



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS MATEMÁTICAS DE LOS
MECANISMOS ARTICULADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

ESTEBAN RUBÉN HURTADO CRUZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. MANUEL JESÚS FALCONI MAGAÑA

MÉXICO, D.F.

MARZO, 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Al Dr. Manuel Falconi Magaña por su infinita paciencia y por todo el apoyo que me ha brindado tanto para la elaboración de este trabajo, como por compartir conmigo gran parte de su experiencia profesional

Al Dr. Carlos Hernandez Garciadiego por todo el apoyo que me ha brindado a lo largo de mi formación profesional y por que siempre que lo busco lo encuentro

Al M. en C. Wilfrido Martinez Torres quien me ha brindado la oportunidad de trabajar juntos en diferentes proyectos y de quien he aprendido mucho

Al M. en C. Francisco Struck Chavez por sus valiosos comentarios de mi trabajo

Al M. en C. José Antonio Gomez Ortega por sus valiosos comentarios de mi trabajo y por compartir conmigo mucha de su experiencia profesional

A mi querida esposa Leticia Martínez Aguilar quien ha estado conmigo en las buenas y en las malas y quien siempre me empujo a concluir esta etapa de mi formación profesional y a quien debo mucho de lo que soy y he logrado

A mis tesoros Alberto Ivan, Ruben Eduardo y Fernando ya que ellos son el motor de mi vida

A mis Padres Guadalupe Cruz y Rubén Hurtado por darme la vida y siempre apoyarme en todo lo que me propongo

A mis hermanos Nora, Araceli, Diana, Mauricio, Omar y José Luis siempre que los necesito ahí estan

A mi amigo Enrique Enciso por la gran amistad que nos une y por todos esos momentos que hemos compartido juntos

A mis estimados amigos y colegas M. en C. Hector Argueta y M. en C. Juanita Linares ya que nunca dejo de aprender de ellos y a quienes admiro mucho

A la M. en I. Rocio Avila por darme la oportunidad de trabajar en la Facultad de Ingeniería y por compartir conmigo otros aspectos de la matemática y su enseñanza

A todas aquellas personas familiares, amigos y colegas que me brindan su apoyo y cariño y que involuntariamente no mencione

Dedicatoria

Dedico este trabajo a JESÚS quien ha sido mi amigo mi padre mi hermano todo para mi, y a quien dia a dia le agradezco por permitirme vivir otro dia más, la salud, el trabajo, el sustento, el abrigo, la hermosa oportunidad de ser esposo, la maravillosa responsabilidad de ser padre y por que el sabe cuanto trabajo nos costo terminar este proyecto. Gracias JESÚS por no abandonarme nunca y por que siempre has creído en mi. GRACIAS PADRE MIO

Índice general

1. Introducción	7
2. Antecedentes	11
3. Teorema de Kempe	23
4. Construcción de Mecanismos aplicando el Teorema de Kempe	33
5. Mecanismo de Kempe para trazar una línea recta	37
6. Errores en la prueba de Kempe	45
7. Construcción de Kempe vs otras construcciones	55
8. Mecanismos de 2 y 3 barras	61
9. Una Generalización del Teorema de Kempe	79

Capítulo 1

Introducción

Mecanismo Articulado.-Es un aparato mecánico que consiste en barras rígidas metálicas (ver figura 1.1) que se pueden unir con ejes en sus extremos o a lo largo de la barra, que les permiten girar libremente.

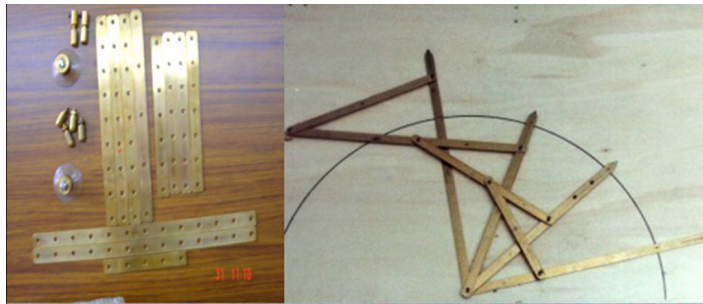


Figura 1.1: Mecanismo Articulado

Los primeros trabajos sobre los mecanismos articulados fueron motivados por el diseño de locomotoras. El objetivo era construir un dispositivo que convirtiera un movimiento lineal del pistón en el movimiento circular de una rueda (ver figura 1.2). Uno de esos intentos fue el descubrimiento de James Watt que ahora se conoce como "Paralelogramo de Watt", creado para resolver el problema de unir el pistón de su máquina de vapor con un punto de un volante, de forma que la rotación del volante hiciese mover el pistón en línea recta.

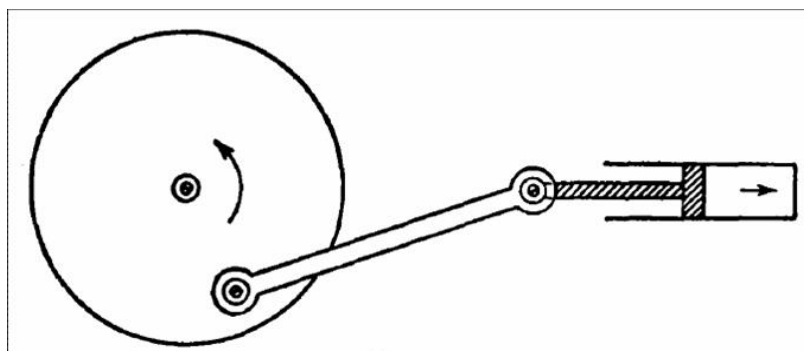


Figura 1.2: Mecanismo de Watt

La solución de Watt es sólo aproximada, y pese a los esfuerzos de muchos matemáticos de ese tiempo, el problema de construir un mecanismo articulado que hiciera mover un punto precisamente en línea recta, permaneció sin resolver durante un buen tiempo.

Los instrumentos de dibujo han sido considerados en los tratados de la geometría desde tiempos de Euclides cuyos primeros postulados implícitamente definen el tipo de instrumentos que se permiten en las construcciones geométricas. Otros instrumentos de dibujo (y curvas) además de la regla y el compás fueron conocidos en la época de Euclides, sin que fueran aceptados como herramientas teóricas (e.g. la concoide de Nicomedes). Estos instrumentos se utilizaron principalmente para resolver los problemas prácticos. Por ejemplo, por medio de la concoide es posible encontrar las medias proporcionales de dos longitudes dadas y entonces, construir un cubo que está en una proporción dada a otro cubo. Esto se usó para determinar un conjunto de pesas que permitieran lanzar los proyectiles de la catapulta a la distancia deseada. En la época clásica, las curvas se estudiaron en forma específica; cada una por sí misma. Se obtenían por medio de la generación puntual o haciendo su trazo a través de un mecanismo. Esta situación permaneció así hasta el siglo XVII, cuando el grupo de curvas creció inmensamente y se agregaron nuevos métodos de generación y descripción. Descartes, como la mayoría de los científicos de su época, se involucró profundamente en el estudio de mecanismos con propósitos prácticos o teóricos. La meta de Descartes estaba relacionada con los fundamentos de la geometría: si una curva (e.g. una cónica o una concoide) se va a aceptar como una herramienta para resolver los problemas geométricos, se debe estar seguro que bajo ciertas condiciones, los puntos de intersección de dos tales curvas existen. La generación puntual no fue sufi-

ciente y se tuvo que recurrir a la idea del continuo. En el siglo XVII y XVIII se escribieron innumerables tratados sobre Geometría Orgánica; Newton, y van Shooten, entre otros). Es por esta época que surge el concepto de curva algebraica. En el estudio de esta geometría orgánica se encuentran las raíces de algunos conceptos básicos de la geometría moderna:

- 1) el concepto de sistema de coordenadas,
- 2) el concepto de función,
- 3) el concepto de parametrización de curva algebraica.

Hacia el siglo XIX se genera un nuevo punto de vista. En lugar de estudiar en forma individual a los instrumentos de trazo se inicia una teoría general de ellos y en especial de los mecanismos articulados. Dos preguntas importantes surgieron:

- 1) ¿Qué tipo de curvas se pueden dibujar con un sistema articulado de n barras.

Una breve respuesta a esta pregunta sería la siguiente:

Todo sistema articulado con un grado de libertad que realice en el plano el trazo de una curva que no sea una circunferencia, tiene necesariamente al menos 2 puntos fijos, que precisan la orientación del aparato en el plano del dibujo; tomaremos como centro de coordenadas uno de esos puntos O , el segundo A , será tomado como punto de abscisa $+1$ sobre el eje de las X ; el eje OY es perpendicular a OX ; y escogamos como parámetro independiente, para caracterizar cada configuración del sistema, un ángulo θ .

El punto trazador considerado M , unido a una de las varillas describe una curva (T) cuya ecuación es la relación entre la abscisa $\overline{OH} = x$ y la ordenada $\overline{HM} = y$. Donde H es la proyección del punto M sobre la curva al eje X y entonces la coordenada X es OH y la coordenada Y es HM .

las relaciones entre x, y, θ se obtienen por resoluciones de triángulos, relaciones donde intervienen algebraicamente las longitudes de las varillas x e y y las razones trigonométricas de θ . Después de la eliminación de θ se obtiene una relación $f(x, y) = 0$, algebraica en x e y , donde los coeficientes del polinomio f son funciones algebraicas de las longitudes de las varillas.

Así el aparato sólo traza curvas algebraicas. El hecho de que disponemos para construir el instrumento, de un número de varillas tan grande como se quiera no excluye a priori la posibilidad de que no se puedan trazar más que una clase particular de curvas algebraicas.

- 2) Dicho de otra forma ¿toda curva algebraica se puede trazar con un mecanismo articulado?.

En esta dirección, en 1876 A.B. Kempe en [1], demostró que toda curva

algebraica se puede trazar (localmente) con un mecanismo articulado. De hecho, dada una curva algebraica Kempe da un algoritmo para diseñar el mecanismo articulado que la traza.

Lo anterior daría respuesta a la pregunta ¿Que mecanismo articulado dibuja una curva dada? y entonces quedaría por responder la cuestión de la unicidad de dicho mecanismo

Actualmente, las preguntas (1) y (2) se han convertido en el problema de lograr que un robot trace una trayectoria deseada y el estudio de los mecanismos articulados abstractos y su construcción en el estudio de variedades algebraicas e inmersión de subvariedades en espacios euclidianos.

En este trabajo, revisamos la demostración del teorema de Kempe en el capítulo 3, en el capítulo 4, a partir del algoritmo de Kempe mostramos como podemos construir un mecanismo articulado de un número n de barras, en el capítulo 5, Utilizamos el algoritmo de Kempe para construir virtualmente un mecanismo que trace una línea recta y un mecanismo que trace una parábola. En el capítulo 6, revisaremos algunas fallas en la demostración del teorema de Kempe y sus posibles correcciones, y en el capítulo 7, comparamos la construcción de Kempe y otros mecanismos. En el capítulo 8, trabajamos con los mecanismos articulados de 2 barras algunas de sus características y hacemos un breve análisis matemático de los mecanismos articulados de 3 barras, y en el capítulo 9 concluimos con un análisis más abstracto de los mecanismos articulados.

Capítulo 2

Antecedentes

En éste capítulo nos enfocamos en una pequeña parte histórica de los mecanismos articulados; es decir, ¿como surgieron?, ¿cuales fueron los problemas que motivaron su diseño? y su uso para resolver problemas matemáticos de la antigüedad.

Los Griegos fueron los primeros en utilizar la regla y el compás como instrumentos de trazo en las construcciones geométricas, aunque fueron rápidamente detenidos por problemas de construcción como son la trisección del ángulo (dado un ángulo dividirlo en tres partes iguales) y la duplicación del cubo (construir un cubo de dos veces el volumen de un cubo dado). Ellos no eran capaces de resolver estos problemas con estos aparatos. Para abordar estos problemas, los griegos construyeron nuevos instrumentos. Algunos pensaron que Platón había inventado algunos de ellos; sin embargo Platón culpa a algunos de sus discípulos (Menecmo, Eudoxo,...) por usar estos instrumentos alterando la pureza de la geometría; esta postura es mas coherente con la teoría de Platón. Uno de los que trabajó en la duplicación del cubo y la trisección del ángulo fué Nicomedes utilizando una especie de regla de su propia invención (ver figura 2.1).

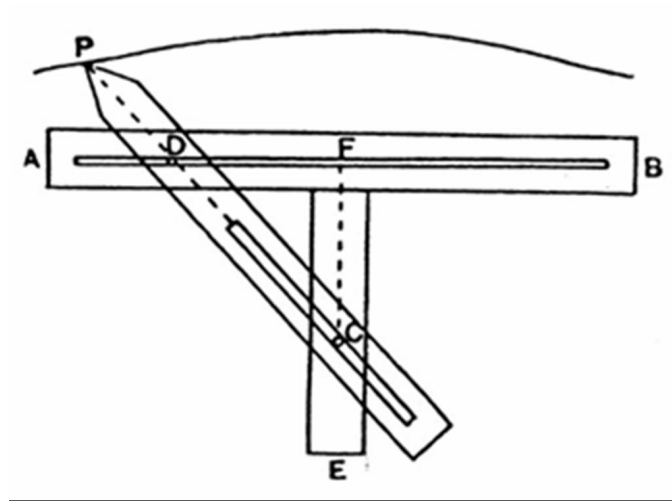


Figura 2.1: Regla de Nicomedes

Triplicar un ángulo con regla y compas es posible, veamos, sea \widehat{XOY} un ángulo ahora tomemos un punto B arbitrario sobre OY y tracemos una circunferencia de centro B y que pase por O, a la intersección de esta circunferencia con OX llamémosla A. A su vez, tomamos A de centro y con radio AB trazamos un círculo que intersecta a OY en C, la semirecta AZ es tal que su ángulo es $3\widehat{XOY}$ (ver figura 2.2)

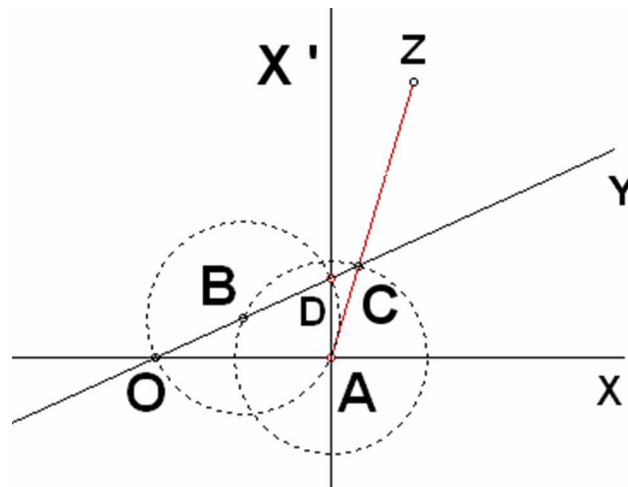


Figura 2.2: Triplicación del ángulo

Inversamente si el ángulo \widehat{XAZ} está dado debe tomarse arbitrariamente C sobre AZ y se determina CO , donde el punto O está sobre la prolongación de AX . Sea D el punto de intersección distinto de O de la recta OY con el primer círculo trazado; D está sobre la perpendicular AX' a AX y la recta OY que pasa por C está determinada por la igualdad $DO=2CA$; la longitud DO es por tanto conocida.

El problema: *dados un ángulo recto XAX' , una longitud d y un punto C , construir una recta que pase por C tal que $|OD| = d$ donde D y O son las intersecciones con AX' y con AX respectivamente.*

A veces se le da el nombre del problema de Pappus. Viète lo menciona como fundamental para la subdivisión de ángulos.

Nicomedes empleó una regla con 2 puntos de referencia ω y δ a una distancia $OD = d$ dicha regla tenía una ranura, el eje de la regla es la recta que une ω con δ (ver figura 2.3). En la ranura se desplazará libremente un punto fijo C del plano. Cuando se mueve la regla, de modo que el punto δ esté sobre AX' , el punto ω describe una curva cuya intersección con el eje AX es el punto O buscado.

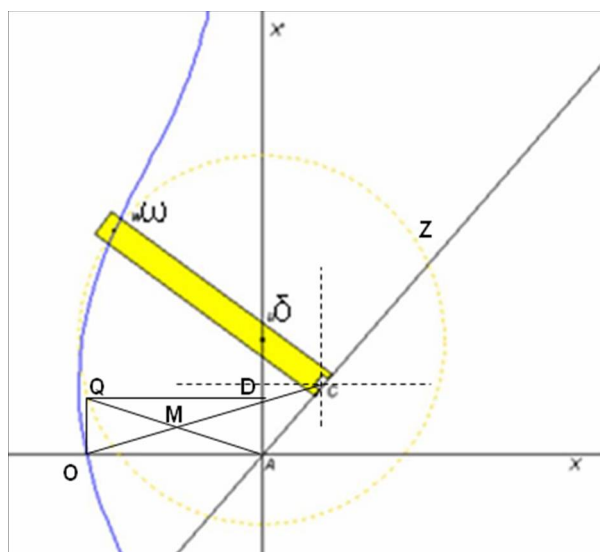


Figura 2.3: Regla de Nicomedes para trisectar el ángulo

Para demostrar lo anterior tenemos que:

Sea OD tal que $OD = d = 2CA$ tenemos que dado el ángulo \widehat{XAC} , $MA=AC$ ya que el triángulo $\triangle AMC$ es isósceles por ser $OD = 2CA$ por

lo tanto $\widehat{CMA} = \widehat{ACM}$ se tiene también que $\widehat{XAC} + \widehat{MAC} + \widehat{OAM} = \widehat{MAC} + 2\widehat{AMC}$. Por tanto $\widehat{XAC} + \widehat{OAM} = 2\widehat{AMC}$ si $\widehat{AMC} = 2\widehat{OAM}$ entonces $2\widehat{AMC} = 4\widehat{OAM}$ por lo tanto de $2\widehat{AMC} = \widehat{XAC} + \widehat{OAM}$ se tiene que $4\widehat{OAM} = \widehat{XAC} + \widehat{OAM}$ por tanto $3\widehat{OAM} = \widehat{XAC}$. Al ser isóceles el triángulo $\triangle OAM$ entonces $\widehat{OAM} = \widehat{AOM}$ y por lo tanto $3\widehat{AOM} = \widehat{XAC}$

Por lo tanto basta comprobar que $\widehat{AMC} = 2\widehat{OAM}$.

