

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
MEXICO**

POSGRADO DE CIENCIAS DE LA TIERRA

*“CÁLCULO DE SISMOGRAMAS SINTÉTICOS UTILIZANDO EL
MÉTODO DE LA MATRIZ GLOBAL Y DEL NÚMERO DE ONDA
DISCRETIZADO (CASOS ESCALAR Y VECTORIAL).*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS (SISMOLOGÍA)
PRESENTA:

EDGAR SÁNCHEZ ALVARO
2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero hacer presente mi gratitud a la Gerencia de Estudios de Ingeniería Civil perteneciente a la Comisión Federal de Electricidad liderada por el Ingeniero Arbizu Lara por haberme permitido continuar con mi formación como ingeniero en mi Alma Mater la Universidad Nacional Autónoma de México.

También quiero agradecer al Ingeniero Moises Dávila Serrano y al Dr. Antonio Uribe Carvajal por el apoyo brindado durante la realización de estos estudios que sin él no hubiera sido posible especializarme.

Al Dr. Francisco J. Sánchez Sesma por haberme introducido en este mundo de la sismología formal y dirigir este trabajo de investigación con tanto entusiasmo.

Así mismo, agradezco al Dr. Esteban Flores y a la Dra. Ursula Iturraran por haberme ayudado en el desarrollo de los programas y animaciones realizados en este trabajo.

Por último agradezco al comité del jurado el Dr. Gerardo Suárez Reynoso, Dr. Raúl Valenzuela Wong, Dr. Raúl Castro Escamilla, Dr. Francisco J. Sánchez Sesma y Dr. Antonio Uribe Carvajal por sus atinados comentarios que hicieron que mejorará sustancialmente la redacción de esta tesis.

Para mi esposa (Paty) y mis hijos (Allen, Yaltzin y Yazmin).

Dedicatoria

A mi esposa e hijos por los retos obtenidos como familia durante esta etapa de nuestras vidas. Especialmente a mi esposa paty por ese amor y comprensión durante la realización de esta tesis.

A mis padres por su apoyo incondicional durante la realización de este trabajo. A mi mamá por su corazón tan desprendido y a mi padre que aunque no está tan lúcido se que sería feliz al ver la conclusión de este trabajo, por lo que implicó compromiso, esperanza, disciplina y humildad.

CONTENIDO

Abstract	
Resumen	
I	Introducción.....1
II	Planteamiento del problema.....3
III	Fundamentos de Elastodinámica.....5
III.1	Solución de la Ecuación de Movimiento.....9
IV	Matriz Global y Número de Onda Discretizado.....14
IV.1	Matriz Global Ondas SH.....14
IV.1.1	Ondas Planas SH.....14
IV.1.2	Cálculo de los Elementos de la Matriz Global Caso SH.....16
IV.2	Ondas Planas Acopladas P-SV y la Matriz Global.....19
IV.2.1	Ondas Planas P-SV.....19
IV.2.2	Cálculo de los Elementos de la Matriz Global caso P-SV.....22
IV.3	Vector de Términos de Fuente.....26
IV.4	Número de Onda Discretizado.....31
IV.4.1	Obtención de sismogramas sintéticos para un espacio infinito.....32
V	Ejemplos.....44
V.1	Sismogramas y Animaciones con una Fuente de Cizalla.....45
V.2	Sismogramas obtenidos en un medio estratificado debido a Fuerzas Vertical y Horizontal.....53
V.3	Sismogramas obtenidos en un medio estratificado debido a Fuerzas Compuestas.....55
V.4	Animaciones por Cuadro (Snapshot).....56
VI	Conclusiones.....80
Referencias	
Anexos	

I Introducción

En la presente tesis se abordan las ecuaciones formales de la propagación de ondas incluyendo las fuerzas de cuerpo que representan la fuente sísmica del sistema de interés. La solución exacta de esas ecuaciones está dada para un medio infinito, elástico homogéneo e isótropo. Para el caso que nos ocupa se propone la respuesta dinámica tanto en una superficie libre de esfuerzos de un medio estratificado como en el interior utilizando de manera conjunta dos métodos robustos de cálculo: la matriz global y el número de onda discretizado.

En capítulo II se plantea el cálculo de los sismogramas sintéticos para un medio estratificado formado por estratos elástico, homogéneos e isótropos con propiedades conocidas. El cálculo de sismogramas se limita a un espacio bidimensional utilizando como fuentes sísmicas una fuerza horizontal, una vertical, dos pares de fuerzas dipolares y un doble par de fuerzas sin momento resultante.

En capítulo III se presentan los fundamentos físico-matemáticos necesarios para abordar el problema de interés haciendo énfasis en el cálculo de sismogramas sintéticos utilizando funciones de Green en su representación integral, mostrando la conveniencia de usar ondas planas para calcular la respuesta sísmica. Así mismo, se muestra la estructura del cálculo de sismogramas utilizando la combinación lineal de funciones de Green escaladas por el tensor de momento sísmico.

En el capítulo IV se describe el método de la matriz global para un medio elástico homogéneo e isótropo. Se muestra el patrón de comportamiento de la matriz global para n estratos y se presentan los fundamentos del método del número de onda discretizado para hacer una suma de ondas planas para obtener la respuesta sísmica en a superficie libre de esfuerzos así como en el cálculo de animaciones de la propagación de ondas.

En el capítulo V se presentan ejemplos de cálculo de sismogramas y animaciones por cuadro de la propagación de las ondas sísmicas cuando la fuente se encuentra dentro de la estratigrafía. Las fuentes utilizadas son: fuerza horizontal, vertical doble fuerzas dipolares y un doble par de fuerzas sin momento resultante.

Finalmente, se discuten las ventajas y desventajas de utilizar los métodos del número de onda discretizado y de la matriz global, se dan las bases para el cálculo de sismogramas en 3D y otras líneas de investigación.

II Planteamiento del problema

Desde el primer sismograma sintético calculado por Lamb (1904) se han sentado las bases para calcular sismogramas. Con el avance vertiginoso de las computadoras se ha podido acceder a técnicas discretas de cálculo que permiten obtener sismogramas más precisos. Bouchon y Aki K., (1977) propusieron el cálculo de sismogramas sintéticos utilizando la suma de ondas planas homogéneas e inhomogéneas para obtener señales en tiempo (ver también Bouchon, 2003). El problema de propagación de ondas en un medio estratificado ha sido ampliamente estudiado (ver por ejemplo: Haskell, 1953; Kennett, 1983). Otro método es el de la Matriz Global formulado con primeros principios de la propagación de ondas y condiciones de frontera en el medio de interés, el cual se utilizará en esta tesis. Todos ellos permiten describir la propagación en un medio estratificado, desde luego hay ventajas y desventajas de cada uno de ellos sin embargo, se renuncia a la comparación entre métodos y se asume que el método de la Matriz Global es robusto para este tipo de análisis debido al tipo de matriz obtenida con las condiciones de frontera en el medio de interés. En los siguientes apartados se describirá con más detalle.

En este contexto se puede enunciar el objetivo principal de esta investigación el cual consiste en calcular sismogramas sintéticos para un medio estratificado, homogéneo e isótropo, así como el de calcular imágenes (instantáneas) de la propagación de las ondas a distintos tiempos.

Las fuentes sísmicas puntuales utilizadas para generar ondas de cuerpo (SH y P-SV) son las componentes del tensor de Green (G_{ij}). También se usan combinaciones lineales de estos mismos componentes para definir fuentes dipolares (explosión) y una dislocación (temblor), concretamente las fuentes utilizadas son:

1. Cizalla isótropa
2. Fuerza Impulsiva Vertical
3. Fuerza Impulsiva Horizontal
4. Dos Dipolos de Fuerza (explosión)
5. Dos Pares de Fuerzas (dislocación)

Los alcances de este trabajo quedan acotados primero, al cálculo de simogramas en un espacio de dos dimensiones (2D) y segundo, en un medio elástico homogéneo e isótropo. Se reconoce que la solución propuesta está en un sistema coordenado rectangular que es el más adecuado para un medio estratificado.

Finalmente se hace hincapié que este trabajo tiene un formalismo académico y muestra el uso de dos herramientas de análisis en el cálculo de sismogramas mismas que permiten acceder a problemas más novedosos en la sismología sobre esta misma línea de investigación.

III Fundamentos de Elastodinámica

Los conceptos básicos de la elastodinámica son explicados en los siguientes textos Bullen y Bolt (1985), Aki y Richards (1980), Hudson (1980), Ben-Menahem y Singh (1981), Achenbach (1982) entre otros. En este trabajo se describen algunos conceptos tomados de esta literatura con el objeto de fundamentar el cálculo de los sismogramas sintéticos en un medio estratificado, utilizando como fuente, la aplicación de fuerzas independientes o acopladas para formar sistemas dipolares o dobles pares de fuerzas en un medio elástico homogéneo e isótropo.

Se presentan las ecuaciones de elasticidad y se explora la solución de la ecuación de onda utilizando ondas planas así como, la descripción del tensor de momento sísmico y la teoría de fuentes puntuales a partir de las funciones de Green elementales y compuestas. Las ecuaciones son expresadas con notación indicial a fin de compactar su descripción.

Se parte de la simetría del tensor de esfuerzo y deformación los cuales se pueden expresar en función de sus coordenadas cartesianas.

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \sigma_{ji}(\bar{x}) \dots \dots \dots (\text{iii.1})$$

$$e_{ij}(\bar{x}) = e_{ji}(\bar{x}) \dots \dots \dots (\text{iii.2})$$

donde σ_{ij} y e_{ij} son los tensores de esfuerzo y deformación respectivamente y \bar{x} es la componente cartesiana (x, y, z). La ecuación del equilibrio es la segunda ley de Newton por unidad de volumen que relaciona los esfuerzos, fuerzas de cuerpo y desplazamientos.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{válida para } i=1,2,3 \dots \dots \dots (\text{iii.3})$$

donde u_i es el campo de desplazamiento, f_i es la fuerza de cuerpo (por unidad de volumen) en sus tres componentes respectivamente y ρ es la densidad de masa. El término f_i se refiere en elastodinámica al término de la fuente y $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ $i=1,2,3$ representa la segunda deriva parcial respecto al tiempo, esto es, la componente i-ésima de aceleración en coordenadas cartesianas. En la ecuación (iii.3) y en lo sucesivo se emplea

la convención de suma de la notación indicial en la que los índices repetidos (dos y solo dos) indican suma. Así se tiene que:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \dots\dots\dots(iii.4)$$

Las unidades para el tensor de esfuerzo son FL⁻², en el sistema internacional se usan Pascales (Pa: es N/m²). Las componentes de las fuerzas de cuerpo están dadas como FL⁻³, esto es en Newtons sobre metro cúbico (N/m³), la densidad ρ en kilogramos por metro cúbico (kg/m³), el desplazamiento en metros (m) y las deformaciones sin unidades.

La relación entre los tensores de esfuerzo y de deformación están dados por la ley de Hooke (iii.5)

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \dots\dots\dots(iii.5)$$

donde c_{ijkl} son las componentes del tensor elástico. Este tensor en general tiene 81 términos y debido a que se satisface la relación de simetría, el tensor se reduce a 21 componentes o constantes elásticas (módulos elásticos). Las unidades de estos módulos son en Pascales (N/m²).

En un medio elástico homogéneo e isótropo las componentes del tensor c_{ijkl} se pueden expresar mediante dos constantes elásticas independientes denominadas constantes de lamé (μ y λ) (Aki y Richards, 1980).

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dots\dots(iii.6)$$

Donde δ_{ij} es el delta de Kronecker y toma los siguientes valores bajo las siguientes circunstancias. $\delta_{ij}=1$ cuando $i=j$ son iguales y $\delta_{ij}=0$ cuando $i \neq j$.

Para un medio homogéneo e isótropo la relación de Hooke se simplifica como (iii.7).

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu e_{ij} \dots\dots(iii.7)$$

donde:

$$\theta = e_{kk} = u_{k,k} = \nabla \cdot \bar{u}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

La θ representa la dilatación cúbica del material y e_{ij} es el tensor de deformaciones.

Existen otros parámetros elásticos que también son frecuentemente utilizados para caracterizar un medio de interés: módulo de compresibilidad (κ), módulo de Young (E), de Poisson (ν) todos ellos se pueden poner en función y de las constantes de Lamè (λ y μ):

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \dots\dots(iii.8)$$

$$E = 3\mu(\lambda + \frac{2}{3}\mu)/(\lambda + \mu) \dots\dots(iii.9)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \lambda / (\lambda + \mu) \dots\dots(iii.10)$$

En el caso que el módulo de Poisson sea $\frac{1}{4}$ implica que $\lambda = \mu$, a esta condición en particular se le conoce como sólido de Poisson.

Ahora cuando hablamos de fluidos se considera que el módulo de rigidez es nulo ($\mu=0$) entonces, los esfuerzos estarán dados por la ecuación (iii.11) debido a que el producto lamda por la dilatación cúbica ($\lambda\theta$) es la presión instantánea la ecuación (iii.11) se puede expresar como (iii.12), (Bullen y Bolt 1985).

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta \dots\dots(iii.11)$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \dots\dots(iii.12)$$

En general se ha observado que los módulos elásticos son función de la posición. Sin embargo, en este trabajo los módulos se consideran constantes, independientes de la posición consistentes con un medio homogéneo. No obstante, también existe la posibilidad de hacer el medio disipativo o visco-elástico es decir, los módulos son función del tiempo y/o frecuencia, y sus valores pueden llegar a ser complejos (Kennett, 1983).

Sustituyendo la ecuación (iii.5) en (iii.3) obtendremos otra forma la ecuación de Newton,

$$(c_{ijkl}u_{i,j})_{,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i, \quad i=1,2,3,\dots\dots\dots(iii.13)$$

que representa la ecuación de movimiento para un medio elástico, homogéneo e isótropo, es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en sus componentes cartesianas y el campo de desplazamiento está dado por $u_i(x_j,t)$.

La ecuación (iii.13) se puede poner en términos de las dos constantes de Lamè para dar paso a la ecuación de Navier (iii.14)

$$(\lambda u_{j,j})_i + (\mu(u_{i,j} + u_{j,i}))_{,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i, \quad i=1,2,3,\dots\dots\dots(iii.14)$$

En notación vectorial puede ser expresada para un caso general en que los módulos elásticos sean dependientes de la posición:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \bar{u} + \mu\nabla^2\bar{u} + \nabla\lambda\nabla \cdot \bar{u} + \nabla\mu \times \nabla \times \bar{u} + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)\bar{u} + \bar{f} = \rho\ddot{\bar{u}} \dots\dots\dots(iii.15)$$

Es claro que si las constantes elásticas no dependen de las coordenadas de espacio los gradientes aplicados sobre ellas serán nulos, entonces la ecuación se simplificar a la ecuación (iii.16)

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \bar{u} + \mu\nabla^2\bar{u} + \bar{f} = \rho\ddot{\bar{u}} \dots\dots\dots(iii.16)$$

III.1 Solución de la ecuación de Movimiento

En la sección anterior se identificó de la ecuación (iii.14) a las fuerzas de cuerpo como al término de la fuente sísmica (f_i), representa la fuente de excitación de un medio infinito. La solución de esta ecuación cuando se considera la fuerza como puntual o concentrada se presenta con detalle en el texto de Ben-Menahem y Singh (1981).

Las solución exacta 2D se puede expresar utilizando funciones de Hankel cilíndricas. Tal es el caso del tensor de Green (iii.1.1), para el desplazamiento de un espacio infinito con un medio elástico, homogéneo e isótropo, cuando se aplica una fuerza en alguna dirección en particular. El tensor $G_{ij}(\bar{x}, \bar{\xi}; t)$ representa el desplazamiento en la dirección i debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j en el punto ξ . Por ejemplo, la función G_{11} es el campo de desplazamiento en la dirección “ u_1 ” debido a la aplicación de una fuerza en la dirección “ x_1 ”. En lo sucesivo los índices $i=1,2,3$ corresponden a “ u ”, “ v ” y “ w ” respectivamente y $j=1,2,3$ se asocian a la aplicación de las fuerzas en las direcciones “ x ”, “ y ” y “ z ” respectivamente. La solución mostrada en la ecuación (iii.1.1) es una solución que esta limitada para un espacio infinito por lo que únicamente se utiliza como referencia en nuestro trabajo.

$$G_{ij} = \frac{1}{i8\rho} \{ \delta_{ij}A - (2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})B \} \dots\dots\dots(iii.1.1)$$

donde γ_i y γ_j son los cosenos directores, α y β son las velocidades de onda compresional y de cizalla respectivamente. Las funciones H_0^2 son funciones de Hankel de orden cero y segunda especie.

$$\gamma_i = \frac{x - x_F}{r}$$

$$\gamma_j = \frac{z - z_F}{r}$$

$$r = \sqrt{(x - x_F)^2 + (z - z_F)^2}$$

$$A = \frac{H_0^{(2)}(\omega/\alpha r)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega/\beta r)}{\beta^2}$$

$$B = \frac{H_0^{(2)}(\omega/\alpha r)}{\alpha^2} - \frac{H_0^{(2)}(\omega/\beta r)}{\beta^2}$$

El desplazamiento se puede calcular de acuerdo con la ecuación (iii.1.2)

$$u_i = G_{ij}F_j \dots\dots\dots(\text{iii.1.2})$$

El tensor de Green utilizando la superposición de ondas planas de cuerpo, como fuentes de excitación en el medio estratificado (iii.1.3) a la, (iii.1.7).

$$G_{22} = \frac{-i}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta} \exp(-ik(x-x_f)) \exp(-i\eta(z-z_f)) dk \dots\dots\dots(\text{iii.1.3})$$

$$G_{11} = \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k^2}{\gamma} \exp(-i\gamma|z-z_f|) + \nu \exp(-i\nu|z-z_f|) \right) \exp(-ik(x-x_f)) dk \dots\dots(\text{iii.1.4})$$

$$G_{13} = \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k \operatorname{sgn}(z-z_f) \left(\exp(-i\gamma|z-z_f|) - \exp(-i\nu|z-z_f|) \right) \exp(-ik(x-x_f)) dk \dots\dots(\text{iii.1.5})$$

$$G_{31} = \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k \operatorname{sgn}(z-z_f) \left(\exp(-i\gamma|z-z_f|) - \exp(-i\nu|z-z_f|) \right) \exp(-ik(x-x_f)) dk \dots\dots(\text{iii.1.6})$$

$$G_{33} = \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma \exp(-i\gamma|z-z_f|) + \frac{k^2}{\nu} \exp(-i\nu|z-z_f|) \right) \exp(-ik(x-x_f)) dk \dots\dots\dots(\text{iii.1.7})$$

Donde:

γ y ν son los números de onda vertical para las ondas compresionales y de corte respectivamente.

k es el número de onda horizontal.

ρ y ω son la densidad de masa y la frecuencia angular respectivamente

“x”, “z”, “ x_F ” y “ z_F ” representan coordenadas de campo y fuente respectivamente.

Esta representación permite discretizar a las ondas planas utilizando como principal parámetro al número de onda horizontal, los detalles de este método se abordaran en la siguiente sección.

En general las fuerzas de cuerpo representan la fuente sísmica como se muestra en la ecuación iii.1.2 y pueden ser expresadas como una combinación lineal de pares de fuerzas utilizando el tensor de momento sísmico (iii.1.8), es decir, las combinaciones de fuerzas puntuales dan lugar a distintos tipos mecanismo de fuente sísmica. Por ejemplo, la combinación de cuatro fuerzas sin momentos resultantes o nulos es empleada para representar una dislocación.

$$M_{pq} = M_o(n_p d_q + n_q d_p) \dots \dots \dots (iii.1.8)$$

donde:

M_{pq} tensor de momento sísmico.

M_o momento sísmico escalar.

n_p y n_q son las componentes del vector normal en el plano de acción de las fuerzas.

d_p y d_q son las componentes del vector deslizamiento en la dirección del movimiento.

Ahora bien, el campo de desplazamiento total se puede obtener como una suma de desplazamientos generados por pares de fuerzas esto, se puede estimar mediante la ecuación (iii.1.9). Si desarrollamos esta ecuación para “u” y “w” tenemos las ecuaciones (iii.1.10) y (iii.1.11)

$$u_n = M_{pq} \frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q} \dots\dots\dots(\text{iii.1.9})$$

$$u_1 = M_{11} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_F} + M_{13} \frac{\partial G_{11}}{\partial z_F} + M_{31} \frac{\partial G_{13}}{\partial x_F} + M_{33} \frac{\partial G_{13}}{\partial z_F} \dots\dots\dots(\text{iii.1.10})$$

$$u_3 = M_{11} \frac{\partial G_{31}}{\partial x_F} + M_{13} \frac{\partial G_{31}}{\partial z_F} + M_{31} \frac{\partial G_{33}}{\partial x_F} + M_{33} \frac{\partial G_{33}}{\partial z_F} \dots\dots\dots(\text{iii.1.11})$$

donde los coeficientes M_{ij} representan los elementos del tensor de momento sísmico que se expresan en forma matricial.

$$M_{pq} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

De esta manera, es posible calcular el campo de desplazamiento debido a la aplicación de pares de fuerzas relacionadas con algún fenómeno en particular. Parte importante de este cálculo es determinar los elementos del tensor de momento sísmico, por ejemplo para el caso de un temblor el modelo más aceptado es un doble par de fuerzas sin momento resultante, se puede modelar para el caso bidimensional utilizando dos pares de fuerzas alojadas en un plano de falla (Aki y Richards 1980). Si consideramos esta representación en un espacio bidimensional se tiene los siguientes parámetros.

Echado de falla $\delta = 45^\circ$

Rumbo de la falla $\phi_f = 90^\circ$

Dirección del vector deslizamiento $\lambda = 90^\circ$

Para este caso se pudo verificar a partir de la ecuación (iii.1.8) que los elementos del tensor de momento sísmico M_{13} y M_{31} son iguales a cero y que únicamente los elementos M_{11} y M_{33} tienen un valor igual a M_0 y $-M_0$ respectivamente, donde M_0 es el momento sísmico, ello indica que este doble par de fuerzas se puede representar con un equivalente mecánico de fuerzas, a partir de la combinación lineal de dos fuerzas dipolares, las cuales se muestran en las ecuaciones (iii.1.12) y (iii.1.13) respectivamente.

$$u = M_0 \frac{ik}{\gamma} (k^2 - \gamma^2) \exp(-i\gamma|z - z_f|) + M_0 2ikv \exp(-iv|z - z_f|) \dots \dots (iii.1.12)$$

$$w = iM_0 \operatorname{sgn}(z - z_f) (k^2 - \gamma^2) \exp(-i\gamma|z - z_f|) - M_0 2ik^2 \operatorname{sgn}(z - z_f) \exp(-iv|z - z_f|) \dots \dots (iii.1.13)$$

IV Matriz global y Número de Onda Discretizado

IV.1 Matriz Global Ondas SH

IV.1.1 Ondas Planas SH

La solución de la ecuación de Navier (iii.16) sin fuerzas de cuerpo se puede expresar como la suma de dos campos irrotacional (o escalar) y solenoidal (o vectorial) asociados a las ondas de compresión y de corte respectivamente.

En el caso de las ondas SH que propagan en un medio estratificado (figura IV.1.1.1) la solución del desplazamiento se expresa como una combinación lineal de ondas de corte ascendente y descendente. En la ecuación (iv.1.1.1) se presenta el campo de desplazamiento para el primer estrato de la figura anterior y en la ecuación (iv.1.1.2) para el estrato i -ésimo, la formulación explícita se presenta en el libro de Aki y Richards (1980).

$$v_1 = \left((A_1 \exp(i\eta_1(z - z_1)) + A_2 \exp(-i\eta_1(z - z_0))) \exp(-ikx) \right) \exp(i\omega t) \dots\dots(iv.1.1.1)$$

$$v_i = \left((A_i \exp(i\eta_i(z - z_i)) + A_{i+1} \exp(-i\eta_i(z - z_{i-1}))) \exp(-ikx) \right) \exp(i\omega t) \dots\dots(iv.1.1.2)$$

donde:

A_1 y A_2 son las amplitudes de las ondas ascendente y descendente respectivamente.

k es el número de onda horizontal.

η es el número de onda vertical.

y se relaciona con el número de onda horizontal de la siguiente forma:

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2 \right)} \dots\dots(iv.1.1.3)$$

y se tiene que cumplir que la parte imaginaria del número de onda vertical debe ser menor que cero ($\text{Im}(\eta) < 0$) es decir, la parte imaginaria de η contribuye a tener ondas

planas inhomogéneas con decaimiento exponencial a medida que z es mayor que cero ($z > 0$).

Los argumentos de las funciones exponenciales complejas mostrados en la ecuación iv.1.1.1 y iv.1.1.2 están referidas a la interfase de donde surgen esto es, $+i\eta_1(z-z_1)$ indica una onda ascendente en el sentido negativo del eje “ z ” desde la interfase z_1 después, $-i\eta_1(z-z_0)$ indica una onda descendente, en la dirección positiva del eje “ z ” desde la frontera z_0 . Las fronteras son utilizadas como referencia para la generación ondas en cada estrato, las propiedades mecánicas de cada estrato son definidas en la siguiente sección sin embargo, se hace énfasis que el número de onda vertical cambia en cada estrato y en lo sucesivo durante la formulación de la matriz global se omitirá el factor común $\exp(-ikx + i\omega t)$ a fin de agilizar los desarrollos.

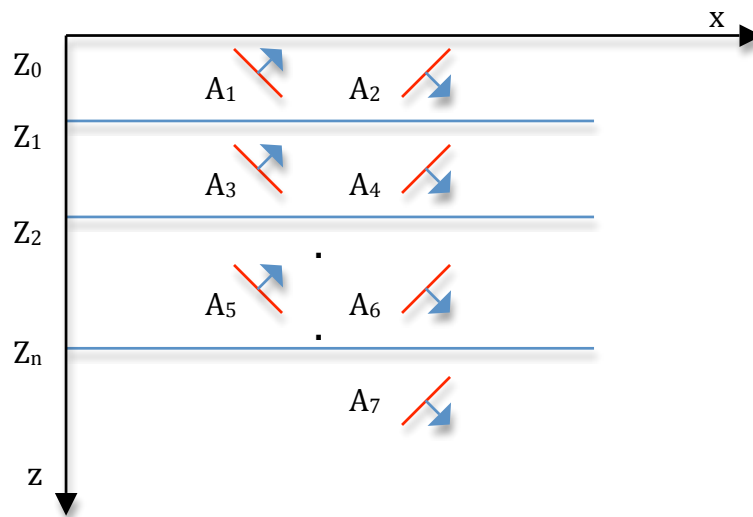


Figura IV.1.1.1 Medio estratificado en el cual se propagan ondas SH ascendentes y descendentes con amplitudes desconocidas (A_i). El esquema muestra un sistema de referencia del cuadrante positivo. Se toma la frontera Z_0 como superficie libre de esfuerzos y Z_1, Z_2, \dots, Z_n como fronteras elásticas.

IV.1.2 Cálculo de los Elementos de la Matriz Global Caso SH

Con el objeto de determinar el campo de desplazamiento en un medio estratificado se utilizó el método de la matriz global, el cual se fundamenta en la aplicación de condiciones de frontera, continuidad de desplazamientos y de tracciones, respectivamente. En el caso de que existan fuerzas de cuerpo en un estrato en particular, se tendrá que evaluar su contribución a las condiciones citadas. De lo anterior se formará un vector de términos independientes, con coeficientes de amplitudes conocidos. Concretamente nos referimos a la excitación del sistema. En la siguiente sección se analizará esto con más detalle.

Se asignan propiedades mecánicas a cada estrato tales como densidad, profundidad y velocidad de onda cortante. Así mismo, se utilizan las soluciones de la ecuación de onda en términos de ondas planas ascendentes y descendentes con amplitudes desconocidas (iv.1.1.2) y se aplican condiciones de borde para formar la matriz global, las incógnitas son las amplitudes de las ondas planas para cada número de onda en particular.

Las dimensiones de esta matriz quedan definidas por el número de ecuaciones obtenidas en las fronteras de interés. En este trabajo se consideran dos tipos: superficie libre de esfuerzos y frontera elástica. En la primera se considera que las tracciones son nulas en $z = 0$ lo que conduce, de acuerdo con el tensor de esfuerzos, a la ecuación iv.1.2.1. En el caso de la frontera elástica se tendrán dos condiciones: continuidad de esfuerzos y de desplazamientos que se pueden calcular con las ecuaciones iv.1.2.2 y iv.1.2.3, respectivamente.

$$\mu_i \left. \frac{\partial v_i}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \dots\dots\dots(iv.1.2.1)$$

$$\mu_i \left. \frac{\partial v_i}{\partial z} \right|_{z=z_i} = \mu_{i+1} \left. \frac{\partial v_{i+1}}{\partial z} \right|_{z=z_{i+1}} \dots\dots\dots(iv.1.2.2)$$

$$v_i \Big|_{z=z_i} = v_{i+1} \Big|_{z=z_{i+1}} \dots\dots\dots(iv.1.2.3)$$

Donde i representa la i -ésima capa o estrato.

Si consideramos un medio en particular, estratificado de dos capas y un semi-espacio con superficie libre de esfuerzos, tendremos una matriz de 5×5 .

Los elementos de esta matriz se consignan en el anexo 1. Sin embargo, en la figura IV.1.2.1 se muestra un esquema de cómo se puede entender la distribución de los elementos de esta matriz, en ella apreciamos una estructura bandeada con elementos que aparecen de manera sistemática y que únicamente los hace diferente el índice del estrato correspondiente. En color amarillo y azul se muestran los elementos de las tracciones evaluadas en las fronteras en cuestión. En verde y morado se presentan los elementos asociados a los desplazamientos evaluados en las fronteras de interés. Las barras en color negro hacen la función de una frontera virtual. Como control de calidad de la matriz se puede utilizar la distribución de los elementos, para verificar cada uno de ellos por comparación. Además, de que permite generar matrices más grandes que representen medios con más capas, sin tener que recurrir a las derivadas que implican algunas condiciones de frontera.

