



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UN COMPUESTO  
PERIÓDICO REFORZADO DE FIBRAS:  
CÁLCULO DE COEFICIENTES EFECTIVOS CON  
CONSTITUYENTES ANISÓTROPAS PARA  
PROPIEDADES DIELECTRICAS Y  
PIEZOELÉCTRICAS

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

EDUARDO LÓPEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO JUAN SABINA CÍSCAR

MÉXICO, D.F.

MARZO, 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Análisis Asintótico de un Compuesto  
Periódico Reforzado de Fibras:  
Cálculo de Coeficientes Efectivos con  
Constituyentes Anisótropos para  
Propiedades Dieléctricas y  
Piezoeléctricas**

*Eduardo López López*

Marzo, 2010

# Agradecimientos

Al Dr. Federico J. Sabina Císcar. Por compartir sus conocimientos conmigo; pero sobre todo por: su gran ayuda, comprensión, sabios consejos y amistad. Sin todo ello no hubiera sido posible la realización de esta tesis.

A los Doctores Arturo Olvera Chávez y Faustino Sánchez Garduño. Integrantes del Comité Tutoral, por sus valiosos consejos y observaciones que contribuyeron fuertemente en la presente tesis.

Al Posgrado en Ciencias Matemáticas. Por todas las facilidades prestadas para realizar el posgrado, así como el patrocinio del boleto de avión para asistir al curso de verano organizado por el CISM en julio de 2005.

Al Departamento de MyM del IIMAS pues durante mucho tiempo fue mi segunda casa.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Por otorgarme una beca para la realización de los estudios de posgrado y por la beca de once meses del Proyecto CoNaCyT 47218-F

Al CISM por otorgarme una beca para asistir a sus cursos de verano en julio de 2005, septiembre 2006 y julio 2007.

A los Doctores, Raúl Guinovart Díaz, Julian Bravo Castillero, Reinaldo Rodríguez Ramos, Héctor Camacho, por su apoyo y amistad durante la realización de los estudios de posgrado.

Al Dr. Federico O'Reilly, por su ecuanimidad durante su gestión como director del IIMAS.

Al ITSSMT, por su apoyo durante la última etapa de la realización de la tesis, y con especial gratitud al MC F. Luís Torreblanca Coello, Ing. Abel Ordaz Merino y al Ing. Samuel F. Córdova Espino.

A Ana Pérez Arteaga y Ramiro Chávez quienes siempre estuvieron dispuestos a ayudar cuando surgían problemas en el laboratorio de cómputo del IIMAS.

A las secretarías del MyM: Alma Rosa Rodríguez y Lourdes Romero. Así como a las secretarías del posgrado: Laura Herrera Iturbide y Socorro Audiffred Guerra. Siempre, con sonrisa en boca, me orientaron y ayudaron en la realización de todos los trámites y gestiones.

A todos los integrantes de la biblioteca del IIMAS. Con especial aprecio a Juanita y Rocío.

A mis hermanos: Fidel, Fabiola, Araceli, Alejandro, Raquel y Mario. Fueron mi ejemplo

y sé que siempre estarán a mi lado para prevenirme de las piedras del camino. Gracias por todo el apoyo brindado.

A mis sobrinas: Anita, Vicky, Pablis, Priscilita, Lupita, Heidi, Marianita y Maya. Gracias por compartir su alegría conmigo.

A mis cuñadas: Lucy, Heidi y Sonia.

A Santana, Martina y Yedid. Su apoyo y comprensión durante esta nueva vida, hicieron más fácil el recorrido.

A todos los aquellos que me acompañaron durante los años de estudio, enseñándome nuevas manera de ver la vida y formando la persona que todos conocen. Se han convertido en amigos de toda la vida: *Nidy, Pepe<sup>†</sup>, Nico, Josué, Miguel Ángel, George, Yahvé René, Darío, Toño, Violeta, Norma<sup>†</sup>, Lucy, Luis, Mike, Efraín, Pepe Soto, Brandon, Erick, Gerardo, Holanda y Chava.*

# *Dedicatoria*

**Lalito:** Esa sonrisa y dinamismo... tan tuyos, cada día me alientan a seguir adelante. Esos besos y abrazos inesperados, pero sobretodo **tu presencia**, han cambiado mi manera de ver, vivir y sentir la vida. *¡Le ruego al creador, me permita ser un buen padre para ti!*

**Nidy:** Tu amor se manifestó en paciencia; tu presencia se convirtió en comprensión; tus ojos se volvieron mi luz y tus caricias mi fortaleza. *Gracias por apoyarme tanto: ¡LO LOGRAMOS!*

**Mamá:** Tu amor, sacrificios, preocupaciones y ejemplo: no han sido en vano. Te llevo siempre conmigo. En los momentos más difíciles, yo no era tu fortaleza: *¡eras tú mi protección!*

**Papá<sup>†</sup>:** Tu presencia me ha acompañado toda la vida, tus consejos y enseñanzas me sirvieron para poder sobrevivir. No me diste pescado, *¡me enseñaste a pescar!*

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b><i>Dedicatoria</i></b>	<b>IV</b>
<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	5
2.2. Planteamiento del problema . . . . .	13
2.2.1. Objetivos . . . . .	14
2.2.2. Alcances y limitaciones . . . . .	15
<b>3. Justificación</b>	<b>16</b>
3.1. Hueso y piezoelectricidad . . . . .	16
3.2. Método de homogeneización asintótica . . . . .	20
3.2.1. Generalidades . . . . .	20
3.2.2. MHA: caso dieléctrico . . . . .	21
3.2.3. Coeficientes efectivos . . . . .	27
3.2.4. Resumen . . . . .	29
<b>4. Modelo Dieléctrico</b>	<b>31</b>
4.1. PP3 . . . . .	33
4.1.1. Problemas locales. Formulación . . . . .	33
4.1.2. Problemas locales. Potenciales complejos . . . . .	34
4.1.3. Problemas locales. Solución . . . . .	37
4.1.4. Coeficientes efectivos . . . . .	40
4.2. OP2 . . . . .	41
4.2.1. Problemas locales. Formulación . . . . .	41
4.2.2. Problemas locales. Potenciales complejos . . . . .	43
4.2.3. Problemas locales. Solución . . . . .	49
4.2.4. Coeficientes efectivos . . . . .	54
4.3. PP1 . . . . .	56
4.3.1. Problemas locales. Formulación . . . . .	56
4.3.2. Problemas locales. Método Asintótico . . . . .	57

4.3.3. Problemas locales $pL, O(\beta^0)$ . . . . .	59
4.3.4. Problemas locales. Potenciales Complejos $O(\beta)$ . . . . .	59
4.3.5. Problemas locales. Solución $O(\beta)$ . . . . .	63
4.3.6. Coeficientes efectivos . . . . .	65
4.4. OP3 . . . . .	68
4.5. Resultados numéricos . . . . .	68
4.5.1. Resultados numéricos para el modelo PP3 . . . . .	71
4.5.2. Resultados numéricos para el modelo OP2 . . . . .	72
4.5.3. Resultados numéricos para el modelo PP1 . . . . .	75
4.6. Conclusiones . . . . .	76
<b>5. Modelo Piezoeléctrico</b>	<b>79</b>
5.1. Modelo PP3 . . . . .	80
5.1.1. Método de homogeneización asintótica . . . . .	82
5.1.2. Solución de los problemas locales . . . . .	87
5.1.3. Un ejemplo numérico . . . . .	92
5.1.4. Conclusiones . . . . .	93
5.2. Modelo AP3 . . . . .	94
5.2.1. Resultados numéricos . . . . .	96
5.2.2. Conclusiones . . . . .	100
<b>6. Conclusiones</b>	<b>102</b>



# Capítulo 1

## Resumen

Un material compuesto es aquel que está formado por dos o más materiales, distinguibles físicamente y separables mecánicamente. Presentan varias fases químicamente distintas, completamente insolubles entre sí y separadas por una interfase. Combinados, exhiben propiedades que no se tendrían por separado, por ejemplo, una inclusión dura y pesada en una matriz blanda y ligera, refuerza a esta última y el compuesto, en general, es ligero. Nacen de la necesidad humana de tener un nuevo material, el compuesto, que combine características deseadas. Por ejemplo: el concreto reforzado de varillas surgió de la necesidad de construir edificaciones fuertes y más baratas. El concreto es barato y relativamente liviano, pero se rompe fácilmente bajo tensión. En contraste, el acero es fuerte bajo tensiones pero caro y pesado. La combinación de concreto y varillas de metal da un compuesto, que es barato, relativamente ligero y resistente a tensiones. Los materiales compuestos han revolucionado la forma de vivir del humano al proporcionarle nuevos objetos como satisfactores de vida, por ejemplo aparatos electrónicos, o mejorar la forma de hacer aquellos que han acompañado al hombre desde el inicio de la civilización.

En la naturaleza, difícilmente se puede encontrar un objeto constituido únicamente por un material, y el hueso no es la excepción. Es un tejido calcificado con múltiples microestructuras a diferentes escalas, las cuales van desde los nanómetros hasta los centímetros. Posee una resistencia a la tensión similar a la del hierro, pero es tres veces más ligero y diez veces más flexible. Sirve como sostén del cuerpo y como protección de los principales órganos, alberga la médula ósea hematopoyética además de ser un reservorio de calcio.

Las principales lesiones del hueso son producidas por enfermedades degenerativas o por traumas, siendo esta última la causa del 90 % de las fracturas en el esqueleto apendicular, que en su mayoría está formada por hueso compacto.

Recientemente se descubrió que los osteoblastos, células responsables de la regeneración de hueso, se ven estimulados por corrientes eléctricas generadas en el hueso, cuyo origen está aún bajo consideración de la comunidad científica mundial. Al respecto, dos teorías son las más consideradas en la literatura. La primera, se refiere a los potenciales de corriente que se generan en el hueso compacto, cuando los fluidos que contienen iones se desplazan al sufrir éste una deformación. La segunda se refiere al efecto piezoeléctrico,

presente en el hueso: concretamente en la colágena, principal componente orgánica del hueso compacto. Es este último fenómeno, el que se considera como motivación en el estudio realizado para la elaboración de esta tesis.

El hueso compacto se localiza principalmente en la diáfisis del esqueleto apendicular. Tiene como estructura principal a la osteona, o sistema de Havers, la cual está constituida por un canal de  $50\ \mu\text{m}$  de diámetro, alrededor del cual se agrupan típicamente de 4 a 20 laminillas concéntricas de aproximadamente  $3\ \mu\text{m}$  de grosor, formadas por fibras de colágena tipo I de entre 2 y  $3\ \mu\text{m}$  de grosor y placas finas o estructuras similares a hojas con tamaños de hasta 150 nm de longitud por 80 nm de ancho y 5 nm de espesor de cristales de hidroxapatita; dichas laminillas tienen lagunas que contienen células óseas, ya sean osteocitos u osteoblastos.

En este trabajo, se establece un modelo de un material compuesto, en el que se caracterizan sus propiedades físicas, y se establecen las bases para iniciar el estudio de interacción de ciertas componentes del hueso compacto, que intervienen en el proceso de regeneración. Dicho modelo toma en cuenta que el hueso compacto presenta múltiples microestructuras a diferentes escalas, mediante la caracterización de un material reforzado de fibras cilíndricas paralelas entre sí distribuidas de manera periódica en un arreglo cuadrado, orientadas longitudinalmente con respecto al eje de simetría geométrico del compuesto. Las fibras se consideran suficientemente pequeñas como para que pueda ser aplicada la técnica matemática conocida como Método de Homogeneización Asintótica (MHA). Se consideran materiales pertenecientes al grupo cristalográfico hexagonal clase 622 y hexagonal clase 6mm debido a que la principal componente orgánica del hueso, colágena tipo I, pertenece al primero y el titanato de bario, material piezoeléctrico biocompatible frecuentemente utilizado como implante, al segundo. La hidroxapatita, pertenece al sistema hexagonal. Por lo tanto, cada material constituyente tiene un eje de simetría en sus propiedades físicas, que es determinado por las simetrías características del grupo cristalográfico hexagonal. A dicho eje, se le llamará eje material.

En un sistema de Havers, el patrón de alineamiento de las fibras de colágena que forman cada laminilla le confiere una orientación diferente en cada una, de hecho siguen una dirección helicoidal tal que en laminillas contiguas los ejes materiales son casi ortogonales. Usando luz polarizada Ascenzi y Bonucci encontraron tres tipos de orientaciones relativas entre las fibras de laminillas contiguas, orientación longitudinal, transversal y alternante. En el presente trabajo se analiza, como primer caso de estudio, aquel en el que el acoplamiento piezoeléctrico no está presente, es decir: se analiza primero el caso dieléctrico. Posteriormente se continua con el estudio de un material compuesto, en donde el acoplamiento piezoeléctrico sí está presente.

El estudio se divide en dos etapas, en la primera se caracteriza un material reforzado de fibra cilíndricas circulares distribuidas en un arreglo periódico cuadrado, considerándolo únicamente como un material dieléctrico, en este análisis se presentan cuatro tipos distintos de posibles orientaciones del eje material de los materiales constituyentes con respecto a la dirección de las fibras: Primera, los ejes materiales de las fibras y matriz están orientados en la misma dirección que el eje geométrico de las fibras. Este es el caso clásico de estudio y puede encontrarse en cualquier libro del tema, sin embargo, se presenta aquí

como una referencia para el trabajo que se realiza. Segunda, el eje material de la matriz está orientado en dirección ortogonal al eje geométrico de las fibras y el eje material de las fibras en dirección del eje geométrico de las fibras. Tercera, el eje material de las fibras y matriz son ortogonales al eje geométrico de las fibras y paralelos entre sí. Cuarta, los ejes materiales de la matriz y las fibras son ortogonales entre sí y perpendiculares al eje geométrico de las fibras.

En cada caso, se caracteriza al material compuesto encontrando fórmulas analíticas cerradas y simples de sus propiedades materiales efectivas, típicas de la metodología, mediante la solución a problemas locales en la celda periódica comprendida por una fibra y la matriz que la rodea. Estos problemas locales, en el primer caso, son ecuaciones de Laplace con condiciones de salto en la interfase y de doble periodicidad, resueltos mediante la teoría del potencial complejo. En los otros casos, se trata de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, con condiciones de salto en la interfase y de doble periodicidad en el compuesto, que son resueltas usando teoría asintótica. Además de las funciones de Weierstrass, se usa la función de Natanzon y sus derivadas. Esta última, aparece de forma natural al solucionar la ecuación biarmónica, involucrada en los problemas locales de los casos dos al cuatro.

En la segunda etapa, se hace un análisis del mismo material reforzado de fibras, considerándolo como un material cuyos constituyentes son piezoeléctricos y pertenecen al grupo cristalográfico hexagonal simetría 622. Este estudio se divide en dos partes. En la primera, se supone que tanto las fibras, como la matriz, tienen sus ejes materiales paralelos al eje geométrico de las fibras. Se caracteriza al compuesto al obtener fórmulas analíticas cerradas y simples de sus propiedades efectivas. Para llegar a dichas fórmulas, es necesario solucionar varios problemas locales, con ecuaciones de Laplace complementadas con condiciones de continuidad de los potenciales, de salto en la tracción y desplazamiento eléctrico en la interfase y de doble periodicidad en el compuesto. Nuevamente, son resueltas mediante la teoría de potencial complejo y el uso de las funciones de Weierstrass. En la segunda parte, se hace un estudio del caso en el que los ejes materiales de las fibras y la matriz son antiparalelos, para un material reforzado de fibras tanto con simetría 622 como con simetría 6mm.

Las fórmulas analíticas obtenidas, muestran una dependencia explícita en la fracción volumétrica de la fibra, la periodicidad del arreglo a través de las sumas de retícula y las propiedades físicas de los constituyentes. El método de análisis propuesto es susceptible de generalización a cualquier tipo de arreglo paralelográfico. Las fórmulas obtenidas son muy simples, además de ser fácilmente programables pues se requiere resolver un sistema de ecuaciones algebraicas infinito regular. Se ha demostrado con anterioridad que dicho sistema, puede ser truncado a un orden finito muy pequeño para tener una buena aproximación a la solución. Los casos extremos para las inclusiones (vacío o rígido) se pueden analizar fácilmente de las fórmulas obtenidas.

En cada caso analizado los resultados son asintóticos y, por tanto, son válidos sólo para cierto rango de los parámetros involucrados. Con la finalidad de determinar un rango de validez, se realizan cálculos numéricos basados en el Método de Elemento Finito. Estos cálculos se comparan con las predicciones que dan las fórmulas obtenidas; estableciendo

así, de manera empírica, un rango de confianza que permitirá el uso de estas fórmulas, para validar estudios posteriores en casos límite de materiales compuestos.

En esta parte de la investigación, se observa que hay un reforzamiento en las propiedades elásticas y dieléctricas del compuesto, cuando éste está formado por el mismo material, pero con un reforzamiento de fibras en la dirección material opuesta. El coeficiente piezoeléctrico  $d_{14}$  del compuesto, depende fuertemente de la fracción volumétrica de las fibras, cuando la fracción volumétrica es menor a 0.5,  $d_{14}$  es positivo; cuando la fracción volumétrica es 0.5,  $d_{14}$  es igual a cero; finalmente cuando la fracción volumétrica se encuentra entre 0.5 y el valor de percolación ( $\pi/4$ ),  $d_{14}$  es negativo.

## Capítulo 2

# Introducción

### 2.1. Antecedentes

Frecuentemente se escuchan referencias a materiales como: adobe, triplay, concreto, acero, fibra de vidrio, kevlar, etc. Todos ellos, tienen una característica en común: son materiales compuestos. Básicamente, los materiales compuestos son materiales que presentan inhomogeneidades a diferentes escalas, las cuales deben ser mucho más grandes que la escala atómica (permitiendo de esta forma el uso de ecuaciones de la física clásica para su descripción); pero que son esencialmente homogéneos a escalas macroscópicas, o al menos en alguna escala intermedia. Están formados por dos o más componentes distinguibles físicamente y separables mecánicamente. Presentan dos o más fases químicamente distintas, completamente insolubles entre sí y separadas por una interfase. Son importantes para el ser humano porque sus propiedades mecánicas, generalmente, son superiores a las de los compuestos originales o simplemente porque conservan ciertas propiedades deseables, de materiales cuya producción resulta demasiado cara. Por ejemplo, el concreto es barato y relativamente liviano pero se rompe fácilmente bajo tensión; en contraste, el acero es fuerte bajo tensiones pero caro y pesado, al poner concreto alrededor de barras de metal se obtiene un compuesto, concreto reforzado; que es barato, relativamente ligero y resistente a tensiones. Los materiales compuestos dan solución a necesidades, como la de obtener materiales que combinen las propiedades de los cerámicos, los plásticos y los metales, necesidades comunes en el desarrollo de tecnología. En la industria del transporte son necesarios materiales ligeros, rígidos; resistentes a impactos, a la corrosión y el desgaste; propiedades que rara vez se dan juntas.

No obstante la gran variedad de materiales compuestos, todos presentan una estructura común: un agente reforzante, cuya disposición geométrica es fundamental para las propiedades físicas del compuesto; y una matriz, que transmite los esfuerzos al agente reforzante, además de proteger y dar cohesión al material.

Existen tres clasificaciones de materiales compuestos, de acuerdo a la forma en la que se distribuye el agente reforzante:

**Reforzados con partículas.** Partículas de un material duro y generalmente frágil, se en-



(a) Por partículas. El cobre reforzado de partículas cerámicas puede resistir temperaturas hasta de 800 grados Celsius, sin que se pierda la resistencia del cobre en forma notable. Tomado de: [www.explora.cl](http://www.explora.cl)



(b) Por fibras. Pedal de bicicleta de alto rendimiento hecha con un material reforzado de fibras de carbono, su peso es de 180 gr por par. Tomado de: [www.ekonobike.com](http://www.ekonobike.com)



(c) Estructurales. Tablero estructural constituido por varias capas de hojas finas de madera colocadas perpendicularmente una hoja con respecto a la otra, adheridas con resinas. Tomado de [www.dimesa.com](http://www.dimesa.com)

Figura 2.1: Ejemplos de materiales compuestos reforzados

cuentran dispersas de manera discreta y aleatoria (algunas veces uniformemente), y rodeadas por una matriz más blanda y dúctil (figura 2.1(a)) y viceversa en un sentido amplio.

**Reforzados con fibras.** Fibras duras, habitualmente: fibra de vidrio, cuarzo, kevlar o fibra de carbono, etc., son empotradas en una matriz más blanda (frecuentemente suele ser una resina como epoxi o poliéster). Este tipo de material es usado, generalmente, para construir objetos que soportan grandes cargas, por ejemplo las columnas de un edificio (figura 2.1(b)).

**Estructurales.** Están formados por un panel tipo sándwich y un núcleo en forma de panel de abeja. Los materiales compuestos estructurales están formados, tanto por compuestos, como por materiales sencillos y sus propiedades dependen fundamentalmente de la geometría y de su diseño. Estos materiales son frecuentemente utilizados en la construcción, en la industria aeronáutica y en la fabricación de condensadores eléctricos multicapas, ya que tienen como característica principal la reducción de peso y aumento de la resistencia ante impactos (figura 2.1(c)).

Los materiales compuestos son objeto de estudio de la comunidad científica desde hace mucho tiempo. Por ejemplo, Poisson<sup>1</sup> construyó una teoría de magnetismo inducido; en

<sup>1</sup>Poisson, SD, 1826. *Mémoire sur la théorie du magnétisme. Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*. 5, 247–338.

la que supone que el cuerpo está constituido por esferas conductoras dentro de un material no conductor. Faraday<sup>2</sup> propuso un modelo de materiales dieléctricos que consisten en pequeños cuerpos esféricos separados por un material aislante. Rayleigh (Rayleigh, 1892) encontró, mediante una ecuación diferencial parcial, un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que caracteriza las propiedades efectivas de conductividad de un compuesto de fibras cilíndricas en una matriz en un arreglo cuadrado.



(a) Granito. Es una roca magmática intrusiva, dura y resistente por lo que se usa frecuentemente en la industria de la construcción. Tomado de: [www.montes.upm.es](http://www.montes.upm.es)



(b) Roca monominerálica. Las rocas monominerálicas como el yeso, están formadas por un sólo material Tomado de: [www.uam.es](http://www.uam.es)

Figura 2.2: Las rocas también son materiales compuestos

Un fenómeno, muy útil en la actualidad, presente en muchos materiales compuestos como en los cristales de Zirconato Titanato de Plomo (PZT por la abreviación, en inglés, de su fórmula química), es la **piezoelectricidad**. Esta propiedad fue descubierta observando ciertos cristales naturales, como el cuarzo. Consiste en la capacidad que tienen algunos materiales de generar un potencial eléctrico, como resultado de una fuerza aplicada (efecto directo), y viceversa: el cristal en cuestión se deforma cuando se le aplica un campo eléctrico (efecto inverso). El efecto directo fue descubierto en 1880 por los hermanos Curie: usando tourmalina<sup>3</sup>, cuarzo, topacio, azúcar de caña y Sal de Rochelle. El efecto inverso fue deducido, matemáticamente, un año más tarde por Gabriel Lippmann<sup>4</sup> a partir de principios fundamentales de termodinámica. En el libro de Woldemar Voigt: *Lehrbuch der Kristallphysik*, publicado por primera vez en 1910, se describen, por primera vez, veinte clases de cristales piezoeléctricos y se proporciona una definición rigurosa de las constantes piezoeléctricas usando análisis tensorial<sup>5</sup>.

En la actualidad la piezoelectricidad tiene un sinnúmero de aplicaciones: producción y detección de sonido, generación de frecuencias electrónicas, microbalances y enfocado ul-

<sup>2</sup>Faraday, M. 1839. *Experimental Researches in Electricity*. London: Richard and John Edward Taylor. pars. 1669, 1670.

<sup>3</sup>Piedra preciosa perteneciente al grupo de los silicatos, compuesta principalmente por aluminio, hierro, magnesio, sodio, litio o potasio, exhibe propiedades piezo y piroeléctricas.

<sup>4</sup>Lippman G. *Principe de la conservation de l'électricité*. Annales de chimie et de physique **24**, 145. 1881

<sup>5</sup>En esta obra se usa por primera vez la palabra tensor, con el significado actual, y se demuestra que una condición necesaria para que un material sea piezoeléctrico es que no sea centro-simétrico.

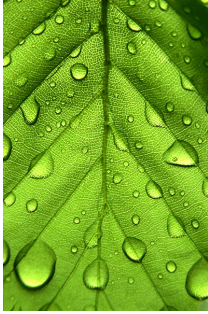
trafino de dispositivos ópticos, microscopía, sonda de barrido, sistemas de ignición de encendedores, limpieza megasónica y recientemente se ha popularizado en la fabricación de controles remotos y ayudantes de estacionamiento instalados en las defensas de los automóviles, así como en dispositivos que cambian el ángulo de los faros al entrar en una curva.

Si bien es posible encontrar materiales compuestos hechos por el hombre en prácticamente todo lugar; también lo es, poniendo un poco de atención, encontrar materiales compuestos naturales. Las rocas (figura 2.2), en general, están compuestas por una multitud de minerales, como el granito (figura 2.2(a)): compuesto principalmente de cuarzo, mica y feldespato; no obstante, las hay compuestas por un sólo mineral, como el yeso o la piedra caliza (figura 2.2(b)). Incluso las rocas porosas pueden ser consideradas como materiales compuestos, pues contienen fluidos (algunas veces de valor económico, como el petróleo) en sus poros. La madera: son fibras de celulosa en una matriz de lignina. El nácar, es un compuesto laminado que consiste de una matriz orgánica en un agregado cerámico. Las hojas de las plantas (figura 2.3(a)) son estructuras laminares complejas en donde cada una de las capas que las forman tienen una función muy bien definida, incluso las hojas aciculares (figura 2.3(b)); por ejemplo abrir o cerrar poros para efectuar la transpiración. Las plumas (figura 2.3(c)) contienen varios materiales, predominantemente queratina, en una configuración muy particular, más compleja que aquella del pelo o las escamas. La telaraña (figura 2.3(d)) es un gel cubierto de una estructura de proteínas alineadas de manera muy particular, presenta propiedades físicas superiores a las de cualquier material fabricado por el hombre. Se estira sin romperse 31 %, mientras que el nylon, sólo el 16 %. En comparación con el acero, es más resistente por unidad de área y más fuerte en relación a su peso. Además es resistente al ataque de hongos y bacterias.

En el cuerpo humano: los músculos, los dientes y los huesos (figura 2.3(e)), son ejemplos de materiales compuestos; además, dadas las características de los materiales constituyentes, exhiben lo mejor de sus componentes. Por ejemplo, el hueso, constituido por cristales de hidroxapatita, fibras de colágena y otros compuestos orgánicos en menor proporción, si estuviera constituido únicamente por cristales de hidroxapatita sería quebradizo; y de estar formado únicamente por colágena, sería tan maleable como una goma. Sin embargo, tiene una resistencia a la tensión similar a la del hierro; no obstante, es tres veces más ligero y diez veces más flexible (González-Macias y Serrano-Figueras, 1995).

El hueso es un material muy especial en muchos sentidos: presenta muchas formas y variedades que, dependiendo de las fuerzas a las que es sometido, se alinea de tal forma que distribuye mejor las cargas. Este fenómeno es conocido como la Ley de Wolf (Cowin, 1986). El hueso se clasifica en poroso y compacto. El poroso se encuentra principalmente en la zona de la cadera. Forma entramados de tabiques, orientados paralelamente a las líneas de las fuerzas que resiste. El compacto, localizado principalmente en la zona apendicular, es característico de los huesos largos. Tiene una estructura primaria llamada osteona o sistema de Havers, que son cilindros longitudinales de 3 milímetros de longitud, alineados paralelamente al eje longitudinal del hueso. El sistema de Havers lo conforman de 4 a 20 laminillas concéntricas, alrededor de un canal, llamado Canal de Havers, a través del cual se transportan fluidos como sangre y contiene nervios o arterias. Cada la-





(a) Hoja de haya. Las hojas caducas cambian su coloración ante estímulos externos; como los cambios de temperatura o de luminosidad, hecho que aún no se comprende del todo. Tomado de: [www.fotonatura.org](http://www.fotonatura.org)



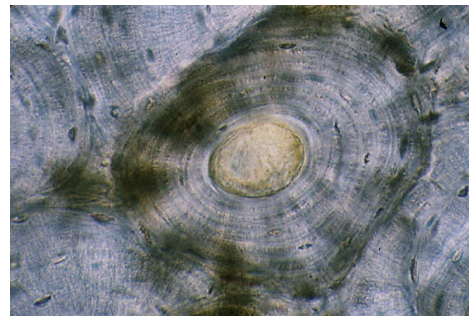
(b) Hoja acicular. Hoja perene en forma de aguja, característica de los *pinus*. Tomado de: [www.fotonatura.org](http://www.fotonatura.org)



(c) Las plumas son estructuras queratinosas fundamentales en el vuelo aviar, pues forman la superficie sustentadora del ala. Tomado de: [www.farm3.static.flickr.com](http://www.farm3.static.flickr.com)



(d) Telaraña. La telaraña es el material compuesto por excelencia. Posee propiedades sorprendentes, que a la fecha no se han podido igualar, aún con los materiales compuestos más avanzados construidos por el hombre. Tomado de: [www.fotonatura.org](http://www.fotonatura.org)



(e) La matriz intercelular ósea está formada por: fibrillas de colágena tipo I, glicoproteínas, proteínas ricas en ácido g-carboxiglutámico y queratán-sulfato; fosfato de calcio amorfo y cristales de hidróxidos de calcio. Tomado de: <http://escuela.med.puc.cl>

Figura 2.3: Los materiales compuestos en los seres vivos, resultado de millones de años de evolución, es el *non plus ultra* del diseño y la construcción. Combinan lo mejor de las propiedades de cada material constituyente para obtener un nuevo material, del cual depende la supervivencia de cada especie.

minilla tiene un grosor aproximado de  $5 \mu\text{m}$ . En cada laminilla, se encuentran alineadas, paralelamente, fibrillas de colágena que, según Ascenzi y Bonucci (1967), clasifica en tres tipos principales a las osteonas: tipo T, cuando las fibras de una laminilla están orientadas transversalmente con respecto al eje longitudinal de la osteona. Tipo L, cuando las fibrillas de todas la laminillas son paralelas al eje longitudinal de la osteona. Finalmente las tipo A, cuando la distribución de las fibrillas es alternante entre laminillas contiguas; es decir, una laminilla es longitudinal y las dos adyacentes son transversales. Cada una con propiedades elásticas distintas (Martin *et al.*, pp 148 y 152, 1998). Existen sales minerales inorgánicas depositadas en la osteona, las cuales le confieren su dureza y rigidez, además de actuar como reservorio de sales minerales, sensible a estímulos endócrinos. Las más abundantes son fosfato de calcio amorfo y cristales de hidróxido de calcio y de fosfato llamados hidroxiapatita ( $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$ ). Los cristales de hidroxiapatita son aplanados ( $30 \times 3 \text{ nm}$ ) y se adosan a lo largo de las fibrillas de colágena, a intervalos de aproximadamente  $67 \text{ nm}$ .

Otra característica que hace particular al hueso es su biología. El tejido óseo está formado por la matriz ósea, que es un material intercelular calcificado y por células, que pueden corresponder a:

**fibroblastos.** Célula que sintetiza fibras (de colágena) y mantiene la matriz extracelular del tejido de muchos animales. Estas células proporcionan una estructura en forma de entramado (estroma) a muy diversos tejidos y juegan un papel crucial en la curación de heridas, siendo las células más comunes del tejido conectivo. (figura 2.4(a)),

**osteoblastos,** los cuales están encargados de sintetizar y secretar la parte inorgánica de la matriz ósea (hidroxiapatita) durante su formación y que se ubican siempre en la superficie del tejido óseo ya que éste sólo puede crecer por aposición (figura 2.4(b)),

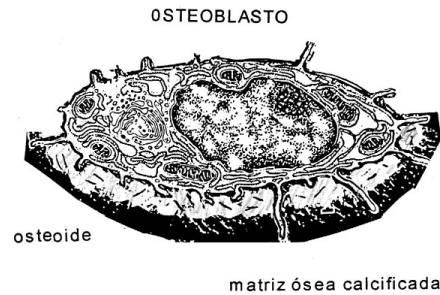
**osteocitos,** se cree que son los responsables de la manutención de la matriz ósea, se ubican en cavidades o lagunas rodeadas por el material intercelular calcificado. Son células mecano-sensoras que durante el proceso de normal de crecimiento del hueso quedan atrapadas en las lagunas de la matriz (figura 2.4(c)),

**osteoclastos,** son células responsables de la reabsorción del tejido óseo, que participan en los procesos de remodelación de los huesos y pueden encontrarse en depresiones superficiales de la matriz ósea, llamadas lagunas de Howship (figura 2.4(d)).

Como el hueso sólo puede crecer por aposición y los osteocitos no pueden vivir a más de  $200 \mu\text{m}$  de un capilar, la osteona adquiere esa forma cilíndrica característica. Como material compuesto, el hueso deshidratado, tiene otra característica importante: la piezoelectricidad. En la década de 1950, dos cirujanos japoneses (Fukada y Yasuda, 1957) observaron, en hueso seco, que se presentaba éste fenómeno. Uno de los resultados más importantes en el estudio de hueso es la clasificación de éste dentro del grupo cristalográfico hexagonal (clase 6). Desde el descubrimiento de la piezoelectricidad en el hueso, se ha postulado que la piezoelectricidad podría estimular el crecimiento del hueso, debido al potencial eléctrico generado por el esfuerzo aplicado (Marino y Becker, 1970). También,



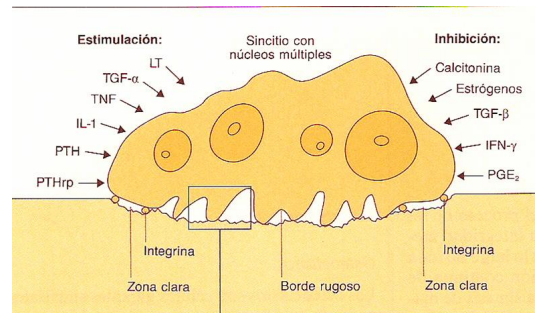
(a) Fibroblasto. El fibroblasto sintetiza colágena y glucosaminoglucanos de la sustancia amorfa. Migran y proliferan durante la cicatrización de heridas. La restitución del tejido conectivo se efectúa mediante el crecimiento de fibroblastos jóvenes. Tomado de <http://es.wikipedia.org>



(b) Osteoblasto. Célula sintetizadora del tejido óseo, su desarrollo se ve influenciado por distintos factores que estimulan su formación como la hormona paratiroidea y la vitamina D. Tomado de: <http://escuela.med.puc.cl>



(c) Osteocito. Se ha postulando que el osteocito es la célula mecano-sensora del tejido óseo y por tanto modulan el comportamiento de los osteoblastos y de los osteoclastos. Tomado de: <http://escuela.med.puc.cl>



(d) Osteoclasto. Célula encargada de la reabsorción ósea, que realiza su función quitando el mineral de la matriz y rompiendo la fibrillas de colágena. Tomado de: <http://escuela.med.puc.cl>

Figura 2.4: Las células que regulan el crecimiento y reabsorción del hueso. A la fecha no se conoce con precisión el mecanismo que regula el crecimiento y reabsorción del hueso, debido en parte a que están involucrados factores mecánicos, químicos y biológicos, dificultando su modelado.

se ha postulado otra alternativa para explicar la regeneración del hueso, los llamados potenciales de corriente, que se producen debido al transporte de iones en los fluidos que circulan en el hueso por efecto electrocinético (Pollack, 2001). Sin embargo, ambas teorías no explican a completa satisfacción lo que se observa en investigaciones clínicas. Desde el descubrimiento de la piezoelectricidad en el hueso, se han hecho numerosos intentos por comprender la forma en que interactúan las partes constituyentes de hueso, entre los más notables se puede contar a Marino y Becker (1970) quienes, experimentando con hueso humano, demostraron que el efecto piezoeléctrico es atribuible únicamente a la parte orgánica del hueso; es decir, a la colágena. La teoría de la piezoelectricidad como promotora de la osteogénesis se ve reforzada en resultados de estudios como los realizados por Wiesmann *et al.* (2001), quienes encontraron que, aplicando estimulación eléctrica a osteoblastos obtenidos a partir del metacarpo de un bovino, hay un aumento en la formación mineral, por lo que concluyen que los osteoblastos son sensibles a estímulos eléctricos. Bajo esta teoría, se ha desarrollado tecnología para tratar de imitar esta clase de estimulación; por ejemplo: Tanaka (1999) desarrolló un mecanismo estimulador usando un actuador piezoeléctrico para proporcionar a células cultivadas de hueso esfuerzos mecánicos con magnitudes “más fisiológicas”.

