



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

RESPUESTA SÍSMICA DE INCLUSIONES TRIDIMENSIONALES  
EN UN SEMIESPACIO ELÁSTICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

MAURICIO ARELLANO GUZMÁN



ASESOR: DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

Ciudad Universitaria , Delegación Coyoacán

Marzo de 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*POUR TOI MA VIE JOLIE*

*ALEJANDRA*

## **Agradecimientos**

Ofrezco un profundo reconocimiento al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por compartirme de su conocimiento y mucha experiencia, por su apoyo y estímulo incondicional que me ha brindado. Sin duda el aprendizaje que ha dejado grabado en mi ha contribuido enormemente en mi formación profesional.

Extiendo mi agradecimiento a la Dra. Ursula Iturrarán Viveros, al Dr. Juan José Pérez Gavilán, la Dra. Martha Suarez López y al Dr. Pablo Barrera Sánchez por sus valiosos comentarios y sugerencias para la finalización de este trabajo.

Agradezco a mis compañeros de trabajo Benjamín Olvera, Nayeli Chavez Zamorate y Hugo Rosas por el ímpetu y ganas que me dieron durante todo este tiempo.

Agradezco al Instituto de Ingeniería UNAM por todas las facilidades otorgadas durante la elaboración de este trabajo.

## ABSTRACT

The Indirect Boundary Element Method (IBEM) is used to compute the seismic response of a three-dimensional rockfill dam model. The IBEM is based on a *single layer* integral representation of elastic fields in terms of the full-space Green function, or fundamental solution of the equations of dynamic elasticity, and the associated force densities along the boundaries. The method has been applied to simulate the ground motion in several configurations of surface geology. Moreover, the IBEM has been used as benchmark to test other procedures. We compute the seismic response of a three-dimensional rockfill dam model placed within a canyon that constitutes an irregularity on the surface of an elastic half-space. The rockfill is also assumed elastic with hysteretic damping to account for energy dissipation. Various types of incident waves are considered to analyze the physical characteristics of the response: symmetries, amplifications, impulse response and the like. Computations are performed in the frequency domain and lead to time response using Fourier analysis. In the present implementation a symmetrical model is used to test symmetries. The boundaries of each region are discretized into boundary elements whose size depends on the shortest wavelength, typically, six boundary segments per wavelength. Usually, the seismic response of rockfill dams is simulated using either finite elements (FEM) or finite differences (FDM). In most applications, commercial tools that combine features of these methods are used to assess the seismic response of the system for a given motion at the base of model. However, in order to consider realistic excitation of seismic waves with different incidence angles and azimuth we explore the IBEM.

## Resumen

El Método de Elemento a la Frontera Indirecto (IBEM) es usado para calcular la respuesta sísmica del modelo de una presa tridimensional simplificado. El IBEM se basa en una representación integral en términos de la función de Green para todo el espacio como una solución fundamental de las ecuaciones de la elasticidad dinámica y la densidad de las fuerzas asociadas a lo largo de las fronteras del modelo. El método se ha aplicado para simular los movimientos de la tierra en varias configuraciones de superficies geológicas con gran éxito.

Por otra parte, el IBEM se ha utilizado como punto de referencia para poner a prueba otros métodos numéricos alternativos. En este trabajo calculamos la respuesta sísmica de un modelo tridimensional de la cortina de una presa colocada dentro de un cañón que constituye una irregularidad en la superficie de un semiespacio elástico. La cortina también se supone elástica con histéresis de amortiguación, esto es para tomar en cuenta de la disipación de energía alrededor de la cortina. Varios tipos de ondas incidentes son considerados para analizar las características físicas de la respuesta sísmica.

Los cálculos se realizan en el dominio de la frecuencia los cuales se pueden representar en el dominio del tiempo aplicando el análisis de Fourier para la excitación sísmica de la cortina. Se utiliza un modelo simétrico para analizar las paridades de los movimientos de distintas ondas incidentes y sus amplificaciones. Las fronteras de cada región son discretizadas en elementos, cuyo tamaño depende de la longitud de onda más corta, normalmente, seis segmentos de la frontera por longitud de onda.

Por lo general, la respuesta sísmica de cortinas de presas se simulan utilizando elementos finitos (FEM) o diferencias finitas (FDM). En la mayoría de las aplicaciones comerciales se utilizan métodos numéricos híbridos para obtener una mejor aproximación de la solución del sistema. Sin embargo, a fin de considerar las condiciones más realistas de la incidencia de las ondas sísmicas contra la cortina de la presa con distinto azimut exploramos el IBEM.

# Índice General

---

Resumen

Abstract

## PARTE I FUNDAMENTOS

### 1. Introducción

### 2. Preliminares Matemáticos

- 2.1 Tensores
- 2.2 Transformadas Integrales
- 2.2 Transformada de Fourier
- 2.3 La Delta de Dirac
- 2.4 Descomposición de Hemholtz para un vector

### 3. Teoría de Elasticidad

- 3.1. El tensor de Deformación
- 3.2 El tensor de Esfuerzos
- 3.3 La Ley de Hooke
- 3.4 Ecuaciones de la Elastodinámica
- 3.5 Ondas Elásticas

### 4. Incidencia de Ondas Sísmicas en un Medio Elástico

- 4.1 Ondas Sísmicas
- 4.2 Ondas Superficiales
- 4.3 Desplazamientos y Esfuerzos para Ondas P, SV y Raleigh
- 4.4 Desplazamientos y Esfuerzos para ondas SH

### 5. La Función de Green

- 5.1 Función de Green
- 5.2 Ecuación de Onda no Homogénea
- 5.3 Función de Green para la Ecuación de Onda
- 5.4 Ecuación de Onda Unidimensional
- 5.5 Ecuación de Onda tridimensional
- 5.6 El tensor de Green

### 6. Método Numéricos

- 6.1 Método de Diferencias Finitas (FDM)
- 6.2 Método de Elemento Finito (FEM)
- 6.3 Representación Integral del Teorema de Somigliana
- 6.4 Método de Elemento a la Frontera (BEM)
- 6.5 Método de Elemento a la Frontera Indirecto (IBEM)

## **PARTE II APLICACIONES**

### **7. Tensor de Green para todo el Espacio**

- 7.1 Tensor de Green del IBEM
- 7.2 Tensor de Tracciones del IBEM
- 7.3 Difracción de Ondas Elásticas

### **8. Modelo de Presa Simplificado**

- 8.1 Modelo de Presa Simplificado
- 8.2 Resultados

### **Conclusiones**

### **Apéndices**

- A Algoritmo FFT**
- B Cálculo del Tensor de Esfuerzos**
- C Soluciones de Stokes**
- D IBEM 3D**

### **Agradecimientos**

### **Bibliografía**

---

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

---

Los terremotos constituyen una de las catástrofes naturales más devastadoras que existen, debemos entender que a pesar de todo el conocimiento que tenemos sobre ellos no podemos predecir de manera exacta, dónde y cuándo ocurrirán.

Recientemente los terremotos, en Haití y Chile han puesto en evidencia la vulnerabilidad de las construcciones y la fragilidad de la organización social. En general, no existe una cultura sismológica de los movimientos que se puedan producir en el interior de la Tierra y que tengan trascendencia por los daños ocasionados sobre la superficie terrestre.

Afortunadamente cuando se conocen los tipos de desplazamientos que se pueden producir durante un siniestro como este y las zonas en que hay amplificaciones, debido al tipo de suelo y topografía en que se propagan las ondas sísmicas, nos proporcionan criterios para minimizar las pérdidas humanas y materiales para cualquier construcción.

Para estos fines las simulaciones numéricas en ingeniería sismológica tienen como objetivo fundamental estimar las influencias de diferentes factores que controlan los movimientos del terreno y sus efectos en las construcciones. Estos factores pueden ser las irregularidades de estructuras geológicas, la ubicación de la fuente sísmica, etc.

Mediante las observaciones sismológicas y geofísicas de la Tierra se pueden construir modelos matemáticos que consideren las propiedades mecánicas de los materiales de una construcción. Por medio de estos modelos se calcula de manera aproximada la respuesta sísmica de una topografía con geometría particular (ver [38]).

Se pueden desarrollar técnicas numéricas que nos permitan establecer los alcances y limitaciones de dichos modelos. Algunas técnicas de cálculo numérico son el Método de Diferencias Finitas (FDM), Método de Elemento Finito (FEM), Método de elemento a la Frontera (BEM), Método de Multipolos (FFM), Método de Elemento a la Frontera Indirecto (IBEM), entre otros.

En modelos avanzados de problemas de ingeniería para el diseño de cortinas de presas (ver [28] y [29]), que utilizan el Método de Elemento a la Frontera (BEM) consideran un dominio tridimensional discretizado por elementos triangulares.

Los efectos provocados por un volumen de agua en su frontera (que se asume como un fluido incompresible), el sedimento que forma cortina (considerado como un material poroelástico) y las rocas alrededor de la cortina (materiales viscoelásticos), tienen una interacción dinámica muy bien calculada.

Asumiendo que las rocas que forman la cortina están sometidas a compresiones externas, en las cuales no hay fractura de los materiales que las forman pero sí transmisión de energía mecánica, se puede considerar el medio material como elástico. Por tanto, los estudios realizados para el diseño de cortinas de presas pueden ser extendidos al diseño de presas de enrocamiento como inclusiones elásticas en un semiespacio con irregularidades en la superficie.

Aprovechando la experiencia que se tiene de la respuesta sísmica para diferentes superficies geológicas (ver por ejemplo [35],[36],[37] y [38]), se puede explorar el movimiento de una cortina provocado por una fuente profunda.

Muchas de las incertidumbres que se tienen para este tipo de modelos son ocasionadas por la geometría y las propiedades mecánicas impuestas en el modelo, por ejemplo las inclusiones elásticas blandas inducen resonancias mecánicas en el suelo en que se encuentran.

Algunos programas comerciales utilizan el Método de Elemento Finito (FEM) ó el Método de Elemento a la Frontera (BEM) para estudiar la respuesta sísmica de *modelos de presas idealizados* totalmente simétricos. Sin embargo, para estos métodos es difícil imponer las condiciones físicas reales de la propagación de las ondas con distintos ángulos de incidencia y azimut.

Por estas razones se utiliza el Método de Elemento a la Frontera Indirecto (IBEM), para el cálculo numérico de la *respuesta sísmica para un modelo de presa simplificado*. En el IBEM expresamos la difracción del campo de desplazamiento producida por la inclusión elástica y el semiespacio, por medio de representaciones integrales de la *función de Green elastodinámica* en términos de densidades de fuerza desconocidos.

La excitación sísmica está dada por ondas incidentes  $P$ ,  $SV$ ,  $SH$  y *Rayleigh* con distintos ángulos de incidencia. Se introduce el factor de amortiguamiento  $(1 + i/Q)$  donde  $Q$  es un factor de calidad considerado constante. Este factor nos permite aproximar las propiedades de un material inelástico. Dentro del programa IBEM 3D se calculan los desplazamientos de un arreglo lineal de receptores a lo largo de la cortina de la presa. Estos arreglos lineales se extienden a zonas que cubren a la cortina de la presa y parte del semiespacio.

Se obtienen los sismogramas sintéticos, los diagramas frecuencia distancia (f-x), los espectros y la función de transferencia para un arreglo lineal de receptores equidistantes distribuidos a lo largo de la cortina de la presa. Se realiza la comparación cuantitativa y cualitativa de los desplazamientos obtenidos con el IBEM, BEM y FMM para el mismo modelo de presa simplificado con ondas incidentes  $P$  con un ángulo de incidencia  $\gamma = 0$ , para una frecuencia de excitación de  $13.3 \text{ Hz}$ .

## CAPÍTULO II

### PRELIMINARES MATEMÁTICOS

#### Introducción

---

En este capítulo se presentan algunas herramientas matemáticas necesarias para entender algunos modelos matemáticos de la teoría de la elasticidad. En particular damos una clasificación de los tensores que son fundamentales para el desarrollo de modelos matemáticos y computacionales aplicados en la sismología.

---

#### 2.1 Tensores

Considere  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial<sup>1</sup>. Una función  $T: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina *tensor de orden  $k$*  ó  *$k$ -tensor* y se denota como  $T_k$  si para cada una de sus componentes vectoriales  $1 \leq i \leq k$ , es lineal, es decir

$$T(v_1, \dots, av_i + v'_i, \dots, v_k) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k), \quad (2.1)$$

donde  $v_i, v'_i \in \mathcal{V}$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

En la teoría de la elasticidad se representan algunas cantidades físicas como elementos escalares de un espacio vectorial, por ejemplo, la densidad  $\rho$  es un tensor de *orden cero*, el vector de desplazamiento  $u_i$  es un tensor de *orden 1* y la matriz de esfuerzo  $\sigma_{ij}$  es un tensor de *orden 2*, ver tabla 2.1. En el capítulo siguiente hablaremos de cada uno de estos tensores.

<i>Cantidad Física</i>	<i>Tensor</i>	<i>Orden</i>
<i>Densidad</i>	$\rho$	0
<i>Tracciones</i>	$t_i$	1
<i>Esfuerzos</i>	$\sigma_{ij}$	2

**Tabla 2.1.** Ejemplos de tensores

---

<sup>1</sup>  $\mathcal{V}$  está contenido en la recta real  $\mathbb{R}$ .

En los ejemplos anteriores, el orden del tensor se denomina con la cantidad de subíndices que aparecen en cada elemento. Cuando se aplica una transformación lineal a un tensor y su imagen conserva la estructura algebraica de sus operaciones se le llama *tensor cartesiano*.

El único tensor cartesiano de orden 2 que se mapea bajo la transformación identidad se le conoce como *delta de Kronecker*, que está definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

El tensor delta de Kronecker es diagonal para todas las entradas de cualquier tensor de orden 2. Es decir, en forma matricial se representa como la *matriz identidad I*.

### Transformación de tensores Cartesianos

En algebra cuando se multiplica un vector  $x$  por la matriz de transformación  $A$  se obtiene un nuevo vector  $w$  el cual es la imagen del vector  $x$ . En el caso de los tensores se conservan estas reglas de transformación de la manera siguiente

$$w_i = A_{ik}x_k \quad (2.3)$$

Note que el índice del vector transformación  $x_k$  es el segundo índice de la matriz de transformación  $A_{ik}$ , esta operación entre tensores se le llama *contracción de índices*. Se puede realizar la transformación de tensores de cualquier orden mediante transformaciones matriciales, utilizando la contracción de índices como se indica en la tabla 2.2.

Orden del tensor	Regla de transformación
1	$w_i = C_{ip} x_p$
2	$w_{ij} = C_{ip}C_{jq} x_{pq}$
3	$w_{ijk} = C_{ip}C_{jq}C_{kr} x_{pqr}$
4	$w_{ijkl} = C_{ip}C_{jq}C_{kr}C_{ls} x_{pqrs}$

**Tabla 2.2.** Regla de transformación de tensores

En la tabla 2.2 los índices que pertenecen al vector de transformación  $x$  se les denominan *índices mudos* ya que al realizarse la contracción de los índices sólo quedan los que pertenecen al vector transformado  $w$  llamados *índices libres*.

Para conocer la cantidad de elementos que posee un tensor basta realizar la operación  $3^n$ , donde  $n$  es la cantidad de índices<sup>2</sup>. Así un tensor de orden 1 tendrá 3 componentes, un tensor de orden 2 tendrá 9 componentes y así sucesivamente.

Al igual que las propiedades algebraicas de los tensores, habrá propiedades geométricas dadas por el espacio al que pertenecen. Una propiedad geométrica del espacio euclidiano es la *isotropía*. Esto quiere decir que sólo se necesitan las variables independientes con las cuales se define a cualquier elemento del espacio. Para los tensores sólo se necesitan los elementos que están encima y sobre la diagonal, esto es conocido como la propiedad de simetría y se representa con la permutación de cualesquiera dos índices de un tensor:

$$a_{kij} = a_{kji} . \quad (2.4)$$

Es decir todos los tensores cartesianos son simétricos. En el caso de un tensor cartesiano de orden 2 esta propiedad se representa como:  $a_{ij} = a_{ji}$ .

#### El tensor Levi Civita

El tensor Levi Civita no cumple con las propiedades de isotropía del espacio. De manera estricta no es un tensor, esta es la razón de que algunos autores lo llamen *seudotensor Levi Civita* y está definido como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} -1 & \text{permutación cíclica} \\ 0 & \text{índices repetidos} \\ 1 & \text{permutación anticíclica} \end{cases} \quad (2.5)$$

Al realizar todas las permutaciones de índices, encontramos que las únicas combinaciones de índices que no se hacen cero son:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = 1 ,$$

$$\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jik} = \varepsilon_{ikj} = -1.$$

Cuando se realizan demostraciones con identidades vectoriales es común encontrar el producto de dos Levi Civita como  $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmn}$  estos valores pueden ser representados como el determinante de varias deltas de Kronecker

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta_l^i & \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_l^j & \delta_m^j & \delta_n^j \\ \delta_l^k & \delta_m^k & \delta_n^k \end{vmatrix} . \quad (2.6)$$

---

<sup>2</sup> Los índices latinos tienen los valores dados por  $i = \{1,2,3\}$  a menos que se indiquen otros valores.

## 2.2 Transformadas Integrales

Una transformada integral de una función  $f(t)$  en forma general se expresa como la relación

$$g(s) = \int_a^b f(t)K(s,t)dt ,$$

$g(s)$  es conocida como la transformada integral de  $f(t)$  con respecto al *kernel*  $K(s,t)$ , que es una función de ambas variables  $s$  y  $t$ . La transformada integral es lineal cuando satisface la condición

$$\int_a^b \{c_i f_i(t)\} K(s,t)dt = c_i \int_a^b \{f_i(t)\} K(s,t)dt ,$$

donde  $c_i$  son constantes. Existen varias transformadas integrales que dependen del kernel y los límites de integración, como son

$$(i) \quad g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt , \quad \text{Transformada de Laplace}$$

$$(ii) \quad g(s) = \int_0^\infty f(t) t J_n(st)dt , \quad \text{Transformada de Hankel}$$

$$(iii) \quad g(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt , \quad \text{Transformada de Mellin}$$

$$(iv) \quad g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{ist} dt , \quad \text{Transformada de Fourier.}$$

Estas transformadas son de amplia importancia en el desarrollo de la ciencia y tecnología. En el presente capítulo, discutiremos más sobre la transformada de Fourier.

## 2.3 Transformada de Fourier

En sismología la transformada de Fourier se utiliza para analizar señales en el dominio de la frecuencia  $\omega$  expresándolas en el dominio del tiempo  $t$ , o viceversa según sea el interés sobre la señal de excitación.

Cuando se realiza la transformada y la transformada inversa de Fourier<sup>3</sup> en  $n$  dimensiones, se mapea el espacio  $x$  al espacio  $k$  y el espacio  $k$  al espacio  $x$  respectivamente, por medio de las integrales:

---

<sup>3</sup> El lector puede encontrar varios ejemplos de la transformada de Fourier en [46].

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = \frac{\gamma}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} , \quad (2.8.a)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{k} . \quad (2.8.b)$$

El factor  $\gamma$  es una constante de normalización, y se puede elegir arbitrariamente tal que el producto de las constantes de las integrales ecs.(2.8.a) y (2.8.b), sea  $1/2\pi$  para una dimensión y  $1/8\pi^3$  en el espacio tridimensional. Para poder realizar la transformada de Fourier denotada en la literatura como  $\mathcal{F}[f(\mathbf{x})] = \mathcal{F}(\mathbf{k})$  ec.(2.8.a), la función  $f(\mathbf{x})$  debe ser absolutamente integrable y periódica<sup>4</sup>.

#### Derivada de la transformada de Fourier

Una propiedad importante de la transformada de Fourier ec.(2.8.a) es que la derivada  $n$ -ésima de la función  $f(\mathbf{x})$ , tiene como transformada de Fourier  $(ik)^n$  veces la transformada de  $\mathbf{x}$ , esto es

$$\mathcal{F} \left[ \frac{d^n f(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^n} \right] = (ik)^n \mathcal{F}(k) . \quad (2.9)$$

La ec.(2.9) permite en muchas ocasiones realizar la transformada de Fourier de la ecuación de onda (ver capítulo 6) convirtiéndola en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que es computable entre un dominio espacial y un dominio para el número de onda. Este es el llamado *método seudoespectral*.

#### Convolución

El problema matemático de invertir una transformada que es producto de transformadas de funciones conocidas se conoce como *convolución*. Supongamos que  $F(k)$  y  $G(k)$  son las transformadas de Fourier de  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente. Determinemos la función  $h(x)$  cuya transformada de Fourier  $H(k)$  y es igual al producto de las dos transformadas anteriores, es decir  $H(k) = F(k)G(k)$ .

<sup>4</sup> Absolutamente integrable  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  y periódica  $f(x + C) = f(x)$ .

Aplicando la transformada inversa ec.(2.8.b) con  $n=1$  de  $H(k)$  e intercambiando el orden de integración tenemos que,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x}) e^{ik\bar{x}} d\bar{x} \right] e^{-ikx} dk ,$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ik(x-\bar{x})} dk \right] d\bar{x} ,$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x}) f(x - \bar{x}) d\bar{x}$$

la integral anterior se denomina convolución de  $g(x)$  y  $f(x)$ , que suele denotarse también como  $g * f$ . La transformada de Fourier inversa del producto de dos transformadas de Fourier es  $1/2\pi$  veces la convolución de las dos funciones. Si hacemos  $x - \bar{x} = k$ , implica que  $d\bar{x} = -dk$  de las propiedades de las integrales<sup>5</sup>, obtenemos la forma alternativa

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) f(x - k) dk , \quad (2.10)$$

que denotamos por  $f * g$ . Así llegamos a una propiedad de la convolución  $g * f = f * g$ .

## 2.4 La delta de Dirac

Sea un  $\{\varphi_n\}$  un conjunto completo de funciones ortonormales en el intervalo  $(a,b)$ ; desarrollamos la función arbitraria de cuadrado integrable  $f(x)$ , con  $a < x < b$ , en términos de las  $\varphi_n$ :

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) , \quad (2.11)$$

donde ,

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n^*(x) dx . \quad (2.12)$$

Introducimos (2.12) en (2.11) e intercambiamos la suma y la integral, para obtener

$$f(x) = \sum_n \varphi_n(x) \int_a^b f(x') \varphi_n^*(x') dx' = \int_a^b f(x') dx' \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n^*(x') .$$

---

<sup>5</sup>  $\int_{\infty}^{-\infty} f dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f dx$

Si definimos  $\delta(x, x') = \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n^*(x')$ , obtenemos finalmente que

$$f(x) = \int_a^b f(x') \delta(x, x') dx' . \quad (2.13)$$

Este resultado es válido para cualquiera que sea  $f(x)$ , lo que implica que la función delta  $\delta(x, x')$  aquí definida debe poseer propiedades peculiares; podemos entender su estructura básica de la siguiente forma. Sea  $\Delta(x - x')$  una función con valor<sup>6</sup>  $\Delta_o(x)$  si  $|x - x'| < \varepsilon$  y con valor cero si  $|x - x'| > \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es un número positivo arbitrariamente pequeño. Para una  $f(x)$  arbitraria podemos escribir, con  $x, x'$  en  $(a, b)$ ,

$$f(x) = \int_a^b \Delta(x - x') f(x') dx' = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x') \Delta_o(x') dx' = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \Delta_o(x') dx' + O(\varepsilon) ,$$

para escribir la última igualdad se hizo un desarrollo de Taylor de  $f(x')$  alrededor de  $x$ . Si exigimos ahora que el área bajo la función  $\Delta$  sea la unidad,

$$\int \Delta_o(x') dx' = 1 ,$$

obtenemos la propiedad,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \Delta(x - x') f(x') dx' = f(x) . \quad (2.14)$$

Al comparar con (2.13) vemos que podemos hacer

$$\delta(x, x') \equiv \delta(x - x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(x - x') .$$

Si  $f(x) = 1$  en (2.13) para  $a < x < b$  vemos que

$$\int_a^b \delta(x - x') dx' = 1 .$$

La ec.(2.14) no es una función, estrictamente representa una familia de distribuciones de funciones gaussianas dependientes del parámetro  $\varepsilon$ . Por otra parte si aplicamos la ec.(2.8.a) sobre la delta de Dirac  $n$  dimensional tenemos que,

$$\mathcal{F}[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) e^{ik \cdot \mathbf{x}} d^n x$$

<sup>6</sup> En la teoría de las distribuciones se le llama *delta de Dirac* a la funcional  $\Delta_y$  que asocia a cada función  $g$  de  $V$  el valor  $g(y)$ , es decir  $\Delta_y(g) = g(y)$ .