Regresemos al caso de un medio estratificado de dos capas con superficie libre de esfuerzos y un semi-espacio. Los elementos de la matriz conservan las siguientes relaciones, en el entendido que se deben ajustar los índices correspondientes de las propiedades mecánicas de cada estrato. En las ecuaciones iv.1.2.4, iv.1.2.5 y iv.1.2.6 se deben ajustar con un signo negativo para que se puedan reproducir de manera sistemática, la razón de este signo es la evaluación de las tracciones en una superficie libre de esfuerzo. En el anexo 1 se muestran los elementos de esta matriz.

De igual manera si nosotros quisiéramos construir una matriz para un medio estratificado de tres capas y un semi-espacio o más estaremos en posibilidades de hacerlo con lo antes apuntado. En la figura IV.1.2.2 se presenta un esquema de la distribución de los elementos para el medio de tres capas.

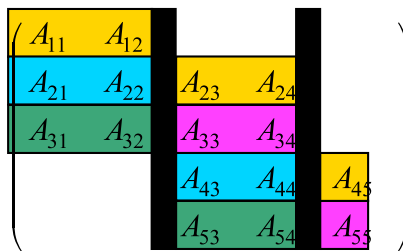


Figura IV.1.2.1 Distribución de los elementos de la matriz global para un medio estratificado de dos capas elásticas, homogéneas e isótropas.

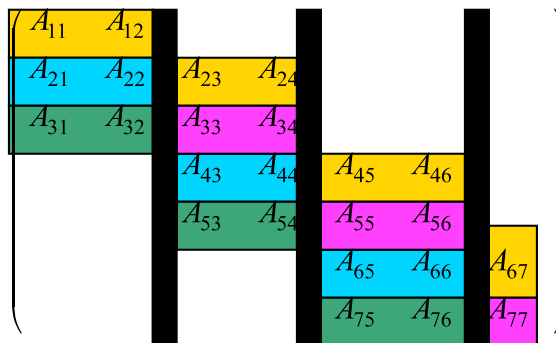


Figura IV.1.2.2 Distribución de los elementos de la matriz global para un medio estratificado de tres capas elástico, homogéneo e isótropo.

$$A_{11} \Leftrightarrow -A_{23} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.4})$$

$$A_{12} \Leftrightarrow -A_{24} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.5})$$

$$A_{24} \Leftrightarrow -A_{45} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.6})$$

$$A_{21} \Leftrightarrow A_{43} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.7})$$

$$A_{22} \Leftrightarrow A_{44} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.8})$$

$$A_{31} \Leftrightarrow A_{53} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.9})$$

$$A_{32} \Leftrightarrow A_{54} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.10})$$

$$A_{34} \Leftrightarrow A_{55} \dots\dots\dots(\text{iv.1.2.11})$$

Hasta ahora hemos construido la matriz global de la propagación de ondas SH en un medio estratificado sin considerar fuerzas de cuerpo, en la sección siguiente se construye la matriz global para el caso vectorial utilizando ondas planas de corte y longitudinales polarizadas verticalmente (SV) y ondas longitudinales (P), respectivamente.

IV.2 Ondas planas acopladas P-SV y la Matriz Global

IV.2.1 Ondas Planas P-SV

La solución de la ecuación de Navier sin fuerzas de cuerpo se puede expresar en términos de ondas planas a partir de una combinación lineal de los campos escalar (ϕ) y vectorial (ψ) respectivamente (iv.2.1.1).

$$u_i = \nabla\phi + \nabla \times \psi \dots\dots\dots(\text{iv.2.1.1})$$

El campo de desplazamiento en un espacio bidimensional estratificado (figura IV.2.1.1) están dados en las direcciones u y w de tal manera que, el desplazamiento se puede expresar en función de ondas planas acopladas (P-SV) ascendentes y descendentes (iv.2.1.2 y iv.2.1.3) con amplitudes (A_i) siendo “ i ” el i -ésimo estrato.

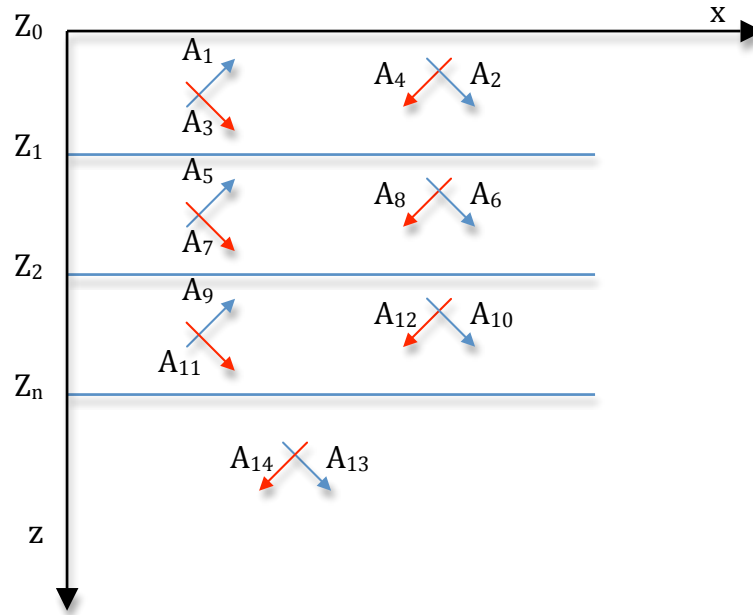


Figura IV.2.1.1 Medio estratificado con ondas planas SV (rojo) y P (azul) que ascienden y descienden con amplitudes desconocidas (A_i). El esquema muestra un sistema de referencia del cuadrante positivo. Se toma la frontera Z_0 como superficie libre de esfuerzos y Z_1, Z_2, \dots, Z_n como fronteras elásticas.

$$u = \left((-ik)A_1 \exp(i\gamma_1(z-z_1)) + (-ik)A_2 \exp(-i\gamma_1(z-z_0)) + (-iv_1)A_3 \exp(iv_1(z-z_1)) + \dots \right. \\ \left. \dots (iv)A_4 \exp(-iv_1(z-z_0)) \right) \exp(-ikx) \exp(i\omega t) \dots \dots \dots (\text{iv.2.1.2})$$

$$w = \left((i\gamma_1)A_1 \exp(i\gamma_1(z-z_1)) + (-i\gamma_1)A_2 \exp(-i\gamma_1(z-z_0)) + (-ik)A_3 \exp(iv_1(z-z_1)) + \dots \right. \\ \left. \dots (-ik)A_4 \exp(-iv_1(z-z_0)) \right) \exp(-ikx) \exp(i\omega t) \dots \dots \dots (\text{iv.2.1.3})$$

Donde:

$A_1, A_2, A_3 \dots A_i$ representan las amplitudes desconocidas de las ondas planas.

γ y ν son los números de ondas vertical de las ondas P y SV respectivamente.

k es el número de onda horizontal.

Estos números de onda están relacionados por las ecuaciones (iv.2.1.4) y (iv.2.1.5)

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2 \right)} \dots \dots \dots (\text{iv.2.1.4})$$

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2 \right)} \dots \dots \dots (\text{iv.2.1.5})$$

y se debe de cumplir que la parte imaginaria de los números de onda vertical deben ser menor que cero ($\text{Im}(\gamma) < 0$ y $\text{Im}(\nu) < 0$) es decir, la parte imaginaria de γ y ν contribuyen a tener ondas planas inhomogéneas con decaimiento exponencial a medida que se incrementa la profundidad.

Los argumentos de las funciones exponenciales complejas mostrados en la ecuación iv.2.1.2 y iv.2.1.3 están referidas a la interfase de donde surgen esto es, $+i\gamma_1(z-z_1)$ y $+iv_1(z-z_1)$ indican ondas ascendentes de longitudinales y de corte respectivamente en el sentido negativo del eje “z” desde la interfase z_1 después, $-i\gamma_1(z-z_0)$ y $-iv_1(z-z_0)$ indican ondas longitudinales y de cortes descendentes, en la dirección positiva del eje “z” desde la frontera z_0 . Las fronteras son utilizadas como referencia para la generación ondas en cada estrato, las propiedades mecánicas de cada estrato son definidas en la

siguiente sección. Los números de onda vertical cambian encada estrato y en lo sucesivo también se omitirá el factor común $\exp(-ikx + i\omega t)$ a fin de agilizar los desarrollos.

IV.2.2 Cálculo de los Elementos de la Matriz Global caso P-SV

Sean las tracciones para una superficie libre de esfuerzos nulas en las direcciones σ_{zz} y σ_{zx} respectivamente entonces, se deben satisfacer el tensor de esfuerzo para esfuerzos normales y cortantes en las direcciones $z-z$ y $z-x$ respectivamente, ecuaciones iv.2.3.1 y iv.2.3.2

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial w_i}{\partial z} + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(\text{iv.2.3.1})$$

$$\mu_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) = 0 \dots\dots\dots(\text{iv.2.3.2})$$

Y para el caso de una frontera elástica se debe cumplir la continuidad de esfuerzos y desplazamientos en las direcciones normal y cortante z-z y z-x respectivamente para lo cual se deben satisfacer las relaciones iv.2.3.3 y iv.2.3.4. además de la continuidad de desplazamientos verticales y horizontales en los estratos adyacentes ecuaciones iv.2.3.5 y iv.2.3.6.

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial w_i}{\partial z} + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1}) \frac{\partial w_{i+1}}{\partial z} + \lambda_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \dots\dots\dots(\text{iv.2.3.3})$$

$$\mu_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) = \mu_{i+1} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(\text{iv.2.3.4})$$

$$w_i = w_{i+1} \dots\dots\dots(\text{iv.2.3.5})$$

$$u_i = u_{i+1} \dots\dots\dots(\text{iv.2.3.6})$$

Donde i representa la i-ésima capa

Con base en estas ecuaciones podemos generar la matriz global para el caso de ondas acopladas para el mismo medio, de dos capas con superficie libre de esfuerzos y un semi-espacio.

Las dimensiones de esta matriz están dadas de la siguiente manera, cuatro por el número de estratos más dos ($4N_{\text{estratos}}+2$) es decir, para el caso que nos atañe se tendrá una matriz de 10×10 , En la figura IV.2.3.1 se presentan la distribución de los elementos de la misma. En ella se puede apreciar un comportamiento por bandas y bloques. En esta matriz en particular se marcaron con diferentes colores los elementos que tienen la misma estructura y que, lo único que los hace diferente son las propiedades elásticas y números de onda de cada estrato. Esta estructura nos permite construir matrices más complejas reduciendo errores en su construcción. Los detalles de estos elementos, se presentan en el anexo 2.

En este sentido en la figura IV.2.3.2 se presenta un esquema para una matriz que representa un medio estratificado de tres capas y un semi-espacio, en ella se resalta el comportamiento por bloques, sus elementos se pueden reproducir de acuerdo con lo mostrado en el anexo 2 considerando el ajuste de las propiedades elásticas de cada estrato en cuestión.

Hasta ahora hemos construido la matriz global para el caso de una propagación de ondas SH y ondas acopladas P-SV sin considerar la fuente de excitación. Esta matriz representa una manera de obtener las amplitudes de los campos de desplazamiento propuestos para cada estrato, esto implica resolver sistemas de ecuaciones que cumplan con las condiciones de frontera impuestas del medio de interés. Entonces, uno de los puntos importantes de este método es el resolver sistemas de ecuaciones, desafortunadamente la combinación de parámetros elásticos así como los espesores de los estratos pueden propiciar matrices singulares una de las formas de solucionar este problema es condicionar la matriz o normalizarla para que tenga solución.

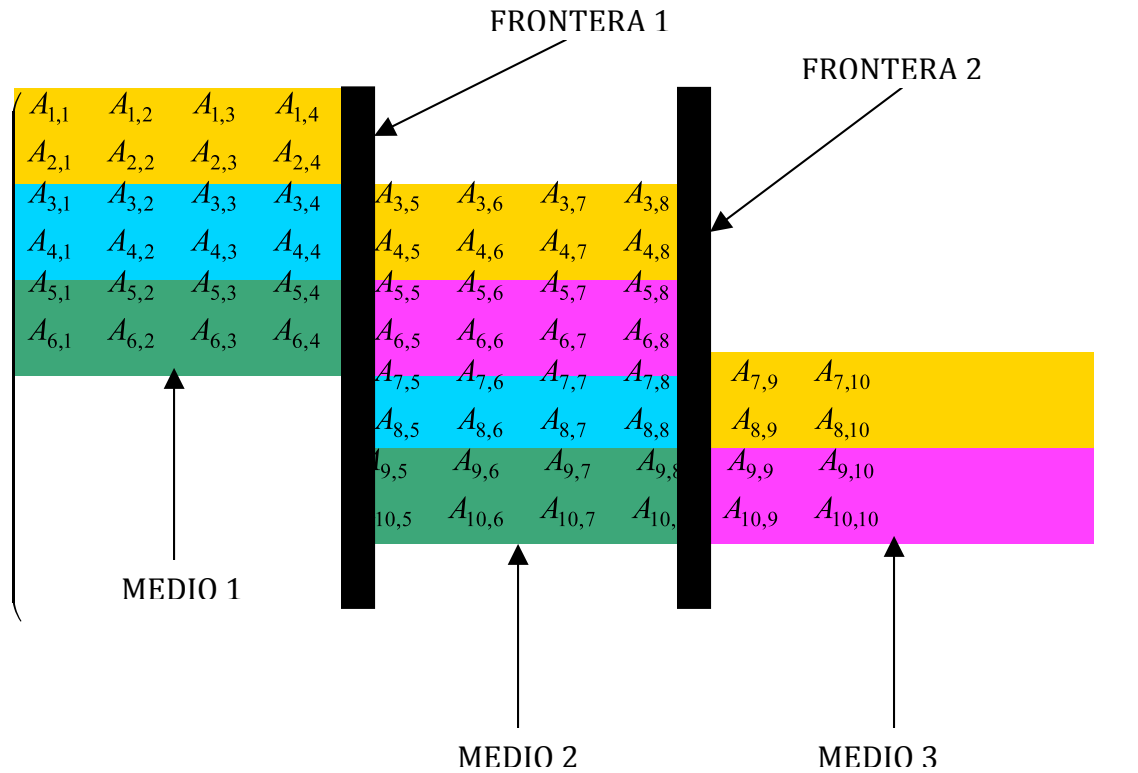


Figura IV.2.3.1 Se muestra la estructura de la matriz global para un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio., resaltando en colores los elementos de los esfuerzos y desplazamientos que tienen un mismo patrón.

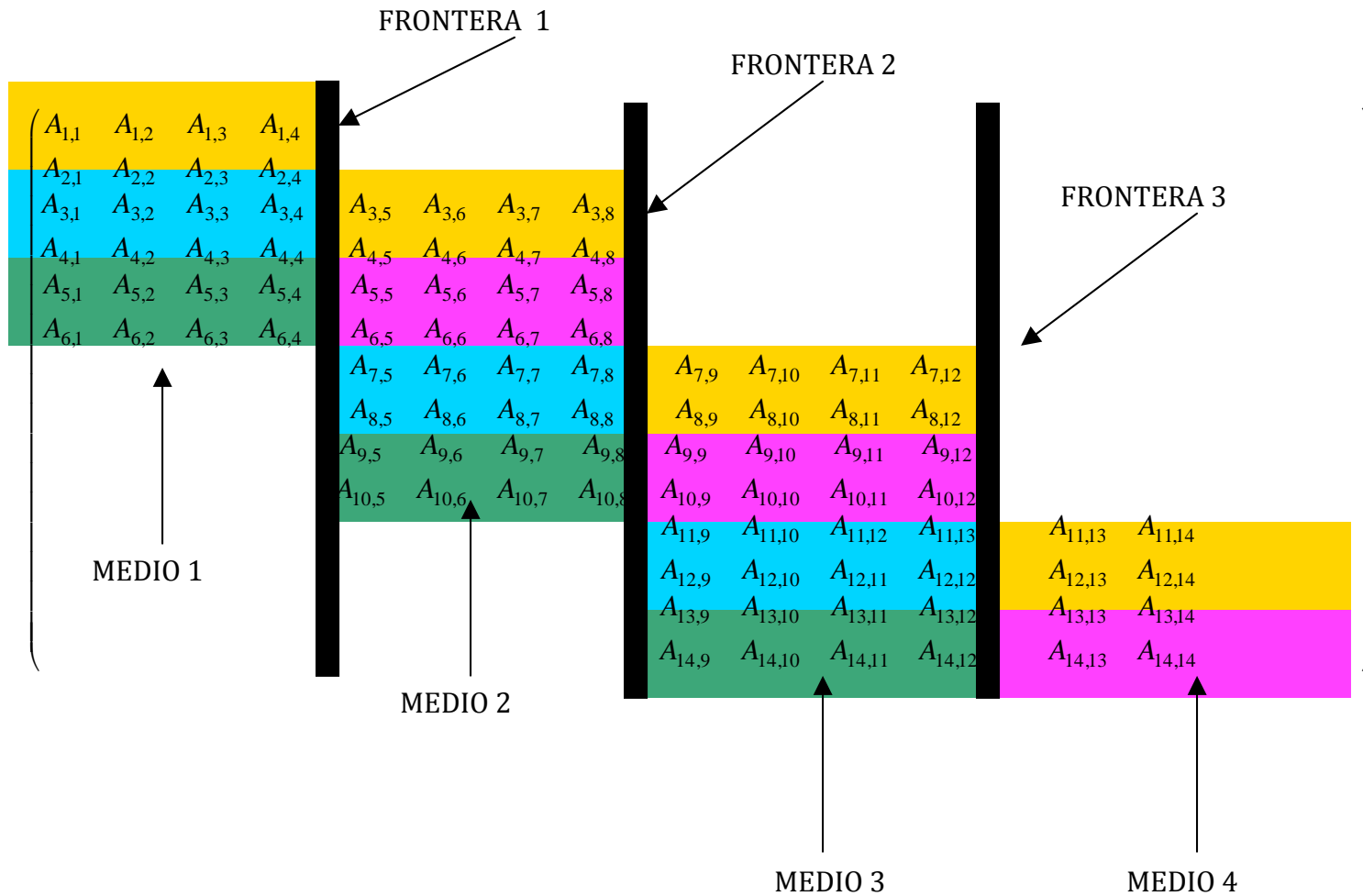


Figura IV.2.3.2 Se muestra la estructura de la matriz global para un medio estratificado de tres capas y un semi-espacio, resaltando en colores los elementos de esfuerzos y desplazamientos que permiten generalizar el método.

IV.3 Vector de términos de fuente

El vector de términos independientes contiene los términos de fuente que se utilizaron para excitar el medio estratificado, en este trabajo se aplicaron las funciones Green para el caso bidimensional, representan una solución a la ecuación de onda, en un espacio infinito por lo que, en nuestro caso se introdujeron en el medio estratificado mediante la aplicación de condiciones de frontera utilizando las ecuaciones iv.1.2 y iv.1.3 para ondas SH y iv.2.3, iv.2.4, iv.2.5 y iv.2.6 para ondas P-SV. Con ellas se determinaron los elementos de la matriz global para los dos casos de propagación escalar y vectorial respectivamente omitiendo los términos de fuente aun sabiendo que estaban presentes en los campos de desplazamiento propuestos. Esto se hizo con el objeto de separar la matriz con amplitudes desconocidas de los campos de desplazamiento, del vector de elementos conocidos. Esto se puede ver fácilmente con las siguientes ecuaciones de frontera, esfuerzos nulos, en la superficie libre (iv.3.1), continuidad de esfuerzos y desplazamientos en las fronteras entre el estrato uno y dos y dos y tres respectivamente (iv.3.2, iv.3.3, iv.3.4 y iv.3.5).

$$\sigma_{zy1} = 0 \dots\dots\dots(iv.3.1)$$

$$\sigma_{zy1} - \sigma_{zy2} = \mu_2 \frac{\partial G_{22}}{\partial z} \dots\dots\dots(iv.3.2)$$

$$v_1 - v_2 = G_{22} \dots\dots\dots(iv.3.3)$$

$$\sigma_{zy2} - \sigma_{zy3} = -\mu_2 \frac{\partial G_{22}}{\partial z} \dots\dots\dots(iv.3.4)$$

$$v_2 - v_3 = -G_{22} \dots\dots\dots(iv.3.5)$$

En el caso de la propagación de ondas SH se utilizó la función de Green G_{22} (iv.3.6)

$$G_{22} = \frac{1}{4\pi\mu i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\eta|z - z_F|)}{\eta} \exp(-ik(x - x_F)) dk \dots\dots\dots(iv.3.6)$$

Donde:

μ = módulo de rigidez al cortante

η = número de onda vertical

k = número de onda horizontal

De esta manera, se obtuvieron los elementos del vector de términos independientes que contiene información sobre la fuente y que únicamente estará presente en las ecuaciones de frontera superior e inferior al estrato donde está contenida.

Las dimensiones de este vector deben ser consistentes con los de la matriz global por lo que sus dimensiones son de 5×1 y los elementos se muestran en las ecuaciones iv.3.7, iv.3.8, iv.3.9, iv.3.10 y iv.3.11

$$B_{11} = 0.0 \dots\dots\dots(iv.3.7)$$

$$B_{21} = \exp(-i\eta_2|z_1 - z_F|)\exp(-ik(x - x_F))\dots\dots(iv.3.8)$$

$$B_{31} = \frac{\exp(-i\eta_2|z_1 - z_F|)}{\eta_2\mu_2}\exp(-ik(x - x_F))\dots\dots(iv.3.9)$$

$$B_{41} = \exp(-i\eta_2|z_2 - z_F|)\exp(-ik(x - x_F))\dots\dots(iv.3.10)$$

$$B_{41} = -\frac{\exp(-i\eta_2|z_2 - z_F|)}{\eta_2\mu_2}\exp(-ik(x - x_F))\dots\dots(iv.3.11)$$

De esta manera, también, se determinaron los vectores de fuente para el caso de las ondas acopladas P-SV también para el caso de un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio utilizando directamente las funciones de Green para fuerzas horizontal y vertical respectivamente y fuerzas compuestas por derivadas como las que se obtienen a partir de funciones elementales de Green como las fuerzas dipolares (explosión) y doble par de fuerzas sin momento resultante (dislocación), estas dos últimas quedan definidas con las siguientes relaciones iv.3.12 y iv.3.13

$$u_j = M_0 \frac{\partial G_{jk}}{\partial \xi_k} \dots\dots\dots(\text{iv.3.12})$$

$$u_n = M_{pq} \frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q} \dots\dots\dots(\text{iv.3.13})$$

Donde:

M_0 momento sísmico escalar

M_{pq} tensor de momento sísmico

Se resalta que estas derivadas son respecto a las coordenadas de fuente x_F y z_F y pueden entrar bajo el signo sobre la integral de las funciones de Green por no depender de la variable de integración y únicamente se escalan por los factores del tensor de momento sísmico.

Ahora bien , el vector de términos independientes para el caso de una fuerza horizontal se determinó utilizando los elementos del tensor de Green G_{11} y G_{31} representación en el dominio de la frecuencia el cual esta dado por las ecuaciones iv.3.14 y iv.3.15 se asocian al campo de desplazamiento horizontal y vertical respectivamente.

$$G_{11} = \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{+\infty}^{-\infty} \left(\frac{k^2}{\gamma} \exp(-i\gamma|z - z_F|) + v \exp(-iv|z - z_F|) \right) \exp(-ik(x - x_F)) dk \dots\dots\dots(\text{iv.3.14})$$

$$G_{31} = \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{+\infty}^{-\infty} k \operatorname{sgn}(z - z_F) \left(\exp(-i\gamma|z - z_F|) - \exp(-iv|z - z_F|) \right) \exp(-ik(x - x_F)) dk$$

.....(iv.3.15)

Donde:

γ = número de onda vertical para las ondas P

v = número de onda vertical para las ondas S

$$\text{sgn}(z - z_F) = \begin{cases} z > z_F = 1 \\ z < z_F = -1 \end{cases} \text{ función signum}$$

Recordemos que tenemos un medio estratificado con dos capas y un semi-espacio y que necesitamos determinar este vector por lo que se aplicaron las condiciones de frontera continuidad de esfuerzos y desplazamientos en las fronteras entre el estrato uno y dos y dos y tres respectivamente. En la figura IV.3.1 se muestra un esquema del medio en cuestión así como, la posición de la fuerza en el estrato dos. También se muestra los elementos del vector determinado y con dimensiones de 10×1 . En esta misma figura se aprecian los parámetros elásticos de cada estrato $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ y λ_3, μ_3 así como, las profundidades de los estratos uno (z_1) y dos (z_2) respectivamente.

Para las de más fuentes, fuerza(s) vertical, dipolares y un doble par se consignan en el anexo 3

$$B_{1,1} = 0.0$$

$$B_{2,1} = 0.0$$

$$B_{3,1} = \left(-(\lambda_2 + 2\mu_2)ik\gamma_2 - \frac{i\lambda_2 k^3}{\gamma_2}\right) \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + \left((\lambda_2 + 2\mu_2)ikv_2 - i\lambda_2 kv_2\right) \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{4,1} = 2\mu_2 ik^2 \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + i\mu_2 (v_2^2 - k^2) \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{5,1} = \frac{k^2}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + v_2 \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{6,1} = -k \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + k \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{7,1} = \left((\lambda_2 + 2\mu_2)ik\gamma_2 + \frac{i\lambda_2 k^3}{\gamma_2}\right) \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + \left(-(\lambda_2 + 2\mu_2)ikv_2 + i\lambda_2 kv_2\right) \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

$$B_{8,1} = 2\mu_2 ik^2 \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + i\mu_2 (v_2^2 - k^2) \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

$$B_{9,1} = -\frac{k^2}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) - v_2 \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

$$B_{10,1} = -k \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + k \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

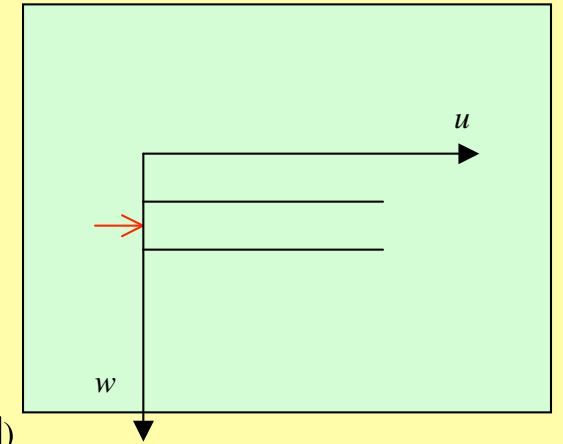


Figura IV.3.1 Vector términos independientes relacionado con las condiciones de frontera para una **fuerza horizontal** en un medio de dos capas y un semi-espacio.

IV.4 Número de Onda discretizado

La respuesta de un medio elástico, homogéneo e isótropo ante una fuente excitadora puntual y transitoria fue estudiada en 1849 por Stokes, siendo Lamb (1904) el primero en realizar dichos estudios para el semi-espacio con superficie libre. El método es formulado en términos de las funciones de Green, las cuales representan la respuesta del medio ante una excitación impulsiva. El método del número de onda discretizado permite el cálculo, del campo de desplazamiento utilizando las funciones de Green completas con buena precisión para distintas fuentes. El método está fundamentado en la representación del campo de ondas sísmicas mediante la discretización del número de onda horizontal. Esta discretización es exacta e implica la inclusión de fuentes periódicas es decir, la repetición de fuentes con las mismas características a una distancia horizontal (L). No obstante, aun con estas aproximaciones es posible obtener soluciones adecuadas si aquellas son comprendidas.

La fuente es representada por fuerzas de cuerpo equivalentes. La representación hace uso de la superposición de ondas planas en un medio homogéneo e infinito y supone la radiación constante de ondas armónicas. El campo de ondas se expresa mediante la combinación lineal de ondas planas, cuyos números de onda horizontal son un conjunto discreto (Bouchon y Aki 1977), y cubren todas las direcciones del espacio. Estas fuentes tienen una representación más natural en el sistema de coordenadas cilíndrico pero, debido al problema que se está abordando en esta tesis las coordenadas adecuadas son las cartesianas para poder representar un adecuadamente el medio estratificado

Regresemos al campo de desplazamiento del medio estratificado; las incógnitas son las amplitudes en cada estrato entonces, nos referimos a las incógnitas asociadas a la representación de ondas planas que da lugar a la matriz global. Estos campos son función de la frecuencia y de las propiedades de los estratos como espesor, velocidad, densidad y son propuestos a priori. Al aplicar las condiciones de frontera se crea un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución permite obtener las amplitudes desconocidas y obtener el desplazamiento total por una suma numérica como la de la ecuación (iv.4.1).

La precisión del resultado dependerá directamente del número de términos considerado en la suma, de aquí que a mayor número de términos considerados, la convergencia será mejor sin embargo, cerca o a la profundidad de la fuente se utilizaran más términos en la suma para que converja y muy lentamente esto es debido a que las exponenciales en función de z son divergentes y no contribuyen a la convergencia.

$$G(x, z; \omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-N}^N f(k_n, z) \exp[-ik_n x] \dots\dots\dots(\text{iv.4.1})$$

Donde:

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

L es la separación entre fuentes.

La respuesta final es el cálculo de los sismogramas sintéticos en el dominio del tiempo mediante la transformada de Fourier la cual se puede expresar con la siguiente ecuación (iv.4.2)

$$f(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, z, \omega) \exp[i\omega t] d\omega \dots\dots\dots(\text{iv.4.2})$$

IV.4.1 Obtención de sismogramas sintéticos para un espacio infinito

Realicé un programa en lenguaje Fortran para calcular sismogramas sintéticos debidos a la propagación de ondas SH y P-SV en un medio elástico, semi-infinito, bidimensional y sin fronteras. Este ejercicio consistió en calcular la solución exacta para el caso escalar y vectorial respectivamente. En el caso escalar se calculó el componente del tensor de Green, G_{22} con funciones de Hankel y en el caso vectorial se obtuvo el resto del tensor de Green G_{ij} , también en términos de funciones de Hankel estas soluciones son las exactas y únicamente son válidas para un espacio infinito.

Por otro lado, la solución numérica se hizo implementando el método del número de onda discretizado en un programa para PC, a continuación se describen los pasos realizados para calcular los sismogramas sintéticos.