A la fecha, se han realizado numerosos esfuerzos por medir las propiedades piezoeléctricas del hueso (Aschero *et al.* 1999; Góes *et al.* 1999), incluso modelos numéricos y teóricos referentes a la remodelación de hueso (Baïotto y Zidi, 2004 a, b ). Por ejemplo, Yang *et al.* (1999) aplicaron un método de análisis de datos para un conjunto de medidas de constantes elásticas de hueso y madera que permite, de una forma más efectiva, la determinación de las simetrías elásticas de esta clase de materiales, pues presentan una microestructura demasiado compleja. Searby *et al.* (2001) lograron medir las propiedades elásticas de un osteoblasto mediante un experimento aplicando hipergravedad.

En esta vertiente de la investigación, nuevos aparatos y dispositivos se han diseñado para estimular la osteogénesis (Charras *et al.*, 2001), por ejemplo la compañía holandesa IMD (<http://www.imd-eur.com>, 2004) reporta que sus aparatos, que usan corriente directa y pulsos electromagnéticos, soldan huesos que no lo hacían durante el enyesado normal. Nuevos materiales se han utilizado como andamios en la ingeniería de tejidos. Entre los más exitosos se encuentran los biovidrios (Blacker *et al.*, 2005; Du *et al.*, 2002 ), sin dejar de lado la construcción de biocompuestos con las dos principales componentes del hueso, hidroxiapatita y colágena (Mythili *et al.*, 2000; Ignjatović *et al.*, 1999, 2001; Itoh *et al.*, 2002). Este tipo de materiales debe ser de tal forma que permita la adhesión de los osteoblastos al compuesto, y que, de esta forma puedan reproducirse.

Telega (1991) trata el problema de encontrar propiedades efectivas de cuerpos piezoeléctricos heterogéneos, usando homogeneización no uniforme, recalca el hecho de que se puede usar este modelo para tratar la no uniformidad del hueso compacto; sin embargo, hace referencia a autores que aseguran la regularidad interna del hueso. Miara *et al.* (2005), tomando como suposición base las propiedades piezoeléctricas del hueso y usando el método de homogeneización propone un nuevo biomaterial hecho de una matriz piezoeléctrica, biocompatible y porosa rellena de osteoblastos, como un nuevo biomaterial que ayude en la regeneración de hueso. Jianqing *et al.* (1997) encontraron que usar

implantes de un compuesto de hidroxiapatita con titanato de bario, es más eficiente para promover la osteogénesis (el titanato de bario es piezoeléctrico mientras que la hidroxiapatita no) que usar implantes de hidroxiapatita solamente, ambos materiales son biocompatibles, según sus palabras: "*Los resultados confirman que los potenciales generados por esfuerzos promueven la osteogénesis...*". Sus resultados muestran, además de un aumento en la osteogénesis, una dependencia en la dirección de polarización del material piezoeléctrico.

Kar-Gupta y Venkatesh (2005) contribuyen en el estudio y caracterización del comportamiento electromecánico, de forma numérica, de un piezocompuesto 1-3; al variar la dirección de la polarización en el material usado para la matriz. Comparan sus cálculos con resultados de otros modelos, en especial con MHA, y los encuentran eficientes. En trabajos posteriores continúa con esa línea y proponen un modelo para la caracterización analítica de esta clase de materiales (2006 y 2007). Dos de los casos de estudio que proponen pueden analizarse analíticamente de forma inmediata, usando los resultados obtenidos por ejemplo en: Bravo-Castillero *et al.* (2001), Sabina *et al.* (2001) ó López-López *et al.* (2005)

En López-López *et al.* (2005) se estudió un compuesto bifásico reforzado de fibras cilíndricas circulares en un estado de deformación antiplana acoplada con potencial eléctrico. Las propiedades electroelásticas de las fibras se suponen pertenecientes a la clase cristalográfica 622: la misma que la colágena. Se encuentran fórmulas analíticas cerradas para los coeficientes efectivos usando el MHA y sus problemas locales asociados, los cuales se resuelven usando la teoría de potencial de variable compleja. En México se lleva a cabo una importante investigación en materiales para implantes. Por ejemplo, se ha descubierto una nueva técnica de esterilización, mediante la cual es posible utilizar hueso de bovinos como implantes en humanos (Piña *et al.*, 2006). El hecho de que se trate de un material biocompatible e inerte permite, una vez implantado, que las células encargadas de la regeneración, los osteoblastos, colonicen el material, al tiempo que los osteoclastos se encargan de su degradación; por lo que éste material desaparece del cuerpo del paciente pero permanece el tiempo necesario como para permitir la regeneración. También se lleva a cabo investigación en materia de cementos óseos (Quinto y Piña, 2003) que son usados en el anclaje de prótesis. La empresa mexicana *BIOGRAFT*, realiza desde 2007, novedosos procesos biotecnológicos de esterilización y preservación, para procesar tejido músculo-esquelético humano para obtener implantes estériles de hueso y tendón, los cuales pueden utilizarse en el tratamiento de diversas lesiones óseas o rupturas de ligamentos.

## 2.2. Planteamiento del problema

Las lesiones más comunes que requieren reconstrucción de huesos, se localizan principalmente en las zonas cráneo-facial y del esqueleto apendicular (brazos y piernas). Estos problemas, en la actualidad, reciben tratamientos diversos. Los más populares son: la reconstrucción por medio de implantes de hueso o mediante materiales sintéticos. Am-

bas alternativas tienen grandes ventajas; no obstante, numerosas desventajas (Pollack, 2001); entre las que destacan el hecho de ir acompañados de múltiples cirugías sumamente dolorosas. En años recientes, ha surgido una tercera alternativa: la **ingeniería de tejidos**. Ésta se basa en la premisa de que es posible combinar células apropiadas, con un material que sirva de andamio, de manera que el combinado sea capaz de conducir a la formación de tejidos. Hay progresos recientes en la ingeniería de tejido cardíaco (Leor y Cohen, 2004) y de hueso (Hollister *et al.*, 2001; Cowin, 2001).

Recientemente Noris-Suárez *et al.*, (2007 a, b) y su grupo de trabajo (Ferreira *et al.*, 2007) descubrieron que la colágena por sí sola es capaz de promover la osteogénesis: realizaron una simulación biomimética de una deformación elástica de hueso cortical y encontraron que los dipolos piezoeléctricos producidos por la deformación de la colágena produce la adhesión de hidroxiapatita; incluso sin la presencia de osteoblastos.

Por lo anterior, es fácil darse cuenta que la ingeniería de tejidos, tiene como fundamento: *la aplicación de los materiales compuestos*. En virtud de ello: es de suma importancia, para todo investigador en dicha área, conocer las propiedades efectivas de los materiales que pretende utilizar. Razón por demás importante para estudiar alternativas de materiales compuestos que sirvan como implantes de hueso.

### 2.2.1. Objetivos

#### Objetivo general

Aplicar el método de homogeneización asintótica a un material compuesto 1-3, periódico y con variaciones rápidas en sus propiedades físicas para obtener fórmulas analíticas de sus coeficientes efectivos.

#### Objetivos específicos

- Estudiar el problema de la caracterización de las propiedades efectivas de un material compuesto cuyos constituyentes son materiales dieléctricos transversalmente isótropos.
- Analizar el problema mencionado arriba cuando: al menos un eje de simetría material, de los materiales constituyentes, sea perpendicular al eje de simetría geométrico del compuesto.
- Realizar cálculos numéricos de las fórmulas analíticas obtenidas en el modelo dieléctrico para los coeficientes efectivos, como función de la anisotropía del compuesto modelado.
- Validar los resultados analíticos al compararlos con cálculos numéricos basados en el método del elemento finito.
- Estudiar un modelo de un andamio piezoeléctrico, hecho con materiales utilizados en implantes (colágena y titanato de bario), con fibras cilíndricas distribuidas pe-

riódicamente en un arreglo cuadrado, por medio del método de homogeneización asintótica.

- Realizar simulaciones numéricas del comportamiento de los coeficientes efectivos obtenidos en el modelo piezoeléctrico.

### 2.2.2. Alcances y limitaciones

Con base en todo lo anterior, en el presente trabajo de investigación, se pretende deducir fórmulas analíticas que permitan conocer, con cualquier grado de aproximación, las propiedades efectivas de un material que pueda utilizarse como posible material para fabricar implantes de hueso compacto. Limitándose únicamente a la parte correspondiente al andamio. Se propone un modelo de la interacción de los sistemas de Havers, mediante la idealización de un material bifásico reforzado de fibras. Matriz y fibras infinitamente largos. Dicho modelo, toma en consideración que el hueso compacto presenta múltiples microestructuras a diferentes escalas, mediante la caracterización de un material reforzado de fibras cilíndricas paralelas entre sí, distribuidas de manera periódica en un arreglo cuadrado y orientadas longitudinalmente con respecto al eje de simetría geométrico. La periodicidad de las fibras, y las fibras mismas, se consideran suficientemente pequeñas (ver tabla 3.2), de tal forma que es posible aplicar la técnica matemática conocida como **Método de Homogeneización Asintótica (MHA)**. Para el compuesto se consideran, en la primera parte (correspondiente al modelo dieléctrico), materiales dieléctricos transversalmente isótropos, con la finalidad de obtener la capacidad necesaria para discernir la naturaleza del problema; para la segunda parte (modelo piezoeléctrico) se consideran materiales pertenecientes al grupo cristalográfico hexagonal clase 622 y hexagonal clase 6mm debido a que la principal componente orgánica del hueso, colágena tipo I, pertenece al primero y el titanato de bario, material piezoeléctrico biocompatible, al segundo. Se consideran posibles direcciones de polarización, como una idealización, no necesariamente paralela al eje de simetría geométrica, situación presente en la osteona. La metodología desarrollada en el presente trabajo permite, a corto plazo, incorporar nuevas hipótesis tales como la existencia de una fibra multicapa, que permitirá tener un modelo más cercano a la situación real de las osteonas.

## Capítulo 3

# Justificación del modelo propuesto y herramientas utilizadas

### 3.1. Hueso y piezoelectricidad

En 1957, Fukada y Yasuda descubrieron que el hueso seco es un material piezoeléctrico lineal: un esfuerzo mecánico aplicado, se convierte en una polarización eléctrica (efecto directo); mientras que, la aplicación de un campo eléctrico, produce una deformación (efecto inverso). En estudios posteriores, el hueso, fue clasificado dentro del grupo cristalográfico hexagonal.

Debido a que los osteoblastos reaccionan ante estímulos eléctricos (Wiesmann, *et al.* 2001), la piezoelectricidad en el hueso ha sido ampliamente estudiada por su hipotética intervención en el proceso de osteogénesis (Currey, 1984; Evans, 1973; Hancox, 1972), además del hecho de que la colágena seca, presenta valores considerables, si se compara con otros materiales, en sus coeficientes piezoeléctricos, (ver tabla 3.1). Las investigaciones en las áreas de crecimiento, reparación y regeneración de hueso (Bassett y Becker, 1962; Becker, 1961, 1972 y 1974), han logrado importantes avances. Por ejemplo, se logró la regeneración parcial de miembros de ratas al aplicar una señal eléctrica débil. Güzelzu (1978) propuso un modelo para analizar la diáfisis de hueso seco de fémur de un humano recién nacido, mediante un cilindro hueco, obtuvo resultados que apuntan hacia la regeneración de hueso fracturado con la ayuda de una carga superficial negativa y a la aceleración de la misma mediante fuerzas de cizalla. Recientemente la compañía holandesa **IMD** (<http://www.imd-eur.com>, 2004) reporta que sus aparatos, que usan corriente directa y pulsos electromagnéticos, soldan huesos que antes no lo hacían por sí mismos durante el enyesado normal.

No obstante que se han observado valores<sup>1</sup> de hasta 0.7 pC/N, en el coeficiente piezoeléctrico de cortante  $d_{14}$ , en el hueso *in vivo* (Bur, 1976), se han realizado estudios en los que se demuestra que el efecto piezoeléctrico de la colágena hidratada, es casi nulo.

---

<sup>1</sup>El cuarzo tiene valores de 0.7 a 2.3 pC/N para diferentes direcciones y algunas cerámicas piezoeléctricas presentan valores de hasta 600 pC/N



Por esta razón, se ha postulado que son los potenciales de corriente los que proporcionan a los osteoblastos el estímulo eléctrico necesario para realizar la regeneración del hueso. Los potenciales de corriente, estudiados originalmente por Anderson y Eriksson (1968 y 1970) y recientemente por Pollack (2001), generan esfuerzos a frecuencias relativamente pequeñas, las cuales dominan en condiciones normales de carga para el hueso, aún en la presencia de relajación dieléctrica, pero es un proceso del cual aún se comprende muy poco.

Cuadro 3.1: Coeficientes piezoeléctricos de algunos materiales biológicos y algunos materiales inorgánicos (medidos en  $10^{-12}$  m/V). Tabla tomada de Galassi *et al.* (2002)

Material	$d_{14}$	$d_{15}$	$d_{31}$	$d_{33}$
Tendón de Aquiles de bovino	-2.7	1.4	0.09	0.07
Fémur de caballo	-0.2	0.04	0.003	0.003
Seda	-1.1	0.25	0.02	0.023
ZnS	-2.8	0	-1.1	3.2
$\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$	40	0	0	0
$\text{SiO}_2$	0.8	$d_{11} = 2.2$	0	0

El hueso cortical, si bien no presenta una estructura periódica, sí tiene una estructura regular. Se han encontrado múltiples subestructuras, las cuales cubren un rango de tallas desde los nanómetros hasta los centímetros. Estas subestructuras se organizan siguiendo la ley de Wolf: “*Las deformaciones óseas se deben a adaptaciones mecánicas de los huesos...*” Una de esas subestructuras es la osteona, (de aproximadamente  $200 \mu\text{m}$  de diámetro por 2 mm de longitud), que es una organización laminada cilíndrica (cada laminilla de aproximadamente  $5 \mu\text{m}$  de grosor) de fibras de colágena (de entre 3 y  $5 \mu\text{m}$ ) y cristales de hidroxiapatita, el otro principal constituyente del hueso, agrupados en placas finas o estructuras similares a hojas con tamaño de hasta 150 nm de longitud, 80 nm de ancho y 5 nm de grueso, aunque la mayoría mide aproximadamente la mitad (Gray, 2004).

Es precisamente la colágena, la constituyente a la que se le atribuye el efecto piezoeléctrico en el hueso deshidratado (Martin *et al.*, 1998). Ascenzi y Bonucci (1967) descubrieron, usando luz polarizada, que las fibras de colágena en cada laminilla, se organizan en tres diferentes orientaciones. Las clasificaron en tres tipos: tipo T, A y L por transversal, alternante y longitudinal (Fig. 3.1 a, b y c, respectivamente).

Gracias a la microscopía por barrido de electrones, en 1988, Girauld-Guille (figura 3.2(a)) introdujo una nueva teoría referente a la distribución de las fibras de colágena en las osteonas de hueso humano decalcificado. Se dio cuenta que en ciertas zonas de la osteona, las fibrillas que forman las láminas de la osteona siguen una espiral alrededor del Canal de Havers, de tal forma que se distribuyen formando un ángulo recto con aquellas de las laminillas adyacentes (figura 3.2(b)).

Las osteonas suelen ser paralelas unas con otras y en los huesos alargados, como los del esqueleto apendicular, son paralelas también al eje longitudinal del hueso. Además de distribuirse regularmente en un corte transversal. Se ha estimado que en el esqueleto adulto existen unos 21 millones de osteonas. En los cortes transversales aparecen redon-

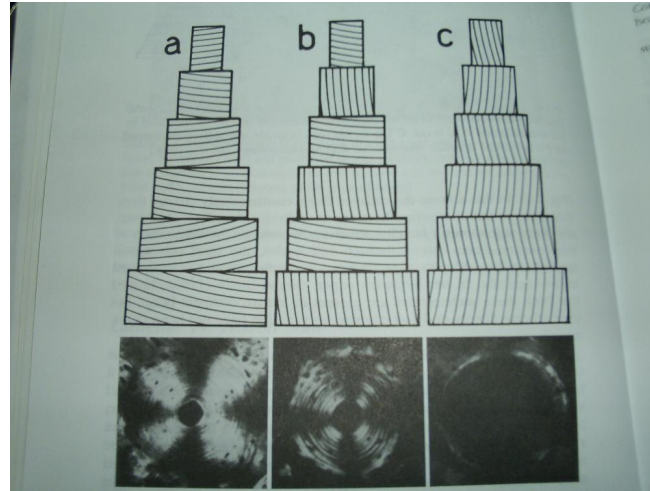
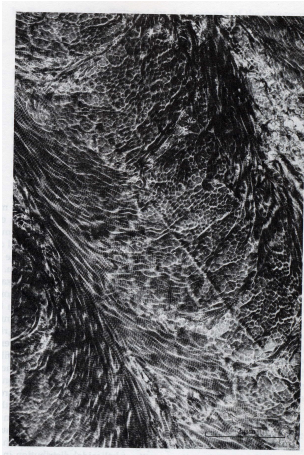
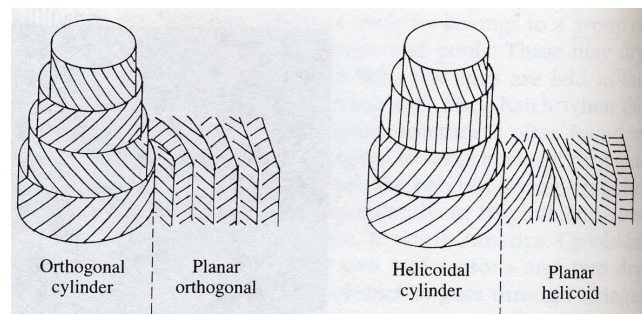


Figura 3.1: Tres tipos diferentes de osteonas, clasificables debido a la orientación de las fibras de colágena la cuál puede ser apreciada al mirarlas con luz polarizada. a) Tipo T, b) Tipo A, c) Tipo L. Ilustración tomada de Martin *et al.*, 1998



(a) Fotografía tomada mediante microscopía de barrido de electrones de un corte oblicuo al eje de la osteona de un fémur humano de 35 años de edad. Se muestra el patrón helicoidal de las fibras de colágena. Tomado de Neville, 1993



(b) Representación de la distribución de las fibras de colágena de las osteonas, según las observaciones de Girauld-Guille (1988). Tomado de Neville, 1993

Figura 3.2: Fotografía y esquemas de la distribución de fibras de colágena en hueso humano (Girauld-Guille, 1988)

das o elipsoidales, con diámetro variable entre 100 y 400  $\mu\text{m}$ , además de tener una longitud de hasta 3 mm. Cada osteona está permeada por canalículos, que forman vías para la difusión de nutrientes, gases, etc. entre el sistema vascular y las osteonas. En los espacios entre las osteonas existen restos de osteonas o laminillas circunferenciales de hueso más antiguo parcialmente erosionado (Gray, 2004).

	Osteona	Fibra del modelo	Hueso	Compuesto
Longitud	mm	$\infty$	cm	$\infty$
Ancho	$\mu\text{m}$	$\ell$	mm – cm	L

Cuadro 3.2: Dimensiones consideradas, en el modelo propuesto, para analizar la interacción entre los sistemas de Havers

Debido a que los sistemas de Havers (osteonas): i) tienen una sección transversal circular (casi siempre), ii) se distribuyen uniformemente en la matriz ósea y iii) presentan una variación considerable en sus dimensiones características (ver tabla 3.2); en el presente trabajo se supondrá que el hueso cortical, puede ser modelado mediante un material compuesto, reforzado de fibras cilíndricas circulares, distribuidas periódicamente en un arreglo cuadrado, dentro de una matriz homogénea. Si bien, osteonas y hueso cortical no tienen una longitud infinita, debido a que la longitud es tres órdenes de magnitud mayor que su ancho, en el modelo propuesto: la matriz y las fibras del compuesto se supondrán infinitamente largas. El diámetro de las fibras se supondrá muy pequeño, con respecto al diámetro del compuesto. Como constituyentes de éste compuesto, se suponen materiales con propiedades electroelásticas similares a la colágena tipo I y a la colágena reforzada con hidroxapatita, es decir, pertenecen al grupo cristalográfico hexagonal clase 622. Dichas propiedades han sido reportadas en las tablas de Landolt-Börnstein (1979) y en el trabajo de Góes *et al.* (1999), respectivamente. Se consideran también, para el modelo piezoeléctrico de la sección 5.2, las propiedades electroelásticas del Titanato de Bario, reportadas en Kar-Gupta y Venkatesh (2005). Además, debido a que se ha estimado que el esqueleto adulto humano, posee aproximadamente 21 millones de osteonas (Gray, 2004), se supondrá que la cantidad de fibras (inclusiones) en el compuesto es infinita.

Para analizar este compuesto, se elige el Método de Homogeneización Asintótica (MHA), técnica matemática frecuentemente usada en la caracterización de materiales compuestos con inclusiones muy pequeñas, pues se ha comprobado que los resultados tiene un mejor rango de aproximación, comparado con otras técnicas estándar (Hollister, 1992).

Cuando se pretende analizar un material heterogéneo, como el propuesto (periódico y con inclusiones cuya longitud característica es muy pequeña, en relación a aquella del compuesto al que pertenecen), se tiene como modelo matemático, generalmente, una ecuación diferencial parcial, con coeficientes que cambian rápidamente de manera periódica. Por ello, es en extremo complicado encontrar la solución a dichas ecuaciones. La teoría de la homogeneización, “toma” una ecuación diferencial con esas características y “devuelve” una ecuación diferencial homogénea, con coeficientes constantes. Dichos coeficientes, son conocidos como *los coeficientes efectivos* del material compuesto. Estos coeficientes tienen una expresión analítica, resultado de la solución de problemas loca-

les, lo que representa una gran ventaja con respecto a los métodos numéricos: pueden ser usadas como cotas o herramientas de comparación y verificación en casos límite.

Los materiales que responden al efecto piezoeléctrico clásico, tienen sus propiedades elásticas y dieléctricas acopladas mediante los coeficientes piezoeléctricos. Cuando éstos últimos se consideran nulos, se pueden estudiar los fenómenos elásticos y dieléctricos, presentes en el material, por separado. Es decir un material dieléctrico puede ser visto como un caso particular límite de uno piezoeléctrico.

Una vez establecidas las propiedades de los materiales usados para el compuesto propuesto, las ecuaciones que gobiernan el fenómeno piezoeléctrico lineal en cuestión se desacoplan en dos partes. La primera, involucra únicamente las componentes del desplazamiento en el plano transversal al eje de las fibras. Este es un problema completamente análogo al estudiado por Sabina y sus colaboradores (Guinovart-Díaz *et al.*, 2001; Rodríguez-Ramos *et al.*, 2001), por lo que su solución se conoce y ha sido estudiada ampliamente. La solución del segundo conjunto de ecuaciones proporciona el desplazamiento fuera del plano transversal a las fibras y el potencial eléctrico. La ecuación equivalente a un medio homogéneo es obtenida en el presente trabajo. Sin embargo, el tema de interés en el presente estudio es únicamente encontrar fórmulas explícitas de los coeficientes efectivos del material heterogéneo equivalente. Con este propósito, se encuentran expresiones analíticas cerradas y simples que dependen de los materiales involucrados, de la geometría del arreglo y del tamaño de las fibras.

Como primer paso del estudio, en el capítulo 4, se caracteriza a un material compuesto reforzado de fibras cilíndricas circulares infinitamente largas, distribuidas periódicamente en un arreglo cuadrado en una matriz homogénea, matriz y fibras se consideran como únicamente dieléctricos. En dicho análisis, se toman en cuenta los casos de diferentes orientaciones ortogonales relativas de los ejes materiales de las fibras y la matriz, simulando las orientaciones relativas de las osteonas. Se obtienen las fórmulas analíticas de los coeficientes de permitividad eléctrica para cada tipo de orientación.

En el capítulo 5 se estudian únicamente dos casos de orientaciones relativas de los ejes materiales de las fibras y de la matriz, considerándolas como materiales piezoeléctricos. Se usa nuevamente el MHA para solucionar las ecuaciones resultantes del modelo. Se encuentran fórmulas analíticas cerradas muy simples, fácilmente programables, para los coeficientes efectivos que caracterizan al material compuesto.

Finalmente, se hace un análisis de los resultados obtenidos y algunas perspectivas para esta línea de investigación.

## **3.2. Método de homogeneización asintótica**

### **3.2.1. Generalidades**

La teoría matemática de la homogeneización es un método estándar que se usa para estudiar el comportamiento de materiales compuestos con inclusiones pequeñas y, por tanto, con propiedades que cambian rápidamente (Bakhvalov y Panasenko, 1989; Berdichevsky *et al.*, 1999; Cioranescu y Donato, 1999; Jikov, 1994; entre otros). Los compuestos

son materiales que se caracterizan por el hecho de que contienen dos o más constituyentes finamente mezclados. Son muy usados en la industria pues tienen un mejor comportamiento que el comportamiento promedio de sus constituyentes. Por ejemplo, el plástico reforzado con fibra de vidrio combina la alta resistencia de las delgadas fibras de vidrio, con la ductilidad y la resistencia química del plástico. Sin embargo, la fragilidad que presentan las fibras de vidrio aisladas, no se manifiesta en el material compuesto.

En general, en un compuesto, las heterogeneidades son pequeñas, comparadas con su dimensión global. De esta forma, se tienen presentes dos escalas, que caracterizan al material: la microscópica, la cual describe la heterogeneidad y la macroscópica, que describe el comportamiento global del compuesto.

Desde el punto de vista macroscópico, el compuesto luce como un material homogéneo. Un propósito de la homogeneización es precisamente determinar las propiedades del compuesto tomando en cuenta las propiedades de la estructura microscópica.

La teoría de homogeneización trata de encontrar las ecuaciones “apropiadas” (*homogeneizadas*) que describen los procesos físicos que ocurren en un material heterogéneo, cuando la escala de las heterogeneidades tiende a cero. En tales situaciones, se desea que el efecto de la microestructura se encuentre únicamente en las propiedades macroscópicas o efectivas, vía ciertas promediaciones de la microestructura.

En el caso más simple, el método considera dos escalas: la escala macroscópica  $L$ , la cual caracteriza a las partes que varían lentamente en el sistema, generalmente impuestas por los términos fuente, las condiciones de frontera o las condiciones iniciales, y la escala microscópica  $\ell$ , asociada a las heterogeneidades; es decir, a la microestructura del sistema. El límite de interés para los propósitos de la teoría de homogeneización es cuando

$$\ell \ll L, \quad (3.1)$$

de esta forma, se define un parámetro

$$\varepsilon = \frac{\ell}{L}, \quad (3.2)$$

que caracteriza las fluctuaciones rápidas en la microestructura cuando  $\varepsilon \ll 1$ . Dichas variaciones en el compuesto son estudiadas hacen necesaria la introducción de dos escalas. Dichas escalas se analizan utilizando la variable lenta o global  $\mathbf{x}$  y la variable rápida o local  $\mathbf{y}$ , las cuales se suponen relacionadas a través de la igualdad

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}. \quad (3.3)$$

En la próxima sección, se presenta un ejemplo, de aplicación del método, para el caso de un material dieléctrico reforzado de fibras cilíndricas, también dieléctricas, distribuidas periódicamente en un arreglo cuadrado.

### 3.2.2. MHA: caso dieléctrico

Supongamos que un compuesto ocupa una la región  $\Omega$  del espacio ( $\mathbb{R}^3$ ) y además es una teselación de una celda periódica, la cual está formada por dos conjuntos o fases  $S_1$

y  $S_2$  contenidos en  $\mathbb{R}^3$ , de fracciones volumétricas  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente. Además, son tales que

$$V_1 + V_2 = 1, \quad S_1 \cup S_2 = \Omega, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset,$$

tal como se ilustra en la figura 3.3.

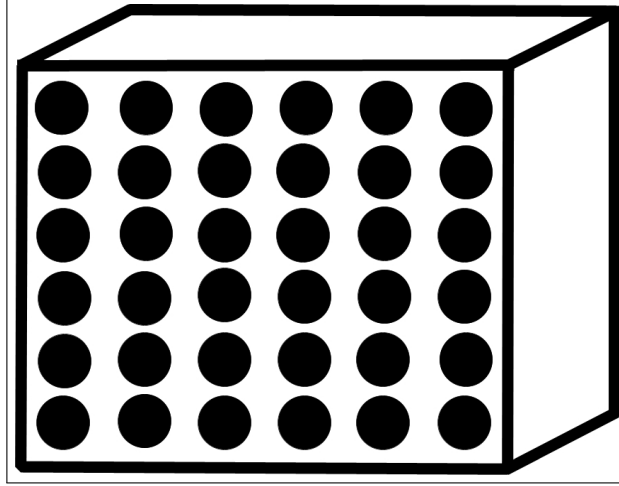


Figura 3.3: Esquema de la sección transversal un compuesto bifásico, matriz reforzada de fibras cilíndricas distribuidas periódicamente en un arreglo cuadrado

Sea  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  el campo de desplazamiento eléctrico y supongamos que está relacionado linealmente con el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  por medio del tensor de segundo rango de permitividad como sigue:

$$D_i(\mathbf{x}) = \kappa_{ij}(\mathbf{x}) E_j(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

En la ecuación anterior se ha usado la notación suma de Einstein sobre los índices repetidos, los índices latinos toman valores en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , mientras que los griegos en el conjunto  $\{1, 2, \dots\}$ . En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, se supondrá dicha notación sobre índices repetidos.

Dado que en general los materiales  $S_1$  y  $S_2$  son distintos, sus propiedades  $\kappa_{ij}^{(1)}$  y  $\kappa_{ij}^{(2)}$ , respectivamente, también lo son; no obstante, es posible definir el tensor de permitividad del compuesto, mediante la función indicadora  $\chi(\mathbf{x})$  de la fase  $S_1$  en la forma

$$\kappa_{ij}(\mathbf{x}) = \kappa_{ij}^{(1)} \chi(\mathbf{x}) + \kappa_{ij}^{(2)} (1 - \chi(\mathbf{x})), \quad (3.5)$$

donde

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in S_1, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin S_1. \end{cases}$$

Se debe notar que el tensor de permitividad (3.5) depende de la microestructura del compuesto: es periódico en dos direcciones y varía rápidamente. Sin pérdida de generalidad se supondrá que el periodo en cada dirección es unitario. Por otro lado, el potencial

eléctrico,  $T$ , también depende de la variable rápida y de la variable lenta. Dichas dependencias se escribirán como

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ T &= T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} T^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{en } S_1, \\ T^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{en } S_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suponiendo que no hay términos fuente en el compuesto, las ecuaciones que gobiernan al fenómeno son (Cioranescu y Donato, 1999)

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \kappa_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial T^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma \quad (3.6a)$$

$$T^{(1)} - T^{(2)} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \nu} - \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (3.6c)$$

$$T(\mathbf{x}) = \varphi_0 \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (3.6d)$$

donde  $\Gamma$  denota las líneas que separan las fibras de la matriz (interfase), i.e.  $\Gamma = \partial S_2$ . Las diferencias en (3.6b) y (3.6c) se deben entender en términos de límites. Los superíndices identifican a qué material se refiere. El operador  $\partial/\partial \nu$  está definido como

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \kappa_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} n_i,$$

donde  $n_i$  denota las componentes de la normal unitaria exterior a  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$ . En la frontera del compuesto, se ha prescrito un potencial eléctrico  $\varphi_0$ .

En el problema (3.6) se busca un potencial  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  que satisfice las condiciones de frontera. Es un problema elíptico que tiene una solución única (Bakhvalov y Panasenko, 1989). Esta afirmación se sustenta en el Teorema 3.1, que se enuncia unos párrafos abajo. Nótese que, se trata de un problema con coeficientes periódicos que varían rápidamente muy difícil, si no es que imposible, de resolver numéricamente cuando  $\varepsilon$  es muy pequeño. En casos como el presente es muy común utilizar la técnica matemática denominada MHA, para ello supondremos que el potencial puede ser escrito en la forma

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.7)$$

en realidad, para tener un error relativo aceptable en la solución, basta con proponer una solución a orden uno en  $\varepsilon$  (ver conclusiones en este capítulo).

Utilizando la regla de la cadena, el operador diferencial en (3.6a), se descompone en una suma de los tres operadores diferenciales siguientes

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \kappa_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \right], \quad A_1 = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \kappa_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \kappa_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j}, \\ A_2 &= -\kappa_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned}$$

por lo que

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \kappa_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = [\varepsilon^{-2} A_0 + \varepsilon^{-1} A_1 + A_2]. \quad (3.8)$$

Al sustituir (3.7) en (3.6) y tomando en cuenta (3.8), se tiene que la ecuación (3.6a) toma la forma

$$[\varepsilon^{-2} A_0 + \varepsilon^{-1} A_1 + A_2] (T_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots) = 0, \quad (3.9)$$

de donde, igualando los coeficientes correspondientes de las potencias de  $\varepsilon$ , (3.9) se convierte en un sistema recursivo de ecuaciones diferenciales:

$$A_0 T_0 = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma, \quad (3.10)$$

$$A_0 T_1 + A_1 T_0 = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma, \quad (3.11)$$

$$A_0 T_2 + A_1 T_1 + A_2 T_0 = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma \quad (3.12)$$

⋮

para  $T_0, T_1$ , etc. dados en (3.7).

Para continuar, es necesario introducir la siguiente definición de **celda unitaria**, así como la definición de una función periódica en una celda unitaria.

**Definición 3.1** Se usará el término **celda unitaria**, para referirse a un intervalo bidimensional unitario, i.e., dados los números reales  $a_1, a_2, b_1, b_2$  tales que  $|a_\alpha - b_\alpha| = 1$ , el conjunto  $Y \subset \mathbb{R}^2$  es una celda unitaria si y sólo si

$$Y = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_\alpha \leq x_\alpha < b_\alpha \}$$

#### Observación.

- No es necesario definir la celda unitaria para un espacio de tres dimensiones. Debido a la simetría material del compuesto, como se verá mas adelante, el problema (3.6) se convierte en un problema bidimensional.
- En el presente caso de estudio, una celda unitaria, está conformada por dos subconjuntos cuya intersección es nula: una matriz,  $S_1$  (con área  $|S_1| = V_1$ ), y una única fibra circular,  $S_2$  de radio  $R$  (con área  $|S_2| = V_2$ ), tal como lo ilustra la figura 3.4.
- Por definición se tiene que  $V_1 + V_2 = 1$ .
- La interfase en la celda unitaria será denotada por  $\Gamma$ , que al ser considerada como una curva, en el espacio bidimensional, se le confiere una orientación levógira (ver figura 3.4).

■

**Definición 3.2** Sea  $Y$  una celda unitaria y  $f$ , una función definida en  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Se dirá que  $f$  es  $Y$ -periódica cuando:

$$f(\mathbf{x} + k_i \mathbf{e}_i) = f(x), \quad \text{en } \Omega, \quad \forall k_i \in \mathbb{Z}$$

donde  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ .



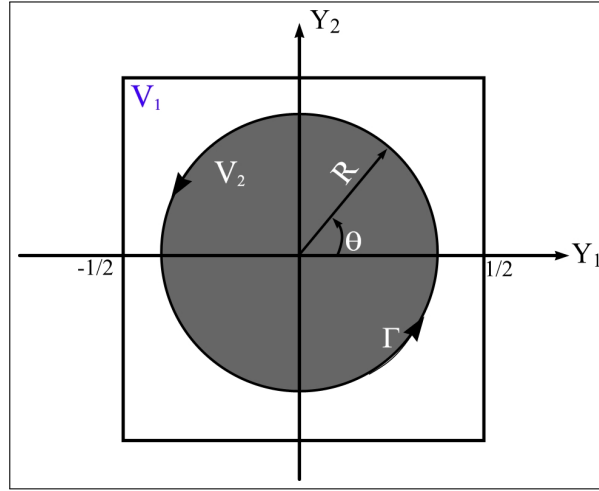


Figura 3.4: Celda unitaria. La matriz es denotada por  $S_1$  mientras que la fibra, de radio  $R$ , y la interfase son denotadas por  $S_2$  y  $\Gamma$ , respectivamente.

El siguiente teorema clásico, garantiza la existencia y unicidad de la solución del problema (3.10). Su demostración puede ser encontrada, por ejemplo, en Bakhvalov y Panasenko (1989).

**Teorema 3.1** Sea  $F(\mathbf{y})$  una función  $S$ -periódica y cuadrado integrable en la celda unitaria  $S$ . Para el problema

$$A_0\phi(\mathbf{y}) = F(\mathbf{y}) \text{ en } S,$$

donde el operador  $A_0$  está definido en (3.10),  $\phi$  es también  $S$ -periódica, se tiene:

- Existe una solución  $\phi$  si y sólo si

$$\frac{1}{|S|} \int_S F(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0,$$

donde  $|S|$  representa el área del conjunto  $S$ .

- Si tal solución existe, es única salvo una constante aditiva.