Se tiene que $\widehat{OMA} + \widehat{AMC} = 2\widehat{OAM} + \widehat{OMA}$ por lo tanto $\widehat{AMC} = 2\widehat{OAM}$

La solución de Nicomedes es elegante y simple, la curva auxiliar se llama la concoide de la recta AX' con polo C y módulo $\delta\omega=d$. Tomando C como origen de un sistema de coordenadas con ejes paralelos a AX y a AX' en este sistema de coordenadas la ecuación de la recta AX' es $x = d$ o $\rho = \frac{d}{\cos\theta}$ y por lo tanto la concoide de módulo m tiene de ecuación en coordenadas polares

$$\rho = \frac{d}{\cos\theta} + m$$

o en coordenadas cartesianas

$$(x^2 + y^2)(x - d)^2 - m^2x^2 = 0$$

Se trata de una curva de grado 4 donde C es un punto doble tangente, un punto no suave (cuspid) o un punto suave según si d es mayor, igual ó inferior a m. La curva entera está constituida por dos ramas, la superior y otra inferior respectivamente cuya ecuación en polares es:

$$\rho = \frac{d}{\cos\theta} - m$$

que se determina invirtiendo los roles de los puntos ω y δ . Estas dos ramas pueden ser utilizadas para resolver el problema de Pappus.

Los Griegos observaron que la duplicación del cubo era equivalente a encontrar la intersección de la hipérbola $xy = 2l^2$ con la parábola $x^2 = ly$ ya que la solución a estas ecuaciones está dada por $x^3 = 2l^3$ Por otra parte este punto de intersección está ligado al problema de construir las medias proporcionales de dos números dados a y b. Recordemos que las medias proporcionales de los números a y b son dos números x,y, tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

De aquí se obtienen las igualdades $xy = ab$, $x^2 = ay$, las cuales se convierten en las igualdades $x^2 = ly$ y $x^3 = 2l^3$

Mostraremos ahora como estas dos ramas de la conchoide de Nicomedes pueden resolver el problema de la duplicación del cubo.

Sean AB y BC dos segmentos perpendiculares dados (ver figura 2.4), completamos el paralelogramo $ABCL$.

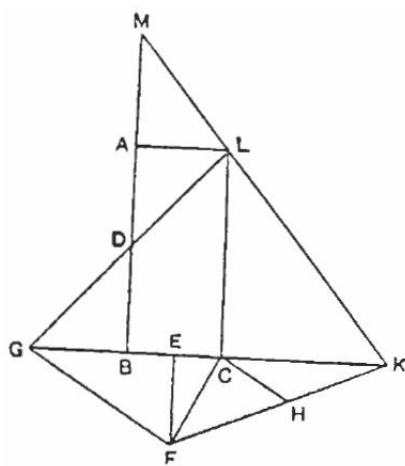


Figura 2.4: Construcción para hallar las medias proporcionales de dos números dados

Sean D y E los puntos medios de AB y BC respectivamente. Trazamos una recta que pasa por L y D cortando a la prolongación de BC en G . Dibujamos la perpendicular a BC por E , y sobre ella se elige el punto F , tal que $CF = AD$. Se traza el segmento GF , y la paralela a él por C . Del haz de rectas que pasa por F , se elige aquella que determine con las rectas BC y la paralela a GF por C , un segmento de longitud igual a AD . Sea este segmento $HK = AD = CF$ (es decir la conchoide de polo F , como directriz la paralela a GF por C , y la distancia AD)(ver figura 2.5)

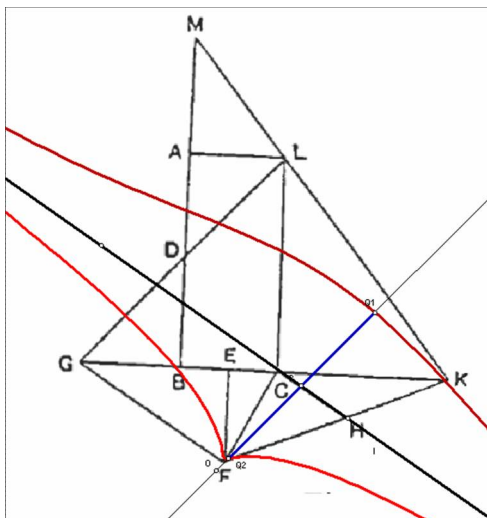


Figura 2.5: La conchoide es usada para hallar medias proporcionales de dos números dados

La recta que pasa por K y L corta a AB en el punto M.

Demostraremos a continuacion que AM y CK son las medias proporcionales buscadas.

De la figura se observa que

$$(BK)(CK) = (EK + EC)(EK - EC) = EK^2 - EC^2 \text{ y que}$$

$$(MA)(MB) = (MD + AD)(MD - AD) = MD^2 - AD^2.$$

Por otra parte, por semejanza de los triángulos $\triangle MAL$ y $\triangle LCK$ se tiene:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{ML}{LK} = \frac{BC}{CK}$$

Y teniendo en cuenta que $AB = 2AD$ y $GC = 2BC$, obtendremos

$$\frac{MA}{AB} = \frac{BC}{CK} \Rightarrow \frac{2MA}{AB} = \frac{2BC}{CK}$$

esto es: $\frac{MA}{AD} = \frac{GC}{CK}$ y por semejanza de los triángulos $\triangle GFK$ y $\triangle CHK$ se tiene que $\frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK}$ de donde $\frac{MA}{AD} = \frac{FH}{HK}$ Pero $HK = AD$ implica que $FH = MA$, y por tanto, $FH + HK = MA + AD$, es decir $MD = FK$.

De $(MA)(MB) = (MD + AD)(MD - AD) = MD^2 - AD^2$ se deduce que $MD^2 = (MA)(MB) + AD^2$, y de la figura $FK^2 = EK^2 + EF^2 =$

$EK^2 + (CF^2 - EC^2) = (BK)(CK) + AD^2$. Como $MD = FK$ resulta que $MD^2 - AD^2 = (BK)(CK)$ y por tanto $(BK)(CK) = (MA)(MB)$, de donde

$$\frac{CK}{AM} = \frac{MB}{BK} = \frac{LC}{CK} = \frac{AB}{CK} = \frac{AM}{BC}$$

y, por lo tanto

$$\frac{AB}{CK} = \frac{CK}{AM} = \frac{AM}{BC}$$

Con lo que demostramos que CK y AM son las medias proporcionales buscadas.

En 1619, Descartes inventa un trisector que consiste simplemente de 4 barras largas que giran alrededor de un vértice O y de 4 barras más pequeñas de la misma longitud; éstas se unen para formar una estructura como en la figura 2.6. Los puntos A, B, C, y D equidistan del vértice O y permiten el giro de las barras pequeñas. Los vértices F y G, corren a lo largo de sus respectivas barras. Para trisecar un ángulo α , basta colocar los brazos OA y OD sobre sus lados. Cada uno de los ángulos AOB, BOC, COD es un tercio de α

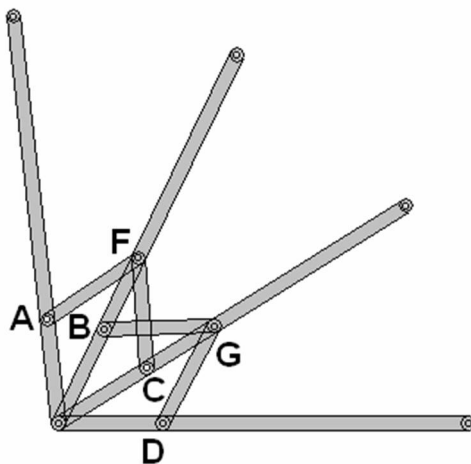


Figura 2.6: Trisector de Descartes

Diocles (entre 250 y 100 a.c.) utilizó la curva conocida como Cisoide, para encontrar la media proporcional de dos números (longitudes). Dado un punto X en el círculo S, tomemos la recta L tangente a S por el punto diametralmente opuesto B. Sea R un punto de L; el segmento XR corta al

círculo S en un punto Q . La Cisoide se define como el lugar geométrico de los puntos $P \in XR$, tal que $|XP| = |QR|$, cuando R varía sobre L (ver figura 2.7)

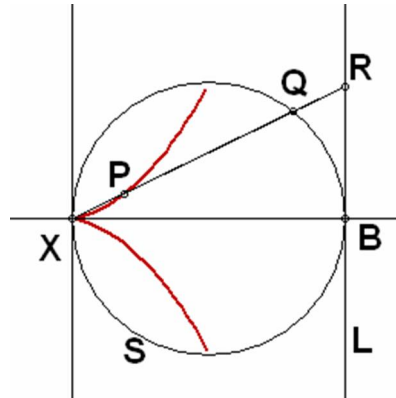


Figura 2.7: Cisoide de Diocles

Veamos ahora la relación de esta curva Cisoide con la solución del sistema de igualdades $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Consideremos el rectángulo $OABC$ con lados $OA=a$ y $OB=b$ (ver figura 2.8).

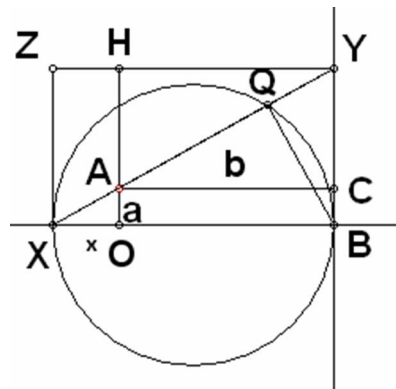


Figura 2.8: Cisoide de Diocles

Sea X el punto sobre BO tal que $|OX| = x$. En BC se toma el punto Y tal que $|CY| = y$. Los puntos X , A y Y están alineados dado que $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$. Sea Z el cuarto vértice del rectángulo con lados XB y BY . Como $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$, los ángulos $\widehat{ZAH} = \widehat{AXO}$ son iguales. De lo que se sigue que el ángulo \widehat{ZAX}

es recto. Sea S el círculo con diámetro XB y Q el punto de intersección de XY con S . Claramente, el ángulo \widehat{XQB} es recto; por lo tanto los triángulos $\triangle YQB$ y $\triangle ZAX$ son congruentes. Así $|XA| = |QY|$ y entonces A está sobre la Cisoide de Diocles.

Cuadratura del círculo

Dinostrato Utilizó la cuadratriz (una curva inventada por el sofista Hipias para la división del ángulo) para resolver el problema de la cuadratura del círculo. Hipias descubrió esta curva, pero que más tarde fue Dinostrato el primero en usarla para encontrar un área igual a un determinado círculo. La cuadratriz permite poner en relación un círculo con ciertos segmentos de recta.

Generación de la cuadratriz.

Supongamos inscrito en el cuadrado $CABF$ un arco de circunferencia \widehat{CB} con centro A (ver figura 2.9).

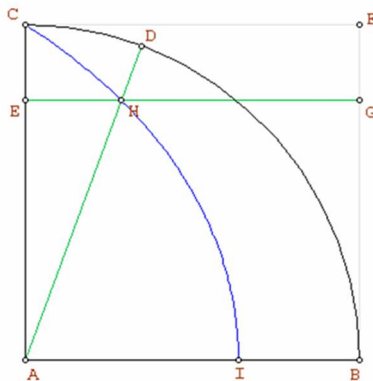


Figura 2.9: Cuadratriz de Dinostrato

Sea D un punto que parte de C y se desplaza por el arco \widehat{CB} a velocidad uniforme. Sea E un punto que parte de C en el mismo momento que D y se desplaza por el segmento CA a velocidad uniforme y de forma que el tiempo en que E recorre CA es el mismo que el tiempo en que D recorre el arco \widehat{CB} . Entonces, en cada instante, la longitud del segmento EA es a la longitud del segmento CA como la longitud del arco DB es a la longitud del arco \widehat{CB} ,

lo que expresamos con la notación

$$\frac{EA}{CA} = \frac{\widehat{DB}}{\widehat{CB}}$$

El punto H, en que se cortan la perpendicular a AC por D y la recta AD, describe la curva llamada cuadratriz. Si primero se concibió la cuadratriz para dividir ángulos, quizá fue una sorpresa descubrir que también resolvía el problema de la cuadratura del círculo. Para ello no hace falta la cuadratriz, sino solo el punto I de intersección de la cuadratriz con la base AB. Ese punto I no se produce como intersección de las rectas AD y EG en la primera figura, porque esas rectas coinciden cuando llegan a I, y por tanto tenemos que definirlo como el punto límite al que tienden los puntos de la cuadratriz cuando AD y EG se acercan a AB.

La propiedad del punto I que permite rectificar la circunferencia y cuadrar el círculo es que $\frac{\widehat{CB}}{AB} = \frac{AI}{AB}$, o, dicho en palabras, la longitud del arco \widehat{CB} es a la longitud del segmento AB como la longitud del segmento AB es a la longitud del segmento AI.

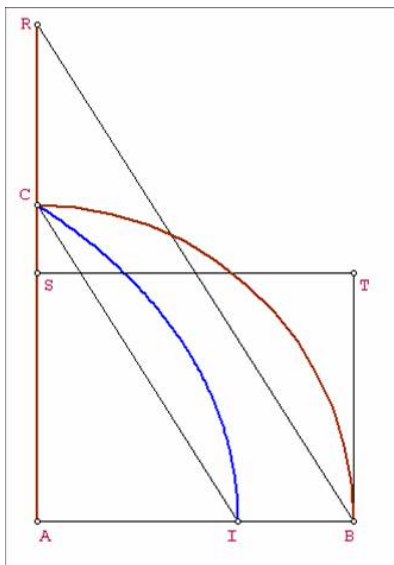


Figura 2.10: Construcción para cuadrar el círculo

Ello implica que si R es la intersección de la paralela a CI que pasa por

B con la prolongación de AC, la longitud AR es igual a la longitud del arco \widehat{CB} (porque $\frac{AR}{AB} = \frac{AB}{AI}$) (ver figura 2.10).

Entonces, puesto que el área de un sector circular es la mitad de la longitud del arco por el radio, si S es el punto medio de AR, el área del sector circular ACB es igual al área del rectángulo SABT. Por tanto el área del círculo es 4 veces el área de ese rectángulo. Y como podemos construir un cuadrado con área igual a un rectángulo dado, podemos cuadrar el círculo con regla y compás si nos dan el punto I de la cuadratriz en el segmento AB.

Existen desde luego otros instrumentos que crearon los griegos para resolver problemas geométricos, no es la intención de éste trabajo mostrar toda esa diversidad de instrumentos, sino sólo mostrar como es que a partir de ciertos cuestionamientos geométricos comenzó a surgir la creación de instrumentos de dibujo y trazo, de los cuales se dio pie a la invención de los mecanismos articulados

Capítulo 3

Teorema de Kempe

En este capítulo explicamos cómo expresar polinomios y por ende curvas algebraicas por medio de expresiones trigonométricas. Por medio de una álgebra trigonométrica reduciremos todos los términos de una expresión polinómica a una cierta forma canónica simple. En particular, encontramos la forma de cancelar expresiones arbitrarias de cualquier variable usando mecanismos articulados unidos solamente a dos puntos, el origen y cualquier unidad escogida que represente el eje X. Esto conduce directamente a una prueba constructiva para el Teorema de Kempe, el cual establece que para cada parte finita de una curva algebraica plana hay un mecanismo articulado que traslada un movimiento a lo largo de la curva hacia un movimiento en segmento de línea recta. En consecuencia existe una serie de sistemas eslabonados que delinear cualquier curva algebraica dada en cualquier región del plano.

Teorema 1. (*Teorema de Kempe*). Sea $f \in R[x, y]$ un polinomio que define una curva algebraica $C = \{(x, y) \in R^2 \mid f(x, y) = 0\}$, y sea D un disco cerrado en el plano. Entonces existe un sistema articulado que traslada un movimiento finito de un punto S a lo largo de un segmento de línea recta a un movimiento de un punto P a lo largo de $C \cap D$ y viceversa

Daremos un esbozo de la demostración

Demostración. Sea

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j = 0, a_{ij} \in R$$

una curva algebraica de grado d , la cual será recorrida por un punto P que es el vértice de un paralelogramo

Construiremos un paralelogramo de tal manera que OA y OB tienen longitudes n y m y forman ángulos θ , φ con el eje X , respectivamente (ver figura 3.1). El punto P está sobre la curva.

