\star(\Delta_\star(t) f \otimes g), \end{aligned}$$

con $\Delta_\star(t) = \mathcal{F}\Delta(t)\mathcal{F}^{-1}$ el coproducto deformado (por un twist).

Esta es la construcción formal del concepto de transformaciones twist sobre el producto-$\star$ entre campos que exponemos en la sección 3.2 del capítulo 3 desde un punto de vista más intuitivo y aplicado a la física.

APÉNDICE C

Deformaciones consistentes de teorías de norma

La deformación consistente de una teoría de norma puede usarse como un mecanismo sistemático para construir interacciones como expansiones perturbativas en un parámetro [69]. Con esta herramienta pueden calcularse simultáneamente nuevos vértices y su invariancia de norma de manera consistente. En este sentido resulta muy útil para entender y justificar las correcciones no–conmutativas de una teoría de norma presentes en principio en una escala de longitud muy pequeña. El parámetro ϑ de la no–conmutatividad de las coordenadas aparece como constante de acoplamiento de dichas correcciones.

Para simplificar el argumento detrás de la idea básica de este método presentamos en este apéndice el caso de la deformación de una teoría abeliana. La extensión al caso no–abeliano es directa. (Para la argumentación hemos seguido la presentación del tema que se puede encontrar en la referencia [25].)

C.1. Idea básica

Consideremos la parte libre de una teoría de norma dada por la acción $S^{(0)}([\phi^a])$ para los campos $\phi^a(x)$ y sus derivadas. Denotamos con las trasformaciones $\delta_\epsilon^{(0)}\phi^a$ la simetría de norma de la teoría, donde ϵ es el parámetro de norma. La invariancia de norma de la acción se expresa con la ecuación

$$\frac{\delta S^{(0)}}{\delta\phi^a}\delta_\epsilon^{(0)}\phi^a = 0.$$

En términos del lagrangiano $L^{(0)}([\phi], x)$ que define la acción $S^{(0)}$, la condición de invariancia de norma se escribe como $\delta_\epsilon^{(0)} L^{(0)} = \partial_\mu K^\mu$ para alguna $K(\phi, x)$, o

$$\delta_\epsilon^{(0)} L^{(0)} \simeq 0,$$

donde $\simeq$ es una igualdad módulo una divergencia total. Como para cualquier variación del lagrangiano pasa que

$$\delta L^{(0)} \simeq (\delta\phi^a)\mathcal{E}_a L^{(0)}$$

mediante la derivada total $V^\mu = \delta\phi^a \frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}$ ($\mathcal{E}_a L^{(0)} \equiv \frac{\partial L^{(0)}}{\partial\phi^a} - \partial_\mu\big(\frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\big)$ son las ecuaciones de movimiento correspondientes al campo ϕ^a), la condición de invariancia de norma puede escribirse

$$(\delta_\epsilon^{(0)}\phi^a)\mathcal{E}_a L^{(0)} = \partial_\mu J^\mu,$$

con $J^\mu \equiv K^\mu - V^\mu$.

Una *deformación consistente* S de la teoría $S^{(0)}$ en el parámetro g es una modificación en potencias de g de la última

$$S^{(0)} \rightarrow S = S^{(0)} + gS^{(1)} + g^2 S^{(2)} + \dots,$$

tal que es posible modificar la transformación de norma original también como una serie de potencias en el parámetro g

$$\delta_\epsilon^{(0)}\phi^a \rightarrow \delta_\epsilon\phi^a = \delta_\epsilon^{(0)}\phi^a + g\delta_\epsilon^{(1)}\phi^a + g^2\delta_\epsilon^{(2)}\phi^a + \dots,$$

de tal manera que $\delta_\epsilon\phi^a$ es simetría de norma de la teoría $S[\phi^a]$

$$\frac{\delta S}{\delta\phi^a}\delta_\epsilon\phi^a = \\ \frac{\delta\big(S^{(0)} + gS^{(1)} + g^2 S^{(2)} + \dots\big)}{\delta\phi^a}\big(\delta_\epsilon^{(0)}\phi^a + g\delta_\epsilon^{(1)}\phi^a + g^2\delta_\epsilon^{(2)}\phi^a + \dots\big) = 0. \quad \text{(C.1)}$$

El parámetro g funciona como una constante de acoplamiento de la teoría deformada. La última expresión implica las ecuaciones de consistencia

$$\textstyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\delta S^{(k-i)}}{\delta\phi^a}\delta_\epsilon^{(i)}\phi^a = 0 \quad \text{(C.2)}$$

a cada orden $k = 1, 2, 3, \dots$ del parámetro g. Para construir interacciones consistentes con esta herramienta, a los nuevos vértices dados por $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots$ se les suele pedir más requisitos además de resolver las condiciones (C.2), como la invariancia de Lorentz. La deformación consistente además puede o no deformar las constantes de estructura del grupo de norma. El caso de la deformación no–conmtuativa que nos interesa en esta tesis es tal que las constantes de estructura del grupo de norma no se deforman.

El requisito de invariancia de la acción (C.1) se escribe como $\delta_\epsilon L \simeq 0$ para el lagrangiano deformado L. Análogamente pueden escribirse las ecuaciones de consistencia (C.2) para el lagrangiano. Por ejemplo, la correspondiente ecuación a primer orden en g se escribe

$$\delta_\epsilon^{(0)} L^{(1)} + \delta_\epsilon^{(1)} L^{(0)} \simeq 0. \tag{C.3}$$

La teoría deformada luego del procedimiento descrito puede resultar equivalente a la teoría original, y en este sentido no ser una deformación en los hechos. Se dice que una deformación consistente es *trivial* si mediante una redefinición de variables (campos y parámetros) la acción y simetría deformadas regresan a su forma original. Esto pasa si por ejemplo la condición a primer orden en g (C.3) implica que $L^{(1)}$ es proporcional a las ecuaciones de movimiento de $L^{(0)}$

$$L^{(1)} \simeq \Phi^{a(1)}([\phi], x)\mathcal{E}_a L^{(0)}.$$

Redefiniendo los campos como

$$\phi^a \mapsto \phi'^a \equiv \phi^a + g\Phi^{a(1)}([\phi], x),$$

la expansión de $L^{(0)}$ como función de los nuevos campos es

$$L^{(0)}([\phi'], x) \simeq L^{(0)}([\phi], x) + g\Phi^{a(1)}([\phi], x)\mathcal{E}_a L^{(0)}.$$

Esta ecuación implica que el lagrangiano deformado (el miembro derecho) coincide con el lagrangiano origial hasta una derivada total, y por lo tanto la deformación es trivial.