Debe ser notado, de (3.10), que  $T_0 = T_0(\mathbf{x})$ ; y que la ecuación (3.11) se puede escribir como

$$A_0 T_1 = \frac{\partial \kappa_{ip}}{\partial y_i} \frac{\partial T_0}{\partial x_p}. \quad (3.13)$$

De acuerdo al teorema anterior, este problema tiene solución si y sólo si

$$\frac{1}{|S|} \int_S \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial y_i} \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \, d\mathbf{y} = 0,$$

donde  $S$  es una celda unitaria y  $|S|$ , su área. Además, por la forma de (3.13), la función  $T_1$  puede ser escrita como una combinación lineal de tres funciones, es decir

$$T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}_p\theta(\mathbf{y}) \frac{\partial T_0}{\partial x_p}, \quad (3.14)$$

donde  ${}_p\theta(\mathbf{y})$  es solución del problema

$$A_0 {}_p\theta(\mathbf{y}) = \frac{\partial \kappa_{ip}}{\partial y_i} \quad \text{en } S, \quad p \in \{1, 2, 3\} \quad (3.15)$$

y  $T_0$  es solución de (3.10)

En adelante, junto con restricciones adecuadas, el problema 3.15 será llamado: *problema local*  ${}_pL$ . Las condiciones de interfase y de frontera se enunciarán más adelante.

Por otro lado, en virtud del teorema 3.1, el problema (3.12) tiene solución única si y sólo si

$$\frac{1}{|S|} \int_S (-A_1 T_1 - A_2 T_0) d\mathbf{y} = 0, \quad (3.16)$$

de donde, después de algunas manipulaciones algebraicas y usando el teorema 3.1, se tiene la condición diferencial del problema homogeneizado

$$\bar{\kappa}_{ip} \frac{\partial^2 T_0(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_p} = 0, \quad (3.17)$$

donde los coeficientes  $\bar{\kappa}_{ip}$  son constantes y están dados por el promedio sobre la celda unitaria de la función

$$\kappa_{ip} + \kappa_{ik} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_k}$$

es decir,

$$\bar{\kappa}_{ip} = \frac{1}{|S|} \int_S \left( \kappa_{ip} + \kappa_{ik} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_k} \right) d\mathbf{y}. \quad (3.18)$$

Con el fin de tener una notación compacta, se introducen las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} \|T\| &= T^{(1)} - T^{(2)} && \text{contraste entre propiedades,} \\ \langle \cdot \rangle &= \frac{1}{|S|} \int_S \cdot d\mathbf{y} && \text{promedio en la celda unitaria.} \end{aligned}$$

Para saber qué condiciones se le deben imponer al problema homogeneizado y a los problemas locales, se sustituye la expresión asintótica (3.7) en la condición de interfase (3.6b), i.e.,

$$\|T_0(\mathbf{x}) + \varepsilon T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots\| = 0 \quad \text{en } \Gamma;$$

igualando a cero los coeficientes de las potencias de  $\varepsilon$ , se tiene

$$\|T_0(\mathbf{x})\| = 0, \|T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = 0, \|T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = 0, \dots \quad \text{en } \Gamma;$$

de donde se tiene la condición de continuidad en el potencial para el problema homogeneizado:

$$\|T_0(\mathbf{x})\| = 0 \quad \text{en } \Gamma; \quad (3.19)$$

usando (3.14), la condición de continuidad del potencial para el problema local  ${}_pL$  es

$$\|{}_p\theta\| = 0, \quad \text{en } \Gamma. \quad (3.20)$$

Siguiendo el mismo procedimiento (sustituir (3.7) en (3.6b)) y considerando que  $T_0$  es sólo función de  $\mathbf{x}$ , i.e.  $T_0 = T_0(\mathbf{x})$ , se tiene la condición de interfase para el problema local  ${}_pL$

$$\left\| \kappa_{ij} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_j} n_i \right\| = - \|\kappa_{ip} n_i\| \quad \text{en } \Gamma. \quad (3.21)$$

Así que el problema “homogeneizado” es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{\kappa}_{ip} \frac{\partial T_0(\mathbf{x})}{\partial x_p} \right) &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \|T_0(\mathbf{x})\| &= 0 && \text{en } \Gamma, \\ T_0(\mathbf{x}) &= \varphi_0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

con

$$\bar{\kappa}_{ip} = \left\langle \kappa_{ip} + \kappa_{ik} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_k} \right\rangle, \quad (3.22)$$

donde  ${}_p\theta$  es solución del problema local  ${}_pL$ :

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \kappa_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right] = \frac{\partial \kappa_{ip}}{\partial y_i} \quad \text{en } \Omega, \quad (3.23a)$$

$$\|{}_p\theta(\mathbf{y})\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (3.23b)$$

$$\left\| \kappa_{ij} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_j} n_i \right\| = - \|\kappa_{ip} n_i\| \quad \text{en } \Gamma. \quad (3.23c)$$

Además  ${}_p\theta$  debe ser una función doblemente periódica a fin de satisfacer la condición de doble periodicidad de las inclusiones.

### 3.2.3. Coeficientes efectivos

Se analizará la fórmula (3.18). Como la celda unitaria es la unión de dos conjuntos cuya intersección es nula, i.e.  $S = S_1 \cup S_2$ , se tiene que

$$\left\langle \kappa_{ik} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_k} \right\rangle = \int_{S_1} \kappa_{ik}^{(1)} \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}(\mathbf{y})}{\partial y_k} d\mathbf{y} + \int_{S_2} \kappa_{ik}^{(2)} \frac{\partial {}_p\theta^{(2)}(\mathbf{y})}{\partial y_k} d\mathbf{y}.$$

Por otro lado, con  $\gamma = 1, 2$ , cada integral de arriba se puede escribir como

$$\int_{S_\gamma} \kappa_{ik}^{(\gamma)} \frac{\partial {}_p\theta^{(\gamma)}(\mathbf{y})}{\partial y_k} d\mathbf{y} = \int_{S_\gamma} \kappa_{i1}^{(\gamma)} \frac{\partial {}_p\theta^{(\gamma)}(\mathbf{y})}{\partial y_1} d\mathbf{y} + \int_{S_\gamma} \kappa_{i2}^{(\gamma)} \frac{\partial {}_p\theta^{(\gamma)}(\mathbf{y})}{\partial y_2} d\mathbf{y}. \quad (3.24)$$

En la ecuación anterior no hay contribución de las propiedades en la dirección  $y_3$  ya que, como se dijo anteriormente, se está suponiendo que el compuesto es una matriz de un material homogéneo transversalmente isótropo reforzado de fibras cilíndricas circulares. Aplicando el Teorema de Green a el lado derecho de (3.24)

$$\int_{S_\gamma} \kappa_{i1}^{(\gamma)} \frac{\partial {}_p\theta^{(\gamma)}(\mathbf{y})}{\partial y_1} d\mathbf{y} + \int_{S_\gamma} \kappa_{i2}^{(\gamma)} \frac{\partial {}_p\theta^{(\gamma)}(\mathbf{y})}{\partial y_2} d\mathbf{y} = \int_{\partial S_\gamma} \kappa_{i1}^{(\gamma)} {}_p\theta^{(\gamma)} dy_2 - \kappa_{i2}^{(\gamma)} {}_p\theta^{(\gamma)} dy_1,$$

como en la celda

$$\partial S_1 = C \cup \Gamma, \quad \partial S_2 = \Gamma_-$$

donde  $C$  se ilustra en la figura 3.4. Por la condición de periodicidad de la función en la celda unitaria, la integral de línea sobre  $C$  se anula, se puede concluir que

$$\begin{aligned} \left\langle \kappa_{ik} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_k} \right\rangle &= - \int_{\Gamma} \kappa_{i1}^{(1)} {}_p\theta^{(1)} dy_2 - \kappa_{i2}^{(1)} {}_p\theta^{(1)} dy_1 + \int_{\Gamma} \kappa_{i1}^{(2)} {}_p\theta^{(2)} dy_2 - \kappa_{i2}^{(2)} {}_p\theta^{(2)} dy_1 \\ &= - \|\kappa_{i1}\| \int_{\Gamma} {}_p\theta^{(1)} dy_2 + \|\kappa_{i2}\| \int_{\Gamma} {}_p\theta^{(1)} dy_1; \end{aligned}$$

la última igualdad es debido a la condición(3.6b), i.e. en  $\Gamma$ ,  ${}_p\theta^{(1)} = {}_p\theta^{(2)}$ .

Por lo tanto

$$\bar{\kappa}_{ip} = \langle \kappa_{ip} \rangle + \|\kappa_{i2}\| \int_{\Gamma} {}_p\theta^{(1)} dy_1 - \|\kappa_{i1}\| \int_{\Gamma} {}_p\theta^{(1)} dy_2. \quad (3.25)$$

Además, como los materiales se suponen transversalmente isótropos, la permitividad eléctrica tienen la forma

$$\kappa^{(1)} = \text{diag} \left[ \kappa_{11}^{(1)}, \kappa_{11}^{(1)}, \kappa_{33}^{(1)} \right], \quad \kappa^{(2)} = \text{diag} \left[ \kappa_{11}^{(2)}, \kappa_{11}^{(2)}, \kappa_{33}^{(2)} \right], \quad (3.26)$$

por lo que se llega a las siguientes fórmulas

$$\bar{\kappa}_{1p} = \langle \kappa_{1p} \rangle - \|\kappa_{11}\| \int_{\Gamma} {}_p\theta^{(1)} dy_2, \quad (3.27a)$$

$$\bar{\kappa}_{2p} = \langle \kappa_{2p} \rangle + \|\kappa_{22}\| \int_{\Gamma} {}_p\theta^{(1)} dy_1, \quad (3.27b)$$

$$\bar{\kappa}_{3p} = \langle \kappa_{3p} \rangle. \quad (3.27c)$$

### 3.2.4. Resumen

Dada la cantidad de resultados obtenidos en la sección anterior, es necesario concentrarlos para futuras referencias.

1. Se partió del problema

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{y}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma \quad (3.28a)$$

$$T^{(1)} - T^{(2)} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (3.28b)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (3.28c)$$

$$T(\mathbf{x}) = T_0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (3.28d)$$

donde (3.28) es una ecuación elíptica con coeficientes periódicos que varían rápidamente.

2. Se propone una solución asintótica a doble escala, en potencias del parámetro geométrico  $\varepsilon$

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.29)$$

3. Se obtiene un problema homogeneizado, i.e. con coeficientes constantes y en una sola escala, para  $T_0(\mathbf{x})$ , el campo promedio

$$\bar{\kappa}_{ip} \frac{\partial^2 T_0(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_p} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.30a)$$

$$\|T_0(\mathbf{x})\| = 0 \quad \text{en } \Gamma. \quad (3.30b)$$

4. Para el caso de materiales transversalmente isótropos, los coeficientes efectivos están dados por las fórmulas

$$\bar{\kappa}_{1p} = \langle \kappa_{1p} \rangle - \|\kappa_{11}\| \int_{\Gamma} p \theta^{(1)} dy_2, \quad (3.31a)$$

$$\bar{\kappa}_{2p} = \langle \kappa_{2p} \rangle + \|\kappa_{22}\| \int_{\Gamma} p \theta^{(1)} dy_1, \quad (3.31b)$$

$$\bar{\kappa}_{3p} = \langle \kappa_{3p} \rangle. \quad (3.31c)$$

Se debe notar que la única propiedad del tensor que se ha usado es el hecho de que todas sus componentes se encuentran sobre la diagonal principal, es decir, los ejes principales del material coinciden con los ejes principales del sistema de referencia, en este caso, el de la celda unitaria.

5. Las funciones  ${}_p\theta^{(1)}$ , son solución de tres problemas locales

$$\kappa_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \quad \text{en } S, \quad (3.32a)$$

$$\|{}_p\theta(\mathbf{y})\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (3.32b)$$

$$\left\| \kappa_{ij} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_j} n_i \right\| = -\|\kappa_{ip} n_i\| \quad \text{en } \Gamma. \quad (3.32c)$$

6. La amplitud de la perturbación del campo promedio,  $T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , está dada en términos de las soluciones de los problemas locales (3.32) y del campo promedio  $T_0(\mathbf{x})$ , como una combinación lineal de la forma

$$T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial T_0(\mathbf{x})}{\partial x_p} {}_p\theta(\mathbf{y}).$$

## Capítulo 4

# Modelo Dieléctrico

El hueso exhibe propiedades piezoeléctricas que corresponden al grupo cristalográfico hexagonal (Fukada y Yasuda, 1957). A manera de primer modelo para estudiar la interacción entre las laminillas concéntricas que forman el sistema de Havers (osteona), se propone un material compuesto ( $\Omega$ ), formado por una matriz piezoeléctrica ( $S_1$ ), homogénea cuyas propiedades físicas corresponden al grupo cristalográfico hexagonal, clase 622, reforzada por fibras cilíndricas circulares ( $S_2$ ) piezoeléctricas o no, con propiedades elásticas y dieléctricas transversalmente isótropas, distribuidas periódicamente en un arreglo cuadrado.

Como se mencionó antes, Ascenzi y Bonucci (1967) identificaron tres diferentes tipos de osteonas, cuyas diferencias radican en la orientación de las fibras de colágena de cada laminilla constituyente de la osteona, respecto a las laminillas adyacentes y se manifiestan en diferentes propiedades elásticas (Martin *et al.*, 1998 p 148). Por ello, se proponen tres modelos en la orientación de los ejes de simetría material de los constituyentes:

**PP3** Tanto la orientación del eje de simetría material de las fibras como el de la matriz coinciden con el eje de simetría geométrica del compuesto (eje de las fibras), figura 4.1.

**OP2** Eje de simetría material de la matriz perpendicular al eje de simetría geométrica y eje de simetría de las fibras paralelo al eje de simetría geométrica (figura 4.2).

**PP1** Tanto el eje de simetría material de las fibras como el de la matriz ortogonales al eje de simetría geométrica y paralelos entre sí (figura 4.1).

Los tensores elásticos, piezoeléctricos y dieléctricos, que intervienen en las relaciones constitutivas de un material piezoeléctrico, son de cuarto, tercer y segundo rango, respectivamente. Los coeficientes piezoeléctricos aportan el acoplamiento entre la parte elástica y la parte eléctrica del material, cuando estos son nulos, es posible estudiar por separado cada fenómeno, por lo que el primer caso de estudio natural es el caso dieléctrico. Debido a que los materiales constituyentes corresponden a la simetría hexagonal, la parte dieléctrica tiene la forma característica de un material con simetría transversalmente isótropa,

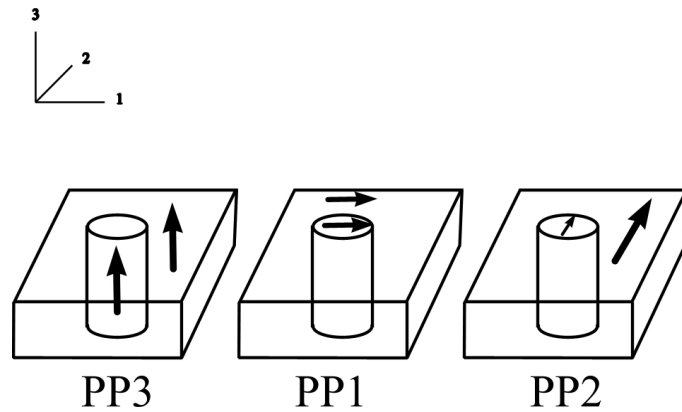


Figura 4.1: Alineación paralela de los ejes materiales de los constituyentes del compuesto reforzado por fibras.

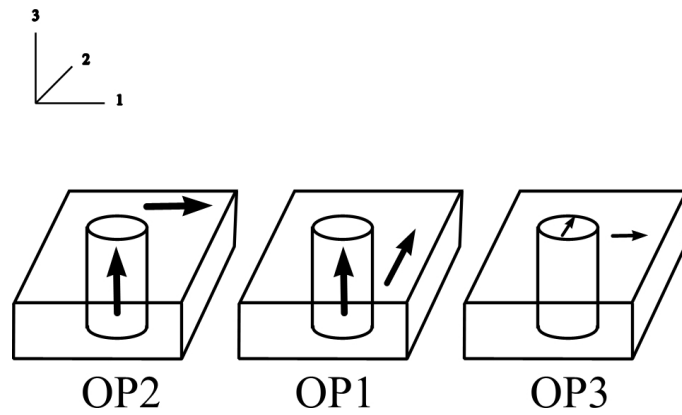


Figura 4.2: Alineación ortogonal de los ejes materiales de los constituyentes de un material reforzado de fibras



i.e.

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{y}) = \text{diag} [ \kappa_{11} \quad \kappa_{11} \quad \kappa_{33} ], \quad (4.1a)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{y}) = \text{diag} [ \kappa_{11} \quad \kappa_{33} \quad \kappa_{11} ], \quad (4.1b)$$

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{y}) = \text{diag} [ \kappa_{33} \quad \kappa_{11} \quad \kappa_{11} ], \quad (4.1c)$$

cuando la orientación del eje de simetría hexagonal es paralelo a la dirección del eje  $Y_3$  (el de simetría geométrica), paralelo a la dirección del eje  $Y_2$  y paralelo a la dirección del eje  $Y_1$ , respectivamente.

Para tener una notación más intuitiva en adelante se identificarán los superíndices entre paréntesis de las funciones y los subíndices de las propiedades con el material  $S_1$  o el material  $S_2$  según se trate del “1” o el “2”, así mismo se usará la notación generalizada de Hill (Bravo-Castillero, *et al.* 2001), i.e. para el material  $S_1$ , su permitividad dieléctrica queda denotada como

$$\boldsymbol{\kappa}^{(1)}(\mathbf{y}) = \text{diag} [ \kappa_1 \quad \kappa_1 \quad \kappa'_1 ], \quad (4.2)$$

mientras que para el material  $S_2$

$$\boldsymbol{\kappa}^{(2)}(\mathbf{y}) = \text{diag} [ \kappa_2 \quad \kappa_2 \quad \kappa'_2 ].$$

Se debe notar que el lado izquierdo de las ecuaciones anteriores es la restricción de una función al dominio  $S_\gamma$ ,  $\gamma = 1, 2$ , respectivamente.

## 4.1. PP3

El modelo presentado en esta sección corresponde a un caso particular de López-López *et al.* (2005), sin embargo, se reporta nuevamente aquí dada la relevancia de este caso particular para el desarrollo del estudio del capítulo.

### 4.1.1. Problemas locales. Formulación

Sean  $\Omega$  la porción del espacio ocupada por el compuesto,  $S_1$  la porción de  $\Omega$  ocupada por la matriz, con fracción volumétrica  $V_1$ , y  $S_2$  la porción de  $\Omega$  ocupada por las fibras con fracción volumétrica  $V_2$ , tales que  $V_1 + V_2 = 1$ .

De (3.32), se tiene que los problemas locales  ${}_pL$  que hay que resolver para conocer los coeficientes efectivos (3.31) son

$$\Delta {}_p\theta = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2, \quad (4.3a)$$

$$\| {}_p\theta \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.3b)$$

$$\left\| \boldsymbol{\kappa} \frac{\partial {}_p\theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = - \| \boldsymbol{\kappa} \| n_\ell \delta_{p\ell} \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.3c)$$

donde, de nueva cuenta, se está haciendo uso de la notación de Einstein: suma sobre índices repetidos, es decir suma sobre el subíndice “ $\ell$ ”, además de condiciones de doble

periodicidad; donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano en la variable rápida  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{n}$  es la normal exterior unitaria a  $\Gamma$  y el símbolo  $\|\cdot\|$  es usado para denotar el contraste, del argumento, entre el material  $S_1$  y el material  $S_2$ , i.e.,

$$\|{}_p\theta\| = {}_p\theta^{(1)} - {}_p\theta^{(2)}, \quad (4.4a)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial {}_p\theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = \kappa_1 \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} - \kappa_2 \frac{\partial {}_p\theta^{(2)}}{\partial \mathbf{n}}, \quad (4.4b)$$

$$\|\kappa\| = \kappa_1 - \kappa_2. \quad (4.4c)$$

Dada la geometría del problema (fibras circulares infinitamente largas empotradas en una matriz homogénea transversalmente isótropa) para  $p = 3$  el problema local correspondiente tiene únicamente la solución trivial, por lo que sólo hay que resolver los problemas locales para  $p = 1$  y  $p = 2$ .

En la interfase  $\Gamma$ , como la sección transversal de las fibras es un círculo de radio  $R$ , se tiene que

$$y_1 = R \cos \varphi, \quad y_2 = R \sin \varphi$$

donde  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (ver figura 3.4). Además para  $p = 1$  ( $p = 2$ ), de la condición de salto en la interfase (4.3c), es fácil demostrar que  ${}_p\theta$  es una **función par (impar)** de  $\varphi$ . Para resolver los problemas locales es necesario recurrir a la teoría de potencial complejo, por ello, los resultados obtenidos en la siguiente sección son muy importantes para el desarrollo de la solución.

#### 4.1.2. Problemas locales. Potenciales complejos

Sea  $F_0(z)$  un potencial complejo, definido por

$$F_0(z) = a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!},$$

donde  $\zeta(z)$  es la función de Weierstrass, cuasiperiódica, de periodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , tales que  $\text{Im}\{\omega_1/\omega_2\} \neq 0$ ,  $\zeta^{(k)}$  es la derivada de orden  $k$  de la función  $\zeta$ , las cuales son doblemente periódicas, el símbolo “ $o$ ” señala que la suma sólo debe considerarse sobre índices impares. Esto es debido a que por las condiciones del problema se requiere que el potencial sea una función impar de  $z$  (Rayleigh, 1892), los coeficientes  $a_k$  ( $k = 1, 3, \dots$ ) son reales e indeterminados y el coeficiente  $a_0$  se usa para compensar la cuasiperiodicidad de  $\zeta(z)$ , por lo que se determina aplicando condiciones de periodicidad, i.e. sea  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , un periodo de  $\zeta(z)$ , entonces

$$\begin{aligned} F_0(z + \omega_\alpha) - F_0(z) &= a_0 \omega_\alpha + a_1 (\zeta(z + \omega_\alpha) - \zeta(z)) \\ &= a_0 \omega_\alpha + a_1 \delta_\alpha \end{aligned}$$

donde las constantes  $\delta_\alpha$  y los periodos  $\omega_\alpha$  están conectados por medio de la **relación de Legendre**

$$\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1 = 2\pi i,$$

de donde

$$\delta_1 = \pi, \quad \delta_2 = -i\pi,$$

para el caso de un arreglo periódico cuadrado.

Por lo tanto

$$F_0(z + \omega_\alpha) - F_0(z) = a_0\omega_\alpha + a_1\delta_\alpha. \quad (4.5)$$

Tomando  $\alpha = 1$ , y la parte imaginaria de la ecuación anterior, la condición de periodicidad se satisface trivialmente, sin embargo, para la parte real, se tiene que

$$\operatorname{Re}\{F_0(z + \omega_\alpha) - F_0(z)\} = a_0\omega_1 + a_1\delta_1 = 0$$

de donde

$$a_0 = -a_1\pi. \quad (4.6)$$

Cuando se toma  $\alpha = 2$ , la parte real satisface trivialmente la condición de periodicidad y de la parte imaginaria surge la condición

$$\operatorname{Im}\{F_0(z + \omega_\alpha) - F_0(z)\} = \operatorname{Im}\{a_0\omega_2 + a_1\delta_2\} = 0$$

i.e.  $\operatorname{Im}\{a_0i - i\pi a_1\} = 0$  por lo que

$$a_0 = a_1\pi. \quad (4.7)$$

De (4.6) y de (4.7) y del hecho de que  ${}_1\theta({}_2\theta)$  es una función par (impar) con respecto a  $\varphi$ , se define

$$a_0 = \lambda_1 a_1 \quad (4.8)$$

donde

$$\lambda_1 = \begin{cases} -\pi & \text{en el problema local } {}_1L, \\ \pi & \text{en el problema local } {}_2L. \end{cases} \quad (4.9)$$

Por definición, para  $z \in \mathbb{C}$ , la función cuasiperiódica,  $\zeta(z)$  de Weierstrass, con periodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , tiene la expresión

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left[ \frac{1}{z - \beta_{mn}} + \frac{1}{\beta_{mn}} + \frac{1}{\beta_{mn}^2} \right], \quad (4.10)$$

donde  $\beta_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ , además es una función meromorfa con polos simples en  $z = \beta_{mn}$ , como puede verse de su definición,  $\zeta(z) = -\zeta(-z)$ , i.e. es una función impar de  $z$ ; además su **desarrollo de Laurent** está dado por (Ahlfors, 1979)

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=3}^{\infty} S_{j+1} z^j, \quad (4.11)$$

donde

$$S_k = \sum'_{m,n} \frac{1}{(\beta_{mn})^k} \quad (4.12)$$

son las llamadas **sumas de retícula**, que contienen información geométrica del problema al aportar a este la forma de la celda periódica. En el presente trabajo se llamarán *sumas*

de *retícula armónicas* ya que aparecen al buscar el desarrollo de Laurent del potencial de la ecuación armónica. Entonces para  $k$  impar y  $k \geq 3$ , el **desarrollo de Laurent** de la  $(k-1)$ -ésima derivada de la función  $\zeta(z)$  es

$$\frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} = \frac{1}{z^k} - \sum_{l=1}^{\infty} k \frac{(l+k-1)!}{l!k!} S_{k+l} z^l. \quad (4.13)$$

Si se define

$$\eta_{kl} = \frac{(k+l-1)!}{k!l!} S_{k+l} \quad \text{para } k+l \neq 2, \quad (4.14)$$

debe ser notado que los coeficientes  $\eta_{kl}$  son simétricos con respecto a  $k$  y  $l$ , es decir  $\eta_{kl} = \eta_{lk}$ . Entonces el potencial  $F_0(z)$ , puede ser escrito como

$$F_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} + a_0 z - \sum_{l=3}^{\infty} a_l \eta_{1l} z^l - \sum_{k=3}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} k \eta_{kl} z^l$$

usando la expresión para el coeficiente de compensación de cuasiperiodicidad  $a_0$ , i.e.(4.8); surge la definición natural del coeficiente

$$\eta_{11} = -\lambda_1 \quad (4.15)$$

el cual contiene información de la cuasiperiodicidad de la función  $\zeta(z)$  en la retícula usada, en este caso, un cuadrado de lado uno.

Por todo lo anterior, el desarrollo en **serie de Laurent del potencial complejo**  $F_0(z)$  es

$$F_0(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l z^{-l} - A_l z^l \right] \quad (4.16)$$

donde los coeficientes  $A_l$  están relacionados con  $a_k$  por medio de

$$A_l = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \eta_{kl}. \quad (4.17)$$

Cuando  $z \in \Gamma$ ,  $z = R e^{i\varphi}$ , por lo que

$$F_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l R^{-l} - A_l R^l \right] \cos l\varphi + i \sum_{l=1}^{\infty} \left[ -a_l R^{-l} - A_l R^l \right] \sen l\varphi, \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.18)$$

El potencial complejo

$$F_0(z) = u_0(z) + i v_0(z) \quad (4.19)$$

es una función meromorfa en la celda periódica por lo que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y_1} = \frac{\partial v_0}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y_2} = -\frac{\partial v_0}{\partial y_1},$$

donde  $z = y_1 + i y_2$ , además en  $\Gamma$  es analítica y

$$y_1 = R \cos \varphi, \quad y_2 = R \sen \varphi,$$

por lo que

$$\mathbf{n} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial y_2}{\partial \varphi}, -\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} \right).$$

Usando lo anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} &= \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y_1}, \frac{\partial u_0}{\partial y_2} \right) \cdot (n_1, n_2) \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y_2}, -\frac{\partial v_0}{\partial y_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial y_2}{\partial \varphi}, -\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

por lo que, se tiene

$$\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \text{ en } \Gamma. \quad (4.20)$$

Del mismo modo

$$\frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \text{ en } \Gamma. \quad (4.21)$$

#### 4.1.3. Problemas locales. Solución

##### Problema local ${}_1L$

Sea  $\mathbf{p} = \mathbf{1}$  en (4.3), entonces para  $\gamma = 1, 2$

$$\Delta {}_1\theta^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (4.22a)$$

$$\| {}_1\theta \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.22b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial {}_1\theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = -\|\kappa\| n_1 \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.22c)$$

Como se mencionó arriba, en  $\Gamma$ ,  ${}_1\theta^{(\gamma)}$  es una función par de  $\varphi$ , doblemente periódica, por lo que se propone el *ansatz*

$${}_1\theta^{(1)} = \text{Re} \left\{ -\pi a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad {}_1\theta^{(2)} = \text{Re} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} c_l z^l \right\}, \quad (4.23)$$

que en  $\Gamma$  toma la forma

$${}_1\theta^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l R^{-l} - A_l R^l \right] \cos l\varphi, \quad {}_1\theta^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l R^l \cos l\varphi, \quad (4.24)$$

tomando en consideración (4.19) y (4.18).

Debido a (4.22b), se tiene que

$$a_l R^{-l} - A_l R^l = c_l R^l \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\}. \quad (4.25)$$

Por otro lado, recordando que  $F_0 = u_0 + i v_0$ , de (4.22c) y (4.20), después de integrar con respecto a  $\varphi$  y considerar la doble periodicidad del potencial

$$\|\kappa v_0\| = -R \|\kappa\| n_2,$$

es decir,

$$\kappa_1 \left( -a_l R^{-l} - A_l R^l \right) - \kappa_2 c_l R^l = -R^l \|\kappa\| \delta_{1l} \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\},$$

usando (4.25)

$$\kappa_1 \left( -a_l R^{-l} - A_l R^l \right) - \kappa_2 \left( a_l R^{-l} - A_l R^l \right) = -R^l \|\kappa\| \delta_{1l} \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\},$$

de donde fácilmente se obtiene un sistema infinito de ecuaciones para los coeficientes  $a_k$

$$\chi_k^{-1} a_l R^{-l} + A_l R^l = R^l \delta_{1l} \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\}, \quad (4.26)$$

donde,

$$\chi_k = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad (4.27)$$

es el contraste relativo de propiedades referidas a la suma de propiedades, en corto: **contraste relativo ó específico**.

**Observación.** El valor numérico de  $\chi_k$ , por definición, se encuentra entre  $-1$  y  $1$ , i.e.

$$-1 \leq \chi_k \leq 1,$$

tomando de manera asintótica los valores extremos de su intervalo de definición, estos casos indican los más altos contrastes entre las propiedades de los materiales constituyentes del compuesto. Matemáticamente está permitido que

$$\chi_k = 0;$$

físicamente implica que el compuesto está constituido por un sólo material, o al menos que los materiales constituyentes tienen las mismas propiedades en el plano ortogonal al eje de las fibras, por lo que tomando en cuenta éste parámetro se incluye el caso particular de cuando no hay inclusión, esta observación es importante ya que sirve como punto de control para verificar cálculos numéricos.

■

Usando el reescalamiento

$$a'_l = \sqrt{l} R^{-l} a_l \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\}, \quad (4.28)$$

y definiendo la matriz simétrica

$${}_1\mathbf{W} = [w_{kl}] = \begin{cases} \pi R^2 & k = l = 1 \\ \sqrt{k} \sqrt{l} \eta_{kl} R^{k+l} & k + l \geq 3 \end{cases}, \quad (4.29)$$

en el sistema (4.26), se tiene un sistema más sencillo, cuya forma es simple y fácil de recordar

$$(\chi_k^{-1} \mathbf{I} + {}_1\mathbf{W}) {}_1\mathbf{a} = \mathbf{V}_0, \quad (4.30)$$

donde

$$\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1, \dots), \mathbf{V}_0 = \left[ R^l \delta_{1l} \right]_{,1} \mathbf{a} = (a'_1, a'_3, a'_5, \dots)^T. \quad (4.31)$$

**Observación.** Cabe mencionar que el coeficiente  $\chi_k$  porta información relativa a las propiedades de los materiales involucrados en el análisis y, además, dependiendo de su valor indica altos o bajos contrastes entre propiedades relativas a la matriz. La matriz unidad  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de dimensión infinita, la matriz  $\mathbf{W}$  es simétrica y contiene información relativa al tamaño de las fibras, así como a la geometría del compuesto, depende de las sumas de retícula  $S_{k+1}$ , definidas en (4.12); estas sumas a su vez pueden ser escritas como una función de los invariantes de la función  $\zeta$  y estos a su vez como una función de las sumas de retícula  $S_4$  y  $S_6$  (en esta geometría  $S_6 = 0$ ), por lo que cualquier elemento de  $\mathbf{W}$  puede, en principio, ser escrito como una función de las sumas de retícula  $S_4$  y  $S_6$ . Finalmente la información relativa a la cuasiperiodicidad de la función  $\zeta$  en la retícula, i.e., información del tamaño de las fibras con radio  $R$ , se encuentra también en el vector con una única componente no nula  $\mathbf{V}_0$ .

También es considerable la simplicidad y orden del sistema (4.30), así como su mnemónica. ■

El sistema (4.30) es un sistema infinito de ecuaciones lineales en un conjunto infinito de incógnitas, que es regular (Kantorovich y Krylov, 1964) y por ello es posible obtener una solución por truncamiento, mediante una sucesión de soluciones convergentes, más aún es un sistema normal y puede resolverse usando teoremas análogos al de Cramer para determinantes (Kantorovich y Krylov, 1964, p42).

Este tipo de sistemas fueron tratados recientemente en Rodríguez-Ramos *et al.*, (2001); Guinovart-Díaz *et al.*, (2001); Bravo-Castillero *et al.*, (2001); Sabina *et al.*, (2001) y López-López *et al.*, (2005, 2008).

Es notable la simpleza de (4.30) y la estructura tan ordenada que muestra claramente la contribución de las propiedades físicas de cada material a través del contraste específico,  $\chi_k$ , del tamaño relativo de la fibra (potencias de  $R^2$ ) y de la forma de la retícula (coeficientes  $S_{kl}$ ).

La matriz  $\mathbf{W}$  es una matriz simétrica con únicamente información relativa a la geometría del problema, ya que la información física se encuentra en el contraste específico.

El vector  $\mathbf{V}_0$  tiene una única componente no nula que depende de la fracción volumétrica, en apariencia es una potencia impar de  $R$ , pero hay que recordar que los coeficientes  $a_k$  están reescalados por un potencia impar de  $R$ .

### Problema local ${}_2L$

Para  $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ , usando (4.3), se tiene

$$\Delta {}_2\theta^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (4.32a)$$

$$\| {}_2\theta \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.32b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial {}_2\theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = -\|\kappa\| n_2 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.32c)$$

de modo que en  $\Gamma$ , como se mencionó arriba,  ${}_2\theta^{(\gamma)}$  es una función impar de  $\varphi$  y es doblemente periódica, por lo que se propone el *ansatz*

$${}_2\theta^{(1)} = \text{Im} \left\{ -\pi {}_2a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} {}_2a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad {}_2\theta^{(2)} = \text{Im} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} {}_2c_l z^l \right\}. \quad (4.33)$$

Utilizando un procedimiento análogo al caso  $p = 1$ , y una modificación en la matriz  ${}_1\mathbf{W}$ ,

$${}_2\mathbf{W} = [w_{kl}] = \begin{cases} -\pi R^2 & k = l = 1 \\ \sqrt{k}\sqrt{l}\eta_{kl}R^{k+l} & k + l \geq 3 \end{cases}, \quad (4.34)$$

se tiene el sistema

$$(\chi_{\kappa}^{-1}\mathbf{I} - {}_2\mathbf{W}) {}_2\mathbf{a} = -\mathbf{V}_0, \quad (4.35)$$

donde

$$\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1, \dots), \quad {}_2\mathbf{W} = [w_{kl}], \quad \mathbf{V}_0 = [R^l \delta_{1l}], \quad (4.36)$$

y  ${}_2\mathbf{a} = ({}_2a'_1, {}_2a'_3, {}_2a'_5, \dots)^T$  son los coeficientes del desarrollo de Laurent de la función  ${}_2\theta(\mathbf{y})$ , reescalados por medio de (4.28).

#### 4.1.4. Coeficientes efectivos

Hasta el momento se ha encontrado un sistema de ecuaciones algebraicas infinito, para los coeficientes del desarrollo de Laurent de las funciones solución de cada problema local  ${}_pL$  en (4.3), por tanto, es posible evaluar los coeficientes efectivos del material homogéneo, matemáticamente equivalente al compuesto, que se usó originalmente para modelar la interacción de las laminillas adyacentes de la osteona para el caso de las osteonas tipo T.