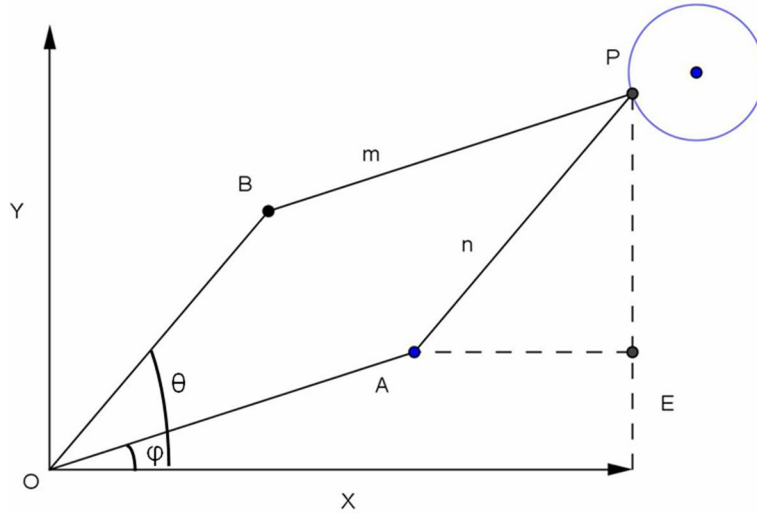


Figura 3.1: Esquema de la construcción de Kempe

Las coordenadas de P están dadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}x &= m \cos \varphi + n \cos \theta \\y &= m \operatorname{sen} \varphi + n \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

La suma de los términos adquiere la forma

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{i,j} (m \cos \varphi + n \cos \theta)^i (m \operatorname{sen} \varphi + n \operatorname{sen} \theta)^j$$

Usando la identidad

$$\operatorname{sen} \theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Obtenemos

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{i,j} (m \cos \varphi + n \cos \theta)^i \left(m \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + n \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)^j$$

Por el teorema del binomio de Newton

$$(m \cos \varphi + n \cos \theta)^i = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} m^k n^{i-k} \cos^k \varphi \cos^{i-k} \theta$$

$$(m \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) + n \cos(\theta - \frac{\pi}{2}))^j = \sum_{l=0}^j c_{i,k} c_{j,l} m^{k+l} n^{i+j-k-l} \cos^k \varphi \cos^{i-k} \theta \cos^l(\varphi - \frac{\pi}{2}) \cos^{j-l}(\theta - \frac{\pi}{2})$$

Substituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{i,j} \left(\sum_{k=0}^i c_{i,k} m^k n^{i-k} \cos^k \varphi \cos^{i-k} \theta \right) \left(\sum_{l=0}^j c_{j,l} m^l n^{j-l} \cos^l(\varphi - \frac{\pi}{2}) \cos^{j-l}(\theta - \frac{\pi}{2}) \right) \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{i,j} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j c_{i,k} c_{j,l} m^{k+l} n^{i+j-k-l} \cos^k \varphi \cos^{i-k} \theta \cos^l(\varphi - \frac{\pi}{2}) \cos^{j-l}(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Gao en [2] señala que usando las identidades

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k)\theta)$$

$$\cos \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} [\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)]$$

Obtenemos

$$= \sum_{0 \leq s \leq d} \sum_{-d \leq t \leq d} (a_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta) + b_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta - \frac{\pi}{2}))$$

Haciendo c el valor de esta expresión para s=t=0 obtenemos finalmente

$$f(x, y) = c + \sum_{\substack{0 \leq s \leq d, -d \leq t \leq d \\ (s,t) \neq (0,0)}} (a_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta) + b_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta - \frac{\pi}{2}))$$

Donde $a_{s,t}, b_{s,t}, c$ son constantes, podemos simplificar de la siguiente manera

$$a_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta) + b_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{a_{s,t}^2 + b_{s,t}^2} \cos(s\varphi + t\theta - \psi_{s,t})$$

Donde $\psi_{s,t}$ es un ángulo que satisface

$$\cos(\psi_{s,t}) = \frac{a_{s,t}}{\sqrt{a_{s,t}^2 + b_{s,t}^2}}$$

$$\text{sen}(\psi_{s,t}) = \frac{b_{s,t}}{\sqrt{a_{s,t}^2 + b_{s,t}^2}}$$

Al aplicarlo a tenemos

$$f(x, y) = c + \sum_{\substack{0 \leq s \leq d, -d \leq t \leq d \\ (s,t) \neq (0,0)}} (d_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta - \psi_{s,t}))$$

Donde $d_{s,t}, \psi_{s,t}, c \in \mathbf{R}$

□

Después de todas estas transformaciones, conseguimos otra versión de la ecuación de la curva algebraica que depende de m, n, θ, φ en lugar de x, y .

Uno puede representar un ángulo θ por un par de barras con un vértice común O.

Siguiendo a Kempe, construimos aparatos para manipular los ángulos de modo que se puedan obtener todos los ángulos $\cos(s\varphi + t\theta - \psi_{s,t})$. Para esto, necesitamos mecanismos para multiplicar ángulos negativos (El reversor de Kempe), sumar ángulos (El aditor de Kempe), o una combinación de dos reversores.

Lema 1. *(El Reversor) Sea AOC un ángulo dado. Vamos a construir el mecanismo tal que AOE=2AOC*

Demostración. Sea OABC el mecanismo un contraparalelogramo, con OA=BC y BA=OC y tomamos OE tercera proporcional de OA y OC y tenemos que $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OE}$ y agregamos los brazos OE=CD y DE=OC

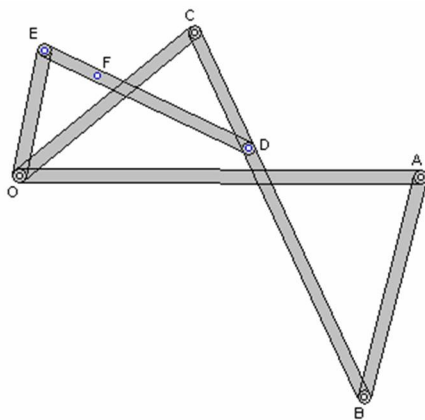


Figura 3.2: Reversor de Kempe

En la figura 3.2 OCDE es un contraparalelogramo similar a OABC ya que tienen lados proporcionales y un ángulo común $\angle OCB$. $\angle AOC$ es igual al ángulo $\angle COE$. por lo tanto, si OA hace cualquier ángulo con OC, OE hará el mismo ángulo con OC en el otro lado de la misma. En efecto $\angle AOE = \angle AOC + \angle COE = 2\angle AOC$. Si el ángulo dado es $\angle AOE$, el mecanismo determina la bisectriz OC en la relación de $\frac{OA}{OC} = \frac{1}{2}$ \square

Lema 2. *El Multiplicador (divisor).* Sea $\angle AOC$ un ángulo dado vamos a construir un mecanismo tal que el ángulo $\angle AOZ = n\angle AOC$

Demostración. En el mecanismo del 1, Si OC forma un ángulo θ con OA, OE forma un ángulo 2θ . Ahora, si agregamos 2 brazos OG y EF en el mecanismo ACDE de la misma manera con agregamos brazos OE y ED en el mecanismo OABC (ver figura 3.3), vamos a obtener el mecanismo OG formando un ángulo 3θ con OA y continuando la construcción vamos a obtener el mecanismo OZ formando un ángulo $n\theta$ con OA donde N es un entero. Si el ángulo dado es $\angle AOG$, este mecanismo resuelve el problema clásico de trisectar el ángulo. \square

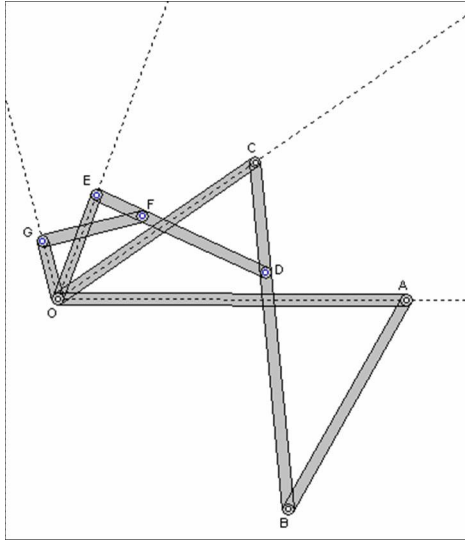


Figura 3.3: Multiplicador de Kempe

Lema 3. *El sumador de ángulos*

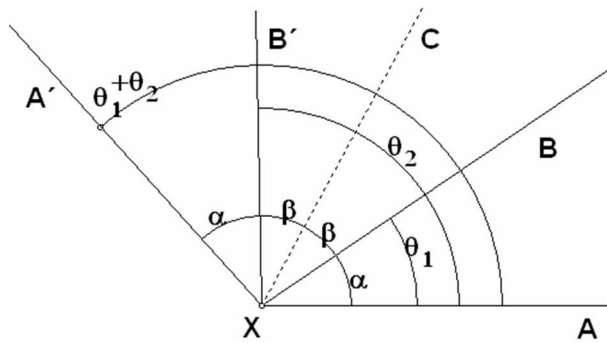


Figura 3.4: Sumador de ángulos

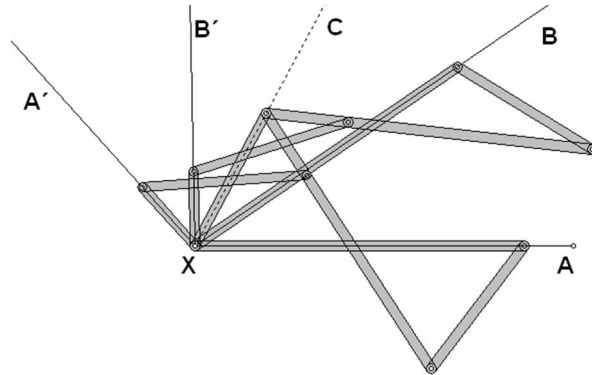


Figura 3.5: Sumador de ángulos

Demostración. La construcción del sumador de 2 ángulos θ_1 y θ_2 consiste de 5 links unidos en un punto X, Donde $\angle AXC = \alpha$ y reflejamos con respecto a la recta C para obtener A' (ver figura 3.4).

Análogamente $\angle BXC = \beta$ y reflejamos con respecto a la recta C para obtener B' . Por lo que $\theta_1 = \alpha - \beta$ y $\theta_2 = \alpha + \beta$ en consecuencia $\theta_1 + \theta_2 = 2\alpha$. La reflexión con respecto a una recta. En este caso se requieren 2 reflexiones, por lo tanto debemos usar 2 multiplicadores unidos (ver figura 3.5) \square

El Traductor (Sumador de Vectores). El mecanismo está dado por un par de traductores (ver figura 3.6)

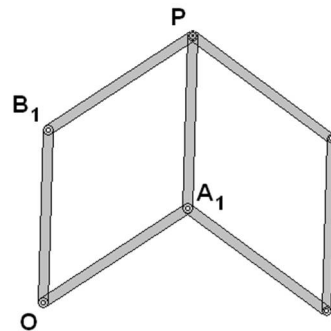


Figura 3.6: Traductor

El Inversor de Peaucellier. EL inversor consta de 6 barras ($OA = OB, CA = AD = DB = BC = C$). En esta situación, los puntos C y D son

los correspondientes a una inversión circular con polo O y radio r tal que $r^2 = a^2 - c^2$. Donde C se mueve en un círculo que pasa por O (con radio d y centro el punto fijo E), el punto D (imagen de C bajo la inversión) describe una línea recta (ver figura 3.7).

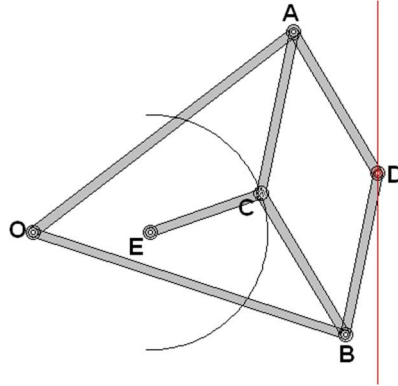


Figura 3.7: Inversor de Peaucellier

los lemas completan la prueba del teorema de Kempe. Sin embargo, en lugar de un mecanismo, el teorema da un algoritmo para construir un mecanismo (virtual) que depende de la ecuación de la curva. Kempe como él mismo dice: Es casi innecesario añadir que este método no sería útil dada la complejidad de mecanismo empleada, una consecuencia necesaria de la generalidad de la perfecta demostración. El método, sin embargo, demuestra que hay una manera de extraer cualquier caso, y la variedad de métodos de expresar la función particular que ya se han descubierto hace en el mayor grado posible que en cada caso un método simple se puede encontrar. Todavía queda, por tanto, un amplio campo abierto a la matemática para descubrir el más simple mecanismo particular, para describir las curvas (1876).

Ahora regresando un poco a la ecuación de Kempe

$$\phi(x, y) = c + \sum_i C_i \cos(r_i \alpha + s_i \beta + \delta_i)$$

donde C y C_i son constantes, r_i y s_i son enteros y $\delta_i \in [0, \pm \frac{\pi}{2}]$.

Por ejemplo la ecuación xy^2 al reducirla a la expresión de Kempe nos queda

$$\frac{1}{4} [a^3 \cos \alpha + 2ab^2 \cos \alpha - a^3 \cos(3\alpha) + ab^2 \cos(\alpha - 2\beta) + a^2b \cos(2\alpha - \beta)]$$

$$+2a^2b \cos \beta + b^3 \cos \beta - b^3 \cos(3\beta) - 3ab^2 \cos(2\alpha + \beta) - 3ab^2 \cos(\alpha + 2\beta)]$$

Para cada término de la suma en la ecuación se realiza un brazo de longitud c_i , en un ángulo adecuado. Así pues, el problema se reduce a la construcción de un ángulo de la forma $r_i\alpha + s_i\beta + \delta_i$ de α y β

Kempe demuestra que dicha construcción se puede lograr con tres mecanismos: Un trasladador para trasladar un movimiento, un sumador para sumar o restar dos ángulos, y un multiplicador para multiplicar un ángulo por un número entero positivo. La esencia del trasladador es como la acción de un pantógrafo. Hay que tener en cuenta que mientras que un multiplicador natural podría ser ejecutado mediante una colección de sumadores, de hecho, la construcción de un sumador usa un multiplicador, y por lo tanto, ambos son necesarios. Por lo tanto, se pueden usar estos complementos en orden inverso. Lo que haremos en el siguiente capítulo es comparar el mecanismo de Kempe para trazar una línea recta con el mecanismo de Hart y el mecanismo de Peaucellier.

Capítulo 4

Construcción de Mecanismos aplicando el Teorema de Kempe

En este capítulo vamos a ver como construir un mecanismo articulado a partir del teorema de Kempe. La demostración del teorema de Kempe nos dio como resultado la siguiente ecuación:

$$f(x, y) = c + \sum_{\substack{0 \leq s+t \leq d \\ (s,t) \neq (0,0)}} (d_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta + \psi_{s,t}))$$

Ahora a partir de esta expresión vamos a ver que para cada término $d_{s,t} \cos(s\varphi + t\theta + \psi_{s,t})$ en la ecuación construimos un link de la siguiente manera 1.- Sea O el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y sean $A_1, B_1 \notin \{O, P\}$ los puntos finales del paralelogramo OA_1PB_1 tal que $\angle XOA_1 = \varphi$ y $\angle XOB_1 = \theta$ (ver figura 4.1).

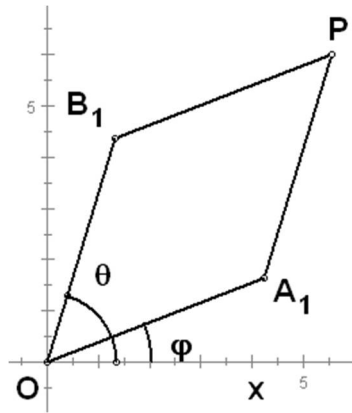


Figura 4.1: Esquema del paralelogramo

2.-Para todos los enteros $s, t \leq d$ que ocurren en la ecuación, utilizamos un multiplicador de ángulos para las barras OA_1 y OB_1 construimos los links OA_i , $s = 2, \dots, s$ y OB_j , $j = 2, \dots, t$ que satisfacen $\angle XOA_i = s\varphi$ y $\angle XOB_j = t\theta$ (ver figura 4.2)

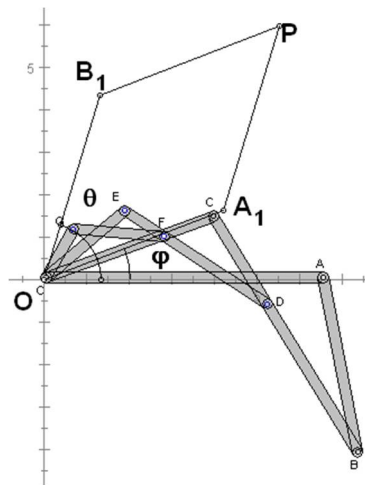


Figura 4.2: Esquema de suma de ángulos

3.-Vamos a necesitar un aditor de ángulos para construir los links $OC_{s,t}$

para A_s y B_t que satisfacen

$$\angle XOC_{s,t} = \angle XOA_s + \angle XOB_t = s\varphi + t\theta$$

(ver figura 4.3)

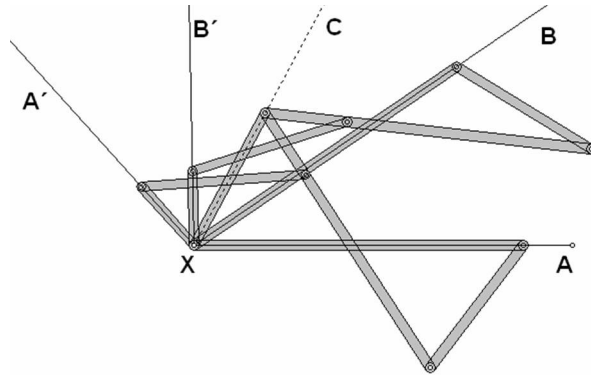


Figura 4.3: Esquema del aditor

4.- De la misma manera usaremos un aditor de ángulos en $OC_{s,t}$ y el eje Y para generar los puntos $D_{s,t}$ con $\angle XOD_{s,t} = \angle XOC_{s,t} - \angle XOY = s\varphi + t\theta - \frac{\pi}{2}$

5.-Para todo coeficiente $a_{s,t}$ y $b_{s,t}$ en , usaremos barras $OE_{s,t}$ o $OF_{s,t}$ con las correspondientes escalas de longitud $OC_{s,t}$ o $OD_{s,t}$ tal que $|OE_{s,t}| = a_{s,t}$, $\angle XOE_{s,t} = s\varphi + t\theta$ y $|OF_{s,t}| = b_{s,t}$, $\angle XOF_{s,t} = s\varphi + t\theta - \frac{\pi}{2}$

6.-finalmente, representamos geoméricamente la suma por medio de una cadena de trasladadores (ver figura 4.4).

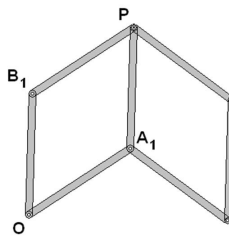


Figura 4.4: Esquema del trasladador

Con estos mecanismos construimos los términos $r\alpha + s\theta$

Capítulo 5

Mecanismo de Kempe para trazar una línea recta

En este capítulo mostraremos como dada la ecuación de una curva algebraica podemos construir el mecanismo articulado que la traza.