De la redefinición de campos (C.1) identificamos $L^{(1)} = \delta_\Phi L^{(0)}$; es decir, la corrección $L^{(1)}$ corresponde a la variación de $L^{(0)}$ debida a la variación infinitesimal de los campos $\delta_\Phi \phi^a \equiv g\Phi^{a(1)}([\phi], x)$. De la ecuación de consitencia (C.3) tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon^{(0)} L^{(1)} + \delta_\epsilon^{(1)} L^{(0)} &\simeq 0 \\
\delta_\epsilon^{(0)} \delta_\Phi L^{(0)} + \delta_\epsilon^{(1)} L^{(0)} &\simeq 0 \\
[\delta_\epsilon^{(0)}, \delta_\Phi] L^{(0)} + \delta_\Phi \delta_\epsilon^{(0)} L^{(0)} + \delta_\epsilon^{(1)} L^{(0)} &\simeq 0 \\
[\delta_\epsilon^{(0)}, \delta_\Phi] L^{(0)} + \delta_\epsilon^{(1)} L^{(0)} &\simeq 0
\end{aligned}$$

(usando que $\delta_\epsilon^{(0)} L^{(0)} \simeq 0$) de donde podemos leer la deformación de la simetría $\delta_\epsilon^{(1)} \equiv [\delta_\Phi, \delta_\epsilon^{(0)}]$. Esta corresponde a la redefinición de la simetría en términos de los nuevos campos ϕ', pero no constituye una deformación de la simetría en los hechos.

Si la deformación de una teoría de norma no es trivial, pueden distinguirse tres tipos de resultados del procedimiento:

1. El lagrangiano se deforma, pero no la simetría de norma.
2. Tanto el lagrangiano y la simetría de norma se deforman, pero las constantes de estructura del grupo interno no.
3. El caso extremo en el que se deforman el lagrangiano, la simetría, y el álgebra de conmutadores de transformaciones de norma.

La deformación no–conmutativa que explicamos a continuación es un ejemplo del tipo 1. Es posible deformar la teoría de Maxwell-Dirac libre para obtener la electrodinámica donde la estrucutra de norma sigue siendo abeliana; este constituye un ejemplo del tipo de deformación 2. Un ejemplo del tipo 3 es la deformación que lleva muchas copias de la teoría de Maxwell libre a la teoría de Yang-Mills.

C.2. Deformación no–conmutativa de teorías de norma

En esta sección quermos mostrar cómo la generalización no–conmutativa de la acción de Maxwell es una deformación consistente en el sentido planteado en la sección anterior. La teoría inicial está dada por la acción

$$S^{(0)} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

para el tensor de intensidad de campo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, y la invariancia de norma abeliana usual $\delta_\epsilon^{(0)} A_\mu = \partial_\mu \epsilon$. Al final resulta que esta deformación es del tipo 1, pues es posible encontrar una redefinición de campos que revela que la simetría de norma no se deforma.

C.2.1. Acción y simetría no–conmutativa

La acción de la teoría de norma no–conmutativa con base en $U_\star(1)$ está dada por

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \simeq -\frac{1}{4}\int d^4x \hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}, \tag{C.4}$$

en términos del producto-$\star$ entre campos dado por

$$\phi \star \psi \equiv \phi e^{\frac{i\vartheta}{2}\theta^{\alpha\beta}\overleftarrow{\partial}_\alpha \overrightarrow{\partial}_\beta}\psi = \phi \cdot \psi + \frac{i\vartheta}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\psi + \dots.$$

La segunda igualdad en la expresión anterior resulta de la identidad básica

$$\int dx\phi \star \psi \simeq \int dx\phi \cdot \psi \simeq \int dx\psi \star \phi$$

para el producto-$\star$. El tensor de intensidad de campo no–conmutativo se escribe $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]_\star = F_{\mu\nu} - i[A_\mu, A_\nu]_\star$, y la transformación de norma-$\star$ no–conmutativa generada con $U(x) = \exp_\star(i\epsilon) \equiv 1 + i\epsilon + \frac{i^2}{2!}\epsilon \star \epsilon + \dots$ para el parámetro $\epsilon = \epsilon(x)$ está dada por

$$A_\mu \mapsto U \star A_\mu \star \hat{U} - iU \star \partial_\mu \hat{U},$$

con $\hat{U}$ el inverso-$\star$ de U: $U \star \hat{U} = \hat{U} \star U = 1$. La forma infinitesimal de esta transformación es

$$\delta_\epsilon A_\mu \equiv \partial_\mu \epsilon + [A_\mu, \epsilon]_\star, \qquad \text{tal que} \qquad \delta_\epsilon \hat{F}_{\mu\nu} = [\hat{F}_{\mu\nu}, \epsilon]_\star \tag{C.5}$$

con $[\phi, \psi]_\star \equiv \phi \star \psi - \psi \star \phi$. Esta transformación de norma consitutye una simetría de esta teoría pues para el lagrangiano no–conmutativo $L = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\delta_\epsilon L = -\frac{1}{4}\big(\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \star \epsilon - \epsilon \star \hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu}\big) \\
&\;\Rightarrow \delta_\epsilon S \simeq -\frac{1}{4}\int dx\big((\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu})\epsilon - \epsilon(\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu})\big) = 0.
\end{aligned}$$

Esta condición de invariancia está garantizada orden a orden en ϑ, y la teoría a orden cero en este parámetro es la teoría de norma de $U(1)$ conmutativa usual. En este sentido la teoría (C.4) con la simetría (C.5) es una deformación consistente de $S^{(0)}$ (y de la simetría de norma abeliana usual).

C.2.2. Mapeo de SW

Aunque la primera impresión es que la simetría de norma original se deforma y resulta en la transformación de norma-$\star$, se puede ver que existe una redefinición de campos que retorna la simetría su forma original. Esta redefinición es el mapeo de Seiberg-Witten (SW) [107].

De la expansión del lagrangiano no–conmutativo en ϑ (simplemente escribiendo explícitamente el resultado del producto-$\star$ entre campos)

$$L \simeq -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu} + \vartheta\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu \partial_\beta A_\nu + \mathcal{O}(\vartheta^2))(F^{\mu\nu} + \vartheta\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho A^\mu \partial_\sigma A^\nu + \mathcal{O}(\vartheta^2)),$$

podemos leer la deformación a primer orden. Ésta está dada por

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= -\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} + \frac{1}{4}F_{\beta\alpha}F_{\mu\nu}\right) \\ &+ \theta^{\rho\sigma}A_\rho(\frac{1}{2}\partial_\mu A_\sigma + F_{\sigma\mu})\partial_\nu F^{\nu\mu} - \partial_\mu\left(\theta^{\rho\sigma}A_\rho(\frac{1}{2}\partial_\nu A_\sigma + F_{\sigma\nu})F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}A_\nu F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right). \end{aligned}$$

La primera línea de esta expresión es no trivial y está formada por el producto de tres F's, invariante bajo la transformación de norma no deformada. La segunda línea la constituye una divergencia, y un término de la forma $\Phi([A],\theta)\mathcal{E}_\mu L^{(0)}$; la divergencia es irrelevante para el lagrangiano deformado, y el otro término es una deformación trivial que se puede descartar mediante la redefinición de campos a primer orden en ϑ (como en (C.1))

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \vartheta\theta^{\rho\sigma}A_\rho(\frac{1}{2}\partial_\mu A_\sigma + F_{\sigma\mu})\partial_\nu F^{\nu\mu}.$$

Esta expresión es el mapeo de SW que redefine los campos a primer orden en ϑ. Como el término no trivial en $L^{(1)}$ es invariante bajo la simetría de norma abeliana no deformada, debe ser posible mostrar que la simetría de norma deformada no tiene corrección a primer orden en ϑ. Aunque aquí no lo mostraremos, la redefinición de campos existe a todos los órdenes en ϑ, y por el mismo la simetría de norma deformada regresa a la simetría de norma abeliana conmutativa.