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} . \quad (2.15)$$

La ec.(2.15) es la transformada de Fourier de la delta de Dirac  $n$  dimensional.

## 2.4 Descomposición de Helmholtz para un vector

Sea el vector  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  diferenciable en intervalos en una región abierta finita  $V$  del espacio. Con cada punto del espacio asociado a un vector

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.16)$$

donde  $dV_{\boldsymbol{\xi}} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$  y  $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$  es la distancia Euclidina tridimensional. Conociendo que  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  satisface la ecuación vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{W} = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

para puntos interiores donde  $\mathbf{p}$  es continuo y

$$\nabla^2 \mathbf{W} = 0 ,$$

para puntos fuera de la región  $V$ . Utilizando la ec.(2.17) y la identidad vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{W} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{W} - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{W} ,$$

podemos reescribir  $\mathbf{p}$  como

$$\mathbf{p} = \nabla[\nabla \cdot \mathbf{W}] + \nabla \wedge [-\nabla \wedge \mathbf{W}] ,$$

$$\mathbf{p} = \nabla \mathbf{P} + \nabla \wedge \mathbf{Q} .$$

Note que  $\mathbf{P} = \nabla \cdot \mathbf{W}$  y  $\mathbf{Q} = -\nabla \wedge \mathbf{W}$ . Puede ser mostrado que  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  están definidos en cualquier punto interior donde son continuos y diferenciables.

## CAPÍTULO III

# TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

### Introducción

---

En este capítulo se deducen las ecuaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad, como el tensor de deformaciones, el tensor de esfuerzos y la ley de Hooke. Expondremos también de manera rápida las ecuaciones de la elastodinámica de un cuerpo isótropo y homogéneo en el espacio, con el enfoque clásico que se da en algunos textos, ver [25] y [33].

---

### 3.1 El tensor de Deformación

La teoría de la elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos<sup>1</sup>, que se consideran medios continuos. Cuando se aplican fuerzas sobre los sólidos estos se deforman, cambiando su forma o volumen. Consideremos la posición de cualquier punto de un cuerpo sólido mediante su radio vector  $\mathbf{r}$  antes de la deformación (en un sistema de coordenadas  $x_i$ ), y después de la deformación el vector  $\mathbf{r}'$  (con componentes  $x_i'$ ), en general cuando se produce una deformación, esta queda determinada por el vector  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , que definimos como  $\mathbf{u}$ .

$$u_i = x_i' - x_i.$$

En la literatura este vector se le llama *vector de desplazamiento*. Las coordenadas  $x_i'$  del punto desplazado son funciones de las coordenadas  $x_i$  del mismo punto antes de desplazarse. De manera que  $u_i$  es función de las coordenadas  $x_i$ .

Cuando un cuerpo se deforma, las distancias entre sus puntos varían. Para cualquier distancia de un radio vector que une a una pareja de puntos  $dx_i$  que pertenecen a un cuerpo antes de someterlos a una deformación, queda determinada por el elemento de longitud  $dl^2 = dx_i^2$ , y después de la deformación el mismo radio vector es  $dx_i' = dx_i + du_i$ , tal que la distancia después de la deformación será  $dl'^2 = (dx_i + du_i)^2$ .

Desarrollando la distancia después de la deformación y sustituyendo  $du_i$  por su derivada total  $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$  en el sistema de coordenadas  $x_k$ , tenemos:

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l.$$

---

<sup>1</sup> En muchas aplicaciones en sismología la Tierra se considera un cuerpo sólido isótropo y homogéneo.

Intercambiando los subíndices  $i, k$  y  $l, i$  en el segundo y tercer término del lado derecho respectivamente, llegamos a la expresión

$$dl'^2 = dl^2 + 2\epsilon_{ik}dx_i dx_k ,$$

donde el tensor  $\epsilon_{ik}$  se define como

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right).$$

El tensor  $\epsilon_{ik}$  se le conoce como *tensor de deformación*, y este sirve para calcular la variación infinitesimal de deformación de un sólido. A partir de la definición observamos que este tensor de segundo orden posee la propiedad de simetría  $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ .

Casi siempre en la práctica las deformaciones son pequeñas. Esto significa que la variación de una longitud, comparada con la longitud misma, es pequeña. Por tanto podemos despreciar los términos de orden superior del tensor de deformaciones, tal que el tensor para deformaciones pequeñas que utilizaremos será

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) . \quad (3.1)$$

### 3.2 El tensor de Tracciones

Con el fin de cuantificar la naturaleza de la distribución de las fuerzas internas dentro de un sólido isótropo y homogéneo, considere un cuerpo sólido elástico sujeto a fuerzas externas  $P$  arbitrarias (concentradas y distribuidas) como se muestra en la Fig(3.1).

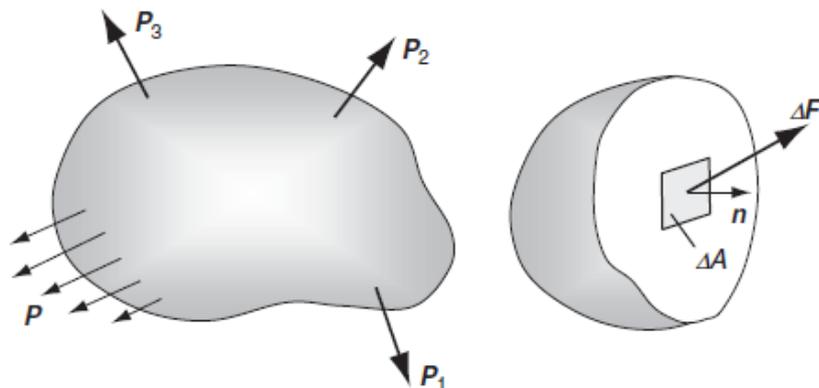


Fig 3.1. Sección transversal bajo fuerzas externas.

Tomando en cuenta las fuerzas internas del sólido, realizamos un corte transversal del cuerpo. En esta sección transversal tomamos un área pequeña  $\Delta A$  cuyo vector unitario normal es  $n$ . La fuerza resultante de la superficie que actúa en  $\Delta A$  se define como  $\Delta F$ . El *vector de tracción* se define como:

$$T^n(x, n) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Note que el vector de tracción depende tanto de la ubicación espacial como del vector unitario normal a la superficie de interés. Así, aunque podemos estar sobre el mismo punto, el vector de tracción variará en función de la orientación de la normal a la superficie. Debido a que la tracción se define como la fuerza por unidad de superficie, la fuerza total  $F_s$  sobre la superficie del cuerpo  $S$  se determina por:

$$F_s = \iint_S T^n(x) dS.$$

Por la tercera ley de Newton tenemos que  $T^n(x, n) = -T^n(x, -n)$ . Consideremos ahora el caso especial en el que  $\Delta A$  coincide con cada uno de los tres planos coordenados y sus vectores unitarios normales apuntando hacia la dirección positiva, como se muestra en la Fig(3.2).

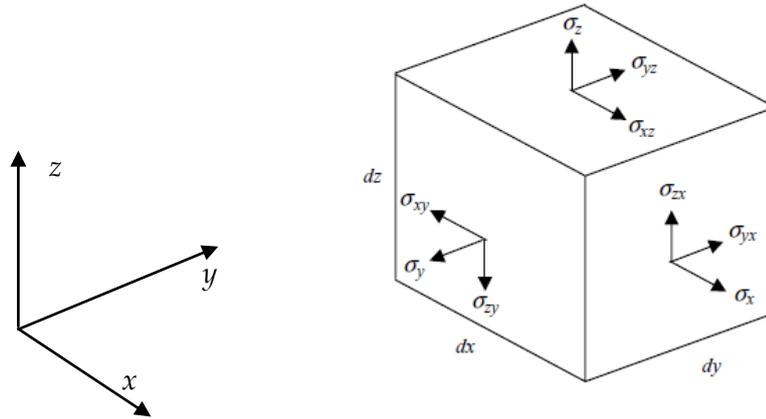


Fig 3.2. Componentes del tensor de esfuerzos.

Para este caso, el vector de tracción en cada cara puede ser escrito de la manera siguiente

$$\begin{aligned} T^{e_1}(x, e_1) &= \sigma_{xx}e_1 + \sigma_{xy}e_2 + \sigma_{xz}e_3, \\ T^{e_2}(x, e_2) &= \sigma_{yx}e_1 + \sigma_{yy}e_2 + \sigma_{yz}e_3, \\ T^{e_3}(x, e_3) &= \sigma_{zx}e_1 + \sigma_{zy}e_2 + \sigma_{zz}e_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $e_1, e_2, e_3$  son los vectores de la base canónica cartesiana, y las nueve cantidades  $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{yz}\}$  son las componentes del vector de tracción en cada dirección, como se ilustra en la Fig(3.2). Donde  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ , son conocidas como los esfuerzos normales y  $\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{yz}$  son denominados esfuerzos cortantes. Las componentes de los esfuerzos pueden ser escritas en forma matricial como:

$$\sigma_{ik} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Consideremos ahora el vector de tracción en un plano inclinado con orientación arbitraria, como se muestra en la Fig(3.3). La normal unitaria a la superficie puede ser expresada por:

$$n_k = n_x e_1 + n_y e_2 + n_z e_3 ,$$

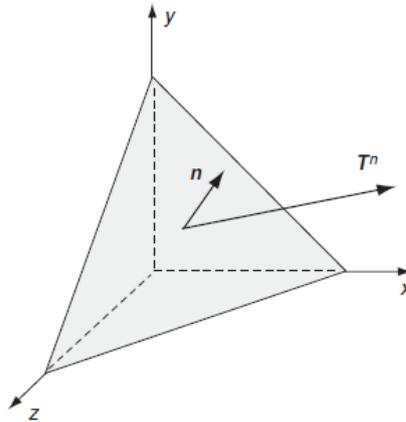


Fig 3.3. Tracción en un plano oblicuo.

donde  $n_x, n_y, n_z$  son los cosenos directores del vector unitario  $n$  relativo al sistema coordenado cartesiano. Asumiendo que existe equilibrio entre las fuerzas de las tracciones del plano oblicuo y los planos coordenados tenemos que:

$$T^n = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z)e_1 + (\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z)e_2 + (\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z)e_3$$

utilizando notación índice, escribimos de manera compacta

$$t_i = \sigma_{ik}n_k \quad (3.3)$$

el tensor  $t_i$  es llamado *tensor de Cauchy*, y relaciona los esfuerzos ejercidos en una superficie asociada a su vector normal.

### 3.3 La ley de Hooke

En términos generales, la relación lineal entre las componentes del tensor de esfuerzos y las componentes del tensor de las deformaciones es

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (3.4).$$

La ecuación (3.4) es conocida como la Ley de Hooke. Donde 21 de las 81 componentes del tensor  $C_{ijkl}$  por la propiedad de simetría son independientes. Si el medio es homogéneo los coeficientes  $C_{ijkl}$  son constantes. Si el medio es isótropo, las constantes elásticas deben ser las mismas en cualquier sistema de coordenadas cartesianas, en que las componentes de  $\sigma_{ij}$  y  $\epsilon_{ij}$  son evaluados. Es decir realizando el cambio de coordenadas del sistema  $x_i'$  al sistema  $x_i$ , el coeficiente  $C_{ijkl}$  sigue la regla de transformación

$$C_{mnpq} = \beta_{mi}\beta_{nj}\beta_{pk}\beta_{ql}C_{ijkl} ,$$

que lo exhibe como un tensor isótropo. Se puede demostrar que es de la forma

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) .$$

Donde  $\lambda$  y  $\mu$  son dos constantes físicas que dependen de la naturaleza del medio material, llamadas constantes de Lamé<sup>2</sup>. Escribimos entonces la *ley de Hooke* en la forma más conocida

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} . \quad (3.5)$$

Haciendo  $i = j$  en los subíndices de la ecuación (3.4), tenemos que  $\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\epsilon_{ii}$ , despejando  $\epsilon_{ii}$  e introduciendo nuevamente en la ley de Hooke (3.5), obtenemos las deformaciones en términos de los esfuerzos, como sigue

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} . \quad (3.6)$$

Es claro que  $\epsilon_{ij}$  puede ser determinado de manera única por  $\sigma_{ij}$  sólo si  $\mu \neq 0$  y  $3\lambda + 2\mu \neq 0$ . Y para no tener deformaciones cero para esfuerzos finitos deberíamos tener además que  $|\mu| < \infty$  y  $|3\lambda + 2\mu| < \infty$ .

### 3.4 Ecuaciones de la Elastodinámica

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un medio elástico, igualamos la suma de las fuerzas internas  $f_i$  (también llamadas fuerzas de cuerpo), al producto de la aceleración y la densidad  $\rho$  del medio donde actúan dichas fuerzas. Entonces la ecuación dinámica general de la elasticidad es

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho\frac{d^2u_i}{dt^2} . \quad (3.7)$$

<sup>2</sup> Las constantes elásticas  $\lambda$  y  $\mu$  pueden ser expresadas en función del Módulo de Young E, Módulo de compresibilidad B o el coeficiente de Poisson, ver [2] p54 ó [12] pp46-47.

Sustituyendo la ecuación (3.1) en (3.5) obtenemos los esfuerzos en términos del campo de desplazamiento como

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) .$$

Remplazando la ecuación anterior en (3.7), obtenemos la ecuación dinámica de movimiento para un sólido homogéneo e isótropo

$$\boxed{(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} .} \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) fue propuesta en 1821 por el físico francés Louis M. H. Navier (1785-1836) y se conoce como la *ecuación de Navier*. Notemos que la dinámica del medio elástico queda totalmente determinada si se conoce explícitamente el campo de desplazamiento  $u_i$ .

El problema de la elasticidad consiste en encontrar el campo de desplazamiento que cumpla con las condiciones de frontera establecidas, singularidades (si las hay) y las condiciones iniciales.

Existen soluciones analíticas para la ec.(3.8) ,tal como las *soluciones de Stokes*, donde se aplica una fuerza puntual en el origen para un medio elástico isótropo, homogéneo y de extensión infinita, el lector puede encontrar estas soluciones en el dominio del tiempo y frecuencia de en el apéndice C.

### 3.5 Ondas Elásticas

Escribimos la ecuación de Navier ec.(3.8) excluyendo las fuerzas de cuerpo como:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}$$

ó en su forma vectorial

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{d^2 u}{dt^2} . \quad (3.9)$$

Es posible demostrar mediante el teorema de Helmholtz que para un campo vectorial cualquiera se cumpla la identidad

$$\nabla^2 u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \wedge (\nabla \wedge u).$$

Sustituyendo esta identidad en la ec.(3.9) obtenemos que

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu[\nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \wedge (\nabla \wedge u)] = \rho \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot u) - \mu[\nabla \wedge (\nabla \wedge u)] = \rho \frac{d^2u}{dt^2} \quad (3.10)$$

Suponemos que el desplazamiento se efectúa sin cambio de volumen, es decir con un flujo de materia nulo  $\nabla \cdot u = 0$ . En este caso podemos reescribir la ec.(3.9) como:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\beta} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad (3.11)$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Luego suponiendo que el movimiento del medio elástico es *continuo* e *irrotacional*, es decir  $\nabla \wedge u = 0$ , la ec.(3.10) se escribe como:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad (3.13)$$

donde

$$\alpha = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Las ecs.(3.11) y (3.14) son las soluciones para la ecuación de Navier (3.8), llamadas ecuación de onda S y P, con velocidades dadas por las ecs.(3.12) y (3.14), respectivamente. En el siguiente capítulo se discuten propiedades físicas de este tipo de ondas y se realiza un análisis más profundo la ecuación de onda en el capítulo siete.

## CAPÍTULO IV

# PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN UN MEDIO ELÁSTICO

### Introducción

---

En este capítulo se realiza una breve descripción de la propagación de ondas sísmicas (*S*, *P* y *Rayleigh*) en un medio sólido elástico.

Exponemos de manera compacta algunas de las ecuaciones que se utilizan en el programa IBEM 3D, para el cálculo de los desplazamientos y esfuerzos de un semiespacio elástico, ante la incidencia de ondas sísmicas.

---

### 4.1 Ondas Sísmicas

Una onda sísmica, es una perturbación mecánica que produce una deformación sobre el medio en el cual se propaga con una velocidad  $c$ , que depende de sus propiedades elásticas y de su densidad.

En un medio elástico, homogéneo, isótropo y de extensión infinita, sólo se pueden transmitir dos tipos de ondas; las ondas *P* y *S*. Sin embargo, durante un evento sísmico se producen *ondas superficiales* en presencia de una superficie libre, por ejemplo; ondas de Rayleigh y ondas de Love.

#### *Ondas P*

Este tipo de ondas son las más rápidas, es decir son las primeras en llegar a una estación de monitoreo sísmico. Su movimiento se caracteriza por el desplazamiento de las partículas del medio en la dirección de propagación de la onda, produciendo dilataciones y compresiones, pero sin cambio de forma de las partículas; por lo que se denominan ondas longitudinales. Las ondas *P* son capaces de viajar en sólidos, líquidos y ser transmitidas en el aire como ondas sonoras. La velocidad de las ondas *P* se define como  $\alpha$ , dada por:

$$\alpha = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé y  $\rho$  es la densidad del medio en que se propaga la onda *P*.

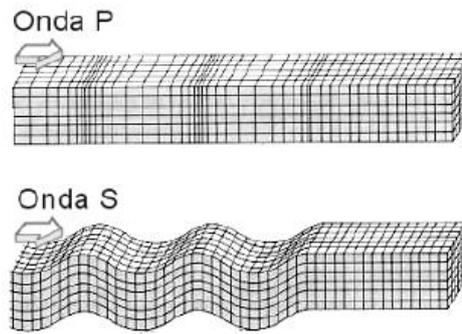


Fig 4.1. Desplazamiento longitudinal (Onda *P*) y transversal (Onda *S*).

### *Ondas S*

Son aquellas en que las partículas del medio se desplazan de manera perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Son las segundas en ser detectadas por una estación de monitoreo sísmico y también son llamadas ondas transversales o de cortante. No pueden viajar a través de líquidos debido a que el esfuerzo cortante en estos es nulo. Su velocidad de propagación está definida como  $\beta$  donde,

$$\beta = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

La velocidad de las ondas *P* y las ondas *S* están relacionadas por el módulo de Poisson  $\nu$  definido como:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}\right)^{1/2}. \quad (4.1)$$

Las ondas *P* aunque viajan a mayor velocidad, tienen frecuencias más altas y amplitudes menores que las *S*, por ello a estas últimas se les asocia el daño provocado durante temblores, en los que para una gran cantidad de rocas el módulo de Poisson tiene un valor de  $\nu = 0.25$ , y de acuerdo a la ec.(4.1)  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$ .

En el análisis sísmico es conveniente polarizar las ondas *S* como; ondas *SH* y *SV*. Las ondas *SH* y *SV* son la proyección horizontal y vertical de la onda incidente *S* respectivamente, como se muestra en la Fig (4.2).

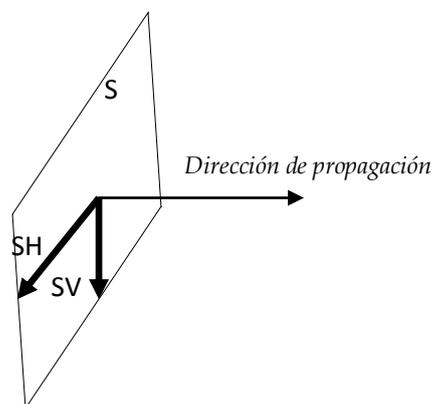


Fig 4.2. Frente de onda *S* polarizado en sus componentes *SH* y *SV*.

## 4.2 Ondas Superficiales

Las ondas superficiales se caracterizan por tener una velocidad de grupo menor que la velocidad de fase de cada onda. Suelen presentar amplitudes máximas en la superficie que se atenúan con la profundidad. Existen diversos tipos de ondas superficiales, las cuales son: *ondas de Stonley*, *ondas de Love* y *ondas de Rayleigh*. Las *ondas de Stonley* son aquellas producidas en la superficie libre de dos semiespacios con propiedades elásticas distintas, el lector interesado puede consultar la descripción matemática de estas ondas en [2]. Discutimos en seguida las características de las ondas de Love y de Rayleigh.

### *Ondas de Love*

Puede demostrarse que la propagación de las ondas superficiales (que se atenúan con la profundidad) del tipo *SH* en un semiespacio homogéneo no es posible. No obstante este tipo de ondas se observan frecuentemente en la superficie terrestre. Love demostró que una teoría suficiente para explicar las ondas *SH* superficiales consiste en colocar un estrato homogéneo de espesor uniforme  $h$ , sobre un semiespacio con propiedades  $\mu_1, \beta_1$  y  $\mu_2, \beta_2$  respectivamente, como se muestra en la Fig(4.3).

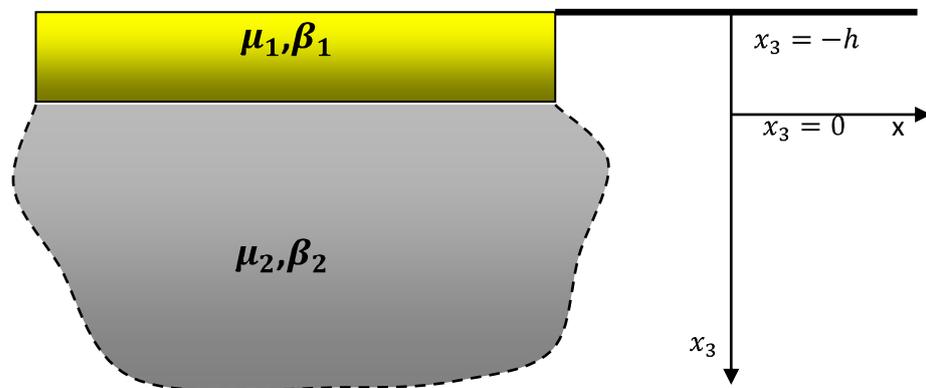


Fig 4.3. Modelo de Love para explicar las ondas superficiales SH

Las *ondas de Love* tienen un movimiento transversal paralelo a la superficie libre y esto se debe a las propiedades elásticas que son distintas entre el estrato y el semiespacio. Estas ondas se pueden propagar a través de la capa superficial sin penetrar. Son más lentas que las ondas de cuerpo (*S* y *P*) pero se pueden desplazar a mayor velocidad que las de *Rayleigh*, ver Fig(4.4).

Ondas de Rayleigh

La posibilidad de una onda viajando a lo largo de una superficie libre en un semiespacio elástico fue estudiada por Lord Rayleigh<sup>1</sup>, quien mostró que los efectos de este tipo de ondas decrecen exponencialmente con la profundidad y que su velocidad, menor que las ondas de cuerpo es del orden de  $0.92\beta$  (2 a 4 km/s). El movimiento de las partículas que están en una vecindad de la superficie libre, se realiza en forma de una elipse retrógrada con el eje mayor en la posición vertical, ver Fig(4.4).

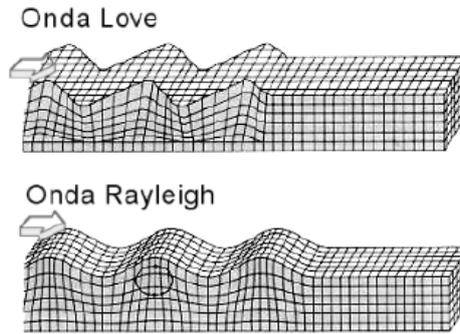


Fig 4.4. Ondas superficiales Rayleigh (inferior) y ondas de Love (superior).