El primer problema que se presenta en la búsqueda de las curvas que se pueden construir es claramente el de trazar una recta.

La dirección rectilínea de un punto fue primero realizada en forma aproximada; como la que aportó el paralelogramo de Watt (ver figura 5.1) que es una solución más satisfactoria del punto de vista de la construcción de las máquinas que una solución rigurosa que necesitaría un aparato menos manejable o menos preciso; pero sólo nos interesa aquí la solución técnica y no la complejidad más o menos grande del aparato.

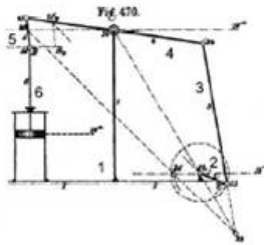


Figura 5.1: Mecanismo de Watt

La posibilidad de la dirección rectilínea exacta de un punto por un sistema

38CAPÍTULO 5. MECANISMO DE KEMPE PARA TRAZAR UNA LÍNEA RECTA

articulado fue cuestionada a mediados del siglo XIX; como los aparatos no permiten alcanzar más que puntos a distancia finita, a través de movimientos de revolución o de oscilación, era creíble que sólo se pudieran trazar óvalos.

Supongamos que tenemos la curva

$$f(x, y) = ax + by + c = 0$$

donde

$$x = n \cos \theta + n \cos \varphi$$

$$y = n \sin \theta + n \sin \varphi$$

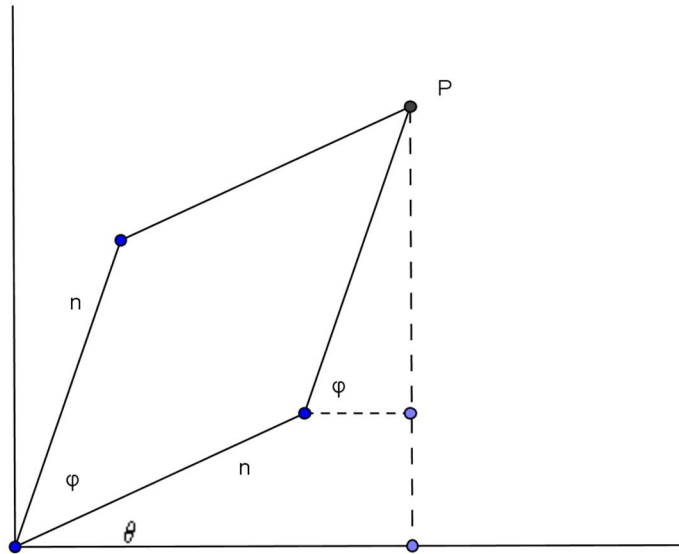


Figura 5.2: Esquema de la construcción de Kempe para trazar una línea recta

Sustituimos y nos queda

$$\begin{aligned} f &= a(n \cos \theta + n \cos \varphi) + b(n \sin \theta + n \sin \varphi) + C \\ &= n[a(\cos \theta + \cos \varphi) + b(\sin \theta + \sin \varphi)] + C \\ &= n\left[\sqrt{a^2 + b^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos \theta + \cos \varphi) + \sqrt{a^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sin \theta + \sin \varphi)\right] + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n\sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos \theta + \cos \varphi) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sen \theta + \sen \varphi) \right] + C \\
&= n\sqrt{a^2 + b^2} [\cos \phi (\cos \theta + \cos \varphi) + \sen \phi (\sen \theta + \sen \varphi)] + C
\end{aligned}$$

Donde el ángulo ϕ satisface

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sen \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= n\sqrt{a^2 + b^2} [\cos \phi \cos \theta + \cos \phi \cos \varphi + \sen \phi \sen \theta + \sen \phi \sen \varphi] + C \\
&= n\sqrt{a^2 + b^2} [\cos(\theta - \varphi) + \cos(\varphi - \phi)] + C
\end{aligned}$$

Para generar la línea $f(x, y) = 0$ la suma de los lados del paralelogramo $2n$ deben satisfacer

$$n > \frac{|c|}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Para la simulación del mecanismo en un software de geometría (Geometer's Sketchpad, Geogebra, Cabri o Geolab)

1.-Construimos una línea LM paralela al eje Y a una distancia C del eje Y

2.-Construimos un punto F libre sobre LM

3.-Construimos el paralelogramo OGFH tal que $OG = GF = FH = HO = n\sqrt{a^2 + b^2}$

4.-Construimos OJ y OI tal que $\angle GOJ = \phi$, $OJ = n$, $\angle HOI = \phi$, $OI = n$

5.-Construimos el paralelogramo PJOI, donde F se mueve en LM entre $(-C, \sqrt{4n^2(a^2 + b^2) - c^2})$, $(-C, -\sqrt{4n^2(a^2 + b^2) - c^2})$ (ver figura 5.2)

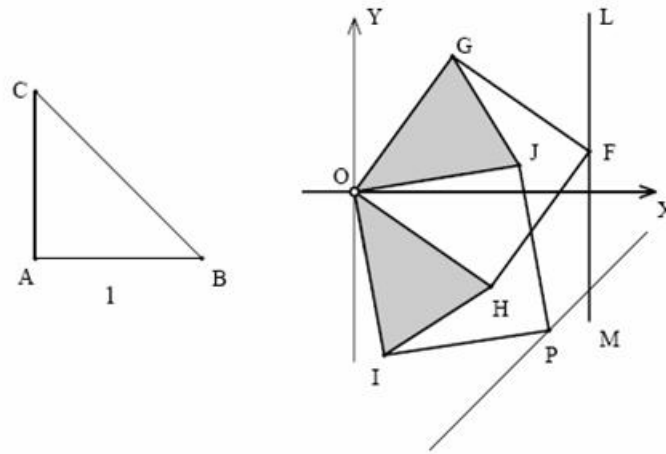


Figura 5.3: Esquema de la construcción de Kempe para trazar una línea recta

Ahora vamos a un ejemplo más concreto para

$$f(x, y) = x - y - 2 = 0$$

en la ecuación general

$$n\sqrt{a^2 + b^2}[\cos(\theta - \varphi) + \cos(\varphi - \phi)] + C$$

Como $n > \frac{|2|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{2}}$ por lo tanto podemos tomar $n = 1$ por otro lado $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ y nuestra ecuación se reduce a

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$$

Para la simulación por ejemplo en el Geometra procedemos así:

- 1.- Construimos una línea LM a una distancia $c=2$
- 2.- Construimos el paralelogramo OGFH tal que $OG = GF = FH = HO = \sqrt{2}$
- 3.- Construimos OJ, OI tal que $\angle GOJ = \frac{\pi}{4} = \angle HOI$ y tal que $|OJ| = 1 = |OI|$
- 4.- Construimos el paralelogramo PJOI donde F se mueve por $(2, 2), (-2, -2)$ (ver figura 5.4)

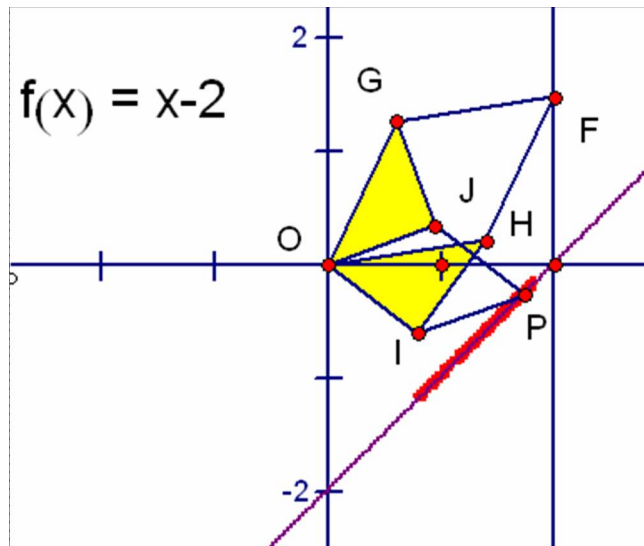


Figura 5.4: Construcción de Kempe para trazar una línea recta

Vamos ahora a ver como se trabaja la construcción de un mecanismo para una curva de grado mayor, por ejemplo la hipérbola

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$x = k \cos \alpha + k \cos \beta$$

$$y = k \sin \alpha + k \sin \beta$$

hacemos el cambio de coordenadas y nos queda

$$(k \cos \alpha + k \cos \beta)^2 - (k \sin \alpha + k \sin \beta)^2 = 1$$

$$k^2 + \cos^2 \alpha + k^2 \cos^2 \beta + 2k^2 \cos \alpha \cos \beta - [k^2 \sin^2 \alpha + k^2 \sin^2 \beta + 2k^2 \sin \alpha \sin \beta] = 1$$

$$k^2 [\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta)] = 1$$

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + 2 \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{k^2} = 0$$

Para construir el linkage requerimos

OL1 de norma 1 y tal que $\angle XOL1 = 2\alpha$ para representar el término $\cos(2\alpha)$

42CAPÍTULO 5. MECANISMO DE KEMPE PARA TRAZAR UNA LÍNEA RECTA

OL2 de norma 1 y tal que $\angle XOL2 = 2\beta$ para representar el término $\text{Cos}(2\beta)$

OL3 de norma 2 y tal que $\angle XOL3 = \alpha + \beta$ para representar el término $2\text{Cos}(\alpha + \beta)$

Y el mecanismo es OL1+OL2+OL3

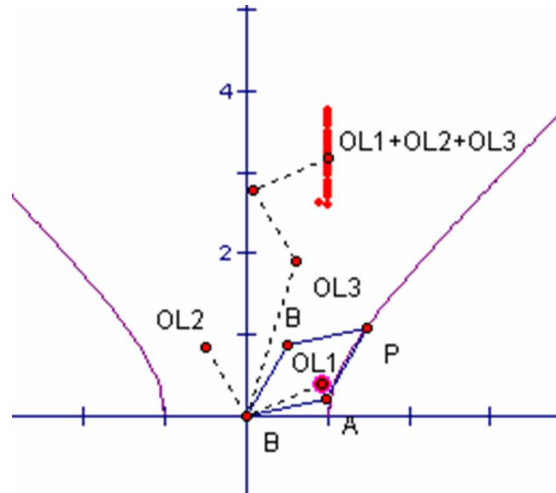


Figura 5.5: Construcción de Kempe para trazar una hipérbola

Para generar la parábola $f(x, y) = x^2 - y$

$$x = n \cos \theta + n \cos \varphi$$

$$y = n \text{sen } \theta + n \text{sen } \varphi$$

$$f(x, y) = (n \cos \theta + n \cos \varphi)^2 - (n \text{sen } \theta + n \text{sen } \varphi)$$

$$= n^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi + 2n^2 \cos \theta \cos \varphi - n \text{sen } \theta - n \text{sen } \varphi$$

$$= n^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi + 2n^2 \cos \theta \cos \varphi + n \text{sen}(-\theta) + n \text{sen}(-\varphi)$$

Usando que

$$\text{sen } \alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \text{ obtenemos } \text{sen}(-\alpha) = \cos(-\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\alpha + \frac{\pi}{2}))$$

Por lo tanto $\text{sen}(-\alpha) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ así que

$$n^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi + 2n^2 \cos \theta \cos \varphi + n \text{sen}(-\theta) + n \text{sen}(-\varphi)$$

$$= n^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi + 2n^2 \cos \theta \cos \varphi + n \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + n \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Usando la identidad } 2n^2 \cos \theta \cos \varphi = 2n^2 [\frac{1}{2} [\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)]]$$

Obtenemos

$$n^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi + 2n^2 \cos \theta \cos \varphi + n \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + n \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$= n^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi + n^2 \cos(\theta + \varphi) + n^2 \cos(\theta - \varphi) + n \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) +$$

$$n \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

Usando la identidad $n^2 \cos^2 \theta = \frac{n^2}{2}[2 \cos^2 \theta - 1 + 1] = \frac{n^2}{2} \cos(2\theta) + \frac{n^2}{2}$

Obtenemos

$$\begin{aligned} & n^2 \cos^2 \theta + n^2 \cos^2 \varphi + n^2 \cos(\theta + \varphi) + n^2 \cos(\theta - \varphi) + n \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + n \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{n^2}{2} \cos(2\theta) + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \cos(2\varphi) + \frac{n^2}{2} + n^2 \cos(\theta + \varphi) + n^2 \cos(\theta - \varphi) + \\ & n \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + n \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Simplificando

$$n(\frac{n^2}{2} \cos(2\theta) + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \cos(2\varphi) + \frac{n^2}{2} + n \cos(\theta + \varphi) + n \cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}))$$

Para construir el linkage asumimos que $n=1$

Link OH con $\angle HOA = \frac{\pi}{2}$

que representa el término $n \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$

Link OI con $\angle IOB = \frac{\pi}{2}$

que representa el término $n \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$

Link OJ con $\angle JOA = \angle AOC$ lo llamaremos J_1 y $|OJ_1| = \frac{OC^2}{2}$

que representa el término $\frac{n^2}{2} \cos(2\theta)$

Link OK con $\angle KOB = \angle BOC$ lo llamaremos K_1 y $|OK_1| = \frac{OC^2}{2}$

que representa el término $\frac{n^2}{2} \cos(2\varphi)$

Link OL con $\angle LOB = \angle AOC$ lo llamaremos L_1 y $OL_1 = OC^2$

que representa el término $n^2 \cos(\theta + \varphi)$

Link OM con $\angle MOB = \angle COA$ lo llamaremos M_1 y $OM_1 = OC^2$

que representa el término $n^2 \cos(\theta - \varphi)$

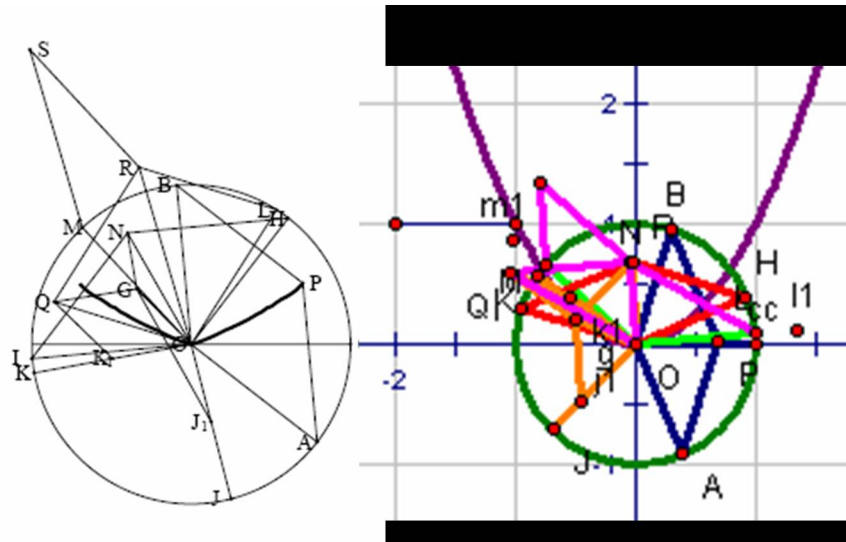


Figura 5.6: Construcción de Kempe para trazar una parábola

Esta construcción fue realizada con el software Geometer's Sketchpad

Capítulo 6

Errores en la prueba de Kempe

En este capítulo mostramos algunos errores en la prueba de Kempe, así como algunas soluciones para reparar dichas fallas. Cuando Kempe utiliza en su construcción un paralelogramo articulado, no toma en consideración las siguientes deformaciones del "mecanismo articulado"

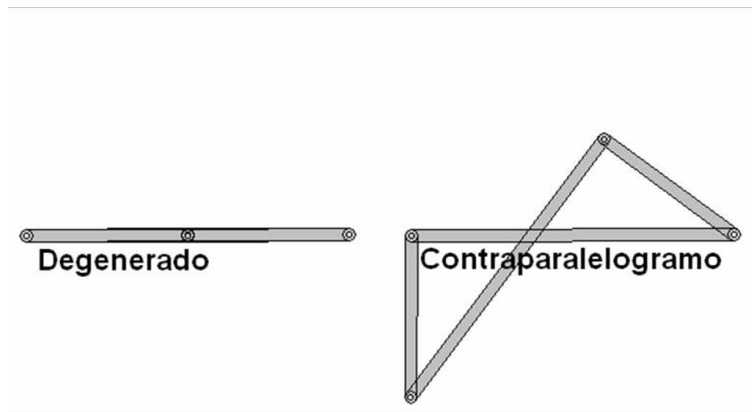


Figura 6.1: Deformaciones del paralelogramo no consideradas en la demostración de Kempe

Veamos, por ejemplo, como evitar el contraparelelogramo

Proposición 1. . Para cualquier $a, b > 0$, el espacio de configuración del paralelogramo

$$S = \{(A, B, C, D) \in (R^2)^4 : |AB| = |CD| = a, |BC| = |AD| = b, AB \parallel CD, BC \parallel AD\}$$

es construible.

Demostración. Para evitar el contraparalelogramo hacemos lo siguiente. Dada una configuración L en S , construimos un nuevo vértice en el punto medio M de AB y un nuevo vértice en el punto medio N de CD . A continuación añadimos una nueva barra MN de longitud $|BC|$ y obtenemos una configuración L' (Ver figura 6.2).

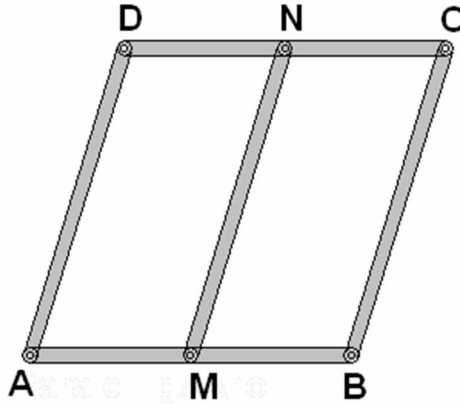


Figura 6.2: Paralelogramo con una barra agregada

Sea p la proyección que manda L en L' . Dado que S está definido a través de un número finito de ecuaciones, entonces S es cerrado. Si $p(\text{Conf}(L')) = S$ y se tiene que para cualquier subconjunto U del plano,

$$p(\text{Conf}(L')) \cap U^4 = S \cap U^4$$

y por lo tanto S es construible.