APÉNDICE D

Espacio–tiempo de Weitzenböck

En el capítulo 4 nos hemos referido a una versión de la gravedad (llamada gravedad teleparalela) que se construye sobre variedades con una conexión tal que su curvatura es nula, pero no su torsión. La variedad con una conexión de este tipo se denomina espacio–tiempo de Weitzenböck, y la acción de gravedad ahí se escribe en términos de la torsión. En este apéndice presentamos los elementos básicos de la definición de la conexión y del espacio–tiempo de Weitzenböck.

En la primera sección que sigue a continuación presentamos algunos conceptos para fijar el lenguaje, y en la segunda introducimos las definiciones relevantes.

D.1. Espacios con conexión afín y métricos

Dada una variedad diferencial L que identificamos con el espacio–tiempo, definimos *tensores* en ella de acuerdo a sus propiedades de transformación cuando se hace un cambio de coordenadas arbitrario. Si un difeomorfismo define la transformación infinitesimal para las coordenadas $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, la transformación de por ejemplo un campo escalar ϕ y un campo vectorial A^μ estará dada por la derivada de Lie[1] a lo largo del campo ξ

$$\delta_\xi \phi = \phi'(x) - \phi(x) = -\xi^\mu \partial_\mu \phi = -\mathcal{L}_\xi \phi, \quad \text{y}$$
$$\delta_\xi A^\mu = A'^\mu(x) - A^\mu(x) = -\xi^\rho \partial_\rho A^\mu + \partial_\rho \xi^\mu A^\rho = -\mathcal{L}_\xi A^\mu.$$

Si en una variedad diferencial queremos comparar un tensor en dos puntos diferentes conectados por un difeomorfismo necesitamos de una estructura llamada *conexión afín* γ. La comparación se hace mediante la derivada covariante definida con ésta. En particular para un escalar y un vector la derivada covariante se define como

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi, \quad \nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \gamma_{\mu\rho}{}^\nu A^\rho.$$

Denotamos por L_γ al espacio con conexión afín. En general, la conexión con componentes $\gamma_{\mu\rho}{}^\nu$ se separa en su parte simétrica y antisimétrica

$$\gamma_{\mu\rho}{}^\nu = \gamma_{(\mu\rho)}{}^\nu + \gamma_{[\mu\rho]}{}^\nu,$$

[1]En general se tiene que para una transformación de coordenadas como en este caso, y la transformación general $\hat{\delta}\phi^a(x) = \phi'^a(x') - \phi^a(x)$ de un conjunto de campos, la variación $\delta_\xi \phi^a = -\xi^\rho \partial_\rho \phi^a + \hat{\delta}\phi^a(x)$ para la que los parámetros no cambian ($\delta_\xi x^\mu = 0$) coincide salvo un signo con la derivada de Lie correspondiente a $\hat{\delta}\phi^a(x)$ [25].

tal que la parte antisimétrica está relacionada con la *torsión* como

$$T_{\mu\nu}{}^{\rho} = -2\gamma_{[\mu\nu]}{}^{\rho}.$$

Ésta y la curvatura del espacio–tiempo se definen con los conmutadores de las derivadas covariantes

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = T_{\mu\nu}{}^{\rho}\nabla_\rho\phi,$$
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\rho = R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}A^\sigma + T_{\mu\nu}{}^{\sigma}\nabla_\sigma A^\rho,$$

donde

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = 2\partial_{[\mu}\gamma_{\nu]\rho}{}^{\sigma} + 2\gamma_{[\nu\lambda}{}^{\sigma}\gamma_{\nu]\rho}{}^{\lambda}$$

es el tensor de Riemann asociado a la curvatura del espacio–tiempo.

Podemos hacer de L_γ un espacio métrico (L_γ, g) introduciendo otra estructura que nos permite definir un producto interno entre vectores del espacio tangente a un punto. Este producto se construye con la métrica $g_{\alpha\beta}$ sobre la cual se impone el *postulado métrico*

$$Q_{\mu\nu\rho} \equiv \nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0^2$$

que la relaciona con la conexión afín. Con esta estructura extra, la conexión γ puede escribirse como

$$\gamma_{\nu\rho}{}^{\sigma} = \Gamma_{\nu\rho}{}^{\sigma} + K_{\nu\rho}{}^{\sigma} \tag{D.1}$$

donde $\Gamma_{\nu\rho}{}^{\sigma}$ son los *símbolos de Christoffel* (componentes de la conexión de Levi-

[2] Q se llama *tensor de metricidad*.

Cività) y $K_{\nu\rho}{}^{\sigma}$ es la *contorsión* definidos por

$$\Gamma_{\nu\rho}{}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$
$$K_{\mu\nu}{}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(T_{\mu\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\mu} - T_{\mu\nu\sigma}).$$

Es importante notar que los símbolos de Christoffel $\Gamma(g)$ son simétricos en sus indices inferiores por construcción, y la parte simétrica de la conexión afín γ está formada por estas componentes y la parte simétrica de la contorsión $K_{(\mu\nu)}{}^{\rho}(g, T)$.

Es posible mostrar que cuando la conexión afín se separa como en (D.1) el escalar de Ricci R construído con la métrica y el tensor de Riemann satisface la siguiente relación

$$R(\gamma) = R(\Gamma) + 2\nabla_\mu K_\nu{}^{\mu\nu} + (K_\mu{}^{\mu\nu})^2 + K_\nu{}^{\mu\rho}K_{\mu\rho}{}^{\nu}.$$

En consecuencia, la acción de Einstein-Hilbert definida con este escalar para un espacio con torsión tiene la forma

$$\int d^dx\sqrt{g}R(\gamma) = \int d^dx\sqrt{g}\left\{R(\Gamma) + (K_\mu{}^{\mu\nu})^2 + K_\nu{}^{\mu\rho}K_{\mu\rho}{}^{\nu}\right\},$$

donde reconocemos la acción usual de Einstein-Hilbert en el primer término del lado derecho. Detengámonos un momento en la siguiente observación: Si existe una conexión afín tal que

$$R(\gamma) = 0,$$

de la expresión anterior tendremos que

$$\int d^dx\sqrt{g}R(\Gamma) = -\int d^dx\sqrt{g}\left\{(K_\mu{}^{\mu\nu})^2 + K_\nu{}^{\mu\rho}K_{\mu\rho}{}^{\nu}\right\},$$

de donde puede verse que la acción de Einstein-Hilbert usual para el escalar $R(\Gamma)$

(definido para la conexión de Levi-Cività) se puede escribir en términos solamente de la torsión de γ. Esta condición implica que el espacio–tiempo es plano y el transporte paralelo trivial. Para explorar más de cerca esta idea es conveniente (y de hecho necesario) usar el formalismo de primer orden de las tétradas.