- Se definieron los parámetros mecánicos del medio como velocidad de onda P, S y densidad.
- Se propusieron parámetros del pulso de Ricker (t_p y t_s).
- Se definió la posición de los receptores en el cálculo de los sismogramas.
- Se definió las coordenadas de la fuente (x_F y z_F).
- Se definieron las características de las series de tiempo; tasa de muestreo y número de puntos.
- Separación entre la fuente real y virtuales (L) y número de términos usados en la suma (N_{max}).

Después, se propuso una frecuencia inicial y un número de onda horizontal, se estimaron los números de onda vertical para ondas SH (η) y para ondas P-SV (γ y ν respectivamente), se calcularon los campos de desplazamiento, se incrementó el número de onda horizontal en una fracción Δk , se volvieron a estimar los números de onda vertical para calcular los nuevos desplazamiento y sumarlos con los anteriores, este proceso se repitió hasta el número de términos preestablecido (N_{max}). Al terminar la suma, se incrementó el valor de la frecuencia en un Δf y se volvió a calcular el desplazamiento para todas las k . Estos valores de desplazamiento, para todas las frecuencias en el rango de interés, se guardaron en una matriz para ser procesadas con un sintetizador como se describe a continuación.

Los desplazamientos obtenidos fueron convolucionados con un pulso de Ricker, es decir, fueron multiplicados en el dominio de la frecuencia y después, fueron invertidos al dominio del tiempo mediante el algoritmo de transformada rápida de Fourier. Estos cálculos, se realizaron para un número de receptores propuesto.

A continuación se presentan los sismogramas sintéticos calculados para la propagación de ondas SH en un espacio infinito. Los receptores fueron puestos en las posiciones $x = -6000.0$ y cada 1200.0 hasta $x = 6000.0$ metros a una profundidad de $z = 0.0$. Estas mismas posiciones en x fueron repetidas pero a una profundidad de $z = 5900$ m, muy cerca de la fuente (figura IV.4.1).

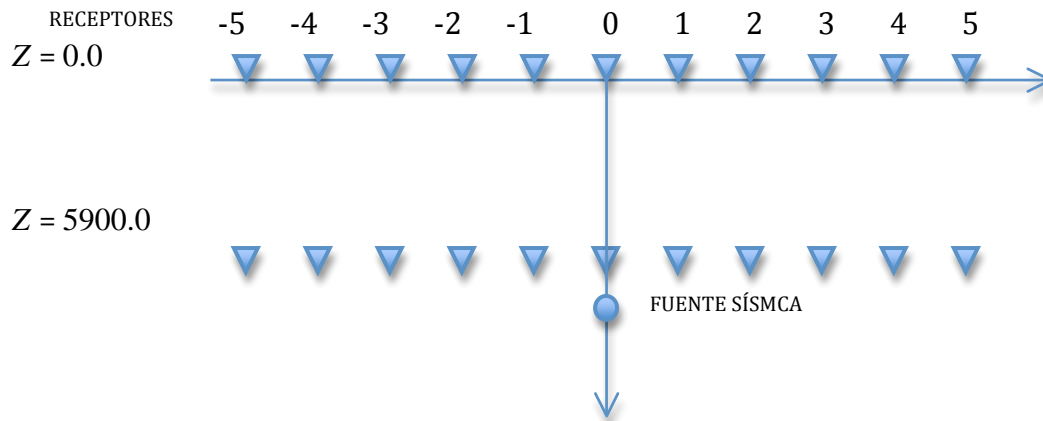


Figura IV.4.1.1 Distribución de receptores en un espacio infinito de

Las dos líneas de receptores fueron puestas con el objeto de poder discutir la convergencia de los sismogramas en diferentes posiciones respecto a la fuente. En las figuras IV.4.1.2 y IV.4.1.3 se presentan los sismogramas obtenidos para los receptores de la figura anterior. En ellas se muestran los sismogramas para 200 y 500 términos en la suma a las profundidades de dadas. En color rojo se muestra las soluciones exactas y en azul las discretas. Los resultados exhiben una convergencia rápida cerca de la cota $z = 0.0$ usando 200 términos en la suma sin embargo, cuando los receptores están en la vecindad o a la misma profundidad de la fuente, la solución converge más lentamente como se muestra en la misma figura. Esto se puede explicar con la ecuación iv.3.6 cuando $z = z_F$ la exponencial que incluye el número de onda vertical vale uno, y que da la expresión iv.4.1.1.

$$\frac{\exp(-ik(x-x_F))}{\eta} \dots\dots\dots(iv.4.1.1)$$

Que si bien decae en función del número de onda vertical $\frac{1}{\eta}$ también, tiene una parte que oscila, en términos de senos y cosenos ($\exp(-ik(x-x_F))$) de esta manera, la solución se aproxima lentamente a la exacta como se verifica en los sismogramas que se calcularon a la profundidad de $z=5900$ metros (figura IV.4.1.2). No obstante, es notorio observar que si se incrementa el número de términos (500 o mas) a esta profundidad la convergencia mejora notablemente (figura IV.4.1.3). Estas particularidades de la solución numérica tienen que ver con la naturaleza del problema debido a que la fuente es de tipo cilíndrico y la propuesta es en coordenadas rectangulares sin embargo, la aproximación en general es buena como se describe en las siguientes líneas.

El cálculo del desajuste entre la solución exacta y la obtenida utilizando el número de onda discretizado fue a través del error relativo expresado con la ecuación iv.4.1.2, la cual se obtuvo punto a punto para las 11 series de tiempo grabadas en cada receptor. En las figuras IV.4.1.4 y IV.4.1.5 se muestran los errores estimados. En ellas observamos, para el caso de la cota $z = 0.0$ con 200 términos en la suma (figuras IV.4.1.4), errores menores al 8% y para la cota $z = 5900.0$ apreciamos errores entre 5 y 20%. Si incrementamos el número de términos a 500 la convergencia mejora sustancialmente como se aprecia en la figura IV.4.1.5. Los errores más grandes en estas figuras se aprecian como núcleos del algún color que corresponden con las ondas que arriban desde la fuente, fuera de estas zonas el error tiende a disminuir drásticamente a casi cero y se aprecian estos errores como simples curvas que corresponden al valor más bajo de la escala de la barra de colores adjunta a las figuras. Las diferencias en los arribos entre cada receptor se deben a los retrasos de las ondas por la separación entre ellos. Estos retrasos forman un hipérbola.

$$er = \frac{|solexacta - soldwn|}{solexacta} \dots\dots\dots(iv.4.1.2)$$

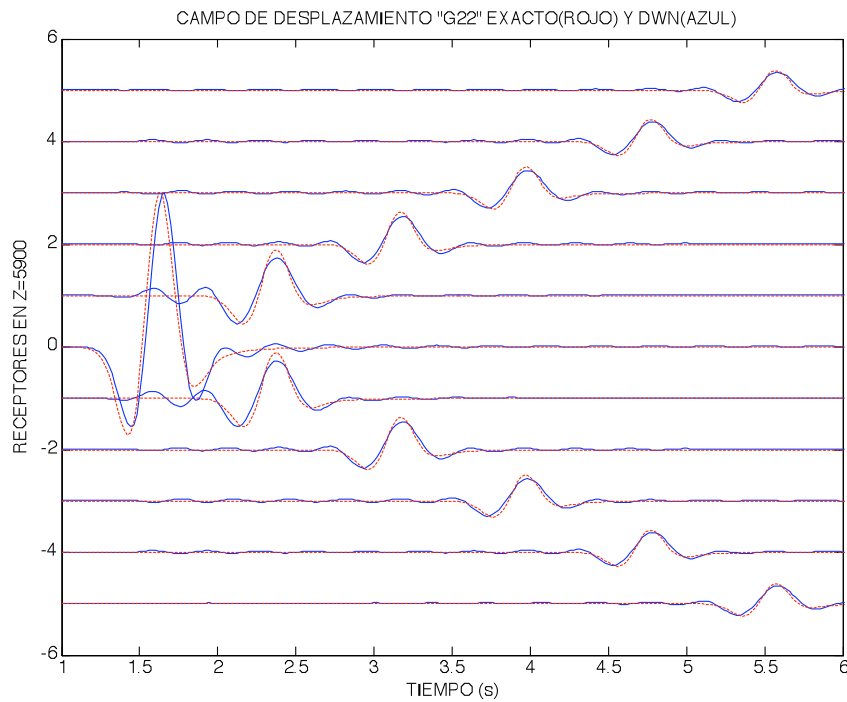
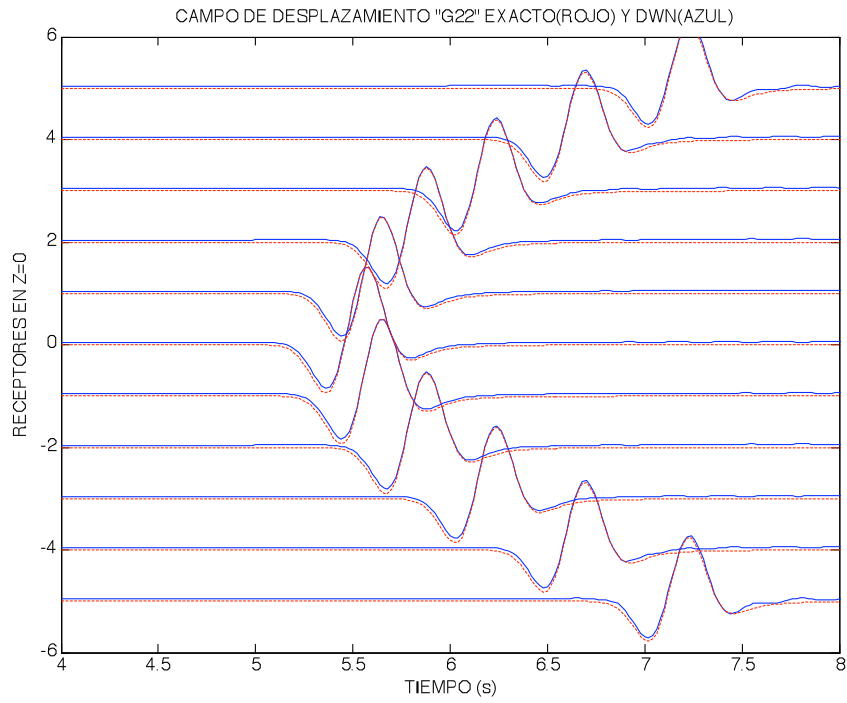


Figura IV.4.1.2 Sismogramas sintéticos para un espacio infinito para 11 receptores ubicados en $z = 0.0$ (arriba) y $z = 5900.0$ (abajo). En color rojo esta la solución exacta y en azul la discreta. En esta última se utilizaron 200 términos en la suma.

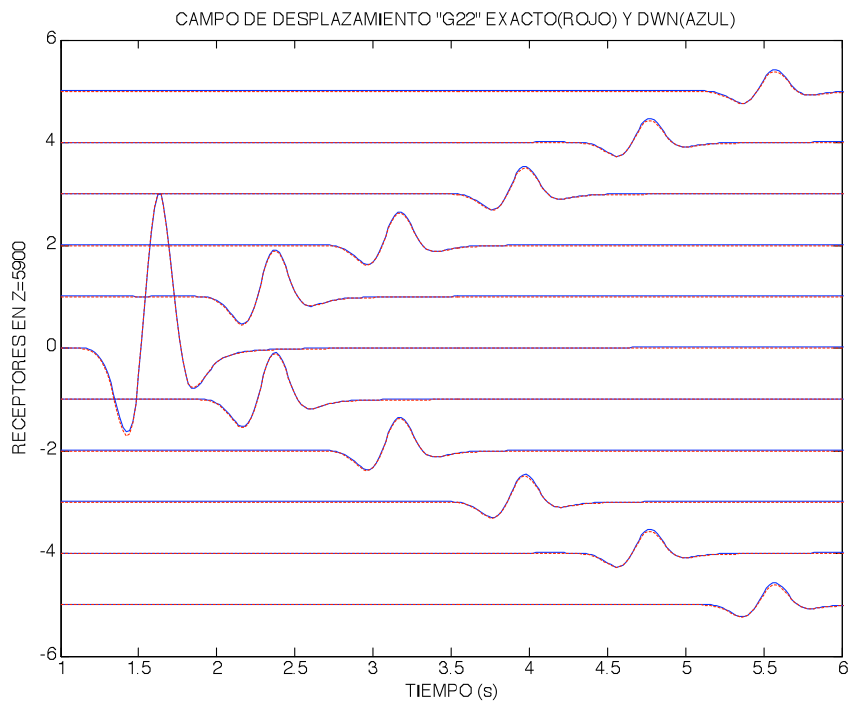
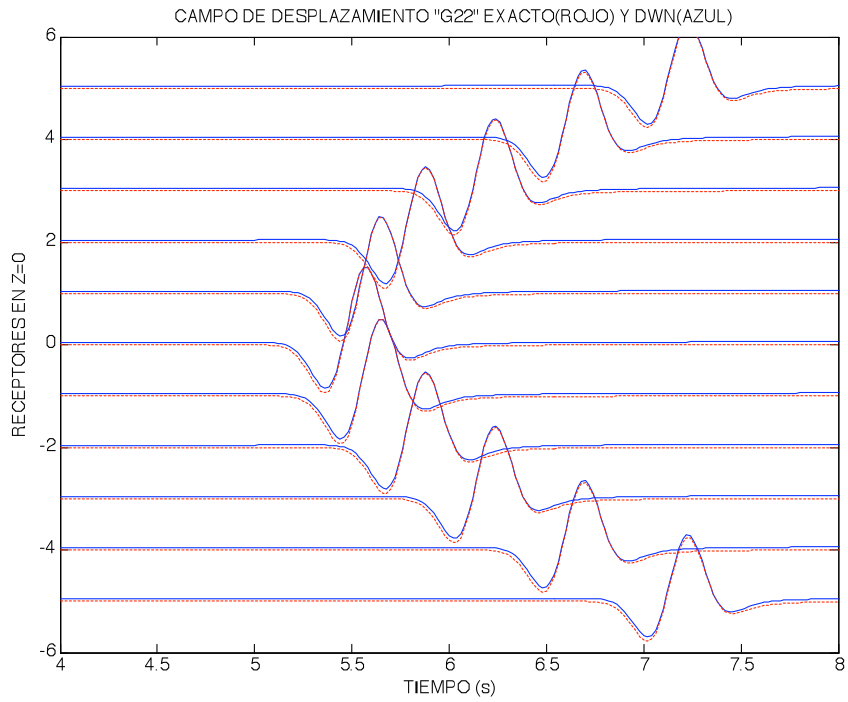


Figura IV.4.1.3 Sismogramas sintéticos para un espacio infinito de 11 receptores ubicados en $z = 0.0$ (arriba) y $z = 5900.0$ (abajo). En color rojo esta la solución exacta y en azul la discreta. En esta última se utilizaron 500 términos en la suma.

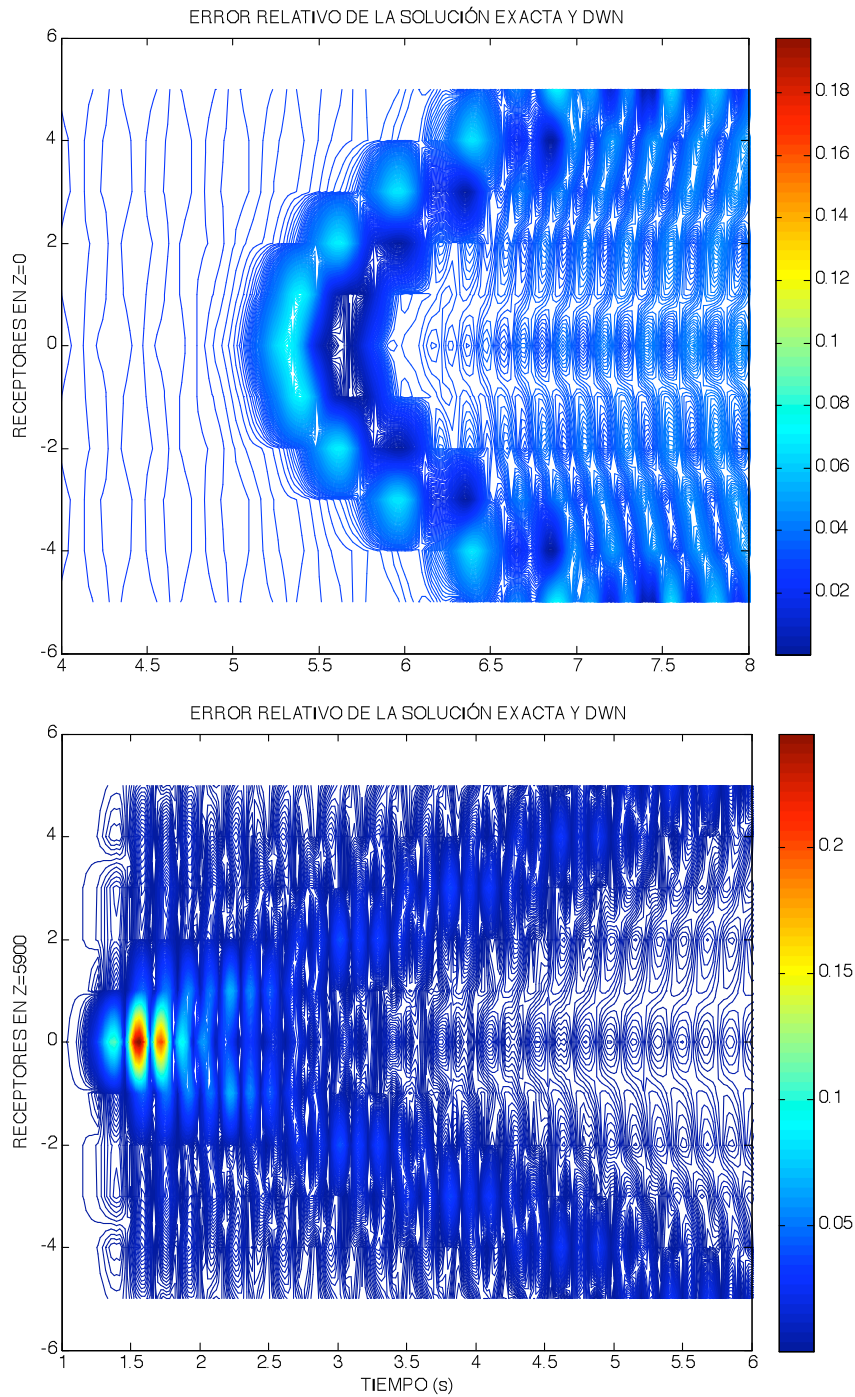


Figura IV.4.1.4 Mapa de contornos que representan la distribución del error o desajuste entre las dos soluciones exacta y numérica en las cotas $z = 0.0$ y $z = 5900.0$. Para la solución numérica se utilizaron 200 términos es notorio observar que, para los sismogramas que se estiman un menor error cuando se aleja uno de la fuente.

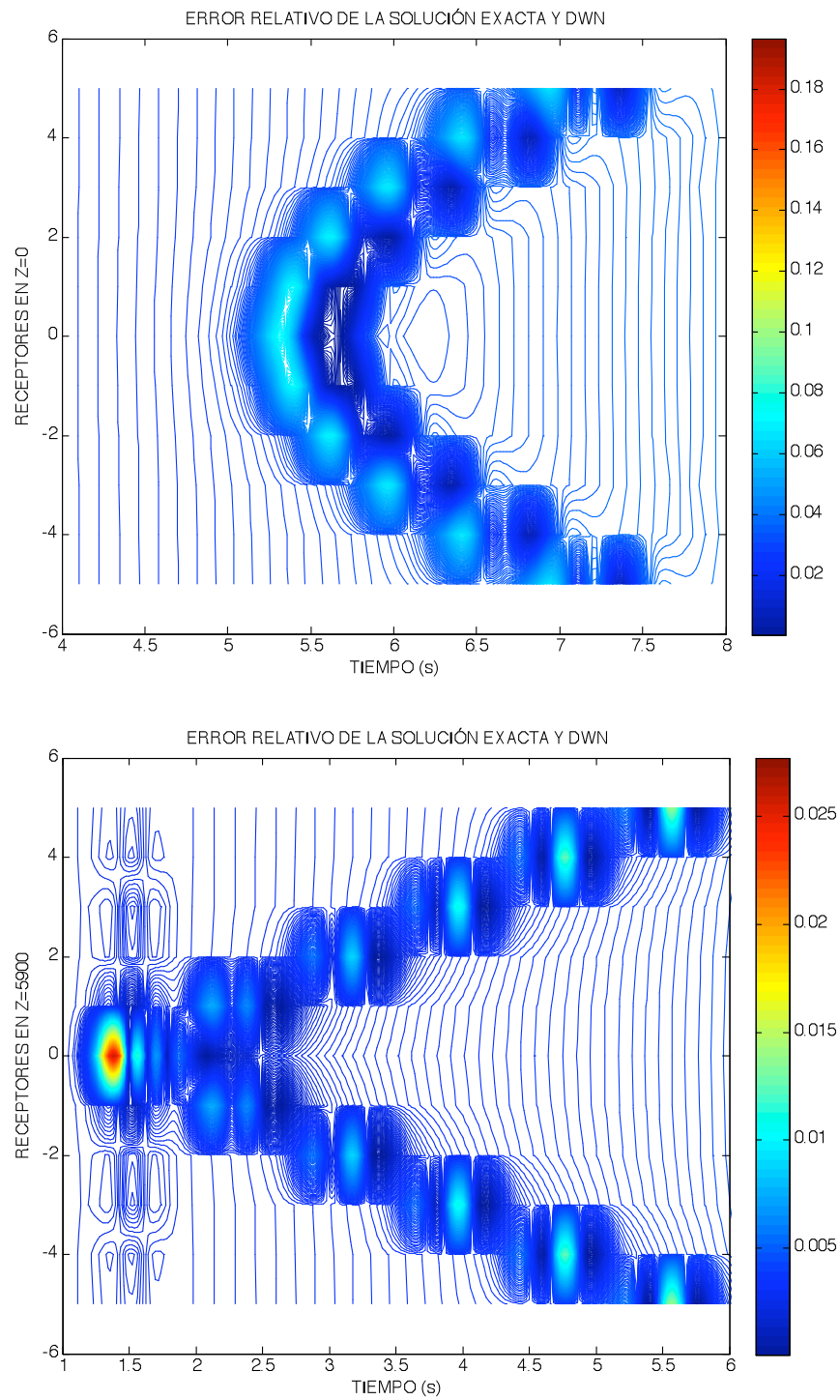


Figura IV.4.1.5 Mapa de contornos que representan la distribución del error o desajuste entre las dos soluciones exacta y numérica en las cotas $z = 0.0$ y $z = 5900.0$. Para la solución numérica se utilizaron 500 términos es notorio observar que, para los sismogramas que se estiman un menor error cuando se aleja uno de la fuente

Se calcularon también sismogramas para la propagación de ondas P-SV en un espacio infinito, se ilustra la componente del tensor Green G_{11} . El tensor representa la solución al campo de desplazamiento en la dirección u cuando se aplica una fuerza horizontal. Esta fuente se generan ondas de cuerpo como se pueden apreciar en los simogramas de la figura IV.4.1.6. Estos sismogramas consignados en esta figura fueron obtenidos para las mismas posiciones de los receptores del caso SH, las primeras ondas en arribar son las ondas P seguidas de las ondas S teniendo estas últimas mayor amplitud sobre la línea de estudio en $z = 0.0$. Es notorio observar que en la coordenada $x = 0.0$ y $z = 5900.0$ la fase P tienen mayor amplitud y más débil en los otros receptores a esta misma cota. También se observa que las ondas que presentan mejor ajuste sobre la solución exacta son las ondas P sin embargo, cuando se incrementa el número de términos en la suma (500) este desajuste se hace mínimo para ambas fases.

Lo anterior se puede reconocer en las ecuaciones con las que se estima el campo de desplazamiento es decir, habrá una mejor convergencia cuando estemos en la dirección de la fuente en $x = x_F$ pues la ecuación del campo se reduce a la ecuación iv.4.1.3. Ésta no tiene el término de la exponencial compleja ($\exp(-ik(x - x_F))$) que es la que introduce oscilaciones en la solución.

$$\frac{k^2}{\gamma} \exp(-i\gamma|z - z_F|) + \nu \exp(-i\nu|z - z_F|) \dots\dots\dots(iv.4.1.3)$$

Para el caso de los sismogramas estimados cerca de la fuente concretamente en la cota $z = 5900.0$ la convergencia de la solución se basará en la ecuación iv.4.1.4. En ella observamos que el campo de desplazamiento tiende a decrecer con el número de onda vertical de las ondas P y oscila de acuerdo con la exponencial compleja ($\exp(-ik(x - x_F))$) para tener una convergencia más lenta.

$$\left[\frac{k^2}{\gamma} + \nu \right] \exp(-ik(x - x_F)) \dots\dots\dots iv.4.1.4$$

De acuerdo con los dos casos anteriores podemos decir que cuando necesitamos determinar sismogramas sobre algunas de estas dos direcciones, debemos

considerar el uso de más términos en la suma (>500) con el de asegurarse de que el cálculo de los sismograma realizados tengan un error pequeño o adecuado, esta consideración es debido a que cuando se realicen el cálculo de simogramas en un medio multi-estrato no hay manera de comparar con alguna solución analítica además que el costo computacional es mínimo en una PC.

Por otro parte, los errores determinados para las series de tiempo generadas en los 11 receptores se realizó con base la ecuación iv.1.2. En la figura IV.4.1.7 se presentan cuatro mapas de contornos para las cotas $z = 0.0$ y $z = 5900.0$ para 200 y 500 términos de la suma respectivamente. La distribución de los errores para los sismogramas en la cota $z = 0.0$ se observan como núcleos formando dos hiperbolas relacionadas con los retrasos en las formas de onda P y S, cuando se utilizaron 200 términos se pudo verificar que los errores oscilan entre 2 y 14%. Este último valor se observó para las posiciones de los receptores 2 al 6 y cuando se incrementó el número de términos a 500 el error observado fue menor 2%.

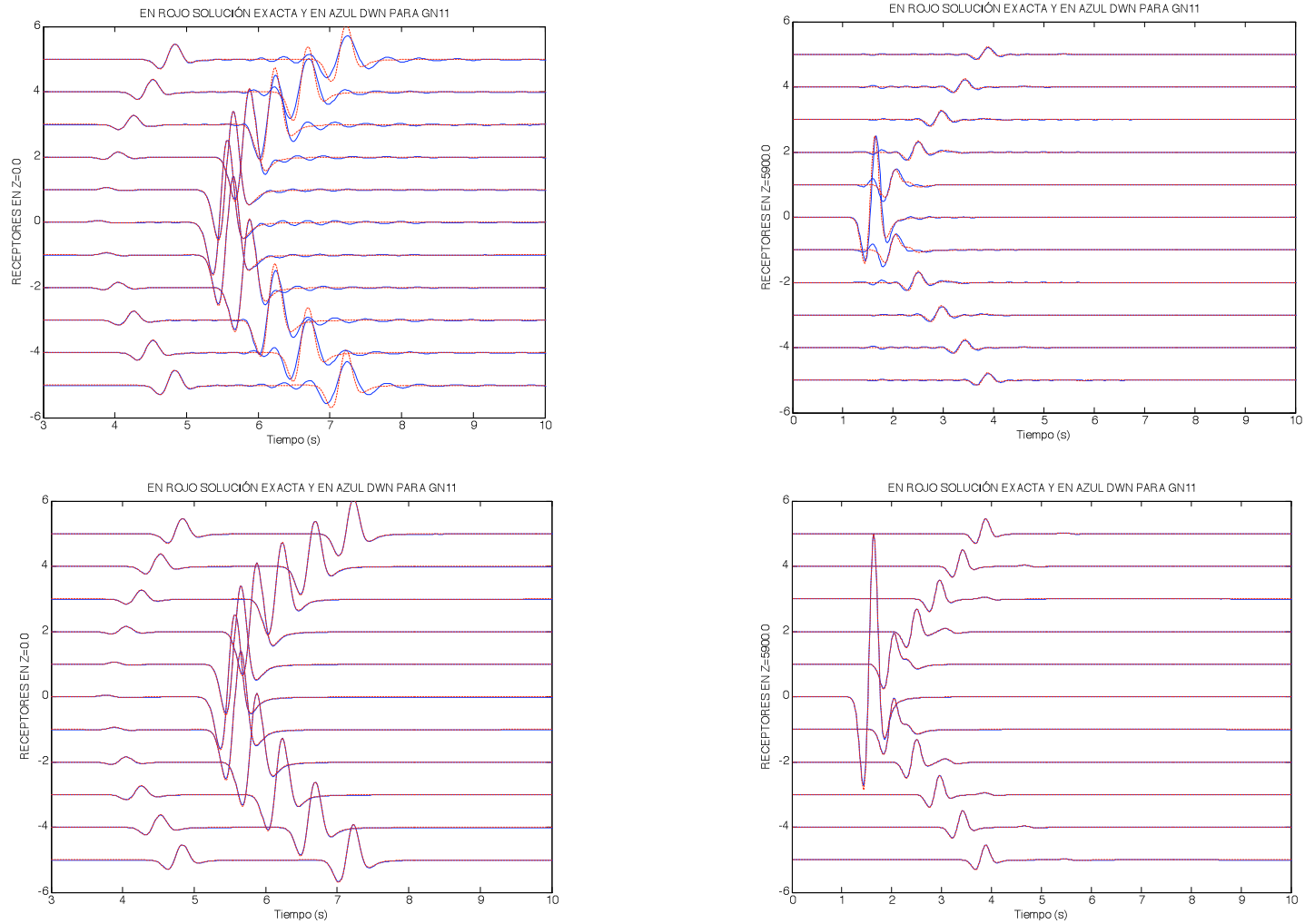


Figura IV.4.1.6 Sismogramas sintéticos obtenidos para 11 receptores a la cota $z = 0.0$ y $z = 5900.0$ metros, corresponden al campo de desplazamiento en la dirección u y a la función de Green (G_{11}). En la parte superior sismogramas con 200 términos. Parte inferior sismogramas con 500 términos.