En la siguiente sección se dan las expresiones de los esfuerzos y desplazamientos de la solución de campo libre en coordenadas cartesianas para las ondas  $P$ ,  $SV$  y  $Rayleigh$ .

**4.3 Desplazamientos y Esfuerzos para ondas P, SV y Rayleigh**

Si se considera que el plano de la incidencia de este tipo de ondas es perpendicular al plano  $xz$  se puede afirmar que  $\bar{\psi} = \psi_y = \psi$ .

Entonces los potenciales de desplazamiento pueden escribirse como:

$$\varphi = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} e^{i\omega t}, \tag{4.2}$$

$$\psi = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} e^{i\omega t}, \tag{4.3}$$

donde  $l = \frac{\omega}{c}$ ,  $m = lf_\alpha$ ,  $k = lf_\beta$ ,  $\omega > 0$ ,

$$f_\alpha = \left( \frac{c^2}{\alpha^2 - 1} \right)^{1/2}, \tag{4.4}$$

$$f_\beta = \left( \frac{c^2}{\beta^2 - 1} \right)^{1/2}. \tag{4.5}$$

<sup>1</sup> Lord Rayleigh, *Proceedings London Mathematical Society* **17** (1887),**4**.

Aquí  $c$  es la velocidad de fase aparente dada por:

$$c = \frac{\alpha}{\text{sen } \gamma_p} = \frac{\beta}{\text{sen } \gamma_s}, \quad (4.6)$$

$\gamma_p$  y  $\gamma_s$  son los ángulos de incidencia y reflexión para ondas  $P$  y  $S$ , respectivamente.

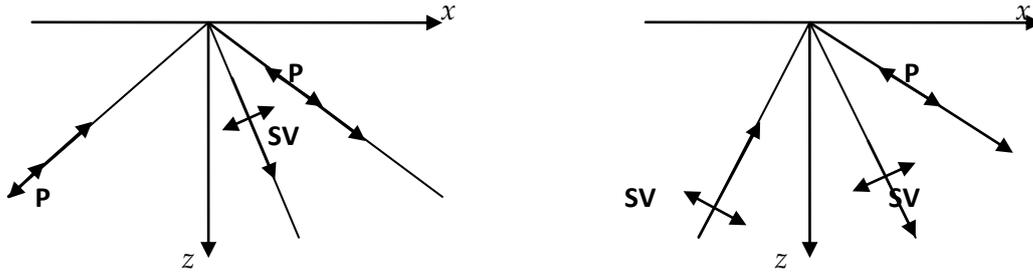


Fig 4.4. Incidencia de ondas  $P$  (izquierda) y  $SV$  (derecha) en una superficie libre.

Los coeficientes  $A_1$  y  $B_1$  son las amplitudes de los potenciales de las ondas planas incidentes  $P$  y  $SV$ , respectivamente; en cambio  $A_2$  y  $B_2$  representan las amplitudes de las ondas reflejadas.

Una vez establecidas las funciones potenciales, los desplazamientos y los esfuerzos de campo libre pueden expresarse como:

$$u_x^{(0)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (4.7)$$

$$u_z^{(0)} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{xx}^{(0)} = \lambda \left( \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x}, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \lambda \left( \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}, \quad (4.10)$$

$$\sigma_{zx}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(0)} = \mu \left( \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial z} \right), \quad (4.11)$$

$$\sigma_{yy}^{(0)} = \nu \left( \sigma_{xx}^{(0)} + \sigma_{zz}^{(0)} \right), \quad (4.12)$$

$$u_y^{(0)} = \sigma_{yx}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(0)} = 0. \quad (4.13)$$

Entonces el tensor de esfuerzos está representado por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Sustituyendo las ecs.(4.4) y (4.5) en las ecs.(4.9-4.13), se obtiene:

$$u_x^{(0)} = -il\phi_1 + ik\psi_2, \quad (4.15)$$

$$u_z^{(0)} = im\phi_2 + il\psi_1, \quad (4.16)$$

$$\sigma_{xx}^{(0)} = -\lambda(l^2 + m^2)\phi_1 + 2\mu(-l^2\phi_1 + kl\psi_2), \quad (4.17)$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = -\lambda(l^2 + m^2)\phi_1 + 2\mu(-m^2\phi_1 - kl\psi_2), \quad (4.18)$$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \mu(2ml\phi_2 + (l^2 - k^2)\psi_1). \quad (4.19)$$

Omitiendo el factor  $e^{i\omega t}$ , los potenciales  $\phi_1, \phi_2, \psi_1$  y  $\psi_2$  se pueden representar mediante:

$$\phi_1 = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx}, \quad (4.20)$$

$$\phi_2 = (A_1 e^{imz} - A_2 e^{-imz}) e^{-ilx}, \quad (4.21)$$

$$\psi_1 = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx}, \quad (4.22)$$

$$\psi_2 = (B_1 e^{ikz} - B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx}. \quad (4.23)$$

Considerando la incidencia de ondas  $P$  ( $B_1 = 0$ ) y  $\beta < \alpha < |c|$  y las condiciones de la frontera libre ( $\sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(0)} = 0$ ), se obtienen las relaciones de las amplitudes:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2}, \quad (4.24)$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4f_\alpha (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2}. \quad (4.25)$$

Para ondas  $P$  y  $SV$  reflejadas en términos de la amplitud de la onda  $P$  incidente. Si la onda incidente es  $SV$ ,  $A_1 = 0$ , se presentan dos casos:

- a)  $\beta < \alpha < |c|$
- b)  $\beta < |c| < \alpha$ .

En ambos casos, aceptando que  $\text{Im}(f_\alpha) < 0$ , se obtiene:

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{4f_\beta (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2}, \quad (4.26)$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{4f_\alpha f_\beta - (f_\beta^2 - 1)^2}{4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2} \quad (4.27)$$

Otra condición resulta al considerar:

$$c) \quad |c| < \beta < \alpha.$$

Donde  $f_\alpha$  y  $f_\beta$  son imaginarias, aceptando que  $\text{Im}(f_\alpha) < 0$  y  $\text{Im}(f_\beta) < 0$  tomando  $A_1 = B_1 = 0$ , al imponer condiciones de frontera se llega a la expresión:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{2f_\beta}{(f_\beta^2 - 1)} = \frac{(1 - f_\beta^2)}{2f_\alpha} \quad (4.28)$$

de esta desigualdad se obtiene la ecuación:

$$4f_\alpha f_\beta + (f_\beta^2 - 1)^2 = 0, \quad (4.29)$$

conocida como la ecuación de Rayleigh, que es cubica en  $c^2$  y cuya raíz real  $c_R$  es la velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh.

Estas ondas están compuestas por ondas P y SV, que viajan acopladas con velocidad  $c_R < \beta$ , y se atenúan con la profundidad. Las partículas en la superficie describen trayectorias elípticas retrógradas. En la Fig(4.5) se esquematiza este movimiento.

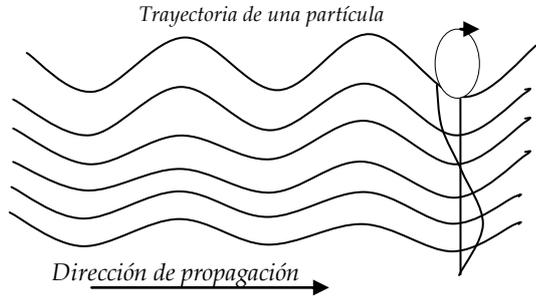


Fig 4.5. Incidencia de ondas Rayleigh en una superficie libre

Para resolver el problema basta conocer las velocidades fase por medio de las ecs.(4.8) ó (4.31), calculando  $f_\alpha$  y  $f_\beta$  con las ecs.(4.6) y (4.7), (con  $\text{Im}(f_\alpha) < 0$  y  $\text{Im}(f_\beta) < 0$ ) para así obtener las amplitudes correspondientes con las ecs.(4.26-4.28), finalmente la solución de campo libre estará dada por las ecs.(4.17-4.21).

#### 4.4 Desplazamientos y Esfuerzos para Ondas SH

Si el plano de incidencia es perpendicular al plano  $xz$  resulta que  $u = w = 0$ ;  $v = v(x, y, z)$ . Bajo estas condiciones la ecuación de onda resulta ser escalar del tipo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.30)$$

Si consideramos ondas periódicas con dependencia del tiempo dada por el factor  $e^{i\omega t}$ , los campos incidentes y reflejados, ver Fig(4.6), pueden expresarse en la forma:

$$v^i = \exp \left[ i\omega \left( t + \frac{z \cos \gamma - x \operatorname{sen} \gamma}{\beta} \right) \right], \quad (4.31)$$

$$v^r = \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{z \cos \gamma + x \operatorname{sen} \gamma}{\beta} \right) \right]. \quad (4.32)$$

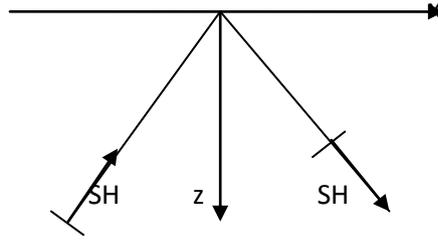


Fig 4.6. Incidencia de ondas SH en una superficie libre

Donde  $\gamma$  es el ángulo de incidencia. Los desplazamientos de campo libre pueden ser expresados como:

$$v = v^i + v^r = 2 \cos \left( \frac{\omega}{\beta} z \cos \gamma \right) e^{-ilx} e^{-i\omega t}, \quad (4.33)$$

con  $l = \frac{\omega}{c}$  y  $c$  como la velocidad de fase dada por la ec.(4.8). Finalmente los esfuerzos son obtenidos mediante:

$$\sigma_{yz}^{(0)} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = 2\mu \frac{\omega}{\beta} \cos \gamma \left[ -\operatorname{sen} \left( \frac{\omega}{\beta} z \cos \gamma \right) \right] e^{-ilx} e^{-i\omega t}, \quad (4.34)$$

$$\sigma_{yx}^{(0)} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = 2\mu l \left[ -i \cos \left( \frac{\omega}{\beta} z \cos \gamma \right) \right] e^{-ilx} e^{-i\omega t}, \quad (4.35)$$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{xx}^{(0)} = \sigma_{yy}^{(0)} = 0. \quad (4.36)$$

Por lo cual el tensor de esfuerzos tiene la forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ 0 & \sigma_{zy} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

En el programa IBEM 3D se han programado las ecuaciones para los desplazamientos y esfuerzos de las ondas incidentes S, P y Rayleigh, de manera que se puede obtener la solución de campo libre como referencia, para topografías complejas.

# CAPÍTULO V

## FUNCIÓN DE GREEN

### Introducción

---

El objetivo de este capítulo es encontrar la solución fundamental de la ecuación de onda no homogénea, mostrando que existe una función asociada a este problema que se llama función de Green y que puede usarse para describir la influencia de la *fente, las condiciones iniciales y condiciones de contorno*. Obtendremos la función de Green de todo el espacio para la ecuación de onda en una y tres dimensiones. Por último se expone el tensor de Green para un medio elástico utilizado en propagación de ondas sísmicas.

---

### 5.1 Función de Green

La solución del problema unidimensional no homogéneo

$$L(u) = f(x) \quad , \quad (5.1)$$

donde  $L$  es un operador diferencial lineal<sup>1</sup> y  $f(x)$  una función sujeta a las condiciones de contorno homogéneas,  $f(x) = 0$  cuando  $x = a$  y  $x = b$  para el intervalo  $a \leq x \leq b$ ,

$$u(x) = \int_a^b f(x_o)G(x, x_o) dx_o . \quad (5.2)$$

La función  $G(x, x_o)$  es llamada función de Green ó solución fundamental, esta es la distribución de influencia sobre la función  $f(x)$ . Suponiendo que  $f(x)$  es una fuente concentrada en  $x = x_s$ , es decir  $f(x) = \delta(x - x_s)$ . Entonces la respuesta  $u(x)$ , en cada punto  $x$ , satisface

$$u(x) = \int_a^b \delta(x_o - x_s)G(x, x_o) dx_o = G(x, x_s) ,$$

---

<sup>1</sup>  $L$  es un operador lineal diferencial que puede estar formado por la combinación lineal de derivadas de distintos ordenes.  $L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$

esta es la interpretación física más importante de la función de Green:  $G(x, x_s)$  es la respuesta en el punto  $x$  debido a la fuente concentrada en  $x_s$ , es decir

$$L[G(x, x_s)] = \delta(x - x_s) , \quad (5.3)$$

donde  $G(x, x_s)$  satisface las mismas condiciones de contorno homogéneas en  $x = a$  y  $x = b$ . Como comprobación, verifiquemos que (5.2) satisface (5.1). Para ello usemos el operador  $L$  en el caso más sencillo,  $L = \frac{d^2}{dx^2}$  :

$$L(u) = \int_a^b f(x_o)L[G(x, x_o)] dx_o = \int_a^b f(x_o)\delta(x_o - x_s) dx_o = f(x_s) ,$$

donde hemos usado la ecuación (5.3), y la propiedad<sup>2</sup> de la delta de Dirac. Utilizaremos la notación índice para representar un vector  $\bar{x}$  de dimensión  $n$ , como  $x_k$  donde  $k = 1, \dots, n$ .

## 5.2 Ecuación de Onda no Homogénea

En esta sección resolveremos la ecuación de onda con una fuente dependiente tanto de la variable espacial como del tiempo ec.(5.4), sujeta a las condiciones iniciales<sup>3</sup>  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_k, 0) = g(x_k)$  y  $u(x_k, 0) = f(x_k)$  ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u + Q(x_k, t). \quad (5.4)$$

Donde  $u(x_k, t)$  es la solución a la ecuación de onda no homogénea. Podemos identificar el operador  $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2$  y verificar que

$$L[u(x_k, t)] = Q(x_k, t) , \quad (5.5)$$

$$L[G(x_k, t^0; x_k^0, t)] = \delta(x_k - x_k^0)\delta(t - t^0) . \quad (5.6)$$

Algunas de propiedades de la función de Green son la *reciprocidad* y la *causalidad*. La propiedad de reciprocidad nos proporciona información de la fuente  $(x_k^0, t^0)$  y un receptor  $(x_k^1, t^1)$ , en donde se cumple la identidad

$$G(x_k^0, t^0; x_k^1, t^1) = G(x_k^0, t^1; x_k^1, t^0) \quad (5.7)$$

Esto quiere decir que si  $t^1 > t^0$ , la respuesta en  $x_k^1$  (en tiempo  $t^1$ ) producida por una fuente concentrada en  $x_k^0$  (y en tiempo  $t^0$ ) es la misma que la respuesta en  $x_k^0$  (en tiempo  $t^1$ ) debida a una fuente concentrada en  $x_k^1$ , siempre que los lapsos de tiempo sean iguales en ambas fuente.

---

<sup>2</sup> Por definición  $f(x_o) = \int f(x)\delta(x - x_o)dx$

<sup>3</sup>  $x_k^0$  representa al vector  $x_k$  en el instante  $t = t^0 = 0$ . Cuando el superíndice es distinto de cero representa al mismo vector  $x_k$  para  $t \neq 0$ .

La condición (5.8) es llamada la *causalidad* de la función de Green, es decir para  $t > t^0$ , la función es cero.

$$G(x_k, t^0; x_k^0, t) = 0 \quad \text{para} \quad t > t^0. \quad (5.8)$$

Observe que el operador de onda ec.(5.5) y (5.6) verifican

$$uL[G] - GL[u] = u \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(u\nabla^2 G - G\nabla^2 u),$$

donde  $u, G$  satisfacen las condiciones iniciales. Ahora el operador  $uL[G] - GL[u]$  depende tanto de la variable espacial como del tiempo, necesitamos integrar sobre ambas variables.

$$\int_{t_i}^{t_f} \int (uL[G] - GL[u]) dx_k dt = \int \left( u \frac{dG}{dt} - G \frac{du}{dt} \right) \Big|_{t_i}^{t_f} dx_k - c^2 \int_{t_i}^{t_f} \left( \oint (u\nabla G - G\nabla u) \cdot n_k dS \right) dt \quad (5.9)$$

Los términos de la derecha de la ec.(5.9) representan la contribución de las fronteras: el primer término corresponde a los extremos del intervalo temporal ( $t = t_i$  y  $t = t_f$ ) integrados en el dominio espacial y el segundo a la frontera espacial integrada en el intervalo de tiempos. Estas fronteras espacio-temporales se pueden observar en la Fig(5.1).

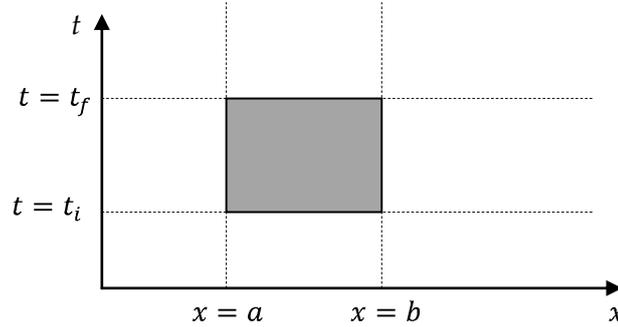


Fig 5.1. Frontera espacio-temporal para la ecuación de onda unidimensional

Aplicando las condiciones iniciales a la ec.(5.9) y la propiedad de reciprocidad ec.(5.7), encontramos la solución a la ecuación de onda no homogénea en términos de la función de Green como

$$\begin{aligned} u(x_k, t) = & \int_0^t \int G(x_k, t; x_k^0, t^0) Q(x_k^0, t^0) dx_k dt \\ & + \int \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(x_k, 0) G(x_k, t; x_k^0, t^0) - u(x_k, 0) \frac{\partial}{\partial t^0} G(x_k, t; x_k^0, 0) \right] dx_k \\ & - c^2 \int_0^t \left[ \oint u(x_k^0, t^0) \nabla x_k^0 G(x_k, t; x_k^0, t^0) - G(x_k, t; x_k^0, t^0) \nabla x_k^0 u(x_k^0, t^0) \right] dt^0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Observe que  $\nabla x_k^0$  quiere decir derivada respecto de la posición de la fuente. La ec.(5.10) expresa la influencia de cada uno de los tres tipos de frontera que existen: *el término de fuente, condiciones iniciales y condiciones de frontera*, respectivamente.

### 5.3 Función de Green para la Ecuación de Onda

La función de Green para la ecuación de onda cumple lo siguiente

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 G = \delta(x_k - x_k^0) \delta(t - t^0) \quad (5.11)$$

$$G(x_k, t; x_k^0, t^0) = 0 \quad \text{para} \quad t < t^0 \quad (5.12)$$

En los problemas definidos en todo el espacio, no hay condiciones de frontera. Resolveremos este problema mediante la transformada de Fourier. Definimos  $\bar{G}(\omega_k, t; x_k^0, t^0)$  como la transformada de Fourier de la función de Green  $G(x_k, t; x_k^0, t^0)$ . Luego la ecuación diferencial ordinaria que se obtiene aplicando la transformada de Fourier sobre la ec.(5.4) es:

$$\frac{d^2 \bar{G}}{dt^2} + c^2 \omega^2 \bar{G} = \frac{e^{i\omega_k x_k^0}}{(2\pi)^k} \delta(t - t^0) \quad , \quad (5.13)$$

donde<sup>4</sup>

$$\omega^2 = \omega_k \omega_k \quad .$$

El principio de causalidad también es válido para la transformada de la función de Green. La solución de la ec. (5.13) es

$$\bar{G} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_o \\ A \cos c\omega(t - t_o) + B \sen c\omega(t - t_o) & \text{si } t > t_o \quad , \end{cases}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones de  $x_k^0, t^0$  y  $\omega_k$  determinadas por la condición de salto en  $t = t_o$ . Como  $\bar{G}$  es continua en  $t = t_o$ , se tiene  $\bar{G}(\omega_k, t^0; x_k^0, t^0) = 0 \Rightarrow 0 = A$ . El salto en la derivada se obtiene integrando (5.13), desde  $t = t_o^-$  hasta  $t = t_o^+$ :

$$\frac{d\bar{G}}{dt}(\omega_k, t_o^+; x_k^0, t^0) = \frac{e^{i\omega_k x_k^0}}{(2\pi)^k c\omega} \Rightarrow \frac{e^{i\omega_k x_k^0}}{(2\pi)^k} = c\omega B \quad ,$$

donde hemos usado el hecho de que  $\frac{d\bar{G}}{dt} = 0$  en  $t = t_o^-$ . Hemos obtenido así la transformada de Fourier de la función de Green:

$$\bar{G}(\omega_k, t; x_k^0, t^0) = \frac{e^{i\omega_k x_k^0}}{(2\pi)^k c\omega} \sen c\omega(t - t_o) \quad . \quad (5.14)$$

---

<sup>4</sup> El vector  $\omega_k$  es también conocido como el vector de número de onda  $k_i$ .

Esto implica la siguiente representación integral de la función de Green:

$$G(x_k, t; x_k^0, t^0) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int e^{-i\omega_k(x-x^0)} \frac{\text{sen } c\omega(t-t^0)}{c\omega} d^k\omega, \quad (5.15)$$

para  $t > t_0$ . El cálculo de esta integral depende de la dimensión  $k$ .

### 5.3 Ecuación de Onda Unidimensional

En la sección anterior encontramos la transformada de Fourier de la función de Green para la ecuación de ondas de dimensión  $k$ . Para  $k = 1$  la ec.(5.14) se reduce a

$$\bar{G}(\omega, t; x^0, t^0) = \frac{e^{i\omega x^0}}{2c} \frac{\text{sen } c\omega(t-t^0)}{\pi\omega}.$$

La transformada inversa de Fourier de esta función corresponde a,

$$\frac{\text{sen } c\omega(t-t^0)}{\pi\omega} \text{ es } \begin{cases} 0, & |x| > c(t-t^0), \\ 1, & |x| < c(t-t^0). \end{cases}$$

Además al multiplicar por  $e^{i\omega x_0}$  se traduce en trasladar  $x$  a  $x - x_0$ . Por tanto, la solución es

$$G(x, t; x^0, t^0) = \begin{cases} 0, & |x - x^0| > c(t - t^0), \\ \frac{1}{2c}, & |x - x^0| < c(t - t^0). \end{cases} \quad (5.15)$$

La función de Green es un pulso rectangular que se expande con el tiempo, a la derecha e izquierda con una velocidad  $c$ , partiendo de un único punto,  $x = x_0$ , en el instante inicial ( $t = t_0$ ). La Fig(5.2) describe esta función de Green para la ecuación de onda unidimensional. También podemos escribir la función de Green (5.9) utilizando la función de salto de Heaviside,

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 0, \end{cases}$$

$$\bar{G}(x, t; x^0, t^0) = \frac{1}{2c} \{-H[(x - x^0) - c(t - t^0)] + H[(x - x^0) + c(t - t^0)]\}. \quad 5.16$$

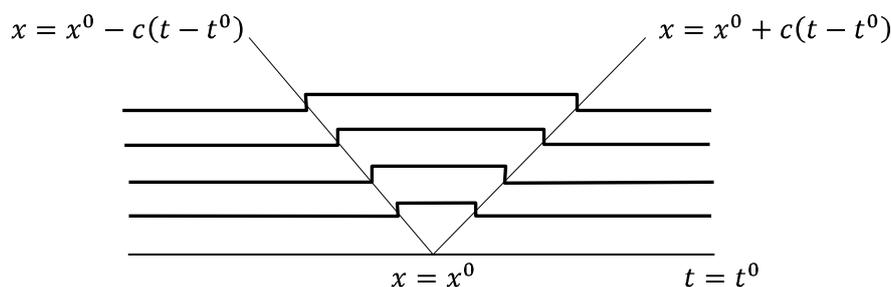


Fig 5.2. Función de Green para la ecuación de onda unidimensional

Cuando imponemos las condiciones iniciales  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  y  $u(x, 0) = f(x)$ , en toda la recta  $-\infty < x < \infty$  para la ecuación de onda sin fuentes, tenemos que en la ec.(5.10) la contribución de la frontera<sup>5</sup> se anula, puesto que  $G = 0$  para  $x$  suficientemente grande (positivo o negativo), ver Fig(5.2), como tampoco hay fuentes,  $u(x, t)$  está determinada únicamente por las condiciones iniciales:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g(x_0)G(x, t; x_0, 0) - f(x_0) \frac{\partial}{\partial t_0} G(x, t; x_0, 0) \right] dx_0$$

Calculando  $\frac{\partial}{\partial t_0} G(x, t; x_0, 0)$  a partir de la ec.(5.16) y utilizando las propiedades de la función de salto Heaviside, se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G(x, t; x_0, 0) = \frac{1}{2} [-\delta(x - x_0 + c(t - t_0)) - \delta(x - x_0 - c(t - t_0))]$$

y por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G(x, t; x_0, 0) = \frac{1}{2} [-\delta(x - x_0 + ct) - \delta(x - x_0 - ct)].$$

Entonces la solución al problema es

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0) dx_0$$

Esta es la solución de la ecuación de onda unidimensional conocida como *solución de D'Alambert*. Mediante el método de las imágenes se puede obtener la función de Green para la ecuación de onda en dominios acotados o semiacotados, y resolver así diversos problemas, ver [32]. En algunos casos es necesario utilizar técnicas para transformar series de funciones.