Ahora veremos que efectivamente $p(\text{Conf}(L')) = S$

Dada la configuración (A, B, C, D) en S la distancia entre los puntos medios M de AB y N de CD es $|BC|$. Claramente

$$P(A, B, C, D) = (A, B, C, D) \in S$$

por lo que $S \subset p(\text{Conf}(L'))$.

Ahora tomamos la configuración $\ell' = (A, B, C, D, M, N)$ que por definición satisface $|AB| = |BC|$, $|AD| = |BC|$ y $AB \parallel DC$, $AD \parallel CB$ y M y N puntos medios de AB y DC respectivamente. Notemos que

$$P(\ell') = (A, B, C, D) \in S.$$

Asi $p(\text{Conf}(L')) \subset S$

En la siguiente configuración de un contraparelogramo (ver figura 6.3)

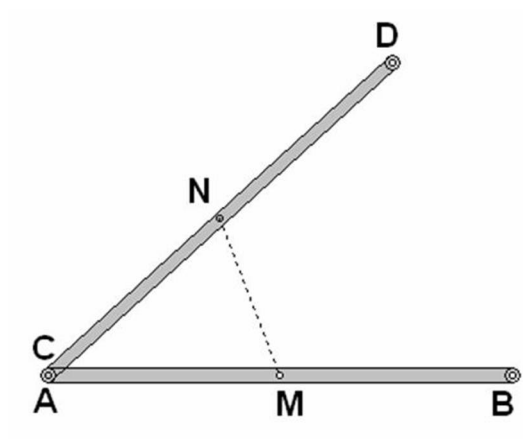


Figura 6.3: Configuración del paralelogramo para el caso 1

Claramente se cumple $\frac{CA+DB}{2} = MN$, donde estamos considerando que $|AB| = |CD| = |AD| = |CB|$.

En el segundo caso (ver figura 6.4)

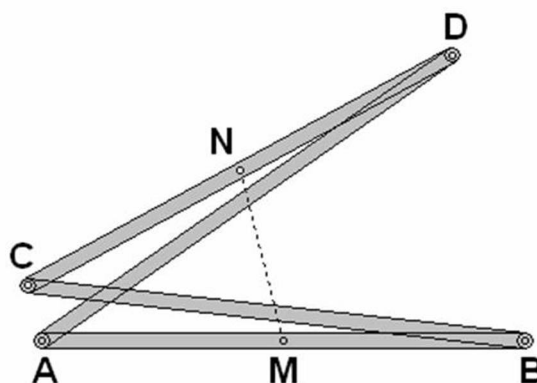


Figura 6.4: Configuración del paralelogramo para el caso 2

consideramos que $|AB| = |CD| < |AD| = |CB|$ y mostraremos que también se cumple que $\frac{CA+DB}{2} = MN$.

Sea X en punto de intersección de CD y AB (ver figura 6.5),

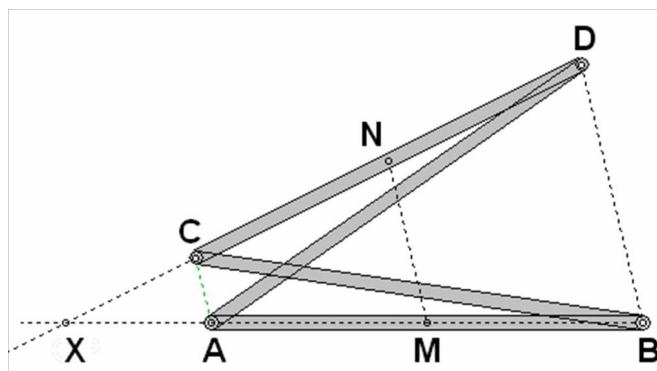


Figura 6.5: Configuración del paralelogramo para el caso 2

tenemos entonces que

$$\frac{XC}{AC} = \frac{XN}{MN} \Rightarrow \frac{XC}{XN}MN = AC$$

$$\frac{XD}{DB} = \frac{XN}{MN} \Rightarrow \frac{XD}{XN}MN = DB$$

por lo tanto

$$AC+DB = \frac{XC}{XN}MN + \frac{XD}{XN}MN = MN\left(\frac{XC}{XN} + \frac{XD}{XN}\right) = MN\frac{XN - CN + CN + XN}{XN} =$$

$$MN\left(2\frac{XN}{XN}\right) = 2MN$$

Por lo tanto

$$\frac{CA + DB}{2} = MN$$

Si llamo Y a la intersección de AD y BC entonces por desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} 2|MN| &= |AC| + |BD| < (|AY| + |YC|) + (|BY| + |YD|) = \\ &(|AY| + |YD|) + (|BY| + |YC|) = |AD| + |BC| = 2|BC| \end{aligned}$$

por lo que $|MN| < |BC|$ lo cual es una contradicción. Por lo que esta configuración solo se da en un contraparalelogramo degenerado.

En la siguiente configuración de contraparalelogramo (ver figura 6.6) tenemos que

$$|AB| = |CD| > |AD| = |CB|$$

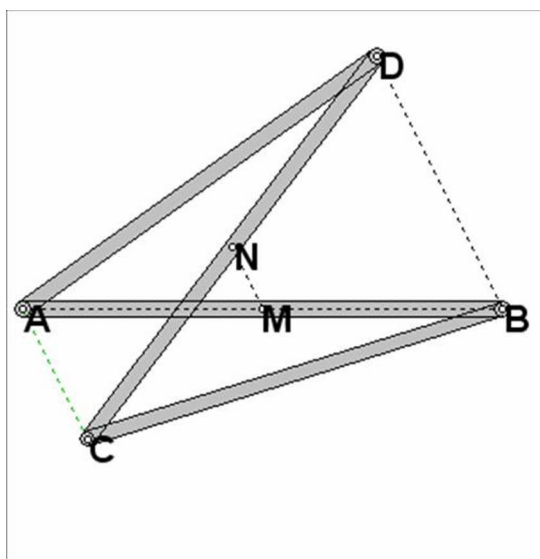


Figura 6.6: Configuración del paralelogramo para el caso 3

Por lo que MN pueden coincidir y no se cumpliría $\frac{CA+DB}{2} = MN$.

Con lo anterior mostramos que $p(\text{Conf}(L')) = S$. □

Ahora trabajaremos con el contraparalelogramo (ver figura 6.7)

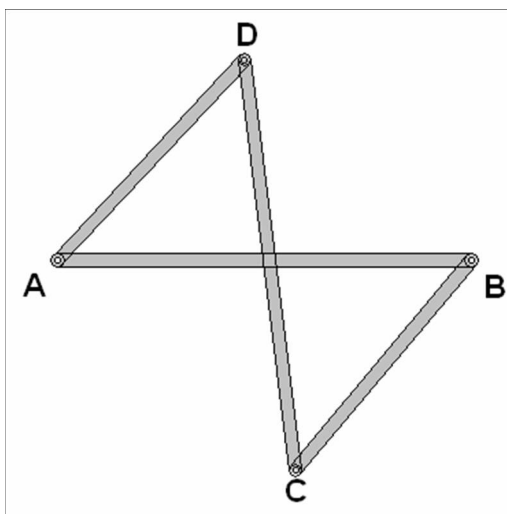


Figura 6.7: Contrapalelogramo

el cual se puede transformar en el siguiente paralelogramo (ver figura 6.8)

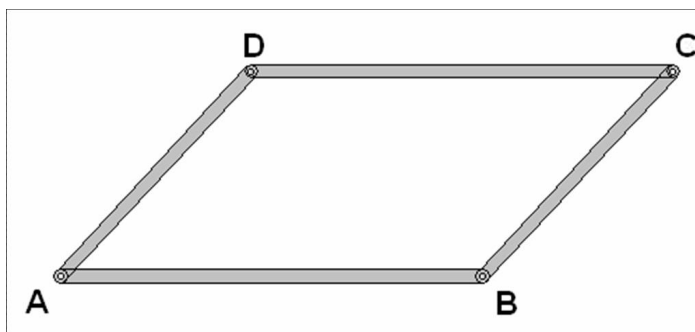


Figura 6.8: Paralelogramo

Para arreglar esto

Proposición 2. . Para cualquier $a, b > 0$, el espacio de configuración del contrapalelogramo

$$S = \{(A, B, C, D) \in (R^2)^4 : |AB| = |CD| = a, |BC| = |AD| = b, AC \parallel BD\}$$

es construible.

Demostración. . Debido a que $|AB| = a \neq |AD| = b$ solo hay una configuración degenerada hasta un movimiento rígido. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a > b$. Tenemos el mecanismo L de la siguiente manera. Sea K,L,M,N los vértices y puntos medios respectivamente de AB, BC, CD, DA y agregando un vértice X conectado a K y M por barras de longitud R_1 y a L y N por barras de longitud R_2 en donde R_1 y R_2 satisfacen $R_2^2 - R_1^2 = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$ (ver figura 6.9)

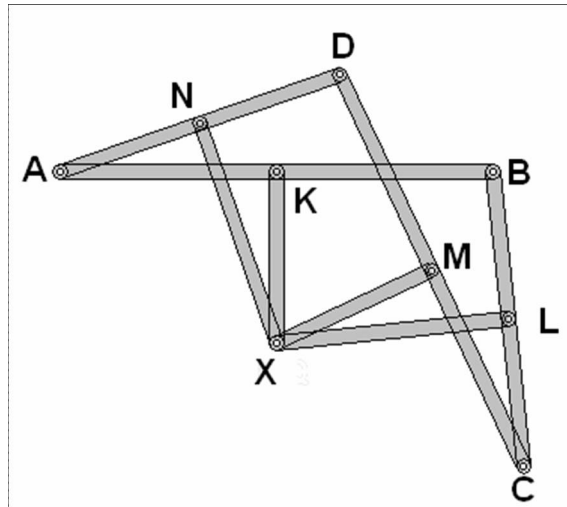


Figura 6.9: Contraparalelogramo con barras agregadas

Teniendo en cuenta que $|AD| = b$, $|XD| = |XB|$, $|AB| = a$

$$R_2^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (XB)^2 \text{ por lo tanto } R_2^2 = (XB)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$R_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (XB)^2 \text{ por lo tanto } R_1^2 = (XB)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Por lo que

$$R_2^2 - R_1^2 = (XB)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left((XB)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

Sea ABCD un no degenerado paralelogramo de configuración L. Entonces KLMN es un paralelogramo (ver figura 6.10)

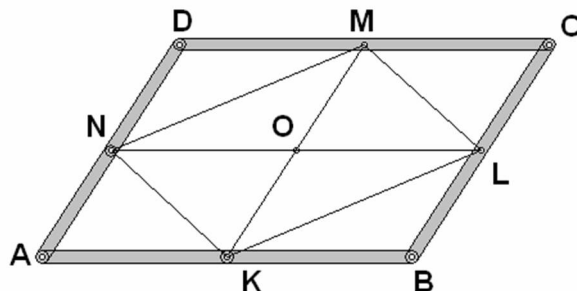


Figura 6.10: Paralelogramo de configuración L

Supongamos que X es un punto tal que $XK=XM=R_1$ y tal que $XL=XN=R_2$, entonces X debe estar en la mediatriz de KM y LN . Como $KLMN$ es un paralelogramo estas mediatrices se intersectan en un punto O que es el centro del paralelogramo $KLMN$. Tenemos que $X \neq O$ porque $R_1 > OK$ y $R_2 > OL$ pues tanto R_1 como R_2 se escogieron largas, por lo tanto no hay extensión a una configuración L' . Ahora veremos que $p(\text{Conf}(L')) \supset S$. Para ello necesitamos unos resultados.

Lema 4. . Sea $ABCD$ un contrapalelogramo posiblemente degenerado con $AB = CD > AD = BC$ y sea K, L, M, N los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA respectivamente entonces $KLMN$ son colineales con K y M entre L y N , $NK=ML$, y $NK \cdot NM = \frac{1}{4}(AB^4 - AD^4)$ (ver figura 6.11)

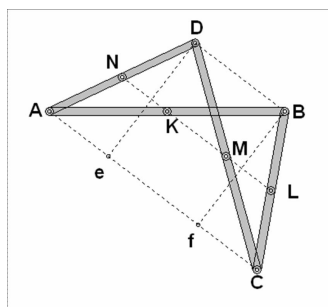


Figura 6.11: Paralelogramo de configuración L

Demostración. Tenemos que $\triangle ANK \approx \triangle ADB$ por lo tanto $\frac{NK}{DB} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow NK = \frac{AN}{AD}DB$

$\triangle DNM \approx \triangle DAC$ por lo tanto $\frac{NM}{AC} = \frac{DN}{AD} \Rightarrow NM = \frac{DN}{AD}AC$

Por lo tanto

$$NK \cdot NM = \left(\frac{AN}{AD}DB\right)\left(\frac{DN}{AD}AC\right) = (AN \cdot DN)(DB \cdot AC) \frac{1}{AD^2} =$$

$$\left(\frac{AD}{2} \frac{AD}{2}\right)(DB \cdot AC) \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4}(DB \cdot AC)$$

Por otro lado tenemos que

$$(Af)^2 + (fB)^2 = (AB)^2 \Rightarrow (Af)^2 = (AB)^2 - (fB)^2 = (AB)^2 - (De)^2$$

$$(Ae)^2 + (De)^2 = (AD)^2 \Rightarrow (Ae)^2 = (AD)^2 - (De)^2$$

Por lo tanto

$$(DB \cdot AC) = (Af - Ae \cdot Af + Ae) = (Af)^2 - (Ae)^2 = (AB)^2 - (De)^2 - ((AD)^2 - (De)^2) = (AB)^2 - (AD)^2$$

Así

$$NK \cdot NM = \frac{1}{4}(DB \cdot AC) = \frac{1}{4}((AB)^2 - (AD)^2) \quad \square$$

Lema 5. .Sea K, L, M, N puntos colineales ($N \neq L$) con K y M entre L y N y $NK=ML$. Sea X un punto en la mediatriz NL , entonces $XN^2 - XK^2 = NK \cdot NM$ (ver figura 6.12)

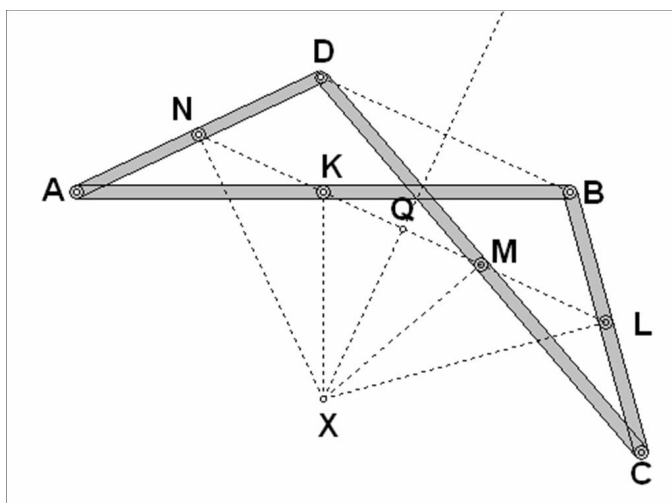


Figura 6.12: Paralelogramo de configuración L

Demostración. . Sea Q el punto medio del segmento NL y XQ es perpendicular a la línea entre NKML entonces si NK=ML Q es el punto medio de KM entonces

$$\begin{aligned} XN^2 - XK^2 &= XQ^2 + NQ^2 - (XQ^2 + KQ^2) = NQ^2 - KQ^2 = \\ (NQ - KQ)(NQ + KQ) &= NK \cdot NM \end{aligned} \quad \square$$

Ahora estamos listos para mostrar que $p(\text{Conf}(\mathbf{L}')) \supset S$ o equivalentemente para algún degenerado o contraparalelogramo de configuración \mathbf{L} se puede extender a uno de configuración \mathbf{L}' .

Dada una configuración \mathbf{L} encontramos un punto X tal que $XK=XM=R_1$ y $XL=XN=R_2$. Elegimos X en la mediatriz NL tal que $XL=XN=R_2$ por los lemas 4 y 5

$$XN^2 - XK^2 = \frac{1}{4}(AB^2 - AD^2) = R_2^2 - R_1^2 \text{ y } XK=XM=R_1 \quad \square$$

Capítulo 7

Construcción de Kempe vs otras construcciones

En este capítulo vamos a comparar un mecanismo construido con el algoritmo de Kempe y el correspondiente mecanismo construido con otro método.

Según el algoritmo de Kempe, dada la ecuación $f(x, y) = x - y - 2 = 0$ obtenemos $f(\theta, \varphi) = \text{Cos}(\theta + \frac{\pi}{4}) + \text{Cos}(\varphi + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} = 0$ (ver figura 7.1)

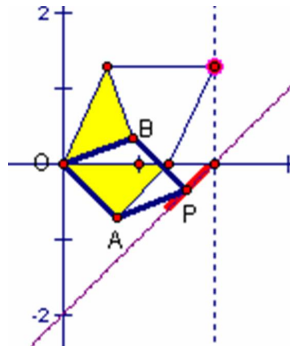


Figura 7.1: Construcción de Kempe para dibujar una línea recta

Observamos que necesitamos 2 aditores o sumadores de ángulos. El aditor consta de 11 barras como se ve en la figura 7.2

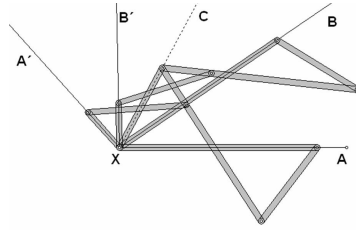


Figura 7.2: Aditor de ángulos

Ademas necesitamos 2 transladores. El translador consta de 7 barras como se ve en la figura 7.3

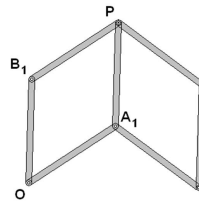


Figura 7.3: Translador

En total 22 barras(aditores)+14 barras(transladores)+4 barras(paralelogramo)=40 barras. Desde luego existen mecanismos que trazan líneas rectas y que ocupan un menor número de barras. Vamos a ver aquí 2 mecanismos: uno es el de Peaucellier y otro es el de Hart cuyas construcciones se basan en una propiedad de la inversión. Antes vamos a enunciar un resultado muy conocido cuya demostración se omite.