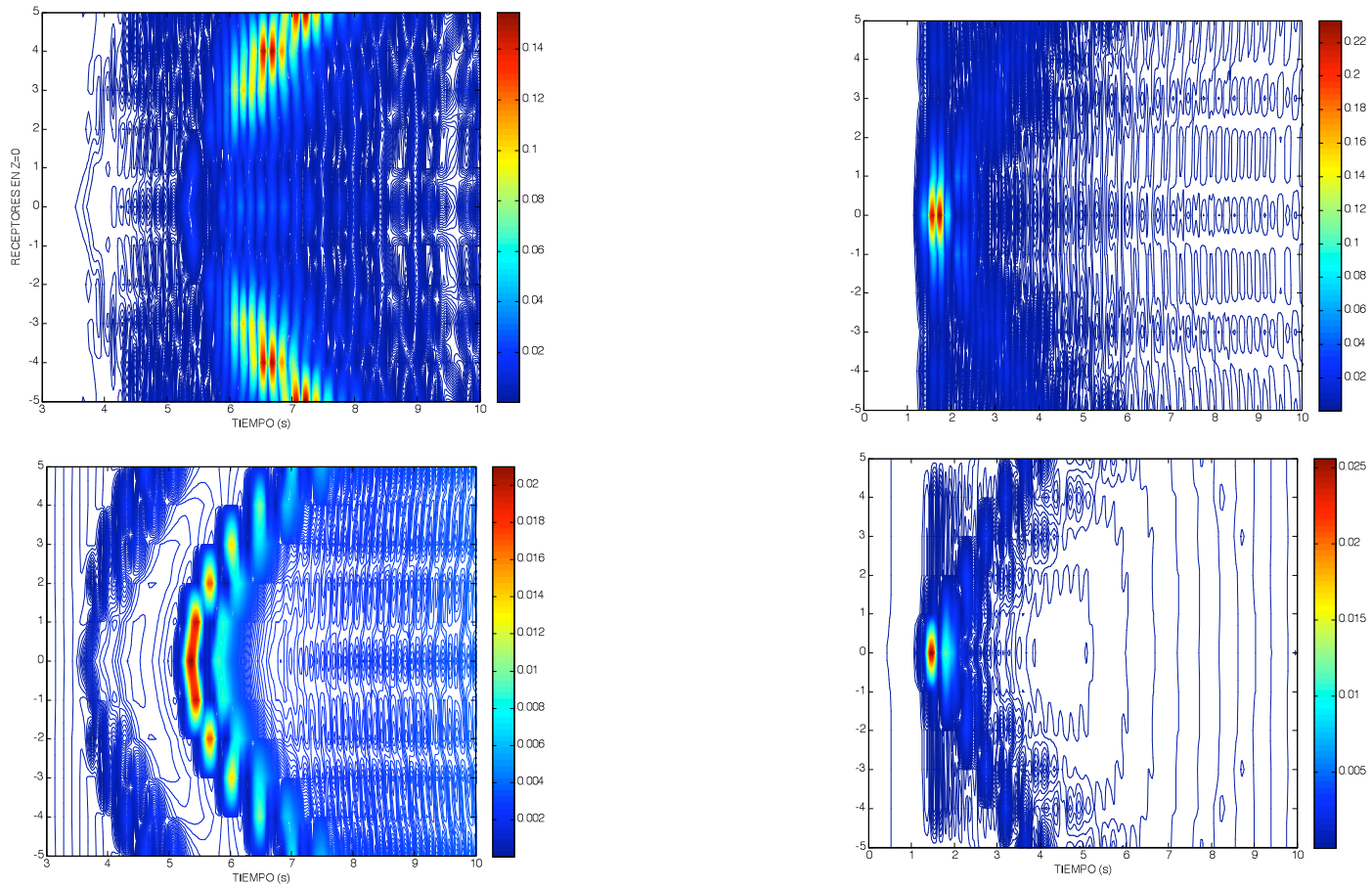


Figura IV.4.1.7 Mapa de contornos de los errores entre la sismogramas solución exacta y discreta obtenidos para 11 receptores a la cota $z = 0.0$ y $z = 5900.0$ metros, corresponden al campo de desplazamiento en la dirección u y a la función de Green (G_{11}). Parte superior errores de los sismogramas utilizando 200 términos. Parte inferior errores de sismogramas utilizando 500 términos.

V Ejemplos

En este apartado se abordará la obtención de sismogramas sintéticos en un medio estratificado considerando cinco tipos de fuentes con funciones de Green elementales y compuestas:

1. Cizalla isótropa (G_{22})
2. Fuerza horizontal (G_{11} y G_{31})
3. Fuerza vertical (G_{13} y G_{33})
4. Fuerzas dipolares (explosión)
5. Doble par de fuerzas (dislocación)

Las soluciones que se utilizan para este tipo de fuentes son las funciones de Green en términos de ondas planas. Para el caso de las fuentes compuestas puntos (4 y 5) se utilizaron las ecuaciones iv.3.12 y iv.3.13.

Para calcular los sismogramas sintéticos en un medio estratificado aplicando cualquiera de estas fuerzas, se utilizaron las ecuaciones iii.1.3, iii.1.4, iii.1.5 y iii.1.5, pero estas fueron discretizadas con el método del número de onda discretizado. El integrando de estas funciones debe satisfacer las condiciones de frontera expresadas con la técnica de la matriz global en un intervalo de frecuencias y un número de términos preestablecido. Los sistemas de ecuaciones planteados en esta matriz representan las incógnitas a las amplitudes de los campos de desplazamiento de cada estrato. El número de veces que hay que resolver estos sistemas de ecuaciones son función del número de términos usados en los sismogramas (N) así como, de los términos usados en la suma del número de onda horizontal (N_{max}), es decir, el número de ecuaciones resueltas se estima como el producto ($\frac{N}{2} \times N_{max}$). Estos sistemas se resuelven si y solo si, se van a realizar snapshot o imágenes en espacio y tiempo en el medio de interés y si únicamente se va a determinar el campo de desplazamiento en un punto en particular o en un arreglo de receptores entonces, conviene determinar las incógnitas de las amplitudes asociadas al campo de ese estrato. Ello reduce drásticamente el número de ecuaciones por resolver. En este contexto, se optó por usar el método de determinantes cuando se este en esta condición para encontrar incógnitas de manera particular. Hasta aquí, el desplazamiento calculado se encuentra en el dominio de la frecuencia, por lo que

se multiplica después con un pulso de Ricker y el resultado es invertido al dominio del tiempo mediante la transformada rápida de Fourier.

De acuerdo con lo anterior se determinó el campo de desplazamiento en la superficie libre de esfuerzos en $z = 0.0$, para todas las fuentes mencionadas exclusivamente para esta situación se usó el método de determinantes para encontrar sus valores de las cuatro incógnitas relacionadas con las amplitudes del campo de desplazamiento para el primer estrato. En el siguiente apartado se describe el cálculo para cada fuente.

V.1 Sismogramas y animaciones con una fuente de Cizalla

Sea un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio elástico, homogéneo e isótropo con parámetros mecánicos y geométricos mostrados en la Tabla 1, en el cual se propagan ondas SH generadas en el estrato dos en las coordenadas $x_F = 0.0$ y $z_F = 6000.0$ metros respectivamente, se desea estimar el campo de desplazamiento en la superficie libre y generar imágenes para un intervalo de tiempo con la intención de construir una animación por cuadros, y así describir el campo de desplazamiento en espacio y tiempo. Los parámetros utilizados en este modelo son totalmente teóricos y sin duda en algún momento se les puede ligar a una aplicación práctica, por lo que, nos abocaremos únicamente a describir la respuesta sísmica en este medio utilizando estos dos resultados.

Estrato	Velocidad de ondas S (m/s)	Espesor (m)	Densidad (kg/m ³)	Coordenadas de la fuente (m)
1	1500	4000	2000	
2	2500	4000	2500	$x_F = 0.0$ $z_F = 6000.0$
Semi-espacio	3000		2600	

Tabla 1 parámetros de un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio.

En la figura V.1.1 se presentan los sismogramas obtenidos para 21 receptores ubicados en $z=0.0$ desde $x = -6000.0$ y hasta $x = 6000.0$ con un intervalo de 600 metros entre ellos. En estos sismogramas podemos observar el arribo directo desde la fuente y hasta la superficie en cada uno de los receptores formando una hipérbola relacionada con los retrasos de las ondas por la separación entre receptores. Después se observa otra onda que corresponde al primer reflejo de la base del estrato 2 (a 8000 m) y otras más que también corresponden al reflejo de esta misma base. Es notoria la disminución de la amplitud de la primera onda respecto a las otras tres. Lo anterior se puede explicar pensando, en las propiedades mecánicas del medio principalmente la velocidad es decir, el medio que subyace a la primera capa conserva una velocidad mayor que hace que, se registren primero las ondas reflejadas de la base del estrato 2 antes de ser observado el reflejo de la base de la primera capa. De ahí que el intervalo de tiempo que se observa es constante al menos en los tres primeros reflejos.

Ahora bien, se realizaron animaciones por cuadros con el objeto de observar con detalle el campo de desplazamiento en este medio. La primera consistió en considerar el medio estratificado como un semi-espacio con superficie libre de esfuerzos, esto se logró considerándolo con las mismas propiedades de la primera capa, tanto densidad como de velocidad, a esta prueba se le conoce como de transparencia y sirve para verificar el funcionamiento de la matriz global como control de calidad de la formulación, se pueden identificar señales espurias durante la propagación de la fuente en el espacio y tiempo del análisis.

La animación se realizó por cuadros de dimensiones de 1200×1200 metros horizontal y vertical respectivamente, se utilizaron 10201 receptores para generar la imagen. La fuente se ubicó al centro de este cuadro y al tiempo $t=0.0$ se inició la propagación de ondas SH, de ahí se fueron generando cuadros a intervalos de 0.4 segundos. En las figuras V.1.2 y V.1.3 se presentan algunos cuadros que ilustran la propagación en la situación mencionada. En ella podemos apreciar el avance del frente de onda (ondas SH) en forma circular el cual viaja libremente a velocidad constante de 1500 m/s de tal suerte que, el primer arribo de la onda se observa cerca de los 4 segundos, en la parte opuesta del cuadro se aprecian el frente de onda que se van y no tiene algún tipo de reflexión. En la figura V.1.3 se puede observar las ondas que viajan sobre la frontera, concretamente en el cuadro $t=4.6$ segundos, se relacionan con las ondas de cabecera (o head wave), en la figura se aprecian como puntos rojos que se mueven sobre la superficie libre hasta desaparecer del cuadro observado.

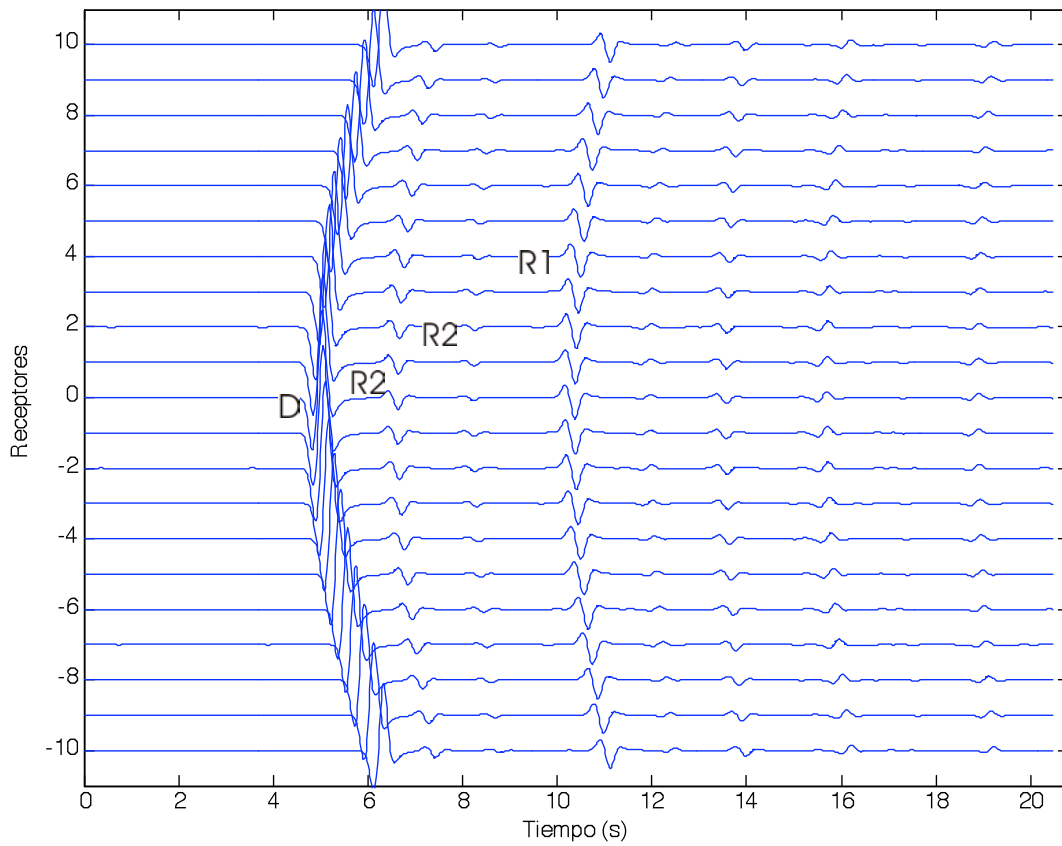


Figura V.1.1 Sismogramas obtenidos en la superficie libre en 21 receptores, se observa el primer arribo con una amplitud grande (D), seguido de dos ondas reflejadas sobre la base del estrato 2 con amplitud decreciente (R2). Seguido de otra onda proveniente de la base del estrato 1 (R1).

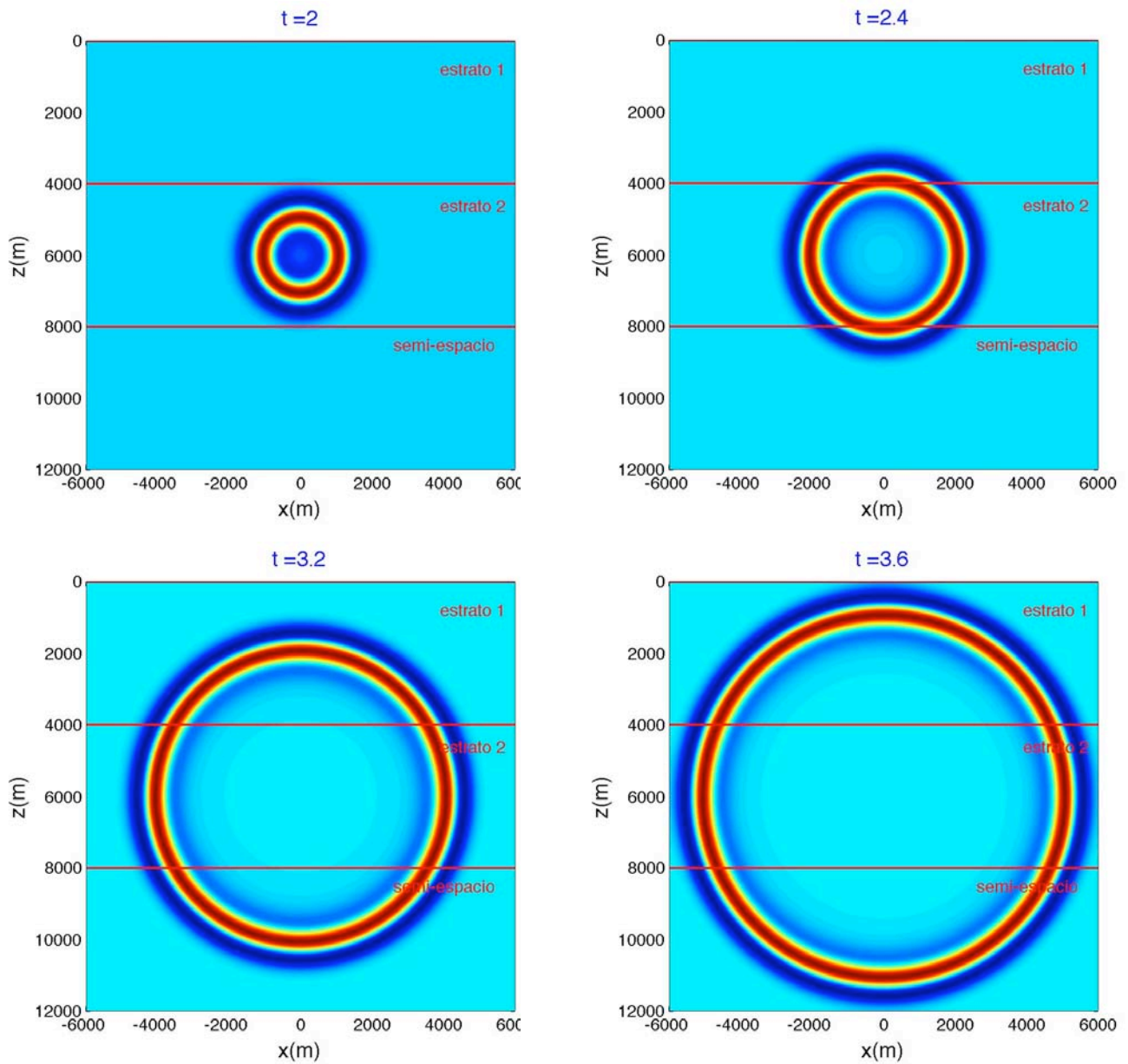


Figura V.1.2 Se muestra una secuencia de imágenes para distintos tiempos de la propagación de ondas SH realizada para una prueba de transparencia en un semi-espacio y una frontera libre de esfuerzos.

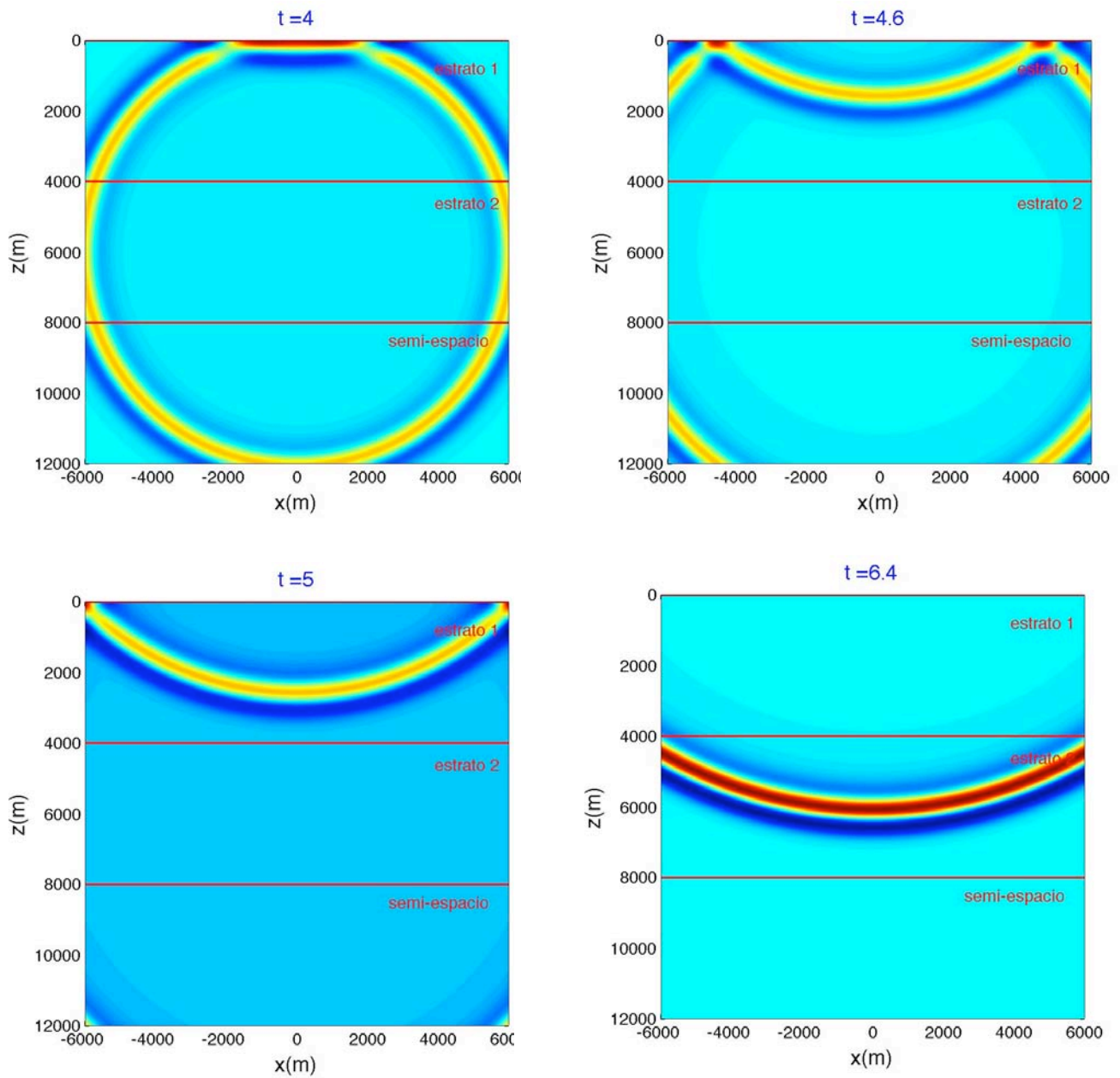


Figura V.1.3 Se muestra una secuencia de imágenes para distintos tiempos de la propagación de ondas SH realizada para una prueba de transparencia un semi-espacio y una frontera libre de esfuerzos.

Hasta ahora se ha mostrado la propagación en espacio y tiempo en un semi-espacio con frontera libre utilizando los métodos del número de onda discreto y la matriz global, con buenos resultados. Entonces, estamos en posibilidades de correr el programa para el modelo consignado en la Tabla 1.

Para esta animación se considero la dimensión del cuadro de 12000×12000 metros generando imágenes del campo de desplazamiento a intervalos de tiempo utilizando para ello una malla de 101×101 receptores. En el instante $t=0.0$ se empieza la propagación debido a la aplicación de una fuerza en el sentido perpendicular al plano de las imágenes ubicadas en las coordenadas $x = 0.0$ y $z = 6000.0$ metros respectivamente que coincide con el centro de la imagen. En las figuras V.1.4 y V.1.5 se presentan una secuencia de imágenes iniciando al tiempo $t=2.0$ segundos, las fronteras fueron dibujadas como líneas en color rojo para evidenciar mejor la reflexión y refracción en cada interfase. En la figura V.1.4 se puede observar el cuadro $t=2.4$ segundos el cual muestra la llegada de la onda directa a la base del estrato 1 y 2. En la primera frontera se observa una reflexión y una refracción. En el caso de la refracción el arco del frente de onda se deformó a un arco más extendido buscando la horizontal de la frontera, esto es debido a que arribó a un medio con menor velocidad, se resalta el hecho de que la amplitud también se incrementara como lo evidencia el cuadro a $t=3.2$ segundos. De igual manera la frontera en la base del estrato 2 se dará el fenómeno de reflexión y refracción de las ondas incidentes provenientes de la fuente. En esta frontera se genera un frente de onda que es reflejado en dirección de la base del estrato 1 y otro más que es dispersado hacia el infinito que corresponde al semi-espacio del medio. El frente de onda reflejado en la base del estrato 2 ascenderá rápidamente a la base del estrato 1 y a la mitad del estrato se cruzaran este frente con el reflejado en la base del estrato 1 debido al frente de onda principal generando se una superposición de ondas en su cruce. Por otro lado siguiendo con el frente de onda proveniente de la base del estrato 2 se postrará a tan solo unos segundos después del frente de onda directo, esto es consistente con lo observado en los Sismogramas sintéticos de la figura V.1.1.

En las fronteras de estas imágenes también se puede observar las ondas que viajan en la dirección de la interfase relacionadas con las ondas head wave, en las figuras se pueden apreciar como puntos en color rojo que pueden llegar a desaparecer dentro del cuadro de observación.

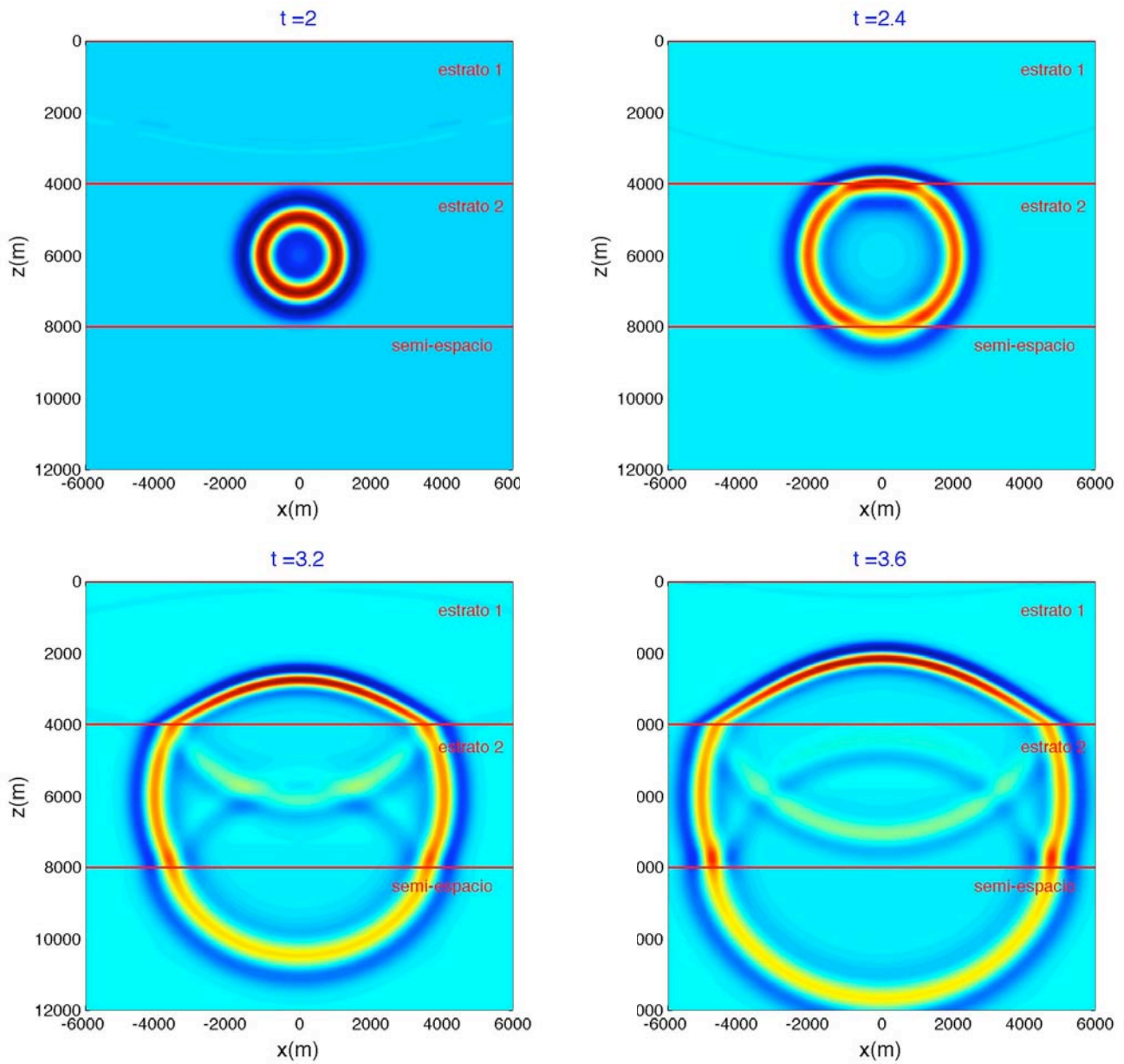


Figura V.1.4 Se muestra una secuencia de imágenes para distintos tiempos de la propagación de ondas SH realizada para un medio de dos capas con un semi-espacio y frontera libre de esfuerzos.

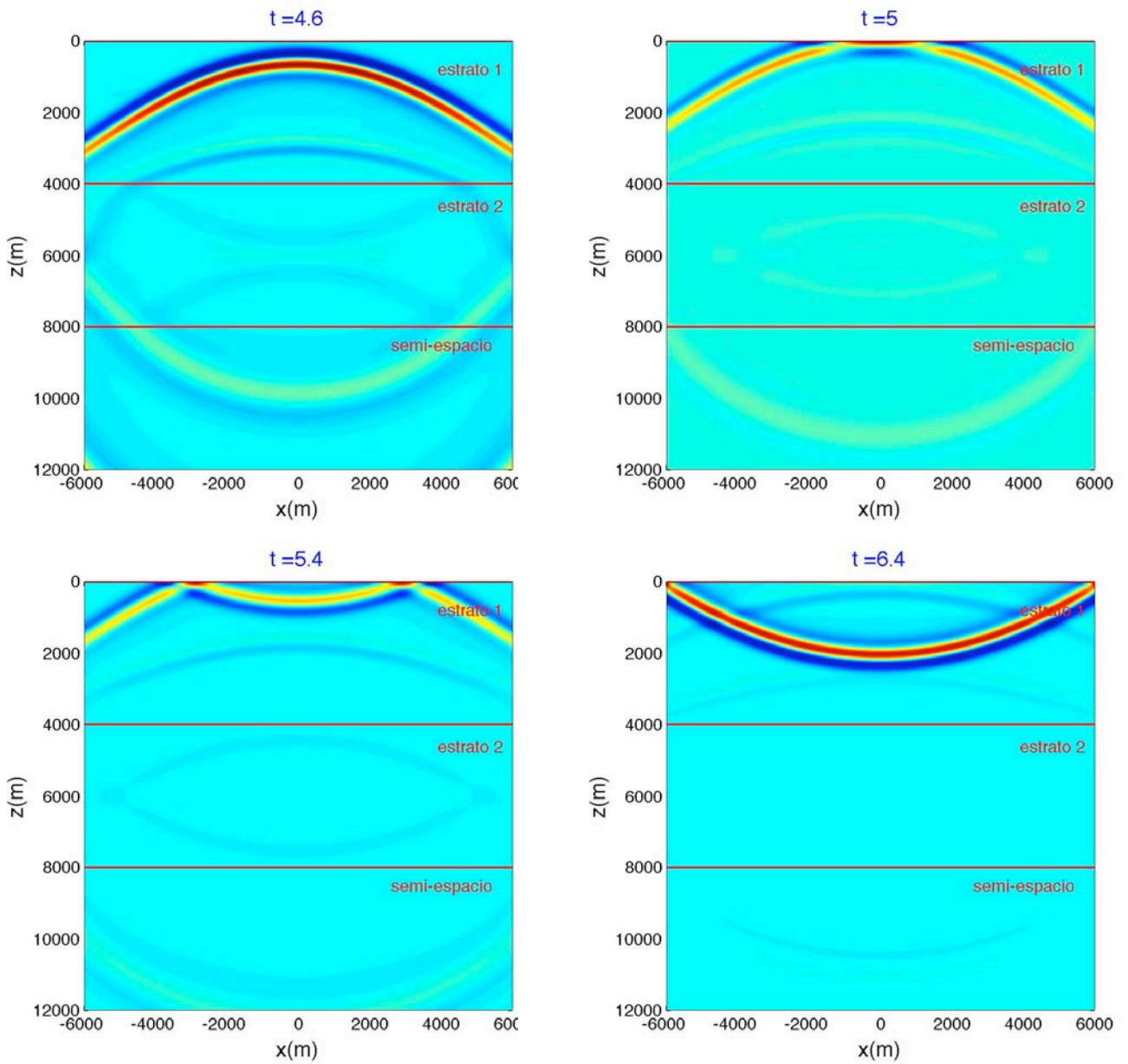


Figura V.1.5 Se muestra una secuencia de imágenes para distintos tiempos de la propagación de ondas SH realizada para un medio de dos capas con un semi-espacio y una frontera libre de esfuerzos.