#### 5.4 Ecuación de Onda tridimensional

De manera análoga a la sección anterior podemos obtener la representación integral de la función de Green tridimensional para la ecuación de onda. Aplicando la transformada inversa

<sup>5</sup> La contribución de la frontera es el límite, cuando  $L \rightarrow \infty$ , de la contribución en los extremos del intervalo finito  $-L \leq x \leq L$ .

de Fourier sobre la ecuación (5.8) y realizando una transformación a coordenadas esféricas. Donde definimos  $\omega$  como la longitud del vector  $\omega_k$  (la variable de la transformada) es decir

$$\omega = |\omega_k| ,$$

y  $r$  como la distancia desde la fuente hasta el punto donde se mide la respuesta,

$$r = |x_k - x_k^0| .$$

Tenemos que la integral tridimensional

$$G(x_k, t; x_k^0, t^0) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\omega_k(x-x^0)_k} \frac{\text{sen}c\omega(t-t^0)}{c\omega} d^3\omega ,$$

se convierte en la integral

$$G(x_k, t; x_k^0, t^0) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\omega r \cos\varphi} \frac{\text{sen}c\omega(t-t^0)}{c\omega} \omega^2 \text{sen}\varphi d\varphi d\theta d\omega ,$$

sustituyendo

$$\omega_k(x - x^0)_k = |\omega_k| |x_k - x_k^0| \cos\varphi = \omega r \cos\varphi$$

y

$$d^3\omega = \omega^2 \text{sen}\varphi d\varphi d\theta d\omega .$$

Observamos que el integrando no depende del ángulo polar, y que la integral en la variable  $\varphi$  es:

$$\int_0^\pi e^{-i\omega r \cos\varphi} \omega \text{sen}\varphi d\varphi = \frac{2}{r} \text{sen}\omega r .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} G(x_k, t; x_k^0, t^0) &= \frac{2}{4\pi^2 r c} \int_0^\infty \text{sen}c\omega(t-t^0) \text{sen}\omega r d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi^2 c r} \int_0^\infty \{\cos\omega[r - c(t-t^0)] - \cos\omega[r + c(t-t^0)]\} d\omega . \end{aligned}$$

Por otro lado utilizando la parte real de la expresión (ver ec.(2.15))  $\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega z} d\omega$  tenemos que  $\delta(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos\omega z d\omega$ , ya que coseno es una función par. Así,

$$G(x_k, t; x_k^0, t^0) = \frac{1}{4\pi r c} \{\delta[r - c(t-t^0)] - \delta[r + c(t-t^0)]\} .$$

Además, como  $r > 0$  y  $t > t_0$ , la segunda delta de Dirac siempre es cero. Finalmente,

$$G(x_k, t; x_k^0, t^0) = \frac{1}{4\pi cr} \delta[r - c(t - t^0)]. \quad (5.17)$$

La función de Green para la ecuación de onda en tridimensional es un impulso esférico que se propaga desde  $r = 0$  (es decir, desde  $x_k = x_k^0$ ) con una velocidad radial  $c$  y una "amplitud" que disminuye de manera proporcional a  $\frac{1}{r}$ .

## 5.5 El Tensor de Green

Como vimos en secciones anteriores, conocer la función de Green nos permite describir la influencia de la fuente, las condiciones iniciales y las condiciones de contorno. Resulta práctico encontrar una función de Green para un medio elástico homogéneo e isótropo, que permita la propagación de ondas sísmicas.

En general es difícil encontrar una función de Green que describa la mecánica de un sólido elástico lineal, aunque para un medio infinito existen representaciones analíticas tal como las soluciones de Kelvin y Stokes<sup>6</sup>, definidas usualmente en la literatura como:

$$u_i^G(x_k) = G_{ij}(x_k, \xi_l) f_j(\xi_l), \quad (5.18)$$

donde  $u_i^G$  es el desplazamiento en el punto  $x_k$  producido por la fuerza de cuerpo unitaria  $f_j$  concentrada en el punto  $\xi_l$  y  $G_{ij}$  representa la *función de Green de los desplazamientos*. Los esfuerzos y tracciones asociados a esta función están dados por:

$$\sigma_{mn} = \sigma_{mnj}(x_k, \xi_l) f_j(\xi_l), \quad (5.19)$$

$$t_m = T_{mj}(x_k, \xi_l) f_j(\xi_l). \quad (5.20)$$

$$T_{mj}(x_k, \xi_l) = \sigma_{mnj}(x_k, \xi_l) n_n \quad (5.21)$$

Observemos que en las ecs.(5.19) y (5.20) se encuentran contraídas por la dirección de la fuerza aplicada en el punto  $\xi_l$ . El estudio de la función de Green en sismología, ha permitido resolver problemas de distinta naturaleza, ver [37].

Para que sea la ec.(5.18) sea una solución fundamental debe satisfacer tanto la ec. de Navier, las condiciones de iniciales y las condiciones de frontera. Estas condiciones se investigan en el capítulo siete para el caso de un semiespacio elástico.

<sup>6</sup> Las soluciones de Stokes en el dominio del tiempo y frecuencia están definidas en el apéndice C.

## CAPÍTULO VI

# MÉTODOS NUMÉRICOS

### Introducción

---

Existen varias técnicas para resolver EDP lineales, las más utilizadas son el Método de Diferencias Finitas (FDM), el Método de Elemento Finito (FEM) ver por ejemplo [10] y Método de Elemento a la Frontera (BEM), ver [7]. Recientemente se ha incorporado el Método Indirecto de Elemento a la Frontera (IBEM), ver [36], con el cual se elaboró este trabajo. Hablaremos rápidamente en qué consiste cada método en el presente capítulo.

---

### 6.1 Método de Diferencias Finitas (FDM)

Cada modelo tiene un rango de aplicación para resolver problemas tecnológicos. Las Diferencias Finitas se han utilizado para resolver EDP's, principalmente, para dominios acotados en los cuales se pueden realizar particiones regulares. Una vez hechas las particiones del dominio, este queda *discretizado* por una malla de puntos llamados *nodos*.

Para resolver la EDP en cada punto de la malla, se aplican las condiciones de frontera en cada uno de estos, generando así un sistema algebraico de ecuaciones, representado por una matriz de coeficientes en bandas, lo que significa que los valores diferentes de cero están en bandas diagonales dentro de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

La solución se puede mejorar aumentando el número de nodos de la malla, para problemas en dos y tres dimensiones esto implica un aumento en la dispersión<sup>1</sup> del sistema de ecuaciones.

Resulta inconveniente aplicar FDM para dominios en los cuales la discretización no es regular. Se pueden utilizar diversos algoritmos que aceleran la convergencia a la solución del sistema de ecuaciones, mediante el método de relajaciones sucesivas (MRS), el método de Liebmann o el método implícito de dirección alternada (IDA), este último es muy útil en problemas tridimensionales.

---

<sup>1</sup> La dispersión es el incremento en el número de coeficientes igualados a cero. La dificultad de resolver estos sistemas es que se necesita una gran cantidad de memoria para guardar la matriz y tiempo de cómputo para resolverlas.

## 6.2 Método de Elemento Finito (FEM)

Por otro lado, el FEM puede aplicarse a dominios con una geometría bastante complicada, ver [51] y [52]. La técnica consiste en dividir el dominio en subdominios cada uno llamado elemento. Los puntos vértices de los elementos se conocen como *nodos*. Existen varias formas geométricas de los elementos, por lo regular se utiliza una aproximación lineal entre los nodos. Para problemas en dos y tres dimensiones se desarrollan métodos principalmente para elementos de forma triangular. Las ecuaciones que relacionan las coordenadas locales de los nodos para cada elemento, en un sistema global, se llaman *ecuaciones de conectividad*. Los pasos típicos para resolver un problema con FEM son los siguientes:

1. *Discretizar el cuerpo en un número finito de subdominios.*
2. *Desarrollar una solución aproximada sobre cada elemento en términos de los valores nodales.*
3. *Basado en el sistema de conectividad, aplicar las condiciones de frontera y continuidad en todos los elementos, para obtener un sistema algebraico de ecuaciones<sup>2</sup>.*
4. *Resolver el sistema ensamblado para los valores nodales; post procesar las soluciones para determinar variables de interés, si es necesario.*

En general se emplean representaciones energéticas integrales<sup>3</sup> para encontrar soluciones aproximadas del FEM, utilizando el cálculo variacional se obtiene la aproximación de Rayleigh-Ritz. El método de Galerkin es un *método de residuos ponderados* que multiplica factores de ponderación  $W_i$  por los residuos  $R(x)$ , este resulta ser el método más empleado para resolver problemas de mecánica de suelos, estructuras y geotecnia.

## 6.3 Representación Integral del Teorema de Somigliana

Sea  $B$  un cuerpo elástico lineal, homogéneo e isótropo que ocupa una región regular  $V$  con frontera  $S$ , que puede ser acotada o no acotada. Si el cuerpo está sometido a fuerzas armónicas, entonces el campo de desplazamiento es

$$cu_m(\xi) = \int_S t_i(x)G_{im}(x, \xi; \omega) - T_{im}(x, \xi; \omega)u_i(x) dS_j + \int_V f_i(x)G_{im}(x, \xi; \omega) dV_j.$$

---

<sup>2</sup> Este sistema resulta ser no simétrico en general, por lo que necesita mucha memoria de cómputo.

<sup>3</sup> Por ejemplo se utiliza el teorema de Trabajo Virtual.

*Dem:* Como el cuerpo B está sometido a excitaciones armónicas tenemos que la aceleración es  $\ddot{u}_i = -\omega^2 u_i$ , sustituyendo la aceleración en la ecuación (3.7), tenemos que la ecuación de movimiento es,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i + \rho \omega u_i = 0. \quad (6.1)$$

Reemplazando la ley de Hooke (3.4) en (6.1) obtenemos,

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho \omega^2 u_i = -f_i. \quad (6.2)$$

Definimos a continuación el desplazamiento  $u_i$ <sup>4</sup> como  $u_i(x) = G_{im}(x, \xi) e_m$  y la fuerza unitaria  $f_i$ <sup>5</sup> como  $f_i = \delta(x - \xi) \delta_{im} e_m$ , observemos que ambas están dirigidas en la dirección  $e_m$ . Sustituyendo  $u_i$  y  $f_i$  en (6.2), se tiene que

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 G_{km}}{\partial x_j \partial x_l} + \rho \omega^2 G_{km} = -\delta(x - \xi) \delta_{im}. \quad (6.3)$$

Multiplicando la ecuación (6.2) por  $G_{im}$  y restándole la ecuación (6.3) multiplicada por  $u_i$ , encontramos,

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} G_{im} - C_{ijkl} \frac{\partial^2 G_{km}}{\partial x_j \partial x_l} u_i = -f_i G_{im} + \delta(x - \xi) u_m. \quad (6.4)$$

Factorizando el operador  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  del lado izquierdo de la ecuación (6.4) identificamos la ley de Hooke (3.5), e integramos sobre el volumen del cuerpo, teniendo

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{ij} G_{im} - \sigma_{ijm} u_i] dV = - \int_V f_i G_{im} dV + u_m(\xi). \quad (6.5)$$

Aplicando el teorema de la divergencia del lado izquierdo de la ecuación (6.5), despejando los desplazamientos del punto  $\xi$ , identificamos las tracciones dentro de las integrales, llegando a

<sup>4</sup> El campo de desplazamiento es la proyección de la función de Green

<sup>5</sup> Esta es la definición de una fuerza puntual aplicada en el punto  $\xi$  en la dirección unitaria  $e_m$

$$cu_m(\xi) = \int_S \{t_i(x)G_{im}(x, \xi) - T_{im}(x, \xi)u_i(x)\} dS_x + \int_V f_i(y)G_{im}(y, \xi) dV_y. \quad (6.6)$$

Con esto llegamos a nuestro resultado final<sup>6</sup>. El coeficiente  $c$  es una constante de integración y tiene los valores siguientes,

$$c = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{\varepsilon} \in V \\ 0.5 & \text{si } \boldsymbol{\varepsilon} \in S \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\varepsilon} \notin V. \end{cases} \quad (6.7) \quad \square$$

En este trabajo se utilizará el Teorema de Somigliana (6.6), para resolver las ecuaciones de movimiento por medio del IBEM.

#### 6.4 Método de Elemento a la Frontera (BEM)

La formulación del BEM se basa en resolver alguna representación integral de la elasticidad, sólo para los elementos de la frontera del dominio. En estos se realiza una discretización sobre la frontera y se realiza una aproximación lineal entre los nodos, donde se resuelve la ecuación integral de interés. Este proceso genera un sistema algebraico de ecuaciones, que al resolver aproximan la solución en la frontera. Esta es una de las ventajas al utilizar el BEM, ya que el tamaño de la matriz que se tiene que resolver con BEM resulta más pequeña que al resolver por el FEM, aunque un problema técnico es encontrar el vector unitario de una discretización irregular de la frontera.

Problemas con extensión infinita (por ejemplo un semiespacio, todo el espacio) crean algunas dificultades en la creación de mallas con el FEM, mientras que el BEM maneja de manera natural el infinito ya que sólo requiere una malla limitada por la frontera.

Si el punto  $\xi$  está en  $S$ , entonces la ecuación integral (6.6) contendrá incógnitas (desplazamientos y tracciones) en la frontera<sup>7</sup>. Para este caso  $c = \frac{1}{2}$ ,

$$cu_m = \int_S \{t_i G_{im} - T_{im} u_i\} dS_x + \int_V f_i G_{im} dV_y.$$

<sup>6</sup> Note que en la segunda integral de la ecuación (6.6)  $y = x$  donde  $x \in V$ .

<sup>7</sup> Sólo si la frontera es lisa en el sentido de Hölder

En el caso más sencillo cuando no hay fuerzas de cuerpo  $f_i$  y haciendo una discretización de la frontera de la región  $V$ , donde cada elemento  $\Gamma_j$  se considera constante, ver Fig(6.1). La ecuación anterior se puede escribir como:

$$cu_m + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} T_{im} dS \right) u_i = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} G_{im} dS \right) t_i . \quad (6.8)$$

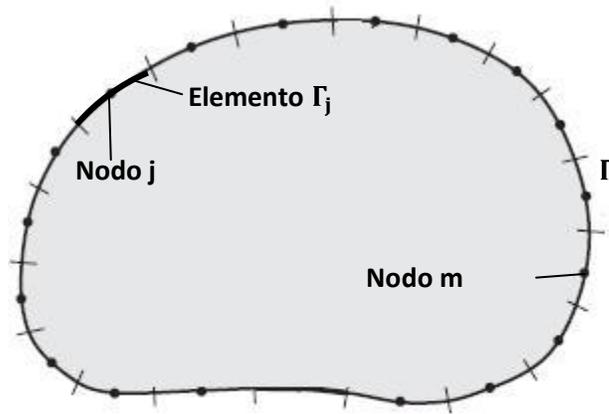


Fig 6.1. Discretización de la frontera utilizando elementos con aproximación constante.

Donde el índice  $i$  corresponde a la función de Green en el nodo donde la fuerza concentrada es aplicada y el índice  $j$  representa cada elemento de la frontera incluyendo el caso  $i = j$ <sup>8</sup>. Las integrales dentro de los paréntesis de la ec.(6.8) pueden realizarse con cuadratura Gaussiana y asociar la integración numérica a las entradas de una matriz, tal que

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} T_{im} dS, \quad B_{ij} = \int_{\Gamma_j} G_{im} dS .$$

Reemplazando en la ec.(6.8) obtenemos  $cu_m + A_{ij}u_i = B_{ij}t_i$ . Este resultado especifica el valor de  $u_m$  en el nodo  $m$  en términos de  $u_j$  y  $t_j$  en todos los nodos de la frontera. Debido a que  $c = \frac{1}{2}$  para todos los nodos. Definimos

$$A^*_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq j \\ A_{ij} + c, & i = j \end{cases} .$$

Tal que nuestro sistema a resolver será de la forma

$$A^*_{ij}u_i = B_{ij}t_i, \quad (6.9)$$

<sup>8</sup> Note que  $i = j$  genera una singularidad en la integración.

donde las condiciones de frontera para las ecuaciones de la elasticidad por lo regular especifican los desplazamientos ó las tracciones en la frontera  $S$ , como veremos en la siguiente sección. Sustituyendo estos valores en la ec.(6.9) podemos llegar a un sistema algebraico de ecuaciones ordinario, en el cual se puede emplear un método numérico adecuado para resolver.

### 6.5 El Método de Elemento a la Frontera Indirecto (IBEM)

Esta es la sección más importante de este capítulo, ya que mostramos la justificación matemática del IBEM<sup>9</sup>, a partir de teorema de Somigliana ec.(6.6). Este teorema es la base para varios métodos numéricos que utilizan formulaciones integrales y aplicaciones sismológicas, ver [36], [38] y [41]. Considere el teorema de Somigliana, asumiendo ahora que  $u'_i(x)$  es una solución para el problema exterior de la región  $V$ , con tracción en la frontera  $t'_i(x)$ . Imponemos que el material que ocupa la región exterior e interior son del mismo tipo, es decir, tienen las mismas propiedades físicas, y por tanto poseen la misma función de Green. Despreciando fuerzas de cuerpo podemos escribir,

$$c'u'_m(\xi) = - \int_S \{t'_i(x)G_{im}(x, \xi) - T_{ij}(x, \xi)u'_i(x)\} dS_x, \quad (6.10)$$

donde  $c'$  está dada por ec.(6.7). En la ec.(6.10) se han impuesto las condiciones de irradiación de Sommerfeld<sup>10</sup>. Sumando la ecs.(6.6) y (6.10) tenemos

$$cu_m + c'u'_m = \int_S \{(t_i - t'_i)G_{im} - T_{ij}(u_i - u'_i)\} dS_x + \int_V f_i G_{im} dV_y, \quad (6.11)$$

Si imponemos que en la frontera  $u_i = u'_i$  y  $t_i - t'_i = \varphi_i$  podemos escribir a partir de (6.11)

$$u_m(\xi) = \int_S \varphi_i(x)G_{im}(x, \xi) dS_x + \int_V f_i(y)G_{im}(y, \xi) dV_y, \quad (6.12)$$

que es una representación válida para la región  $V$  y su frontera  $S$ . Por otro lado la función de Green satisface  $G_{im}(x, \xi) = G_{mi}(x, \xi) = G_{mi}(\xi, x)$ . Por tanto, podemos escribir de acuerdo con (6.12),

---

<sup>9</sup> El IBEM se podrá resolver utilizando una discretización sobre  $S$  como se realizó en la sección 6.4.

<sup>10</sup> (i)  $r \Psi$  esta acotada (ii)  $\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} - ik \Psi\right) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , ver [5] p.172.

$$u_i(x) = \int_S \varphi_j(\xi) G_{ij}(x, \xi) dS_\xi + \int_V f_j(\xi) G_{ij}(x, \xi) dV_\xi, \quad (6.13)$$

donde  $\varphi_j(\xi)dS_\xi$  es claramente una distribución de fuerza en la frontera. Esta representación integral ha sido estudiada por Kupradze, ver [24]. El mostró que el campo de desplazamiento es continuo a través de S si  $\varphi_j(\xi)$  es continua sobre S. Esto está de acuerdo con la elección para  $u_i = u'_i$ .

La representación integral ec.(6.13) permite calcular los esfuerzos y tracciones por aplicación directa de la ley de Hooke (3.5). Sin embargo cuando  $x = \xi$  en la frontera, se requiere particular cuidado. A partir de un análisis de equilibrio sobre una vecindad de la frontera, podemos escribir a  $x$  en S, como

$$t_i(x) = \frac{1}{2} \varphi_i(x) + \int_S \varphi_j(\xi) T_{ij}(x, \xi) dS_\xi + \int_V f_j(\xi) T_{ij}(x, \xi) dV_\xi. \quad (6.14)$$

El primer término del lado derecho de (6.14) debe ser introducido si  $x \in V$ . Este resultado fue encontrado por Kupradze. El usó una técnica formal de extracción de singularidades que ahora es usada para tratar singularidades en ecuaciones integrales de la elasticidad. Para poder resolver las ecuaciones (6.13) y (6.14) se necesita conocer  $G_{ij}$  y  $T_{ij}$ , respectivamente<sup>11</sup>.

En el siguiente capítulo encontramos de manera explícita tales tensores. Cuando se consideran dominios tridimensionales las ecs.(6.13) y (6.14) se representan con notación índice como:

$$u_i(x_k) = \int_S \varphi_j(\xi_l) G_{ij}(x_k, \xi_l) dS_\xi, \quad (6.15)$$

<sup>11</sup> Se puede encontrar  $T_{ij}$  a partir de la función de Green por medio de las ec.(5.19).

$$t_i(x_k) = \frac{1}{2} \varphi_i(x_k) + \int_S \varphi_j(\xi_l) T_{ij}(x_k, \xi_l) dS_\xi . \quad (6.16)$$

Análogamente al BEM, se puede realizar una discretización con elementos sobre la frontera del dominio, esto nos conducirá a una representación matricial de las ecs.(6.15) y (6.16) como sistemas ecuaciones algebraicas que se resuelven mediante la subrutina SOLUCO implementada en el programa IBEM 3D. Hablaremos profundamente de la discretización en el capítulo siguiente, al igual que las condiciones de frontera impuestas, para la aplicación a un modelo de presa simplificado.

## CAPÍTULO VII

### TENSOR DE GREEN PARA TODO EL ESPACIO

#### Introducción

---

En este capítulo describimos de manera detallada como encontrar las ecuaciones fundamentales, con las que el programa IBEM 3D calcula los campos de desplazamientos y tracciones, que serán utilizadas para modelar una topografía de presa simplificada.

---

#### 7.1 Tensor de Green del IBEM

Sea una fuerza unitaria aplicada en el origen con dirección arbitraria, dentro de un medio homogéneo, isótropo y de extensión infinita. Las soluciones exactas en el dominio del tiempo están dadas por:

$$F_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + 2\beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - kr)k dk, \quad (7.1)$$

$$F_2 = \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) - \beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - kr)k dk \quad (7.2)$$

Estas ecuaciones son conocidas como las Soluciones de Stokes, aplicando la transformada de Fourier sobre las ecs.(7.1) y(7.2) obtenemos<sup>1</sup>,

$$f_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{-iqr} - 2 \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{1}{q^2 r^2} + \frac{i}{qr} \right) e^{-iqr} - \left( \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{kr} \right) e^{-ikr} \right], \quad (7.3)$$

$$f_2 = e^{-ikr} + \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{1}{q^2 r^2} + \frac{i}{qr} \right) e^{-iqr} - \left( \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{kr} \right) e^{-ikr} \right]. \quad (7.4)$$

---

<sup>1</sup> La transformada de Fourier de las soluciones de Stokes se realiza en el apéndice C.