En el espacio tangente introducimos los vectores base (o tétradas) $e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$. Un vector genérico A se escribe en esta base como $A = A^a e_a$ y la relación entre sus compontentes en el espacio tangente y sus componentes respecto al sistema de referencia coordenado es

$$A^\mu = A^a e_a{}^\mu.$$

En particular la métrica de espacio–tiempo se escribe como

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$$

donde η^{ab} es la métrica (localmente plana) del espacio tangente. El conmutador entre las tétradas define los *coeficientes de rotación de Ricci*:

$$[e_a, e_b] = -2\Omega_{ab}{}^c e_c, \quad \text{donde} \quad \Omega_{ab}{}^c = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \partial_{[\mu} e^c{}_{\nu]}.$$

Así como definimos la derivada covariante que conecta tensores en el espacio–tiempo, introducimos en el espacio tangente la conexión $\omega_{ab}{}^c$ (independiente de la métrica) con la que definimos la derivada covariante

$$\mathcal{D}_a\phi = \partial_a\phi = e_a{}^\mu \partial_\mu \phi, \qquad \mathcal{D}_a A^b = \partial_a A^b + \omega_{ac}{}^b A^c,$$

para conectar tensores en el espacio tangente. A ω de le denomina *conexión de espín*. Ahora podemos definir la *derivada covariante total* con las dos conexiones, que actuando sobre las componentes de las tétradas da

$$\hat{\nabla}_\mu e_a{}^\nu = \partial_\mu e_a{}^\mu + \gamma_{\mu\rho}{}^\nu e_a{}^\rho - e_b{}^\nu \omega_{\mu a}{}^b.$$

Así como fue impuesto el postulado métrico para relacionar la métrica con la conexión afín, aquí podemos imponer un postulado para relacionar las conexiones γ y ω. El *postulado de las tétradas*

$$\hat{\nabla}_\mu e_a{}^\nu = 0$$

nos permite converir índices del espacio–tiempo en índices del espacio tangente dentro o fuera de la derivada covariante total, y además relaciona la conexión afín γ con la conexión en el espacio tangente ω como

$$\omega_{\mu a}{}^b = \gamma_{\mu a}{}^b - e_a{}^\nu \partial_\mu e_{b\nu}. \tag{D.2}$$

Esta relación implica que ω está determinada por la conexión γ: $\omega = \omega(\gamma)$. No es difícil ver que las curvaturas definidas con ellas están relacionadas como

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma(\gamma) = e^a{}_\rho e_b{}^\sigma R_{\mu\nu a}{}^b(\omega). \tag{D.3}$$

Del postulado sobre las tétradas también sale la relación entre la torsión y los vectores base del espacio tangente dada por

$$\mathcal{D}_{[\mu} e^a{}_{\nu]} = 2(\partial_{[\mu} e^a{}_{\nu]} - \omega_{[\mu\nu]}{}^a) = -T_{\mu\nu}{}^a.$$

El postulado de las tétradas nos permite entonces recuperar la estructura de un espacio métrico con una sola conexión independiente. Así, si tenemos las conexiones $\omega(\gamma)$ y $\omega(\Gamma)$ esta última asociada a la conexión de Levi-Cività mediante una ecuación similar a (D.2), éstas están relacionadas por

$$\omega_{ab}{}^{c}(\gamma) = \omega_{ab}{}^{c}(\Gamma) + K_{ab}{}^{c},$$

donde

$$\omega_{ab}{}^{c}(\Gamma) = \Gamma_{ab}{}^{c} + (-\Omega_{ab}{}^{c} + \Omega_{b}{}^{c}{}_{a} - \Omega^{c}{}_{ab}) = (-\Omega_{ab}{}^{c} + \Omega_{b}{}^{c}{}_{a} - \Omega^{c}{}_{ab}),$$

con $\Gamma_{ab}{}^{c}$ las componentes de Γ en el espacio tangente. Como hemos escogido la métrica del espacio tangente plana, $\Gamma_{ab}{}^{c} = 0$.

D.2. Conexión de Weitzenböck

El espacio–tiempo de Weitzenböck está definido por una conexión afín compatible con la métrica tal que su curvatura es cero, pero no su torsión. Así, el transporte paralelo en esta variedad es trivial. La *conexión de Weitzenböck* se denota por $W_{\mu\nu}{}^{\rho}$, y es por esta definición tal que

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}(W) = 0.$$

El estudio de estos espacios da origen a una extensión de la gravedad de Einstein que ha sido ampliamente estudiada [76]. Esta extensión se conoce como gravedad teleparalela, y una de sus características es que los marcos de cordenadas del espacio tangente son rígidos. En esta versión de la gravedad la simetría local de Lorentz está congelada (sin embargo sigue siendo una simetría global de la teoría) y la simetría local que da origen a la dinámica proviene del grupo de traslaciones

[43].

Encontrar la conexión de Weitzenböck resolviendo la ecuación anterior puede ser muy difícil. En cambio podemos usar el postulado de las tétradas para encontrar una solución de la siguiente manera. Denotemos con $w_\mu{}^{ab}$ la conexión en el espacio tangente asociado a W mediante el postulado de las tétradas

$$\hat{\nabla}_\mu e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a{}_\nu - W_{\mu\nu}{}^a + w_{\mu\nu}{}^a = 0,$$

con $\hat{\nabla}$ la derivada covariante total dedfinida con las conexiones W y w. De la relación (D.3) tenemos que $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma(w) = 0$, para la cual podemos escoger la solución trivial $w = 0$ (que no implica $W = 0$). Por lo tanto, de la relación entre estas dos conexiones proveniente del postulado para las tétradas tenemos que

$$W_{\mu\nu}{}^\rho = e_a{}^\rho \partial_\mu e^a{}_\nu.$$

Esta es la conexión de Weitzenböck. A diferencia de los simbolos de Christoffel, sus componentes no pueden escribirse sólo en términos de la métrica y sus derivadas.

Supongamos ahora que tenemos la ecuación (D.2) para una conexión afín γ cualquiera y una conexión en el espacio tangente ω relacionada con la primera mediante el postulado de las tétradas. En términos de la conexión de Weitzenböck podemos escribir la relación

$$\gamma_{\mu\nu}{}^\rho = W_{\mu\nu}{}^\rho + \omega_{\mu\nu}{}^\rho.$$

La conexión γ es compatible con la métrica, y por lo tanto puede escribirse en términos de los símbolos de Christoffel $\Gamma(g)$ y la contorsión $K(g, T)$. La torsión está dada por

$$T_{\mu\nu}{}^{\rho}(W) = -2\Omega_{\mu\nu}{}^{\rho},$$

y un cálculo directo muestra que

$$K_{\mu\nu\rho}(W) = \Omega_{\mu\nu\rho} - \Omega_{\nu\rho\mu} + \Omega_{\rho\mu\nu}.$$

Así, el tensor de Riemann asociado a $\Gamma(g)$ está dado por

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}(\Gamma(g)) = -2\nabla_{[\mu}K_{\nu]\rho}{}^{\sigma} - 2K_{[\mu|\lambda}{}^{\sigma}K_{|\nu]\rho}{}^{\lambda},$$

y el escalar de Ricci $R(\Gamma)$ se construye con la contracción de este tensor con la métrica. Con $R(\Gamma)$ construimos la acción de Einstein-Hilbert, y el resultado es

$$\int d^d x\sqrt{g}R(\Gamma) = -\int d^d x\sqrt{g}\left\{(K_{\mu}{}^{\mu\nu})^2 + K_{\nu}{}^{\mu\rho}K_{\mu\rho}{}^{\nu}\right\}.$$

Concluimos que la acción de Einstein-Hilbert puede expresarse sólo en términos de los coeficientes de rotación de Ricci Ω. Esta es una deducción alternativa de la acción de Einstein-Hilbert en el formalismo de primer orden, y es la que usamos en esta tesis en el capítulo 4, ecuación (4.20). Es la misma que los autores de [100] presenta como la acción de Palatini.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ÁLVAREZ-GAUMÉ, L.; MEYER, F. y VÁZQUEZ-MOZO, M. A.: «Comments on Noncommutative Gravity». *Nucl. Phys. B*, 2006, **753**, p. 92. arXiv:hep-th/0605113.