V.2 Sismogramas obtenidos en un medio estratificado debidos a una fuerza vertical y horizontal

Hasta ahora hemos calculado la respuesta sísmica en un medio estratificado exclusivamente para el caso escalar o propagación de ondas SH. En este apartado se pretende obtener sismogramas sintéticos en la superficie libre pero ahora utilizando como fuente una fuerza vertical y horizontal respectivamente ubicadas en la segunda capa del medio como se reportó en la Tabla 1. Para este ejemplo se utilizó un muestreo de 0.02 segundos y 1000 términos para la suma de ondas planas dentro del ciclo del número de onda discreto.

En la figura V.2.1 se presentan los sismogramas obtenidos en las componentes horizontal y vertical (u y w , respectivamente) cuando se aplica una fuerza vertical sobre la dirección del eje z . Los registros fueron normalizados respecto al valor máximo. En azul se presenta la componente horizontal para 11 receptores ubicados sobre la superficie libre espaciados a 1200 metros cada uno ellos. En esta figura se puede apreciar la simetría de los primeros arribos respecto al centro del arreglo es decir, para los receptores que se encuentran ubicados entre $x = 0.0$ y $x = 6000.0$ metros se observa en los desplazamientos horizontales una polaridad positiva del primer arribo mientras que para los sismogramas que se encuentra entre $x = 0.0$ y $x = -6000.0$ metros tienen una polaridad negativa y al centro del arreglo se presenta un desplazamiento nulo que es perpendicular con la línea de acción de la fuerza. Esto es debido al patrón de irradiación de la fuente en esta componente. Otra de las fases que se pueden identificar con relativa facilidad en esta componente son las ondas que fueron convertidas en la base del estrato 1, se considera que arribaron ondas que dieron lugar a ondas P y S convertidas de P, las cuales las denominaremos como S_p .

Para los sismogramas en la componente vertical mostrados en esta misma figura se reconoce que la amplitud de las series de tiempo para los receptores ubicados en las posiciones -1, 0 y 1 tienen un arribo impulsivo esto se debe principalmente al contraste de las propiedades elásticas del medio 1 y 2, sin desdeñar la forma de irradiar energía de la fuente en una dirección casi vertical, esto se podrá observar con mayor detalle en las animaciones por cuadro. Por otro lado en el sismograma registrado en el receptor 0 se podrá observar que unas décimas de segundo se presenta el arribo de la onda S_p , débil de menor amplitud que la onda P también se puede observar que en este receptor no se reconoce la fase de las ondas S debido a que se requiere por

un lado un registro con mayor duración, sin embargo, en el receptor ubicado en la posición 6 se puede apreciar otra fase con mayor amplitud en el registro que posiblemente se asocie a la fase P convertida de S (P_s). Sin duda, se puede apreciar la gran complejidad de las ondas acopladas en medios estratificados por la gran cantidad de fases involucradas en los registros. Sin embargo, en este momento no se han identificado algunas fases de ondas superficiales debido a que los receptores utilizados no tienen la distancia adecuada para registrar este tipo de ondas pero es posible observarlas en otros registros.

Ahora pasaremos a los sismogramas sintéticos registrados en 11 receptores con las mismas posiciones pero ahora generados por la aplicación de una fuerza horizontal en el segundo estrato considerando las mismas propiedades mecánicas del medio como se consigna en la Tabla 1.

En la figura V.2.2 se presentan los sismogramas para este esquema de cálculo, en ella se puede apreciar el campo de desplazamiento en la dirección horizontal (u) en color azul. Para el Sismogramas obtenido en el receptor 0 se puede apreciar el desplazamiento de la fase P seguido con menor amplitud de la fase S, entre estas dos fases hay pequeñas oscilaciones que se relacionan con la superposición de las ondas P reflejadas en la superficie libre y las ondas S cuya amplitud es dominante. Esta interpretación se pudo verificar con las animaciones por cuadro para la posición de este receptor. Para el caso de los sismogramas obtenidos en la componente vertical se puede apreciar casi de manera inmediata el desplazamiento nulo a la altura del receptor 0 debido a que es ortogonal con la línea de acción de la fuerza horizontal. Esto también se podrá constatar fácilmente en las animaciones por cuadro para esta componente se podrá observar la radiación en esta dirección es nula. Otro aspecto importante que se puede apreciar en estos sismogramas es el tiempo corto entre fases debido a la combinación de las ondas generadas en las fronteras.

De acuerdo con lo anterior se puede decir que aun cuando se conoce matemáticamente a la fuente el hecho de que haya fronteras elásticas y de superficie libre dificulta la interpretación de los sismogramas por la generación y superposición de ondas en estas fronteras. Sin embargo, para la interpretación de estos sismogramas se consideró la simetría implícita en el tensor de Green. Por ejemplo el componente G_{11} representa el campo de desplazamiento en la dirección horizontal debido a una fuerza horizontal; el componente G_{31} representa el campo de desplazamiento en la dirección vertical debido a una fuerza horizontal, el componente G_{13} representa el campo de desplazamiento en la dirección horizontal debido a una fuerza vertical y finalmente el G_{33}

representa el campo de desplazamiento en la dirección vertical debido a una fuerza vertical. Se reconoce la simetría en el tensor, es decir, se cumple que $G_{13} = -G_{31}$ de esta manera se puede decir lo siguiente: dentro del espacio del estrato dos donde se encuentra la fuente centrada en las coordenadas $x_F = 0.0$ y $z_F = 6000.0$ metros se debe cumplir esta simetría sin embargo, cuando se empieza a interactuar concretamente con la frontera de la base del estrato 1 y la superficie libre no pueden identificarse con precisión todas las fases. Estas simetrías de los tensores se podrán observar en las animaciones mostradas más adelante.

V.3 Sismogramas obtenidos en un medio estratificado debido a fuerzas compuestas

Estos sismogramas fueron calculados a partir de funciones de Green elementales utilizando las ecuaciones iv.3.12 y vi.3.13 las cuales involucran derivadas con respecto a las coordenadas de fuente y productos con los componentes del tensor de momento sísmico (M_{ij}). Los casos concretos que se analizaron fueron dos fuerzas dipolares (explosión) y dos pares de fuerza sin momento resultante (temblor), las características del medio como algunos parámetros de la fuente son mostrados en la Tabla 2.

Estrato	Velocidad de ondas P (m/s)	Velocidad de ondas S (m/s)	Espesor (m)	Densidad (kg/m ³)	Coordenadas de la fuente
1	$\sqrt{3} \times 1500$	1500	4000	2000	
2	$\sqrt{3} \times 2500$	2500	4000	2500	$x_F = 0.0$ $z_F = 6000.0$
Semi-espacio	$\sqrt{3} \times 3000$	3000		2600	

Tabla 2. Parámetros del medio de dos capas y un semi-espacio

Se realizó el cálculo de las derivadas para obtener la función analítica que represente a dos fuerzas dipolares, aplicadas en un punto, se resalta que únicamente la fuente tendrá componente de las ondas compresionales, sin embargo se sabe a priori que en las fronteras del medio en cuestión se observará ondas convertidas.

En la figura V.3.1 se presenta los Sismogramas sintéticos para este tipo de fuente, en la parte superior en color azul se consigna a las series de tiempo para la componente horizontal y en la parte inferior la componente vertical. En la primera se observa un desplazamiento nulo en el

receptor que se encuentra al centro. En los 11 registros se observa con claridad el arribo de la fase P mostrado como un pulso de Ricker casi completo seguido de otro casi de la misma amplitud se relaciona con la onda S_p . El desplazamiento nulo al centro del arreglo tiene que ver con la forma de irradiar energía la fuente en esta componente. Por otro lado, los sismogramas para la componente vertical muestran claramente el arribo de la fase P de manera más débil la onda convertida S_p y posiblemente la onda P_s .

Ahora bien, para el caso del doble par de fuerzas sin momento resultante se debe de comentar que la representación de esta fuente es de tipo puntual, modela la ruptura de una falla normal con un echado de 45° . Se seleccionó esta condición para reducir las componentes del tensor de momento sísmico y facilitar la determinación de la función analítica que representa el equivalente mecánico de estas fuerzas. En la figura V.3.2 se presentan los sismogramas para las dos componentes horizontal y vertical, respectivamente. Los sismogramas de la componente horizontal muestran un amplio rango de contenido de frecuencias debido a múltiples reflexiones en las fronteras. Para el caso del registro obtenido en la ubicación del receptor 0 se aprecia un desplazamiento nulo que se correlaciona con la simetría de la irradiación de la fuente, esto se podrá observar en las animaciones por cuadro. Para los registros en la componente vertical muestran claramente el arribo de la fase P con una amplitud moderada y que para el caso del receptor ubicado en la posición 0 es mayor. También, se puede observar el arribo de la fase convertida.

V.4 Animaciones por cuadro (Snapshot)

La obtención de animaciones requiere un adecuado equipo de cómputo debido a los sistemas de ecuaciones que se tienen que resolver para obtener el desplazamiento en un área de interés. De acuerdo con esto se seleccionó una área de 12000×12000 metros cuadrados. Para ello se utilizó una matriz de receptores de 101×101 es decir, para cada receptor se calculó un desplazamiento el cual fue ordenado de manera temporal para presentar el campo de desplazamiento a un mismo instante de tiempo. Con esto se logró animar por cuadros distintos instantes de tiempo la propagación para los cinco tipos de fuente analizados en el medio estratificado que se ha venido analizando.

Para obtener las imágenes con una mayor resolución se realizó una interpolación el cual permitió obtener valores de desplazamiento en una malla de 1001×1001 . En las siguientes figuras se presentan las imágenes de la propagación ondas debido a una excitación de una fuerza impulsiva vertical, horizontal, dos fuerzas dipolares y doble par de fuerzas. En la figura V.4.1 y V.4.2 se presentan imágenes que muestran la propagación de las ondas debido a una fuerza vertical, en el caso del campo de desplazamiento en la componente horizontal (u) se puede observar cuatro lóbulos del desplazamiento los cuales son alternados entre máximos y mínimos, estos lóbulos tienden a crecer conforme pasa el tiempo tomando una forma de arco dentro del estrato 2 se observa una simetría respecto a los dos ejes que acusan un desplazamiento nulo en $x = 0.0$ esto es consistente con lo observado en los sismogramas obtenidos con el receptor ubicado en la posición 0. En el instante que los frentes llegan a la frontera de la base del estrato 1 son refractados y reflejados observándose conversión de ondas. Se resalta la situación de que los frentes de onda al pasar al estrato superior buscan la horizontal debido a la disminución de la velocidad de este estrato. Para el caso del semi-espacio los frentes de onda son más amplios debido al incremento de la velocidad. Finalmente se aprecia la llegada del frente de onda de la fase P a la superficie libre en el instante $t = 3.2s$. Seguimiento de las ondas convertidas S_P .

En la componente vertical (w) (figuras V.4.3 y V.4.4) la propagación de las ondas se puede observar como dos arcos dominantes en la dirección del eje z y otros dos en la dirección del eje x . Cuando los primeros arcos (o frentes de onda) llegan a la base del estrato 1 se generan dos fases la P y S_P . Después se observa la llegada del siguiente frente de onda que da lugar a la fase P_S . Estas ondas se pueden apreciar con claridad en el instante $t = 3.2s$ de la siguiente manera: en el estrato 1 dos frentes de onda que se relacionan con un mínimo y un máximo en color azul y amarillo respectivamente, que avanzan hacia la superficie libre. Después otro frente de onda con otro mínimo y máximo en color azul amarillo muy tenue. Finalmente se observa en este mismo estrato las ondas P_S como un máximo y un mínimo en color amarillo y azul respectivamente. Estas fases se puede verificar en el sismograma de la componente vertical en la posición del receptor 0 (figura V.2.1).

En las figuras V.4.5, V.4.6, V.4.7 y V.4.8 se presentan las imágenes de la propagación de ondas debido a una excitación de una fuerza impulsiva horizontal. En la figura V.4.5 y V.4.6 las

imágenes muestran la propagación de las ondas en la componente u , se puede observar frentes de onda generados en el centro del estrato 2, llegan a la interfase 1 se convierten en dos arcos dominantes en la dirección del eje z , estos frentes se correlacionan con las ondas P y S_p . De tal suerte que el arribo del primer frente de onda se presentó con más amplitud en el receptor 1 que se ubican por arriba de la fuente como se puede constatar en la figura V.2.2. Ahora cuando los frentes de onda llegan a la interfase 2 o semi-espacio tienden a hacerse más amplios debido a que la velocidad en este medio es mayor que en el estrato superior como se puede verificar en las imágenes de esta misma figura.

En las figuras V.4.7 y V.4.8 se muestran el campo de desplazamiento en la dirección vertical (w). En esta componente se pueden apreciar cuatro lóbulos los cuales son alternados entre máximos y mínimos. Estos tienden a crecer conforme pasa el tiempo tomando una forma de arco dentro del estrato 2 se observa una simetría respecto a los dos ejes que acusan un desplazamiento nulo en $x=0.0$ esto es consistente con lo observado en los sismogramas obtenidos con el receptor ubicado en la posición 0. En el instante que los frentes llegan a la frontera de la base del estrato 1 son refractados y reflejados observándose conversión de ondas. Se resalta la situación de que los frentes de onda al pasar al estrato buscan la horizontal debido a la disminución de la velocidad del estrato superior así como, se da la propagación en la fronteras de ondas de interfase que aparecen como puntos rojos o azules dependiendo la polaridad de los mismos finalmente se aprecia la llegada del frente de onda directo a la superficie libre. También se puede verificar la simetría del tensor de Green ($G_{31} = -G_{13}$) ver imágenes de las figuras V.4.7 y V.4.1

En las figuras V.4.9, V.4.10, V.4.11 y V.4.12 se muestran el campo de desplazamiento debido a dos fuerzas dipolares las cuales son aplicadas en las coordenadas $x_F = 0.0$ y $z_F = 6000.0$ metros en las direcciones positiva y negativa del eje z y positiva y negativa del eje x . El inicio de la propagación corresponde con el centro de las imágenes. Durante la propagación se observa en ambas componentes un crecimiento de los lóbulos mostrándose con amplitud invertida y a medida que pasa el tiempo van creciendo hasta formar arcos simétricos al menos dentro del estrato 2. Es notorio el cambio de los frentes de onda por un lado, en el semi-espacio y por el otro, en la base del estrato 1, formando frentes más amplios para este último. Debido a un

incremento en la velocidad también es claro que los frentes avanzan lateralmente hasta desaparecer del cuadro de observación.

En las figuras V.4.13, V.4.14, V.4.15 y V.4.16 se presentan las imágenes que corresponden a la secuencia de la propagación de una dislocación bajo el modelo del doble par de fuerzas sin momento resultante. Se utilizaron los parámetros del medio mostrados en la tabla 2. En estas figuras se presenta el campo de desplazamiento correspondiente a las direcciones u y w . En ambas figuras la fuente coincide con el centro de las imágenes. En ambas figuras se puede apreciar que las componentes del campo se forman lóbulos de que van creciendo conforme pasa el tiempo hasta que se encuentran con las fronteras elásticas 1 y 2. En ese momento se generan ondas convertidas, que para el caso del primer estrato se observan ondas P seguidas de las ondas S_P , para el caso del semi-espacio estas dos ondas convertidas tienden a desaparecer.

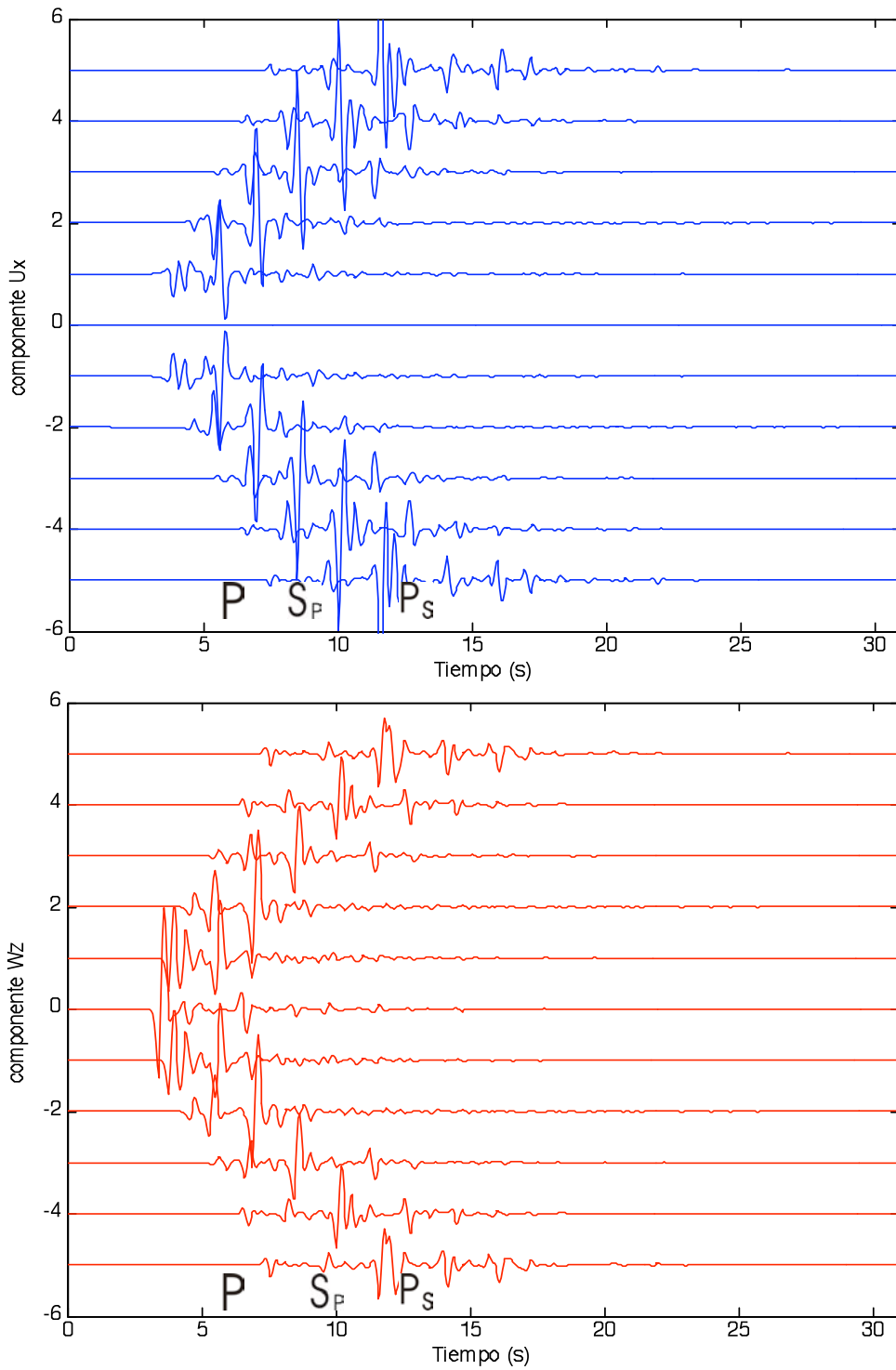


Figura V.2.1 Sismogramas sintéticos calculados para un medio estratificado elástico, homogéneo e isótropo obtenidos para una **fuerza vertical** ubicada en las coordenadas $x=0.0$, $z=6000$ metros. y se reconocen tres fases sísmicas

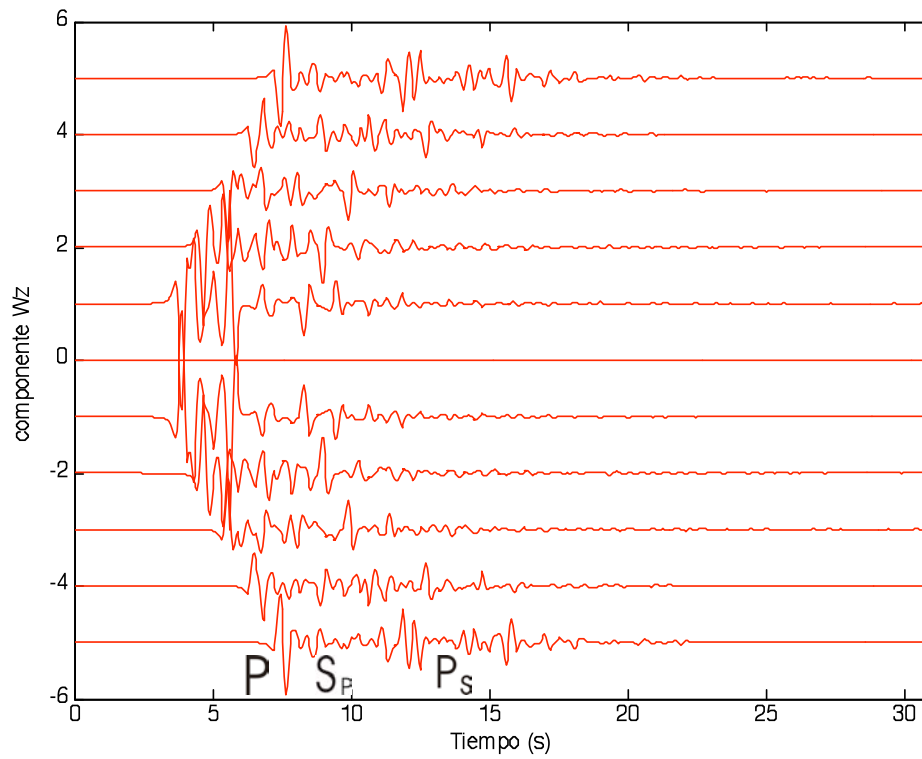
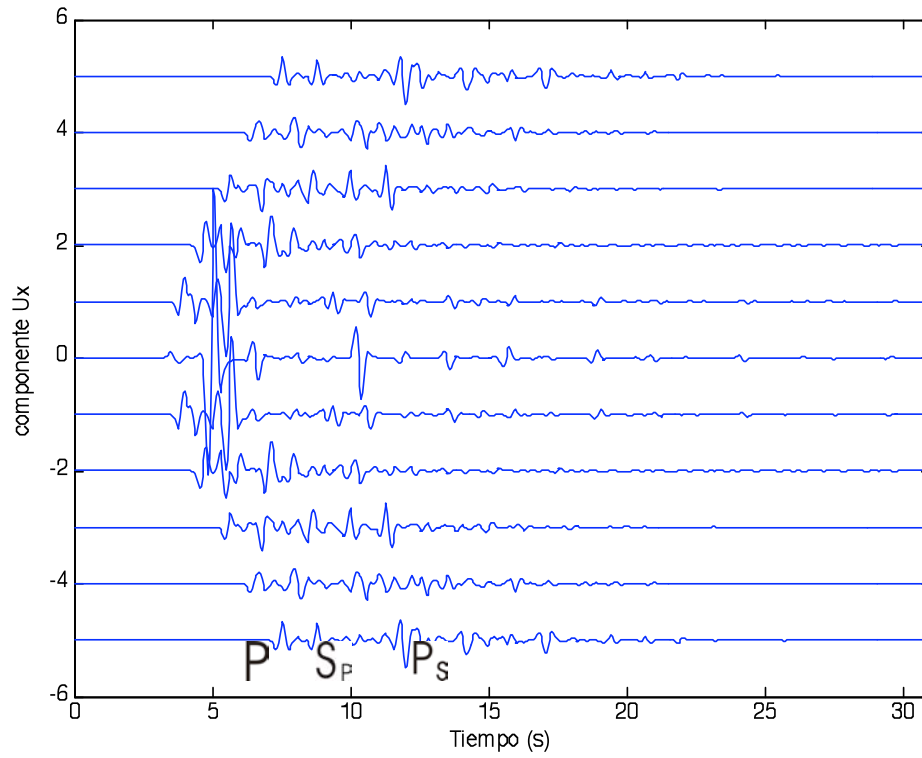


Figura V.2.2 Sismogramas sintéticos calculados para un medio estratificado elástico, homogéneo e isótropo obtenidos con una **fuerza horizontal** ubicada en las coordenadas $x=0.0$, $z=6000$ metros y se reconocen tres fases sísmicas.

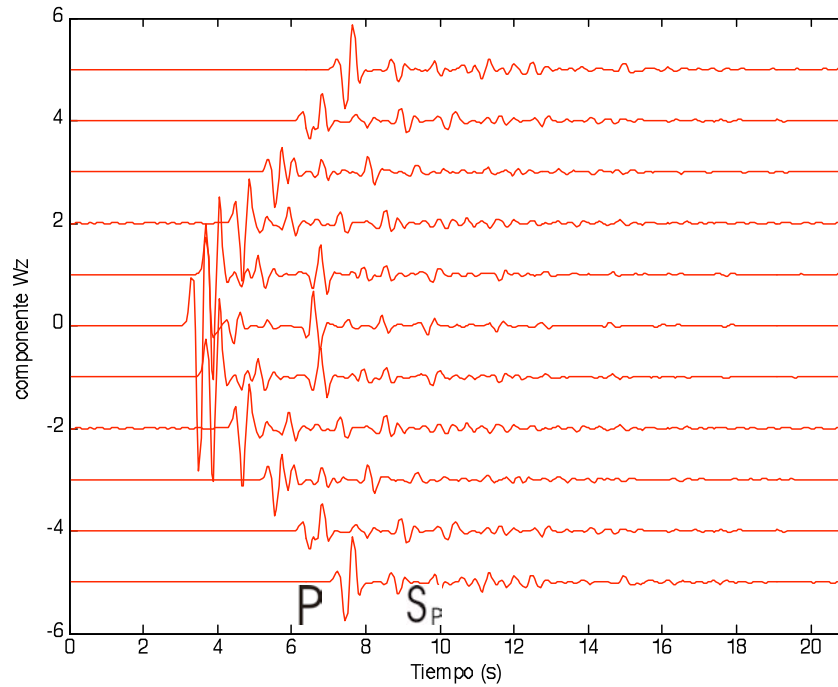
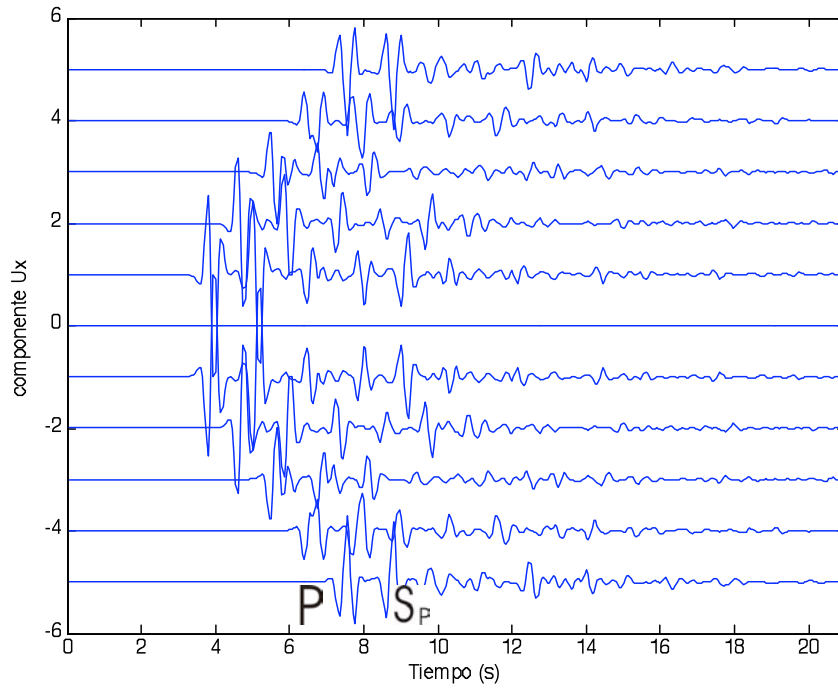


Figura V.3.1 Sismogramas sintéticos calculados para un medio estratificado elástico, homogéneo e isótropo obtenidos con dos pares de **fuerzas dipolares** ubicado en las coordenadas $x=0.0$, $z=6000$ metros y se reconocen dos fases sísmicas.