Asociamos el desplazamiento  $u_i^G(x_k)$  producido por la fuerza unitaria  $F_j(\xi_l)$  ver Fig(7.1), en términos de la suma de las componentes longitudinal y transversal

$$u_i^G(x_k) = u_L + u_T, \quad (7.5)$$

donde

$$u_L = F_L \frac{f_1}{4\pi r^2} \quad \text{y} \quad u_T = F_T \frac{f_2}{4\pi r^2}.$$

Note que el desplazamiento esta dado en términos de las ecs.(7.3) y (7.4) por  $\frac{F}{A}$ , donde  $A$  es el área de la esfera<sup>2</sup> con radio  $r$  igual a la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza y el punto en que se produce el desplazamiento, es decir

$$r = |x_k - \xi_k|.$$

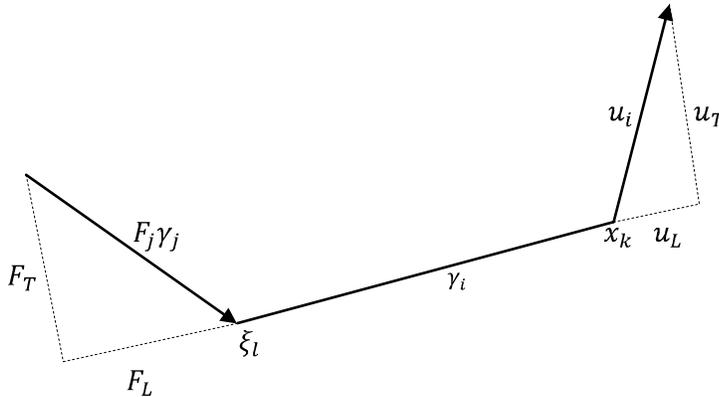


Fig 7.1. Diagrama de fuerzas para la función de Green.

Las funciones  $F_T$  y  $F_L$  son las componentes transversal y longitudinal de la fuerza aplicada  $F_j(\xi_l)$  definidas como:

$$F_L = F_j \gamma_i \gamma_j$$

$$F_T = F - F_L = F_j - F_j \gamma_i \gamma_j = F_j (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)$$

Sustituyendo todas las componentes de la fuerza en la ec.(7.5) llegamos a

$$u_i^G = u_L + u_T = F_L f_1 + F_T f_2 = \frac{F_j}{4\pi r^2} \{f_1 \gamma_i \gamma_j + f_2 (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)\},$$

---

<sup>2</sup> Se consideran todas las posibles direcciones de  $u_i^G$  en el espacio.

Utilizando la ec.(5.18) identificamos la función de Green como

$$G_{ij}(x_k, \xi_l; \omega) = \frac{1}{4\pi r^2} \{f_1 \gamma_i \gamma_j + f_2 (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)\}. \quad (7.6)$$

Tenemos que, el tensor de Green construido con argumentos geométricos, es la suma de las componentes de la fuerza transversal  $F_T$  y longitudinal  $F_L$  de la fuerza  $F_j(\xi_l)$  aplicada en el punto  $\xi_l$  en la dirección  $\gamma_j$ , proyectada sobre la dirección  $\gamma_i$  que une el punto  $\xi_l$  con el punto  $x_k$ , donde se produce un desplazamiento  $u_i(x_k)$ , ver Fig(7.1).

## 7.2 Tensor de Tracciones del IBEM

Como hemos mencionado en capítulos anteriores, por medio de la función de Green ec(7.6), podemos obtener toda la información física que proporciona el medio elástico para la propagación de ondas sísmicas en dominios tridimensionales.

En el apéndice B se muestra el procedimiento para encontrar el tensor de esfuerzos  $\sigma_{mnj}(x_k, \xi_l)$  a partir de la función de Green.

$$\sigma_{mnj} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ 2 \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_m \gamma_n \gamma_j + \left[ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) + 2 \left( \frac{f_2}{r} - \frac{df_1}{dr} \right) \right] \gamma_j \delta_{mn} + \left( \frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) (\gamma_m \delta_{nj} + \gamma_n \delta_{mj}) \right\}$$

(7.7)

Aplicando la ec.(5.21) sobre el tensor de esfuerzos ec.(7.7) con las siguientes proyecciones normales:

$$n_1 = \gamma_m \gamma_n \gamma_j \quad \text{longitudinal,} \quad (7.8)$$

$$n_2 = \frac{\gamma_j}{2} (\delta_{mn} - \gamma_m \gamma_n) \quad \text{transversal,} \quad (7.9)$$

$$n_3 = \frac{\gamma_n}{3} (\delta_{mj} - \gamma_m \gamma_j) \quad \text{cortante.} \quad (7.10)$$

Encontramos los esfuerzos longitudinales, transversales y cortantes asociados a el sólido elástico que se muestra en la Fig(7.2), como:

$$\sigma_L = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left( \frac{df_1}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) - 4 \frac{(f_1 - f_2)}{r} \right\} F_j(\xi_l), \quad (7.11)$$

$$\sigma_T = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left( \frac{df_1}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) + 2 \left( \frac{f_2}{r} - \frac{df_1}{dr} \right) \right\} F_j(\xi_l), \quad (7.12)$$

$$\sigma_L = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{df_2}{dr} + \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right\} F_j(\xi_l). \quad (7.13)$$

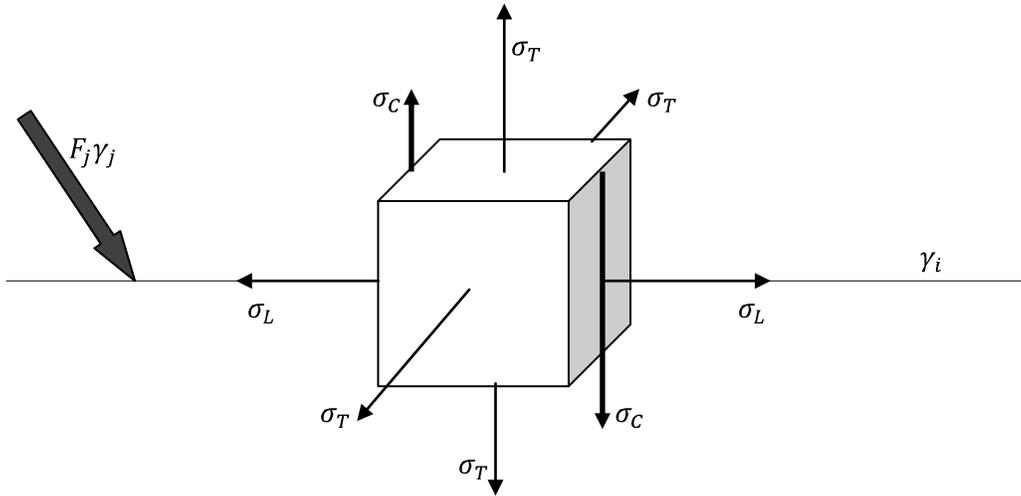


Fig 7.2. Componentes del tensor de esfuerzos para el modelo de presa simplificado.

Donde las cantidades entre corchetes de las ecs.(7.11-13) son las tracciones escalares  $g_1, g_2$  y  $g_3$  asociadas a los esfuerzos longitudinales, transversales y cortantes, respectivamente. Sustituyendo las ecs.(C.4-8) del apéndice C, en las tracciones  $g_1, g_2$  y  $g_3$  tenemos que:

$$g_1 = \left( 4 - \frac{12}{kr} i - \frac{12}{k^2 r^2} \right) e^{-ikr} + \left( -i \frac{\beta}{\alpha} kr - \left( 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1 \right) + \frac{\beta}{\alpha} \frac{12}{kr} i + \frac{12}{k^2 r^2} \right) e^{-iqr} \quad (7.14)$$

$$g_2 = \left( -2 + \frac{6}{kr} i + \frac{6}{k^2 r^2} \right) e^{-ikr} + \left( i \left( 2 \frac{\beta^3}{\alpha^3} - \frac{\beta}{\alpha} \right) kr + \left( 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) - \frac{\beta}{\alpha} \frac{6}{kr} i - \frac{6}{k^2 r^2} \right) e^{-iqr} \quad (7.15)$$

$$g_3 = \left(-ikr - 3 + \frac{6}{kr}i + \frac{6}{k^2r^2}\right)e^{-ikr} + \left(2\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{6}{kr}i - \frac{6}{k^2r^2}\right)e^{-iqr} \quad (7.16)$$

Podemos escribir en notación índice las tracciones  $g_1, g_2$  y  $g_3$  como:

$$g_j = \left(A_{1j}kr + B_{1j} + \frac{C_{1j}}{kr} + \frac{D_{1j}}{k^2r^2}\right)e^{-ikr} + \left(A_{2j}kr + B_{2j} + \frac{C_{2j}}{kr} + \frac{D_{2j}}{k^2r^2}\right)e^{-iqr}. \quad (7.17)$$

Donde los coeficientes de la ec.(7.17) se muestran en la tabla(7.1).

	$j$		
	1	2	3
$A_{1j}$	0	0	0
$A_{2j}$	$-i\frac{\beta}{\alpha}$	$i\left(2\frac{\beta^3}{\alpha^3} - \frac{\beta}{\alpha}\right)$	0
$B_{1j}$	4	-2	-3
$B_{2j}$	$\left(4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1\right)$	$\left(4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1\right)$	$2\frac{\beta^2}{\alpha^2}$
$C_{1j}$	$-12i$	$6i$	$6i$
$C_{2j}$	$12\frac{\beta}{\alpha}i$	$-6\frac{\beta}{\alpha}i$	$-6\frac{\beta}{\alpha}i$
$D_{1j}$	-12	6	6
$D_{2j}$	12	-6	-6

Tabla 7.1. Coeficientes del tensor de tracción escalar  $g_j$ .

El objetivo de esta sección es encontrar el tensor de tracciones  $T_{mj}(x_k, \xi_l)$ , con el cual se puede resolver la ec.(6.16) para encontrar las tracciones por medio del IBEM. Identificando las tracciones  $g_1, g_2$  y  $g_3$  dentro del tensor de esfuerzos, podemos reescribir la ec.(7.7) como:

$$\sigma_{mnj} = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (g_1 - g_2 - 2g_3)\gamma_m \gamma_n \gamma_j + g_2 \gamma_j \delta_{mn} + g_3 (\gamma_m \delta_{nj} + \gamma_n \delta_{mj}) \right\}. \quad (7.18)$$

Aplicamos la ec.(5.21) sobre el tensor de esfuerzos ec.(7.18) obtenemos el tensor de tracciones:

$$T_{mj}(x_k, \xi_l; \omega) = \frac{1}{4\pi r^2} \{ (g_1 - g_2 - 2g_3) \gamma_m \gamma_n \gamma_j n_n + g_2 \gamma_j n_n \delta_{mn} + g_3 \gamma_m n_n \delta_{nj} + g_3 \gamma_n n_n \delta_{mj} \}. \quad (7.19)$$

En las ecs.(7.6) y (7.19) podemos apreciar singularidades en el punto de aplicación de la fuerza. La singularidad de los desplazamientos es  $\frac{1}{r}$  esto se verifica directamente en el tensor de Green. Y la singularidad en el tensor de tracciones es  $\frac{1}{r^2}$ . En particular cuando la frecuencia tiende a cero ( $\omega \rightarrow 0$ ) estas ecuaciones tienden a ser sus contrapartes estáticas, ver [27]. Estas propiedades son consideradas en nuestra discretización.

### 4.3 Difracción de Ondas Elásticas

Considere el semiespacio  $E$ , con una inclusión elástica  $R$ , como se muestra en la Fig(7.3). Las fronteras de la superficie libre de las regiones  $E$  y  $R$  son definidas como  $\partial_1 E$  y  $\partial_1 R$ , respectivamente. La frontera que está en la interface de estas dos regiones es denotada como  $\partial_2 E = \partial_2 R$ . Una frontera introducida en este programa es la topografía alrededor de la inclusión elástica denotada como  $\partial T$ .

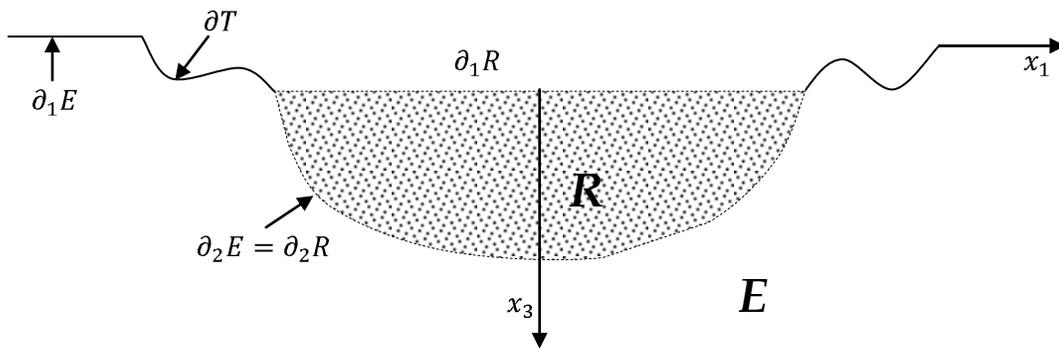


Fig 7.3. Sección transversal de la frontera libre del semiespacio y la inclusión elástica  $\partial_1 E$  y  $\partial_1 R$ , respectivamente. Frontera de la interface  $\partial_2 E = \partial_2 R$ . Frontera de la topografía alrededor de la inclusión elástica  $\partial T$ .

El campo de desplazamientos total en el semiespacio esta dado por:

$$u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(d)}, \quad (7.20)$$

donde  $u_i^{(d)}$  representa el campo de desplazamiento ec.(6.15) que es producido por la incidencia de ondas elásticas en la inclusión elástica (difracción, refracción y reflexión interna) y  $u_i^{(0)}$  es el desplazamiento de campo libre, es decir la solución del semiespacio en ausencia de la irregularidad dada analíticamente en las ecs.(4.2-37). Tenemos que los desplazamientos<sup>3</sup> del semiespacio y la inclusión están dados por:

$$u_i^{(d)}(x_k) = \int_{\partial E} \varphi_j^E(\xi_l) G_{ij}^E(x_k, \xi_l) dS_\xi, \quad (7.21)$$

$$u_i^{(r)}(x_k) = \int_{\partial R} \varphi_j^R(\xi_l) G_{ij}^R(x_k, \xi_l) dS_\xi, \quad (7.22)$$

donde

$$\partial E = \partial_1 E \cup \partial_2 E \cup \partial T \quad \text{y} \quad \partial R = \partial_1 R \cup \partial_2 R. \quad (7.23)$$

Como vimos en el capítulo anterior, el problema queda determinado imponiendo las condiciones de frontera. Las condiciones en la frontera libre para las tracciones están dadas por:

$$t_i^{(0)} + t_i^{(d)} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial E, \quad (7.25)$$

$$t_i^{(r)} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial_1 R. \quad (7.26)$$

Luego por la ec.(6.16), tales condiciones<sup>4</sup> pueden ser expresadas como

$$\frac{1}{2} \varphi_i^E(x_k) + \int_{\partial E} \varphi_j^E(\xi_l) T_{ij}^E(x_k, \xi_l) dS_\xi = 0, \quad (7.27)$$

$$-\frac{1}{2} \varphi_i^R(x_k) + \int_{\partial R} \varphi_j^R(\xi_l) T_{ij}^R(x_k, \xi_l) dS_\xi = 0. \quad (7.28)$$

En la ec.(7.27) las tracciones consideradas en  $\partial_1 E$  son nulas. Sobre la interface  $\partial_2 E = \partial_2 R$  La continuidad de los desplazamientos y tracciones implica:

<sup>3</sup> El superíndice indica la región en que la ecuación es válida.

<sup>4</sup> Los signos de las regiones están dados por la ec.(6.7).

$$u_i^{(0)} + u_i^{(d)} = u_i^{(r)} \quad \text{sobre } \partial_2 R, \quad (7.29)$$

$$t_i^{(0)} + t_i^{(d)} = t_i^{(r)} \quad \text{sobre } \partial_2 R. \quad (7.30)$$

Estas condiciones son expresadas como

$$\int_{\partial E} \varphi_j^E(\xi_l) G_{ij}^E(x_k, \xi_l) dS_\xi - \int_{\partial R} \varphi_j^R(\xi_l) G_{ij}^R(x_k, \xi_l) dS_\xi = -u_i^{(0)} \quad (7.31)$$

$$\frac{1}{2} [\varphi_i^E(x_k) + \varphi_i^R(x_k)] + \int_{\partial E} \varphi_j^E(\xi_l) T_{ij}^E(x_k, \xi_l) dS_\xi - \int_{\partial R} \varphi_j^R(\xi_l) T_{ij}^R(x_k, \xi_l) dS_\xi = -t_i^{(0)} \quad (7.32)$$

Las ecs.(7.27-28) y (7.31-32) constituyen un sistema de ecuaciones integrales para fuentes en la frontera. Esto quiere decir que se produce un campo de desplazamiento difractado en el semiespacio y refractado para la inclusión elástica. La extensión característica en la que se realiza la discretización de la frontera, es definida como  $a$ .

El tensor de Green y el tensor de tracciones se encuentran programados en las subrutinas llamadas **GREEN** y **TRACS**. Note que en la ec.(6.15) se realiza la integración de

$$u_i(x_k) = \int_{\partial S} u_i^G dS_\xi$$

lo que implica que  $\varphi_j(\xi_l) = f_j(\xi_l)$  sobre  $S_\xi$ . Es decir que la densidad de fuerza es constante dentro de cada elemento de la discretización de la frontera, de la cual hablaremos en el capítulo siguiente en la parte de discretización del modelo.

## CAPÍTULO VIII

### MODELO DE PRESA SIMPLIFICADO

#### Introducción

---

En este último capítulo aplicamos todas las herramientas desarrolladas para analizar un modelo de presa simplificado totalmente simétrico. Utilizamos el Método de Elemento a la Frontera Indirecto IBEM para el cálculo de los desplazamientos de este modelo. Se realiza una comparación con los métodos BEM y FMM.

---

#### 8.1 Modelo de Presa Simplificado

##### *Modelación*

En este trabajo se modela la cortina de una presa como una inclusión elástica isótropa y homogénea dentro de un cañón. Considerando este último como un semiespacio homogéneo isótropo y de extensión finita, ambos (cortina y cañón) con las propiedades físicas dadas por la tabla 8.1.

El modelo de presa propuesto ver Fig(8.1), es difícilmente un modelo realista, porque no se han considerado los esfuerzos provocados por un volumen de agua sobre alguna cara de la cortina de la presa (zona roja) y porque se ha supuesto que la cortina es una inclusión homogénea cuando en las construcciones de presas, se utilizan tipos distintos de materiales para su edificación. Este es el llamado modelo multiregiones y no se contempla dentro de nuestras aproximaciones.

A pesar de estas implicaciones nuestro modelo sirve para hacer un análisis de los desplazamientos y amplificaciones provocadas por temblores (incidencias de ondas elásticas) cuando la presa se encuentra en construcción ó simplemente sirve para determinar si es factible su construcción, el lector puede encontrar algunos modelos de presas interesantes en [28] y [29].

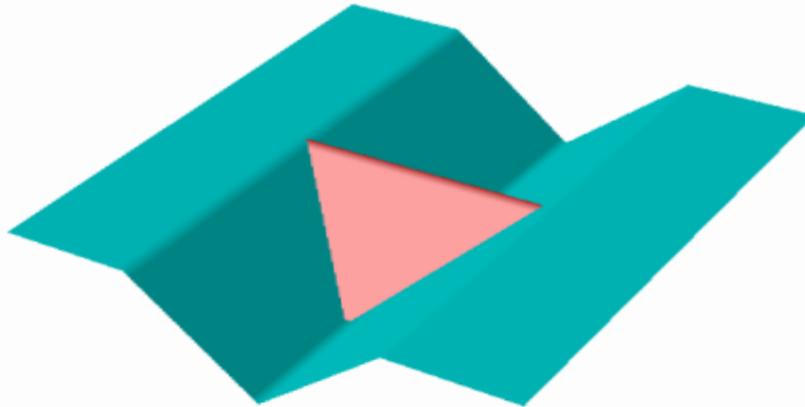


Fig 8.1. Modelo de presa simplificado de la cortina (rojo) y el semiespacio (azul).

### Propiedades Mecánicas

Se asume que el material que forma la presa es homogéneo e isótropo con histéresis de amortiguamiento. La precompresión de los pesos de los materiales impide la separación de los granos de la roca, es decir es un sólido elástico lineal. Las velocidades de onda de propagación de compresión y cortante (ondas S y P) están definidas por medio de las ecs.(3.12) y (3.14) respectivamente.

La histéresis de amortiguamiento significa que en el dominio de la frecuencia las velocidades de la propagación de las ondas se vuelven complejas al multiplicarlas por la cantidad

$$\left(1 + \frac{i}{Q}\right),$$

donde  $Q$  se denomina factor de calidad, considerado constante dentro del programa IBEM3D. Este tipo de amortiguamiento nos proporciona una aproximación para los materiales inelásticos lineales. La tabla 8.1 muestra las propiedades tanto de la cortina como del semiespacio.

	CORTINA	SEMIESPACIO
$\alpha$	600 m/s	1200 m/s
$\beta$	300 m/s	600 m/s
$\rho$	1.6 g/cm <sup>3</sup>	1.8 g/cm <sup>3</sup>
$Q$	50	100

**Tabla 8.1.** Propiedades mecánicas de la cortina y el semiespacio.

Discretización

Las superficies de la presa han sido discretizadas con elementos circulares de varios tamaños para cubrir de manera aproximada todas las fronteras, ver Fig(8.2). La razón de utilizar esta discretización es que en las integrales de la función de Green evaluadas dentro de un círculo tienen resultados exactos y se obtienen con mayor facilidad que al utilizar elementos con diferente geometría.

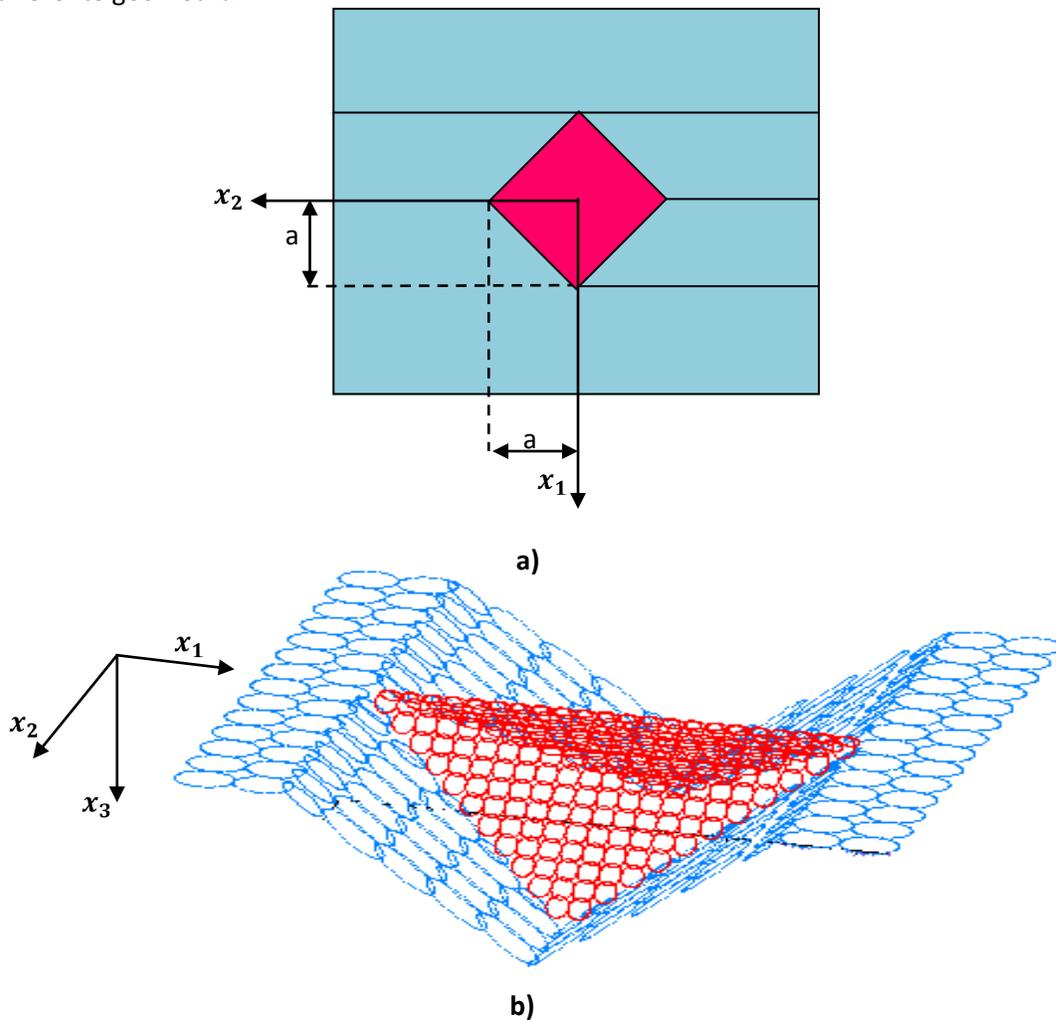


Fig 8.2. Discretización del modelo simplificado de presa. a) La longitud de la cortina es  $2a$  donde  $|a|=375\text{ m}$ . b) La profundidad de la cortina es  $350\text{ m}$ .