[2] ÁLVAREZ-GAUMÉ, L. y VÁZQUEZ-MOZO, M. A.: «General properties of noncommutative field theories». *Nucl. Phys. B*, 2003, **668**, pp. 293–321. arXiv:hep-th/0305093.

[3] ——: «Comments on noncommutative field theories». *Springer Proc. Phys.*, 2005, **98**, pp. 175–188. arXiv:hep-th/0311244.

[4] ANDERSON, I.: «Introduction to the variational bicomplex». *Contemp. Math.*, 1992, **132**, p. 51.

[5] ANDERSON, I. y THOMPSON, G.: «The inverse problem of the calculus of variations for ordinary differential equations». *Mem. Amer. Math. Soc*, 1992, **98**, pp. 1–110.

[6] ARNOLD, V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[7] ASCHIERI, P.: «Noncommutative symmetries and gravity». *J. Phys. Conf. Ser.*, 2006, **53**, pp. 799–819. doi: 10.1088/1742-6596/53/1/052. arXiv:hep-th/0608172.

[8] ——: «Lectures on Hopf algebras, quantum groups and twsits», 2007. arXiv:hep-th/0703013.

[9] ——: «Noncommutative Gravity and the $\star$-Lie algebra of diffeomorphisms». *Fortsch. Phys.*, 2007, **55**, pp. 649–654. doi: 10.1002/prop.200610389. arXiv:hep-th/0703014.

[10] ASCHIERI, P.; BLOHMANN, C.; DIMITRIJEVIĆ, M.; MEYER, F.; SCHUPP, P. y WESS, J.: «A gravity theory on noncommutative spaces». *Class. Quant. Grav.*, 2005, **22**, pp. 3511–3532. arXiv:hep-th/0504183.

[11] ASCHIERI, P.; CASTELLANI, L. y DIMITRIJEVIĆ, M.: «Dynamical noncommutativity and Noether theorem in twisted $\phi^{\star 4}$ theory». *Lett. Math. Phys.*, 2008, **85**, pp. 39–53. arXiv:0803.4325.

[12] ASCHIERI, P.; DIMITRIJEVIC, M.; MEYER, F.; SCHRAML, S. y WESS, J.: «Twisted gauge theories». *Lett. Math. Phys.*, 2006, **78**, pp. 61–71. doi: 10.1007/s11005-006-0108-0. arXiv:hep-th/0603024.

[13] BALACHANDRAN, A. P.; JOSEPH, A. y PADMANABHAN, P.: «Causality and statistics on the Groenewold-Moyal plane», 2009. doi: 10.1007/s10701-009-9335-4. arXiv:0905.0876 [hep-th].

[14] BARNICH, G.; BRANDT, F. y GRIGORIEV, M.: «Local BRST cohomology and Seiberg-Witten maps in noncommutative Yang-Mills theory». *Nuclear Physics B*, 2004, **677**, pp. 503–534.

[15] BARNICH, G.; BRANDT, F. y HENNEAUX, M.: «Local BRST Cohomology in gague theories». *Physics Reports*, 2000, **338**, p. 439.

[16] BARNICH, G.; GRIGORIEV, M. y HENNEAUX, MARC: «Seiberg-Witten maps from the point of view of consistent deformations of gauge theories». *JHEP*, 2001, **0110**, p. 004. arXiv:hep-th/0106188.

[17] BARNICH, G. y HENNEAUX, M.: «Consistent couplings between fields with a gauge freedom and deformations of the master equation». *Phys. Lett. B*, 1993, **311**, pp. 123–129. doi: 10.1016/0370-2693(93)90544-R. arXiv:hep-th/9304057.

[18] BARNICH, G.; HENNEAUX, M. y TATAR, R.: «Consistent interactions between gauge fields and the local BRST cohomology: The Example of Yang-Mills models». *Int. J. Mod. Phys.*, 1994, **D3**, pp. 139–144. doi: 10.1142/S0218271894000149.

[19] BAYEN, F.; FLATO, M.; FRONSDAL, C.; LICHNEROWICZ, A. y Y D. STERNHEIMER: «Deformation theory and quantization I, II». *Ann. Phys. (N.Y.)*, 1978, **111**, pp. 61–151.

[20] BÉRARD, A.; MOHRBACH, H.; LAGES, J.; GOSSELIN, P.; GRANDATI, Y.; BOUMRAR, H. y MENAS, F.: «From Feynman Proof of Maxwell Equations to Noncommutative Quantum Mechanics». *J. Phys. Conf. Ser.*, 2007, **70**, p. 012004. doi: 10.1088/1742-6596/70/1/012004. arXiv:0706.2751v1 [hep-th].

NOTAS: Presentado en el 3er Festival de Feynman (Collage Park, Maryland, Estados Unidos, agosto 2006)

[21] BICHL, A. A.; GRIMSTRUP, J. M.; GROSSE, H.; KRAUS, E.; POPP, L.; SCHWEDA, M. y WULKENHAAR, R.: «Noncommutative Lorentz Symmetry and the Oirgin of the Seiberg-Witten Map». *Eur. Phys. J.*, 2002, **C24**, pp. 165–176. arXiv: hep-th/0108045.

[22] BLAGOJEVICH, M.: *Gravity and Gauge Symmetries*. IOP, 2002.

[23] BOULAHOUAL, A. y SEDRA, M. B.: «Noncommutative geometry framework and the Feynman's proof of Maxwell equations». *Journal of Mathematical Physics*, 2003, **44(12)**, p. 5888. doi: 10.1063/1.1625891.

[24] BRANDT, F.: «Gauge theories of space-time symmetries». *Phys. Rev. D*, 2001, **64**, p. 065025. doi: 10.1103/PhysRevD.64.065025.

[25] ——: «Local BRST formalism in the antifield formalism», 2001. Lecciones en la Universidad de Hannover, invierno 2000/2001.

[26] CALMET, X.; JURCO, B.; SCHUPP, P.; WESS, J. y WOHLGENANNT, M.: «The standard model on non-commutative space-time». *Eur. Phys. J.*, 2002, **C23**, pp. 363–376. doi: 10.1007/s100520100873. arXiv:hep-ph/0111115.

[27] CALMET, X. y KOBAKHIDZE, A.: «Noncommutative general relativity». *Phys. Rev. D*, 2005, **72**, p. 045010. arXiv:hep-th/0506157.