Sea  $p = 1$  en (3.31), entonces se tiene que el problema local  ${}_1L$  sólo aporta un único coeficiente efectivo al tensor de la permitividad eléctrica efectiva, a saber

$$\bar{\kappa}_{11} = \langle \kappa_{11} \rangle - \|\kappa_{11}\| \int_{\Gamma} {}_1\theta^{(1)} dy_2. \quad (4.37)$$

Al sustituir (4.24) en la integral del lado derecho se tiene

$$\int_{\Gamma} {}_1\theta^{(1)} dy_2 = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l=1}^{\infty} [a_l R^{-l} - A_l R^l] \cos l\varphi \right) \cos \varphi d\varphi = (a_1 R^{-1} - A_1 R) R\pi,$$

por otro lado, de (4.26)

$$A_1 R = -\chi_{\kappa}^{-1} a_1 R^{-1} + R;$$

por lo anterior

$$\int_{\Gamma} {}_1\theta^{(1)} dy_2 = \pi (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) a_1 - V_2.$$

Entonces, recordando que  $\langle \kappa_{11} \rangle = \kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2$ ,  $\chi_{\kappa}$  está dado por (4.27) y que  $V_1 + V_2 = 1$ , se tiene la fórmula

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 (1 - 2\pi a_1). \quad (4.38)$$



Debe ser notado que los coeficientes  $a_k$  correspondientes a los desarrollos de las funciones del problema local  ${}_1L$  no tienen preíndice y que los coeficientes de los desarrollos de las funciones del problema local  ${}_2L$  tienen el preíndice “2”.

De manera completamente análoga, para  $p = 2$  en (3.31), se obtiene

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_1 (1 + 2\pi {}_2a_1).$$

Finalmente

$$\bar{\kappa}_{33} = \kappa'_1 V_1 + \kappa'_2 V_2,$$

que es el promedio aritmético de las propiedades de las fases, llamado **promedio de Voigt**.

Concluye así el análisis para el modelo PP3 pues se ha podido calcular las componentes del tensor de permitividad efectiva del compuesto,

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 (1 - 2\pi a_1), \quad (4.39a)$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_1 (1 + 2\pi {}_2a_1), \quad (4.39b)$$

$$\bar{\kappa}_{33} = \kappa'_1 V_1 + \kappa'_2 V_2, \quad (4.39c)$$

demostrando que el tensor de permitividad del material compuesto, tendrá componentes únicamente sobre la diagonal principal. Cálculos numéricos posteriores (sec. 4.5), permitirán confirmar el hecho de que se trata de un material transversalmente isótropo. Con todo lo anterior se tiene caracterizado al material homogéneo equivalente. Es de resaltar la simpleza y la estructura de las fórmulas anteriores, pues es fácilmente identificable la contribución de las propiedades físicas de los materiales y las propiedades geométricas del compuesto (incluidas en los únicos coeficientes de las funciones solución a cada problema local involucrados  $a_1$ , y  ${}_2a_1$ ), dichas fórmulas son fácilmente programables.

## 4.2. OP2

### 4.2.1. Problemas locales. Formulación

Como ya se mencionó arriba, se estudia el caso de un material compuesto reforzado de fibras cilíndricas circulares cuya longitud característica ( $l$ ), es mucho menor que aquella del material ( $L$ ), y están distribuidas en un arreglo periódico cuadrado; además, tanto las fibras ( $S_2$ ) como la matriz ( $S_1$ ) son materiales transversalmente isótropos. Si el eje de isotropía se encontrara en la misma dirección que las fibras, la cual se toma como la dirección  $X_3$ , los tensores de permitividad eléctrica tendrían la forma (3.26), sin embargo, en esta sección se considerará que el eje de simetría material de la matriz se encuentra en el plano perpendicular al eje de las fibras, en la dirección  $X_1$  (ver figura 4.2) y el eje de simetría material de las fibras es paralelo al eje geométrico del compuesto (eje de las fibras); por lo tanto los tensores de permitividad eléctrica para la matriz y las fibras tienen la forma

$$\kappa^{(1)} = \text{diag} \left[ \kappa_{33}^{(1)} \quad \kappa_{11}^{(1)} \quad \kappa_{11}^{(1)} \right], \quad \kappa^{(2)} = \text{diag} \left[ \kappa_{11}^{(2)} \quad \kappa_{11}^{(2)} \quad \kappa_{33}^{(2)} \right], \quad (4.40)$$

respectivamente. Estos tensores se obtienen al aplicarles la transformación adecuada a los tensores en (3.26). Nuevamente, para tener una notación más clara, se redefinen los tensores de permitividad usando la notación de Hill generalizada

$$\kappa^{(1)} = \text{diag}[\kappa'_1 \quad \kappa_1 \quad \kappa_1], \quad \kappa^{(2)} = \text{diag}[\kappa_2 \quad \kappa_2 \quad \kappa'_2].$$

Se debe notar que, respecto al modelo PP3, si  $\kappa'_1$  está suficientemente cerca de  $\kappa_1$ , éste puede ser considerado como una ligera perturbación de aquel. En virtud de este hecho se define el **parámetro perturbativo de anisotropía**

$$\alpha = 1 - \frac{\kappa'_1}{\kappa_1}. \quad (4.41)$$

De acuerdo a las tablas de Landolt-Börnstein (1979), de los 258 materiales dieléctricos con simetría hexagonal, tetragonal y trigonal, que corresponden a la forma (4.40) (aunque los que tienen simetría cúbica también corresponden a esa, no son tomados en cuenta dentro de los 258 materiales pues para ellos  $\alpha = 0$ ), 254 tienen la propiedad de que  $|\alpha| < 1$ , y, de esos, 181 cumplen con  $|\alpha| \leq 0.5$ , por lo que es factible suponer  $\alpha$  pequeño y escribir, por consiguiente,  $\kappa'_1 = \kappa_1(1 - \alpha)$ .

De acuerdo con la ecuación (3.32), los problemas locales  ${}_pL$  tienen la forma

$$\begin{aligned} \kappa_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_i \partial y_j} &= 0 && \text{en } S, \\ \|{}_p\theta(\mathbf{y})\| &= 0 && \text{en } \Gamma, \\ \left\| \kappa_{ij} \frac{\partial {}_p\theta(\mathbf{y})}{\partial y_j} n_i \right\| &= -\|\kappa_{ip} n_i\| && \text{en } \Gamma. \end{aligned}$$

Debido a la geometría del problema, estos problemas se reducen a dos problemas en el plano, por este motivo se introducen los subíndices griegos, que tomarán valores en  $\{1, 2\}$ . De esta forma, después de algunas manipulaciones algebraicas, por la forma de  $\kappa$ , los problemas locales  ${}_pL$ ,  $p = 1, 2$  adoptan la forma

$$\Delta {}_p\theta^{(1)} = \alpha \frac{\partial^2 {}_p\theta^{(1)}}{\partial y_1^2} \quad \text{en } S_1, \quad (4.42a)$$

$$\Delta {}_p\theta^{(2)} = 0 \quad \text{en } S_2, \quad (4.42b)$$

$$\|{}_p\theta\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.42c)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial {}_p\theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = -\|\kappa\| n_\ell \delta_{p\ell} + \alpha \left( 1 + \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}}{\partial y_1} \right) \kappa_1 n_p \delta_{1p}, \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.42d)$$

donde

$$\begin{aligned} \|{}_p\theta\| &= {}_p\theta^{(1)} - {}_p\theta^{(2)}, \\ \left\| \kappa \frac{\partial {}_p\theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| &= \kappa_1 \left( \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}}{\partial y_2} n_2 \right) - \kappa_2 \left( \frac{\partial {}_p\theta^{(2)}}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial {}_p\theta^{(2)}}{\partial y_2} n_2 \right), \\ \|\kappa\| &= \kappa_1 - \kappa_2 \end{aligned}$$

y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, i.e.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Se debe notar que, respecto a los enunciados de los problemas locales  ${}_pL$  en (4.3) para la configuración PP, en el lado derecho de (4.42a) y de (4.42d) hay un término adicional que puede ser considerado como una perturbación cuando el parámetro material  $\alpha$  es pequeño. Además, se tiene que para  $\alpha = 0$ , i.e. cuando  $\kappa'_1 = \kappa_1$ , se recupera el enunciado (4.3), tal y como debería ser. La ecuación (4.42a) es una ecuación elíptica y su solución debe ser doblemente periódica de periodos  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = i$  (debido a la geometría del problema). Otra cosa que hay que notar es el hecho de que hay un término en (4.42d) que aparece sólo en el caso  $p = 1$ , esto es de esperar pues la “perturbación” se está considerando únicamente en la dirección  $Y_1$ .

Sean  $\alpha$  pequeño<sup>1</sup>, se propone el *ansatz*

$${}_p\theta^{(\gamma)} = {}_p\theta_0^{(\gamma)} + \alpha {}_p\theta_1^{(\gamma)} + O(\alpha^2), \quad \gamma = 1, 2 \quad (4.43)$$

como solución al problema local (4.42); por simplicidad se considera el caso  $p = 1$ , y se omite este preíndice en esta sección.

Sustituyendo (4.43) en (4.42) y agrupando en potencias de  $\alpha$ , se obtiene una sucesión recurrente de problemas locales:

$O(\alpha^0)$ :

$$\Delta_1 \theta^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2 \quad (4.44a)$$

$$\|_1 \theta\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.44b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial_1 \theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = -\|\kappa\| n_1 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.44c)$$

$O(\alpha^1)$ :

$$\Delta_1 \theta_1^{(1)} = \frac{\partial_1 \theta_0^{(1)}}{\partial y_1^2} \quad \text{en } S_1, \quad (4.45a)$$

$$\Delta_1 \theta_1^{(2)} = 0 \quad \text{en } S_2, \quad (4.45b)$$

$$\|_1 \theta_1\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.45c)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial_1 \theta_1}{\partial \mathbf{n}} \right\| = \kappa_1 \left( 1 + \frac{\partial_1 \theta_0^{(1)}}{\partial y_1} \right) n_1 \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.45d)$$

#### 4.2.2. Problemas locales. Potenciales complejos

El problema (4.44) fue resuelto en la sección 4.1.3, mientras que el problema (4.45) es un problema de Poisson en una celda doblemente periódica con condiciones de salto en

<sup>1</sup>En la sección 4.3.2 se aclarará y fundamentará más extensamente esta suposición

la interfase. Nuevamente, de las condiciones (4.44c) y (4.45d) se deduce fácilmente que las funciones  ${}_1\theta_0$  y  ${}_1\theta_1$  son funciones pares de  $\varphi$ .

Se tiene ahora dos potenciales complejos, que generan las soluciones, para el problema a  $O(\alpha^0)$ :

$$F_0^{(1)}(z) = a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}, \quad (4.46a)$$

$$F_0^{(2)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad (4.46b)$$

para el material  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente; donde los coeficientes  $a_k$  y  $c_k$  son reales y desconocidos.

Para construir el potencial del problema a  $O(\alpha^1)$  en el material  $S_1$ , se sigue el método de Goursat usado para construir la solución general a la ecuación biarmónica (Sokolnikoff, 1956), pues se debe notar que dado que el lado derecho de (4.45a) es armónico, el lado izquierdo es biarmónico. De esta forma

$$F_1^{(1)}(z) = \bar{z}\varphi^{(1)}(z) + \psi^{(1)}(z),$$

con

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{4} \frac{dF_0^{(1)}}{dz}, \quad (4.47a)$$

$$\psi^{(1)}(z) = b_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} + \frac{1}{4} a_k \frac{\mathcal{Q}^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right], \quad (4.47b)$$

es decir,

$$F_1^{(1)}(z) = \frac{1}{4} a_0 \bar{z} + b_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{4} \left( \frac{\bar{z}\zeta^{(k)}(z)}{(k-1)!} + \frac{\mathcal{Q}^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right) + b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right],$$

donde  $\mathcal{Q}(z)$  es la **función de Natanzon**. Pese a que Natanzon originalmente usó  $\wp_1(z)$  para denotarla, se prefiere el símbolo  $\mathcal{Q}$ , para conservar la notación compacta.  $\mathcal{Q}^{(n)}(z)$  es la derivada enésima de la función de Natanzon (Guinovart-Díaz *et al.*, 2001; Rodríguez-Ramos *et al.*, 2001),  $F_0^{(\gamma)}$  y los coeficientes  $a_k$  son conocidos del problema  ${}_1L$  para  $O(\alpha^0)$ , los coeficientes  $b_k$  son desconocidos y reales, determinables por medio de las condiciones (4.45c) y (4.45d).

La función  $\mathcal{Q}(z)$  es una función meromorfa, impar con respecto a  $z$ , cuasiperiódica y definida por

$$\mathcal{Q}(z) = \sum_{m,n}' \bar{\beta}_{mn} \left[ \frac{1}{(z - \beta_{mn})^2} - \frac{2z}{\beta_{mn}^3} - \frac{1}{\beta_{mn}^2} \right], \quad (4.48)$$

donde  $\beta_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ ; sin embargo se elige por estar relacionada con las funciones  $\zeta$  y  $\wp (= -\zeta')$  de Weierstrass de tal forma que  $F_1^{(1)}$  satisface las condiciones de doble periodicidad. Las dos propiedades usadas son

$$\mathcal{Q}(z + \omega_\alpha) - \mathcal{Q}(z) = \bar{\omega}_\alpha \wp(z) + \gamma_\alpha, \quad (4.49a)$$

$$\mathcal{Q}^{(k)}(z + \omega_\alpha) - \mathcal{Q}^{(k)}(z) = \bar{\omega}_\alpha \wp^{(k)}(z), \quad k \geq 1, \quad (4.49b)$$

donde los periodos  $\omega_\alpha$  y las constantes  $\gamma_\alpha$ , están relacionadas por medio de las **relaciones de Legendre**

$$\begin{aligned}\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 &= 2\pi i, \\ \delta_1\bar{\omega}_2 - \delta_2\bar{\omega}_1 &= \gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\delta_a &= 2\zeta\left(\frac{\omega_\alpha}{2}\right), \\ \gamma_\alpha &= 2\mathcal{Q}\left(\frac{\omega_\alpha}{2}\right) - \bar{\omega}_\alpha\wp\left(\frac{\omega_\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

En el caso de una retícula cuadrada:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \pi, & \delta_2 &= -i\pi, \\ \gamma_1 &= -\frac{5S_4}{\pi}, & \gamma_2 &= i\frac{5S_4}{\pi}.\end{aligned}$$

Para obtener el desarrollo de Laurent bastan unas sencillas operaciones, a saber,

$$\mathcal{Q}(z) = \sum_{\ell=2}^{\infty} (\ell+1) \sum'_{m,n} \frac{\bar{\beta}_{mn}}{\beta_{mn}^{\ell+2}} z^\ell, \quad (4.50)$$

donde

$$T_\ell = \sum'_{m,n} \frac{\bar{\beta}_{mn}}{\beta_{mn}^{\ell+1}} \quad (4.51)$$

son las sumas de retícula de la función de Natanzon (Natanzon, 1935), convergentes para  $j \geq 3$ . En el presente trabajo se les nombrará **sumas de retícula de biarmónicas** debido a que aparecen al obtener el desarrollo de Laurent del potencial de la ecuación biarmónica. Teniendo en cuenta que  $\mathcal{Q}(z) = -\mathcal{Q}(-z)$ , se obtiene entonces el desarrollo en serie de Laurent para la función  $\mathcal{Q}(z)$  de Natanzon

$$\mathcal{Q}(z) = \sum_{j=3}^{\infty} (j+1) T_{j+1} z^j. \quad (4.52)$$

De la expresión anterior es posible obtener la  $k$ ésima derivada, para  $k$  impar y  $k \geq 3$ , y por tanto su desarrollo de Laurent

$$\frac{1}{(k-1)!} \mathcal{Q}^{(k-1)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+k)!}{(l)!(k-1)!} T_{l+k} z^l.$$

Definiendo, para  $l \in \{1, 3, 5, \dots\}$  y  $k \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ :

$$\eta'_{kl} = \begin{cases} 0 & k+l=2, \\ \frac{(l+k)!}{l!k!} T_{k+l} & k+l \geq 3, \end{cases} \quad (4.53)$$

se tiene que

$$\frac{1}{(k-1)!} \mathcal{Q}^{(k-1)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} k \eta'_{kl} z^l \quad k \text{ impar, } k \geq 3. \quad (4.54)$$

**Observación.**

- La definición de  $\eta'_{11}$  dada en (4.53), es momentánea pues más adelante se redefinirá para ajustarse a las necesidades del potencial complejo  $F_1^{(1)}(z)$ .
- Debe ser notado, también, que  $\eta'_{11}$  es simétrico con respecto a sus índices.

■

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} a_k \frac{\mathcal{Q}^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} a_k \left[ \sum_{l=1}^{\infty} k \eta'_{kl} z^l \right] \quad (4.55)$$

El coeficiente  $b_0$ , al igual que el coeficiente  $a_0$ , permite que el potencial complejo propuesto como solución al problema local (4.45), satisfacer la hipótesis de doble periodicidad. Están relacionados con  $a_1$  y  $b_1$  de tal manera que dependen de la suma de retícula  $S_4$  y los residuos de las funciones  $F_0^{(1)}$  y  $\psi^{(1)}$ . Para encontrar su forma explícita se sigue un procedimiento análogo al seguido para encontrar  $a_0$ , ecuación (4.8), en la sección 4.1.2

Como  $F_1(z)$  debe ser elíptica con periodos  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = i$  se toma la diferencia en el periodo

$$\begin{aligned} F_1^{(1)}(z + \omega_\alpha) - F_1^{(1)}(z) &= \overline{(z + \omega_\alpha)} \varphi(z + \omega_\alpha) + \psi(z + \omega_\alpha) - \bar{z} \varphi(z) - \psi(z) \\ &= \bar{\omega}_\alpha \varphi(z + \omega_\alpha) + [\psi(z + \omega_\alpha) - \psi(z)]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

De (4.47a)

$$\bar{\omega}_\alpha \varphi(z + \omega_\alpha) = \frac{1}{4} \bar{\omega}_\alpha a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4(k-1)!} \bar{\omega}_\alpha \zeta^{(k)}(z + \omega_\alpha) \quad (4.57)$$

y de (4.47b)

$$\psi(z + \omega_\alpha) - \psi(z) = b_0 \omega_\alpha + b_1 \delta_\alpha + \frac{1}{4} a_1 \gamma_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4(k-1)!} \bar{\omega}_\alpha \zeta^{(k)}(z). \quad (4.58)$$

Por lo tanto

$$F_1(z + \omega_\alpha) - F_1(z) = b_0 \omega_\alpha - \left( -\frac{1}{4} \bar{\omega}_\alpha a_0 - b_1 \delta_\alpha - \frac{1}{4} a_1 \gamma_\alpha \right). \quad (4.59)$$

**Observación.** Como  $F_1$  debe ser una función elíptica, el lado izquierdo de (4.59) es idénticamente cero, i.e.

$$0 = b_0 \omega_\alpha - \left( -\frac{1}{4} \bar{\omega}_\alpha a_0 - b_1 \delta_\alpha - \frac{1}{4} a_1 \gamma_\alpha \right). \quad (4.60)$$

■

Para  $\alpha = 1$ , al tomar la parte imaginaria de  $F_1(z)$  la condición (4.60) se cumple trivialmente. Cuando se toma la parte real y se sustituye el valor de  $a_0$  encontrado en (4.6), i.e.  $a_0 = -a_1 \pi$ , es posible calcular el valor de  $b_0$ :

$$b_0 = \frac{1}{4} \left( \pi + \frac{5S_4}{\pi} \right) a_1 - b_1 \pi \quad (4.61)$$

De manera análoga, para  $\alpha = 2$  y la parte imaginaria del potencial  $F_1(z)$ , se determina  $b_0$  de manera única, usando el valor correspondiente al coeficiente  $a_0$ , i.e.  $a_0 = a_1\pi$ :

$$b_0 = \frac{1}{4} \left( \pi - \frac{5S_4}{\pi} \right) a_1 + b_1\pi. \quad (4.62)$$

Usando (4.61) y (4.62), es posible definir  $b_0$  como

$$b_0 = \frac{1}{4} \lambda_2 a_1 + \lambda_1 b_1, \quad (4.63)$$

con  $\lambda_1$  definido en (4.9) y

$$\lambda_2 = \begin{cases} \pi + \frac{5S_4}{\pi} & \text{para } {}_1L \\ \pi - \frac{5S_4}{\pi} & \text{para } {}_2L \end{cases}. \quad (4.64)$$

Usando las expresiones para  $a_0$  y  $b_0$ , las ecuaciones (4.8) y (4.63), los desarrollos de Laurent de las funciones  $\zeta^{(k)}(z)$  y  $\mathcal{Q}^{(k)}(z)$  y redefiniendo

$$\eta'_{11} = \lambda_2, \quad (4.65)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ l a_l z^{-l} + l A_l z^l \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\zeta^{(k)}(z)}{(k-1)!} + \lambda_1 b_1 z &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ b_l z^{-l} - B_l z^l \right], \\ \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\mathcal{Q}^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} + \frac{1}{4} \lambda_2 a_1 z &= \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} A'_l z^l, \end{aligned}$$

con  $A_l$  definido en (4.17), y de forma análoga:

$$B_l = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k \eta_{kl}, \quad (4.66)$$

$$A'_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{kl}. \quad (4.67)$$

Por lo tanto

$$F_1^{(1)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} \left( l a_l z^{-l} + l A_l z^l + A'_l z^l \right) + b_l z^{-l} - B_l z^l \right] \quad (4.68)$$

En  $\Gamma$  se tiene que  $z = Re^{i\theta}$  por lo que es posible encontrar el desarrollo de Fourier del potencial complejo  $F_1^{(1)}(z)$ , que escribimos como

$$F_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \left( D_l R^{-l} - F_l R^l \right) \cos l\theta + i \left( -D_l R^{-l} - F_l R^l \right) \sin l\theta \right], \quad (4.69)$$

con

$$D_l = -\frac{1}{4}(l-2)a_{l-2}R^2 - \frac{1}{4}A_l\delta_{1l}R^2 + b_l, \quad (4.70a)$$

$$F_l = \frac{1}{4}(l+2)A_{l+2}R^2 - \frac{1}{4}A'_l + B_l, \quad (4.70b)$$

para  $l \in \{1, 3, \dots\}$ . Donde los coeficientes  $a_l$  son conocidos del problema local  ${}_1L$  a  $O(\alpha^0)$ , los coeficientes  $b_l$  son reales, desconocidos y determinables a partir de las condiciones de continuidad y salto en la interfase.

**Observación.** Con el fin de evitar una notación complicada, en (4.70), se utiliza el símbolo  $a_{-1}$ . A dicho símbolo se le ha asignado el valor cero, es decir:

$$a_{-1} = 0. \quad (4.71)$$

■

Como en la fibra  $S_2$  se requiere sólo que la solución sea armónica, el potencial complejo tiene la misma forma que en (4.46b), i.e.

$$F_1^{(2)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l z^l,$$

donde los coeficientes  $d_l$ , para  $l \in \{1, 3, \dots\}$ , son reales e indeterminados.

### En resumen

Con el propósito de facilitar las futuras referencias, en la solución de los problemas locales para el modelo OP2, se hace un compendio de los resultados obtenidos en el desarrollo de esta sección.

Se tiene que los potenciales complejos que generan las soluciones a los problemas locales  ${}_pL$ ,  $p = 1, 2$ , (4.44) y (4.45) tienen el siguiente desarrollo en serie de Laurent

$$F_0^{(1)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l z^{-l} - A_l z^l \right], \quad (4.72a)$$

$$F_0^{(2)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l z^l, \quad (4.72b)$$

con  $A_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta_{kl}$ ,

$$F_1^{(1)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} \left( l a_l z^{-1} + l A_l z^l + A'_l z^l \right) + b_l z^{-1} - B_l z^l \right] \quad (4.73a)$$

$$F_1^{(2)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l z^l \quad (4.73b)$$



donde los coeficientes  $a_l, l \in \{1, 3, 5, \dots\}$  son los coeficientes del potencial  $F_0, A_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta_{kl},$   
 $A'_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{kl}$  y  $B_l = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k \eta_{kl}.$  Todos los coeficientes son reales y se determinan al imponer las condiciones de salto en la interfase.

Además, estos potenciales tienen el siguiente desarrollo trigonométrico

$$F_0^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l R^{-l} - A_l R^l \right] \cos l\varphi + i \sum_{l=1}^{\infty} \left[ -a_l R^{-l} - A_l R^l \right] \sin l\varphi, \quad (4.74a)$$

$$F_0^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l R^l \cos l\varphi + i \sum_{l=1}^{\infty} c_l R^l \sin l\varphi, \quad (4.74b)$$

y

$$F_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \left( D_l R^{-l} - F_l R^l \right) \cos l\varphi + i \left( -D_l R^{-l} - F_l R^l \right) \sin l\varphi \right], \quad (4.75a)$$

$$F_1^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} d_l R^l \cos l\varphi + i \sum_{l=1}^{\infty} d_l R^l \sin l\varphi, \quad (4.75b)$$

con  $D_l$  y  $F_l$  definidos por

$$D_l = -\frac{1}{4} (l-2) a_{l-2} R^2 - \frac{1}{4} A_l \delta_{1l} R^2 + b_l,$$

$$F_l = \frac{1}{4} (l+2) A_{l+2} R^2 - \frac{1}{4} A'_l + B_l,$$

para  $l \in \{1, 3, \dots\}.$

### 4.2.3. Problemas locales. Solución

Se tienen dos problemas para resolver a dos niveles diferentes de aproximación por cada problema local  ${}_p L, p = 1, 2,$  a saber:

$$\Delta {}_p \theta^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2 \quad (4.76a)$$

$$\| {}_p \theta \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.76b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial {}_p \theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = -\| \kappa \| n_\ell \delta_{p\ell} \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.76c)$$

y

$$\Delta {}_p \theta_1^{(1)} = \frac{\partial {}_p \theta_0^{(1)}}{\partial y_1^2} \quad \text{en } S_1, \quad (4.77a)$$

$$\Delta {}_p \theta_1^{(2)} = 0 \quad \text{en } S_2, \quad (4.77b)$$

$$\| {}_p \theta_1 \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.77c)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial {}_p \theta_1}{\partial \mathbf{n}} \right\| = \kappa_1 \left( \frac{\partial {}_p \theta_0^{(1)}}{\partial y_1} n_1 + n_p \delta_{1p} \right) \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.77d)$$

La solución del primero está dada en la sección 4.1.3.

Para resolver (4.77) se usa el potencial complejo definido en (4.73), donde los coeficientes  $a_k$  son reales y conocidos del problema a un orden anterior, i.e. son los coeficientes del desarrollo de Laurent de la solución al problema (4.76).

**Caso p = 1.**

De la condición (4.77d) y del hecho que  ${}_1\theta_0$  es una función par con respecto al ángulo  $\varphi$  (para  $z \in \Gamma$ ,  $z = Re^{i\varphi}$ ) se deduce fácilmente que la función  ${}_1\theta_1$  debe ser una función par con respecto al ángulo  $\varphi$ ; por ello, se propone, de (4.72), como solución a

$${}_1\theta_1^{(1)}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} \left( l a_l z^{-l} + l A_l z^l + A_l' z^l \right) + b_l z^{-l} - B_l z^l \right] \right\}, \quad (4.78a)$$

$${}_1\theta_1^{(2)}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} d_l z^l \right\}. \quad (4.78b)$$

Para  $z \in \Gamma$  se pueden escribir como

$${}_1\theta_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left( D_l R^{-l} - F_l R^l \right) \cos l\varphi, \quad (4.79a)$$

$${}_1\theta_1^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} d_l R^l \cos l\varphi. \quad (4.79b)$$

Cabe mencionar que no hay ninguna suma implícita en  $l$  cuando aparece como potencia y subíndice.

Por otro lado, en virtud de que el lado derecho de (4.77d) se puede escribir como la derivada de la parte imaginaria del potencial  $F_1$  con respecto al ángulo  $\varphi$  (ver ecuación (4.20)), se hace necesario integrar ambos lados de la ecuación y de forma natural surge la función

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial {}_1\theta_0^{(1)}(t)}{\partial y_1} \cos t dt. \quad (4.80)$$

Usando el desarrollo de  ${}_1\theta_0^{(1)}$  dado en (4.24), el sistema (4.26) y las propiedades de ortogonalidad para las funciones involucradas en la integral anterior, se tiene el desarrollo en serie de Fourier de la función  $E(\varphi)$

$$E(\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} e_l \sin l\varphi, \quad (4.81)$$

con

$$e_l = -R^{-1} \frac{1}{2l} \left[ \left( 2R^l \delta_{1l} \right) + (l-2) a_{l-2} R^{-(l-2)} + \left( 1 - (1 + \delta_{1l}) \chi_\kappa^{-1} \right) l a_l R^{-l} - \chi_\kappa^{-1} (l+2) a_{l+2} R^{-(l+2)} \right] \quad \forall l \in \{1, 3, \dots\}, \quad (4.82)$$

donde se ha usado la notación suma sobre índices repetidos y se ha usado la convención adoptada en (4.71), de que

$$a_{-1} = 0.$$

De la condición de interfase (4.77c) y de las expresiones (4.79):

$$d_l R^l = D_l R^{-l} - F_l R^l \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\}.$$

Del mismo modo, de la condición (4.77d), una vez integrada con respecto al ángulo  $\varphi$  (ver ecuación (4.20)), y de las expresiones (4.79) y (4.82) se tiene

$$\kappa_1 \left( -D_l R^{-l} - F_l R^l \right) - \kappa_2 \left( D_l R^{-l} - F_l R^l \right) = \kappa_1 \left( R^l \delta_{1l} + e_l R \right) \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\}.$$

De aquí, una vez usada la expresión correspondiente para los coeficientes  $D_l$  y  $F_l$  y algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene el sistema infinito

$$\begin{aligned} -\chi_\kappa^{-1} b_l R^{-l} - B_l R^l = & -v_l - N_0 (l-2) a_{l-2} R^{-(l-2)} - N_1 l a_l R^{-l} \\ & - N_3 (l+2) a_{l+2} R^{-(l+2)} - \frac{1}{4} A'_l R^l \quad \forall l \in \{1, 3, \dots\}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

donde los coeficientes

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \chi_\kappa^{-1} + \frac{1}{l} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right), \\ N_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \left( 1 - (1 + \delta_{1l}) \chi_\kappa^{-1} \right) - \frac{1}{2} \chi_\kappa^{-2} \delta_{1l} \right], \\ N_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{l} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right) \chi_\kappa^{-1}, \end{aligned}$$

junto con el vector

$$v_l = \frac{1}{4} \chi_\kappa^{-1} R^l \delta_{1l}$$

contienen la información relativa a las propiedades físicas de los materiales del compuesto, así como de la cuasiperiodicidad de la función  $\zeta$  en la retícula elegida.

Al aplicar el reescalamiento al igual que en la sección 4.1.3, i.e.

$$a'_l = \sqrt{l} R^{-l} a_l, b'_l = \sqrt{l} R^{-l} b_l, \quad \forall l \in \{1, 3, 5, \dots\},$$

el sistema (4.83) se puede escribir en la forma

$$\left( \chi_\kappa^{-1} \mathbf{I} - {}_1\mathbf{W} \right) \mathbf{b} = \mathbf{V}_1 + \left( {}_1\mathbf{U} + \frac{1}{4} {}_1\mathbf{W}' \right) \mathbf{a}, \quad (4.84)$$

donde el preíndice "1" indica que el objeto es relativo al problema local  ${}_1L$ , las matrices  $\mathbf{I}$  y  ${}_1\mathbf{W}$ , como era de esperarse, son las mismas que en (4.29), las incógnitas  $\mathbf{b} = (b'_1, b'_3, b'_5, \dots)^T$  son los coeficientes reescalados del desarrollo del Laurent de la función  ${}_1\theta_1^{(1)}$ , el vector

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{4} \chi_\kappa^{-1} R^l \delta_{1l}$$

tiene una única componente no nula. La matriz  ${}_1\mathbf{U} = [u_{kl}]$ , definida para  $\ell = 1$  por

$$u_{11} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa - 2) - \frac{1}{2} \chi_\kappa^{-1} \right] \chi_\kappa^{-1}, \quad (4.85a)$$

$$u_{13} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right] \chi_\kappa^{-1}, \quad (4.85b)$$

$$u_{1k} = 0 \quad \forall k \in \{5, 7, 9, \dots\}, \quad (4.85c)$$

mientras que para  $\ell \geq 3$  por:

$$\begin{aligned} u_{lk} = & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \chi_\kappa^{-1} + \frac{1}{l} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right] \sqrt{k(k+2)} \delta_{(l-2)k} \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} (1 - \chi_\kappa^{-1}) \right] k \delta_{lk} \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{k-2} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right] \chi_\kappa^{-1} \sqrt{(k-2)k} \delta_{(l+2)k}, \end{aligned} \quad (4.85d)$$

tiene las propiedades de los materiales constituyentes en sus elementos y al contraste entre ellos, debe notarse que se trata de una matriz tridiagonal. Por otro lado, la matriz simétrica  ${}_1\mathbf{W}'$ , se encuentra definida por

$${}_1\mathbf{W}' = [w'_{kl}] = \begin{cases} \left( \pi + \frac{5S_4}{\pi} \right) R^2 & k = l = 1 \\ \sqrt{k} \sqrt{l} \eta'_{kl} R^{k+l} & k + l \geq 3 \end{cases},$$

contiene información geométrica de la función  $\mathcal{Q}(z)$  y sus derivadas, i.e. de las contribuciones de sus sumas de retícula biarmónica para la geometría tratada, además de información del tamaño de la inclusión; finalmente los coeficientes  $\mathbf{a} = (a'_1, a'_3, a'_5, \dots)^T$  son los coeficientes del desarrollo de Laurent de la función solución del problema (4.76a).

La técnica del reescalamiento permite ver claramente las contribuciones de los distintos factores involucrados en el problema además de ayudar a la mnemotecnica de la solución. Nuevamente es de resaltar la simpleza de la solución y de que se trata de un sistema regular al cual se le pueden aplicar las técnicas de solución mencionadas en Kantorovich y Krylov (1964) como, por ejemplo, solución convergente por medio de truncamientos sucesivos.

### Caso p = 2

Aplicando un procedimiento similar al problema local  ${}_1L$  se llega a los sistemas infinitos que permiten poner a los coeficientes  ${}_2d_k$  en función de los  ${}_2b_k$  y que permite calcularlos.

Se propone la solución

$$\begin{aligned} {}_2\theta_1^{(1)}(z) &= \text{Im} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} \left( l {}_2a_l z^{-l} + l {}_2A_l z^l + {}_2A'_l z^l \right) + {}_2b_l z^{-l} - {}_2B_l z^l \right] \right\}, \\ {}_2\theta_1^{(2)}(z) &= \text{Im} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} {}_2d_l z^l \right\}. \end{aligned}$$

Para  $z \in \Gamma$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} {}_2\theta_1^{(1)} &= \sum_{l=1}^{\infty} {}^o \left( -{}_2D_l R^{-l} - {}_2F_l R^l \right) \cos l\varphi, \\ {}_2\theta_1^{(2)} &= \sum_{l=1}^{\infty} {}^o {}_2d_l R^l \cos l\varphi, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} {}_2D_l &= -\frac{1}{4} (l-2) {}_2a_{l-2} R^2 - \frac{1}{4} {}_2A_l \delta_{1l} R^2 + {}_2b_l, \\ {}_2F_l &= \frac{1}{4} (l+2) {}_2A_{l+2} R^2 - \frac{1}{4} {}_2A'_l + {}_2B_l. \end{aligned}$$

Los coeficientes  ${}_2b_k$  son reales, desconocidos y determinables por medio de las condiciones de interfase (4.77c) y (4.77d); los coeficientes  ${}_2a_k$  son los coeficientes del desarrollo de Laurent de la función solución del problema a un orden anterior. Las sumas  ${}_2A_k$ ,  ${}_2A'_k$  y  ${}_2B_k$  tienen definiciones análogas a aquellas correspondientes al problema local  ${}_1L$ , i.e.  ${}_2A_l = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o {}_2a_k k \eta_{kl}$ ,  ${}_2A'_l = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o {}_2a_k k \eta'_{kl}$  y  ${}_2B_l = \sum_{k=1}^{\infty} {}^o {}_2b_k k \eta_{kl}$ .