Las dimensiones del semiespacio discretizado (zona azul) son  $[-600,600]\text{m} \times [-600,600]\text{m} \times [0,350]\text{m}$  ver Fig(8.2). La longitud característica para el modelo de presa es de  $a=375\text{m}$ . La discretización sólo se realiza en las fronteras del modelo, ver Fig(7.3).

Para minimizar los efectos provocados por esta discretización se utiliza al menos un muestreo de seis elementos para la longitud de onda mínima  $\lambda_{\min}$ . Como hemos mencionado al final del capítulo anterior, el campo de desplazamiento ec.(6.15) se puede escribir como

$$u_i(x_k) = \int_{\partial S} u_i^G dS_\xi ,$$

donde  $\varphi_j(\xi_l) = f_j(\xi_l)$ . Se asume que las densidades de fuerza  $\varphi_j(\xi_l)$  son constantes sobre cada elemento circular de la frontera, cada uno con superficie  $\Delta S_i$  con centro en el punto  $\xi_l$  a lo largo de la frontera apropiada. Por tanto esta integral se puede escribir de la forma:

$$u_i(x_k) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(\xi_l) \int_{\Delta S_i} G_{ij}(x_k, \xi_l) dS_\xi . \quad (8.1)$$

De manera análoga al campo de desplazamientos se pueden discretizar las tracciones ec.(6.16) como:

$$t_i(x_k) = \sum_{i=0}^n \varphi_j(\xi_l) \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \sum_{i=0}^n \varphi_j(\xi_l) \int_{\Delta S_i} T_{ij}(x_k, \xi_l) dS_\xi . \quad (8.2)$$

Las integrales de la ec.(8.1) son calculadas numéricamente con integración Gaussiana, excepto en el caso cuando  $x_k$  está en la vecindad de  $\xi_l$  para las cuales hemos obtenido expresiones analíticas. En particular cuando  $x_k = \xi_l$ , es decir en el centro del círculo de radio  $R$  es posible escribir mostrar que

$$\int_{\Delta S_i} G_{ij}(x_k, \xi_l) dS_\xi = \frac{1}{4\mu} [(F_2 + F_1)\delta_{ij} + (F_2 - F_1)\gamma_i\gamma_j] ,$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  son las integrales de las soluciones de Stokes ecs.(7.3-4)  $f_1$  y  $f_2$  de 0 a  $R$  respectivamente y con  $\gamma_i$  la  $i$ -ésima componente del vector normal en el elemento. En el caso de que  $x_k$  no esté en el centro del círculo se realiza la integración analítica en coordenadas polares locales de la expansión en serie de  $f_1$  y  $f_2$ , hasta términos cúbicos lo cual es suficiente si el mínimo de longitud de onda  $\lambda$  es al menos de cuatro diámetros.

La integral de la ec.(8.2) también es calculada numéricamente excepto en  $x_k = \xi_l$ . En este caso tenemos

$$t_i(x_k) = \sum_{j=0}^n \varphi_j(\xi_l) \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (8.3)$$

La contribución del tensor de tracciones ec.(7.19) es nula a lo largo del elemento circular plano. Se mencionó en el capítulo seis, que existe una singularidad en este tensor cuando  $x_k = \xi_l$  y dentro de la integral su valor principal de Cauchy es cero. La interpretación de la ec.(8.3) es que la fuerza unitaria es distribuida en dos semiespacios en el punto de aplicación de la carga.

Algunos diseños modernos de cortinas de presas, (ver [31] y [11]) sustituyen los típicos núcleos impermeables por placas relativamente delgadas de concreto reforzado compuesto por paneles. La rigidez de este componente generalmente no es de interés pero la integridad de la cortina implica que se realice una inspección de los movimientos superficiales de esta.

#### Excitación sísmica

El objetivo de la modelación para esta presa, es generar las condiciones sismológicas correctas para encontrar la solución numérica que se aproxime a la respuesta de excitación de la cortina.

La excitación sísmica es dada por ondas incidentes P, SV, SH y Rayleigh con amplitud unitaria (las ondas de Rayleigh tiene una amplitud horizontal unitaria), con azimuth cero respecto al eje  $x_1$ . Para ángulos incidentes de 0, 30 y 60 grados con respecto al eje  $x_3$ . Se obtienen los movimientos de la superficie (funciones de transferencia y series de tiempo para los desplazamientos) a lo largo de un arreglo de 51 receptores igualmente espaciados en la cortina (eje  $x_2$ ), como se muestra en la Fig(8.3).

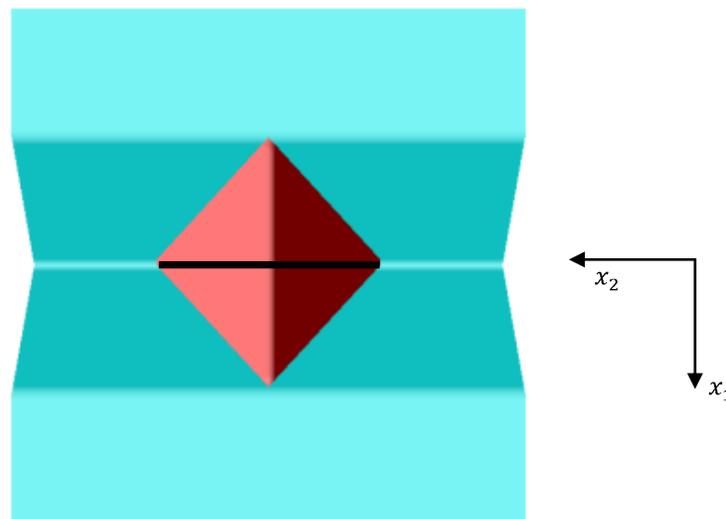


Fig 8.3. Arreglo de 51 receptores (línea negra) igualmente espaciados a lo largo de la cortina de la presa (eje  $x_2$ ).

## 8.2 Resultados

Usando el IBEM se calculó la respuesta sísmica de varios tipos de ondas incidentes que se encuentran en el dominio de la frecuencia, considerando las características físicas propuestas (ver tabla 8.1), de ahí que se obtengan en los resultados la simetría de la respuesta, su amplificación y concentración de esfuerzos.

### *Resultados en el dominio de la frecuencia*

En esta sección se resumen algunos resultados en el dominio de frecuencia. En la Fig(8.4) se muestra la amplitud del desplazamiento del modelo para las frecuencias de 0,8, 1,6, 3,2 y 6,4 Hz sometido a la incidencia vertical ( $\gamma = 0^\circ$ ) de una onda  $P$ . El cálculo se realizó para una serie de receptores localizados a lo largo de la cortina de la presa (eje  $x_2$ ). Se observa que para las frecuencias pequeñas, se obtienen respuestas suaves y simétricas, mientras que para frecuencias altas, las amplificaciones más grandes están en el centro de la cortina. Los resultados muestran que las simetrías son correctas.

Para frecuencias bajas la amplitud de desplazamiento es suave en los extremos de la cortina (inicio y final de la línea de receptores) ya que la difracción que se provoca por las reflexiones internas entre el semiespacio y la cortina es muy baja (componente vertical). Sin embargo para los receptores que se encuentran a la mitad del arreglo lineal (cerca de la corona de la presa) tienen mayor amplitud debido a que las ondas recorren una menor distancia entre las caras de la cortina (componente horizontal) concentrando la mayor cantidad de energía en esta zona de la cortina. Esto quiere decir que para frecuencias más grandes habrá mayor cantidad de ondas por unidad de longitud característica, las cuales se superponen unas a otras provocando disminuciones abruptas. El muestreo a lo largo de la cortina debe aumentar con la frecuencia para evitar este tipo de "aliasing", (ver apéndice A).

En la Fig(8.6) se muestra la amplitud de desplazamiento para los receptores 16, 26 y 36 del arreglo de receptores en la cortina sujeta a la incidencia de ondas  $SH$  con un ángulo de  $30^\circ$  y  $SV$  con  $\gamma = 60^\circ$ . Observe que en los movimientos del receptor que está exactamente en el origen (receptor 26) y el receptor 36 pertenecen a la *cara posterior* de la cortina ver Fig(8.5), que tiene desplazamientos máximos en la componente  $u_1(x_2)$  y  $u_3(x_2)$  y desplazamientos nulos para el receptor 16 (cara anterior).

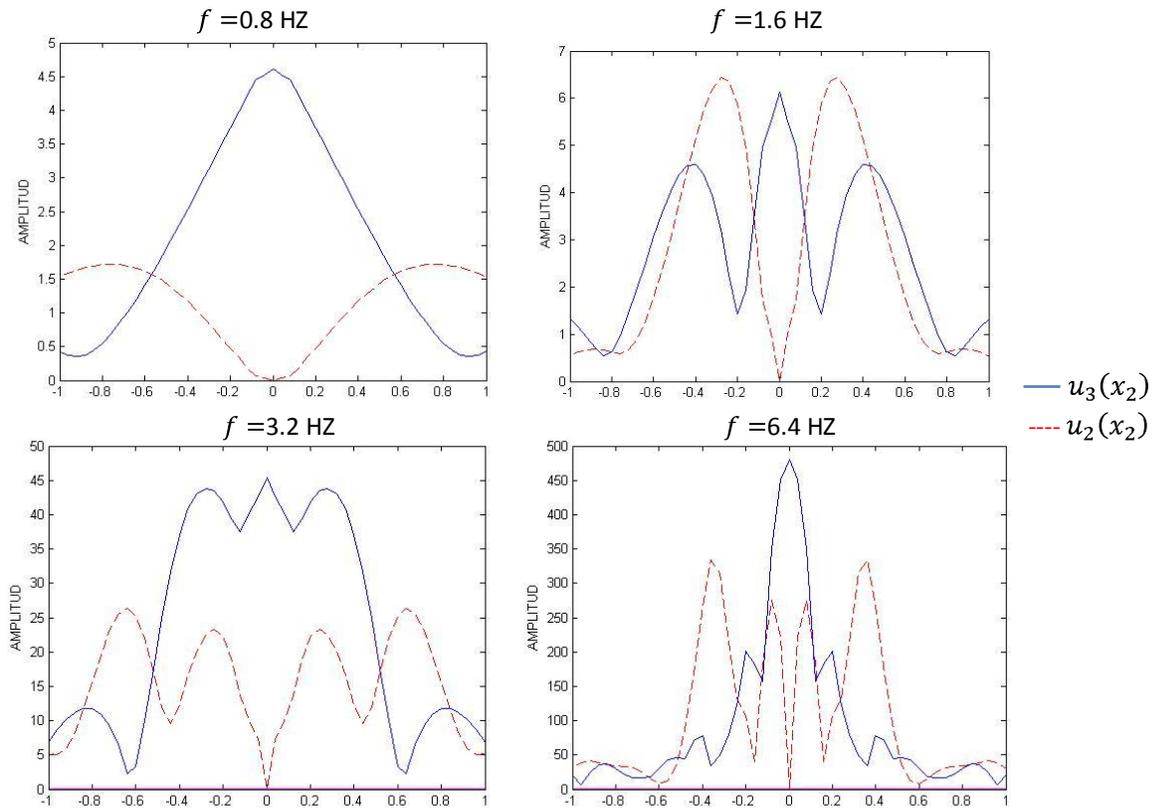


Fig 8.4. Amplitud de desplazamiento contra la distancia normalizada  $a$  para la incidencia vertical  $\gamma = 0$  de una onda  $P$ .

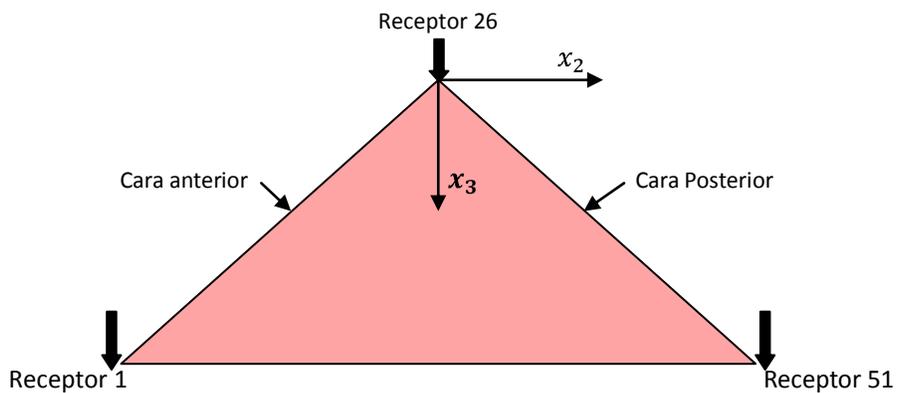


Fig 8.5. Corte transversal de la cortina, los receptores están colocados desde  $-a$  hasta  $a$  en el eje  $x_2$  y están indicados por flechas.

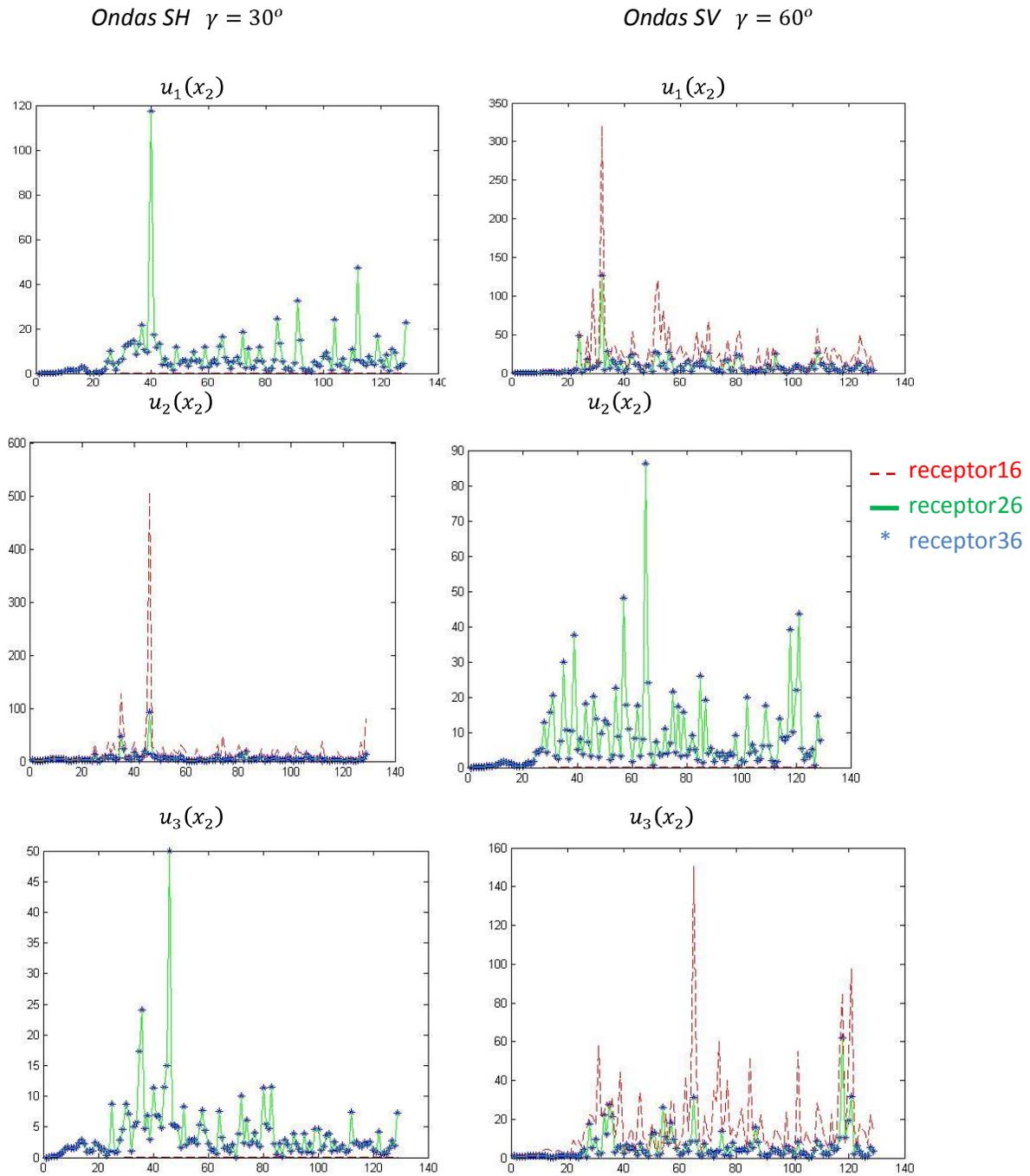


Fig 8.6. Espectro de los desplazamientos para todo el rango de frecuencias  $[0,12.8]$ Hz, para una onda incidente SH con  $\gamma = 30^\circ$  (izquierda) y una onda SV con incidencia  $\gamma = 60^\circ$  (derecha) para los receptores 16,26 y 36 a lo largo de la cortina.

A la vuelta el movimiento para la cortina ante la incidencia de ondas  $SH$  a  $\gamma = 30^\circ$  sólo se observan desplazamientos en una de las dos caras de la cortina (*posterior*) para la componente  $u_1(x_2)$  y para la componente  $u_2(x_2)$  se tienen movimientos principalmente en la otra cara de la cortina (*anterior*). Ocurre algo similar para las ondas incidentes  $SV$  a  $\gamma = 60^\circ$  en las que el movimiento principalmente se lleva a cabo en la cara de la *cortina anterior* para las componente  $u_1(x_2)$  y  $u_3(x_2)$ . Aunque las amplitudes máximas y las frecuencias fundamentales no son las mismas debido al ángulo de incidencia.

Comparación con el Método BEM y FMM<sup>1</sup>

Se realizó un análisis para los desplazamientos dentro de un rango de frecuencias que va de 0 hasta 12.8 Hz, en intervalos de 0.1 Hz.

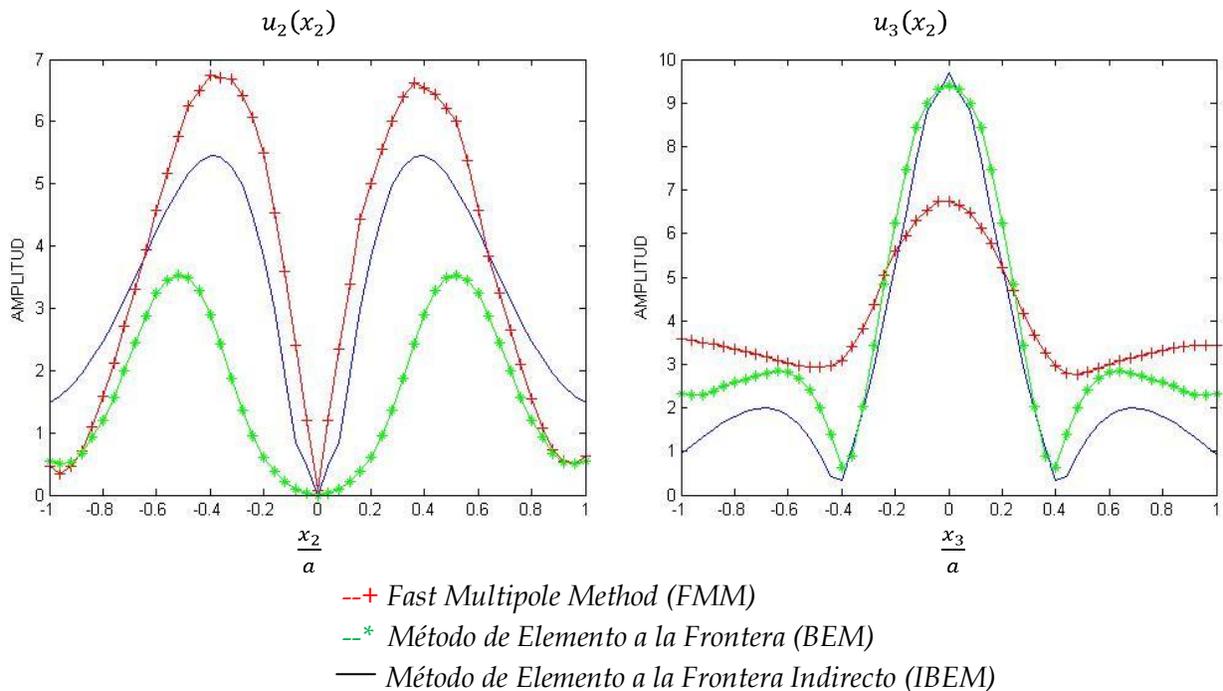


Fig 8.7. Comparación de los desplazamientos obtenidos con los métodos BEM, FMM e IBEM para la frecuencia de excitación  $f = 13.3$  Hz.

<sup>1</sup> Fast Multipole Method ver [9] y [15]

En la Fig(8.7) se muestran las amplitudes de los desplazamientos con respecto a su posición normalizada, calculadas para un arreglo de 51 receptores igualmente espaciados a lo largo de la cortina en el eje  $x_2$ , utilizando los métodos BEM, el Fast Multipole Method (FMM) y el IBEM para una frecuencia<sup>2</sup> de excitación  $f=13.3 \text{ Hz}$ , considerando una onda  $P$  con ángulo de incidencia  $\gamma = 0^\circ$ . Para los desplazamientos  $u_3(x_2)$  obtenidos con los métodos IBEM y BEM se tiene una mejor aproximación que al calcularse con FMM, esto es debido a que el modelo FMM no contempla la histéresis de amortiguamiento para esta comparación. Los tres métodos coinciden con los valores característicos para la amplitud mínima y máxima, aunque en magnitud diferente.