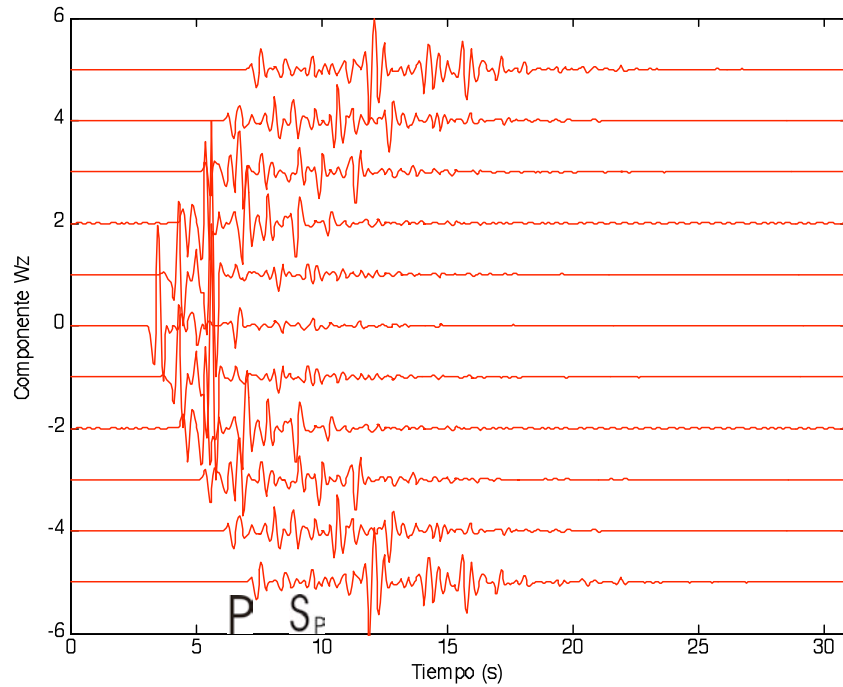
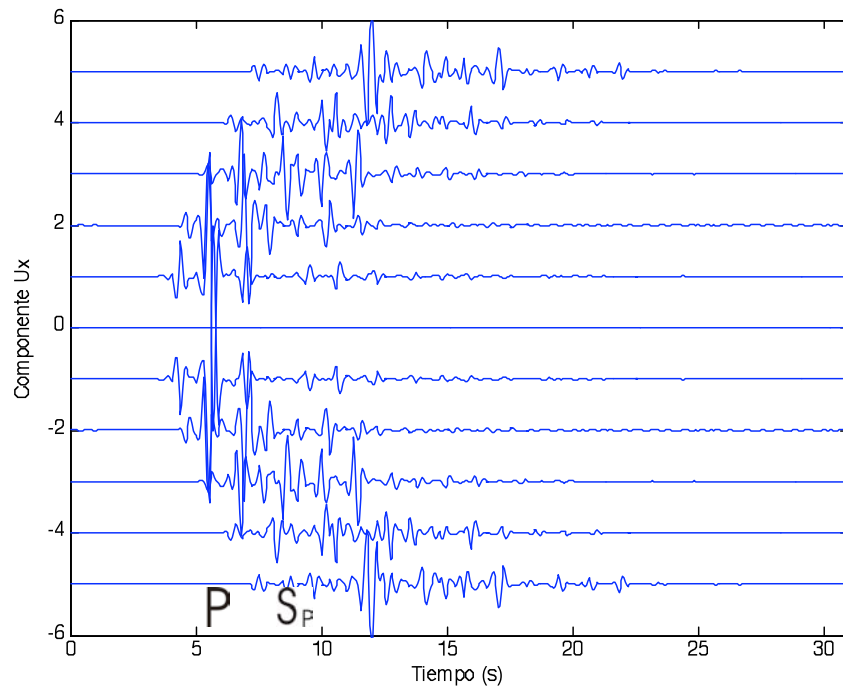


Figura V.3.2 Sismogramas sintéticos calculados para un medio estratificado elástico, homogéneo e isótropo obtenidos con un **doble par de fuerzas** ubicado en las coordenadas $x=0.0$, $z=6000$ metros y se reconocen dos fases sísmicas.

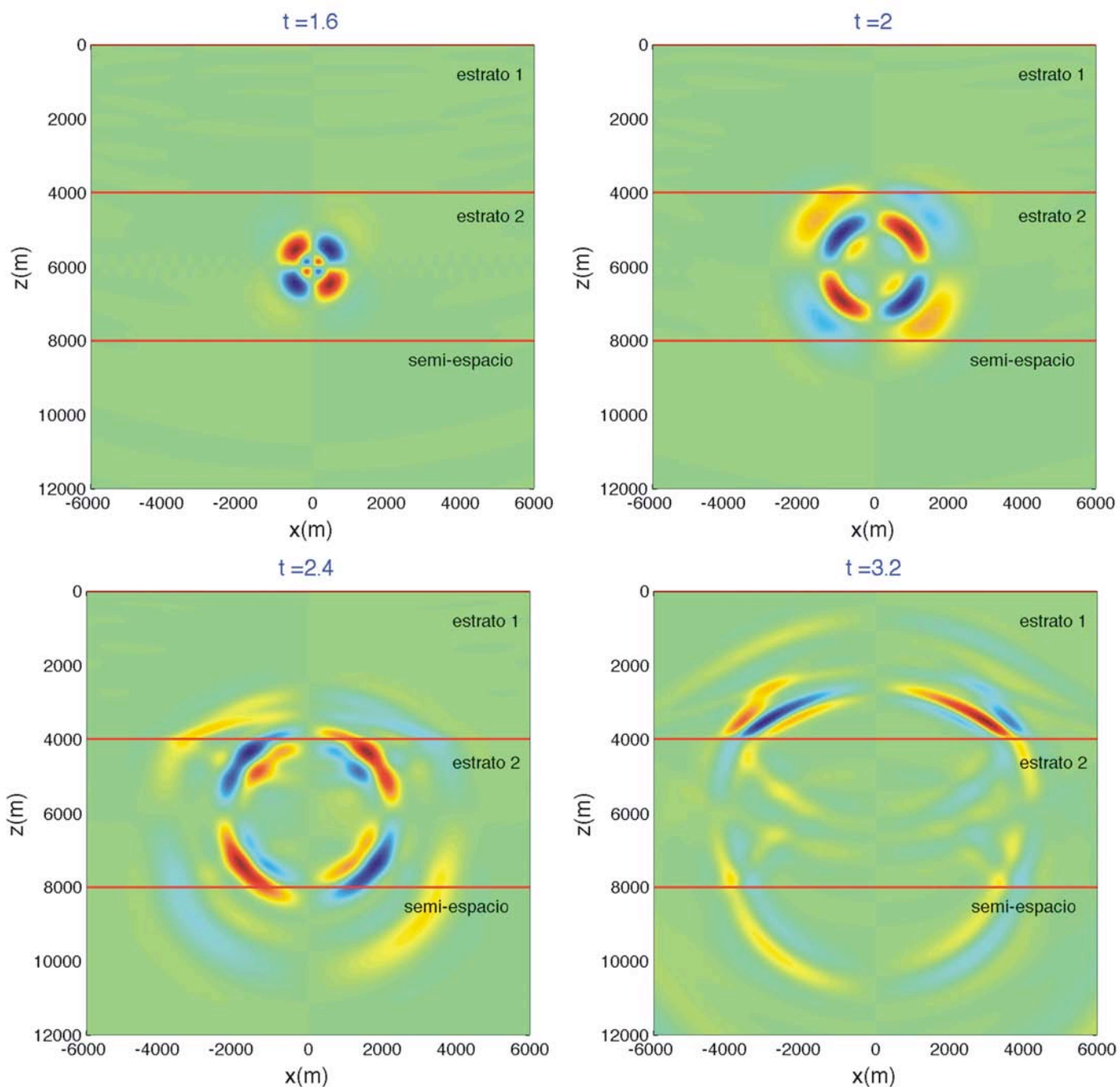


Figura V.4.1 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (u), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva vertical ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio. En el instante $t = 1.6s$ se pueden observar cuatro lóbulos de polaridad alternante que conforme avanza el tiempo crecen como arcos hasta tocar las fronteras del semi-espacio y la base del estrato 1. En el tiempo $t = 3.2s$ se puede apreciar la llegada de los frentes de onda (P y S_P) a la superficie libre del estrato 1.

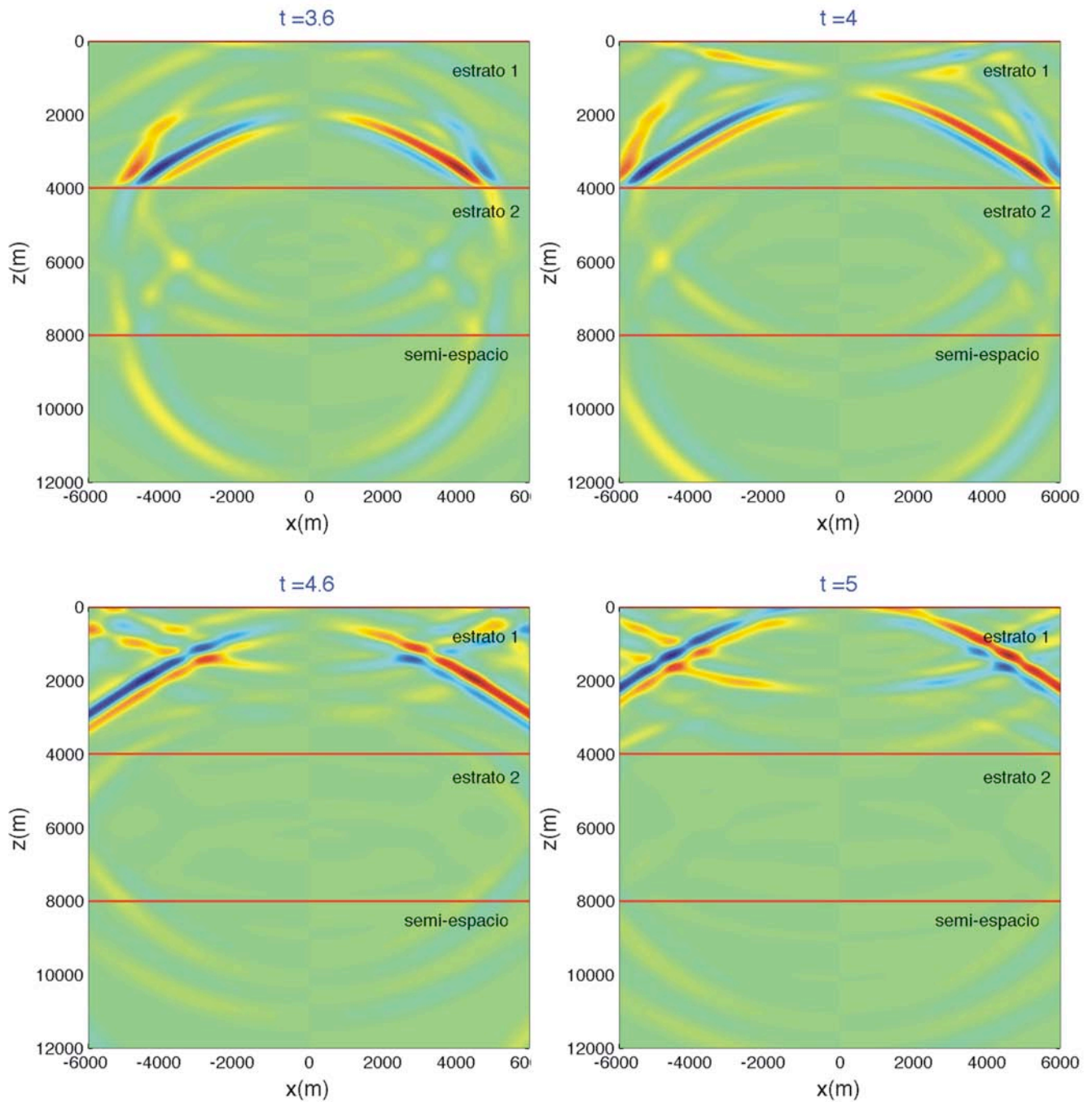


Figura V.4.2 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (u), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva vertical ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior con al semi-espacio. En el tiempo $t = 3.6s$ se puede apreciar la llegada de los frentes de onda (ondas P y S_p) a la superficie libre. Mientras que en la base del estrato 1 se observa el arribo de las ondas reflejadas de la base del estrato 2.

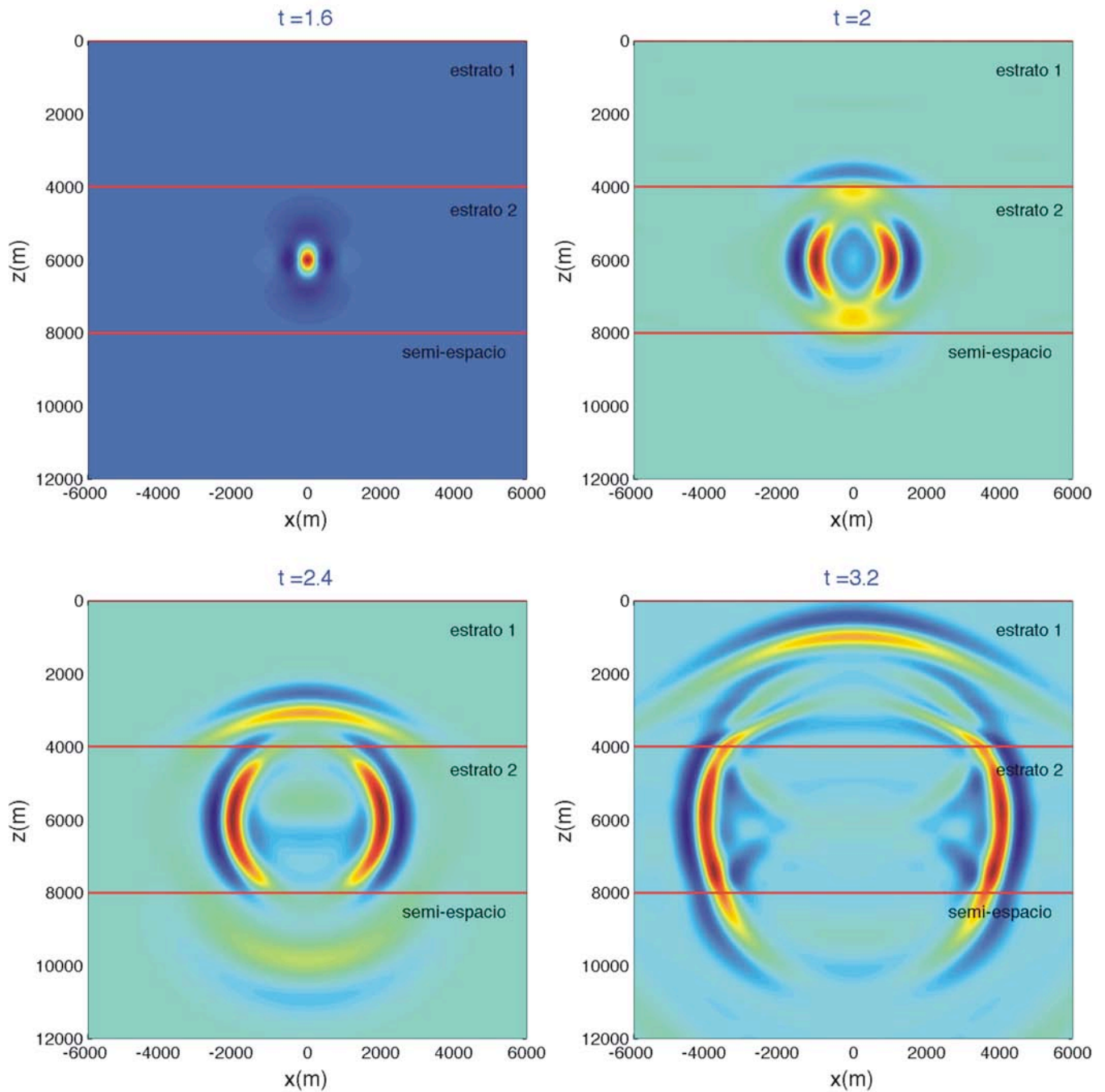


Figura V.4.3 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (w), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva vertical ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior con el semi-espacio. En el instante $t = 2.0s$ se puede apreciar la llegada del frente de onda P a la base del estrato 1. Después en el instante $t = 2.4s$ se puede observar la conversión de ondas del medio 2 al 1. De igual manera del medio 2 al 3. Este último frente es más prominente y avanza más rápido debido a que el semi-espacio tiene mayor velocidad.

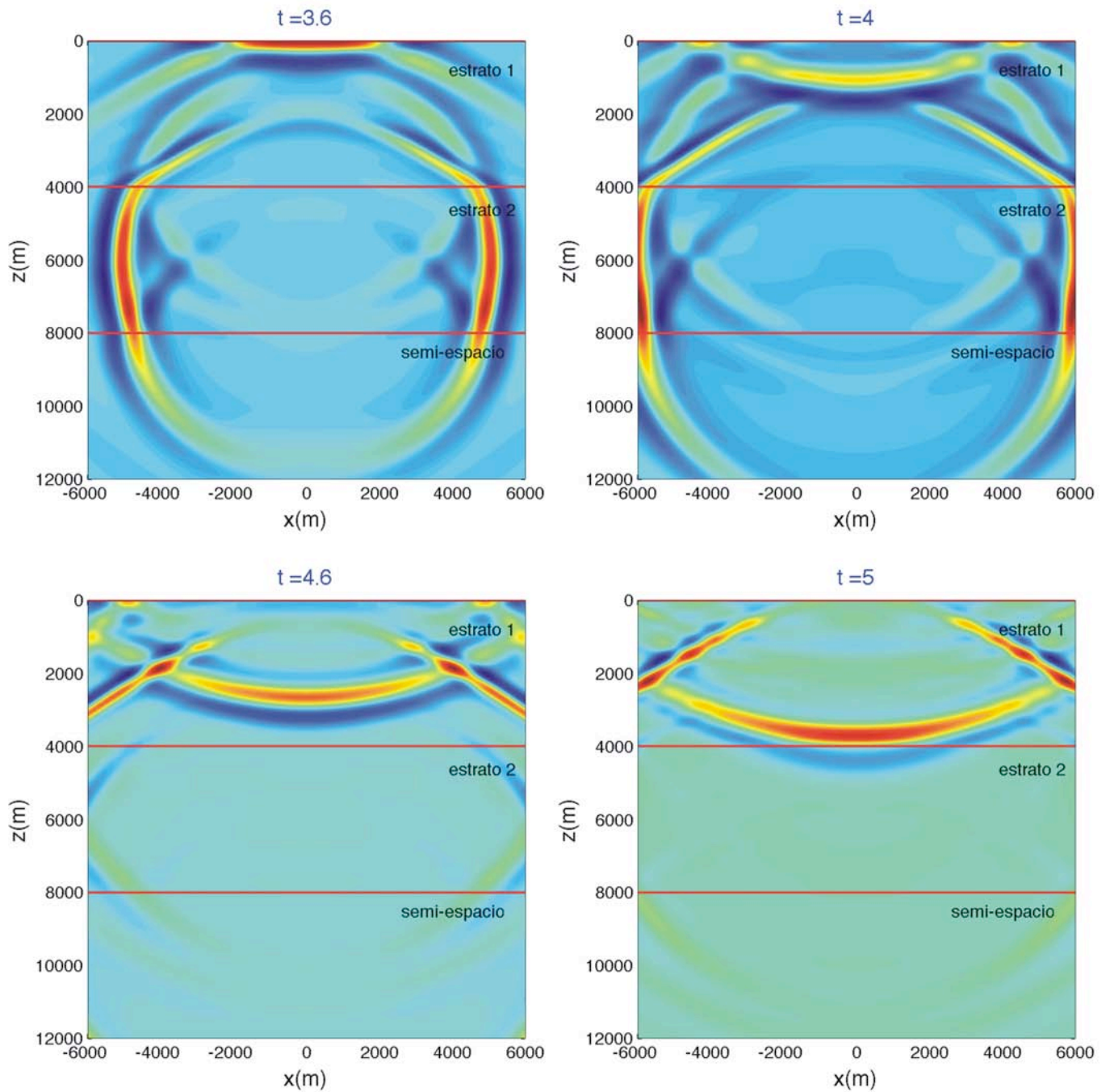


Figura V.4.4 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (w), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva vertical ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior con el semi-espacio. En el instante $t = 3.6s$ se puede observar en el estrato tres fases P, S_P y P_S .

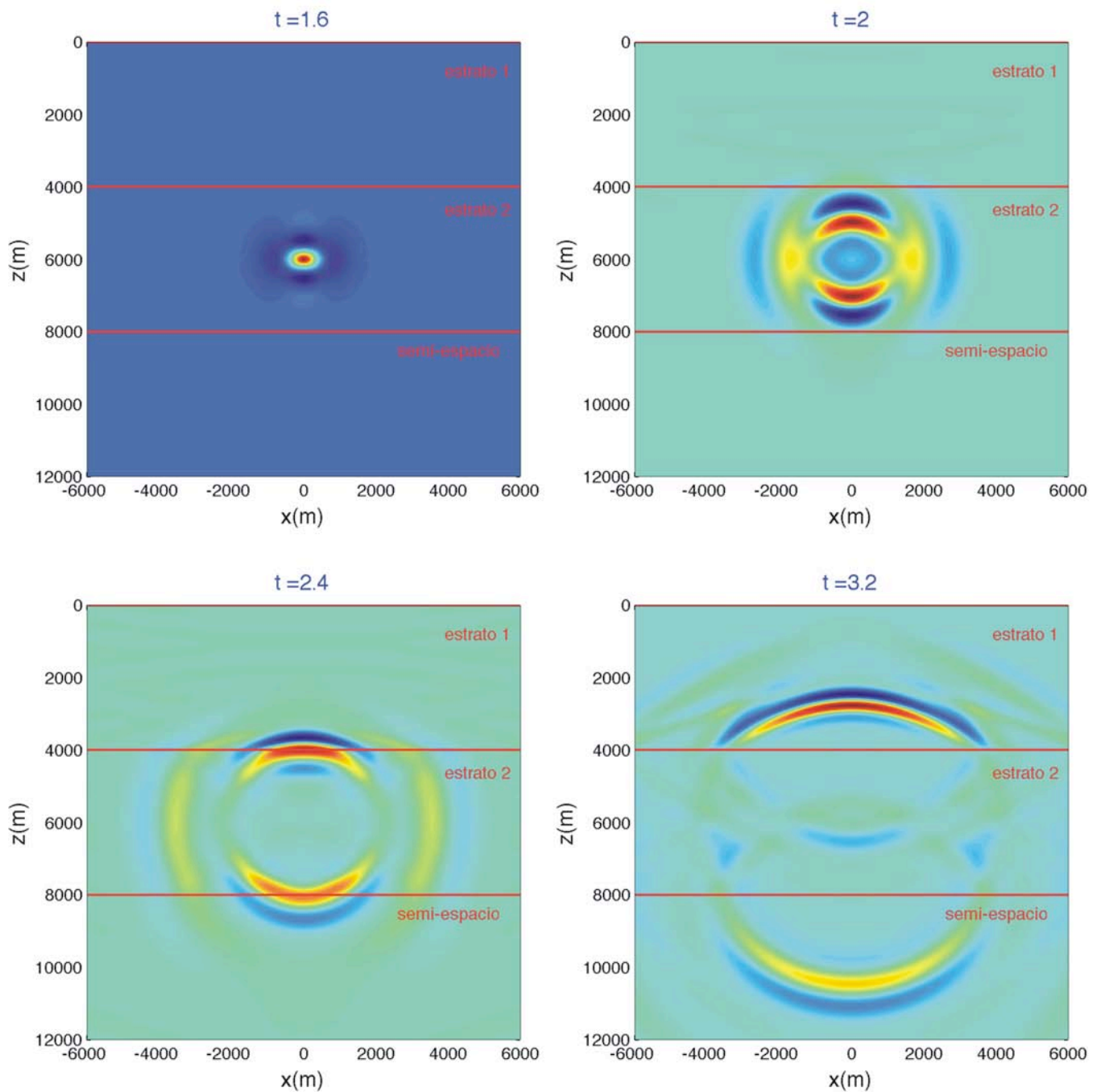


Figura V.4.5 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (U), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva horizontal ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior con el semi-espacio. En el instante $t = 2.0s$ se puede apreciar la llegada del frente de onda P a la base del estrato 1. Después en el instante $t = 2.4s$ se puede observar la propagación de los frentes de onda P y S_P en el estrato 1. Mientras que en el estrato 2 al centro de este se puede observar frentes de onda reflejados en la base del estrato 1 y 2 respectivamente.

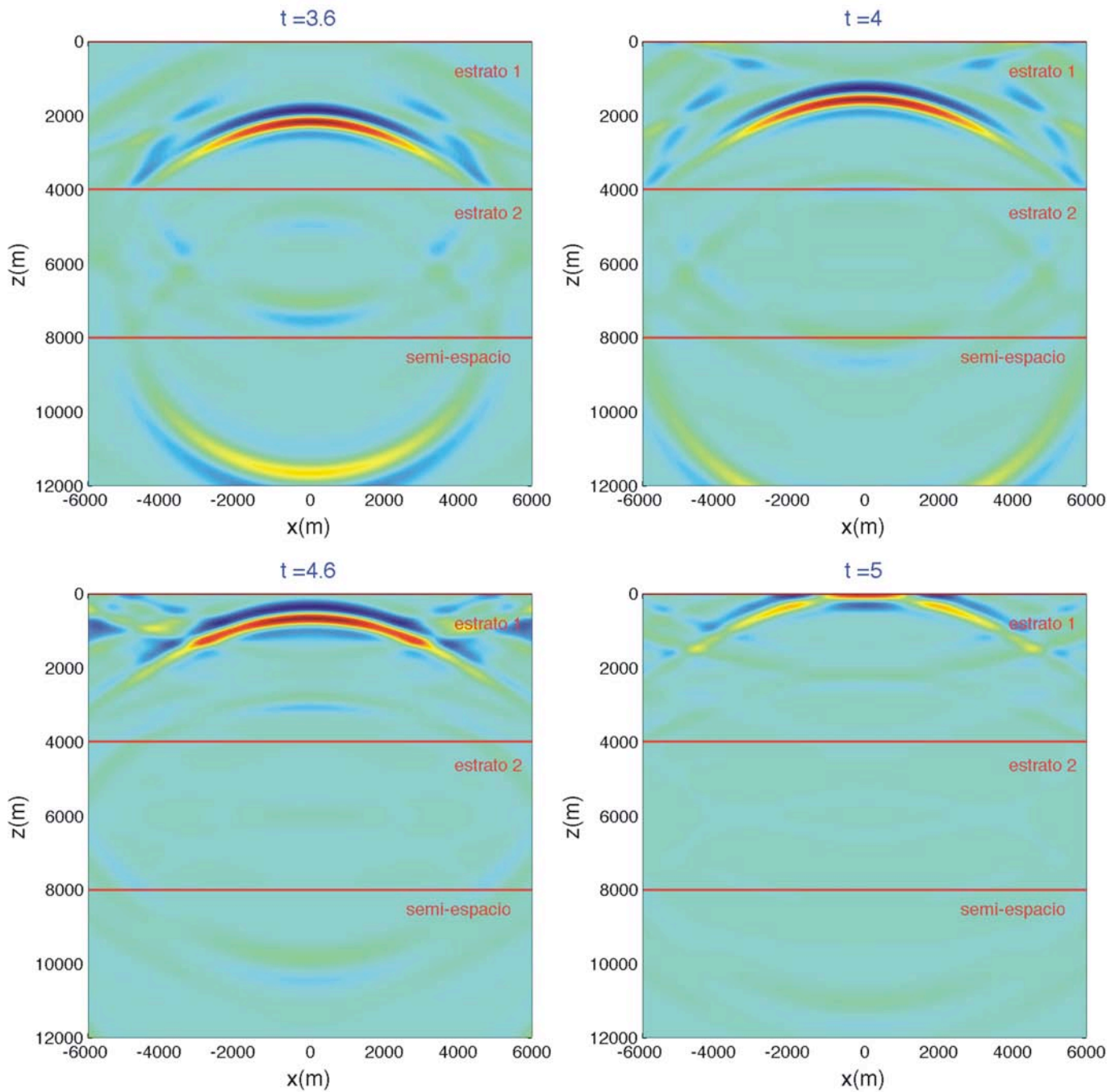


Figura V.4.6 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (u), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva horizontal ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior con el semi-espacio. En el instante $t = 3.6s$ se puede observar en el estrato 1 tres fases sísmicas P, S_P y P_S . Esta última de mayor amplitud, la cual se puede apreciar como dos arcos en azul y rojo.

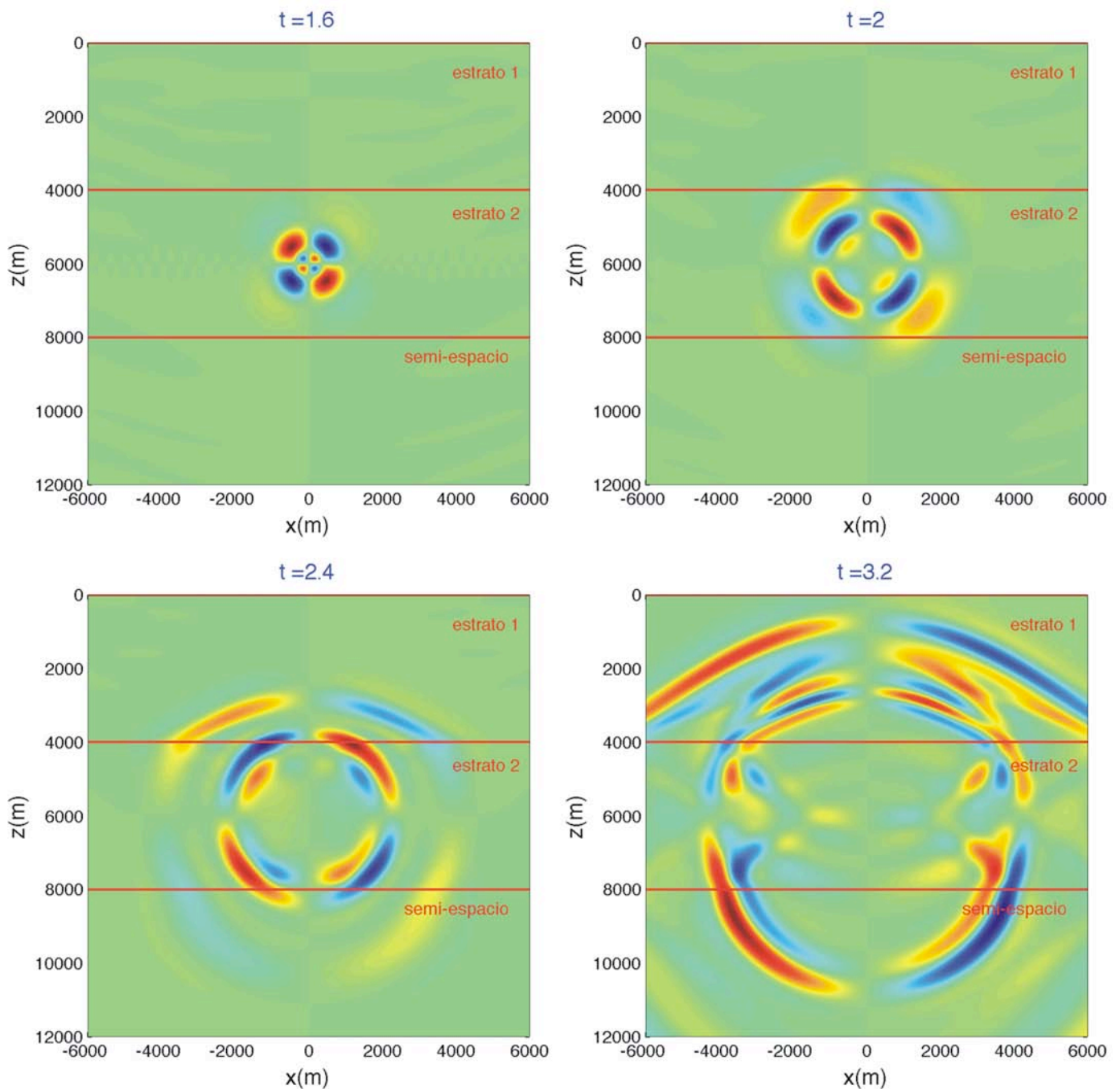


Figura V.4.7 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (W), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva horizontal ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio. En el instante $t = 1.6s$ se pueden observar cuatro lóbulos de polaridad alternante que conforme avanza el tiempo crecen como arcos hasta tocar las fronteras del semi-espacio y la base del estrato 1. En el tiempo $t = 3.2s$ se puede apreciar en el estrato 1 las fases sísmicas P y S_p .