Del mismo modo, el desarrollo en serie de Fourier de la función

$${}_2E(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\partial {}_2\theta_0^{(1)}(t)}{\partial y_1} \cos t dt$$

tiene sus coeficientes definidos como

$$\begin{aligned} {}_2e_l &= -\frac{1}{2l} \left[ (l-2) {}_2a_{l-2} R^{-(l-2)} + [1 + (1 - \delta_{1l}) \chi_\kappa^{-1}] l {}_2a_l R^{-l} \right. \\ &\quad \left. - \chi_\kappa^{-1} (l+2) {}_2a_{l+2} R^{-(l+2)} \right] R^{-1}. \end{aligned}$$

El sistema infinito regular que determina a los coeficientes de  ${}_2\theta_1^{(1)}$  es

$$(\chi_\kappa^{-1} \mathbf{I} - {}_2\mathbf{W}) {}_2\mathbf{b} = -\mathbf{V}_1 + \left( {}_2\mathbf{U} - \frac{1}{4} {}_2\mathbf{W}' \right) {}_2\mathbf{a}, \quad (4.86)$$

donde

$${}_2\mathbf{W} = [w_{kl}] = \begin{cases} -\pi R^2 & k = l = 1 \\ \sqrt{k} \sqrt{l} \eta_{kl} R^{k+l} & k + l \geq 3 \end{cases}, \quad (4.87a)$$

$${}_2\mathbf{W}' = [w'_{kl}] = \begin{cases} \left( \pi - \frac{5S_4}{\pi} \right) R^2 & k = l = 1 \\ \sqrt{k} \sqrt{l} \eta'_{kl} R^{k+l} & k + l \geq 3 \end{cases}. \quad (4.87b)$$

Por otro lado, los coeficientes de  ${}_2\mathbf{U}$  están dados, para  $\ell = 1$ , por

$$u_{11} = -\left(\frac{1}{2}\chi_\kappa^{-1} + \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|}\chi_\kappa\right) \quad (4.88a)$$

$$u_{13} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|}\right) \quad (4.88b)$$

$$u_{1k} = 0 \quad (4.88c)$$

$$u_{13} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|}\right]\chi_\kappa^{-1}, \quad (4.88d)$$

$$u_{1k} = 0 \quad \forall k \in \{5, 7, 9, \dots\}, \quad (4.88e)$$

mientras que para  $\ell \geq 3$  por:

$$\begin{aligned} u_{lk} = & \left[\frac{1}{2} - \chi_\kappa \frac{1}{k+2} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|}\right] \sqrt{k(k+2)} \delta_{(l-2)k} \\ & - \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} [\chi_\kappa - 1] \delta_{lk} \\ & + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{k-2} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|}\right] \sqrt{(k-2)k} \delta_{(l+2)k} \end{aligned} \quad (4.88f)$$

#### 4.2.4. Coeficientes efectivos

Por la estructura de los tensores de permitividad eléctrica de cada material constituyente, se tiene que el único coeficiente no nulo aportado por la solución al problema local  ${}_1L$  está dado por (ecs. (3.31))

$$\bar{\kappa}_{11} = \langle \kappa_{11} \rangle - \|\kappa_{11}\| \int_{\Gamma} {}_1\theta^{(1)} dy_2.$$

Al sustituir el desarrollo asintótico (4.43) se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{11} = & \kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2 - \|\kappa_{11}\| \int_{\Gamma} {}_1\theta_0^{(1)} dy_2 \\ & + \alpha \left[ \kappa_1 \int_{\Gamma} {}_1\theta_0^{(1)} dy_2 - \|\kappa\| \int_{\Gamma} {}_1\theta_1^{(1)} dy_2 - \kappa_1 V_1 \right] + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

los primeros tres sumandos del lado derecho corresponden a los términos de orden  $\alpha^0$ , por lo que son los mismos que en la fórmula del coeficiente efectivo  $\bar{\kappa}_{11}$  en el caso PP3. La segunda integral de los términos de orden  $\alpha^1$  puede ser calculada de la misma manera que se calculó la integral  $\int_{\Gamma} {}_1\theta_0^{(1)} dy_2$  en la sección 4.1.4, i.e. se parametriza la curva  $\Gamma$ , se sustituye la serie de Fourier de  ${}_1\theta_0^{(1)}$ , y se usa la propiedad de ortogonalidad de la base de Fourier de  ${}_1\theta_0^{(1)}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} {}_1\theta_1^{(1)} dy_2 = & (D_1 R^{-1} - F_1 R) R \pi \\ = & \left[ \left( -\frac{1}{4} A_1 R^2 + b_1 \right) R^{-1} - \left( \frac{1}{4} 3A_3 R^2 - \frac{1}{4} A_1' + B_1 \right) R \right] R \pi. \end{aligned}$$

Ahora, del sistema (4.26) es posible escribir  $A_1$  y  $A_3$  en términos de  $a_1$  y  $a_3$ , respectivamente, como

$$\begin{aligned} A_1 R &= -\chi_k^{-1} a_1 R^{-1} + R, \\ -3A_3 R^3 &= 3\chi_k^{-1} a_3 R^{-3}; \end{aligned}$$

por otro lado, del sistema (4.83) se tiene

$$-B_1 R = \chi_k^{-1} b_1 R^{-1} - v_1 - N_1 a_1 R^{-1} - 3N_3 a_3 R^{-3} - \frac{1}{4} A_1' R.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 = \int_{\Gamma} {}_1\theta_1^{(1)} dy_2 &= \left[ -\frac{1}{4} (1 + \chi_k^{-1}) R + \left( \frac{1}{4} \chi_k^{-1} - N_1 \right) a_1 R^{-1} \right. \\ &\quad \left. - 3 \left( \frac{1}{4} \chi_k^{-1} + N_3 \right) a_3 R^{-3} + (1 + \chi_k^{-1}) b_1 R^{-1} \right] R\pi \end{aligned} \quad (4.89)$$

Por lo tanto, la expresión analítica para el coeficiente no nulo aportado por el problema local  ${}_1L$  es

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 (1 - 2\pi a_1) + \alpha \left[ \kappa_1 (\pi (1 + \chi_k^{-1}) a_1 - 1) - \|\kappa\| \mathcal{A}_1 \right],$$

como era de esperar, cuando se tiene  $\alpha = 0$ , i.e. el caso isótropo (o al menos PP3) se recupera la fórmula (4.38).

El único coeficiente no nulo aportado por el problema local  ${}_2L$ , de acuerdo a la fórmula (3.31b), está similarmente dado por

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{22} &= \kappa_1 (1 + 2\pi {}_2a_1) + \alpha \left[ \frac{1}{2} \kappa_1 R + {}_2N_1 {}_2a_1 R^{-1} + {}_2N_3 {}_2a_3 R^{-3} \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa_1 \pi {}_2b_1 R^{-1} \right] R\pi, \end{aligned}$$

donde

$${}_2N_1 = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) \left( \frac{1}{2} \chi_k^{-1} + \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \chi_k - \frac{1}{2} \right), \quad (4.90)$$

$${}_2N_3 = -\frac{3}{2} \chi_k^{-1} \kappa_1. \quad (4.91)$$

Nuevamente es de remarcarse la notoria simplicidad y el hecho de que la fórmula de los coeficientes efectivos sea cerrada, además de apreciarse claramente la forma en que las propiedades de los materiales constituyentes, el contraste entre los materiales, la geometría y la periodicidad del arreglo y el tamaño relativo de las fibras aparecen en dichas fórmulas.

### 4.3. PP1

En esta sección se considera el modelo en el cual los ejes de simetría material de los elementos constituyentes del compuesto son ortogonales al eje de orientación de las fibras y paralelos entre sí PP1 (se verá más adelante que el caso cuando son ortogonales, OP3, es un caso particular del presente estudio), tal como lo muestran las figuras 4.1 y 4.2. Se conserva la notación usada en este capítulo, por lo que la celda periódica es denotada por  $S$  y su volumen se sigue considerando igual a "1", del mismo modo, la matriz es denotada por  $S_1$  y las fibras por  $S_2$ , mientras que la interfase de los materiales constituyentes por  $\Gamma$ . Se continúa suponiendo que las fibras tienen un área transversal circular, por lo que cualquier elemento en  $\Gamma$  puede ser descrito por medio de las coordenadas polares  $(R, \varphi)$ ; se debe notar que  $R$  es fijo ya que las fibras se consideran de un único radio. Los materiales constituyentes corresponden a una simetría transversalmente isótropa y basta hacer una sencilla transformación del tensor de permitividad eléctrica de cada material para tener los tensores descriptivos del caso de estudio, (4.1), que en la notación generalizada de Hill, introducida en (4.2), tienen la forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}^{(1)}(\mathbf{y}) &= \text{diag} [ \kappa'_1 \quad \kappa_1 \quad \kappa_1 ], & \text{en } S_1, \\ \boldsymbol{\kappa}^{(2)}(\mathbf{y}) &= \text{diag} [ \kappa'_2 \quad \kappa_2 \quad \kappa_2 ], & \text{en } S_2.\end{aligned}$$

Como se verá en las conclusiones finales, la presente sección es una generalización de las dos anteriores y, más aún, del caso (no escrito aquí) en el que los ejes de simetría material de cada elemento del compuesto y la dirección de las fibras son mutuamente ortogonales, OP3.

#### 4.3.1. Problemas locales. Formulación

Definiendo los **parámetros perturbativos materiales**

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\kappa'_1}{\kappa_1}, \quad \alpha_2 = 1 - \frac{\kappa'_2}{\kappa_2}, \quad (4.92)$$

la ecuación (3.32) puede ser reescrita como

$$\Delta_p \theta^{(\gamma)} = \alpha_\gamma \frac{\partial^2_p \theta^{(\gamma)}}{\partial y_1^2} \quad \text{en } S_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, \quad (4.93a)$$

$$\| \theta_p \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.93b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial_p \theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| = - \| \kappa \| n_\ell \delta_\ell + \left\| \kappa \alpha \frac{\partial_p \theta}{\partial y_1} \right\| n_1 + \| \kappa \alpha \| n_p \delta_{1p}, \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.93c)$$



donde

$$\begin{aligned}\|{}_p\theta\| &= {}_p\theta^{(1)} - {}_p\theta^{(2)}, \\ \left\| \kappa \frac{\partial {}_p\theta}{\partial \mathbf{n}} \right\| &= \kappa_1 \left( \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}}{\partial y_2} n_2 \right) - \kappa_2 \left( \frac{\partial {}_p\theta^{(2)}}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial {}_p\theta^{(2)}}{\partial y_2} n_2 \right), \\ \left\| \kappa \alpha \frac{\partial {}_p\theta}{\partial y_1} \right\| &= \kappa_1 \alpha_1 \frac{\partial {}_p\theta^{(1)}}{\partial y_1} - \kappa_2 \alpha_2 \frac{\partial {}_p\theta^{(2)}}{\partial y_1}, \\ \|\kappa\| &= \kappa_1 - \kappa_2, \\ \|\kappa \alpha\| &= \kappa_1 \alpha_1 - \kappa_2 \alpha_2\end{aligned}$$

y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Se debe notar que la ecuación (4.93) es una ecuación elíptica, pues los coeficientes del tensor de permitividad eléctrica son positivos, además, debido a la geometría del problema se requiere que la solución sea doblemente periódica con periodos  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = i$ . y, finalmente, que cuando  $\alpha_\gamma$  es pequeño puede ser tratada por medio de un método de perturbación, tal como se hizo en la sección anterior. Además el problema local  ${}_3L$ , debido a la geometría del problema, se vuelve homogéneo y por lo tanto la única solución es la trivial, i.e.  ${}_3\theta \equiv 0$ , pues las soluciones resonantes van más allá del alcance del presente trabajo, sin embargo, son temas de estudio desde hace tiempo de la comunidad científica (Nicolovici y McPhedran, 1994 y Nicolovici *et al.*, 1995; McPhedran, 1980; etc.).

#### 4.3.2. Problemas locales. Método Asintótico

Como se mencionó en la sección 4.2, en las tablas de Landolt-Börnstein (1979) hay 258 materiales dieléctricos con una estructura que corresponde a la supuesta en (4.2) (sin contar a los de simetría cúbica pues para ellos  $\alpha = 0$ ); 254 tienen la propiedad de que, para  $\alpha$  definido como en (4.92),  $|\alpha| < 1$ , y de esos 181 cumplen con  $|\alpha| \leq 0.5$ , por lo que es factible suponer pequeños a los parámetros perturbativos en cada material, y se cumplirá que son pequeños en una gran cantidad de casos.

Por otro lado, dada la cantidad de cifras significativas de los coeficientes de los materiales reportados en esas tablas; se puede suponer que  $\alpha$  tiene tres cifras significativas, por lo que, dado un parámetro pequeño  $\beta$ , se definen  $L_{\gamma i}$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $\gamma = 1, 2$  como los **coeficientes del desarrollo de  $\alpha_\gamma$  en potencias de  $\beta$** , i.e.

$$\alpha_\gamma = L_{\gamma 1}\beta + L_{\gamma 2}\beta^2 + L_{\gamma 3}\beta^3, \gamma = 1, 2. \quad (4.94)$$

Pese a la redundancia, es conveniente recalcar que el desarrollo (4.94), no es un desarrollo asintótico, sino un desarrollo en potencias de  $\beta$ ; por ejemplo si  $\alpha_\gamma = -0.170$  (que es el valor para el Titanato de Bario) y si  $\beta = 0.1$ , se tiene que un posible conjunto de valores de  $L_{\gamma i}$  es

$$L_{\gamma 1} = -1, L_{\gamma 2} = 7, L_{\gamma 3} = 0.$$

Por ello, para resolver los problemas locales  ${}_pL$  se propone el *ansatz*

$${}_p\theta^{(\gamma)} = {}_p\theta_0^{(\gamma)} + {}_p\theta_1^{(\gamma)}\beta + {}_p\theta_2^{(\gamma)}\beta^2 + \dots, \gamma = 1, 2. \quad (4.95)$$

Sustituyendo (4.95) y (4.94) en (4.93) e igualando potencias de  $\beta$ , para  $p = 1$ , se tiene una recursión de problemas locales, a orden  $\beta^0$  :

$$\Delta_1 \theta_0^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2, \quad (4.96a)$$

$$\|_1 \theta_0\| = 0, \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.96b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial_1 \theta_0}{\partial \mathbf{n}} \right\| = -\|\kappa\| n_1, \quad \text{en } \Gamma \quad (4.96c)$$

y, a orden  $\beta^1$  :

$$\Delta_1 \theta_1^{(\gamma)} = L_{\gamma 1} \frac{\partial^2_1 \theta_0^{(\gamma)}}{\partial y_1^2} \quad \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2, \quad (4.97a)$$

$$\|_1 \theta_1\| = 0, \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.97b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial_1 \theta_1}{\partial \mathbf{n}} \right\| = \left[ \|\kappa L_{\gamma 1}\| + \left\| \kappa L_{\gamma 1} \frac{\partial_1 \theta_0^{(\gamma)}}{\partial y_1} \right\| \right] n_1, \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.97c)$$

Así mismo, para el problema local  ${}_2L$  se tiene otra sucesión de problemas locales a resolver, a distintos ordenes de aproximación, a orden  $\beta^0$  :

$$\Delta_2 \theta_0^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2, \quad (4.98a)$$

$$\|_2 \theta_0\| = 0, \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.98b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial_2 \theta_0}{\partial \mathbf{n}} \right\| = -\|\kappa\| n_2, \quad \text{en } \Gamma; \quad (4.98c)$$

mientras que a orden  $\beta^1$  :

$$\Delta_2 \theta_1^{(\gamma)} = L_{\gamma 1} \frac{\partial^2_2 \theta_0^{(\gamma)}}{\partial y_1^2} \quad \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2, \quad (4.99a)$$

$$\|_2 \theta_1\| = 0, \quad \text{en } \Gamma, \quad (4.99b)$$

$$\left\| \kappa \frac{\partial_2 \theta_1}{\partial \mathbf{n}} \right\| = \left\| \kappa L_{\gamma 1} \frac{\partial_2 \theta_0^{(\gamma)}}{\partial y_1} \right\| n_1, \quad \text{en } \Gamma. \quad (4.99c)$$

Los problemas (4.96) y (4.98) son una ecuación de Laplace con condiciones de salto en la interfase y de doble periodicidad cuya solución está incluida en López-López *et al.* (2005) como un caso particular. Esto fué explicado con más detalle en la sección 4.1. Dicha solución se usa aquí como una base para la perturbación. Las ecuaciones (4.97) y (4.99) son una ecuación de Poisson con condiciones de salto en la interfase que dependen de la solución a un orden anterior, con condiciones de doble periodicidad y se resuelven en el presente estudio usando la teoría de potenciales complejos a través de la función  $\zeta(z)$  de Weierstrass y de sus derivadas que son funciones elípticas con polos simples en los nodos de la retícula en la que se definen, excepto  $\zeta$  que es cuasiperiódica; además se usa la función de  $\mathcal{Q}(z)$  de Natanzon (Rodríguez-Ramos *et al.*, 2001) para contribuir a compensar la cuasiperiodicidad de  $\zeta$  al construir el potencial complejo que genera la solución de los problemas locales  ${}_pL$ ,  $p = 1, 2$ .

### 4.3.3. Problemas locales ${}_pL$ , $O(\beta^0)$

De (4.96) y (4.98) se tiene que los enunciado correspondientes a cada problema local, para la primera aproximación tiene la forma, para  $\gamma = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta {}_p\theta_0^{(\gamma)} &= 0 && \text{en } S_\gamma, \\ \| {}_p\theta_0 \| &= 0 && \text{en } \Gamma, \\ \left\| \kappa \frac{\partial {}_p\theta_0}{\partial \mathbf{n}} \right\| &= -\|\kappa\| n_\ell \delta_{p\ell} && \text{en } \Gamma, \end{aligned}$$

que es claramente la misma estructura de los problemas locales correspondientes para el modelo PP3, escritos en la ecuación (4.3) y resueltos en la sección 4.1.3. Las observaciones hechas en esa sección son aplicables a la presente con el entendido de que se trata de la primera aproximación de la solución al problema (4.93).

Por lo tanto, la solución al problema local  ${}_1L$  ( ${}_2L$ ) está dada por la parte real (imaginaria) del potencial complejo

$$F_0^{(1)}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l z^{-l} - A_l z^l \right].$$

donde los coeficientes  $a_k$  son reales, determinables por medio de las condiciones de interfase (4.22c), y solución del sistema (4.30), con el debido reescalamiento (ver sección 4.1).

**Observación.** Cabe mencionar que, pese a la notación usada, la parte imaginaria del potencial que genera la solución del problema local  ${}_1L$  no es necesariamente solución del problema local  ${}_2L$ . Tienen la misma estructura, sin embargo, las condiciones de interfase hacen únicos a los coeficientes  $a_k$  en cada caso. ■

### 4.3.4. Problemas locales. Potenciales Complejos $O(\beta)$

Tanto en (4.97a) como (4.99a) el lado derecho de la ecuación es una función armónica, pues es solución de la ecuación de Laplace en (4.96a) y en (4.98a). Por ello la función  ${}_p\theta_1^{(\gamma)}$  es una función biarmónica cuya expresión explícita se puede conocer al adaptar el método de Goursat para construir la solución general a dicha ecuación (Sokolnikoff, 1956). Entonces la solución a los problemas locales  ${}_pL$  para  $O(\beta)$  tienen un potencial complejo de la forma

$$F_1^{(\gamma)}(z) = u_1^{(\gamma)} + i v_1^{(\gamma)} = \bar{z}\varphi^{(\gamma)}(z) + \psi^{(\gamma)}(z), \gamma = 1, 2,$$

con

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(z) &= \frac{1}{4}L_{11} \frac{dF_0^{(1)}(z)}{dz}, \\ \varphi^{(2)}(z) &= \frac{1}{4}L_{21} \frac{dF_0^{(2)}(z)}{dz}, \\ \psi^{(1)}(z) &= b_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} + \frac{1}{4}L_{11} a_k \frac{\mathcal{Q}^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right], \\ \psi^{(2)}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k,\end{aligned}$$

donde, para  $\gamma = 1, 2$ ,  $L_{\gamma 1}$  son los primeros coeficientes del desarrollo en potencias de  $\beta$  de los parámetros de anisotropía  $\alpha_\gamma$ ,  $F_0^{(1)}$  y sus coeficientes  $a_k$ , así como  $F_0^{(2)}$  y sus coeficientes  $c_k$  (no mostrados explícitamente, ver ec. (4.23)) se encuentran explícitamente en la solución de los problemas (4.97) y (4.99), respectivamente.  $\mathcal{Q}(z)$  es la función de Natanzon, introducida en (4.48),  $\mathcal{Q}^{(n)}(z)$  es su derivada  $n$ -ésima como función de variable compleja,  $z$ ; finalmente los coeficientes  $b_k$  y  $d_k$  son reales y desconocidos, determinables por medio de las condiciones de interfase (4.97c) y (4.99c).

### Coefficiente de cuasiperiodicidad

El coeficiente  $b_0$  es una ayuda para satisfacer la hipótesis de doble periodicidad de la solución al problema local. Para encontrar una expresión analítica de  $b_0$  se procede del mismo modo que para encontrar  $a_0$ , i.e., como  $F_1^{(1)}$  debe ser una función elíptica con periodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , se tiene que

$$0 = F_1(z + \omega_\alpha) - F_1(z) = \overline{(z + \omega_\alpha)} \varphi(z + \omega_\alpha) + \psi(z + \omega_\alpha) - \bar{z} \varphi(z) - \psi(z). \quad (4.100)$$

Como

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{4}L_{11} \left( a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\zeta^{(k)}(z)}{(k-1)!} \right), \\ \psi(z) &= b_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} + \frac{1}{4}L_{11} a_k \frac{\mathcal{Q}^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right]\end{aligned}$$

se tiene que

$$\varphi(z + \omega_\alpha) - \varphi(z) = 0, \quad (4.101)$$

pues  $a_0$  fué elegido en (4.8) de tal forma que se satisfaga este requerimiento; por otro lado, usando las propiedades de la función de Natanzon  $\mathcal{Q}(z)$ , presentadas en (4.49), se tiene

$$\psi(z + \omega_\alpha) - \psi(z) = b_0 \omega_\alpha + b_1 \delta_\alpha + \frac{1}{4}L_{11} a_1 \gamma_\alpha - \frac{1}{4}L_{11} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} \bar{\omega}_\alpha \zeta^{(k)}(z). \quad (4.102)$$

Por lo que usando (4.101) y (4.102) en (4.100)

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\omega}_\alpha \varphi(z + \omega_\alpha) + b_0 \omega_\alpha + b_1 \delta_\alpha + \frac{1}{4} L_{11} a_1 \gamma_\alpha - \frac{1}{4} L_{11} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} \bar{\omega}_\alpha \zeta^{(k)}(z) \\ &= \frac{1}{4} L_{11} \bar{\omega}_\alpha a_0 + b_0 \omega_\alpha + b_1 \delta_\alpha + \frac{1}{4} L_{11} a_1 \gamma_\alpha; \end{aligned}$$

como  $a_0 = \lambda_1 a_1$ , la ecuación anterior se escribe como

$$0 = b_0 \omega_\alpha + b_1 \delta_\alpha + \frac{1}{4} L_{11} (\lambda_1 \bar{\omega}_\alpha + \gamma_\alpha) a_1. \quad (4.103)$$

**Observación.** Nuevamente es posible demostrar para el problema local  ${}_1L$  ( ${}_2L$ ), a partir de la condiciones (4.97c) ((4.99c)), y usando el hecho de que la función  ${}_1\theta_0^{(\gamma)}$  ( ${}_2\theta_0^{(\gamma)}$ ) es una función par (impar) con respecto al ángulo (que parametriza a la curva  $\Gamma$ )  $\varphi$ , que la función  ${}_1\theta_1^{(\gamma)}$  ( ${}_2\theta_1^{(\gamma)}$ ) es una función par (impar) de  $\varphi$ , por ello se elige la parte real (imaginaria) del potencial  $F_1(z)$  para generar la solución correspondiente. ■

Para  ${}_1L$ ,  ${}_1\theta_1^{(1)} = \operatorname{Re} \{F_1^{(1)}(z)\}$  debe satisfacer la condición de doble periodicidad; al tomar el periodo  $\omega_2 = i$ , esta hipótesis se cumple trivialmente. Mientras que, para el periodo  $\omega_1 = 1$ , sustituyendo los valores de  $\delta_1, \gamma_1$  en la ecuación (4.103), se llega a una condición sobre la forma que debe tener  $b_0$  para poder tener la doble periodicidad:

$$b_0 = \frac{1}{4} L_{11} \left( \pi + \frac{5S_4}{\pi} \right) a_1 - \pi b_1. \quad (4.104)$$

Del mismo modo, para el problema local  ${}_2L$ ,  ${}_2\theta_1^{(1)} = \operatorname{Im} \{F_1^{(1)}(z)\}$  se deben satisfacer las condiciones de doble periodicidad; al tomar el periodo  $\omega_1 = 1$ , la hipótesis de doble periodicidad se satisface trivialmente, sin embargo, para el otro periodo,  $\omega_2 = i$ , los valores correspondientes de  $\delta_2, \gamma_2$  en la ecuación (4.103), tienen la forma explícita del coeficiente

$$b_0 = \frac{1}{4} L_{11} \left( \pi - \frac{5S_4}{\pi} \right) a_1 + \pi b_1. \quad (4.105)$$

Se concluye que, en general, se puede escribir

$$b_0 = \frac{1}{4} \lambda_2 a_1 + \lambda_1 b_1$$

con

$$\lambda_1 = \begin{Bmatrix} -\pi & {}_1L \\ \pi & {}_2L \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{Bmatrix} (\pi + 5S_4/\pi) L_{11} & {}_1L \\ (\pi - 5S_4/\pi) L_{11} & {}_2L \end{Bmatrix}, \quad (4.106)$$

por lo que el coeficiente  $b_0$  depende de la suma de retícula  $S_4$  y los residuos de las funciones  $F_0^{(1)}$  y  $\psi^{(1)}$ .

El potencial complejo que genera la solución de los problemas locales del modelo OP2 tiene una forma análoga a la requerida aquí, osea que el desarrollo en serie de Fourier del potencial solución en el material  $S_1$  está dado por

$$F_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ (D_l R^{-l} - F_l R^l) \cos l\theta + i (-D_l R^{-l} - F_l R^l) \operatorname{sen} l\theta \right],$$

donde  $\forall l \in \{1, 3, 5, \dots\}$  con

$$D_l = -\frac{1}{4}(l-2)a_{l-2}R^2 - \frac{1}{4}A_l\delta_{1l}R^2 + b_l,$$

$$F_l = \frac{1}{4}\left((l+2)A_{l+2}R^2 - A'_l\right) + B_l,$$

además, nuevamente se ha usado el símbolo

$$a_{-1} = 0.$$

En el material  $S_2$

$$F_1^{(2)}(z) = \bar{z}\varphi^{(2)}(z) + \psi^{(2)}(z)$$

$$= \frac{1}{4}L_{21}\bar{z}\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k,$$

donde los coeficientes  $c_k$  son reales y se conocen pues la función  $\varphi$  es generadora de la solución al problema local (4.3), los coeficientes  $d_k$  son reales, desconocidos y determinables a partir de las condiciones de interfase. Cuando  $z \in \Gamma$ , se tiene que  $z = Re^{i\varphi}$ , con  $R$  fijo y  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , por ello

$$F_1^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} [\mathcal{C}_l \cos l\theta + i\mathcal{D}_l \sin l\theta],$$

donde los coeficientes  $\mathcal{C}_l$  y  $\mathcal{D}_l$  están dados por

$$\mathcal{C}_l = \frac{1}{4}L_{21} \left( l c_l R^l \delta_l + (l+2) c_{l+2} R^{l+2} \right) + d_l R^l,$$

$$\mathcal{D}_l = \frac{1}{4}L_{21} \left( -l c_l R^l \delta_l + (l+2) c_{l+2} R^{l+2} \right) + d_l R^l.$$

Juntando los resultados anteriores, se tiene que el potencial complejo que genera la solución para el problema local  $pL$  tiene la siguiente expresión

$$F_1^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ (D_l R^{-l} - F_l R^l) \cos l\theta + i(-D_l R^{-l} - F_l R^l) \sin l\theta \right], \quad (4.107)$$

$$F_1^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} [\mathcal{C}_l \cos l\theta + i\mathcal{D}_l \sin l\theta], \quad (4.108)$$

donde  $\forall l \in \{1, 3, 5, \dots\}$  se tiene

$$D_l = -\frac{1}{4}(l-2)a_{l-2}R^2 - \frac{1}{4}A_l\delta_{1l}R^2 + b_l,$$

$$F_l = \frac{1}{4}\left((l+2)A_{l+2}R^2 - A'_l\right) + B_l,$$

$$\mathcal{C}_l = \frac{1}{4}L_{21} \left( l c_l R^l \delta_l + (l+2) c_{l+2} R^{l+2} \right) + d_l R^l,$$

$$\mathcal{D}_l = \frac{1}{4}L_{21} \left( -l c_l R^l \delta_l + (l+2) c_{l+2} R^{l+2} \right) + d_l R^l.$$

y como siempre, se define

$$a_{-1} = 0.$$

### 4.3.5. Problemas locales. Solución $O(\beta)$

#### Problema local ${}_1L$

El problema local  ${}_1L$  tiene el siguiente enunciado:

$$\begin{aligned} \Delta {}_1\theta_1^{(\gamma)} &= L_{\gamma 1} \frac{\partial^2 {}_1\theta_0^{(\gamma)}}{\partial y_1^2} && \text{en } S_\gamma, \gamma = 1, 2, \\ \| {}_1\theta_1 \| &= 0, && \text{en } \Gamma, \\ \left\| \kappa \frac{\partial {}_1\theta_1}{\partial \mathbf{n}} \right\| &= \left[ \left\| \kappa L_{\gamma 1} \right\| + \left\| \kappa L_{\gamma 1} \frac{\partial {}_1\theta_0^{(\gamma)}}{\partial y_1} \right\| \right] n_1, && \text{en } \Gamma. \end{aligned}$$

Como la solución tiene que ser una función par con respecto a  $\varphi$  (ángulo que parametriza a  $\Gamma$ ), se propone como solución al problema local, la función  ${}_1\theta_1^{(\gamma)}$  definida por

$${}_1\theta_1^{(\gamma)} = \text{Re} \left\{ F_1^{(\gamma)} \right\}.$$

Es posible seguir el mismo procedimiento usado para solucionar el caso  $O(\beta^0)$  para conocer los coeficientes  $b_k$ , llegando a que tales coeficientes son solución del sistema

$$\begin{aligned} -\left( \chi_\kappa^{-1} b_l R^{-l} + B_l R^l \right) &= V_l + N_{0,l} (l-2) a_{(l-2)} R^{-(l-2)} \\ &+ N_{1,l} l a_l R^{-l} + N_{3,l} (l+2) a_{(l+2)} R^{-(l+2)} \\ &- \frac{1}{4} L_{11} A'_l R^l, \end{aligned} \quad (4.109)$$

con

$$\begin{aligned} V_l &= -\left( \frac{1}{4} L_{11} \chi_\kappa^{-1} - \frac{1}{2} \kappa_2 L_{21} \frac{1}{\|\kappa\|} \right) R^l \delta_{1l}, \\ N_{0,l} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} L_{11} \chi_\kappa^{-1} + \kappa_1 L_{11} \frac{1}{\|\kappa\|} \frac{1}{l} \right], \\ N_{1,l} &= -\frac{1}{2l} \left[ \kappa_1 L_{11} \frac{1}{\|\kappa\|} (1 - (1 + \delta_{1l}) \chi_\kappa^{-1}) - \frac{1}{2} L_{11} \chi_\kappa^{-2} \delta_{1l} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2l} \left[ \kappa_2 L_{21} \frac{1}{\|\kappa\|} (1 + \chi_\kappa^{-1}) (1 + 2\delta_{1l}) \right], \\ N_{3,l} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} L_{11} - \kappa_1 L_{11} \frac{1}{\|\kappa\|} \frac{1}{l} \right) \chi_\kappa^{-1} + \kappa_2 L_{21} \frac{1}{\|\kappa\|} \frac{1}{l} (1 + \chi_\kappa^{-1}) \right]. \end{aligned}$$

Usando los reescalamientos

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{l}} a'_l R^l, b_l = \frac{1}{\sqrt{l}} b'_l R^l,$$

el sistema (4.109) se puede reescribir en la forma

$$(\chi_\kappa^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{W}) \mathbf{b} = \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \left( \chi_\kappa^{-1} \mathbf{U} + \frac{1}{2} L_{11} \mathbf{W}' \right) \mathbf{a} \quad (4.110)$$

facilitando su mnemónica, donde el lado izquierdo del sistema (4.110), salvo  $\mathbf{b} = (b'_1, b'_3, b'_5, \dots)^T$ , es el mismo que el lado izquierdo del sistema (4.30), el vector independiente  $\mathbf{V}_1$  tiene una única componente no nula

$$\mathbf{V}_1 = \left[ -\left( \frac{1}{2} \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} L_{21} - \frac{1}{4} \chi_\kappa^{-1} L_{11} \right) R^l \delta_{1l} \right], \quad l \in \{1, 3, 5, \dots\},$$

las componentes de la matriz  $\mathbf{U} = [u_{lk}]$ , están dadas, para  $l = 1$ , por

$$u_{11} = \left( \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa - 2) - \frac{1}{2} \chi_\kappa^{-1} \right) L_{11} + 3 \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa + 1) L_{21}, \quad (4.111)$$

$$u_{13} = \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right) L_{11} + \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa + 1) L_{21} \right] \sqrt{3}, \quad (4.112)$$

$$u_{1k} = 0, \quad \forall k \geq 5 \quad (4.113)$$

y, para  $l \geq 3$ , por

$$\begin{aligned} u_{lk} = & \sqrt{(k+2)k} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right) L_{11} \frac{1}{k+2} \chi_\kappa \right] \delta_{(l-2),k} \\ & + \left[ \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa - 1) L_{11} + \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa + 1) L_{21} \right] \delta_{lk} \\ & + \sqrt{(k-2)k} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{k-2} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right) L_{11} + \frac{1}{k-2} \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa^{-1} + 1) L_{21} \right] \delta_{(l+2),k}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

nuevamente, la matriz  $\mathbf{U}$  es una matriz tridiagonal que contiene las propiedades físicas de los materiales constituyentes.

Finalmente la matriz  $\mathbf{W}' = [w'_{kl}]$ , que contiene las sumas de retícula de la función de Natanzon, está dada por

$$w'_{kl} = \sqrt{k} \sqrt{l} \eta'_{kl} R^{k+l}. \quad (4.115)$$

De la misma forma que (4.30), el sistema (4.110) tiene una estructura notablemente simple pues se puede identificar inmediatamente la forma en que contribuyen las propiedades físicas de los materiales (contraste relativo  $\chi_\kappa$ , matriz  $\mathbf{U}$  y primeros coeficientes del desarrollo en potencias de  $\beta$ ,  $L_{\gamma 1}$ ) y las propiedades geométricas de la celda del compuesto (coeficientes  $\eta_{kl}$  y  $\eta'_{kl}$  en las matrices  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{W}'$ ).

El sistema (4.110) también presenta una característica muy importante y útil pues para analizar los casos en que el eje de simetría material de la fibra es paralelo a la dirección de estas y el eje de simetría material de la matriz es ortogonal a la dirección de las fibras  $\alpha_1 \neq 0$  y  $\alpha_2 = 0$ , y, viceversa,  $\alpha_1 = 0$  y  $\alpha_2 \neq 0$ . Basta con hacer el parámetro respectivo igual a cero, de esta forma se obtienen los mismos resultados que cuando se estudiaron estos casos por separado. El caso en que las direcciones de los ejes de simetría material son ortogonales entre sí y perpendiculares a la dirección de las fibras también está incluido como caso particular de este estudio. Sólo se requiere redefinir los parámetros involucrados, por ejemplo, como en (4.141).

**Observación.** Se debe notar también que (4.110) comparte la misma estructura que (4.30) por lo que las observaciones hechas para dicho sistema son válidas en este también. ■



**Problema local  ${}_2L$** 

De las condiciones de interfase para los dos niveles de aproximación  $O(\beta^0)$  y  $O(\beta^1)$  se demuestra que las funciones  ${}_2\theta_0$  y  ${}_2\theta_1$  son impares con respecto al ángulo  $\varphi$  por lo que, para cada caso, se propone una solución en la forma

$${}_2\theta_0 = \text{Im}\{F_0\}, {}_2\theta_1 = \text{Im}\{F_1\};$$

siguiendo un procedimiento análogo a  ${}_1L$  se obtienen los sistemas, para  $O(\beta^0)$ ,

$$(\chi_\kappa^{-1}\mathbf{I} - {}_2\mathbf{W}) {}_2\mathbf{a} = -\mathbf{V}_0, \quad (4.116)$$

con  $[w_{kl}]$ ,  $\mathbf{V}_0$  dados en (4.36), y para  $O(\beta)$ :

$$(\chi_\kappa^{-1}\mathbf{I} - {}_2\mathbf{W}) {}_2\mathbf{b} = \mathbf{V}_1 + \frac{1}{2} \left( \chi_\kappa^{-1} {}_2\mathbf{U} - \frac{1}{2} L_{11} {}_2\mathbf{W}' \right) {}_2\mathbf{a}$$

con el lado izquierdo idéntico al lado izquierdo de (4.116),  $w'_{kl}$  dados en (4.87b) y

$$u_{11} = \left( \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \chi_\kappa + \frac{1}{2} \chi_\kappa^{-1} \right) L_{11} - \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa + 1) L_{21}, \quad (4.117)$$

$$u_{13} = \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right) L_{11} + \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa + 1) L_{21} \right] \sqrt{3}, \quad (4.118)$$

$$u_{1k} = 0, \quad \forall k \geq 5 \quad (4.119)$$

y para  $l \geq 3$  por

$$\begin{aligned} u_{lk} = & \sqrt{k(k+2)} \left[ \frac{1}{2} \chi_\kappa^{-1} + \frac{1}{k+2} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right] L_{11} \delta_{(l-2),k} \\ & + \left[ \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} L_{11} + \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} L_{21} \right] (\chi_\kappa + 1) \delta_{lk} \\ & + \sqrt{(k-2)k} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{k-2} \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right) L_{11} + \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} (\chi_\kappa + 1) L_{21} \right] \delta_{(l+2),k}. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Nuevamente la estructura de  $\mathbf{U}$  es tridiagonal.