[28] CARIÑENA, J. F. y FIGUEROA, H.: «Feynman problem in the noncommutative case». *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2006, **39**, pp. 3763–3769. doi: 10.1088/0305-4470/39/14/018.

[29] CARIÑENA, J. F.; IBORT, L. A.; MARMO, G. y STERN, A.: «The Feynman problem and the inverse problem for Poisson dynamics». *Phys. Rep.*, 1995, **263**, pp. 153–212.

[30] CARMONA, J. M.; CORTES, J. L.; GAMBOA, J. y MENDEZ, F.: «Quantum theory of noncommutative fields». *JHEP*, 2003, **0303**, p. 058. arXiv:hep-th/0301248.

[31] CARROLL, S. M.; HARVEY, J. A.; KOSTELECKY, V. A.; LANE, C. D. y OKAMOTO, T.: «Noncommutative field theory and Lorentz violation». *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**, p. 141601. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.141601. arXiv:hep-th/0105082.

[32] CATTANEO, A. S. y FELDER, G.: «A path integral approach to the kontsevich quantization formula». *Commun. Math. Phys.*, 2000, **212**, p. 591. arXiv:math.QA/9902090.

[33] ——: «Poisson sigma models and deformation quantization». *Mod. Phys. Lett.*, 2001, **A16**, pp. 179–190. doi: 10.1142/S0217732301003255. arXiv:hep-th/0102208.

[34] CHAICHIAN, M.; KULISH, P.P.; NISHIJIMA, K. y TUREANU, A.: «On a Lorentz-invariant interpretation of noncommutative spacetime and its implications on noncommutative QFT». *Physics Letters B*, 2004, **604**, pp. 98–102.

[35] CHAICHIAN, M.; OKSANEN, M.; TUREANU, A. y ZET, G.: «Gauging the twisted Poincare symmetry as noncommutative theory of gravitation». *Phys. Rev. D*, 2009, **79**, p. 044016. doi: 10.1103/PhysRevD.79.044016. arXiv:0807.0733 [hep-th].

[36] ——: «Noncommutative gauge theory using covariant star product defined between Lie valued differential forms», 2010. arXiv:1001.0508 [hep-th].

[37] CHAICHIAN, M.; PRESNAJDER, P.; SHEIKH-JABBARI, M. M. y TUREANU, A.: «Noncommutative gauge field theories: A no-go theorem». *Phys. Lett. B*, 2002, **526**, pp. 132–136. doi: 10.1016/S0370-2693(01)01478-2. arXiv:hep-th/0107037.

[38] ——: «Noncommutative Standard Model: Model Building». *Eur. Phys. J.*, 2003, **C29**, pp. 413–432. doi: 10.1140/epjc/s2003-01204-7. arXiv:hep-th/0107055v2.

[39] CHAICHIAN, M. y TUREANU, A.: «Twist Symmetry and Gauge Invariance». *Physics Letters B*, 2006, **637**, pp. 199–202. arXiv:hep-th/0604025v2.

[40] CHAICHIAN, M.; TUREANU, A. y ZET, G.: «Twist as a Symmetry Principle and the Noncommutative Gauge Theory Formulation». *Physics Letters B*, 2007, **651**, pp. 319–323. arXiv:hep-th/0607179v3.

[41] ——: «Corrections to Schwarzschild Solution in Noncommutative Gauge Theory of Gravity». *Phys. Lett. B*, 2008, **660**, pp. 573–578. arXiv:0710.2075v1 [hep-th].

[42] CHAMSEDDINE, A. H.: «Deforming Einstein's Gravity». *Phys. Lett. B*, 2001, **504**, pp. 33–37. doi: 10.1016/S0370-2693(01)00272-6. arXiv:hep-th/0009153.

[43] CHO, Y. M.: «Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian». *Phys. Rev. D*, 1976, **14**, pp. 2521–2525.

[44] CORTES, J. L. y GAMBOA, J.: «Quantum uncertainty in doubly special relativity». *Phys. Rev. D*, 2005, **71**, p. 065015. arXiv:hep-th/0405285.

[45] CORTESE, I.: «Acerca de la No Conmutatividad en los ámbitos de la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica». *Tesis de licenciatura*, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2003. Director de Tesis: Dr. José Antonio García Zenteno.

[46] CORTESE, I. y GARCÍA, J. A.: «Lagrangian and Noncommutativity», 2003. arXiv:hep-th/0305045v2.

[47] ——: «Equations of motion, Noncommutativity, and Quantization». *Phys. Lett. A*, 2006, **358**, pp. 327–333. arXiv:hep-th/0605156v1.

[48] ——: «A Variational Formulation of Symplectic Noncommutative Mechanics». *Int. J. Geom. Meth. Phys.*, 2007, **4**, pp. 789–805. arXiv:hep-th/0703205v1.

[49] ——: «Emergent Noncommutative gravity from a consistent deformation ofgauge theory», 2010. arXiv:1001.4180 [hep-th].

NOTAS: Enviado para arbitraje.

[50] ——: «Space-time symmetries in noncommutative field theories: Covariance vs. Invariance», 2010. Para enviarse a SIGMA..

NOTAS: En preparación.

[51] DAS, A.; GAMBOA, J.; LOPEZ-SARRION, J. y SCHAPOSNIK, F. A.: «Gauge field theory in the infrared regime». *Phys. Rev. D*, 2005, **72**, p. 107702. arXiv:hep-th/0510002.

[52] DASGUPTA, K.; MUKHI, S. y RAJESH, G.: «Noncommutative tachyons». *JHEP*, 2000, **0006**, p. 022. arXiv:hep-th/0005006.

[53] DIRAC, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford, UK, 1991.

[54] ——: *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street,Mineola, New York 11501, 2001.

[55] DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K. y ROBERTS, J. E.: «Spacetime quantization induced by classical gravity». *Phys. Lett. B*, 1994, **331**, pp. 39–44. arXiv:hep-th/0303037.

[56] ——: «The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields». *Commun. Math. Phys.*, 1995, **172**, pp. 187–220. arXiv:hep-th/0303037.

[57] DOUGLAS, J.: «Solution of the inverse problem of the Calculus of Variations». *Transactions of the American Mathematical Society*, 1941, **50**, pp. 71–128.

[58] DOUGLAS, M. R. y NEKRASOV, N. A.: «Noncommutative field theory». *Rev.Mod.Phys.*, 2001, **73**, pp. 977–1029. arXiv:hep-th/0106048.

[59] DRINFEL'D, V. G.: «Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation». *Sov. Math. Dokl.*, 1985, **32**, p. 254.

[60] DRINFELD, V. G.: «Quasi-Hopf algebras». *Lengingrad Math. J.*, 1990, **1**, pp. 1419–1457. [Alg. Anal. 1(6) 114-148, 1989].

[61] DYSON, F. J.: «Feynman's proof of the Maxwell equations». *Am. J. Phys.*, 1990, **58**, p. 209.

[62] FALOMIR, H.; GAMBOA, J.; LOPEZ-SARRION, J.; MENDEZ, F. y DA SILVA, A. J.: «Vortices, infrared effects and Lorentz invariance violation». *Phys. Lett. B*, 2006, **632**, pp. 740–744. arXiv:hep-th/0504032.