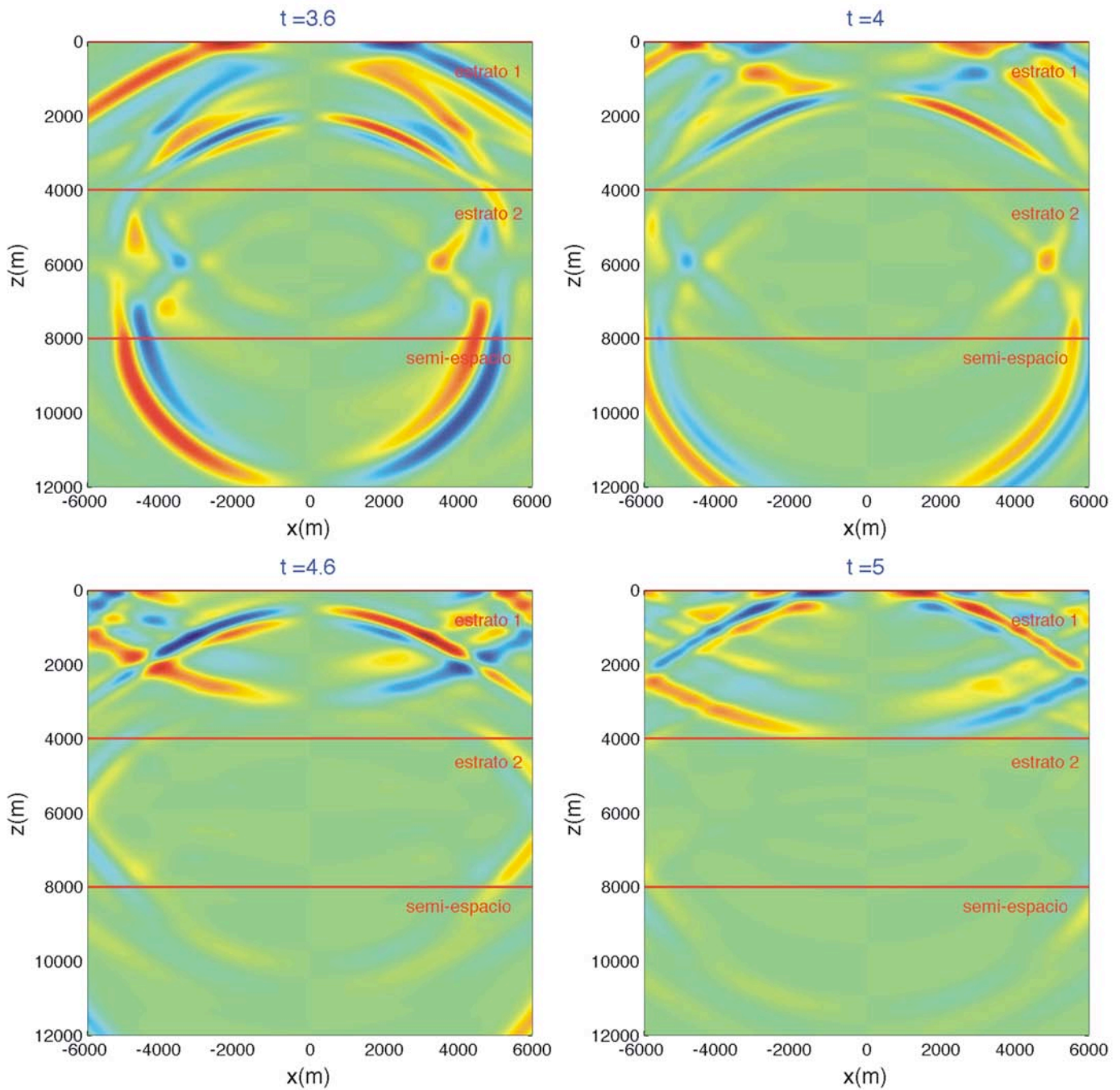


Figura V.4.8 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (W), debido a la aplicación de una fuerza impulsiva horizontal ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior con al semi-espacio. En el tiempo $t = 3.6s$ se puede apreciar la llegada de las fases sísmicas P, S_p y P_s a la superficie libre.

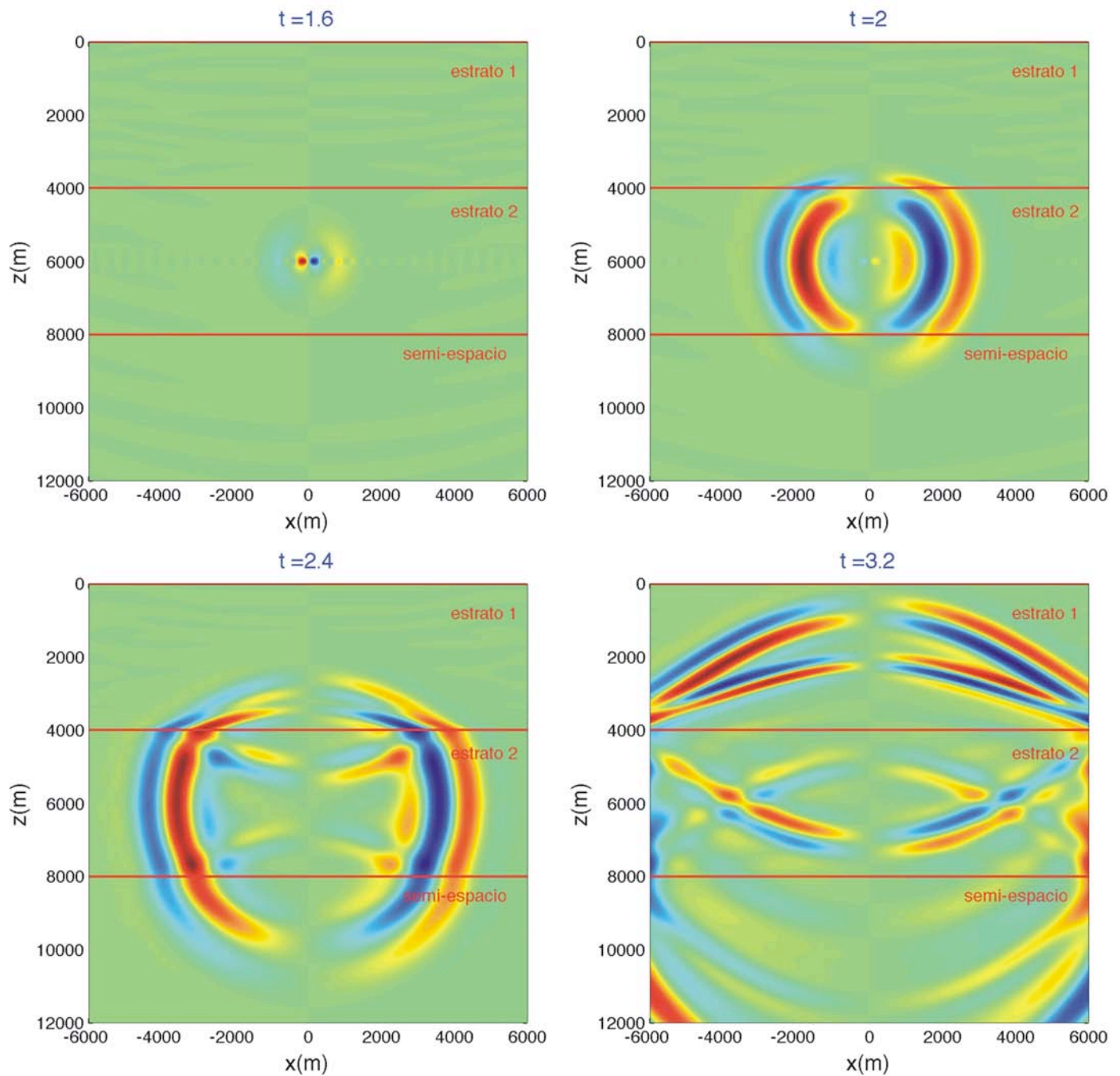


Figura V.4.9 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (u), debido a la aplicación de una fuerza dipolar impulsiva (explosión) ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio. En el instante $t = 1.6s$ se pueden observar dos lóbulos de polaridad alternante que conforme avanza el tiempo crecen como arcos principalmente sobre el estrato 2. En el tiempo $t = 3.2s$ se puede apreciar la llegada de los frentes de onda (P y S_P) a la superficie libre con desplazamiento nulo en $x = 0.0$.

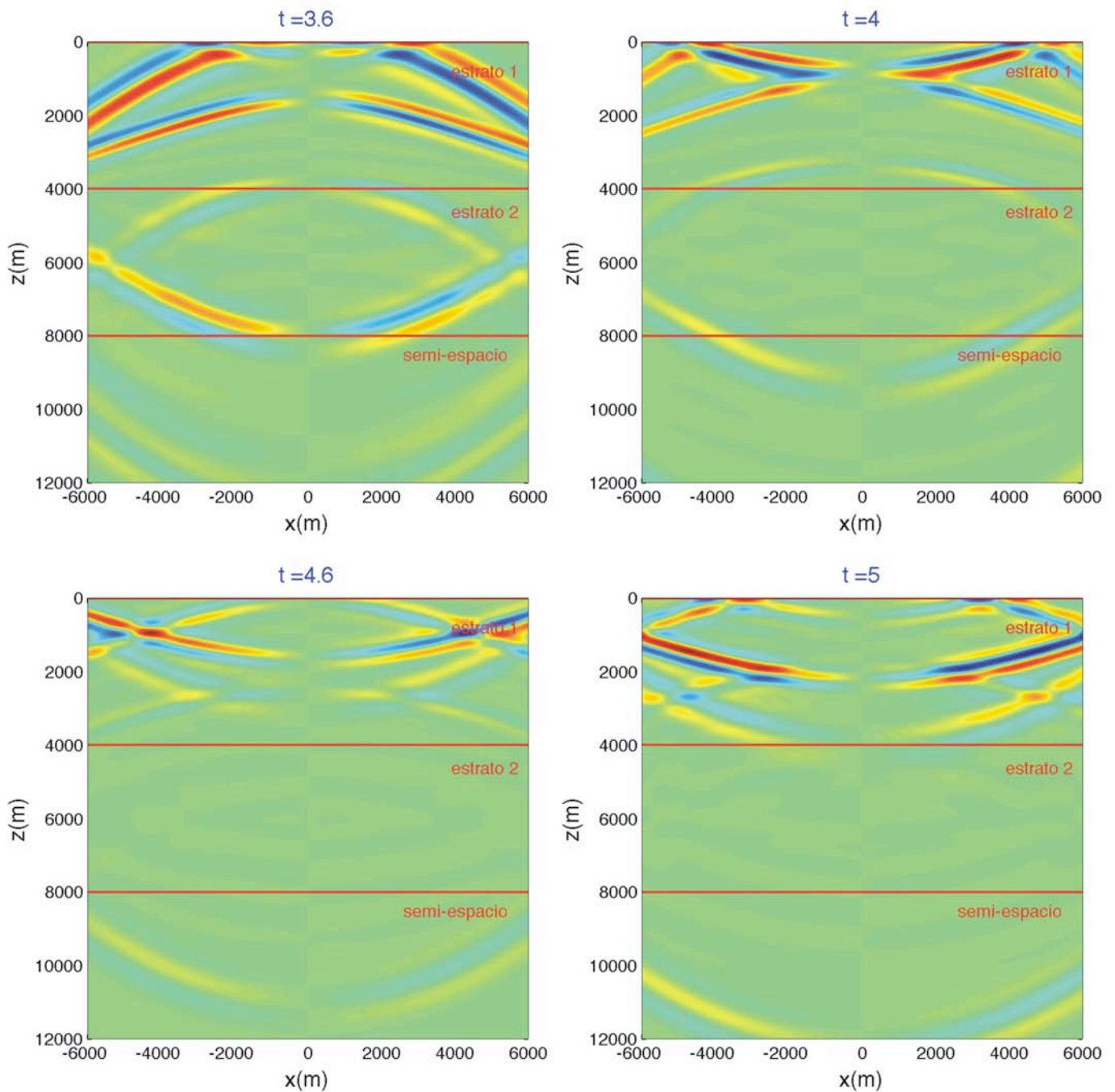


Figura V.4.10 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (u), debido a la aplicación de una fuerza dipolar impulsiva (explosión) ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio. En el instante $t = 3.6s$ se pueden observar la llegada de frentes de onda en la base del estrato 1 y 2 relacionados, con los reflejos de las ondas en la base de los estratos 2 y respectivamente. Para el instante $t = 5.0s$ se observa que las ondas se agolpan en el estrato 1 y son las ondas reflejadas en la superficie libre así como las ondas reflejadas en la base del estrato 1.

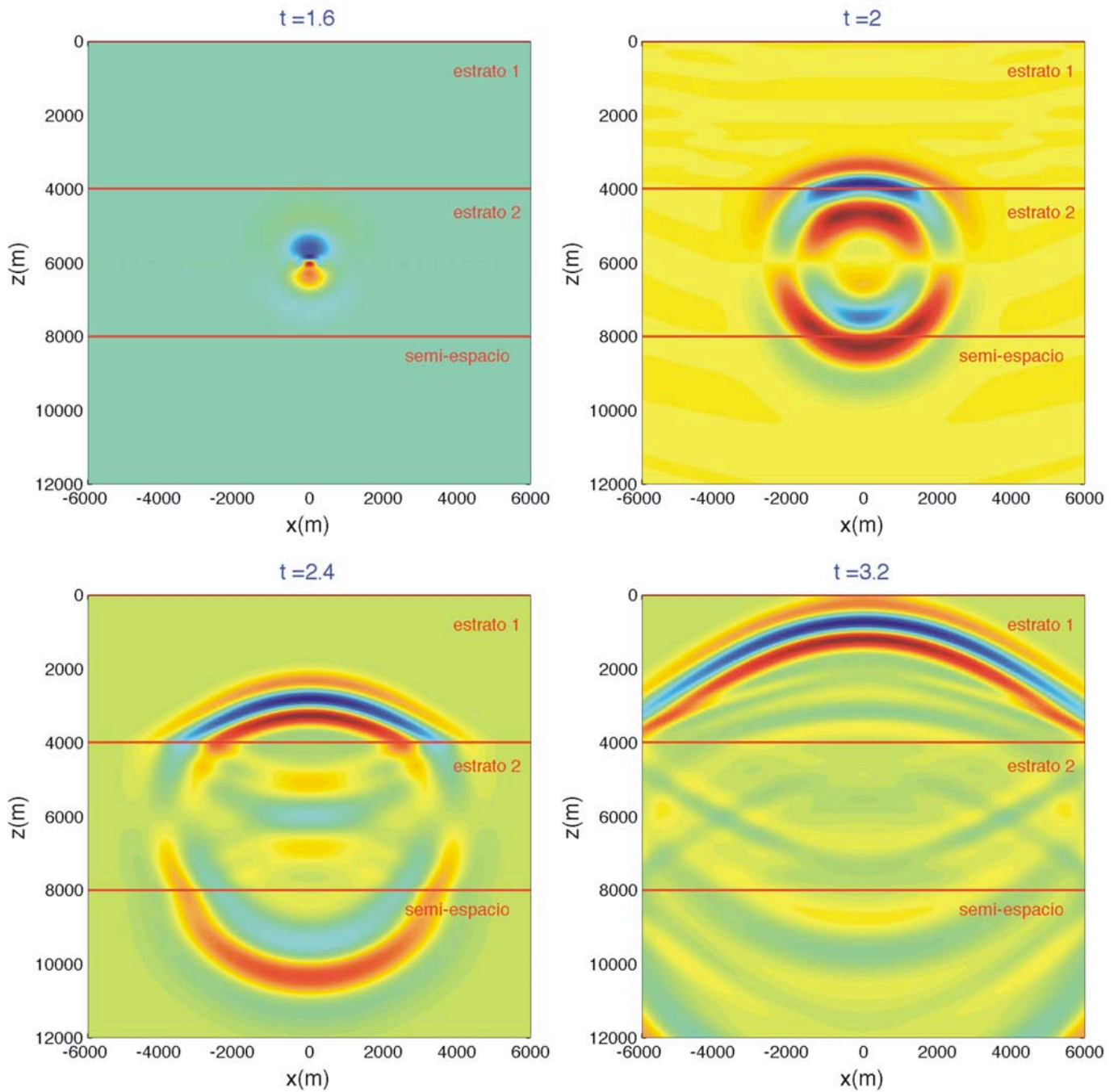


Figura V.4.11 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (w), debido a la aplicación de una fuerza dipolar impulsiva (explosión) ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio. En el instante $t = 1.6s$ se pueden observar dos lóbulos de polaridad alternante que conforme avanza el tiempo crecen como arcos principalmente sobre el estrato 2 en dirección del eje z . En el tiempo $t = 3.2s$ se puede apreciar la llegada de los frentes de onda (P y S_p) a la superficie libre, mientras que en el estrato 2 se pueden apreciar los frentes de onda reflejados en las bases de los estratos 1 y 2.

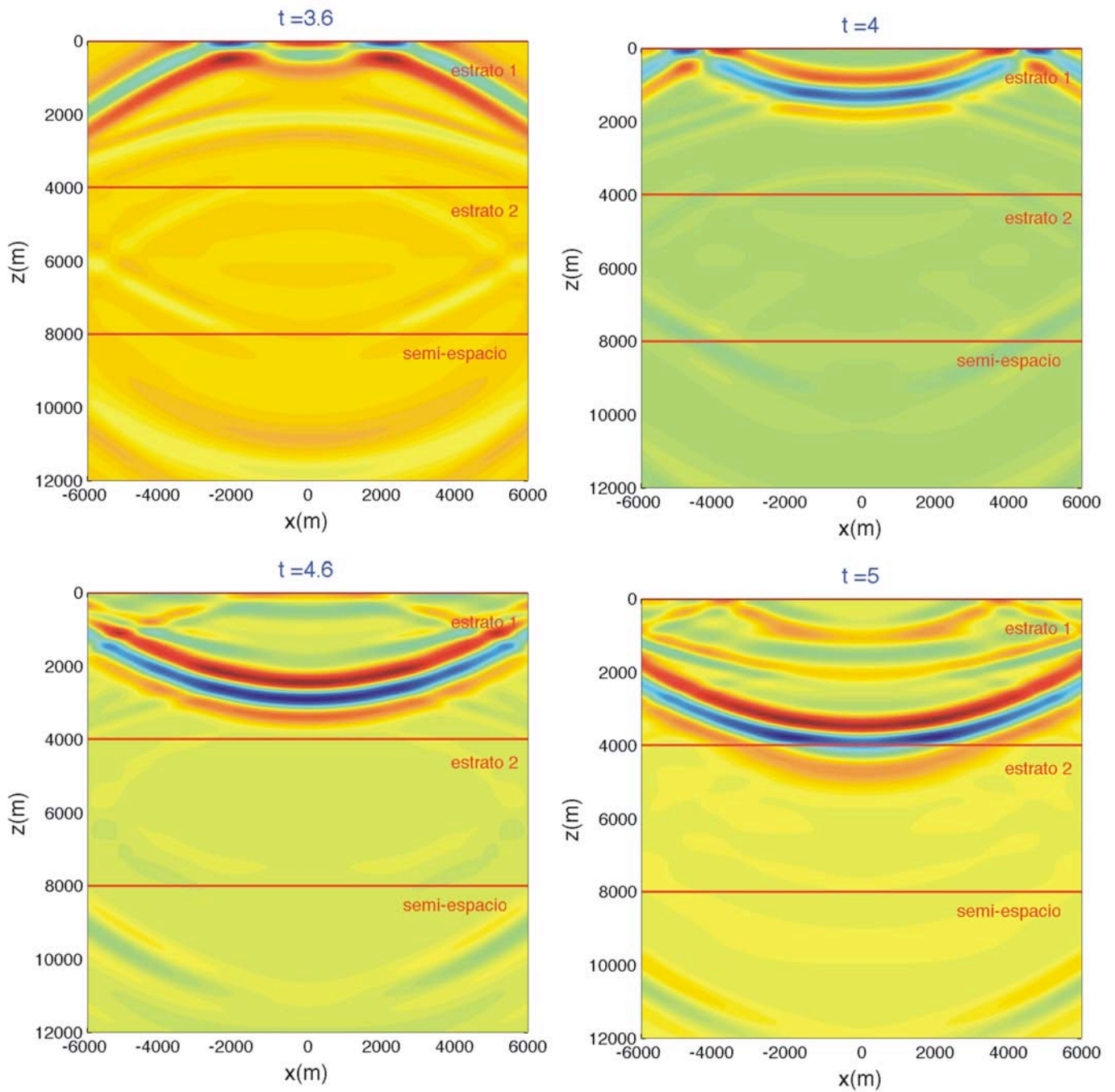


Figura V.4.12 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (w), debido a la aplicación de una fuerza dipolar impulsiva (explosión) ubicada en el centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio. En el instante $t = 3.6s$ se pueden observar el frente de onda de la fase P que avanza sobre la superficie libre así otro frente que esta aproximadamente a la mitad del estrato que se asocia a la onda convertida S_p .

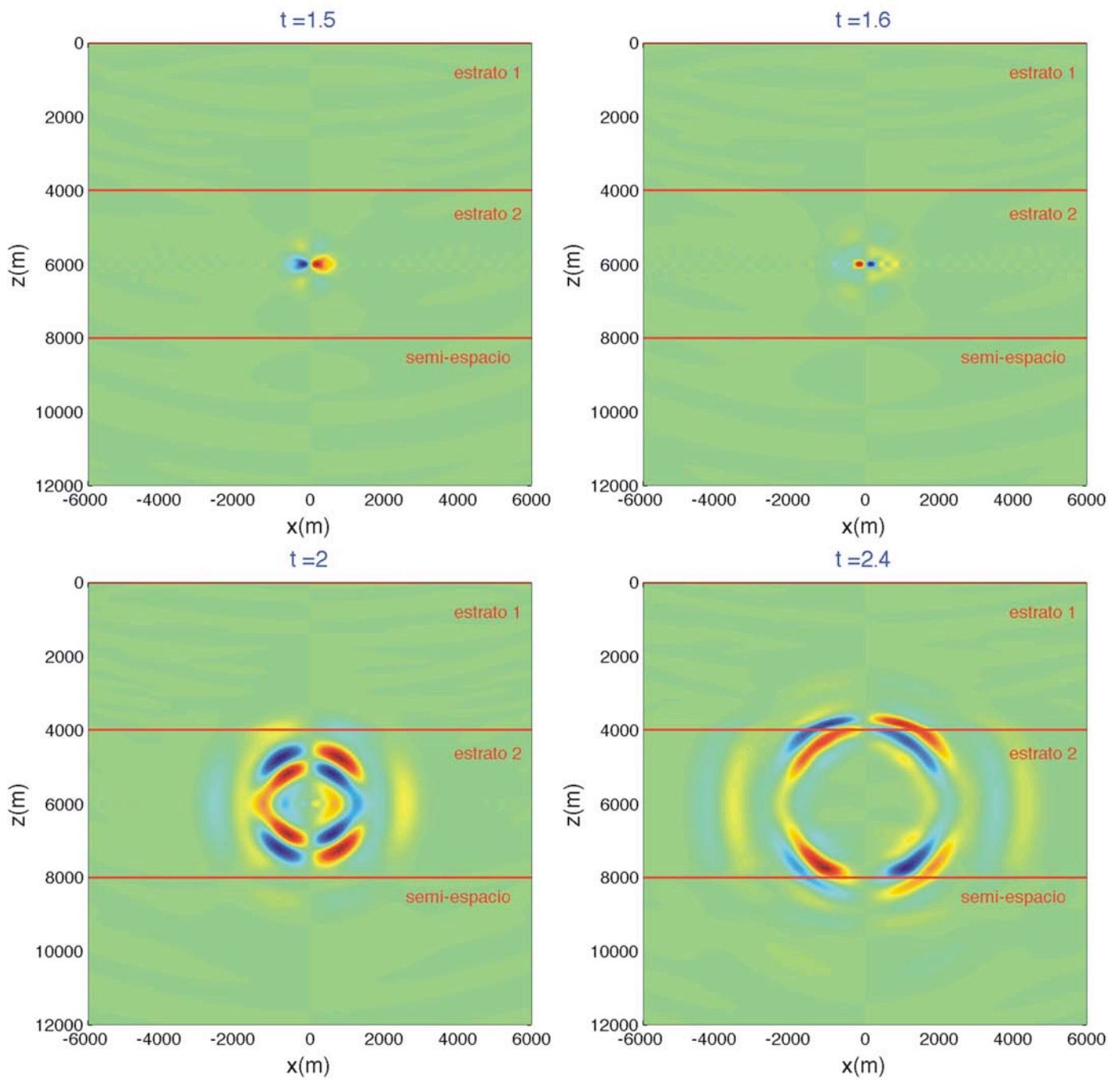


Figura V.4.13 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (u), debido a una dislocación de una falla normal con echado de 45° ubicada al centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio.

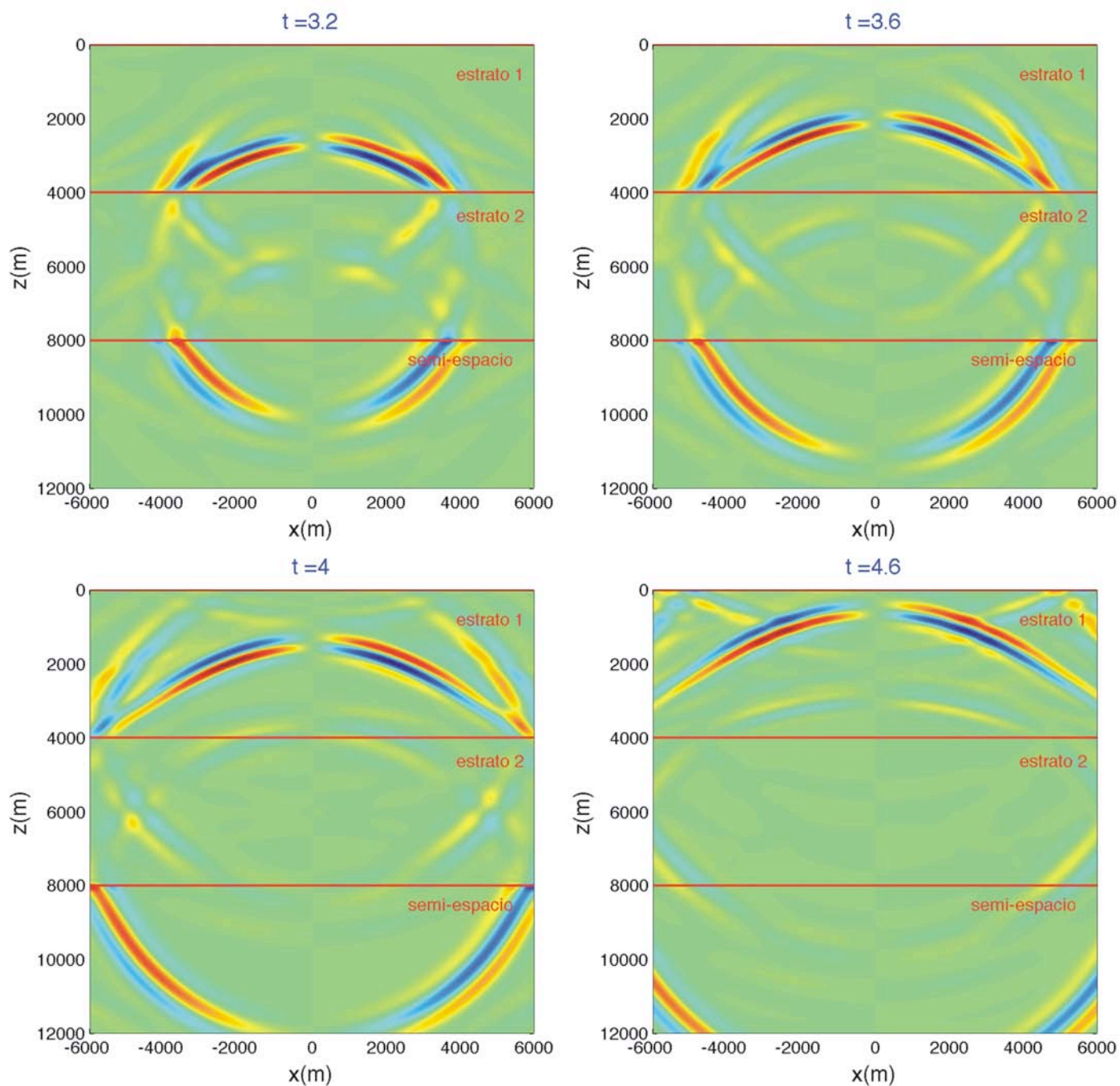


Figura V.4.14 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (W), debido a una dislocación de una falla normal con echado de 45° ubicada al centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio.