**4.3.6. Coeficientes efectivos**

De acuerdo con la fórmula (3.31) de los coeficientes efectivos del tensor de permitividad eléctrica aportados por el problema local  ${}_pL$ , están dados por

$$\bar{\kappa}_{1p} = \langle \kappa_{1p} \rangle - \|\kappa_{11}\| {}_p\Gamma_{*2}, \quad (4.121)$$

$$\bar{\kappa}_{2p} = \langle \kappa_{2p} \rangle + \|\kappa_{22}\| {}_p\Gamma_{*1}, \quad (4.122)$$

$$\bar{\kappa}_{3p} = \langle \kappa_{3p} \rangle, \quad (4.123)$$

donde

$${}_p\Gamma_{*\alpha} = \int_{\Gamma} {}_p\theta d\gamma_\alpha, \quad y * = 0, 1.$$

Al sustituir la solución (4.95) y el desarrollo (4.94) en (4.121), teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} p\Gamma_{*\alpha} &= \int_{\Gamma} p\theta_*^{(1)} dy_{\alpha} = \int_{\Gamma} \left( \sum_{m=0} p\theta_m^{(1)} \beta^m \right) dy_{\alpha} = \sum_{m=0} \left( \int_{\Gamma} p\theta_m^{(1)} dy_{\alpha} \right) \beta^m \\ &= \sum_{m=0} p\Gamma_{m\alpha} \beta^m, \end{aligned}$$

se llega a

$$\bar{\kappa}_{11} = \langle \kappa_{\gamma} \rangle - \|\kappa_{\gamma}\| \, {}_1\Gamma_{02} - (\langle \kappa_{\gamma} L_{\gamma 1} \rangle - \|\kappa_{\gamma} L_{\gamma 1}\| \, {}_1\Gamma_{02} + \|\kappa_{\gamma}\| \, {}_1\Gamma_{12}) \beta. \quad (4.124)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} {}_1\Gamma_{02} &= \int_{\Gamma} {}_1\theta_0^{(1)} dy_2 = \int_0^{2\pi} {}_1\theta_0^{(1)}(R, \theta) R \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l=1} (a_l R^{-l} - A_l R^l) \cos l\theta \right) R \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (a_1 R^{-1} - A_1 R) R \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= (a_1 R^{-1} - A_1 R) R\pi. \end{aligned}$$

Del mismo modo

$${}_1\Gamma_{12} = (D_1 R^{-1} - F_1 R) R\pi,$$

usando el sistema infinito cuya solución son los coeficientes  $a_k$ , i.e. (4.26), se tiene que

$$A_1 R = R - \chi_{\kappa}^{-1} a_1 R^{-1}.$$

Por lo que

$$(a_1 R^{-1} - A_1 R) R\pi = -V_2 + (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) a_1 \pi. \quad (4.125)$$

Análogamente, usando el sistema (4.109), se llega a que

$$\begin{aligned} D_1 R^{-1} - F_1 R &= -\frac{1}{4} L_{11} (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) R + \frac{1}{2} \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} L_{21} R + (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) b_1 R^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} L_{11} (1 - 2\chi_{\kappa}^{-1}) - \frac{1}{2} \chi_{\kappa}^{-1} (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) L_{11} + 3 \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} L_{21} (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) \right] a_1 R^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{\kappa_1}{\|\kappa\|} \right) L_{11} \chi_{\kappa}^{-1} - \frac{1}{2} L_{11} \chi_{\kappa}^{-1} + \frac{\kappa_2}{\|\kappa\|} L_{21} (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) \right] 3a_3 R^{-3}. \quad (4.126) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 (1 - 2\pi a_1) - [\langle \kappa L_{\gamma 1} \rangle - \|\kappa L_{\gamma 1}\| (-V_2 + (1 + \chi_{\kappa}^{-1}) a_1 \pi) + \|\kappa_{\gamma}\| (D_1 R^{-1} - F_1 R) R\pi] \beta. \quad (4.127)$$

En forma similar se obtiene una expresión para el único coeficiente efectivo no nulo aportado por el problema local  ${}_2L$ :

$$\bar{\kappa}_{22} = \langle \kappa_{\gamma} \rangle + \|\kappa_{\gamma}\| \, {}_2\Gamma_{01} + \|\kappa_{\gamma}\| \, {}_2\Gamma_{11} \beta,$$

donde

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma_{01} &= -\left((1 + \chi_\kappa^{-1}) a_1 \pi + V_2\right) \\ {}_2\Gamma_{11} &= \mathcal{B}_{11} R \pi. \end{aligned}$$

El coeficiente  $\mathcal{B}_{11}$  está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{11} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} L_{11} \chi_\kappa^{-1} - \widehat{\kappa}_2 \right) R - (1 + \chi_\kappa^{-1}) b_1 R^{-1} \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \widehat{\kappa}_1 + \frac{1}{2} (1 + L_{11} \chi_\kappa^{-1}) \chi_\kappa^{-1} - \widehat{\kappa}_2 (1 + \chi_\kappa^{-1}) \right] a_1 R^{-1} \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} L_{11} - \widehat{\kappa}_1 \right) \chi_\kappa^{-1} - \frac{1}{2} L_{11} \chi_\kappa^{-1} + \widehat{\kappa}_2 (1 + \chi_\kappa^{-1}) \right] 3a_3 R^{-3}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Por lo anterior

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_1 + 2\kappa_1 a_1 \pi + (\kappa_1 - \kappa_2) \mathcal{B}_{11} R \pi \beta. \quad (4.129)$$

El último coeficiente efectivo no nulo, se calcula de (4.123)

$$\bar{\kappa}_{33} = \langle \kappa_{33} \rangle = \kappa_{33}^{(1)} V_1 + \kappa_{33}^{(2)} V_2 = \kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2 = \langle \kappa \rangle, \quad (4.130)$$

que es, nuevamente, el promedio aritmético entre las propiedades de las fases.

Nuevamente es de resaltar la simpleza y la estructura de las fórmulas (4.127), (4.129) y (4.130) pues es fácilmente identificable la contribución de las propiedades físicas de los materiales y las propiedades geométricas del compuesto (incluidas en los únicos coeficientes de las funciones solución a cada problema local involucrados  $a_1$ ,  $a_3$  y  $b_1$ ); además del orden de aproximación ejecutada, que en este caso sólo se muestra la aproximación a orden  $\beta$ . Cuando se toma en cuenta sólo la parte de aproximación a orden  $\beta^0$  se tiene que las fórmulas (4.127) y (4.129) coinciden con las correspondientes al caso particular del estudio en López-López *et al.* (2005), es decir, al caso en el que el eje de simetría material de la fibra y el eje de simetría material de la fibra coinciden con la dirección de las fibras, como era de esperarse.

Se debe notar que los sistemas (4.30) y (4.110), a orden cero y uno en  $\beta$  respectivamente, tienen la misma matriz en el mismo lado izquierdo del sistema:

$$(\chi_\kappa^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{W}),$$

la matriz  $\mathbf{W}$  es simétrica y contiene las sumas de retícula armónicas, correspondientes a las funciones  $\zeta$ . Los vectores  $\mathbf{V}_0$  y  $\mathbf{V}_1$  en (4.30) y (4.110) tienen sólo una componente no nula. La matriz  $\mathbf{U}$  en (4.110) contiene información del contraste de propiedades entre los materiales constituyentes y del desarrollo en potencias de  $\beta$ , de los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . La matriz  $\mathbf{W}'$  en (4.110) también es simétrica, contiene información de las sumas de retícula biarmónicas, correspondientes a las funciones  $\mathcal{Q}(z)$  de Natanzon y sus derivadas (Rodríguez-Ramos *et al.*, 2001). El sistema a orden cero en  $\beta$  fué estudiado en López-López, *et al.* (2005)

Por todo lo anterior los coeficientes  $a_1, a_3, a_5, \dots, b_1, b_3, b_5, \dots$ , para cada problema local, muestran una dependencia sencilla en  $S_k$  (sumas de retícula),  $R$  (radio de la fibra) y  $\chi_k$  (proporcionalidad relativa entre los materiales) y, por lo tanto, también los coeficientes efectivos (4.127) y (4.129).

#### 4.4. OP3

Este es el caso de un material reforzado de fibras con las mismas características de los tres modelos anteriores, sólo que la orientación de los ejes de simetría material de cada constituyente son mutuamente ortogonales y estos perpendiculares a su vez con el eje de las fibras (figura 4.2).

Se supone, sin pérdida de generalidad, que la matriz  $S_1$  tiene su eje de simetría material paralelo al eje  $Y_1$  y las fibras  $S_2$  tienen su eje de simetría material orientado en la dirección de  $Y_2$ , los tensores de permitividad eléctrica tienen la forma

$$\boldsymbol{\kappa}^{(1)}(\mathbf{y}) = \text{diag} \left[ \begin{array}{ccc} \kappa'_1 & \kappa_1 & \kappa_1 \end{array} \right],$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{(2)}(\mathbf{y}) = \text{diag} \left[ \begin{array}{ccc} \kappa_2 & \kappa'_2 & \kappa_2 \end{array} \right].$$

Se definen los parámetros perturbativos  $\alpha$  como:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\kappa'_1}{\kappa_1}, \quad \alpha_2 = 1 - \frac{\kappa_2}{\kappa'_2},$$

por lo que el enunciado de los problemas locales  $pL$  es similar a (4.93), teniendo así que ya no hay necesidad de realizar ningún cálculo.

Por lo tanto: con el modelo planteado en la sección anterior (PP1), es posible analizar los casos PP3, OP2 y OP3 simplemente haciendo  $\alpha_1, \alpha_2 = 0$ , para el primero,  $\alpha_2 = 0$  para el segundo y redefiniendo los  $\alpha$  para el tercero.

#### 4.5. Resultados numéricos

Hasta el momento se han encontrado fórmulas para los coeficientes efectivos de un problema de permitividad eléctrica, de un material que comprende una matriz transversalmente isótropa reforzada de fibras distribuidas en un arreglo periódico cuadrado, cuya longitud característica es mucho menor que aquella del compuesto, también transversalmente isótropas. En el compuesto el eje de simetría material de cada material constituyente no necesariamente es el mismo que la orientación de las fibras.

- Para el modelo PP3, en donde la orientación de los ejes de simetría material coinciden con el eje de orientación de las fibras, se tiene

$$\bar{\kappa}_{11} = \kappa_1 (1 - 2\pi a_1),$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \kappa_1 (1 + 2\pi a_1),$$

$$\bar{\kappa}_{33} = \kappa'_1 V_1 + \kappa'_2 V_2,$$

con  $a_1$  y  ${}_2a_1$  elementos del vector solución de los sistemas (4.30) y (4.35).

- Para el modelo OP2

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_{11} &= \kappa_1 (1 - 2\pi a_1) + \alpha [\kappa_1 (\pi (1 + \chi_\kappa^{-1}) a_1 - 1) - \|\kappa\| \mathcal{A}_1], \\ \bar{\kappa}_{22} &= \kappa_1 (1 + 2\pi {}_2a_1) + \alpha \left[ \frac{1}{2} \kappa_1 R + {}_2N_1 {}_2a_1 R^{-1} + {}_2N_3 {}_2a_3 R^{-3} \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa_1 \pi {}_2b_1 R^{-1} \right] R\pi, \\ \bar{\kappa}_{33} &= \kappa_1 V_1 + \kappa'_2 V_2,\end{aligned}$$

con  $\mathcal{A}_1$ ,  ${}_2N_1$ ,  ${}_2N_3$  dados en (4.89), (4.90) y (4.91), respectivamente.

- Finalmente, para el modelo PP1

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_{11} &= \kappa_1 (1 - 2\pi a_1) - (\langle \kappa_\gamma L_{\gamma 1} \rangle - \|\kappa_\gamma L_{\gamma 1}\| {}_1\Gamma_{02} + \|\kappa_\gamma\| {}_1\Gamma_{12}) \beta, \\ \bar{\kappa}_{22} &= \kappa_1 + 2\kappa_1 a_1 \pi + (\kappa_1 - \kappa_2) \mathcal{B}_{11} R\pi \beta, \\ \bar{\kappa}_{33} &= \kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2;\end{aligned}$$

con  ${}_1\Gamma_{02}$ ,  ${}_1\Gamma_{12}$  y  $\mathcal{B}_{11}$  dados en la sección anterior.

Con el propósito de realizar un análisis de estas fórmulas y de evaluar su repercusión se define el parámetro

$$z_\kappa = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad (4.131)$$

entonces

$$\chi_k = \frac{1 - z_\kappa}{1 + z_\kappa}, \text{ y por tanto } z_\kappa = \frac{1 - \chi_\kappa}{1 + \chi_\kappa}, \quad (4.132)$$

y por definición de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$

$$\kappa'_1 = \kappa_1 (1 - \alpha_1), \kappa'_2 = \kappa_2 (1 - \alpha_2). \quad (4.133)$$

**Observación.** Para analizar el caso del modelo OP2 el parámetro  $\alpha_2 = 0$ , las observaciones hechas aquí son igualmente válidas tomando este caso. ■

Tomando en cuenta las relaciones (4.131)–(4.133), al normalizar con respecto al coeficiente  $\kappa_{11}^{(1)}$ , i.e.  $\kappa_1$ , se tiene que

$$\kappa_1 = 1, \quad (4.134)$$

$$\kappa_2 = \frac{1 - \chi_\kappa}{1 + \chi_\kappa}, \quad (4.135)$$

$$\kappa'_1 = (1 - \alpha_1), \quad (4.136)$$

$$\kappa'_2 = \kappa_2 (1 - \alpha_2). \quad (4.137)$$

Con las identidades anteriores se establece una dependencia de los coeficientes efectivos (4.127) y (4.129) en:  $R$  (el radio de la fibra),  $\chi_\kappa$  (contraste relativo) y  $\alpha_\gamma$  (**tamaño relativo del coeficiente  $\kappa_{22}^{(\gamma)}$  con respecto al coeficiente  $\kappa_{11}^{(\gamma)}$** ) con  $\gamma = 1, 2$ .

Para los 258 materiales reportados en las tablas de Landolt-Börnstein (1979), se calcularon, numéricamente, todos los “ $\chi_\kappa$ ” posibles, i.e. se hicieron todas las combinaciones posibles entre dichos materiales, además para cada material se calculó el “ $\alpha$ ” correspondiente tal como está definido en (4.41). Los resultados en forma de histograma se muestran en la figura 4.3, donde debe notarse que los  $\chi_\kappa$  están distribuidos en todo el intervalo

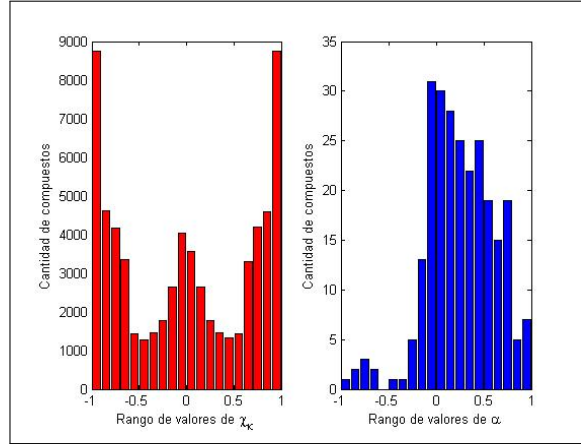


Figura 4.3: Se ilustra: **a)** La distribución de los valores de  $\chi_\kappa$  en su intervalo de definición, por cada combinación de dos materiales (fibra y matriz) se tiene un valor de  $\chi_\kappa$ . **b)** La distribución de los valores de  $\alpha_\gamma$ , nótese que sólo hay 258 valores posibles pues se reportan sólo esos, además se muestran sólo 254, pues son los que se encuentran en el intervalo  $(-1, 1)$ .

$(-1, 1)$  y que la mayoría de las incidencias de los valores de  $\alpha$  se encuentran en el intervalo  $(-0.1, 0.5)$ .

**Observación.** Para analizar el caso OP3, es decir cuando se analiza el caso en el que las orientaciones de los ejes de simetría material de los materiales constituyentes son ortogonales entre sí y perpendiculares a la dirección de las fibras, es necesario redefinir a  $\alpha$  de  $\alpha = 1 - \kappa'_1 / \kappa_1$ , a  $\alpha = 1 - \kappa_1 / \kappa'_1$  por lo que el intervalo en que se encuentran dichos  $\alpha$  se convierte en  $(-0.5, 0.1)$ .

En el intervalo  $(-0.5, 0.5)$  se cubre al 71.24 % de los datos reportados. ■

El radio de la fibra puede ser desde cero hasta el valor de percolación, es decir cuando se tocan las fibras adyacentes; es por ello que los intervalos de importancia para los estudios son

$$\chi_\kappa \in (-1, 1), \alpha \in (-0.5, 0.5), R \in [0, \pi/4].$$

Se hizo un estudio del comportamiento de los coeficientes efectivos obtenidos por medio del Método de Homogeneización Asintótica (MHA), de donde se obtuvieron las fórmulas para cada modelo (PP3, OP2 y PP1). Dichos resultados se compararon con un cálculo de dichos coeficientes, pero en donde se resuelve la ecuación de cada problema local por medio del Método de Elemento Finito (MEF) usando el software científico *Femlab*<sup>TM</sup> 3.2, con la finalidad de poner a prueba la efectividad del nuevo método propuesto

en este trabajo y estimar su rango de validez. Dicho *software* usa un elemento finito cuadrático de Lagrange de orden dos, el número de elementos para cada cálculo varía de 900 a 1400, con grados de libertad desde 1900 hasta 7600, aproximadamente, dependiendo del tamaño de la fibra.

Las fórmulas “exactas” (MHA) fueron programadas en Matlab™ 6.5 tomando  $\chi_\kappa$  en el conjunto  $\{-0.95, -0.85, -0.75, \dots, 0.85, 0.95\}$  y moviendo los demás parámetros involucrados ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $R$ ) en los intervalos señalados arriba, en intervalos regulares con saltos de tamaño 0.1, i.e.  $\alpha \in \{-0.5, -0.4, \dots, 0.5\}$  y  $R \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.7, \pi/4\}$ .

El cálculo en MEF toma en promedio dos horas para cada  $\chi_\kappa$ , en una computadora portátil con un procesador intel centrino a 1.60GHz con 768 MB en RAM, mientras que el mismo cálculo vía MHA era de apenas tres segundos.

Para realizar el cálculo numérico correspondiente a MHA se truncaron los sistemas infinitos (4.30), (4.84) y (4.110) (también los correspondientes al problema local  ${}_2L$ ) a un sistema de  $5 \times 5$  que es más que suficiente para tener un error relativo en la solución menor a  $1 \times 10^{-12}$ , lo anterior debido a la rápida convergencia de las funciones elípticas involucradas.

#### 4.5.1. Resultados numéricos para el modelo PP3

Los resultados de la comparación MEF *vs.* MHA difieren menos del 3 % para este modelo, tal como se muestra en la figura 4.4, para cualquier valor de  $\chi_\kappa$ , excepto para el valor de  $\chi_\kappa = -0.85$  cuando  $R = 0.5$  (valor de percolación i.e.  $V_2 = 0.78540$ ) en donde la diferencia porcentual es de 13.5 % pero sólo lo es en apariencia pues basta con aumentar el tamaño del sistema (4.30) para lograr que la aproximación mejore, por ejemplo al tamaño a un sistema de  $9 \times 9$  (no ilustrado).

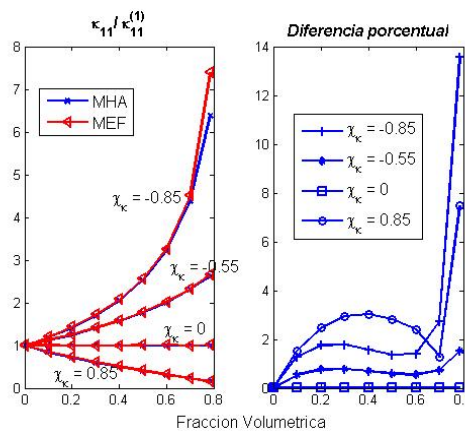


Figura 4.4: Coeficiente efectivo  $\bar{\kappa}_{11}$  calculado por MHA y MEF, se debe notar que la diferencia porcentual es de menos del 3 %.

Como era de esperarse, el material compuesto es transversalmente isótropo (por ello

sólo se muestra el resultado para  $\bar{\kappa}_{11}$ ). Los valores de  $\chi_\kappa$  graficados corresponden, por ejemplo, a una combinación de materiales como la siguiente (los valores son tomados de las tablas de Landolt-Börnstein (1979), pp331–349):

$\chi_\kappa$	Fibra	Matriz
-0.85	PZT-6B	Te
-0.55	$K_3Li_2Nb_5O_{15}$	PZT-8
0	-	-
0.85	$Pb(Ti_{0.52}Zr_{0.48})O_3$	$KH_{1.4}D_{0.60}PO_4$

El valor  $\chi_\kappa = 0$  se alcanza cuando tanto fibras como matriz están formados por el mismo material. Es de resaltar que los resultados numéricos corresponden con los esperados, ya que al estar constituidos por el mismo material y estar normalizados con respecto a la matriz, se espera que el coeficiente efectivo tome el valor  $\bar{\kappa}_{11} = 1$ . Los demás valores de  $\chi_\kappa$  cubren en forma de abanico el área delimitada por las curvas  $\chi_\kappa = -0.85$  y  $\chi_\kappa = 0.85$  (no mostrados).

El hecho de que se tengan esas diferencias porcentuales a tan altos contrastes ( $\chi_\kappa = \pm 0.85$ ), confirma que las fórmulas analíticas vía MHA son tan eficientes como calcularlas vía MEF, no obstante, significativamente más rápidas y fáciles de programar; las fórmulas obtenidas son notoriamente simples y estructuralmente sencillas.

De (4.132) y (4.131)

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{1 - \chi_\kappa}{1 + \chi_\kappa},$$

se tiene

$$\kappa_2 = \frac{1 - \chi_\kappa}{1 + \chi_\kappa} \kappa_1. \quad (4.138)$$

Entonces los límites permisibles para  $\chi_\kappa$  se tiene que

$$\frac{3}{37} \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \frac{37}{3} \kappa_1.$$

Por lo que el rango de materiales a los cuales se les puede aplicar este método es muy amplio, siempre y cuando el radio de las fibras no sea el valor de percolación. En tal caso, se necesita aumentar el tamaño del sistema truncado (4.30) cuando menos al doble.

#### 4.5.2. Resultados numéricos para el modelo OP2

Un análisis similar al anterior revela que MHA difiere en menos del 10 % cuando los parámetros involucrados ( $\chi_\kappa$ ,  $\alpha$  y  $R$ ) se encuentra en los intervalos

$$\begin{aligned} 0 &\leq R \leq \frac{\pi}{4}, \\ -\frac{1}{2} &\leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{5} &\leq \chi_\kappa \leq \frac{7}{20}; \end{aligned}$$



es decir, cuando se cumple

$$\begin{aligned} 0 \leq V_2 &\leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}\kappa_1 &\leq \kappa'_1 \leq \frac{1}{2}\kappa_1, \\ \frac{13}{27}\kappa_1 &\leq \kappa_2 \leq \frac{3}{2}\kappa_1. \end{aligned}$$

La figura 4.5 muestra las gráficas del coeficiente efectivo  $\bar{\kappa}_{11}$ , cuando  $\chi_\kappa = 7/20$ , para

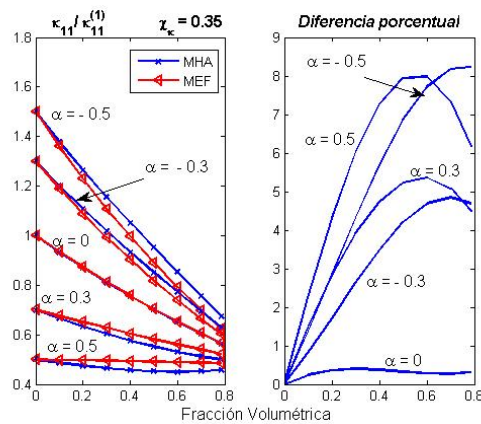


Figura 4.5: Comportamiento del coeficiente efectivo  $\bar{\kappa}_{11}$  así como la diferencia porcentual entre MHA y MEF para  $\chi_\kappa = 0.35$  y  $\alpha \in [-0.5, 0.5]$ .

distintos valores de  $\alpha$ . El valor de  $\chi_\kappa$  graficado es el máximo para el cual la diferencia porcentual entre MHA y MEF es menor a 10%.

La figura 4.6 muestra el valor mínimo de  $\chi_\kappa$  para el cual la diferencia porcentual entre MHA y MEF es menor a 10%.

Por lo anterior se tiene que, para que la diferencia porcentual entre MHA y MEF sea menor a 10%, se debe tener:

$$\frac{13}{27}\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \frac{3}{2}\kappa_1$$

y

$$\frac{1}{2}\kappa_1 \leq \kappa'_1 \leq \frac{3}{2}\kappa_1.$$

La figura 4.7 muestra el comportamiento del coeficiente efectivo  $\bar{\kappa}_{22}$  y la diferencia porcentual entre MHA y MEF, cerca del valor de percolación; la diferencia porcentual aumenta. Este comportamiento es atribuible a que el sistema  $(\chi_\kappa^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{W})\mathbf{a} = \mathbf{v}$  necesita más términos para converger. Un comportamiento similar muestran el coeficiente y la diferencia porcentual para  $\chi_\kappa = -0.2$  (por eso no se ilustra).

En general la aproximación  $\alpha = 0$  es mucho mejor para el coeficiente  $\bar{\kappa}_{22}$  pues la perturbación se está considerando únicamente en una dirección, sobre la coordenada  $y_1$ . La

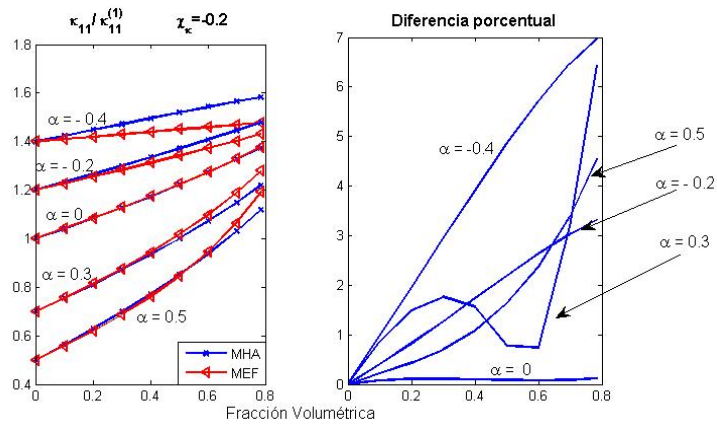


Figura 4.6: Valor mínimo para el cual la diferencia porcentual de MHA y MEF es menor a 10 %.

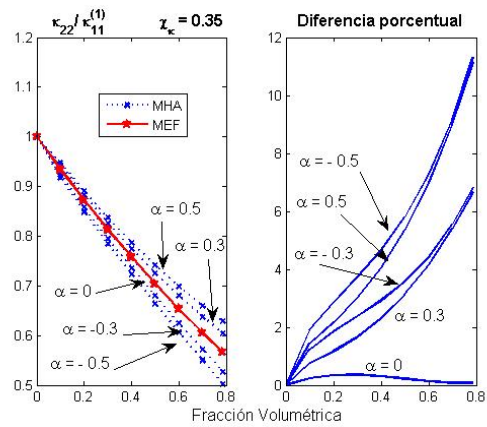


Figura 4.7: Coeficiente efectivo  $\bar{\kappa}_{22}$  para  $\chi_\kappa = 0.35$  y varios  $\alpha$ .

figura 4.8 muestra la diferencia porcentual para los diferentes valores de  $\alpha$  considerados y para  $\chi_\kappa = 0.35$ , sin embargo, se tienen buenas aproximaciones (diferencia porcentual

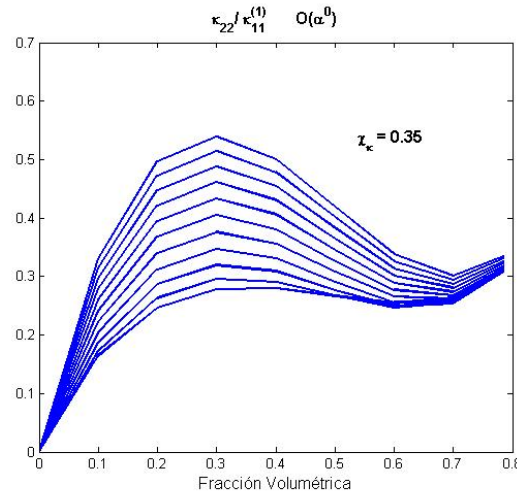


Figura 4.8: Diferencia porcentual entre MHA y MEF para el coeficiente  $\bar{\kappa}_{22}$ ,  $O(\alpha^0)$ ;  $\chi_\kappa = 0.35$

menor al 5%) para cualquier cualquier valor de  $\chi_\kappa$  y  $\alpha$  considerados; la diferencia porcentual para el valor de percolación se dispara hasta el 50% hecho atribuible a que la convergencia de MHA para valores de percolación es más lenta.

#### 4.5.3. Resultados numéricos para el modelo PPI

Numéricamente se encontró que para  $\chi_\kappa$  en el intervalo  $[-0.2, 0.2]$  y  $\alpha_1, \alpha_2 \in [-0.5, 0.5]$  la diferencia porcentual entre MHA y MEF en el cálculo del coeficiente  $\bar{\kappa}_{11}$  es de menos del 10%, siendo menor del 5% para valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en el intervalo  $[-0.3, 0.3]$  y para cualquier tamaño de la fibra. Nuevamente la diferencia porcentual es mayor cerca del valor de percolación.

La figura 4.9 muestra un cálculo de los coeficientes efectivos  $\kappa_{11}$  y  $\kappa_{22}$ , en el caso en que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$  y  $\chi_\kappa = 0.2$ , i.e.

$$\kappa'_1 = \frac{1}{2}\kappa_1, \kappa'_2 = \frac{1}{2}\kappa_2, \kappa_2 = \frac{2}{3}\kappa_1. \quad (4.139)$$

Se puede apreciar que la diferencia porcentual entre los dos métodos es de menos del 10% en el caso del coeficiente  $\kappa_{11}$  y menos del 3% para el coeficiente  $\kappa_{22}$ , como es de esperarse, la propiedad efectiva decrece monótonamente cuando la fracción volumétrica incrementa; la diferencia porcentual en el cálculo del coeficiente  $\kappa_{22}$  es menor siempre pues la perturbación se considera sobre el eje 1.

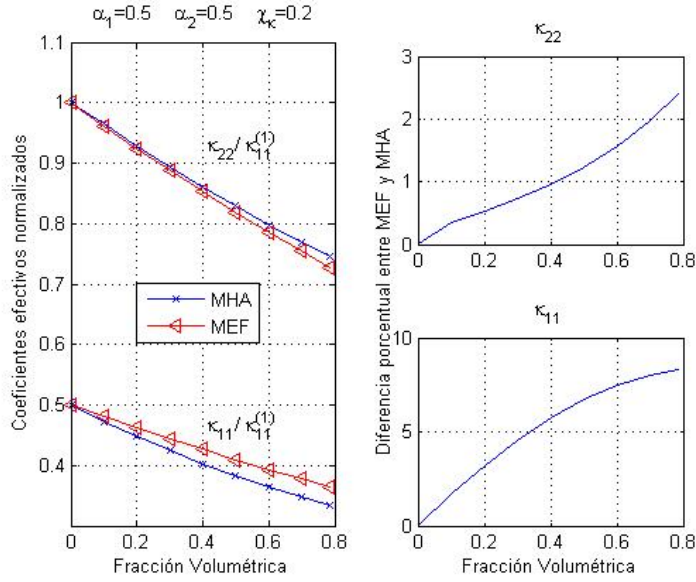


Figura 4.9: Comparación de resultados obtenidos vía MHA y MEF.

La figura 4.10 muestra un cálculo de los coeficientes efectivos  $\kappa_{11}$  y  $\kappa_{22}$ , en el caso en que  $\alpha_1 = 0.3$ ,  $\alpha_2 = 0.5$  y  $\chi_\kappa = 0.1$ , i.e.

$$\kappa'_1 = \frac{7}{10}\kappa_1, \kappa'_2 = \frac{1}{2}\kappa_2, \kappa_2 = \frac{9}{11}\kappa_1, \quad (4.140)$$

la diferencia porcentual mejora al tomar valores menores de  $\alpha$  y  $\chi_\kappa$ .

## 4.6. Conclusiones

Debido a que las componentes no nulas del tensor de conductividad del compuesto están en la diagonal principal, éste pertenece al sistema cristalográfico trigonal.

Se trabajó con una ecuación diferencial elíptica con coeficientes periódicos que varían rápidamente (ec. (3.28))

Se obtuvieron fórmulas analíticas cerradas, por medio del método de homogeneización asintótica y un método de perturbación material, de los coeficientes efectivos de los problemas locales (3.32).

Se hizo una comparación numérica entre un cálculo por medio del Método de Elemento Finito y de las fórmulas obtenidas para los coeficientes efectivos y se concluye que para tener una diferencia porcentual menor al 10% entre los dos métodos la proporción entre los coeficientes  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  deben estar en el intervalo  $[2/3, 3/2]$ , i.e.  $\kappa_2$  puede ser al menos  $2\kappa_1/3$  y a lo más  $3\kappa_1/2$ . La anisotropía en la componente "11" con respecto a la

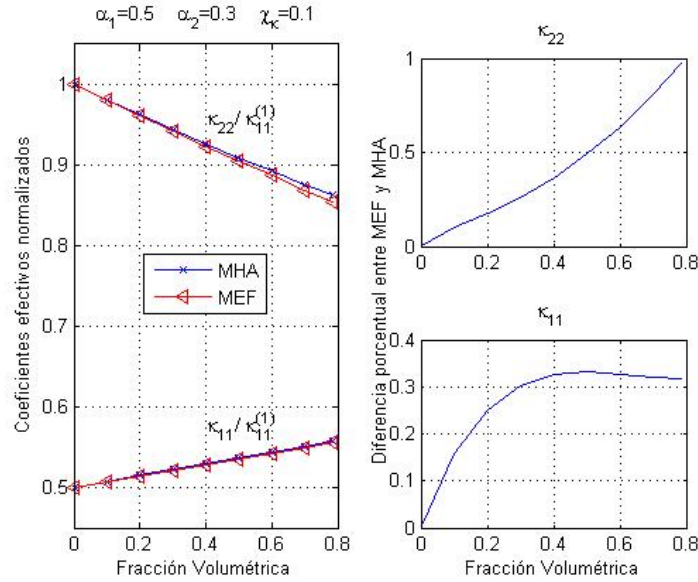


Figura 4.10: Comparación de los métodos MHA y MEF para  $\chi_\kappa = 0.1$

componente en “22” en cualquiera de los dos materiales debe estar en  $[1/2, 3/2]$ , i.e.  $\kappa_1'$  ( $\kappa_2'$ ) puede ser al menos la mitad de  $\kappa_1$  ( $\kappa_2$ ) y a lo más una y media veces  $\kappa_1$  ( $\kappa_2$ ).

Para el modelo PP3, un rango adecuado de los parámetros involucrados para tener una diferencia porcentual menor al 10% con respecto de MEF es

$$\frac{3}{37}\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \frac{37}{3}\kappa_1,$$

$$0 \leq R < \frac{\pi}{4}.$$

Cuando  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  en los problemas locales (4.93), se tiene una ecuación de Laplace en cada material con condiciones de salto en la interfase y de doble periodicidad, el cual ya ha sido resuelto con anterioridad (sección 4.1), además como ya se dijo, es un caso particular del estudio reportado en López-López *et al.*, 2005.

Cuando  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  se tiene el caso en el que el plano de isotropía de la fibra es ortogonal a la dirección de las fibras y por lo tanto se trata de un caso particular del presente estudio y su análisis puede ser encontrado en la sección 4.2.

Cuando  $\alpha_2 \neq 0$ ,  $\alpha_1 = 0$  se trata de un caso análogo al anterior sólo que ahora la dirección normal al plano de isotropía de la fibras es ortogonal a la de la dirección y la dirección de la normal al plano de isotropía de la matriz es la misma que la de las fibras, otra vez es un caso particular del presente estudio.