[63] FALOMIR, H.; GAMBOA, J.; LOPEZ-SARRION, J.; MENDEZ, F. y PISANI, P. A. G.: «Magnetic-Dipole Spin Effects in Noncommutative Quantum Mechanics», 2009. arXiv:0905.0157 [hep-th].

[64] GAMBOA, J.; LOEWE, M.; MENDEZ, F. y ROJAS, J. C.: «Estimating Noncommutative Effects From the Quantum Hall Effect». *Mod. Phys. Lett.*, 2001, **A16**, pp. 2075–2078. doi: 10.1142/S0217732301005345. arXiv:hep-th/0104224.

[65] ——: «Noncommutative quantum mechanics: The two-dimensional central field». *Int. J. Mod. Phys.*, 2002, **A17**, pp. 2555–2566. doi: 10.1142/S0217751X02010960. arXiv:hep-th/0106125.

[66] GAMBOA, J.; LOEWE, M. y ROJAS, J. C.: «Non-Commutative Quantum Mechanics». *Phys. Rev.*, 2001, **D64**, p. 067901. doi: 10.1103/PhysRevD.64.067901. arXiv:hep-th/0010220.

[67] GAMBOA, J.; LOPEZ-SARRIÓN, J. y POLYCHRONAKOS, A. P.: «Ultraviolet modified photons and anisotropies in the cosmic microwave background radiation». *Phys. Lett. B*, 2006, **634**, pp. 471–473. arXiv:hep-ph/0510113.

[68] GARCÍA-COMPEAN, H.; OBREGON, O.; RAMIREZ, C. y SABIDO, M.: «Noncommutative self-dual gravity». *Phys. Rev. D*, 2003, **68**, p. 044015. doi: 10.1103/PhysRevD.68.044015. arXiv:hep-th/0302180.

[69] GERSTENHABER, M.: «On the deformation of rings and algebras». *Ann. Math.*, 1964, **79**, p. 59.

[70] GOPAKUMAR, R.; MINWALLA, S. y STROMINGER, A.: «Noncommutative solitons». *JHEP*, 2000, **0005**, p. 020. arXiv:hep-th/0003160.

[71] GRACIA-BONDÍA, J.M.; LIZZI, FEDELE; RUIZ, F. RUIZ y VITALE, PATRIZIA: «Noncommutative spacetime symmetries: Twist versus covariance». *Physical Review D*, 2006, **74**, p. 025014.

[72] GROENEWOLD, H. J.: «On the principles of elementary quantum mechanics». *Physica*, 1946, **12**, p. 405.

[73] HARIKUMAR, E. y RIVELLES, V. O.: «Noncommutative gravity». *Class. Quant. Grav.*, 2006, **23**, pp. 7551–7560. doi: 10.1088/0264-9381/23/24/024. arXiv:hep-th/0607115.

[74] HARVEY, J. A.: «Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes», 2001. Lectures presented at Komaba 2000 Workshop: Non-perturbative Dynamics in String Theory, Komaba, Japan, 14-16 Nov 2000; arXiv:hep-th/0102076.

[75] HARVEY, J. A.; KRAUS, P.; LARSEN, F. y MARTINEC, E. J.: «D-Branes and strings as noncommutative solitons». *JHEP*, 2000, **0007**, p. 042. arXiv:hep-th/0005031.

[76] HEHL, F. W.; MCCREA, J. D.; MIELKE, E. W. y NE'EMAN, Y.: «Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance». *Phys. Rep.*, 1995, **258**, p. 1.

[77] HENNEAUX, M.: «On the inverse problem of the calculus of variations in field theory». *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1984, **17**, p. 75.

[78] HILL, E. L.: «Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics». *Rev. Mod. Phys.*, 1951, **23**, p. 253.

[79] HOJMAN, S.: «Symmetries of Lagrangians and of their equations of motion». *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1984, **17**, pp. 2399–2412.

[80] HOJMAN, S. y URRUTIA, L. F.: «First Order Approach To The Inverse Problem Of The Calculus Of Variation». *J. Math. Phys.*, 1981, **22**, p. 1896.

[81] HOJMAN, S. A. y SHEPLEY, L. C.: «No Lagrangian? No quantization!» *J. Math. Phys.*, 1991, **32**, p. 142.

[82] HOUNKONNOU, M.Ñ. y SAMARY, D. O.: «Twisted Grosse-Wulkenhaar $\phi^{\star 4}$ model: dynamical noncommutativity and Noether currents», 2009. arXiv:0909.4562v1 [math-ph].

[83] JURCO, B.; SCHRAML, S.; SCHUPP, P. y WESS, J.: «Enveloping algebra valued gauge transformations for non-Abelian gauge groups on non-commutative spaces». *Eur. Phys. J.*, 2000, **C17**, pp. 521–526. doi: 10.1007/s100520000487. arXiv:hep-th/0006246.

[84] KAZINSKI, P. O.; LYAKHOVICH, S. L. y SHARAPOV, A. A.: «Lagrange structure and quantization». *JHEP*, 2005, **07**, p. 076. arXiv:hep-th/0506093.

[85] KIBBLE, T. W. B.: «Lorentz Invariance and the Gravitational Field». *J. Math. Phys.*, 1961, **2**, p. 212.

[86] KOBAKHIDZE, A.: «Diffeomorphism-invariant noncommutative gravity with twisted local Lorentz invariance», 2009. arXiv:0905.3427 [hep-th].

[87] KOCHAN, D.: «Quantization of non–Lagrangian systems». *Int. J. Mod. Phys.*, 2009, **A24**, pp. 5319–5340. doi: 10.1142/S0217751X0904748X.

[88] ——: «Functional integral for non–Lagrangian systems», 2010. arXiv:1001.1863 [hep-th].

[89] KONTSEVICH, M.: «Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I». *Lett. Math. Phys.*, 2003, **66**, pp. 157–216. doi: 10.1023/B:MATH.0000027508.00421.bf. arXiv:q-alg/9709040.

[90] KUMAR, K.: «Aspects of noncommutativity in field theory, strings and membranes», 2008. arXiv:0812.5045 [hep-th].

[91] LANGVIK, M. y ZAHABI, A.: «On Finite Noncommutativity in Quantum Field Theory», 2010. arXiv:1002.0956 [hep-th].

[92] LYAKHOVICH, S. L. y SHARAPOV, A. A.: «BRST theory without Hamiltonian and Lagrangian». *JHEP*, 2005, **03**, p. 011. doi: 10.1088/1126-6708/2005/03/011.

[93] ——: «Schwinger-Dyson equation for non-Lagrangian field theory». *JHEP*, 2006, **02**, p. 007.

[94] MADORE, J.: «Noncommutative geometry for pedestrians», 1999. Lecciones en la Escuela Internacional de Cosmología y Gravitación: Curso 16º: No localidad clásica y cuántica, Erice, Italia, 27 de abril - 4 de mayo de 1999; arXiv:gr-qc/9906059.