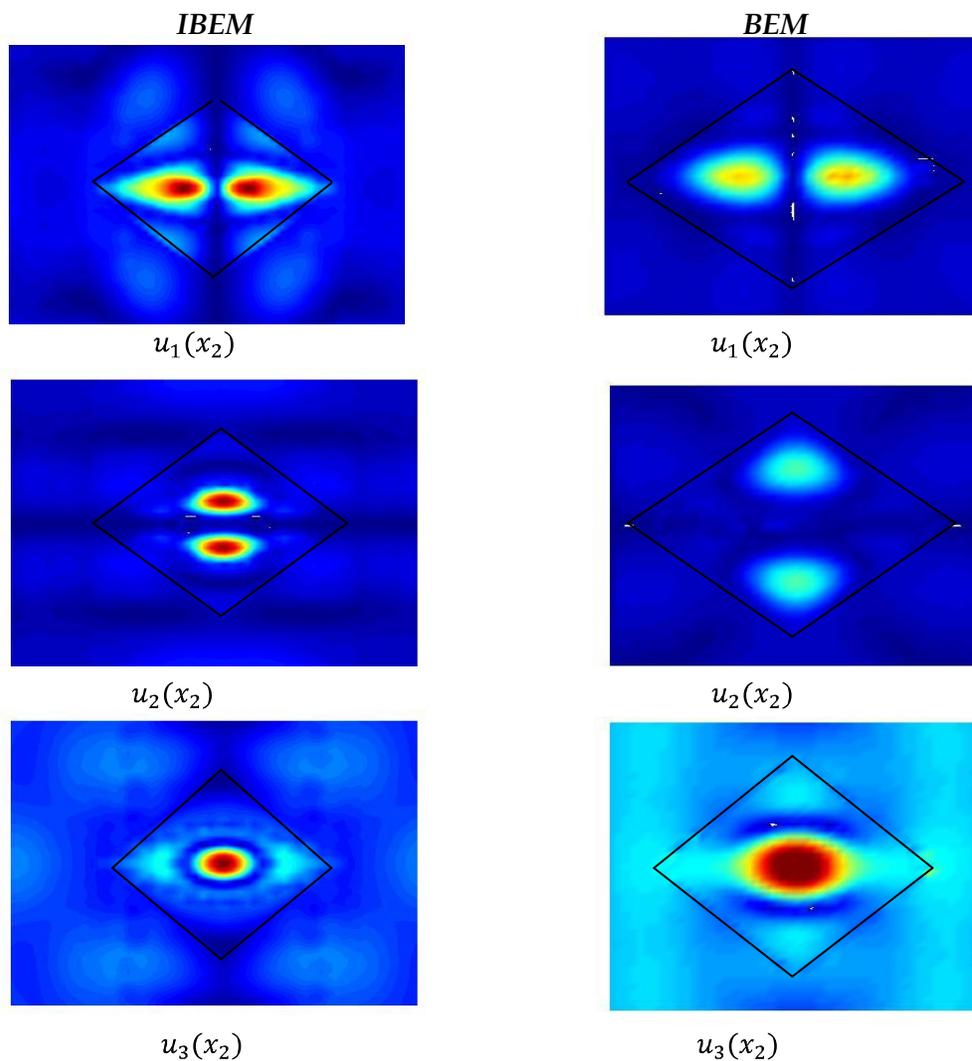


Fig 8.8. Amplitud de desplazamientos para la cortina en la frecuencia  $f=13.3 \text{ Hz}$  con el método IBEM (izquierda) y BEM (derecha), considerando una onda  $P$  con ángulo de incidencia  $\gamma = 0^\circ$ .

<sup>2</sup> Note que  $f$  está en Hz, la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$  con unidades rad/s.

Sismogramas sintéticos

La Fig(8.9) muestra los sismogramas correspondientes a las ondas Rayleigh y ondas  $P$  con incidencia vertical. Se utilizó como señal excitadora un pulso de Ricker con un período característico  $t_p = 0.5s$ . Se puede apreciar la amplificación del frente de ondas incidentes causada por la topografía a lo largo de la cortina y que la mayoría de la energía de las ondas se encuentra en la componente  $u_3(x_2)$ . Estas amplificaciones son mayores para los receptores que se encuentran a la mitad del arreglo de receptores sobre el eje  $x_2$  debido a su simetría.

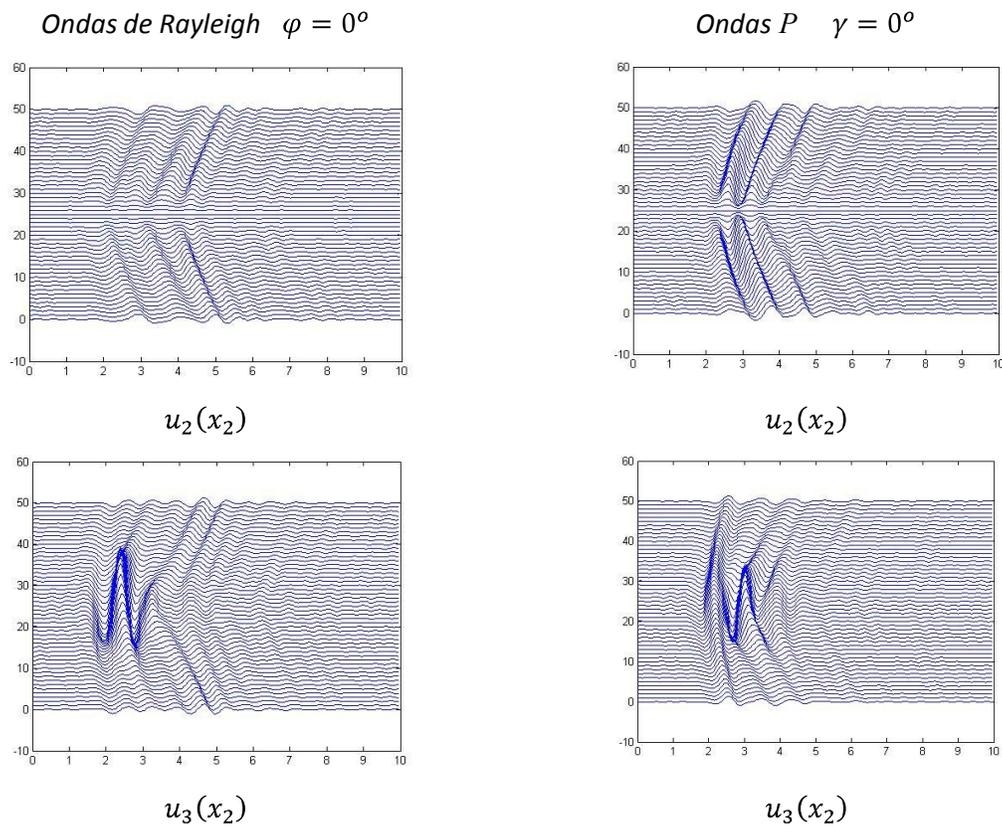


Fig 8.9. Sismogramas sintéticos para las componentes  $u_2$  y  $u_3$  a lo largo de un arreglo de 51 receptores igualmente espaciados sobre la cortina de la presa (eje  $x_2$ ). Cortina con incidencia de ondas Rayleigh (izquierda) y ondas  $P$  (derecha) a  $\gamma = 60^\circ$ .

En la Fig(8.10) se muestran las series de tiempo de los desplazamientos para las ondas  $SH$  y  $SV$  con un ángulo de incidencia  $\gamma = 30^\circ$ . Se puede apreciar que los movimientos  $u_1(x_2)$  de la onda  $SV$  y el desplazamiento  $u_2(x_2)$  de la onda  $SH$ , son muy parecidos. Esto se debe a la simetría de las componentes  $SV$  y  $SH$ . Es decir existe una simetría también en los desplazamientos  $u_1(x_2)$  de la onda  $SH$  y en los desplazamientos  $u_2(x_2)$  de la onda  $SV$ .

Es claro que las componentes *SV* son las que tienen mayor difracción, esto puede interpretarse como las múltiples reflexiones internas de las ondas, así como la difracción producida entre la cortina de la presa y el semiespacio. Por tanto son las que llevan más energía y producen mayores movimientos en la cortina, esto se puede ver en la componente  $u_3(x_2)$  de la onda *SV*. Esta componente de la onda *SV* muestra también la disipación de la energía (atenuación) exactamente en el receptor que se encuentra en el origen de las coordenadas (receptor 26).

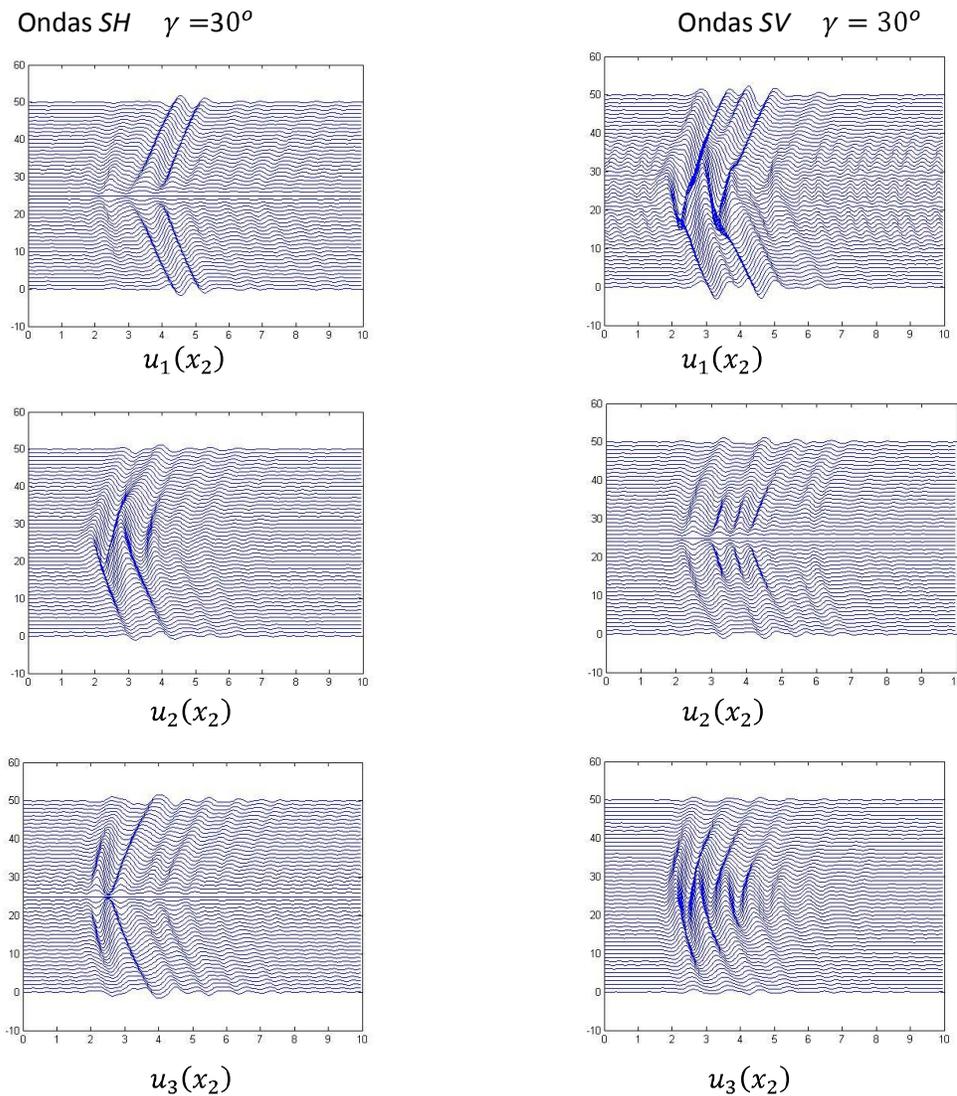


Fig 8.10. Sismogramas sintéticos para ondas incidentes *SH* (izquierda) y ondas *SV* (derecha) a  $\gamma = 60^\circ$ . La señal es un pulso de Ricker con un periodo característico de  $t_p = 0.5s$ .

Por mencionar algunos resultados el tiempo de arribo del frente de una onda  $P$  con  $\gamma = 0^\circ$ , es casi idéntico en todos los receptores a un tiempo  $t = 2$  s para la componente vertical  $u_3(x_2)$ . Esto quiere decir que el movimiento se realiza sobre toda la línea de receptores a la vez. Mientras que para la onda incidente  $SV$  con  $\gamma = 30^\circ$  en la componente  $u_1(x_2)$  los movimientos se realizan primeramente en la parte central de la cortina a un tiempo  $t = 2$  s.

Por otra parte los tiempos de arribo principalmente se realizan en el centro de la cortina dependiendo del tipo de onda y ángulo de incidencia. Por ejemplo ver que el sismograma perteneciente a la onda incidente  $SH$  con  $\gamma = 30^\circ$  tiene un tiempo de llegada de  $t = 3$  s para la componente  $u_1(x_2)$ . En tanto la onda de Rayleigh con  $\varphi = 0^\circ$  tiene un tiempo de llegada aproximadamente de  $t = 1.5$  s para la componente  $u_3(x_2)$ .

Para finalizar sólo hacemos la observación de que nuestros datos calculados se realizaron con un número de 333 elementos sobre las fronteras discretizadas, el incremento de elementos para el cálculo de la respuesta sísmica permite llegar a soluciones aproximadas más cercanas a la realidad del fenómeno físico. Aunque el incremento de elementos eleva el tiempo de cómputo de los cálculos por ejemplo una corrida con 333 elementos para una sola frecuencia para el arreglo de receptores planteados llevo 3 min en una computadora normal. En cambio con 756 elementos para exactamente el mismo problema llevo 24 min por frecuencia para su cálculo.

## CONCLUSIONES

---

Se ha presentado un modelo de presa simplificado simétrico, aproximado numéricamente con el Método de Elemento a la Frontera Indirecto (IBEM) en el cual se han podido identificar las frecuencias fundamentales de los desplazamientos para las ondas sísmicas con distintos ángulos de incidencia. Y sus sismogramas sintéticos correspondientes.

Mediante las simulaciones numéricas que se realizaron para el modelo de presa simplificado, se estimaron las influencias de algunos de los factores que controlan los movimientos de la cortina tales como, el ángulo de incidencia que *modifica la simetría de las funciones de transferencia* a lo largo del arreglo de receptores, la histéresis de amortiguamiento que *modifica la amplitud*, las densidades del semiespacio y la cortina que modifican junto al coeficiente de Poisson la velocidad e incidencia de las trazas de las ondas con las paredes de la cortina vista en los sismogramas sintéticos. El tiempo de respuesta de los movimientos depende principalmente del tipo de onda incidente.

Los desplazamientos máximos pertenecen a las ondas *SV* seguidas por las ondas *SH* en magnitud. Existe una simetría entre las componentes de desplazamiento entre las ondas *SV* y *SH* que nos permiten saber que el movimiento de una cara de la cortina es máximo mientras que en la otra es mínimo simultáneamente.

Se realizó una comparación cuantitativa entre los métodos IBEM, BEM y FMM. En los cuales el IBEM y BEM utilizaron la histéresis de amortiguamiento mostrando funciones de transferencia para una onda plana *P* a una frecuencia  $f = 13.3 \text{ Hz}$  con un máximo de amplitud en la componente  $u_3(0, x_2)$  de **9.66** y **9.4** respectivamente, mientras que el FMM para esta misma componente consiguió un máximo de **6.8** aproximadamente. Para la componente  $u_2(0, x_2)$  se obtuvo una amplitud con el IBEM, BEM y FMM de **5.42**, **3.53** y **6.7**, respectivamente.

---

Se lograron las mejores comparaciones con el IBEM y BEM. Estos métodos muestran que en los problemas con extensión infinita (por ejemplo el semiespacio elástico) pueden aproximarse muy bien a la solución. Por otra parte en el FMM existen dificultades en la discretización del dominio y mallas utilizados provocando tenga valores residuales acumulativos.

La contribución fundamental para la aproximación de la solución es debida al método empleado, en particular en la representación integral que se resuelve en cada método. En segundo término esta la geometría del semiespacio y la geometría de los elementos empleados, como mencionamos en el IBEM se utilizan círculos por tener resultados exactos, evitando residuos como errores de propagación.

El IBEM maneja de manera natural el infinito ya que sólo requiere una discretización limitada por la frontera. Se pueden mejorar las comparaciones realizadas utilizando una mayor discretización de la frontera, logrando así llegar a frecuencias más altas.

Resulta evidente la versatilidad del Método IBEM para el cálculo de geometrías simétricas, la implementación de una frontera NTOPO que pertenece a la geometría del cañón, hace que los cálculos realizados por el IBEM sean más realistas y nos permite proponer problemas que involucren geometrías complejas.

## Apéndice A

### Transformada de Fourier Discreta

---

Estamos usando la convención

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi i\omega t} dt, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-2\pi i\omega t} d\omega.$$

Asumiendo que la función  $f(t)$  está dada sólo como valores discretos y equidistantes de la variable  $t$  se define

$$f_k \equiv f(t_k) \equiv f(k\Delta t) \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

El valor recíproco del incremento del tiempo  $\Delta t$  es llamado *frecuencia de muestreo*. Si la frecuencia de muestreo es alta, muchos detalles de la función  $f(t)$  pueden ser capturados en una tabla de valores discretos de  $f_k$ . Este hecho intuitivo es enunciado en términos cuantitativos por el teorema de Nyquist: Si el espectro de Fourier de  $f(t)$ ,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi i\omega t} dt$$

es despreciable para frecuencias que se encuentran más allá de la frecuencia crítica (ó frecuencia de Nyquist)

$$\boxed{\pm\omega_0 \equiv \pm \frac{1}{2\Delta t}} \quad (\text{A.1})$$

$f(t)$  es llamada un proceso de banda limitada. Este proceso está totalmente determinado por los valores incluidos en el muestreo de  $f_k$ . La fórmula que permite la reconstrucción de  $f(t)$  de los datos del muestreo adquiridos es

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{\sin(2\pi\omega_0(t - k\Delta t))}{2\pi\omega_0(t - k\Delta t)}.$$

Por el contrario si  $f(t)$  no es de banda limitada, muestreando con un tiempo finito de resolución encontramos un “reflejo” de las partes salientes del espectro más allá de  $\pm\omega_0$ , superponiéndose en el espectro correcto provocando pendientes muy abruptas. En el procesamiento de señales este efecto es conocido como “aliasing”. El aliasing impide recuperar correctamente la señal cuando las muestras de ésta se obtienen a intervalos de tiempo demasiado largos. Asumimos que un conjunto finito de datos muestreados está dado por:

$$f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Y sea  $N$  un número par. Definimos las frecuencias discretas como

$$\omega_m \equiv \frac{m}{N\Delta t}, \quad m = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}$$

(Los  $\omega_m$  en los cuales  $m = \frac{N}{2}$  son nuevamente la frecuencia de Nyquist). Luego la transformada de Fourier de  $f(t)$  para alguna frecuencia  $\omega_m$  esta dada por

$$F(\omega_m) \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \omega_m t_k} = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{km}{N}}. \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto tiene sentido definir la transformada de Fourier discreta como

$$F_m \equiv \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{km}{N}} \quad N \text{ par, y } m = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2}. \quad (\text{A.3})$$

De acuerdo a la ec.(A.2) significa que  $F(\omega_m) \approx \Delta t F_m$ . De la definición de  $F_m$  se sigue que  $F_{-m} = F_{N-m}$ . Hemos usado la periodicidad para reenumerar los  $F_m$  tal que  $m$  va de 0 a  $N-1$  (en lugar de  $-\frac{N}{2}$  a  $\frac{N}{2}$ ):

$$\begin{aligned} -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \\ \Rightarrow 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \pm \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Con este convenio de índices la transformada inversa puede ser convenientemente escrita como

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \quad (\text{A.4})$$

Las ecs.(A.3) y (A.4) son comúnmente llamadas en la literatura como la transformada y la transformada inversa de Fourier discretas, respectivamente. Estas ecuaciones sirven para calcular derivadas espaciales de manera alternada en el método seudoespectral y tienen los mismos resultados que al aplicar el algoritmo FFT.

El algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) realiza las mismas transformaciones que las ecs.(A.3) y (A.4) pero con un tiempo de cálculo mucho menor, ya que con las ecs.(A.3) y (A.4) se realizan  $N^2$  operaciones en cambio, con FFT se realizan  $N \log N$ . Esto se logra realizando una inversión de bits, el lector interesado puede encontrar el algoritmo FFT en [48] y [8].



## Apéndice B

### Cálculo de los Esfuerzos

Sea la función de Green para la fuerza aplicada en el punto  $\mathbf{x}$  con dirección  $\gamma_i$ , que produce desplazamientos en la dirección  $\gamma_j$  en el punto  $\xi$ , en el dominio de la frecuencia  $\omega$ .

$$G_{ij}(x, \xi; \omega) = \frac{1}{4\pi\mu r} \{f_1 \gamma_i \gamma_j + f_2 (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j)\} \quad (B.1)$$

Realizamos primero la derivada total de la función de Green de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} &= \frac{-1}{4\pi\mu r^2} \{f_1 \gamma_k \gamma_j + f_2 (\delta_{kj} - \gamma_k \gamma_j)\} \frac{\partial r}{\partial x_l} \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \gamma_k \gamma_j + f_1 \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} \gamma_j + f_1 \gamma_k \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_l} + \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \delta_{kj} - \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \gamma_k \gamma_j - f_2 \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} \gamma_j - f_2 \gamma_k \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_l} \right\} \end{aligned}$$

Factorizando

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} &= \frac{-1}{4\pi\mu r^2} \{f_1 \gamma_k \gamma_j + f_2 (\delta_{kj} - \gamma_k \gamma_j)\} \frac{\partial r}{\partial x_l} \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_l} - \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \right) \gamma_k \gamma_j + (f_1 - f_2) \left( \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} \gamma_j + \gamma_k \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \delta_{kj} \right\} \end{aligned}$$

Como  $f_1(r)$  y  $f_2(r)$  dependen de la distancia entre  $\vec{x}$  y  $\vec{\xi}$  tal que  $\bar{r} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_l} &= \frac{df_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{df_1}{dr} \frac{x_l}{r} = \frac{df_1}{dr} \gamma_l \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_l} &= \frac{df_2}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{df_2}{dr} \frac{x_l}{r} = \frac{df_2}{dr} \gamma_l \end{aligned}$$

De igual modo encontramos las derivadas parciales de  $\gamma_k$  y  $\gamma_j$ ,  $\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{x_k}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_l} x_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} &= \frac{1}{r} (\delta_{kl} - \gamma_l \gamma_k) \\ \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_l} &= \frac{1}{r} (\delta_{jl} - \gamma_j \gamma_l) \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas parciales de  $f_1(r)$ ,  $f_2(r)$  y  $\gamma_k$ ,  $\gamma_j$  respectivamente

$$\frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} = \frac{-\gamma_l}{4\mu\pi r^2} \{f_1 \gamma_k \gamma_j + f_2 (\delta_{kj} - \gamma_k \gamma_j)\} \\ + \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} \right) \gamma_l \gamma_k \gamma_j + (f_1 - f_2) \left( \frac{1}{r} (\delta_{kl} - \gamma_l \gamma_k) \gamma_j + \frac{1}{r} (\delta_{jl} - \gamma_j \gamma_l) \gamma_k \right) + \frac{df_2}{dr} \gamma_l \delta_{kj} \right\}$$

Agrupando términos semejantes obtenemos las derivadas parciales de la función de Green

$$\frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_l \gamma_k \gamma_j + \frac{(f_1 - f_2)}{r} (\gamma_j \delta_{kl} + \gamma_k \delta_{jl}) + \left( \frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) \gamma_l \delta_{kj} \right\}$$

$$\frac{\partial G_{lj}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_l \gamma_k \gamma_j + \frac{(f_1 - f_2)}{r} (\gamma_j \delta_{kl} + \gamma_l \delta_{jk}) + \left( \frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) \gamma_k \delta_{lj} \right\}$$

Encontramos ahora las deformaciones, recordando que la dirección del vector unitario  $\gamma_j$  está representado con un índice mudo j.

$$\epsilon_{klj} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_{kj}}{\partial x_l} + \frac{\partial G_{lj}}{\partial x_k} \right) \quad (B.2)$$

Explícitamente el tensor de las tensiones  $\epsilon_{klj}$  es

$$\epsilon_{klj} = \frac{1}{8\pi\mu r} \left\{ 2 \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_l \gamma_k \gamma_j + \frac{(f_1 - f_2)}{r} (2\gamma_j \delta_{kl} + \gamma_l \delta_{jk} + \gamma_k \delta_{jl}) \right. \\ \left. + \left( \frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) (\gamma_k \delta_{lj} + \gamma_l \delta_{kj}) \right\}$$

Por último apliquemos la ley de Hooke ecuación (3.4) sobre las tensiones obtenidas ó de manera análoga podemos aplicar la ecuación (6.9)

$$\sigma_{mnj} = C_{mnkl} \epsilon_{klj} = \lambda \epsilon_{kkj} \delta_{mn} + 2\mu \epsilon_{klj} ,$$

donde  $\epsilon_{kkj}$  es

$$\epsilon_{kkj} = \frac{1}{4\pi\mu r} \left\{ \frac{df_1}{dr} + \frac{(f_1 - 2f_2)}{r} \right\} \gamma_j. \quad (\text{B.3})$$

Entonces los esfuerzos están representados por el tensor  $\sigma_{mnj}$

$$\sigma_{mnj} = \frac{\lambda}{4\pi\mu r} \left\{ \frac{df_1}{dr} + \frac{(f_1 - 2f_2)}{r} \right\} \gamma_j \delta_{mn} + \frac{1}{4\pi r} \left\{ 2 \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_m \gamma_n \gamma_j + \frac{(f_1 - f_2)}{r} (2\gamma_j \delta_{mn} + \gamma_n \delta_{jm} + \gamma_m \delta_{jn}) + \left( \frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) (\gamma_m \delta_{nj} + \gamma_n \delta_{mj}) \right\}$$

Utilizando las velocidades de los potenciales elastodinámicos, tenemos que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho\alpha^2 - 2\rho\beta^2}{\rho\beta^2} = \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2 \right).$$

Introduciendo en el tensor de esfuerzos y reagrupando obtenemos

$$\sigma_{mnj} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ 2 \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{df_2}{dr} - \frac{3(f_1 - f_2)}{r} \right) \gamma_m \gamma_n \gamma_j + \left[ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left( \frac{df_1}{dr} - \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) + 2 \left( \frac{f_2}{r} - \frac{df_1}{dr} \right) \right] \gamma_j \delta_{mn} + \left( \frac{df_2}{dr} - \frac{f_2}{r} \right) (\gamma_m \delta_{nj} + \gamma_n \delta_{mj}) \right\}$$

(B.4)

Notemos que el tensor  $\sigma_{mnj}$  (B.4) contiene explícitamente la dirección  $\gamma_j$  de la fuerza aplicada, y con él se pueden encontrar los esfuerzos en cualquier componente de un sistema coordinado, aplicándole la proyección adecuada.