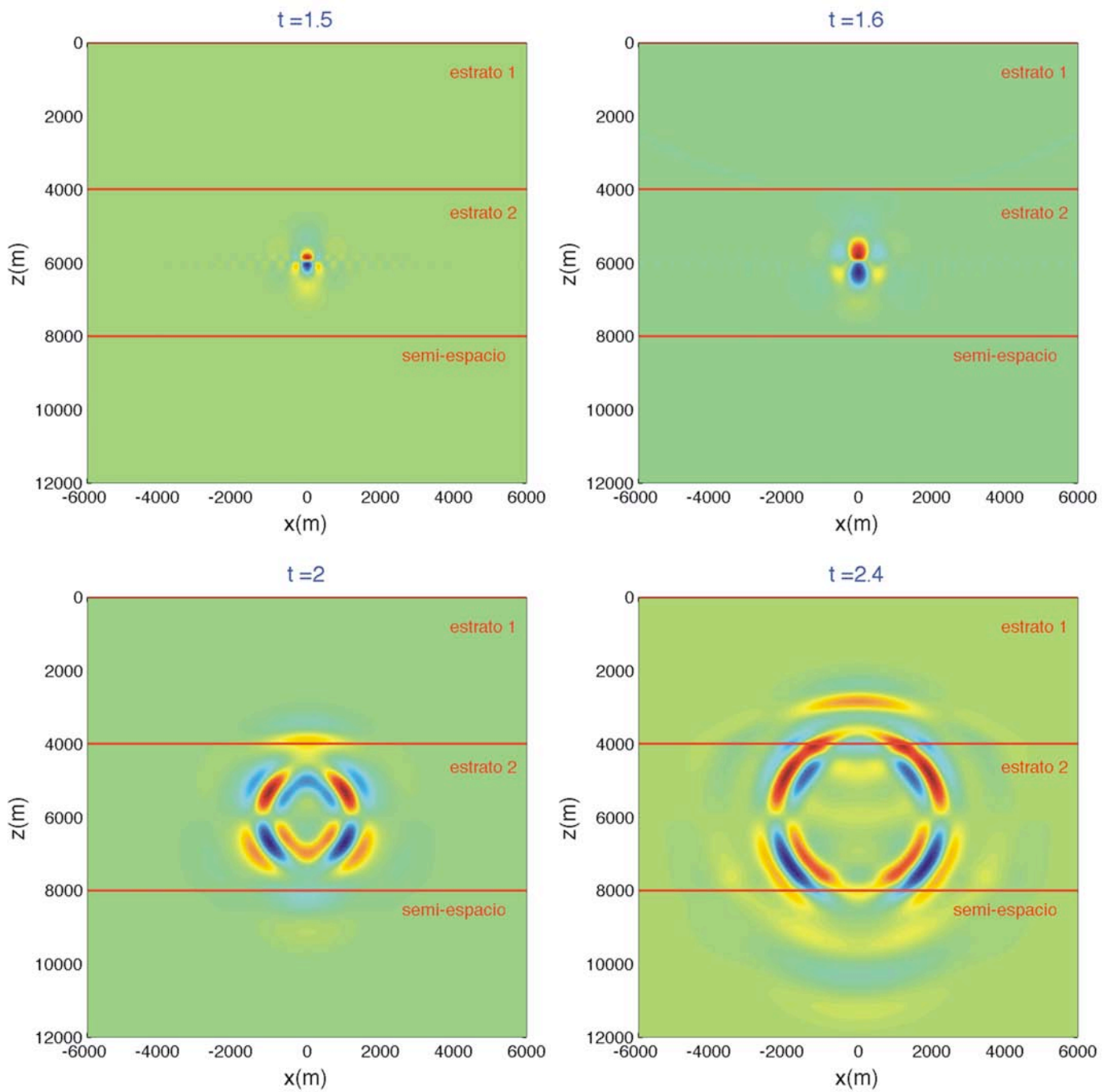


Figura V.4.15 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (W), debido a una dislocación de una falla normal con echado de 45° ubicada al centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio.

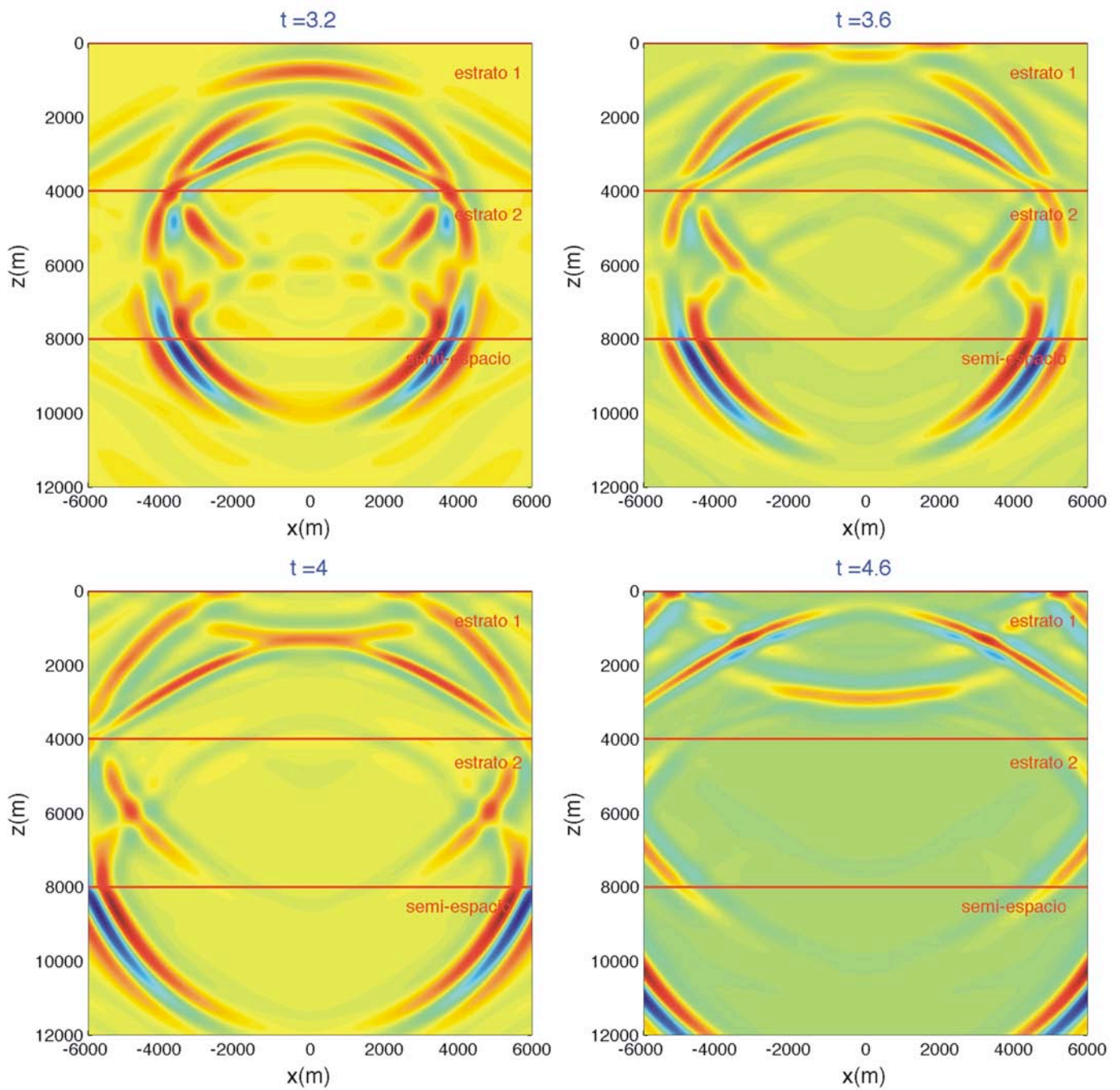


Figura V.4.16 Secuencia de imágenes que representan la propagación de ondas en un medio estratificado de dos capas y un semi-espacio en la dirección (W), debido a una dislocación de una falla normal con echado de 45° ubicada al centro de la imagen. La parte superior de las imágenes corresponde con la superficie libre de esfuerzos. La parte inferior al semi-espacio.

VI Conclusiones

Se ha mostrado como obtener sismogramas sintéticos en un medio estratificado, formado por estratos elástico homogéneos e isótropos en un espacio bidimensional utilizando de manera conjunta los métodos de la matriz global y del número de onda discretizado en los casos escalar y vectorial respectivamente. Se validaron los sismogramas sintéticos utilizando las soluciones analíticas de las funciones de Green en términos de funciones de Hankel. Se reconoce que en la vecindad de la fuente la convergencia en el método del número de onda discretizado está directamente ligada con el número de términos en la sumatoria. Esto se debe principalmente a la naturaleza del desarrollo de la fuente mediante ondas planas. Se identificaron los elementos que conforman la matriz global para el caso de ondas SH y P-SV y se sentaron las bases construir una matriz dado un número indefinido de estratos. Se da cuenta de los posibles problemas que se pueden presentarse al invertir esta matriz cuando es singular. Se hace énfasis que se puede aprovechar la estructura de la matriz bandeada para reducir el número de operaciones al invertirla. Finalmente se obtuvieron sismogramas sintéticos utilizando cinco tipos de fuente construidas a partir de funciones de Green elementales y compuestas las cuales permitieron identificar algunas fases sísmicas. Para el caso de los snapshot se pudo seguir con detalle el campo de desplazamiento en lapso de tiempo permitiendo conocer un poco de física de la fuente.

La investigación realizada hasta este momento conduce de manera natural a abordar otros temas de interés dentro del campo de la sismología como, por ejemplo, si igualamos el determinante de la matriz global a cero su solución puede conducir a determinar las curvas de dispersión para ondas superficiales. Con este método es posible generar pseudo-sismogramas de reflexión calculando la señal temporal de un receptor localizado en la fuente misma. Estos pseudo-sismogramas de reflexión permitirían hacer inversión para encontrar perfiles de velocidad. Otra línea para desarrollos futuros es considerar el problema tridimensional para la generación de sismogramas de sintéticos con fines de ingeniería.

Referencias

- Achebach J. D. 1982.** Wave Propagation in Elastic Solids, North Hollan Amsterdam.
- Aki K. and Richard P. G., 1980.** Quantitative Seismology, Freeman and Co., San Francisco.
- Ben-Menehem and Singh S. J. 1981.** Seismic Waves and Sources, Dover.
- Bouchon M. and Aki K., 1977.** Discrete wave-number Representation of seismic-source wave fiels. Bull. Seism. Soc. Am., 67 N. 2 pp 259-277.
- Bouchon M., 2003.** A review of the Discrete Wavenumber Method. Pure and Applied Geophys. 160, pp 445-465.
- Bullen K. E. and Bolt B., 1985.** An Introduction to the Theory of Seismology, Cambridge University Press.
- Haskell N. A. 1953.** Dispersion of surface waves on multi-layered media. Bull. Seism. Soc. Am., 43, pp 17-34.
- Hudson J. A., 1980.** The Excitation and Propagation of Elastic Waves, Cambridge University Press.
- Kennett B. L. N. 1983.** Seismic Wave Propagation in Stratified Media, Cambridge University Press.
- Lamb H. 1904.** On the Propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A 203 pp1-42.

ANEXO 1

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \mu_1 \eta_1 \exp(-i\eta_1 H_1) \\
A_{23} &= -\mu_2 \eta_2 \exp(-i\eta_2 H_2) \\
A_{12} &= -\mu_1 \eta_1 \\
A_{24} &= \mu_2 \eta_2 \\
A_{45} &= \mu_3 \eta_3 \\
A_{21} &= \mu_1 \eta_1 \\
A_{43} &= \mu_2 \eta_2 \\
A_{22} &= -\mu_1 \eta_1 \exp(-i\eta_1 H_1) \\
A_{44} &= -\mu_2 \eta_2 \exp(-i\eta_2 H_2) \\
A_{31} &= 1.0 \\
A_{53} &= 1.0 \\
A_{32} &= \exp(-i\eta_1 H_1) \\
A_{54} &= \exp(-i\eta_2 H_2) \\
A_{34} &= -1.0 \\
A_{55} &= -1.0 \\
A_{33} &= -\exp(-i\eta_2 H_2) \\
A_{13} &= 0.0 \\
A_{14} &= 0.0 \\
A_{15} &= 0.0 \\
A_{35} &= 0.0 \\
A_{25} &= 0.0 \\
A_{51} &= 0.0 \\
A_{52} &= 0.0 \\
A_{41} &= 0.0 \\
A_{42} &= 0.0
\end{aligned}$$

Figura 1 Elementos de la matriz global para un medio de dos capas y un semi-espacio caso SH donde μ es el módulo de rigidez del medio, η es el número de onda vertical y H es el espesor del estrato.

ANEXO 2

$A_{1,1} = -(\lambda_1 + 2\mu_1)\gamma_1^2 \exp(-i\gamma_1 h_1) - \lambda_1 k^2 \exp(-i\gamma_1 h_1)$	
$A_{1,2} = -(\lambda_1 + 2\mu_1)\gamma_1^2 - \lambda_1 k^2$	
$A_{1,3} = (\lambda_1 + 2\mu_1)k\nu_1 \exp(-i\nu_1 h_1) - \lambda_1 k\nu_1 \exp(-i\nu_1 h_1)$	Esfuerzo σ_{zz}
$A_{1,4} = -(\lambda_1 + 2\mu_1)k\nu_1 + \lambda_1 k\nu_1$	
$A_{2,1} = 2\mu_1 k\gamma_1 \exp(-i\gamma_1 h_1)$	
$A_{2,2} = -2\mu_1 k\gamma_1$	Esfuerzo σ_{zx}
$A_{2,3} = \mu_1(\nu_1^2 - k^2) \exp(-i\nu_1 h_1)$	
$A_{2,4} = \mu_1(\nu_1^2 - k^2)$	
$A_{3,5} = -\left((\lambda_2 + 2\mu_2)\gamma_2^2 \exp(-i\gamma_2 h_2) - \lambda_2 k^2 \exp(-i\gamma_2 h_2) \right)$	
$A_{3,6} = -\left((\lambda_2 + 2\mu_2)\gamma_2^2 - \lambda_2 k^2 \right)$	Esfuerzo σ_{zz}
$A_{3,7} = -\left((\lambda_2 + 2\mu_2)k\nu_2 \exp(-i\nu_2 h_2) - \lambda_2 k\nu_2 \exp(-i\nu_2 h_2) \right)$	
$A_{3,8} = -\left(-(\lambda_2 + 2\mu_2)k\nu_2 + \lambda_2 k\nu_2 \right)$	
$A_{4,5} = -\left(2\mu_2 k\gamma_2 \exp(-i\gamma_2 h_2) \right)$	
$A_{4,6} = -\left(-2\mu_2 k\gamma_2 \right)$	Esfuerzo σ_{zx}
$A_{4,7} = -\left(\mu_2(\nu_2^2 - k^2) \exp(-i\nu_2 h_2) \right)$	
$A_{4,8} = -\left(\mu_2(\nu_2^2 - k^2) \right)$	
$A_{7,9} = -\left((\lambda_3 + 2\mu_3)\gamma_3^2 - \lambda_3 k^2 \right)$	Esfuerzo σ_{zz}
$A_{7,10} = -\left(-(\lambda_3 + 2\mu_3)k\nu_3 + \lambda_3 k\nu_3 \right)$	
$A_{8,9} = -\left(-2\mu_3 k\gamma_3 \right)$	
$A_{8,10} = -\left(\mu_3(\nu_3^2 - k^2) \right)$	Esfuerzo σ_{zx}

Figura 1 Elementos de la matriz global correspondientes a esfuerzos donde λ y μ son las constantes de lamé y k , γ y ν son los números de onda horizontal y vertical de ondas P y S respectivamente y h el espesor del estrato.

$A_{3,1} = -(\lambda_1 + 2\mu_1)\gamma_1^2 - \lambda_1 k^2$	Esfuerzo σ_{zz}
$A_{3,2} = -(\lambda_1 + 2\mu_1)\gamma_1^2 \exp(-i\gamma_1 h_1) - \lambda_1 k^2 \exp(-i\gamma_1 h_1)$	
$A_{3,3} = (\lambda_1 + 2\mu_1)k\nu_1 - \lambda_1 k\nu_1$	
$A_{3,4} = -(\lambda_1 + 2\mu_1)k\nu_1 \exp(-i\nu_1 h_1) + \lambda_1 k\nu_1 \exp(-i\nu_1 h_1)$	
$A_{4,1} = 2\mu_1 k\gamma_1$	Esfuerzo σ_{zx}
$A_{4,2} = -2\mu_1 k\gamma_1 \exp(-i\gamma_1 h_1)$	
$A_{4,3} = \mu_1(\nu_1^2 - k^2)$	
$A_{4,4} = \mu_1(\nu_1^2 - k^2) \exp(-i\nu_1 h_1)$	
$A_{7,5} = -(\lambda_2 + 2\mu_2)\gamma_2^2 - \lambda_2 k^2$	Esfuerzo σ_{zz}
$A_{7,6} = -(\lambda_2 + 2\mu_2)\gamma_2^2 \exp(-i\gamma_2 h_2) - \lambda_2 k^2 \exp(-i\gamma_2 h_2)$	
$A_{7,7} = (\lambda_2 + 2\mu_2)k\nu_2 - \lambda_2 k\nu_2$	
$A_{7,8} = -(\lambda_2 + 2\mu_2)k\nu_2 \exp(-i\nu_2 h_2) + \lambda_2 k\nu_2 \exp(-i\nu_2 h_2)$	
$A_{8,5} = 2\mu_2 k\gamma_2$	Esfuerzo σ_{zx}
$A_{8,6} = -2\mu_2 k\gamma_2 \exp(-i\gamma_2 h_2)$	
$A_{8,7} = \mu_2(\nu_2^2 - k^2)$	
$A_{8,8} = \mu_2(\nu_2^2 - k^2) \exp(-i\nu_2 h_2)$	

Figura 2 Elementos de la matriz global correspondientes a esfuerzos donde λ y μ son las constantes de lamé y k , γ y ν son los números de onda horizontal y vertical de ondas P y S respectivamente y h el espesor del estrato.

$A_{5,5} = ik \exp(-i\gamma_2 h_2)$	Desplazamiento u_1
$A_{5,6} = ik$	
$A_{5,7} = i\nu_2 \exp(-i\nu_2 h_2)$	
$A_{5,8} = -i\nu_2$	
$A_{6,5} = -i\gamma_2 \exp(-i\gamma_2 h_2)$	Desplazamiento u_3
$A_{6,6} = i\gamma_2$	
$A_{6,7} = ik \exp(-i\nu_2 h_2)$	
$A_{6,8} = ik$	
$A_{9,9} = ik$	Desplazamiento u_1
$A_{9,10} = -i\nu_3$	
$A_{10,9} = i\gamma_3$	Desplazamiento u_3
$A_{10,10} = ik$	

Figura 3 Elementos de la matriz global correspondientes a desplazamientos donde λ y μ son las constantes de lamé y k , γ y ν son los números de onda horizontal y vertical de ondas P y S respectivamente y h el espesor del estrato.

$A_{5,1} = -ik$	Desplazamiento u_1
$A_{5,2} = -ik \exp(-i\gamma_1 h_1)$	
$A_{5,3} = -i\nu_1$	
$A_{5,4} = i\nu_1 \exp(-i\nu_1 h_1)$	
$A_{6,1} = i\gamma_1$	Desplazamiento u_3
$A_{6,2} = -i\gamma_1 \exp(-i\gamma_1 h_1)$	
$A_{6,3} = -ik$	
$A_{6,4} = -ik \exp(-i\nu_1 h_1)$	
$A_{9,5} = -ik$	Desplazamiento u_1
$A_{9,6} = -ik \exp(-i\gamma_2 h_2)$	
$A_{9,7} = -i\nu_2$	
$A_{9,8} = i\nu_2 \exp(-i\nu_2 h_2)$	Desplazamiento u_3
$A_{10,5} = i\gamma_2$	
$A_{10,6} = -i\gamma_2 \exp(-i\gamma_2 h_2)$	
$A_{10,7} = -ik$	
$A_{10,8} = -ik \exp(-i\nu_2 h_2)$	

Figura 4 Elementos de la matriz global correspondientes a desplazamientos donde λ y μ son las constantes de lamé y k , γ y ν son los números de onda horizontal y vertical de ondas P y S respectivamente y h el espesor del estrato.

ANEXO 3

$$B_{1,1} = 0.0$$

$$B_{2,1} = 0.0$$

$$B_{3,1} = \left(-(\lambda_2 + 2\mu_2)ik\gamma_2 - \frac{i\lambda_2 k^3}{\gamma_2}\right) \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + \left((\lambda_2 + 2\mu_2)ik\nu_2 - i\lambda_2 k\nu_2\right) \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{4,1} = 2\mu_2 ik^2 \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + i\mu_2(\nu_2^2 - k^2) \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{5,1} = \frac{k^2}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + \nu_2 \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{6,1} = -k \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + k \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B_{7,1} = \left((\lambda_2 + 2\mu_2)ik\gamma_2 + \frac{i\lambda_2 k^3}{\gamma_2}\right) \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + \left(-(\lambda_2 + 2\mu_2)ik\nu_2 + i\lambda_2 k\nu_2\right) \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

$$B_{8,1} = 2\mu_2 ik^2 \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + i\mu_2(\nu_2^2 - k^2) \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

$$B_{9,1} = -\frac{k^2}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) - \nu_2 \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

$$B_{10,1} = -k \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + k \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

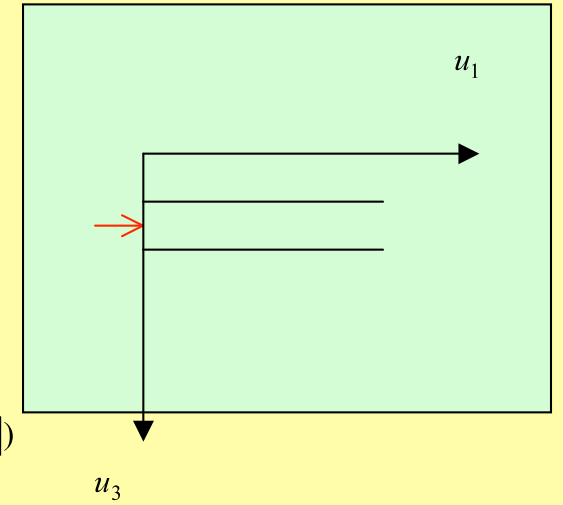


Figura 1 Vector términos independientes relacionado con las condiciones de frontera para una **fuerza horizontal** en un medio de dos capas y un semi-espacio donde λ y μ son las constantes de lamé y k , γ y ν son los números de onda horizontal y vertical de ondas P y S respectivamente y h el espesor del estrato.

$$B_{1,1} = 0.0$$

$$B_{2,1} = 0.0$$

$$B_{3,1} = (k^2 + \gamma_2^2)\gamma_2 \left((\lambda_2 + 2\mu_2) + \frac{\lambda_2 k^2}{\gamma_2^2} \right) \exp(-i\gamma_2 |z_1 - z_F|)$$

$$B_{4,1} = -2\mu_2 k(k^2 + \gamma_2^2) \exp(-i\gamma_2 |z_1 - z_F|)$$

$$B_{5,1} = \frac{ik(k^2 + \gamma_2^2)}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2 |z_1 - z_F|)$$

$$B_{6,1} = -i(k^2 + \gamma_2^2) \exp(-i\gamma_2 |z_1 - z_F|)$$

$$B_{7,1} = - \left((k^2 + \gamma_2^2)\gamma_2 \left((\lambda_2 + 2\mu_2) + \frac{\lambda_2 k^2}{\gamma_2^2} \right) \right) \exp(-i\gamma_2 |z_2 - z_F|)$$

$$B_{8,1} = - \left(2\mu_2 k(k^2 + \gamma_2^2) \right) \exp(-i\gamma_2 |z_2 - z_F|)$$

$$B_{9,1} = \frac{-ik(k^2 + \gamma_2^2)}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2 |z_2 - z_F|)$$

$$B_{10,1} = -i(k^2 + \gamma_2^2) \exp(-i\gamma_2 |z_2 - z_F|)$$

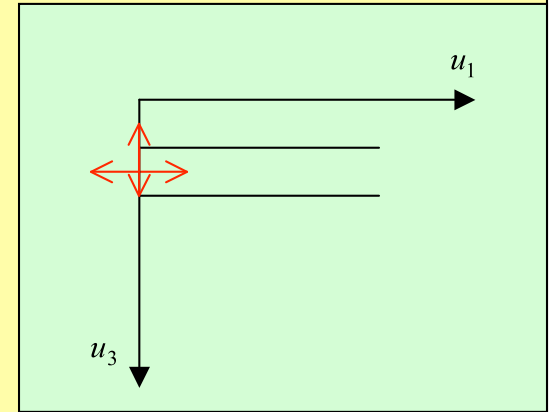


Figura 2 Vector términos independientes relacionado con las condiciones de frontera de dos pares de fuerzas dipolares horizontal y vertical respectivamente, en un medio de dos capas y un semi-espacio.

$$B(1,1) = 0.0$$

$$B(2,1) = 0.0$$

$$B(3,1) = \left((\lambda_2 + 2\mu_2)i\gamma_2^2 + \lambda_2 ik^2 \right) \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + \left((\lambda_2 + 2\mu_2)ik^2 - \lambda_2 ik^2 \right) \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(4,1) = -2\mu_2 ik\gamma_2 \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + ik\left(v_2 - \frac{k^2}{v_2}\right) \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(5,1) = -k \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + k \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(6,1) = \gamma_2 \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + \frac{k^2}{v_2} \exp(-iv_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(7,1) = -\left((\lambda_2 + 2\mu_2)i\gamma_2^2 - ik^2\lambda_2 \right) \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) - \left((\lambda_2 + 2\mu_2)ik^2 + \lambda_2 ik^2 \right) \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

$$B(8,1) = 2\mu_2 ik\gamma_2 \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) - \frac{ik\mu_2(v_2 - k^2)}{v_2} \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

$$B(9,1) = -k \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + k \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

$$B(10,1) = -\gamma_2 \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) - \frac{k^2}{v_2} \exp(-iv_2|z_2 - z_F|)$$

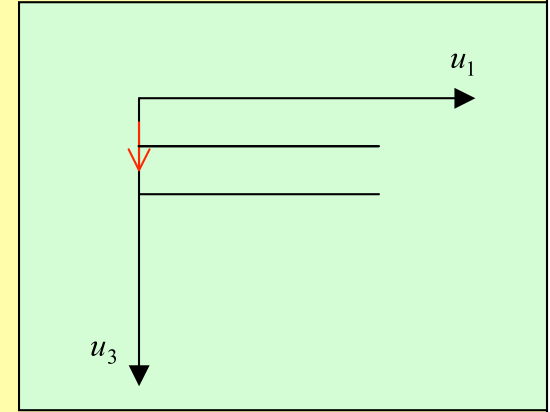


Figura 3 Vector términos independientes relacionado con las condiciones de frontera para una **fuerza vertical**, en un medio de dos capas y un semi-espacio donde λ y μ son las constantes de lamé y k , γ y v son los números de onda horizontal y vertical de ondas P y S respectivamente y h el espesor del estrato.

$$B(1,1) = 0.0$$

$$B(2,1) = 0.0$$

$$B(3,1) = \left((\lambda_2 + 2\mu_2)\gamma_2(k^2 - \gamma_2^2) + \frac{\lambda_2 k^2(k^2 - \gamma_2^2)}{\gamma_2} \right) \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + \left(-(\lambda_2 + 2\mu_2)2k^2\nu_2 + \lambda_2 k^2\nu_2 \right) \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(4,1) = -\mu_2 2k(k^2 - \gamma_2^2) \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + 2\mu_2(k^3 - k\nu_2^2) \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(5,1) = \frac{ik(k^2 - \gamma_2^2)}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + i2k\nu_2 \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(6,1) = -i(k^2 - \gamma_2^2) \exp(-i\gamma_2|z_1 - z_F|) + 2ik^2 \exp(-i\nu_2|z_1 - z_F|)$$

$$B(7,1) = -\left((\lambda_2 + 2\mu_2)(k^2 - \gamma_2^2)\gamma_2 + \frac{\lambda_2 k^2(k^2 - \gamma_2^2)}{\gamma_2} \right) \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) - \left((\lambda_2 + 2\mu_2)2\nu_2 k^2 + 2\lambda_2 \nu_2 k^2 \right) \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

$$B(8,1) = 2\mu_2 k(k^2 - \gamma_2^2) \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + 2(-k^3 + k\nu_2^2) \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

$$B(9,1) = \frac{-ik(k^2 - \gamma_2^2)}{\gamma_2} \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) - 2ik\nu_2 \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

$$B(10,1) = -i(k^2 - \gamma_2^2) \exp(-i\gamma_2|z_2 - z_F|) + 2ik^2 \exp(-i\nu_2|z_2 - z_F|)$$

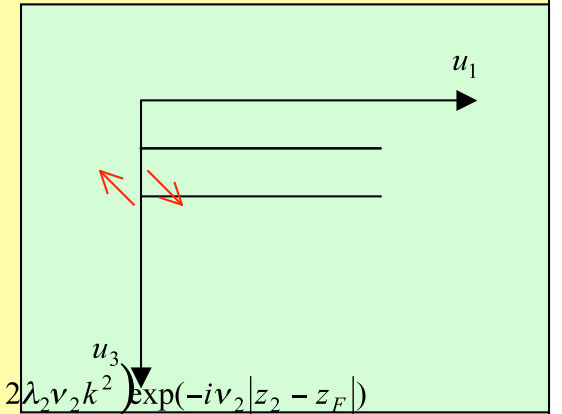


Figura 4 Vector términos independientes relacionado con las condiciones de frontera para un **doble par de fuerzas**, en un medio de dos capas y un semi-espacio donde λ y μ son las constantes de lamé y k , γ y ν son los números de onda horizontal y vertical de ondas P y S respectivamente y h el espesor del estrato.