Cuando las direcciones normales al plano de isotropía de los materiales son ortogonales, pero ninguna de ellas paralela a la dirección de las fibras, redefiniendo “ $\alpha$ ” convenientemente, el presente artículo es adecuado para su análisis, por ejemplo para el caso

representado en la figura 4.2 se pueden definir

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\kappa'_1}{\kappa_1}, \alpha_2 = 1 - \frac{\kappa_2}{\kappa'_2}, \quad (4.141)$$

para seguir considerando a la componente “11” como una perturbación de la componente “22” en el tensor de conductividad dieléctrica entonces el problema puede ser tratado con el método desarrollado en esta sección.

Los experimentos numéricos sugieren que las fórmulas analíticas, que fueron obtenidas bajo la suposición de que la anisotropía  $\alpha$  fuera pequeña, puede usarse con valores de alfa tan grandes como en el intervalo  $-0.5 \leq \alpha \leq 0.5$ , con un error porcentual menor al 10 %. Son además muy rápidas de calcular comparadas con el MEF y también abarcan el 75 % de las parejas de permitividades de las tablas de Landolt-Börnstein (1979).

## Capítulo 5

# Modelo Piezoeléctrico

El hueso es una forma sorprendente de materia, es una combinación de materia viva e inerte, de tejido blando y duro, de sólidos y fluidos. Es flexible pero lo suficientemente rígido para ser usado como soporte, además es una estructura dinámica que cambia su forma en función de las cargas recibidas. Más sorprendente aún es el hecho de que en la década de 1950 se haya descubierto que el hueso exhibe una propiedad hasta entonces pensada como exclusiva de algunos cristales, la piezoelectricidad<sup>1</sup> (Fukada y Yasuda, 1957).

Si un esfuerzo es aplicado, se genera una polarización eléctrica cuya magnitud es proporcional al esfuerzo aplicado (efecto directo); cuando un campo eléctrico es aplicado a través de un material piezoeléctrico, su forma cambia ligeramente en una proporción directa a la magnitud del campo aplicado (efecto inverso). Además la constante de proporcionalidad que conecta al campo eléctrico aplicado y la deformación tanto en el efecto directo como en el inverso es la misma (Nye, 1957).

Debido al efecto piezoeléctrico en el hueso se han establecido nuevas teorías en relación con la regeneración, implantes y andamios de hueso,

A raíz del descubrimiento de la piezoelectricidad en el hueso se han establecido las propiedades piezoeléctricas del hueso seco (Fukada y Yasuda, 1957, Anderson y Eriksson, 1970). Debido a que la colágena en los tendones es piezoeléctrica y la hidroxiapatita no, y en vista de las similitudes entre colágena de hueso y de tendón, las propiedades piezoeléctricas en hueso seco se deben probablemente a su contenido de colágena. En hueso seco sólo se generan voltajes, como en la colágena, cuando hay un esfuerzo cortante en la dirección longitudinal del material (la colágena pertenece al grupo cristalográfico hexagonal clase 622). Cómo las fibras de colágena en hueso cortical están alineadas con una cierta dirección, se puede decir que el efecto piezoeléctrico en hueso seco es debido a las fibras de colágena, razón por la cuál se propone, para el estudio del fenómeno piezoeléctrico en hueso, el modelo de un material compuesto reforzado de fibras.

La estructura interna del hueso cortical está lejos de ser periódica, sin embargo, es bastante regular. Así, como primer paso para su análisis, se supone que el material de es-

---

<sup>1</sup>Del griego *πιέζειν*, comprimir, y *electricidad*

tudio es un compuesto reforzado de fibras con sección transversal circular distribuidas en un arreglo periódico cuadrado (aunque el análisis hecho en el presente trabajo puede ser generalizado para cualquier tipo de arreglo) y que los materiales constituyentes pertenecen a el sistema cristalográfico hexagonal clase 622.

### 5.1. Modelo PP3

Se considera un compuesto que consiste de un arreglo periódico de fibras cilíndricas circulares dentro de una matriz homogénea. Se supone que los cilindros son infinitamente largos y que las propiedades electroelásticas de cada una de las fases pertenece al grupo cristalográfico hexagonal clase 622. Además, los ejes materiales y geométricos son paralelos al eje 3 del sistema coordenado local (de aquí la notación PP3).

El presente capítulo contiene una generalización (reportada en López-López *et al.*, 2005) del estudio realizado en el capítulo anterior. Se supone que las componentes del compuesto responden al fenómeno clásico de piezoelectricidad lineal, por lo que se cumplen relaciones constitutivas (Ikeda, 1990 p10)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (5.1a)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^t E_k, \quad (5.1b)$$

en las ecuaciones anteriores y en lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, se usa la notación suma sobre los índices latinos repetidos  $i$ ,  $j$ ,  $k$  y  $l$ , los cuales toman valores desde 1 hasta 3. Aquí el tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  y el vector de desplazamiento eléctrico  $D_i$  están linealmente relacionados con el tensor de deformación  $S_{kl}$  y con el vector de campo eléctrico  $E_i$ . Las propiedades del material están dadas por el tensor de módulos elásticos de cuarto orden medido en un campo eléctrico constante (indicado por el superíndice  $E$ , en lo siguiente omitido)  $C_{ijkl}^E$ , el tensor piezoeléctrico de tercer orden  $e_{ijk}$ , además el tensor de permitividad eléctrica de segundo orden  $\epsilon_{ij}^t$  está medido bajo una deformación constante (indicado por el superíndice  $t$ , omitido en lo sucesivo). En lo que sigue, el superíndice "(1)" y el superíndice "(2)" serán usados para referirse a la propiedad (o función) en el medio  $S_1$  (matriz) ó  $S_2$  (fibras), respectivamente. La notación usada en los capítulos anteriores continua siendo vigente,  $S$  es la celda periódica unidad,  $\mathbf{x}$  la variable lenta, y la variable local (rápida) relacionadas por medio del parámetro pequeño

$$\epsilon = \frac{l}{L}$$

donde  $l$  y  $L$  son las longitudes características de la celda y del compuesto, respectivamente. Se supone además que el desplazamiento, el potencial eléctrico, la tracción y el desplazamiento eléctrico normal son continuos en la interfase, denotada por  $\Gamma$ .

Las ecuaciones de gobierno para este tipo de materiales son las ecuaciones de movimiento de Cauchy<sup>2</sup> con aceleración igual a cero, suponiendo que no existen fuerzas

<sup>2</sup>También conocidas como ecuaciones de Navier para elasticidad lineal



externas:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (5.2)$$

en términos del esfuerzo  $\sigma_{ij}$  y las ecuaciones cuasiestáticas de Maxwell

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.3a)$$

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (5.3b)$$

donde  $\varphi$  es el potencial eléctrico (Auld, 1973).

Sustituyendo las relaciones constitutivas en las ecuaciones de Navier y cuasiestáticas de Maxwell, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_l} + e_{kij}(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_k} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma, \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( e_{ikl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_l} - \epsilon_{ik}(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_k} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Gamma, \quad (5.4b)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es la región ocupada por el compuesto y  $\Gamma$  es la interfase que divide la matriz de la fibras. En base a las suposiciones hechas sobre la tracción,  $t_i$ , y el potencial  $\varphi_0$ , prescritos en la frontera y la continuidad del desplazamiento  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$  y del desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)$  sobre la frontera  $\partial\Omega$  se establece las siguiente condiciones de frontera

$$u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_0, \quad (5.5a)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_0, \quad \text{en } \partial\Omega_1, \quad (5.5b)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_j = t_i, \quad \text{en } \partial\Omega_2, \quad (5.5c)$$

$$D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_i = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_3. \quad (5.5d)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  es el vector unidad normal a la frontera  $\partial\Omega$  que está dividida de tal forma que

$$\partial\Omega = \overline{\partial\Omega_0} \cup \overline{\partial\Omega_1} = \overline{\partial\Omega_2} \cup \overline{\partial\Omega_3}$$

y

$$\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_3 = \emptyset.$$

El problema (5.4) es una ecuación elíptica con coeficientes periódicos que varían rápidamente por lo que no es posible resolverla por métodos numéricos, sin embargo, para solucionar estas ecuaciones, es posible aplicar el Método de Homogeneización Asintótica (MHA) que fué introducido en la sección 3.2. Dicho problema se desacopla por la forma que adoptan las relaciones constitutivas (5.1). En una situación bidimensional, como la geometría que se está considerando. Es bastante conocido el hecho de que las ecuaciones elásticas, i.e. sin considerar el acoplamiento piezoeléctrico, para un sólido isótropo se desacopla en dos sistemas independientes bajo condiciones de frontera apropiadas

en estados de deformación planos y antiplanos. Una situación similar aparece cuando se considera el efecto piezoeléctrico, Benveniste (1995) demostró que bajo ciertas condiciones de carga en la frontera de sólidos pertenecientes al grupo cristalográfico clase 2, las ecuaciones electroelásticas también se desacoplan en dos problemas. La misma situación se presenta para sólidos con simetría hexagonal. La clase 6mm fué estudiada en Bravo-Castillero *et al.* (2001) mientras que la clase 622 se estudia aquí.

### 5.1.1. Método de homogeneización asintótica

Como solución al problema elíptico con coeficientes periódicos que varían rápidamente (5.4), con condiciones de interfase (5.5) y doblemente periódico, se propone el *ansatz*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

para el desplazamiento y el potencial eléctrico, respectivamente.

Siguiendo el MHA, de manera análoga al problema dieléctrico, a orden  $\varepsilon^{-2}$ , se encuentra que las funciones  $\mathbf{u}^{(0)}$  y  $\varphi_0$  no dependen de la variable rápida  $\mathbf{y}$ , es decir

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(0)} &= \mathbf{u}^{(0)}(x), \\ \varphi_0 &= \varphi_0(x).\end{aligned}$$

A orden  $(\varepsilon^{-1})$  se tiene una solución tipo producto para  $\mathbf{u}^{(1)}$  y

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= {}_{pq}\mathbf{M}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_q}(\mathbf{x}) + {}_p\mathbf{P}(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_p}(\mathbf{x}), \\ \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= {}_{pq}N(\mathbf{y}) \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_q}(\mathbf{x}) + {}_pQ(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_p}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

En analogía al caso puramente dieléctrico las funciones con pre-índice “ $pq$ ” ( ${}_{pq}\mathbf{M}(\mathbf{y})$  y  ${}_{pq}N(\mathbf{y})$ ) y las funciones con preíndice “ $p$ ” ( ${}_p\mathbf{P}(\mathbf{y})$  y  ${}_pQ(\mathbf{y})$ ) son las únicas soluciones doblemente periódicas de los problemas locales  ${}_{pq}L$  y  ${}_pL$ , definidos sobre la celda unidad periódica  $S = S_1 \cup S_2$  (ver figura 3.4).

Los problemas  ${}_{pq}L$  tienen la forma

$${}_{pq}\sigma_{i\delta, \delta}^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (5.6a)$$

$${}_{pq}D_{\delta, \delta}^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (5.6b)$$

$$\|{}_{pq}M_i\| = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.6c)$$

$$\|{}_{pq}N\| = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.6d)$$

$$\|{}_{pq}\sigma_{i\delta} n_\delta\| = -\|C_{i\delta pq}\| n_\delta \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.6e)$$

$$\|{}_{pq}D_\delta n_\delta\| = -\|e_{\delta pq}\| n_\delta \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5.6f)$$

donde las relaciones constitutivas locales se definen, para  $\gamma = 1, 2$  como:

$${}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\gamma)} = C_{i\delta k\lambda}^{(\gamma)} {}_{pq}M_{k,\lambda}^{(\gamma)} + e_{\lambda i\delta}^{(\gamma)} {}_{pq}N_{,\lambda}^{(\gamma)}, \quad (5.7a)$$

$${}_{pq}D_{\delta}^{(\gamma)} = e_{\delta k\lambda}^{(\gamma)} {}_{pq}M_{k,\lambda}^{(\gamma)} - \epsilon_{\delta\lambda}^{(\gamma)} {}_{pq}N_{,\lambda}^{(\gamma)}. \quad (5.7b)$$

En las ecuaciones (5.6) se ha usado la misma notación que en el capítulo anterior para denotar contrastes y continua vigente la convención de los índices repetidos, se emplea la notación suma, los subíndice latinos toman valores desde 1 hasta 3. Sobre los índices griegos, que toman valores de 1 y 2 solamente, no debe asumirse dicha notación. La notación de coma es usada para denotar la derivada con respecto a  $y_i$ , e.g.  $D_{1,2} = \partial D_1 / \partial y_2$ . Con el propósito de garantizar unicidad de la solución se supone que

$$\langle {}_{pq}M_i \rangle = \int_S {}_{pq}M_i \, d\mathbf{y} = 0, \quad \langle {}_{pq}N \rangle = \int_S {}_{pq}N \, d\mathbf{y} = 0,$$

donde se ha considerado que la celda es unitaria, es decir:  $|S| = 1$ .

Los  ${}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\gamma)}$  y  ${}_{pq}D_{\delta}^{(\gamma)}$  son el ideltaésimo y el deltaésimo componente del tensor de esfuerzo y del vector de desplazamiento eléctrico, asociados con el desplazamiento  ${}_{pq}\mathbf{M}^{(\gamma)}$  y el potencial  ${}_{pq}N^{(\gamma)}$ , respectivamente. Por tratarse de un problema bidimensional y por el tipo de materiales considerados para el compuesto (de simetría hexagonal clase 622) los otros elementos del tensor de esfuerzo y del vector de desplazamiento eléctrico están dados por

$${}_{pq}\sigma_{33}^{(\gamma)} = C_{3311}^{(\gamma)} {}_{pq}M_{\alpha,\alpha}^{(\gamma)}, \quad (5.8a)$$

$${}_{pq}D_3^{(\gamma)} = e_{311}^{(\gamma)} {}_{pq}M_{\alpha,\alpha}^{(\gamma)}. \quad (5.8b)$$

Se debe notar que algunos problemas locales  ${}_{pq}L$  pueden ser homogéneos cuando el lado derecho de las ecuaciones (5.6) es nulo; debido a la forma de los coeficientes de propiedades materiales (elásticos, piezoeléctricos y dieléctricos) y a la simetría entre  $p$  y  $q$ , se reduce nuevamente el número de problemas locales a resolver:  $pp$ , 23, 13, 12. Los problemas  $pp$  y 12 son problemas en el plano transversal a la dirección de las fibras y son análogos a los que fueron resueltos en Guinovart-Díaz *et al.* (2001) para el caso de una simetría hexagonal y en Rodríguez-Ramos *et al.* (2001) para el caso de una simetría cuadrada. De acuerdo con las observaciones anteriores, para los problemas locales  ${}_{pp}L$ , no debe considerarse suma sobre el índice  $p$ , se tiene que las funciones incógnitas son  ${}_{pp}M_1$  y  ${}_{pp}M_2$ , mientras que las funciones idénticamente nulas son  ${}_{pp}M_3$  y  ${}_{pp}N$ , esta información se encuentra resumida en la tabla 5.1.

Problema local	Funciones Incógnita	Funciones Idénticamente Nulas
$ppL$	$ppM_1, ppM_2$	$ppM_3, ppN$
$12L$	$12M_1, 12M_2$	$12M_3, 12N$
$13L$	$13M_3, 13N$	$13M_1, 13M_2$
$23L$	$23M_3, 23N$	$23M_1, 23M_2$

Cuadro 5.1: Funciones incógnita e idénticamente nulas en cada problema local  $pqL$ 

Los problemas  $pL$  tienen el siguiente enunciado:

$$\begin{aligned}
{}_p\sigma_{i\delta,\delta}^{(\gamma)} &= 0 && \text{en } S_\gamma, \\
{}_pD_{\delta,\delta}^{(\gamma)} &= 0 && \text{en } S_\gamma, \\
\|{}_pP_i^{(\gamma)}\| &= 0 && \text{sobre } \Gamma, \\
\|{}_pQ^{(\gamma)}\| &= 0 && \text{sobre } \Gamma, \\
\|{}_p\sigma_{i\delta}^{(\gamma)} n_\delta\| &= -\|e_{pi\delta}^{(\gamma)}\| n_\delta && \text{sobre } \Gamma, \\
\|{}_pD_\delta^{(\gamma)} n_\delta\| &= \|\epsilon_{p\delta}^{(\gamma)}\| n_\delta && \text{sobre } \Gamma,
\end{aligned}$$

donde las relaciones locales constitutivas están dadas, en términos de los desplazamientos y potenciales en la celda, por

$$\begin{aligned}
{}_p\sigma_{i\delta}^{(\gamma)} &= C_{i\delta k\lambda}^{(\gamma)} {}_pP_{k,\lambda}^{(\gamma)} + e_{\lambda i\delta}^{(\gamma)} {}_pQ_{,\lambda}^{(\gamma)}, \\
{}_pD_\delta^{(\gamma)} &= e_{\delta k\lambda}^{(\gamma)} {}_pP_{k,\lambda}^{(\gamma)} - \epsilon_{\delta\lambda}^{(\gamma)} {}_pQ_{,\lambda}^{(\gamma)}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Del mismo modo que en (5.8), para los problemas  $pL$ , se tiene:

$${}_p\sigma_{33}^{(\gamma)} = C_{3311}^{(\gamma)} {}_pP_{\alpha,\alpha}^{(\gamma)}, \tag{5.10a}$$

$${}_pD_3^{(\gamma)} = e_{311}^{(\gamma)} {}_pP_{\alpha,\alpha}^{(\gamma)}. \tag{5.10b}$$

en términos únicamente de las componentes del desplazamiento plano  ${}_p\mathbf{P}_\alpha^{(\gamma)}$ ,  $p = 1, 2$ .

Los problemas locales  $pL$  son análogos a los problemas locales  $pqL$  y debido a las mismas razones, algunos son homogéneos, la tabla 5.2 muestra información relativa a estos problemas locales.

El problema homogeneizado asociado con el problema (5.4) y las condiciones de fron-

Problema local	Funciones Incógnita	Funciones Idénticamente Nulas
${}_1L$	${}_1P_3, {}_1Q$	${}_1P_1, {}_1P_2$
${}_2L$	${}_2P_3, {}_2Q$	${}_2P_1, {}_2P_2$
${}_3L$	${}_3P_1, {}_3P_2$	${}_3P_3, {}_3Q$

Cuadro 5.2: Funciones incógnita e idénticamente nulas en cada problema local  ${}_pL$ 

tera homogenizadas (5.5) es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} &= 0 && \text{en } \Omega, \\
\frac{\partial \bar{D}_i^{(0)}}{\partial x_i} &= 0 && \text{en } \Omega, \\
u_i^{(0)} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega_0, \\
\varphi^{(0)} &= \xi_0 && \text{sobre } \partial\Omega_1, \\
\bar{\sigma}_{ij}^{(0)} n_j &= t_i && \text{sobre } \partial\Omega_2, \\
\bar{D}_i^{(0)} n_i &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega_3.
\end{aligned}$$

donde las relaciones constitutivas

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{i\delta}^{(0)} &= \bar{C}_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{e}_{kij} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_k}, \\
\bar{D}_i^{(0)} &= \bar{e}_{ikl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} - \bar{\epsilon}_{ik} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_k},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

se definen en términos de: el desplazamiento  $u_k^{(0)}(\mathbf{x})$ , el potencial eléctrico  $\varphi^{(0)}(\mathbf{x})$  y de los coeficientes  $\bar{C}_{ijkl}$ ,  $\bar{e}_{ikl}$ ,  $\bar{\epsilon}_{ik}$ , homogeneizados, estos últimos dados por

$$\bar{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq} + C_{ijkl} p_q M_{k,l} + e_{kij} p_q N_{,k} \rangle, \tag{5.12a}$$

$$\bar{e}_{ipq} = \langle e_{ipq} + e_{ikl} p_q M_{k,l} - \epsilon_{ik} p_q N_{,k} \rangle, \tag{5.12b}$$

$$\bar{e}_{pij} = \langle e_{pij} + C_{ijkl} p P_{k,l} + e_{kij} p Q_{,k} \rangle, \tag{5.12c}$$

$$\bar{\epsilon}_{ip} = \langle \epsilon_{ip} - e_{ikl} p P_{k,l} + \epsilon_{ik} p Q_{,k} \rangle. \tag{5.12d}$$

donde el operador  $\langle \cdot \rangle$  es el promedio de su argumento sobre la celda periódica unidad  $S$ , i.e.

$$\langle f \rangle = \int_S f \, dy.$$

Los coeficientes de propiedades se pueden escribir en términos de siete parámetros independientes (Rodríguez-Ramos *et al.*, 2001):  $k, l, m, p, s', t, y u$ . Los cuatro primeros

corresponden a los coeficientes elásticos en la forma

$$2k = C_{1111} + C_{1122}, \quad (5.13a)$$

$$l = C_{1133} = C_{2233}, \quad (5.13b)$$

$$n = C_{3333}, \quad (5.13c)$$

$$p = C_{1313} = C_{2323}, \quad (5.13d)$$

$$2m = 2C_{1212} = C_{1111} - C_{1122}, \quad (5.13e)$$

el quinto coeficiente piezoeléctrico

$$s' = e_{123} = -e_{231} \quad (5.13f)$$

y finalmente el sexto y séptimo, para los dieléctricos

$$t = \epsilon_{11} = \epsilon_{22}, \quad (5.13g)$$

$$u = \epsilon_{33}. \quad (5.13h)$$

Los coeficientes  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  y  $u$  corresponden a problemas de deformación plana, los cuales fueron resueltos en Rodríguez-Ramos *et al.* (2001) y en Bravo-Castillero *et al.* (2001).

Los coeficientes  $p$ ,  $s'$  y  $t$  (módulo de rigidez, coeficiente piezoeléctrico de esfuerzo y permitividad eléctrica transversal) corresponden a problemas de desplazamiento antiplano acoplado con potencial, los cuales se resuelven aquí y fueron publicados en López-López *et al.* (2005).

Considerando la notación de generalizada de Hill, ecuación(5.13), las fórmulas para los coeficientes de interés en el presente estudio (ecuaciones (5.12)) toman la forma

$$\bar{p} = p_v + \langle p_{13}M_{3,1} - s'_{13}N_{,2} \rangle \quad (5.14a)$$

$$= p_v + \langle p_{32}M_{3,2} + s'_{32}N_{,1} \rangle, \quad (5.14b)$$

$$\bar{s}' = s'_v + \langle s'_{32}M_{3,2} - t_{32}N_{,1} \rangle, \quad (5.14c)$$

$$= s'_v + \langle s'_{13}M_{3,1} + t_{13}N_{,2} \rangle, \quad (5.14d)$$

$$= s'_v + \langle p_2P_{3,1} + s'_1Q_{,2} \rangle, \quad (5.14e)$$

$$= s'_v + \langle p_1P_{3,2} + s'_1Q_{,1} \rangle, \quad (5.14f)$$

$$\bar{t} = t_v + \langle -s'_1P_{3,2} + t_1Q_{,1} \rangle \quad (5.14g)$$

$$= t_v + \langle s'_2P_{3,1} + t_2Q_{,2} \rangle, \quad (5.14h)$$

donde el subíndice “ $v$ ” en el primer término del lado derecho de cada uno de las ecuaciones denota el promedio aritmético de la propiedad, e.g.

$$p_v = V_1p_1 + V_2p_2, \dots$$

donde la fracción volumétrica ocupada por la matriz  $S_1$  y la fibra  $S_2$  está representada por  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente.

	<b>Coefficiente efecti- vo</b>	<b>Problema local a resolver</b>
Módulo de rigidez	$\bar{p}$	$_{32}L, _{13}L$
Coefficiente piezoeléctrico de esfuerzo	$\bar{s}'$	$_{32}L, _{13}L, _{1}L, _{2}L$
Coefficiente de permitividad transversal	$t$	$_1L, _2L$

Cuadro 5.3: Coeficientes efectivos y problemas locales necesarios a resolver para conocerlos explícitamente

El problema local  $_{32}L$  y  $_{13}L$  tiene por solución a las funciones  $_{32}M_3$ ,  $_{13}M_3$ ,  $_{32}N$ , y  $_{13}N$  que a su vez sirven para calcular los coeficientes efectivos  $\bar{p}$  y  $\bar{s}'$ . La solución de los problemas locales  $_1L$  y  $_2L$  permite calcular los coeficientes  $\bar{s}'$  y  $t$ ; esta información se encuentra condensada en la tabla 5.3, que muestra qué propiedades se pueden encontrar al resolver qué problemas. Proporciona un elemento para comprobar nuestros cálculos por vías alternas.

### 5.1.2. Solución de los problemas locales

Por la información contenida en la tabla 5.3, se tienen que resolver los problemas locales  $_{32}L$ ,  $_{13}L$ , que para  $\gamma = 1, 2$  tienen la forma:

$$\Delta _{pq}M_3^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (5.15a)$$

$$\Delta _{pq}N^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (5.15b)$$

$$\| _{pq}M_3^{(\gamma)} \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.15c)$$

$$\| _{pq}N^{(\gamma)} \| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.15d)$$

$$\| (p_{pq}M_3 - s'_{pq}N_{,2})n_1 + (p_{pq}M_{3,2} + s'_{pq}N_{,1})n_2 \| = \begin{cases} -\|p\|n_2 & _{32}L \\ -\|p\|n_1 & _{13}L \end{cases} \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.15e)$$

$$\| (s'_{pq}M_{3,2} - t_{pq}N_{,1})n_1 - (s'_{pq}M_{3,1} + t_{pq}N_{,2})n_2 \| = \begin{cases} -\|s'\|n_1 & _{32}L \\ \|s'\|n_2 & _{13}L \end{cases} \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.15f)$$

para el caso de los problema locales  $pqL$ , ( $pq = 13, 32$ ). Mientras que para el caso de los problemas locales  $pL$  ( $p = 1, 2$ ) se tiene

$$\Delta_p P_3^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (5.16a)$$

$$\Delta_p Q^{(\gamma)} = 0 \quad \text{en } S_\gamma, \quad (5.16b)$$

$$\|_p P_3^{(\gamma)}\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.16c)$$

$$\|_p Q^{(\gamma)}\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.16d)$$

$$\| [p_p P_{3,1} - s'_p Q_{,2}] n_1 + [p_p P_{3,2} + s'_p Q_{,1}] n_2 \| = \begin{cases} -\|s'\| n_2 & {}_1L \\ \|s'\| n_1 & {}_2L \end{cases} \quad \text{en } \Gamma, \quad (5.16e)$$

$$\| [s'_p P_{3,2} - t_p Q_{,1}] n_1 - [s'_p P_{3,1} + t_p Q_{,2}] n_2 \| = \begin{cases} \|t\| n_1 & {}_1L \\ \|t\| n_2 & {}_2L \end{cases} \quad \text{en } \Gamma. \quad (5.16f)$$

De las condiciones de interfase (5.15e) y (5.15f), para los problemas locales  $pqL$ , y de las condiciones (5.16e) y (5.16f), para los problemas locales  $pL$ , se sigue fácilmente que las funciones  ${}_{13}M_3^{(\gamma)}$ ,  ${}_{13}N^{(\gamma)}$ ,  ${}_1P_3^{(\gamma)}$  y  ${}_1Q^{(\gamma)}$  son funciones pares del ángulo<sup>3</sup>  $\varphi$ . Mientras que las funciones  ${}_{23}M_3^{(\gamma)}$ ,  ${}_{23}N^{(\gamma)}$ ,  ${}_2P_3^{(\gamma)}$  y  ${}_2Q^{(\gamma)}$  son impares con respecto al mismo.

Haciendo las sustituciones adecuadas en los enunciados (5.15) y (5.16), se puede conocer las ocho funciones incógnita, ya que dichos problemas comparten estructura, por ello, basta con resolver los problemas locales  ${}_{13}L$  y  ${}_1L$  ó los problemas  ${}_{23}L$  y  ${}_2L$ .

Para el problema local  ${}_{13}L$  se propone la solución

$${}_{23}M_3^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ {}_{23}a_1 \pi z + \sum_{k=1}^{\infty} {}_{23}a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.17a)$$

$${}_{23}N^{(1)}(z) = \text{Im} \left\{ -{}_{23}b_1 \pi z + \sum_{k=1}^{\infty} {}_{23}b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.17b)$$

$${}_{23}M_3^{(2)}(z) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}_{23}c_k z^k \right\}, \quad (5.17c)$$

$${}_{23}N^{(2)}(z) = \text{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}_{23}d_k z^k \right\}, \quad (5.17d)$$

---

<sup>3</sup>Ángulo que parametriza a  $\Gamma$



y para el problema local  ${}_1L$  se propone

$${}_1P_3^{(1)}(z) = \text{Im} \left\{ -{}_1a_1\pi z + \sum_{k=1}^{\infty} {}_1a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.18a)$$

$${}_1Q^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ {}_1b_1\pi z + \sum_{k=1}^{\infty} {}_1b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (5.18b)$$

$${}_1P_3^{(2)}(z) = \text{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}_1c_k z^k \right\}, \quad (5.18c)$$

$${}_1Q^{(2)}(z) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}_1d_k z^k \right\}, \quad (5.18d)$$

donde  $a_l$ ,  $b_l$ ,  $c_l$  y  $d_l$  (que escribimos sin preíndice) son coeficientes reales e indeterminados que deben satisfacer las condiciones de interfase del respectivo problema local.

Al sustituir las expresiones de las funciones solución y buscar compatibilidad entre los coeficientes del desarrollo de Laurent de cada función con las condiciones de salto en la interfase (5.15c) a (5.15f) y (5.16c) a (5.16f), se obtienen los sistemas infinitos, después de algunas manipulaciones algebraicas

$$\begin{bmatrix} -\chi_p^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{W} & \chi'_p(\mathbf{I} + \mathbf{W}') \\ -\chi'_t(\mathbf{I} + \mathbf{W}) & \chi_t^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{W}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{13}\mathbf{a} \\ {}_{13}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{13}\mathbf{c} \\ {}_{13}\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

y

$$\begin{bmatrix} \chi_p^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{W} & \chi'_p(\mathbf{I} - \mathbf{W}') \\ -\chi'_t(\mathbf{I} - \mathbf{W}) & (\chi_t^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{W}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{a} \\ {}_1\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{c} \\ {}_1\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

para los problemas locales  ${}_{13}L$  y  ${}_1L$ , respectivamente, donde los escalares:

$$\chi_p = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}, \chi'_p = \frac{\|s'\|}{\|p\|}, \chi_t = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}, \chi'_t = \frac{\|s'\|}{\|t\|},$$

dependen sólo de las propiedades materiales de las componentes, nuevamente es necesario definir un **contraste material específico** para el módulo elástico  $p$ , y el coeficiente de permitividad eléctrico  $t$ . Las componentes de las matrices  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{W}'$ , simétricas e iguales entre si excepto por la componente "11", están dadas por

$$w_{kl} = \sqrt{k}\sqrt{l}\eta_{kl}R^{k+l} = w'_{kl}k + l > 3$$

y

$$w_{11} = \begin{Bmatrix} \pi R^2 & {}_{13}L \\ -\pi R^2 & {}_1L \end{Bmatrix}, \quad w'_{11} = \begin{Bmatrix} -\pi R^2 & {}_{13}L \\ \pi R^2 & {}_1L \end{Bmatrix};$$

los vectores incógnita

$${}_{13}\mathbf{a} = \left( \frac{1}{R} {}_{13}a_1, \frac{\sqrt{3}}{R^3} {}_{13}a_3, \frac{\sqrt{5}}{R^5} {}_{13}a_5, \dots \right)^T, \quad {}_{13}\mathbf{b} = \left( \frac{1}{R} {}_{13}b_1, \frac{\sqrt{3}}{R^3} {}_{13}b_3, \frac{\sqrt{5}}{R^5} {}_{13}b_5, \dots \right)^T$$

$${}_1\mathbf{a} = \left( \frac{1}{R} {}_1a_1, \frac{\sqrt{3}}{R^3} {}_1a_3, \frac{\sqrt{5}}{R^5} {}_1a_5, \dots \right)^T, \quad {}_1\mathbf{b} = \left( \frac{1}{R} {}_1b_1, \frac{\sqrt{3}}{R^3} {}_1b_3, \frac{\sqrt{5}}{R^5} {}_1b_5, \dots \right)^T$$

y los vectores independientes, con una única componente distinta de cero en la primera posición, dada por

$$\begin{aligned} {}_{13}\mathbf{c} &= \begin{cases} -R\delta_{1l} & {}_{13}L \\ R\chi_p\delta_{1l} & {}_2L \end{cases}, {}_{13}\mathbf{d} = \begin{cases} -R\chi_t\delta_{1l} & {}_{13}L \\ -R\delta_{1l} & {}_2L \end{cases}, \\ {}_1\mathbf{c} &= \begin{cases} -R\delta_{1l} & {}_{23}L \\ -R\chi_p\delta_{1l} & {}_1L \end{cases}, {}_1\mathbf{d} = \begin{cases} -R\chi_t\delta_{1l} & {}_{23}L \\ R\delta_{1l} & {}_1L \end{cases}. \end{aligned}$$

Debe notarse que en ausencia de acoplamiento piezoeléctrico  $s'_1 = s'_2 = 0$ , (o sea  $\chi'_p = \chi'_t = 0$ ), el sistema (5.19) para el caso del problema local  ${}_{13}L$ , se desacopla en dos sistemas

$$\left(\chi_p^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{W}\right) {}_{13}\mathbf{a} = {}_{13}\mathbf{c}, \quad \left(\chi_t^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{W}'\right) {}_{13}\mathbf{b} = \mathbf{0}; \quad (5.21)$$

este resultado coincide con aquel de la ecuación (7) de McPhedran y McKenzie (1980) derivado en el contexto de materiales dieléctricos usando el método de Rayleigh. En ese artículo, la matriz  $\mathbf{W}$  juega un papel muy importante, de la misma forma que en todos los sistemas del presente trabajo, además de la matriz  $\mathbf{W}'$ . En el presente trabajo, la contribución de  $\pi$  en  $w_{11}$  ( $w'_{11}$ ) se debe a la doble periodicidad de las funciones solución (5.17a) y (5.17b) ((5.18a) y (5.18b)). El sistema homogéneo en (5.21) tiene por solución  ${}_{13}\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , siempre y cuando  $\chi_t^{-1}$  no sea un valor propio de la matriz  $\mathbf{W}'$ , de ser así aparecían soluciones resonantes cuyo análisis está más allá del alcance de este trabajo.

El sistema (5.19) (y en su caso el sistema (5.20)) tiene una estructura particularmente útil, debido a la periodicidad del arreglo cuadrado. Las componentes  $w_{kl}$  de  $\mathbf{W}$  son nulas cuando  $k + l$  no es un múltiplo de cuatro. El sistema puede ser reorganizado en tres sistemas considerando (i) la primera ecuación de cada sistema en (5.19), (ii) el conjunto de ecuaciones con índice griego  $\alpha = 3, 7, 11, \dots$  y (iii) el conjunto con índices latinos  $i = 5, 9, 13, \dots$  (en lo que resta de la sección los índices anteriores tomarán sólo esos valores). El sistema puede ser escrito como sigue

$$(\Phi^{-1} + \Psi) A_1 + \mathcal{V}^T D^{(\alpha)} = B, \quad (5.22a)$$

$$F^{-1} D^{(\alpha)} + G\mathcal{V} + \mathcal{W} D^{(i)} = 0, \quad (5.22b)$$

$$F^{-1} D^{(i)} + \mathcal{W}^T D^{(\alpha)} = 0, \quad (5.22c)$$

donde los vectores  $2 \times 1$   $A_J$ ,  $B$  y las matrices  $2 \times 2$   $\Psi$ ,  $I_2$  y  $\Phi$  son

$$A_J = \frac{\sqrt{J}}{R^J} (a_J \quad b_J)^T, \quad J = 1, 3, 5, \dots,$$

$$B = (R \quad 0)^T,$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w'_{11} \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \chi_t - \chi'_p \chi'_t & -\chi'_p (1 + \chi_t) \\ -\chi'_t (1 + \chi_p) & -\chi_p + \chi'_p \chi'_t \end{bmatrix}, \quad \Delta = \chi_p \chi_t + \chi'_p \chi'_t;$$

los vectores subparticionados en bloques  $2 \times 1$ ,  $D^{(\alpha)}$  y  $D^{(i)}$ ;  $\mathcal{V}$  en bloques  $2 \times 2$  son:

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)} &= (A_3 \quad A_7 \quad A_{11} \quad \cdots)^T, \\ D^{(i)} &= (A_5 \quad A_9 \quad A_{13} \quad \cdots)^T, \\ \mathcal{V} &= (w_{13} I_2 \quad w_{17} I_2 \quad w_{1,11} I_2 \quad \cdots); \end{aligned}$$

finalmente las matrices subparticionadas en bloques  $2 \times 2$   $\mathcal{W}$ ,  $F$  y en bloques  $1 \times 2$   $G$  son

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} w_{35} I_2 & w_{39} I_2 & \cdots \\ w_{75} I_2 & w_{79} I_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, F = \text{diag}(\Phi \quad \Phi \quad \cdots), G = \text{diag}(A_1 \quad A_1 \quad \cdots).$$

El sistema (5.22) en el cual las incógnitas son  $A_1$ ,  $D^{(\alpha)}$  y  $D^{(i)}$  es de tal forma que  $A_1$  puede ser encontrado explícitamente por el método de sustitución (ver referencias en López-López *et al.*, 2005). Así

$$A_1 = [I_2 + \Phi \Psi - \Phi^2 \mathcal{V}^T \mathcal{M}^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \Phi B, \quad (5.23)$$

donde

$$\mathcal{M} = I - F^2 \mathcal{W} \mathcal{W}^T \quad (5.24)$$

cuyas componentes son matrices  $2 \times 2$

$$m_{\alpha\beta} = I_2 - \Phi^2 \sum_{i=5}^{\infty} w_{\alpha i} w_{i\beta}.$$

Cuando  $s'_1 = s'_2 = 0$ , las componentes de  $A_1$  en (5.23) se vuelven

$$a_1 = \chi_p R^2 \left[ 1 + \chi_p w_{11} - \chi_p^2 \mathcal{V}^T \mathcal{M}^{-1} \mathcal{V} \right]^{-1}, \quad (5.25)$$

donde las componentes de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{M}$  ya son escalares,

$$v_\alpha = w_{1\alpha}, m_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \chi_p^2 \sum_{i=5}^{\infty} w_{\alpha i} w_{i\beta}.$$

La expresión en (5.25) corresponde con la ecuación (3.13) de Bravo-Castillero *et al.* (2001), derivada para el caso elástico antiplano. Se debe notar que la matriz  $\Phi$  juega el mismo papel que el escala  $\chi_\kappa$  en el capítulo anterior, ambos contienen información de las propiedades materiales de las fases.