## Apéndice C

### Soluciones de Stokes

El lector puede encontrar las soluciones de Stokes<sup>1</sup> en [22], [37] y como operador en [2] p.103.

$$F_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + 2\beta^2 \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}} \delta(t - kr) k dk \quad (\text{C.1.A})$$

$$F_2 = \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) - \beta^2 \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}} \delta(t - kr) k dk \quad (\text{C.1.B})$$

Realizamos un mapeo de las soluciones de Stokes del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, aplicando la transformada de Fourier (2.8.b) con  $\gamma = 1$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[F_1] &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) e^{-i\omega t} dt + 2\beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}} \delta(t - kr) k e^{-i\omega t} dk dt \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{-i\omega \frac{r}{\alpha}} + 2\beta^2 \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}} k e^{-i\omega kr} dk \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{-i\omega \frac{r}{\alpha}} + 2\beta^2 \left[ -\left( \frac{1}{\beta} \frac{e^{-i\omega \frac{r}{\beta}}}{i\omega r} - \frac{1}{\alpha} \frac{e^{-i\omega \frac{r}{\alpha}}}{i\omega r} \right) + \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}} \frac{e^{-i\omega kr}}{i\omega r} dk \right] \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{-i\omega \frac{r}{\alpha}} - 2 \left[ \left( \frac{\beta^2}{\omega^2 r^2} + \frac{i\beta^2}{\alpha \omega r} \right) e^{-i\omega \frac{r}{\alpha}} - \left( \frac{\beta^2}{\omega^2 r^2} + \frac{i\beta}{\omega r} \right) e^{-i\omega \frac{r}{\beta}} \right] \end{aligned}$$

Introduciendo las velocidades de onda característica  $P$  y  $S$ , como  $q \equiv \frac{\omega}{\alpha}$ ,  $k \equiv \frac{\omega}{\beta}$  respectivamente, tenemos que:

$$f_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{-iqr} - 2 \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{1}{q^2 r^2} + \frac{i}{qr} \right) e^{-iqr} - \left( \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{kr} \right) e^{-ikr} \right]. \quad (\text{C.2})$$

<sup>1</sup>  $\alpha$ ,  $\beta$  son las velocidades de las ondas  $P$  y  $S$  respectivamente, definidas en las ecs.(4.1) y (4.2).

De manera análoga obtenemos la transformada de Fourier de  $F_2$  (C.1.B).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[F_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) e^{-i\omega t} dt - \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - kr) k e^{-i\omega t} dk dt \\
 &= e^{-i\omega \frac{r}{\beta}} - \beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kr) k e^{-i\omega t} dt dk \\
 &= e^{-i\omega \frac{r}{\beta}} - \beta^2 \left[ -\left( \frac{1}{\beta} \frac{e^{-i\frac{\omega}{\beta} r}}{i\omega r} - \frac{1}{\alpha} \frac{e^{-i\frac{\omega}{\alpha} r}}{i\omega r} \right) + \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \frac{e^{-i\omega kr}}{i\omega r} dk \right]
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la velocidades características de las ondas S y P obtenemos que

$$f_2 = e^{-ikr} + \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{1}{q^2 r^2} + \frac{i}{qr} \right) e^{-iqr} - \left( \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{i}{kr} \right) e^{-ikr} \right]. \quad (C.3)$$

Podemos obtener la solución para el caso estático a partir de las soluciones de Stokes (C.1.A) y (C.1.B), manteniendo  $F_1$  y  $F_2$  constantes en el dominio del tiempo  $t$  donde  $0 < t < \infty$ , es decir la fuerza aplicada en el origen para un medio elástico, isótropo, homogéneo e infinito no cambia con el tiempo.

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \int_0^{\infty} F_1 dt = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) dt + 2\beta^2 \int_0^{\infty} \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \delta(t - kr) k dk dt \\
 &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 2\beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} \int_0^{\infty} \delta(t - kr) k dt dk \\
 &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 2\beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} k dk = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \beta^2 \left[ \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] = 1.
 \end{aligned}$$

Procedemos de manera similar para encontrar  $K_2$

---



---


$$K_2 = \int_0^{\infty} F_2 dt = 1 - \beta^2 \int_{1/\alpha}^{1/\beta} k dk = 1 - \frac{\beta^2}{2} \left[ \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right].$$

Las constantes  $K_1$  y  $K_2$  llevan a la solución de Kelvin, las cuales son constantes escalares independientes del tiempo que pueden ser obtenidos en el dominio de la frecuencia, realizando una expansión de Taylor para  $\omega$  ó  $r$  pequeñas sobre las ecs.(C.2) y (C.3) obteniendo  $K_1$  y  $K_2$  como una aproximación a primer orden.

Mostramos algunas derivadas especiales de la ecs.(C.2) y (C.3), que serán de utilidad para el cálculo explícito de las tracciones, en las que se basa el programa IBEM 3D.

$$\left( \frac{df_1}{dr} \right) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( -iq - \frac{2}{r} + \frac{4i}{qr^2} + \frac{4}{q^2 r^3} \right) e^{-iqr} + \left( \frac{2}{r} - \frac{4i}{kr^2} - \frac{4}{k^2 r^3} \right) e^{-ikr} \quad (C.4)$$

$$\left( \frac{df_2}{dr} \right) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{2i}{qr^2} - \frac{2}{q^2 r^3} \right) e^{-iqr} + \left( -ik - \frac{1}{r} + \frac{2i}{kr^2} + \frac{2}{k^2 r^3} \right) e^{-ikr} \quad (C.5)$$

$$\left( \frac{f_2}{r} - \frac{df_1}{dr} \right) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( iq + \frac{2}{r} - \frac{3i}{qr^2} + \frac{3}{q^2 r^3} \right) e^{-iqr} + \left( -\frac{1}{r} + \frac{3i}{kr^2} + \frac{3}{k^2 r^3} \right) e^{-ikr} \quad (C.6)$$

$$\left( \frac{f_1 - f_2}{r} \right) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{3i}{qr^2} - \frac{3}{q^2 r^3} \right) e^{-iqr} + \left( -\frac{1}{r} + \frac{3i}{kr^2} + \frac{3}{k^2 r^3} \right) e^{-ikr} \quad (C.7)$$

$$\left( \frac{f_1 - 2f_2}{r} \right) = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{4i}{qr^2} - \frac{4}{q^2 r^3} \right) e^{-iqr} + \left( -\frac{2}{r} + \frac{4i}{kr^2} + \frac{4}{k^2 r^3} \right) e^{-ikr} \quad (C.8)$$

## Apéndice D

### IBEM 3D

---

---

En este apéndice se muestra el algoritmo utilizado para el cálculo de los desplazamientos en el dominio de la frecuencia para el programa IBEM 3D. En este programa se considera que puede existir solo topografía irregular, o solo valle aluvial, o topografía irregular en una parte del modelo y valle en otra. La nomenclatura se mantiene:

**NPLAT**=parte plana sin montículos;

**NIRR**=parte irregular del semiespacio en contacto con el valle;

**NIRK**=parte superficial del valle; y la parte nueva

**NIRT**=parte irregular de la topografía que no está en contacto con el valle.

Se inicializa el programa con la lectura de los datos contenidos en un archivo.DAT. Este archivo contiene la información del sistema físico del semiespacio y la cortina, de su geometría y la localización exacta de los receptores.

#### Constantes Físicas en archivo.DAT

$F_{nor}$  = Factor de normalización

$\nu_S$  = Coeficiente de Poisson del semiespacio

$Q_S$  = Factor de Calidad para el semiespacio para las ondas S

$Q_P$  = Factor de Calidad para el semiespacio para las ondas P

$\rho_S$  = Densidad del semiespacio

$\beta_S$  = Velocidad de propagación de las ondas P del semiespacio

$\nu_C$  = Coeficiente de Poisson de la cortina

$Q_C$  = Factor de Calidad para el semiespacio para las ondas S

$Q_C$  = Factor de Calidad para la cortina para las ondas P

$\rho_C$  = Densidad de la cortina

$\beta_C$  = Velocidad de propagación de las ondas P de la cortina

$N_{INC}$  = Número de incidencias

$\varphi$  = ángulo acimutal

$\gamma(N_{INC})$  = ángulos de incidencia

$DF$  = incremento de frecuencia

$NFR$  = Número de frecuencias a calcular

$FRI$  = Frecuencia inicial

$NPLAT$  = número de elementos en NPLAT

$NTOPO$  = número de elementos de NTOPO

$NIRR$  = número de elementos para NIRR

$NIRK$  = número de elementos para NIRK

#### Lectura de Geometría de la presa y semiespacio

Las tres primeras columnas representan la localización espacial, las tres columnas siguientes son los cosenos directores y la última columna es el radio del elemento. Esto se realiza en el orden de aparición de las regiones NPLAT, NTOPO, NIRR, NIRK.

x    y    z     $\gamma_1$      $\gamma_2$      $\gamma_3$     R

#### Coordenadas de los receptores

Se dan las coordenadas x,y,z de los receptores en el espacio indicando con una cuarta columna con 1: si el receptor está en la cortina, y 0; si no está en la cortina.

DO j = 1, ..., NFREC

$$k = \frac{2\pi j}{\beta_E} F_{nor}$$

$$q = k * \frac{\beta}{\alpha}$$

$$ck = k - \frac{k}{2(QD)_S} i$$

$$cq = q - \frac{q}{2(QD)_P} i$$

$$kv = \frac{k}{\beta_R}$$

$$qv = kv * \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_R$$

$$ckv = kv - \frac{kv}{2(QR)_S} i$$

$$cq v = qv - \frac{qv}{2(QR)_P} i$$

SOL(ck, cq, k, q, ckv, cqv, IOND, NCAS)

DO i = 1 ... NEST

$$x_\varphi = x_i \cos \varphi_R + y_i \sin \varphi_R$$

DO k = 1 ... NCAS

$$\text{sum}x_k = 0 + 0i$$

$$\text{sum}y_k = 0 + 0i$$

$$\text{sum}z_k = 0 + 0i$$

END

IF IN<sub>i</sub> = 0

DO l = 1 ... NBPE

$$x_{mn} = x_i - x_{b_l}$$

$$y_{mn} = y_i - z_{b_l}$$

$$z_{mn} = z_i - z_{b_l}$$

$$r_{mn} = \sqrt{x_{mn}^2 + y_{mn}^2 + z_{mn}^2}$$

$$dA = \pi r_l^2$$

IF r<sub>l</sub> ≤ r<sub>mn</sub>

$$G_1 = \frac{x_{nm}}{r_{mn}} \quad G_2 = \frac{y_{nm}}{r_{mn}} \quad G_3 = \frac{z_{nm}}{r_{mn}}$$

$$cqr = cq * r_{mn}$$

$$ckr = ck * r_{mn}$$

GREEN(G<sub>mn</sub>, ckr, cqr, r<sub>mn</sub>,  $\frac{\beta}{\alpha}$ , G<sub>m</sub>)

ELSE

$$vn_1 = nx_l \quad vn_2 = ny_l \quad vn_3 = nz_l$$

IF 0.1r<sub>l</sub> < r<sub>mn</sub>

$$\varepsilon = \frac{r_{mn}}{R_l}$$

$$G_1 = \frac{x_{nm}}{r_{mn}} \quad G_2 = \frac{y_{nm}}{r_{mn}} \quad G_3 = \frac{z_{nm}}{r_{mn}}$$

ELSE

$$\varepsilon = 0$$

END IF

GREENEX(G<sub>mn</sub>, ck, cq, R<sub>l</sub>,  $\frac{\beta}{\alpha}$ , vn<sub>m</sub>, G<sub>m</sub>, ε)

END IF

```

DO p = 1 ... NCAS
  l1 = l          l2 = l + NBPE          l3 = l2 + NBPE
  Ax = Al1,p    Ay = Al2,p          Az = Al3,p

  sumxp = sumxp + dA(AXG1,1 + AYG1,2 + AZG1,3)
  sumyp = sumyp + dA(AXG2,1 + AYG2,2 + AZG2,3)
  sumzp = sumzp + dA(AXG3,1 + AYG3,2 + AZG3,3)
END DO
ELSE
DO l = NBPE + 1 ... NBPE + NBPR
  xmn = xi - xbl
  ymn = yi - zbl
  zmn = zi - zbl
  rmn = √(xmn2 + ymn2 + zmn2)
  dA = πrl2

  IF rl ≤ rmn
    G1 =  $\frac{xnm}{rmn}$    G2 =  $\frac{ynm}{rmn}$    G3 =  $\frac{znm}{rmn}$ 
    cqr = cq * rmn
    ckr = ck * rmn
    GREEN(Gmn, ckr, cqr, rmn,  $(\frac{\beta}{\alpha})_R$ , Gm)
  ELSE
    vn1 = nxl   vn2 = nyl   vn3 = nzl
    IF 0.1rl < rmn
      ε =  $\frac{rmn}{R_l}$ 
      G1 =  $\frac{xnm}{rmn}$    G2 =  $\frac{ynm}{rmn}$    G3 =  $\frac{znm}{rmn}$ 
    ELSE
      ε = 0
    END IF
    GREENEX(Gmn, ckv, cqv, Rl,  $(\frac{\beta}{\alpha})_R$ , vnm, Gm, ε)
  END IF
END DO
DO p = 1 ... NCAS
  l1 = 2NBPE + l    l2 = l1 + NBPR    l3 = l2 + NBPR
  Ax = Al1,p      Ay = Al2,p      Az = Al3,p

  sumxp = sumxp + dA(AXG1,1 + AYG1,2 + AZG1,3)
  sumyp = sumyp + dA(AXG2,1 + AYG2,2 + AZG2,3)
  sumzp = sumzp + dA(AXG3,1 + AYG3,2 + AZG3,3)
END DO
END DO
END IF

```

```

IF INi = 0
DO p = 1 ... NCAS
  ITYP = IONDp
  IF ITYP = 1      ONDASP( $\gamma r_p, q$ )
  IF ITYP = 2      ONDASV( $\gamma r_p, k, q$ )
  IF ITYP = 3      ONDASR( $q$ )
  IF ITYP = 4      ONDASH( $\gamma r_p, k$ )

  UX = UY = UZ = 0 + 0i

  IF ITYP ≠ 4      DESFPS( $x_\varphi, z_i, ITYP$ )
  IF ITYP = 4      DESFSH( $x_\varphi, z_i$ )

  U1 = UX cos  $\varphi_R$  - UY sen  $\varphi_R$ 
  U2 = UX sen  $\varphi_R$  - UY cos  $\varphi_R$ 
  U3 = UZ

  FDTUXi,p = U1 + sumxp
  FDTUYi,p = U2 + sumyp
  FDTUZi,p = U3 + sumzp
END DO
ELSE
DO p = 1 ... NCAS
  FDTUXi,p = sumxp
  FDTUYi,p = sumyp
  FDTUZi,p = sumzp
END DO
END IF
END DO
SALIDA
  FDTUXi,p
  FDTUYi,p
  FDTUZi,p
END DO
STOP

```

Las subrutinas ONDASP,ONDASH, ONDASV, ONDASR, DESPS, DESPH, calculan la solución de campo libre con las ecs. dadas en el capítulo IV.

## Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. & I.A. Stegun (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., New York.
- [2] Achenbach, J.D. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [3] Achenbach, J.D., Gantesen, A. K., and McMaken, H. (1982). *Ray Methods for Wave in Elastic Solids*. Pitman, Boston.
- [4] Aki, K. & P.G. Richards (1980). *Quantitative Sismology. Theory and Methods*, W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- [5] Baker A. A. (1992). *The Boundary Element Method in engineering: A Complete Course*. Mc Graw-Hill, UK.
- [6] Baldock, G. R. & T. G. Bridgeman (1981). *Mathematical Theory of wave Motion*. John Wiley & Sons, London.
- [7] Brebbia, C. A. & Dominguez J. (1992). *Boundary Elements an Introductory Course*, Second Ed., Comp. Mec. Publ., Southampton & Mc Graw-Hill Book Co., New York.
- [8] Burden, R.L. & Faires, J.D. (2005). *Numerical Analysis*. Thomson Brooks/Cole, United States.
- [9] Chaillat S., M. Bonnet, Semblat J.F. (2009). *A new fast multi-domain BEM to model seismic wave propagation and amplification in 3D geological structures*. *Geophys. J. Int.*, Vol. 177, 509-531.
- [10] Chandrupatla, T. R. & Belendengu, A. D. (2002). *Introductions to Finite Elements in Engineering*. Prentice Hall, New Jersey.
- [11] Dakoulas P & Hsu C.H. (1995). *Response of Dams in Semielliptical Canyons to Oblique SH waves*. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 121, 379-391.
- [12] Davis, O. R. & Selvadurai, A.P.S. *Elasticity and Geomechanics*. Cambridge University Press. New York.
- [13] Gerald, C. F. & Wheatley P.O. (2000). *Análisis Numérico con Aplicaciones*. Pearson Education, México.

- [14] Gernot B.,Smith I.,Duenser C.,(2008).*The Boundary Element Method with Programming: for engineers and scientist*. SpringerWien, New York.
- [15] Fujiwara H. (2000). *The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems*. *Geophys. J. Int.*, 140:198–210.
- [16] Haberman, R. (2003).*Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno*. Pearson Education S.A., Madrid.
- [17] Hartmann F. (1986). *Introduction to Boundary Elements: Theory and Applications*. Springer, New York.
- [18] Harris, John G. (2001). *Linear Elastic Waves*. Cambridge University Press, London.
- [19] Hinchey, F. A. (1979). *Vectores y Tensores*. Limusa, México.
- [20] Hudson, J. A. (1980). *The Excitation and Propagation of Elastic Waves*. Cambridge University Press, New York.
- [21] Ize, J. (2002). *Cálculo de Variaciones*. IIMAS-FENOMECC UNAM, México.
- [22] Kausel E.(2006).*Fundamental Solutions in Elastodynamics, A Compendium*. Cambridge University Press, New York.
- [23] Kawase, H. & Aki (1989). *A study on the response of a soft basin for incident S, P, and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City*. *Bull. Seism. Soc. Am.* **79**, 610-630.
- [24] Kupradze, V. D. (1963). *Dynamical Problems in Elasticity*, in *Progress in Solid Mechanics* Vol. III. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- [25] Landau, L.D. & Lifshitz E.M. (1982). *Teoría de la Elasticidad, Curso de Física Teórica Vol. 7*. Reverté, Barcelona.
- [26] Lang, S. (2005). *Undergraduate Analysis*. Springer UTM, New York.
- [27] Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York.

- [28] Maeso O., Aznárez J.J. & Domínguez J. (2002). *Effects of Space Distribution of Excitation on Seismic Response of Arch Dams*. *Journal of Engineering Mechanics*, **128**: 759–768.
- [29] Maeso O., Aznárez J.J. & Domínguez J. (2004). *Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams*. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **33**:1103–1123.
- [30] Marsden, J.E. & Hoffman, M.J. (2008). *Análisis Básico de Variable Compleja*. Trillas, México.
- [31] Papalou A and J Bielak (2001). *Seismic Elastic Response of Earth Dams with Canyon Interaction*. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE* **127**, 446-453.
- [32] Reddy, J.N. (1993). *An Introduction to Finite Element Method*. Mc Graw-Hill, New York.
- [33] Saad, M.H. (2009) *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier Inc., Burlingong, USA.
- [34] Sánchez, H.M. & Oscar, P.V. (2007). *Geometría Riemanniana*. Las prensas de Ciencias-UNAM, México.
- [35] Sanchez-Sesma, F. J. (1983). *Diffraction of elastic waves by three dimensional surface irregularities*. *Bull. Seism. Soc. Am.* **73**. 1621-1636.
- [36] Sanchez-Sesma, F. J. & Campillo M. (1991). *Diffraction of s, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation*. *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. **81**. 2234-2253.
- [37] Sanchez-Sesma, F. J. & Campillo M. (2006). *Retrieval of the Green's Function from Cross Correlation: The Canonical Elastic Problem*. *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. **96**. 1182-1191.
- [38] Sanchez-Sesma, F. J. & Esquivel, J. (1979). *Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves*. *Bull. Seism. Soc. Am.* **69**. 1107-1120.
- [39] Sanchez-Sesma, F. J. & Luzón F. (1995). *Seismic response of three dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves*. *Bull. Seism. Soc. Am.* **85**. 269-284.

- [40] Sanchez-Sesma F. J., Madariaga R., Irikura K. (2001). *An approximate elastic two dimensional Green's function for a constant-gradient medium*. Geophys. J. Int. Vol. **146**, 269-284.
- [41] Sanchez-Sesma, F. J. & Rosenblueth E.(1979). *Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves*. Bull. Seism. Soc. Am. **69**. 1107-1120.
- [42] Sommerfeld, A.(1964a). *Optics, Lectures on Theoretical Physics Vol. IV*. Academic New York.
- [43] Sommerfeld, A.(1964b). *Partial Differential Equations on Physics, Lectures on Theoretical Physics Vol. VI*. Academic New York.
- [44] Spivak, M. *Cálculo en Variedades*. Reverté, Barcelona.
- [45] Stokes, G. G.(1849). *On the dynamical theory of diffraction*. Trans. Camb. Phil. Soc. Vol. **9**. 243-280. London.
- [46] Suresh Chandra (2006). *A text Book of Mathematical Physics*. Alpha Science International Ltd. Oxford UK.
- [47] Timoshenko, S.P. & Godier, J.N. (1970). *Theory of Elasticity*. Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- [48] Vesely Franz (1994). *Computational Physics An Introduction*. Plenum, Press New York.
- [49] Yokoi, T. (2003). *The higher order Born approximation to improve the solution of seismic response of a three dimensional canyon computed by the Indirect Boundary Method*, J. Phys. Earth Vol. **137**. 97-106.
- [50] Yokoi, T. & Sanchez-Sesma, F. J. (1998). *A hybrid calculation technique of indirect boundary element method and the analytical solutions for three dimensional problems of topography*, J. Phys. Earth Vol. **137**. 97-106.
- [51] Zienkiewicz, O. C. (1977). *The Finite Element Method*. Mc Graw-Hill, New York.
- [52] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (1991). *The Finite Element Method Vol. II.*, Mc Graw-Hill, New York.