Teorema 2. Teorema de Inversión *La inversión de la imagen de un círculo que pase por el centro de inversión es una línea recta.*

La inversión Q , de un punto P con un círculo O se define como sigue: Q es un punto de la línea OP (en el mismo lado de O con P) tal que equivale a $OP \times OQ = r^2$ cuadrado del radio del círculo O .

Mecanismo de Peaucellier. En la Figura 7.4

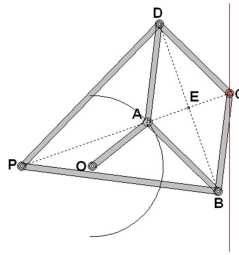


Figura 7.4: Mecanismo de Peaucellier

$b = |PD| = |PB|$, $a = |AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, y $|OP| = |OA| = c$.
Sea AC y BD intersectados en el punto E entonces

$$PA \times PC = (PE - AE) \times (PE + AE) = PE^2 - AE^2 = b^2 - DE^2 - aE^2 = b^2 - a^2$$

Por lo tanto, el punto c es la imagen del punto A bajo una inversión con centro en P y potencia $b^2 - a^2$. Por lo tanto como A se mueve sobre un círculo que pasa por P, c se mueve sobre una recta.

Ahora vamos a revisar el mecanismo de Hart para trazar una línea recta.

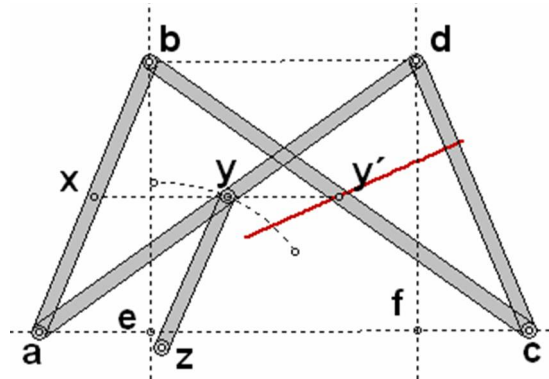


Figura 7.5: Mecanismo de Hart

En la Figura 7.5 observamos que $ab = cd$ y $bc = da$ y vamos a probar que $xy \cdot xy'$ es constante. Como $\triangle axy \approx \triangle abd$ entonces $\frac{xy}{bd} = \frac{ax}{ab} \Rightarrow xy = bd \frac{ax}{ab}$
Y como $\triangle bxy' \approx \triangle bac$ entonces $\frac{xy'}{ac} = \frac{bx}{ab} \Rightarrow xy' = ac \frac{bx}{ab}$
por lo tanto $xy \cdot xy' = \frac{(bd \cdot ac)(ax \cdot bx)}{ab^2}$

58CAPÍTULO 7. CONSTRUCCIÓN DE KEMPE VS OTRAS CONSTRUCCIONES

Tenemos que ab es una cantidad constante y ax, bx son una proporción constante con respecto ab , sólo falta ver que $bd \cdot ac$ es constante.

$$\text{Tenemos que } af^2 + fd^2 = ad^2 \Rightarrow af^2 = ad^2 - fd^2 \Rightarrow af^2 = ad^2 - eb^2$$

$$\text{Por otro lado } ae^2 + eb^2 = ab^2 \Rightarrow ae^2 = ab^2 - eb^2$$

Así que

$$bd \cdot ac = (af - ae)(af + ae) = af^2 - ae^2 = (ad^2 - eb^2) - (ab^2 - eb^2) = ad^2 - ab^2$$

como ambos términos son constantes entonces $bd \cdot ac$ es constante, esto significa que los puntos y y y' son inversas la una de la otra con respecto a un círculo centrado en x .

El mecanismo de Peaucellier utiliza 7 barras y el mecanismo de Hart utiliza sólo 5, mientras que con el algoritmo de Kempe se utilizan alrededor de 40 barras.

Haciendo un análisis similar para una parábola, el algoritmo de Kempe utilizaría aproximadamente 47 barras, lo cual hace poco viable la construcción de este mecanismo. Existen sin embargo mecanismos que utilizan un menor número de barras; por ejemplo, en la figura 7.6 vemos un mecanismo que utiliza el principio de inversión similar al inversor de Peaucellier.

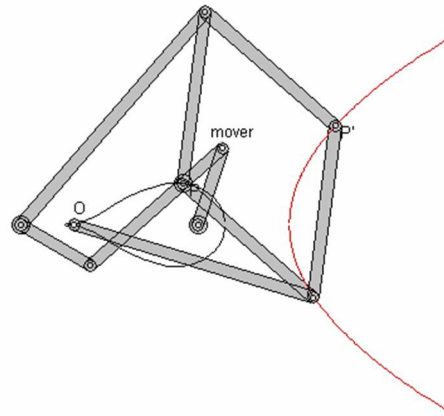


Figura 7.6: Mecanismo para dibujar una Parábola

Un problema que no ha sido resuelto es:

Dada una curva algebraica cual es el número de barras que se necesitan para trazarla usando el algoritmo de Kempe.

Dada una curva algebraica

$$f(x, y) = c + \sum_{\substack{0 \leq s \leq d, -d \leq t \leq d \\ (s, t) \neq (0, 0)}} (d_{s, t} \text{Cos}(s\varphi + t\theta + \psi_{s, t}))$$

Necesitamos construir un mecanismo articulado para cada término $s\varphi + t\theta + \psi_{s, t}$. Para construir $s\varphi + t\theta$ necesitamos construir $\varphi, 2\varphi, \dots, n\varphi$ y $\theta, 2\theta, \dots, n\theta$. Para cada término $n\theta$ y $n\varphi$ utilizaremos un multiplicador de ángulos el cual consta de 4, 6, 8, ... $2(n+1)$ en total por los dos multiplicadores necesitamos $4(n+1)$ barras.

Para sumar los ángulos s, t tal que $1 \leq s + t \leq n$ donde $s=0, 1, \dots, n$ y $t=0, 1, \dots, n$ necesitamos para s $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ y para t $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ en total $(n+1)(n+2)$ y como cada sumador de ángulos consta de 11 barras en total $11(n+1)(n+2) = 11(n^2 + 3n + 2)$.

Finalmente podemos optar por el trasladador de 7 barras o el sumador de vectores de 14 barras en el primer caso se necesitaría $7(n^2 + 3n + 2)$ en el segundo caso $14(n^2 + 3n + 2)$ en total la construcción de kempe necesitaría $4(n+1) + 11(n^2 + 3n + 2) + 14(n^2 + 3n + 2)$ barras, por lo que la complejidad de la construcción de Kempe es $O(n^2)$

En [2] los profesores X. Gao y C. Zhu dieron una cota para el número de barras en el algoritmo de kempe y su cota es $4(n+1) + (n^2 + 3n) \cdot 2N + (n^2 + 3n)((n^2 + 3n - 2))$ por lo que la complejidad de la construcción de Kempe requiere $O(n^4)$ barras.

Capítulo 8

Mecanismos de 2 y 3 barras

En este capítulo hacemos un estudio de mecanismos articulados de dos y tres barras.

Mecanismo 2-barras

Un mecanismo 2-barras es un mecanismo bastante simple cuya geometría no es de interés

La relación en un 2 barras se ilustra en la figura (8.1).

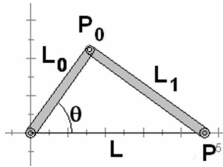


Figura 8.1: Mecanismo 2-barras

El punto en el origen se fija; las longitudes L_0 L_1 de la primera y segunda barras son constantes. Supongamos que el punto P se mueve a lo largo del eje X. El punto $P_0(x_0, y_0)$ se mueve (alrededor de un círculo cuyo centro es el origen y cuyo radio L_0).

La geometría de un 2-barras bajo esta configuración cumple

$$L_1^2 = L_0^2 + L^2 - 2L_0L \cos \theta \quad \text{Por lo que} \quad \cos(\theta) = \frac{L_0^2 + L^2 - L_1^2}{2L_0L}$$

$$\text{En consecuencia } \theta = \text{ArcCos}\left(\frac{L_0^2 + L^2 - L_1^2}{2L_0L}\right)$$

y por lo tanto la posición de P_0 está determinada por L .

Si fijamos P_0 entonces P_1 genera una circunferencia (ver figura 8.2).

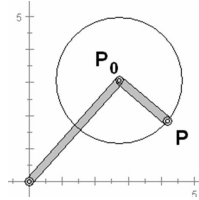


Figura 8.2: Mecanismo 2-barras fijando un P_0

Si P_0 y P_1 se mueven libremente, entonces P_0 se mueve sobre una circunferencia y P_1 no genera una curva en particular (ver figura 8.3) y claramente, P_1 no determina la posición de P_0 .

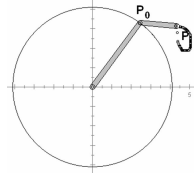


Figura 8.3: Mecanismo 2-barras con P_0 y P_1 libre

Si P_1 se encuentra en alguna posición que no sea el extremo de la barra, se dibuja una circunferencia (ver figura 8.4).

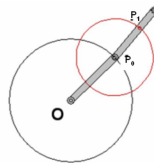


Figura 8.4: Mecanismo 2-barras con P_1 sobre la barra

En resumen, con un mecanismo de 2 barras no se generan más curvas que circunferencias.

Mecanismos de 3 barras

En esta parte haremos una breve revisión de un mecanismo de 3 barras, y demostraremos algunos teoremas acerca de ellos.

Los cuadriláteros son los sistemas más simples. El sistema está definido por las longitudes de las cuatro varillas y el orden en el que están colocadas; sea $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ (ver figura 8.5).

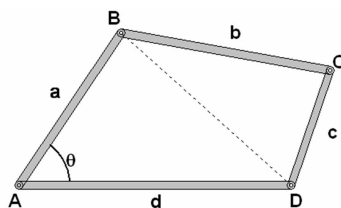


Figura 8.5: Cuadrilátero Articulado

La construcción del sistema es posible si cada una de las longitudes es inferior a la suma de las otras tres. La configuración del cuadrilátero depende de un parámetro independiente; escogamos el $\angle DAB = \theta$, definido en el intervalo $[0, 2\pi]$ en el plano. Se deduce $\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta$ y la existencia del triángulo BCD impone la condición

$$(b - c)^2 \leq a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta \leq (b + c)^2.$$

Es decir

$$\frac{a^2 + d^2 - (b + c)^2}{2ad} \leq \cos \theta \leq \frac{a^2 + d^2 - (b - c)^2}{2ad}$$

Por lo que el ángulo θ puede o no tener una restricción dependiendo de que existan los ángulos θ_1 y θ_2 definidos por

$$\cos \theta_1 = \frac{a^2 + d^2 - (b + c)^2}{2ad},$$

$$\cos \theta_2 = \frac{a^2 + d^2 - (b - c)^2}{2ad}.$$

Si θ puede variar de 0 a 2π sin límite, decimos que la articulación es de revolución completa.

Con el fin de utilizar uno de nuestros sistemas articulados para un trazo mecánico de curvas, lo colocamos sobre el plano del dibujo y fijamos a dicho plano algunos puntos del mecanismo, a través de articulaciones que permitan la rotación de las barras alrededor del punto que ha quedado fijo.

Uno de los mecanismos articulados más simples así constituido se obtiene fijando 2 puntos de una varilla AD de un cuadrilátero articulado y dos barras AB y CD, llamadas manivelas, de manera tal que pueden rotar alrededor de sus vértices fijos A,D, respectivamente, (ver figura 8.6)

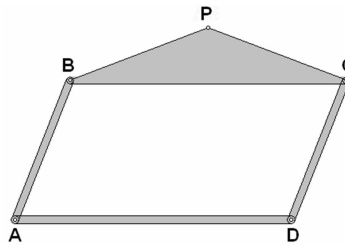


Figura 8.6: Cuadrilátero Articulado

Dos barras se unen a una tercera barra BC, llamada biela. Esto constituye un tres barras.

El sistema conserva un grado de libertad, de modo que todo punto relacionado con una de sus partes describe una curva al mover el cuadrilátero.

Veamos ahora que tipo de curva podemos trazar con un tres barras.

En la Figura 8.7 tenemos un triángulo ABM con base AB, nuestra curva es generada por el vértice M cuando A,B se desplazan en círculos con centros O_A y O_B y radios r,s. Tomamos O_A como el origen del sistema de coordenadas cartesianas, O_A y O_B situados en el eje X y sea (x', y') , (x'', y'') y (x, y) las coordenadas A,B,M respectivamente

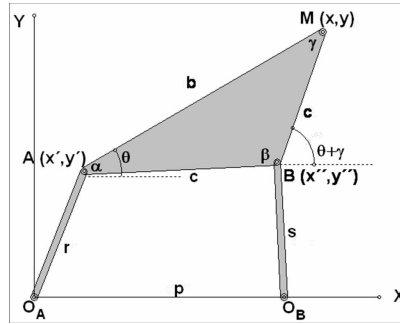


Figura 8.7: Mecanismo 3-barras

Tenemos que

$$\cos \theta = \frac{x - x'}{b} \Rightarrow x' = x - b \cos \theta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{y - y'}{b} \Rightarrow y' = y - b \text{sen } \theta$$

$$\cos(\theta + \gamma) = \frac{x - x''}{a} \Rightarrow x'' = x - a \cos(\theta + \gamma)$$

$$\text{sen}(\theta + \gamma) = \frac{y - y''}{a} \Rightarrow y'' = y - a \text{sen}(\theta + \gamma)$$

Como A y B describen círculos o arcos de círculos con centros O_A y O_B respectivamente, entonces

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \text{ y } x''^2 + y''^2 = s^2$$

Sustituyendo los valores de x' , y' y x'' , y'' obtenemos

$$(x - b \cos \theta)^2 + (y - b \text{sen } \theta)^2 = r^2 \quad \dots(1)$$

$$(x - a \cos(\theta + \gamma) - p)^2 + (y - a \text{sen}(\theta + \gamma))^2 = s^2 \quad \dots(2)$$

Desarrollando los cuadrados, simplificando y reordenando términos

Para (1)

$$x^2 - 2xb \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta + y^2 - 2ay \text{sen } \theta + b^2 \text{sen}^2 \theta = r^2$$

$$x^2 + y^2 + b^2 - 2b(x \cos \theta + y \text{sen } \theta) = r^2 \Rightarrow$$

$$x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = \frac{x^2 + y^2 + b^2 - r^2}{2b}$$

Para (2)

$$\begin{aligned} x^2 + a^2 \cos^2(\theta + \gamma) + p^2 - 2xa \cos(\theta + \gamma) - 2xp + 2ap \cos(\theta + \gamma) + \\ y^2 - 2ay \operatorname{sen}(\theta + \gamma) + a^2 \operatorname{sen}^2(\theta + \gamma) = s^2 \end{aligned}$$

Usando la fórmula para la suma de senos y cosenos

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 + a^2 - 2xa(\cos \theta \cos \gamma - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma) + 2ap(\cos \theta \cos \gamma - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma)$$

$$- 2ya(\operatorname{sen} \theta \cos \gamma + \cos \theta \operatorname{sen} \gamma) = s^2 \Rightarrow$$

$$(x - p)^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \theta \cos \gamma + 2ap \cos \theta \cos \gamma - 2ay \cos \theta \operatorname{sen} \gamma +$$

$$2ax \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma - 2ap \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma - 2ay \cos \gamma \operatorname{sen} \theta = s^2 \Rightarrow$$

$$- 2a \cos \theta (x \cos \gamma - p \cos \gamma + y \operatorname{sen} \gamma) + 2a \operatorname{sen} \theta (x \operatorname{sen} \gamma - p \operatorname{sen} \gamma - y \cos \gamma) =$$

$$-(x - p)^2 - y^2 - a^2 + s^2 \Rightarrow$$

$$\cos \theta ((x - p) \cos \gamma + y \operatorname{sen} \gamma) - \operatorname{sen} \theta ((x - p) \operatorname{sen} \gamma - y \cos \gamma) = \frac{-(x - p)^2 - y^2 - a^2 + s^2}{-2a}$$

Por lo tanto

$$\cos \theta ((x - p) \cos \gamma + y \operatorname{sen} \gamma) - \operatorname{sen} \theta ((x - p) \operatorname{sen} \gamma - y \cos \gamma) = \frac{(x - p)^2 + y^2 + a^2 - s^2}{2a}$$

Tenemos así un sistema de ecuaciones

$$x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = \frac{x^2 + y^2 + b^2 - r^2}{2b}$$

$$((x - p) \cos \gamma + y \operatorname{sen} \gamma) \cos \theta - ((x - p) \operatorname{sen} \gamma - y \cos \gamma) \operatorname{sen} \theta = \frac{(x - p)^2 + y^2 + a^2 - s^2}{2a}$$

El cual resolvemos para $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ y sustituimos esos valores en la identidad $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$. Finalmente aplicando la ley de los senos $k = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$ en el triángulo ABM obtenemos la ecuación del lugar geométrico,

$$\{\operatorname{sen} \alpha ((x - p) \operatorname{sen} \gamma - y \cos \gamma)(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + y \operatorname{sen} \beta ((x - p)^2 + y^2 + a^2 - s^2)\}^2 +$$

$$\{\operatorname{sen} \alpha ((x - p) \cos \gamma + y \operatorname{sen} \gamma)(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + x \operatorname{sen} \beta ((x - p)^2 + y^2 + a^2 - s^2)\}^2 =$$

$$4k^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma (x(x - p) - y - py \cot \gamma)^2$$

Esta ecuación es de sexto grado y debido a sus propiedades también recibe el título de séxtica tricircular. Una de sus propiedades ya se ha mencionado: cualquier recta la interseca en a lo más seis puntos.