[95] MATSUBARA, K.: «Restrictions on gauge groups in noncommutative gauge theory». *Phys. Lett. B*, 2000, **482**, pp. 417–419. doi: 10.1016/S0370-2693(00)00549-9. arXiv:hep-th/0003294.

[96] MÖLLER, L.: «Second order of the expansions of action functionals of the noncommutative standard model». *JHEP*, 2004, **10**, p. 063. doi: 10.1088/1126-6708/2004/10/063. arXiv:hep-th/0409085v2.

[97] MONTESINOS, M. y DEL CASTILLO, G. F. TORRES: «Symplectic quantization, inequivalent quantum theories, and Heisenberg's uncertainty principle». *Phys. Rev. A*, 2004, **70**, p. 032104. arXiv:quant-ph/0407051.

[98] NISHINO, H. y RAJPOOT, S.: «Teleparallel complex gravity as foundation for noncommutative gravity». *Phys. Lett. B*, 2002, **532**, pp. 334–344. doi: 10.1016/S0370-2693(02)01533-2. arXiv:hep-th/0107216.

[99] ORTIN, T.: *Gravity and Strings*. Cambridge University Press, 2004.

[100] PELDAN, P.: «Actions for gravity, with generalizations: A Review». *Class. Quant. Grav.*, 1994, **11**, pp. 1087–1132. arXiv:gr-qc/9305011.

[101] PIACITELLI, G.: «Twisted Covariance as a Non-Invariant Restriction of the Fully Covariant DFR Model». *Communications in Mathematical Physics*, 2009. doi: 10.1007/s00220-010-0988-9. arXiv:0902.0575 [hep-th].

[102] ——: «Twisted Covariance vs Weyl Quantisation», 2009. arXiv:0901.3109 [hep-th].

[103] RIVELLES, V. O.: «Noncommutative field theories and gravity». *Phys. Lett. B*, 2003, **558**, pp. 191–196. doi: 10.1016/S0370-2693(03)00271-5. arXiv:hep-th/0212262.

[104] ROSENBAUM, M.; VERGARA, J. D. y JUAREZ, L. R.: «Noncommutativity from canonical and noncanonical structures», 2006. arXiv:hep-th/0610150.

[105] SCHOMERUS, V.: «D-branes and deformation quantization». *JHEP*, 1999, **9906**, p. 030. arXiv:hep-th/9903205.

[106] SEIBERG, N.; SUSSKIND, L. y TOUMBAS, N.: «Strings in Background Electric Field, Space/Time Noncommutativity and A New Noncritical String Theory'». *JHEP*, 2000, **0006**, p. 021. arXiv:hep-th/0005040.

[107] SEIBERG, N. y WITTEN, E.: «String theory and noncommutative geometry». *JHEP*, 1999, **09**, p. 032.

[108] SNYDER, H. S.: «The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time». *Phys. Rev.*, 1947, **72**, p. 68.

[109] ——: «Quantized Space-Time». *Phys. Rev.*, 1947, **71**, pp. 38–41.

[110] STEINACKER, H.: «Emergent gravity from noncommutative gauge theory». *JHEP*, 2007, **12**, p. 049. arXiv:0708.2426 [hep-th].

[111] SZABO, R. J.: «Quantum field theory on noncommutative spaces». *Physics Reports*, 2003, **378**, p. 207.

[112] ——: «Symmetry, gravity and noncommutativity». *Class. Quant. Grav.*, 2006, **23**, pp. R199–R242. doi: 10.1088/0264-9381/23/22/R01. arXiv:hep-th/0606233.

[113] TUREANU, A.: «Twisted Poincaré Symmetry and Some Implications on Noncommutative Quantum Field Theory», 2007. arXiv:0706.0334 [hep-th].

[114] ÜLKER, K. y YAPISKAN, B.: «Seiberg-Witten maps to all orders». *Phys. Rev. D*, 2008, **77**, p. 065006.

[115] UTIYAMA, R.: «Invariant Theoretical Interpretation of Interaction». *Phys. Rev.*, 1956, **101**, p. 1597.

[116] VASSILEVICH, D. V.: «Twist to close». *Mod. Phys. Lett.*, 2006, **A21**, pp. 1279–1284. doi: 10.1142/S0217732306020755. arXiv:hep-th/0602185.

[117] ——: «Towards noncommutative gravity», 2009. arXiv:0902.0767 [hep-th].

[118] WEYL, H.: *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover, New York, 1931.

[119] WIGNER, E. P.: «Quantum corrections for thermodynamic equilibrium». *Phys. Rev.*, 1932, **40**, p. 749.

[120] WOHLGENANNT, M.: «Introduction to a non-commutative version of the standard model», 2003. arXiv:hep-th/0302070.

[121] ——: «Non-commutative geometry and physics», 2006. arXiv:hep-th/0602105.

[122] YANG, H. S.: «Noncommutative Spacetime and Emergent Gravity», 2007. arXiv:0711.0234 [hep-th].

Registro de publicaciones[5]

- Relacionadas con la **primera parte** de esta tesis

  1. *Equations of motion, Noncommutativity and Quantization*, Ignacio Cortese, J. Antonio García, Phys. Lett. A **358** (2006) 327-333.
  2. *A Variational Formulation of Symplectic Noncommutative Mechanics*, Ignacio Cortese, J. Antonio García, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4** (2007) 789-805.

- Relacionadas con la **segunda parte** de esta tesis

  1. *Emergent Noncommutative gravity from a consistent deformation of gauge theory*, Ignacio Cortese, J. Antonio García, arXiv:1001.4180 [hep-th] (2010) –enviado para arbitraje–.
  2. *Space-time symmetries in Noncommutative field theories: Covariance vs. Invariance*, Ignacio Cortese, J. Antonio García –en preparación–.

[5] Consultar `http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?rawcmd=ea+Cortese,+Ignacio`

OFICIO: PCF/014/2009
ASUNTO: Designación de jurado

DR. ISIDRO AVILA MARTÍNEZ
DIRECTOR GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
P R E S E N T E

At´n: L. A. Balfred Santaella Hinojosa
Jefe de la Unidad de Administración del Posgrado

El Comité Académico del Posgrado en Ciencias Físicas en su sesión del 8 de diciembre de 2009 ha designado como Jurado del estudiante **IGNACIO CORTESE MOMBELLI** con número de cuenta **96770836,** para dictaminar si el trabajo desarrollado como tesis titulado: *"Aspectos Clásicos de Teorías No-Conmutativas: Lagrangiano, Simetrías, y una Deformación de la Gravedad",* dirigido por el Dr. José Antonio García Zenteno, tiene los méritos para obtener el grado de Doctor en Ciencias conforme al plan de estudios 5009.

Propietario: Dr. Rodolfo Martínez y Romero

Propietario: Dr. José Antonio García Zenteno

Propietario: Dr. Héctor García Compean

Propietario: Dr. Merced Montesinos

Propietario: Dr. José David Vergara Oliver

Suplente: Dr. Luis Urrutia Ríos

Suplente: Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Atentamente.
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 4 de Enero de 2010
Coordinador del Posgrado en Ciencias Físicas

Dr. Manuel Torres Labansat

c.c.p.- Cada miembro del sínodo
c.c.p.- Interesado.
c.c.p.- Expediente.