Veamos ahora el caso particular en que el tres barras se fija a un sistema coordenado cartesiano.

Teorema 3. Teorema de Johnson. Si fijamos un tres barras a un sistema coordenado plano y los puntos fijos en ± 1 dadas tres barras de longitudes a, b, c y si colocamos un trazador Z en la barra transversal (ver figura 8.8).

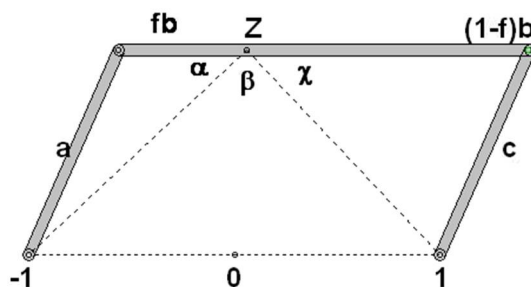


Figura 8.8: Mecanismo 3-barras

Definimos $g=1-f$ entonces la ecuación de la curva trazada por Z es

$$g^2|z-1|^2(|z+1|^2+f^2b^2-a^2)^2+4g^2f^2b^2(|z|^2-1)^2+f^2|z+1|^2(|z-1|^2+g^2b^2-c^2)^2+2fg(|z+1|^2+f^2b^2-a^2)(|z|^2-1)(|z-1|^2+g^2b^2-c^2)-4g^2f^2b^2|z^2-1|^2=0$$

Demostración. Necesitamos probar antes la siguiente identidad

$$\text{Dados los ángulos } \alpha, \beta, \chi. \text{ Si } \alpha + \beta + \chi = n\pi \text{ entonces} \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi - 2(-1)^n \cos \alpha \cos \beta \cos \chi - 1 = 0$$

Prueba por inducción (caso $n=1$)

$$\alpha + \beta + \chi = \pi \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \chi) = -1$$

por las fórmulas del coseno y el seno de la suma se tiene,

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \chi - \sin \alpha \cos \beta \sin \chi - \cos \alpha \sin \beta \sin \chi - \sin \alpha \sin \beta \cos \chi = -1 \dots (1)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha + 2\beta + 2\chi) &= \cos(2\pi) = 1 \Rightarrow \\ \cos(2\alpha) \cos(2\beta) \cos(2\chi) - \sin(2\alpha) \cos(2\beta) \sin(2\chi) - \cos(2\alpha) \sin(2\beta) \sin(2\chi) \\ &\quad - \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \cos(2\chi) = 1 \dots (2) \end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas del ángulo doble

$$\begin{aligned} (2 \cos^2 \alpha - 1)(2 \cos^2 \beta - 1)(2 \cos^2 \chi - 1) - (2 \sin \alpha \cos \alpha)(2 \cos^2 \beta - 1)(2 \sin \chi \cos \chi) \\ - (2 \cos^2 \alpha - 1)(2 \sin \beta \cos \beta)(2 \sin \chi \cos \chi) - (2 \sin \alpha \cos \alpha)(2 \sin \beta \cos \beta)(2 \cos^2 \chi - 1) - 1 = 0 \end{aligned}$$

Abriendo los paréntesis y dividiendo por 2,

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \chi - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 4 \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \chi \cos \chi - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \chi + \\ \cos^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta \sin \chi \cos \chi - 4 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \cos^2 \chi + \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \chi \cos \chi - 2 \cos^2 \beta \cos^2 \chi + \cos^2 \beta + \\ 2 \sin \beta \cos \beta \sin \chi \cos \chi + \cos^2 \chi - 1 = 0 \end{aligned}$$

Sacamos factor común $4 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi$ de todos los términos con coeficiente 4,

$$\begin{aligned} (4 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi)(\cos \alpha \cos \beta \cos \chi - \cos \alpha \sin \beta \sin \chi - \cos \alpha \sin \beta \sin \chi - \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \chi) - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \chi + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \chi \cos \chi - 2 \cos^2 \beta \cos^2 \chi + \cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta \sin \chi \cos \chi + \cos^2 \chi - 1 = 0 \end{aligned}$$

El contenido del primer paréntesis es (1), por lo que queda

$$\begin{aligned} -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \chi + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \chi \cos \chi - 2 \cos^2 \beta \cos^2 \chi + \cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta \sin \chi \cos \chi + \cos^2 \chi - 1 = 0 \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi + 2 \cos \alpha \cos \beta (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) + \\ 2 \cos \alpha \cos \chi (\sin \alpha \sin \chi - \cos \alpha \cos \chi) + 2 \cos \beta \cos \chi (\sin \beta \sin \chi - \cos \beta \cos \chi) - 1 = 0 \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-4 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) -$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \chi) - 2 \cos \beta \cos \chi \cos(\beta + \chi) - 1 = 0$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\alpha + \beta) = -\cos(\chi)$, ya que $\alpha + \beta = \pi - \chi$

$$-4 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi +$$

$$2 \cos \alpha \cos \chi \cos \beta + 2 \cos \beta \cos \chi \cos \alpha - 1 = 0$$

\Rightarrow

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \chi - 1 = 0$$

Ahora suponemos que para $n = k$

$$\alpha + \beta + \chi = k\pi \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi - 2(-1)^k \cos \alpha \cos \beta \cos \chi - 1 = 0$$

Por demostrar el resultado para $n = k + 1$, tenemos que

$$\alpha + \beta + \chi = (k + 1)\pi \Rightarrow \alpha + \beta + \chi = k\pi + \pi \Rightarrow \alpha + \beta + \chi - \pi = k\pi$$

usando en la última igualdad la hipótesis de inducción se tiene:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\chi - \pi) - 2(-1)^k \cos \alpha \cos \beta \cos(\chi - \pi) - 1 = 0$$

pero $\cos(\chi - \pi) = -\cos(\chi)$ por lo tanto

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \underbrace{\cos^2 \chi}_{\cos^2(\chi - \pi) = (-\cos(\chi))^2} - 2(-1)^k \cos \alpha \cos \beta \underbrace{(-1) \cos \chi}_{\cos(\chi - \pi) = -\cos \chi} - 1 = 0$$

obtenemos así

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi - 2(-1)^{k+1} \cos \alpha \cos \beta \cos \chi - 1 = 0$$

Regresando a nuestra demostración tenemos que según la figura

$$\cos \alpha = \frac{f^2 b^2 + |z + 1|^2 - a^2}{2fb|z + 1|}$$

$$\cos \beta = \frac{|z + 1|^2 + |z - 1|^2 - 2^2}{|z + 1||z - 1|}$$

$$\cos \chi = \frac{g^2 b^2 + |z - 1|^2 - c^2}{2gb|z - 1|}$$

Sustituyendo estos valores en la identidad

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi - 2(-1)^n \cos \alpha \cos \beta \cos \chi - 1 = 0$$

Donde $\alpha + \beta + \chi = n\pi$ tomando el caso $n=1$ se tiene

$$\left(\frac{f^2 b^2 + |z+1|^2 - a^2}{2fb|z+1|}\right)^2 + \left(\frac{|z+1|^2 + |z-1|^2 - 2^2}{|z+1||z-1|}\right)^2 + \left(\frac{g^2 b^2 + |z-1|^2 - c^2}{2gb|z-1|}\right)^2 +$$

$$2\left(\frac{f^2 b^2 + |z+1|^2 - a^2}{2fb|z+1|}\right)\left(\frac{|z+1|^2 + |z-1|^2 - 2^2}{|z+1||z-1|}\right)\left(\frac{g^2 b^2 + |z-1|^2 - c^2}{2gb|z-1|}\right) - 1 = 0$$

Multiplicando por $4f^2 g^2 b^2 |z^2 - 1|^2$ y simplificando obtenemos

$$g^2 |z-1|^2 (f^2 b^2 + |z+1|^2 - a^2)^2 + 4f^2 g^2 b^2 (|z|^2 - 1)^2 + f^2 |z+1|^2 (g^2 b^2 + |z-1|^2 - c^2) +$$

$$2fg((|z+1|^2 + f^2 b^2 - a^2)(|z|^2 - 1)(|z-1|^2 + g^2 b^2 - c^2)) - 4f^2 g^2 b^2 |z^2 - 1|^2 = 0$$

que es una ecuación de grado 6 □

A lo largo de la historia se hicieron varios intentos de aproximar rectas utilizando un 3 barras. Un renombrado ingeniero y desarrollador de máquinas de vapor James Watt necesitaba un mecanismo para convertir el movimiento en línea recta de un movimiento circular, utilizando la tecnología mecanizada de muy baja capacidad disponible en 1784. y la pregunta era ¿Existe un mecanismo adecuado?

Watt fue incapaz de resolver este problema, pero él logró elaborar un mecanismo anclado 3 barras para establecer una curva algebraica de orden 6.

Demostración. En la figura 8.9

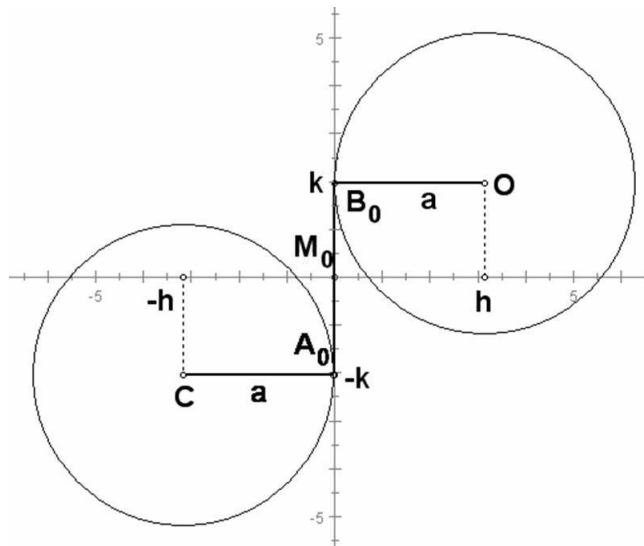


Figura 8.9: Mecanismo de Watt

$$CA_0 = OB_0 \text{ y } A_0B_0 = 2K$$

Supongamos que la tenemos un ángulo α en torno al punto C y un ángulo θ en torno al punto O (ver figura 8.10), y $CA=OB$

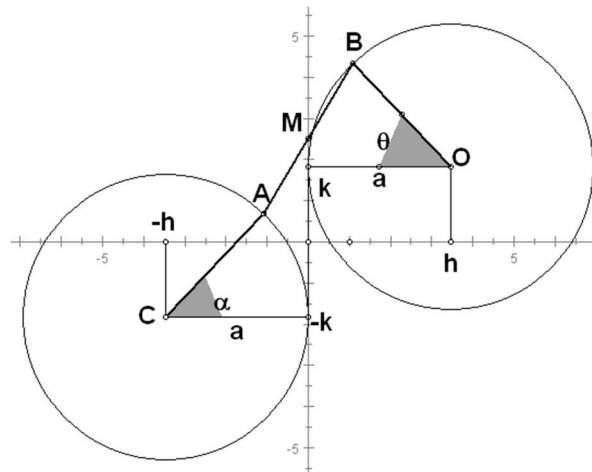


Figura 8.10: Mecanismo de Watt

entonces el punto B tiene coordenadas

$$X_B = h - x' = h - a \cos \theta$$

$$Y_B = k + y' = k + a \sen \theta$$

Y el punto A tiene coordenadas

$$X_A = -h + x'' = -h + a \cos \alpha$$

$$Y_A = -k + y'' = -k + a \sen \alpha$$

Por lo que

$$\begin{aligned} AB &= |B - A| = |(h - a \cos \theta, k + a \sen \theta) - (-h + a \cos \alpha, -k + a \sen \alpha)| \\ &= |(h - a \cos \theta + h - a \cos \alpha, k + a \sen \theta + k - a \sen \alpha)| \\ &= |(2h - a(\cos \theta + \cos \alpha), 2k + a(\sen \theta - \sen \alpha))| \end{aligned}$$

Usando las identidades trigonométricas

$$\cos \theta + \cos \alpha = 2 \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right)$$

$$\cos \theta - \cos \alpha = -2 \sen\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right)$$

$$\sen \theta + \sen \alpha = 2 \sen\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right)$$

$$\sen \theta - \sen \alpha = 2 \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right)$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} AB &= |2h - 2a \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right), 2k + 2a \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right)| \\ &= \sqrt{(2h - 2a \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right))^2 + (2k + 2a \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right))^2} \\ &= 2\sqrt{(h - a \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right))^2 + (k + a \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right))^2} \end{aligned}$$

Como $AB = A_0B_0 = 2k$ entonces

$$\begin{aligned} &2\sqrt{(h - a \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right))^2 + (k + a \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right))^2} = 2k \\ \Leftrightarrow &(h - a \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right))^2 + (k + a \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right))^2 = k^2 \\ \Leftrightarrow &h^2 - 2ah \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) + a^2 \cos^2\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) + \\ &k^2 + 2ak \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) + a^2 \sen^2\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) = k^2 \\ \Leftrightarrow &2ah \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) - 2ak \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) - a^2 \cos^2\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) (\cos^2\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) + \sen^2\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right)) = \\ &h^2 \\ \Leftrightarrow &2ah \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) - 2ak \sen\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) - a^2 \cos^2\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) = h^2 \end{aligned}$$

Como $a=h$ entonces

$$2a^2 \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) - 2ak \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) - a^2 \cos^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = a^2$$

Teniendo en cuenta que el punto M se mueve en el punto medio AB

$$Mx = \frac{X_B + X_A}{2} = \frac{h - a \cos \theta + h + a \cos \alpha}{2} = -\frac{a}{2}(\cos \theta - \cos \alpha) =$$

$$a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right)$$

$$My = \frac{Y_B + Y_A}{2} = \frac{k + a \operatorname{sen} \theta - k + a \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{a}{2}(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha) =$$

$$a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right)$$

Vamos a encontrar un valor para

$$\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$$

En lo que sigue utilizaremos las identidades siguientes

$$x = a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \text{ e } y = a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$$

$$x^2 = a^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \text{ e } y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$x^2 + y^2 = a^2 - a^2 \cos^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow a^2 \cos^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = a^2 - x^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2}}$$

Por otro lado

$$\cos^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2} \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}$$

Mientras que

$$x = a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow x = a \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Finalmente

$$y = a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow y = a \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}} \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Vamos a substituir estos valores en la ecuación

$$2a^2 \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) - 2ak \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) - a^2 \cos^2\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = a^2$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}
& 2a^2 \sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2ak \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2}} - (a^2 - x^2 - y^2) = a^2 \\
\Leftrightarrow & 2ay \sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}} - 2ky \sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}} = 2a^2 - (x^2 + y^2) \\
\Leftrightarrow & \left(\sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}} (2ay - 2kx) \right)^2 = (2a^2 - (x^2 + y^2))^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2} (4a^2y^2 - 8akxy + 4k^2x^2) = 4a^2 - 4a^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 \\
\Leftrightarrow & (a^2 - x^2 - y^2)(4a^2y^2 - 8akxy + 4k^2x^2) = 4a^4(x^2 + y^2) - 4a^2(x^2 + y^2)^2 + \\
& (x^2 + y^2)^3 \\
\Leftrightarrow & 4(a^2 - x^2 - y^2)(ay - kx)^2 = (x^2 + y^2)(2a^2 - (x^2 + y^2))^2
\end{aligned}$$

La cual representa una ecuación de sexto grado, en este caso particular. \square

Un ejemplo de una curva que se puede trazar con un tres barras es la Lemniscata de Bernoulli (ver figura 8.11) cuya ecuación es $(x^2+y^2)^2+2c^2(x^2+y^2) = 0$

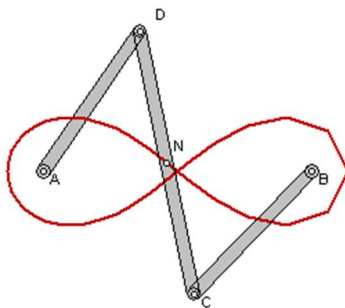


Figura 8.11: Lemniscata de Bernoulli

Para demostrar esto utilizaremos el Teorema de Apolonio conocido tambien como el Teorema de Stewart que establece que en cualquier triángulo $\triangle ABC$ (ver figura 8.12)

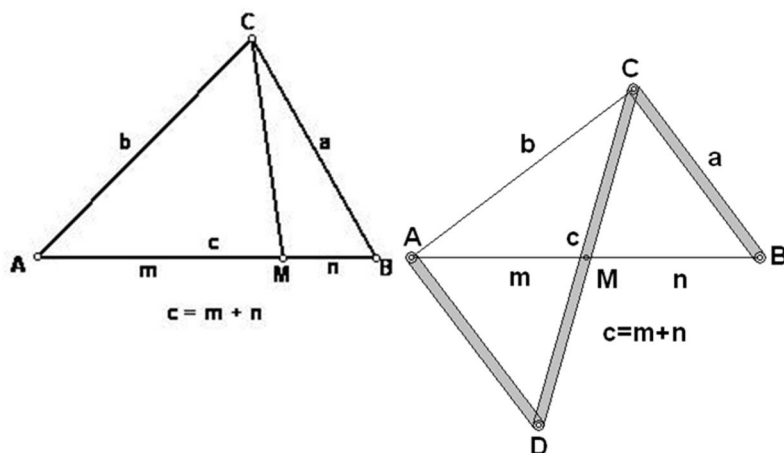


Figura 8.12: Teorema de Stewart

$$m \cdot a^2 + n \cdot b^2 = c \cdot CM^2 + m \cdot n^2 + n \cdot m^2$$

Usando el teorema de Apolonio y $\triangle AA'B'$ (ver figura 8.13) tenemos que:

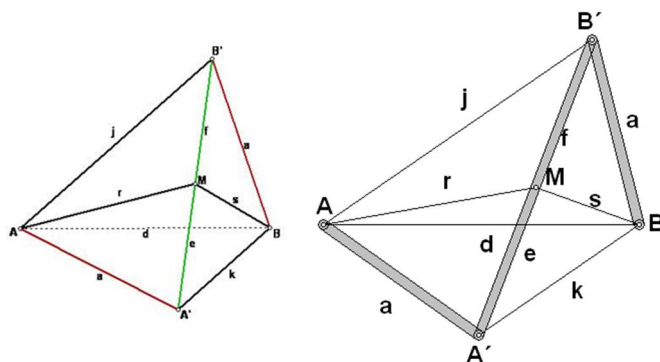


Figura 8.13: Teorema de Stewart

$$e \cdot j^2 + f \cdot a^2 = A'B' \cdot r^2 + e \cdot f^2 + f \cdot e^2$$

$$\frac{d}{2} \cdot j^2 + \frac{d}{2} \cdot a^2 = d \cdot r^2 + \frac{d}{2} \cdot \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{d}{2}(j^2 + a^2) = \frac{d}{2}\left(2r^2 + \frac{d^2}{2}\right)$$

$$j^2 + a^2 = 2r^2 + \frac{d^2}{2}$$

Pero

$$\frac{d^2}{2} = a^2$$

Por lo tanto

$$j^2 = 2r^2$$

y

$$j = r\sqrt{2}$$

Analogamente

$$k^2 = 2s^2$$

y

$$k = s\sqrt{2}$$

Sea $ABB'A'$ el antiparalelogramo articulado (ver figura 8.14) en el que $A'B' = a\sqrt{2}$ donde los vértices A y B están fijados al plano. Cuando el punto A' se mueve sobre la circunferencia de centro A, el punto B' lo hace sobre el círculo de centro B y el punto medio M de $A'B'$ describe la lemniscata de Bernoulli.

Notemos además que $j \parallel k$ y $AA'BB'$ es un trapecio isocelso y el teorema de Ptolomeo nos dice que en un cuadrilátero cíclico, la suma de los productos de lados opuestos es igual al producto de las diagonales

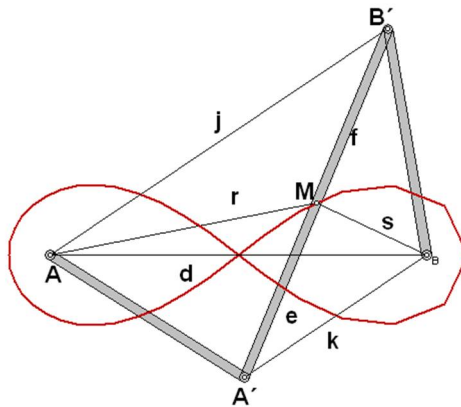


Figura 8.14: Antiparalelogramo Articulado

En efecto

$$\begin{aligned}
 j \cdot k + a \cdot a &= d \cdot (e + f) \\
 j \cdot k + a^2 &= d^2 \\
 r\sqrt{2} \cdot s\sqrt{2} + a^2 &= 2a^2 \\
 r \cdot s &= \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $r \cdot s$ es constante, así la curva descrita por M es el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es una distancia constante. (lemniscata)

Un resultado curioso que enunciaremos sin demostración y con el que nos encontramos en el camino del estudio de los mecanismos de tres barras es el

Teorema 4. Teorema de Roberts (Triple Generación) *En el mecanismo articulado (ver figura 8.15) los triángulos GFC, CED, ACB, MOQ, GOD, AEQ, y MFB son semejantes esta es una propiedad de este mecanismo que todos siguen siendo triángulos semejantes aun cuando las barras están desplazadas en relación con las demás. O, Q, y M son fijos. Esto crea tres 4-barras con su mecanismo de acopladores depositado junto a C. Se puede demostrar que esta combinación de 4-barras móviles, trazan una misma curva (camino de C).*

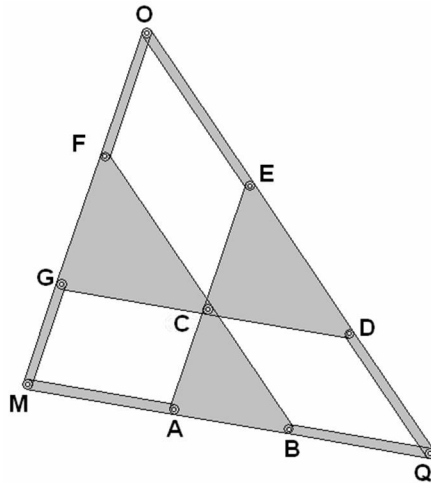


Figura 8.15: Teorema de la Triple generación de Roberts

Capítulo 9

Una Generalización del Teorema de Kempe

Mecanismos articulados en el espacio de tres dimensiones

En este capítulo de manera muy breve trataremos de generalizar las ideas de Kempe, primero en el espacio de tres dimensiones, y después hacia dimensiones mayores.

Tratando de extender el resultado de Kempe enunciamos:

Para alguna superficie algebraica definida por la ecuación polinomial $f(x, y, z) = 0$, construiremos un mecanismo articulado en el espacio de tres dimensiones (3d) para trazar esta superficie.

Dada la superficie $f(x, y, z) = 0$, construiremos el brazo articulado OA , OB' y OC' en el plano XY de tal manera que OA , OB' y OC' tienen longitudes a , b y c y forman ángulos $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ con el eje X , respectivamente (ver figura 9.1). Usando un rotador 3d, construimos el brazo OB y OC en el plano YZ y XZ respectivamente tal que OB y OC tienen longitudes b y c y forman ángulos $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ con el eje Z y con el eje Y , respectivamente.

80CAPÍTULO 9. UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE KEMPE

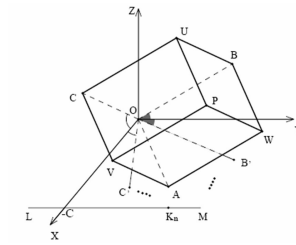


Figura 9.1: Esquema de la construcción de Kempe en tres dimensiones

Construimos el paralelepípedo OABC-UVWP (ver figura 9.2) donde el punto P está en la superficie

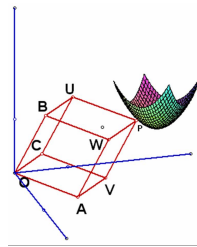


Figura 9.2: Esquema de la construcción de Kempe en tres dimensiones

donde las coordenadas del punto P (ver figura 9.3) están dadas por

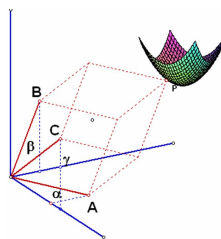


Figura 9.3: Esquema de la construcción de Kempe en tres dimensiones y el punto P se mueve sobre la superficie

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos \alpha + c \cos \gamma \\
 y &= a \sin \alpha + b \sin \gamma = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\
 z &= b \cos \beta + c \sin \gamma = b \cos \beta + c \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)
 \end{aligned}$$

Dada la ecuación algebraica de grado 3

$$f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \sum_{0 < i+j+k < 3} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

susituyendo valores

$$\sum_{0 < i+j+k < 3} a_{ijk} (a \cos \alpha + c \cos \gamma)^i (a \sin \alpha + b \sin \gamma)^j (b \cos \beta + c \sin \gamma)^k = 0$$

con un procedimiento análogo al caso de la ecuación de una curva algebraica en el plano obtenemos

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{0 < r+s+t < 3} A_{rst} \cos(r\alpha + s\beta + t\gamma + \epsilon_{rst}) + C$$

donde A_{rst} y ϵ_{rst} son constantes y a, b y c son enteros positivos. Si P se mueve sobre la superficie, las coordenadas x, y y z satisfacen $f(x, y, z) = 0$

Para cada término $r\alpha$, $s\beta$ y $t\gamma$ utilizaremos un multiplicador de ángulos el cual consta de 4, 6, 8, ... $2(n+1)$ barras en total por los tres multiplicadores necesitamos $6(n+1)$ barras.

Para sumar los ángulos r, s y t tal que $1 \leq r + s + t \leq n$ donde $r=1, \dots, n$, $s=0, 1, \dots, n$ y $t=0, 1, \dots, n$ necesitamos para r $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ barras, para s $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ barras y para t $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ barras en total $\frac{3}{2}(n+1)(n+2)$ barras y como cada sumador de ángulos consta de 11 barras, se requieren en total $11 \frac{3}{2}(n+1)(n+2) = \frac{33}{2}(n^2 + 3n + 2)$ barras.

Finalmente podemos optar por el trasladador de 7 barras o el sumador de vectores de 14 barras. En el primer caso se necesitarían $7(n^2 + 3n + 2)$ barras y en el segundo caso $14(n^2 + 3n + 2)$ barras. En total la construcción de kempe necesitaría $6(n+1) + \frac{33}{2}(n^2 + 3n + 2) + 14(n^2 + 3n + 2)$ barras, por lo que la complejidad de la construcción de Kempe para una superficie algebraica es $O(n^2)$.

Un ejemplo de una aplicación de los mecanismos articulados en el espacio de tres dimensiones es el inversor en tres dimensiones (ver figura 9.4 y 9.5)

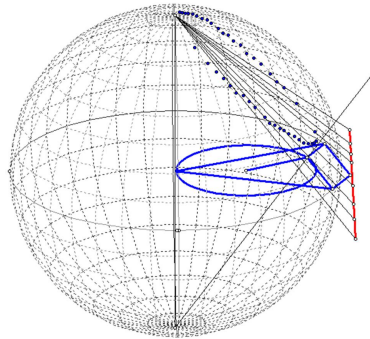


Figura 9.4: Inversión en tres dimensiones

El modelo explica la inversión de el círculo que está sobre la esfera en un espacio tres dimensiones. Con la proyección de dos polos opuestos O_1 y O_2 de una esfera S (con centro O y radio r), un punto A de la esfera en un plano π perpendicular a O_1 y O_2 (por ejemplo, el plano diametral, como en el modelo) obtener los puntos P y Q la proyección estereográfica de A en π respectivamente de O_1 y O_2 P y Q corresponden a la inversión circular respecto a la circunferencia γ que es la intersección de S con π . El modelo también muestra que las proyecciones de O_1 y O_2 en π puntos de un círculo C_0 de S pasando por O_1 pertenecen a una recta r proyección de C_0 por O_1 y una circunferencia C que pase por O (proyección de C_0) por O_2 C y R se corresponden en la inversión circular respecto a γ

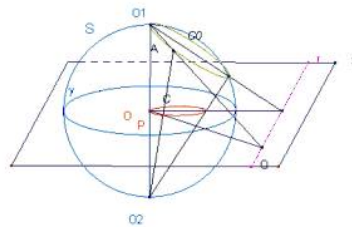


Figura 9.5: Inversión en tres dimensiones

La idea es la siguiente

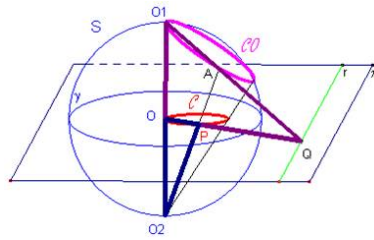


Figura 9.6: Inversión en tres dimensiones

En la Figura 9.5 los puntos P y Q son la inversión circular respecto γ . De hecho, la semejanza de triángulos O_1OQ y O_2OP se tiene que $O_1O : OQ = O_2O : OP$ del cual $OP \times OQ = O_1O \times O_2O = r^2$ (r , radio de S_1 , e incluso dentro de γ). Además, desde O_1 , O_2 y A pertenecen a un mismo plano. Los puntos O, P y Q están alineados .

La circunferencia C y la recta r son la inversión correspondiente a γ . La circunferencia C_0 pertenece a un plano α que pasa por O_1 y cuya intersección con π es una segunda recta r. Las proyecciones de los puntos de C_0 desde O_1 pertenecen a r. Los rayos que salen desde O_2 son puntos proyectados en C_0 que generan un cono circular; y sea H el punto de intersección de este cono con el plano α que es C_0 , prolongando O_1H la otra intersección con C_0 es el punto A0, el triángulo O_1O_2A0 es el triángulo a través del eje sección del cono con respecto a α . Denotado por P_0 la proyección estereográfica de A_0 en π (el polo O_2) el triángulo OO_2P_0 es el triángulo a través del eje sección del cono con respecto a π . Dado que los triángulos O_1O_2A0 y OO_2P_0 son similares, las secciones del cono con los planos α y π son de la misma naturaleza (Teorema de Apolonio: Libro 1, teorema No 5) por lo tanto C es un círculo (que pasa por O). La circunferencia C y la recta r lugares de las proyecciones estereográfica de los puntos de C_0 sobre π (respectivamente, por O_2 y por O_1) son la inversión circular correspondiente a γ

Hacia dimensiones mayores

Los mecanismos articulados se pueden trabajar en dimensiones mayores a tres de manera teórica, para ello necesitaremos definir los mecanismos articulados abstractos.

Definición.-Un mecanismo articulado abstracto es un par $L(G, \ell)$ constituido por un gráfico $G = (V(G), E(G))$ y una función $\ell : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que define las longitudes de las barras. A las aristas de la gráfica las llamaremos barras.

Definición.-Un mecanismo articulado en d dimensiones es un mecanismo articulado abstracto $L = (G, \ell)$ junto con una función $f : W \rightarrow \mathbb{R}^d$ definido en un subconjunto W de $V(G)$, que define los vértices del mecanismo que permanecen fijos en \mathbb{R}^d

Definición Una configuración C de un mecanismo articulado $L = (G, \ell)$ en d dimensiones es un mapeo $C : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^d$ que obedece a las restricciones de longitud y fijación, es decir, C extiende la asignación de fijación f y si $(v, w) \in E(G)$ entonces $|C(v) - C(w)| = \ell(v, w)$ El conjunto de todas estas configuraciones se denomina el espacio de configuración $Conf(L)$ de L .

Los conjuntos trazables formalizan la idea de trazar un conjunto con una pluma unida a un vértice de un mecanismo articulado.

Definición.- El trazo de un vértice v de un mecanismo articulado L es la imagen de $Conf(L)$ bajo la proyección $tr_v : Conf(L) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $tr_v(C) = C(v)$. De manera equivalente, es el lugar de las posiciones del vértice v bajo las configuraciones de L . Un mecanismo articulado L traza un conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ si hay un vértice $v \in L$ cuyo trazo es S . Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$ es trazable si existe un mecanismo articulado L que traza a S .

las preguntas que nos surgieron son:

¿Que tipo de conjuntos son trazables?

¿Si un conjunto es trazable, entonces es limitado en \mathbb{R}^d ?

El mecanismo articulado de Peaucellier dice como "dibujar una línea recta", pero técnicamente, éste traza un segmento de línea recta. Ahora uno puede dibujar un segmento de línea arbitrariamente grande usando un mecanismo de Peaucellier suficientemente grande. Sin embargo sería tedioso formalizar argumentos en términos de segmentos de línea en lugar de líneas. Así, con el fin de extender la teoría de los mecanismos articulados construyendo objetos no limitados tales como líneas, la idea es trabajar con familias de mecanismos articulados, en donde para cualquier conjunto limitado $U \subset \mathbb{R}^d$, hay un mecanismo articulado que tiene la propiedad deseada dentro de U .

De ahí surgen el concepto de conjuntos construibles sus características y propiedades

Nos hemos encontrado en el estudio de los mecanismos articulados abstractos con diversas teorías como la teoría de la rigidez, la topología algebraica etc. Hemos decidido para los propósitos de este trabajo solo dar un panorama muy general de las ideas de kempe para dimensiones mayores a tres, dejando para otro momento la continuación de este estudio.

Conclusiones

La teoría de los mecanismos articulados ha tenido un repunte importante en el 2008 y 2009 con la revisión de la demostración de Kempe y las observaciones que de ella se hicieron para corregir detalles. En este trabajo hemos podido mostrar los detalles de dichas observaciones, también hemos podido desarrollar una buena cantidad de simulaciones en software de geometría dinámica. Además de elaborar materiales de apoyo basados en la teoría matemática de los mecanismos articulados para las clases de matemáticas tanto a nivel licenciatura, como a nivel bachillerato. En el capítulo de mecanismos abstractos aunque mostramos un panorama de los recientes avances en cuanto al estudio de los mecanismos articulados desde un punto de vista abstracto [3], por razones de tiempo hemos tenido que truncar el trabajo y dejar para mejor ocasión el estudio más a fondo y más riguroso de los mecanismos articulados abstractos, tal vez como un proyecto de doctorado.

Bibliografía

- [1] Alfred Bray Kempe. On a General Method of describing Plane Curves of the n^{th} degree by Linkwork. En Proc. de London Methemathical Society, Volumen 7, páginas 213-215, 1876
- [2] Xiao-Shan Gao, Chang-Cai Zhu, Shang-Ching Chou, y Jian-Xin Ge. Automated Generation of Kempe Linkages for Algebraic Curves and Surfaces. En Mechanism and Machine Theory, volumen 36, páginas 1019-1033, 2002
- [3] Timothy Good Abbott, Reid W. Barton, y Erik D. Demaine. Generalizations of Kempe's Universality Theorem. Master's thesis, Massachusetts Institue of Technology, junio 2008
- [4] E. Demaine. J. O'Rourke, Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Poliedra. Cambridge University Press, 2007.
- [5] Alexander Kobel, F.O. Schreyer y O. Labs. Automated Generation of Kempe Linkage for Algebraic Curves in a Dynamic Geometry System. Bachelor Thesis in Computer Science, Saalar University, Saarbruken, Alemania septiembre 2008
- [6] H. Lebesgue. Lecons sur le Constructions Geometrics. Jaques Gabay Editions 1987
- [7] Warren D. Smith. Plane Mechanism and the Downhill Principle. Departamente of Computer and Information Science and Engineering. University of Florida octubre 1998
- [8] Samuel Roberts. On three bar motion in plane space. En Proc. de London Methemathical Society, Volumen 7, páginas 14-23, 1875

- [9] M.Falconi, V. Hoyos. Instrumentos y Matemáticas. UPN México 2005