Realizando el mismo procedimiento usado en la sección 4.1.4, de las fórmulas (5.14); se llega a las fórmulas explícitas para los coeficientes efectivos

$$p = p_1 (1 - 2\pi_{13} a_1) \quad (5.26a)$$

$$= p_1 (1 + 2\pi_{23} a_1), \quad (5.26b)$$

$$s' = s'_1 + 2\pi t_{13} b_1 \quad (5.26c)$$

$$= s'_1 + 2\pi t_{123} b_1 \quad (5.26d)$$

$$= s'_1 + 2\pi p_{11} a_1 \quad (5.26e)$$

$$= s'_1 + 2\pi p_{12} a_1, \quad (5.26f)$$

$$t = t_1 (1 - 2\pi_1 b_1) \quad (5.26g)$$

$$= t_1 (1 + 2\pi_2 b_1), \quad (5.26h)$$

las cuales son calculables usando la expresión en (5.23). Nuevamente las propiedades efectivas  $p$ ,  $s'$  y  $t$  dependen explícitamente en las propiedades materiales de las fases del compuesto, el radio de la fibra cilíndrica y las sumas de retícula asociadas con la geometría de la distribución de las fibras (cuadrada). Nuevamente es de resaltar el caso límite cuando  $s'_1 = s'_2 = 0$ , en que se recuperan las fórmulas para el coeficiente dieléctrico  $t$  deducidas en la sección 4.1.4.

### 5.1.3. Un ejemplo numérico

Se calculó numericamente los coeficientes efectivos de un material reforzado de fibras como el que se considera en las hipótesis del problema anterior. Las propiedades de los materiales constituyentes fueron tomadas de Silva *et al.* (2001) en donde se hace un estudio de propiedades piezoeléctricas de láminas de biomateriales de la clase 622. Las constantes usadas son

Material	$p$	$t/\epsilon_0$	$d$
Colágena	1.4 GPa	2.825	0.062 pC/N
Colágena-Hidroxiapatita	2.69 GPa	2.509	0.041 pC/N

Donde  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$  es la permitividad del vacío,  $d$  es el **coeficiente piezoeléctrico de deformación** relacionado con el coeficiente piezoeléctrico cortante por medio de la ecuación (Ikeda, 1990, p.17)

$$s' = dp.$$

Los vectores y matrices infinitos de (5.23) y (5.24) usados en (5.26) para calcular las propiedades efectivas a través de los primeros coeficientes del desarrollo de Laurent de los potenciales complejos solución a los problemas locales correspondientes, se truncan a un orden finito. Para lograr una convergencia aceptable no se necesita uno muy grande. Los resultados de esos cálculos se muestran en la figura 5.1. En ella se puede observar el comportamiento monótono de las propiedades efectivas  $d$ ,  $t/\epsilon_0$  y  $p$  como una función de la fracción volumétrica de la fibra  $V_2$  desde cero hasta el límite de percolación, que para el

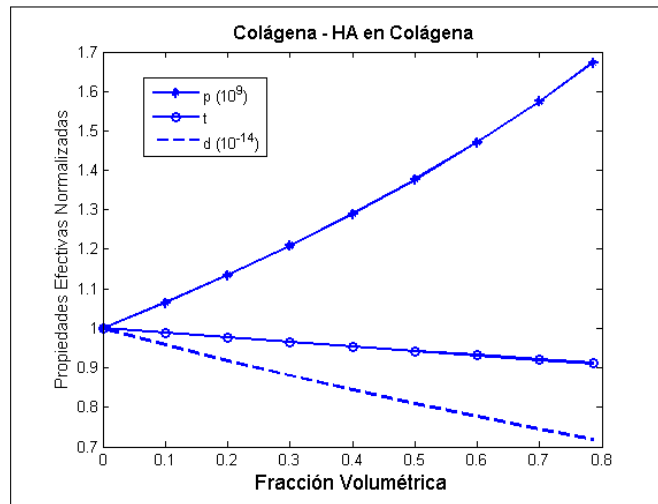


Figura 5.1: Coeficientes efectivos de una matriz de Colágena-Hidroxiapatita reforzado de fibras de Colágena

caso de celda periódica cuadrada es  $\pi/4$ . Como es de esperarse (de las fórmulas (5.26)), se observa que los coeficientes dependen del tamaño de las fibras, además de que lo hacen monótonamente, y de las propiedades de los materiales. Debe ser notado que el coeficiente de deformación piezoeléctrico  $d$ , siempre es positivo, además de ser monótono. Debe notarse que el coeficiente elástico,  $p$ , es ligeramente cóncavo hacia arriba, mientras que los coeficientes  $t$  y  $d$  son casi lineales. El comportamiento de las propiedades es casi lineal. Como función de  $V_2$ ,  $p$  aumenta pero  $t$  disminuye;  $d$  decrece.

#### 5.1.4. Conclusiones

Las fórmulas obtenidas para las propiedades efectivas  $p$ ,  $s'$  y  $t$  (5.26) y la ecuación (5.23) son típicas de la metodología usada en este trabajo. Las fórmulas muestran, al igual que en los resultados del capítulo anterior, una dependencia en las propiedades de las fases a través de la matriz  $\Phi$ , el radio de los cilindros  $R$  es un número real no mayor a  $1/2$ , aparece en  $B = [R \ 0]^T$  y  $w_{kl}$ , en donde es proporcional a  $R^{k+l}$ , es un número muy pequeño cuando  $k+l$  es grande. Los términos  $w_{11} = \pi R^2 = -w'_{11}$  en  $\Psi$  son de interés porque el factor  $\pi$  surge como una compensación a la cuasiperiodicidad de la función  $\zeta$  y es una condición necesaria para garantizar la doble periodicidad de los desplazamientos  ${}_{pq}M^{(1)}$  ( ${}_{p}P^{(1)}$ ) y de los potenciales  ${}_{pq}N^{(1)}$  ( ${}_{q}Q^{(1)}$ ). La geometría cuadrada de la distribución de las fibras, proporciona una característica importante en el cálculo de los coeficientes de Laurent del desplazamiento y del potencial: anular los términos tales que la suma de sus subíndices no sea cuatro, tal como se mencionó arriba. Las fórmulas obtenidas para las propiedades efectivas pueden ser útiles como referencia para cálculos hechos vía métodos numéricos o experimentos. Las propiedades exhiben un comportamiento casi lineal,

como funciones de la fracción volumétrica  $V_2$ .

## 5.2. Modelo AP3

El presente análisis se encuentra reportado en López-López *et al.* (2008).

Se considera un compuesto que comprende una matriz reforzada de fibras cilíndricas circulares unidireccionales de radio  $R$ , periódicamente distribuidas en un arreglo cuadrado, donde cada celda periódica es un medio piezoeléctrico binario homogéneo con condiciones de contacto perfecto en  $\Gamma$  (figura 3.4).

Se analizan dos ejemplos cuando las propiedades electroelásticas de cada fase pertenece al sistema cristalográfico hexagonal clases 622 y 6mm. En ambos casos, tanto la fibra como la matriz pertenecen a una clase o otra, y el eje de simetría hexagonal se supone en la misma dirección al eje de simetría de las fibras, sin embargo, fibras y matriz orientadas una en sentido contrario de la otra. Nuevamente se asume que el periodo del arreglo,  $l$ , es mucho menor que la longitud característica del compuesto  $L$ . Como en los casos anteriores el problema dado se desacopla en dos sistemas independientes debido a la simetría axial y a las condiciones de la frontera exterior, a saber, uno en donde se debe determinar el desplazamiento en el plano y el campo eléctrico fuera del plano y otro en donde se debe determinar el desplazamiento fuera del plano y el campo eléctrico en el plano; en este último se centrará el análisis presente.

De la sección anterior se dedujo una expresión cerrada para los coeficientes efectivos correspondientes al módulo elástico cortante longitudinal  $p$ , la constante piezoeléctrica cortante  $s'$  y el coeficiente de permitividad eléctrico  $t$ , reescritos a continuación en una notación un poco diferente para el problema local  ${}_{13}L$ .

$$p = p_1 (1 - 2\pi R\alpha), \quad (5.27a)$$

$$s' = s'_1 (1 + 2\pi R\beta), \quad (5.27b)$$

donde los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se encuentran de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (I_2 + \Psi\Phi - \mathcal{V}^T F^2 (I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{V})^{-1} \Phi U, \quad (5.28)$$

las seis propiedades materiales de las dos fases están incluidas en sólo cuatro parámetros adimensionales, a saber,

$$\chi_z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, (z = p, t \text{ or } s')$$

$$k_1^2 = \frac{s_1'^2}{p_1 t_1};$$

tres para los **contrastes específicos** correspondientes a cada propiedad (elástica, piezoeléctrica o dieléctrica) y el cuarto para el **factor de acoplamiento electromecánico** en el

medio 1; definiendo además

$$\Lambda_p = \frac{\chi_{s'} 1 + \chi_p}{\chi_p 1 + \chi_{s'}},$$

$$\Lambda_t = \frac{\chi_{s'} 1 + \chi_t}{\chi_t 1 + \chi_{s'}},$$

las propiedades materiales se incluyen en las matrices

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\chi_p^{-1} & k_1^2 \Lambda_p \\ \Lambda_t & \chi_t^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & k_1^2 \Lambda_p \\ -\Lambda_t & -1 \end{bmatrix},$$

$$F = \text{diag}[\Phi \quad \Phi \quad \dots]$$

y en el vector

$$U = -R \begin{bmatrix} 1 \\ \Lambda_t \end{bmatrix};$$

las matrices infinitas  $F$  y  $\mathcal{W}$ , y el vector también infinito  $\mathcal{V}$ , definidos abajo, están sub-particionados nuevamente en bloques de tamaño  $2 \times 2$

$$\mathcal{V}^T = [w_{13}\Phi \quad w_{15}\Phi \quad w_{17}\Phi \quad \dots],$$

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} w_{33}\Phi & w_{35}\Phi & w_{37}\Phi & \dots \\ w_{53}\Phi & w_{55}\Phi & w_{57}\Phi & \dots \\ w_{73}\Phi & w_{75}\Phi & w_{77}\Phi & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

De la misma forma que en la sección anterior la matriz  $\mathcal{W}$  es simétrica y sus elementos están dados por

$$w_{kl} = \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!} \frac{R^{k+l}}{\sqrt{k}\sqrt{l}} S_{k+l};$$

i.e. dependen de las sumas de retícula correspondientes al arreglo cuadrado

$$S_k = \sum_{m,n} (m+in)^{-k} \quad k \geq 3,$$

y del radio de la fibra  $R$ . Finalmente el vector  $U$  depende de  $R$  y de las propiedades materiales, tal como se mencionó arriba. También

$$\Psi = \pi R^2 \text{diag}(1, -1),$$

depende de  $R$  y el número  $\pi$  surge de la contribución de la cuasiperiodicidad de la función  $\zeta$ .

De manera completamente análoga, las relaciones constitutivas para la clase 6mm son (Sabina *et al.*, 2001)

$$\sigma_{13} = 2p\epsilon_{13} + sE_1,$$

$$\sigma_{23} = 2p\epsilon_{23} + sE_2,$$

$$D_1 = 2s\epsilon_{23} - tE_1,$$

$$D_2 = 2s\epsilon_{13} - tE_2,$$

donde  $s$  denota la constante piezoeléctrica  $e_{113}$ . De acuerdo con Sabina *et al.* (2001) las propiedades efectivas son

$$\begin{aligned} p &= p_1 (1 - 2\pi R (\alpha + k_1^2 \beta)), \\ s &= s_1 (1 + 2\pi R (\alpha - \beta)), \end{aligned}$$

la ecuación (5.28) para  $\alpha$  y  $\beta$  tiene la misma estructura que en la clase 622 excepto que, para el caso presentado aquí,

$$\begin{aligned} \Psi &= -\pi R^2 \text{diag}(1, 1), \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \chi_p^{-1} & k_1^2 \Lambda_p \chi_s^{-1} \\ \Lambda_t \chi_s^{-1} & -\chi_t^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & k_1^2 \Lambda_p \\ \Lambda_t & -1 \end{bmatrix}, \\ U &= R \begin{bmatrix} 1 \\ \Lambda_t \end{bmatrix}, \\ k_1^2 &= \frac{s_1^2}{p_1 t_1}. \end{aligned}$$

El coeficiente efectivo  $t$ , además de poder ser calculado mediante la solución de los problemas locales correspondientes ( $pL$ ), puede ser obtenido mediante los otros dos usando las relaciones de Milgrom-Shtrikman (Milgrom y Shtrikman, 1989).

Las fórmulas dadas se usan para calcular las propiedades efectivas de un compuesto, cuyas componentes son materiales biocompatibles, por ejemplo Titanato de Bario.

### 5.2.1. Resultados numéricos

Se consideran dos ejemplos con el propósito de “visualizar” el comportamiento de los compuestos formados por el mismo material, pero en el caso en que tanto fibras como matriz tienen diferentes orientación en su eje material. Se muestra en gráficas el comportamiento de las propiedades efectivas cuando cambia la concentración volumétrica  $V_2$ . Las propiedades se muestran en una sola gráfica normalizadas con respecto al valor de esa propiedad en la matriz. El máximo valor que puede alcanzar  $V_2$  es  $\pi/4$ , cuando se tocan las fibras, i.e.  $R = 0.5$ . Las propiedades graficadas son el módulo elástico cortante  $p$ , el coeficiente piezoeléctrico de cortante  $d = s'/p$  (para la clase 622) ó  $d = s/p$  (para la clase 6mm) y la constante de permitividad eléctrica  $t$ . Recientemente Silva *et al.* (2001) midieron las propiedades electromecánicas  $p$ ,  $d$  y  $t$  de dos biomateriales, los cuales pertenecen a la clase 622. Suponiendo que las propiedades de los materiales involucrados son las mismas que las medidas in situ, los datos, ligeramente modificados, se muestran en la tabla 5.4

La figura 5.2 muestra el resultado del cálculo realizado cuando las fibras están hechas de colágena (Co) y la matriz de colágena-hidroxiapatita (CoHa). Primero se supone que tanto las fibras como la matriz se encuentran polarizados en la misma dirección y, posteriormente, se supone que la polarización de ambas partes es opuesta. Para distinguir cada caso se usa el superíndice “\*”, en cada propiedad, cuando los materiales tienen polarización paralela (PP) y el superíndice “o” para el caso de polarización antiparalela (AP). En



Cuadro 5.4: Propiedades Electromecánicas

Material	Grupo Cristalográfico	$p$ Gpa	$t/\epsilon_0$	$d$ pC/N	$t$ nC/Vm	$s$ C/m <sup>2</sup>
Colagena	622	1.4	2.825	6.2		
Colagena-Hidroxiapatita	622	2.69	2.509	4.1		
BaTiO <sub>3</sub>	6mm	43.86			12.8	11.4

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ , permitividad del vacío

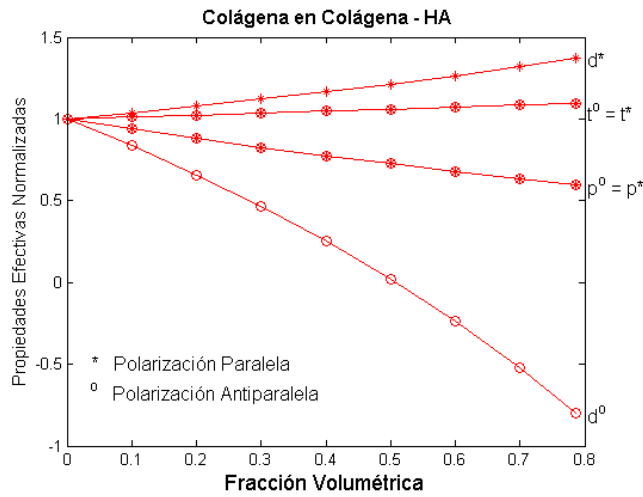


Figura 5.2: Coeficientes efectivos del compuesto formado por fibras de colágeno y matriz de colágeno con hidroxiapatita con polarización paralela (PP) y polarización opuesta (AP)

ambos casos las propiedades efectivas elástica y la permitividad dieléctrica son idénticas entre sí, i.e.

$$p^* = p^o, \quad t^* = t^o,$$

Exhiben un comportamiento casi lineal como funciones de  $V_2$ , lo cual es de esperarse pues se trata de propiedades del material que son invariantes ante una inversión de ejes, i.e. no cambian de signo. Esto muestra que no existe ningún cambio en esas dos propiedades cuando las polarizaciones de los materiales se encuentran en la misma dirección y cuando se encuentran en direcciones opuestas. Sin embargo, si muestran el comportamiento monótono típico de los compuestos reforzados de fibras. Los coeficientes piezoeléctricos  $d^*$  y  $d^o$ , sin embargo, muestran un comportamiento interesante. Además de ser monótonos,  $d^*$  es siempre positiva mientras que  $d^o$  es positiva sólo cuando  $0 \leq V_2 < 0.5$  y es negativa en el resto del intervalo, i.e. en  $0.5 < V_2 < \pi/4$ . Es decir, para fracciones volumétricas pequeñas, la dirección de la polarización es la misma que en la matriz. El compuesto se vuelve entonces no piezoeléctrico cuando tanto la fracción volumétrica de la fibra como la de la matriz tienen el mismo valor,  $V_2 = 0.5$ . Cuando el valor de la fracción volumétrica de las fibras es mayor, la dirección de polarización del compuesto pasa a ser la misma que la de las fibras. Por ello el compuesto tiene tres tipos de polarización como función de la fracción volumétrica  $V_2$ .

La figura 5.4 y la 5.3 son muy similares a la figura 5.2, excepto que la matriz en el

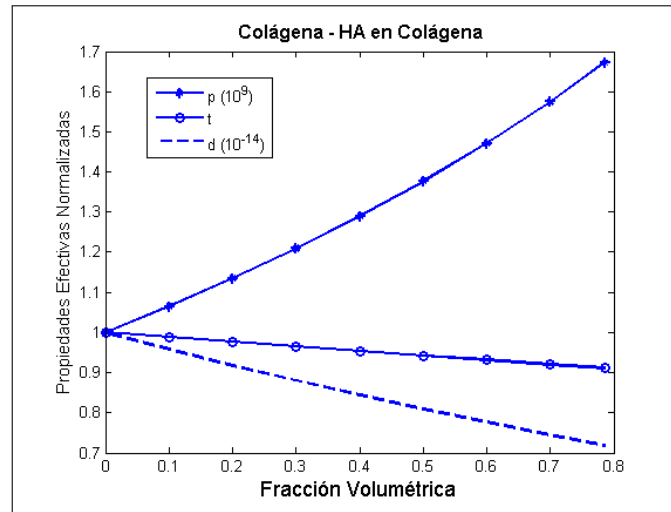


Figura 5.3: Propiedades efectivas de una matriz de colágena reforzada por fibras de colágena con hidroxapatita

primer caso es Co y las fibras son CoHa, es decir, las propiedades mostradas en la tabla para la figura anterior se intercambian. Nuevamente  $p^* = p^o$  y  $t^* = t^o$  muestran el comportamiento monótono esperado; el coeficiente piezoeléctrico cortante  $d^*$  (caso PP) es siempre positivo mientras que  $d^o$  (caso AP) muestra el mismo comportamiento de tres

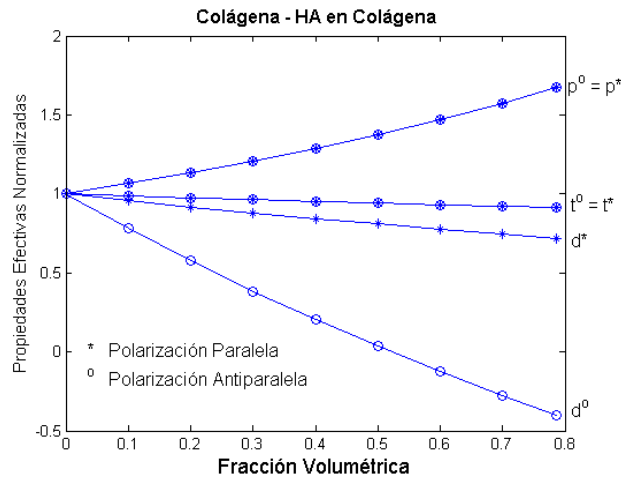


Figura 5.4: Propiedades efectivas de una matriz de colágeno reforzada por fibras de colágeno con hidroxiapatita

tipos de polarización mostrado arriba. En el caso anterior  $d^*$  es cercano a  $-0.5$  y en este caso lo es a  $-1$ , sin embargo, debe recalarse que esas cantidades están normalizadas con respecto al valor de la matriz. La convexidad de cada curva es opuesta y tienen un punto en común en  $V_2 = 0.5$  cuando se colocan en una gráfica  $d^0, d^*$  vs  $V_2$  (no mostrada aquí), además los valores no normalizados de  $d^0$  para CoHa (fibras) en Co (matriz) son mayores que cuando se considera Co (fibras) en CoHa (matriz), en todo el intervalo.

En la figura 5.5 se considera el caso en que tanto la matriz como las fibras están constituidos por el mismo material, Titanato de Bario ( $BaTiO_3$ ). En el caso PP es evidente que las propiedades electroelásticas permanecen constantes, como debe ser, pues en este caso el compuesto es homogéneo. Sin embargo, cuando el caso AP es considerado se encuentra otro comportamiento, los valores de  $p^0$  y  $t^0$  no son muy distintos de la unidad en el intervalo considerado. Sin embargo,  $d^0$  muestra los tres tipos de polarización (positiva, cero y negativa) como una función de  $V_2$ . Nuevamente se consigue un material no piezoeléctrico cuando se combinan partes iguales del material en el caso AP. Para este ejemplo se consideró otro biomaterial Titanato de Bario, el cual pertenece al grupo hexagonal clase 6mm. El coeficiente  $d^0$  presenta nuevamente el comportamiento de tres polarizaciones como función de la fracción volumétrica, sin embargo, no es necesario hacer más comentarios. Lo que si es interesante notar es que ambas propiedades  $p^0$  y  $t^0$  alcanzan un valor máximo en  $V_2 = 0.5$  el cual es aproximadamente 20% mayor al de la propiedad de la matriz y por la misma razón, al de las fibras. Lo anterior significa que el efecto piezoeléctrico en un compuesto claramente endurece y permite un valor mayor en la permitividad eléctrica que sólo considerando un único material en todo el intervalo  $V_2$ . El factor electromecánico de acoplamiento es una medida útil de la conservación de la energía al convertirse de mecánica a eléctrica y viceversa (Ikeda, 1990). El valor para Co es  $k^2 = s^2 / pt = 2.15 \times 10^{-7}$ ,

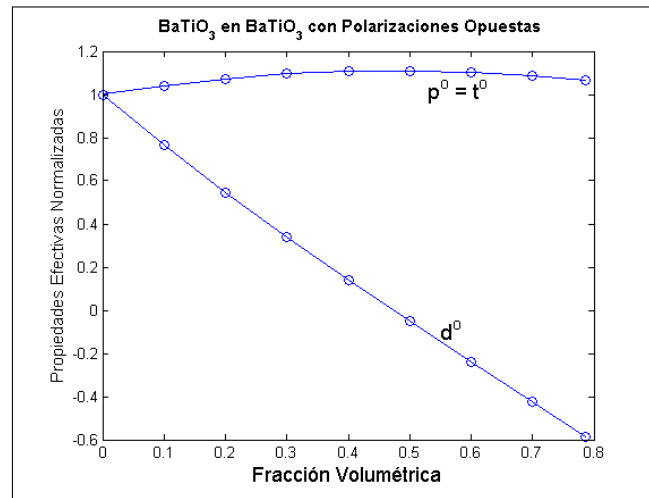


Figura 5.5: Propiedades efectivas de un material (Titanato de Bario) reforzado por fibras de él mismo, cuyo eje de polarización es antiparalelo al de la matriz

mientras que para el  $\text{BaTiO}_3$  es  $k^2 = s^2/pt = 0.23$ . Este hecho, que significa que una conversión apreciable de energía mecánica a eléctrica es llevada a cabo, puede explicar el hecho de que las propiedades en el caso AP sean más grandes que incluso los materiales constituyentes. Este es un resultado interesante y no se da para el caso de la colágena, sin embargo, ambos casos exhiben el comportamiento de tres tipos de polarizaciones.

### 5.2.2. Conclusiones

Se ha mostrado mediante métodos analíticos que biomateriales piezoeléctricos en un arreglo binario periódico cuadrado, de fibras cilíndricas circulares en una matriz homogénea, también, piezoeléctrica exhibe tres distintas polarizaciones (positiva, no piezoeléctrica y negativa) la cual depende de la fracción volumétrica, cuando la fibra y la matriz tienen polarizaciones opuestas. Se consideraron dos tipos de compuestos uno con simetría hexagonal clase 622 como la colágena, y otra clase 6mm como el Titanato de Bario ( $\text{BaTiO}_3$ ). El último muestra que la combinación  $\text{BaTiO}_3$  en  $\text{BaTiO}_3$  con polarizaciones opuestas tienen un efecto de endurecimiento que puede llegar a ser hasta más del 20 % respecto a la matriz (o a las fibras) cuando la fracción volumétrica de ambos constituyentes es la misma. El efecto piezoeléctrico tiene un papel potenciador en los materiales examinados. Este efecto puede ser encontrado en otra combinación de biomateriales y en geometrías altamente relacionadas con microestructuras como las consideradas, por ejemplo, en hueso y puede ser útil en aplicaciones médicas para andamios o implantes. Los coeficientes efectivos dependen monótonamente del radio de la fibra y el coeficiente piezoeléctrico de deformación cambia de signo cuando la fracción volumétrica es casi un medio de la matriz, lo que significa que el compuesto, para cierto valor de la fracción vo-

lumétrica, deja de ser piezoeléctrico y se comporta como un material netamente elástico.

## Capítulo 6

# Conclusiones, discusión y perspectivas

Durante el presente trabajo se propuso un modelo matemático, basado en una estructura muy sencilla, para el análisis de la interacción de los sistemas de Havers, microestructura base de la arquitectura del hueso compacto. Dicho modelo, se construye suponiendo que se trata de un material compuesto reforzado de fibras cilíndricas infinitamente largas dentro de una matriz homogénea. Fibras y matriz, se suponen dentro del grupo cristalográfico hexagonal clase 622. El análisis realizado consiste de dos etapas. En la primera, se modela el material compuesto considerando a los constituyentes como materiales dieléctricos únicamente. En la segunda parte, se les considera materiales piezoelectricos con la simetría material mencionada. Debido a la configuración geométrica del compuesto (simetría cilíndrica), sus propiedades efectivas dependen únicamente de la posición en el plano transversal y no de la coordenada longitudinal; es decir, se trata de un problema en el plano.

En el modelo, el diámetro de las fibras es considerado muy pequeño (en relación con el de la matriz) y están dispuestas en un arreglo cuadrado. En estas circunstancias: la ecuación diferencial que modela el comportamiento electro-elástico del compuesto (en el caso del modelo dieléctrico ecuación (3.6)), tiene coeficientes periódicos que varían rápidamente. Esto dificulta su solución analítica y numéricamente. Por ello, se emplea el Método de Homogeneización Asintótica para obtener una nueva ecuación con coeficientes constantes, los llamados coeficientes efectivos, que se usan para caracterizar al compuesto.

El resultado principal del estudio realizado, es la obtención de expresiones analíticas cerradas y además simples y fáciles de programar, para los coeficientes efectivos de los materiales compuestos, correspondientes a cada uno de los modelos planteados. Dichas fórmulas, están escritas en términos de la solución de varios problemas locales definidos en una celda unitaria. Las simetrías de los materiales involucrados; así como la geometría del problema, reducen el número de problemas locales a resolver. Las expresiones algebraicas obtenidas, como era de esperarse, muestran una dependencia en el contraste

de propiedades entre los materiales constituyentes, a través del contraste material específico, en la “anisotropía” de cada material constituyente, en el tamaño y la forma de las fibras, así como, en el tipo de arreglo en que se distribuyen en el compuesto, información contenida en las sumas de retícula y en los residuos de los potenciales complejos que se usan para construir la solución a cada problema local involucrado. Es de recalcar la notable simplicidad de dichas fórmulas; por lo que, se abren nuevas posibilidades para realizar análisis posteriores en busca de relaciones universales. Lo anterior es posible, al ser claramente identificables las contribuciones de cada una de las partes y suposiciones del modelo propuesto (tamaño y distribución de las fibras, materiales involucrados, orientación relativa de los ejes de simetría material, etc.). Además, dichas fórmulas pueden ser usadas como cotas de comprobación, para validar casos límite de métodos numéricos instrumentados para resolver casos más generales o complicados, que los presentados en este estudio.

En el modelo dieléctrico, se dedujeron expresiones analíticas para los coeficientes efectivos de los materiales compuestos, correspondientes a cada uno de los cuatro casos de orientación relativa de los ejes de simetría material de las fibras y la matriz: i) ejes materiales de las fibras y matriz: paralelos al eje de simetría geométrica del compuesto (dirección longitudinal del compuesto, modelo PP3), ii) eje material de las fibras paralelo al eje geométrico del compuesto y eje material de la matriz ortogonal a ambos (modelo OP2), iii) ejes materiales de las fibras y la matriz paralelos entre sí y ambos, ortogonales al eje geométrico del compuesto (modelo PP1) y iv) ejes materiales de los componentes ortogonales mutuamente y al eje geométrico del compuesto (modelo OP3).

Las fórmulas analíticas encontradas, dependen también de los residuos de los potenciales complejos, usados para solucionar los diferentes problemas locales. Dichos residuos, son calculados numéricamente mediante la solución por truncamiento de un sistema infinito de ecuaciones algebraicas lineales, regular y que es escrito en una estructura mnemónica (sistemas (4.30), (4.35), (4.84), (4.86), (4.110) y (4.116)). En el sistema, las contribuciones de la estructura periódica, de los materiales de las fases y el radio de las fibras es, nuevamente, fácil de identificar.

En cada uno de los problemas locales de los modelos dieléctricos PP3, OP2 y PP1, se construyó una función doblemente periódica, que es solución de la ecuación de Laplace. En el primer caso, definida en toda la celda unitaria. En el segundo caso, de una perturbación de la ecuación de Laplace en uno de los materiales constituyentes de la celda unitaria; y en el tercer caso de una ecuación de Laplace perturbada en ambas constituyentes. En todos los casos, dichas ecuaciones, están acompañadas de condiciones de continuidad y/o de condiciones de continuidad perturbadas en la interfase. Como se mencionó antes, éstos problemas locales son resueltos usando la teoría de potenciales complejos. Una superposición de funciones de Weierstrass y sus derivadas, para el primer caso, así como una superposición de funciones de Natanzon, en los dos restantes, son usadas para construir una base del espacio de soluciones de los problemas. Los primeros coeficientes del desarrollo de Laurent, residuos del potencial, son calculados numéricamente mediante el truncamiento de los sistema algebraicos infinitos, todos regulares, que surgen al satisfacer las condiciones de continuidad en la interfase del problema local correspon-

diente. Cada función doblemente periódica construida, es usada para demostrar que los tensores de permitividad de cada material compuesto obtenido, tienen sólo componentes sobre la diagonal principal y para desarrollar fórmulas que permitan el cálculo numérico de éstos.

En el caso del modelo dieléctrico PP3, los cálculos numéricos realizados permitieron confirmar el hecho de que el material compuesto es un material transversalmente isótropo y permitieron también establecer cotas, basadas en diferencias porcentuales y comparaciones hechas con cálculos via el MEF, para los parámetros involucrados en la construcción del material compuesto. Las fórmulas obtenidas mediante el método propuesto en esta tesis, muestran un comportamiento bastante noble con respecto a los cálculos realizados utilizando el MEF, pues difieren de éstos en sólo el 3 % en rango bastante amplio de materiales. Estas fórmulas, permiten realizar cálculos y predicciones sobre combinaciones de materiales en la cual la fibra puede tener desde un radio nulo, hasta un radio igual al valor de percolación ( $\pi/4$ ) y la componente  $\kappa_{11}$  del tensor de permitividad de la fibra, puede tener valores desde el 8.1 % hasta más de 12 veces el de la matriz, abarcando con ello la mayor parte del rango de los materiales documentados en las tablas de Landolt-Börnstein (1979). Las fórmulas obtenidas tienen la gran ventaja, sobre los cálculos via MEF, de que son fácilmente programables, además de las que se hicieron notar en la sección 4.5.

La estructura de los problemas locales a resolver, del modelo dieléctrico OP2, sugirió que dicho modelo, debería ser considerado como una perturbación, en las propiedades transversales de uno de los materiales constituyentes del compuesto, del modelo PP3. Dicha perturbación, en principio considerada pequeña, fue interpretada como una perturbación de un material transversalmente isótropo. Nuevamente se obtuvieron fórmulas analíticas cerradas, simples y mnemónicas, fácilmente programables, cuyo comportamiento fue contrastado con las predicciones del mismo modelo, pero resuelto utilizando el MEF. El resultado obtenido de dicho análisis es que las fórmulas obtenidas en el presente trabajo tienen una diferencia porcentual de menos del 10 % si: i) el radio de las fibras tiene un tamaño desde 0 hasta  $\pi/4$  (valor de percolación), ii) la componente  $\kappa_{11}$ , del tensor de permitividad de la matriz, es al menos la mitad y a lo más el doble del valor de la componente  $\kappa_{22}$ , también de la matriz, y iii) la componente transversal,  $\kappa_{11}$ , de la fibra tiene un valor entre el 48 y el 150 % del valor de la componente transversal,  $\kappa_{22}$ , de la matriz, tal como se hizo notar en la sección 4.5.2.

Los métodos numéricos sugieren que el valor absoluto del parámetro de perturbación material,  $\alpha$ , puede ser tan grande como 0.5 si se es tolerante a un rango de error de 10 %. Con ésta consideración, la metodología expuesta en la presente tesis es aplicable a más del 75 % de los materiales reportados en las tablas de Landolt-Börnstein (1979), como fue mencionado en la sección 4.5.2. No obstante, se espera que la contribución de la solución extendida a orden  $O(\alpha^2)$ , sea significativa y se puedan incrementar aún más, los casos que son susceptible de estudio, mediante la metodología propuesta.

El modelo dieléctrico PP1, tiene también como resultado: fórmulas analíticas cerradas, simples y fáciles de programar, además de mnemónicas; que se compararon contra datos numéricos obtenidos mediante un cálculo basado en el MEF (sec. 4.5.3). Dichas



comparaciones sugieren que el rango de validez de los parámetros del modelo propuesto, para un error porcentual no mayor del 10 % es como sigue: i) tamaño del radio de las fibras con valores entre 0 y  $\pi/4$  (desde “compuesto” sin inclusión y hasta fibras con tamaño igual al valor de percolación), ii) el valor de la componente  $\kappa_{22}$  del tensor de permitividad de la fibra puede tener un valor entre el 66 y el 150 % del valor de la misma componente del tensor de permitividad de la matriz y iii) el valor de la componente  $\kappa_{11}$  del tensor de permitividad de cada material, puede ser: desde la mitad, hasta una y media veces el valor de la componente  $\kappa_{22}$  del respectivo tensor (ver sec. 4.5.3). Dichos rangos, cubren nuevamente la mayoría de los casos de combinaciones de materiales reportados en la tablas antes mencionadas.

Redefiniendo adecuadamente los parámetros de perturbación del modelo dieléctrico PP1, es posible demostrar que el caso OP3 no es más que un caso particular del caso PP1, incluso, OP2 también lo es, por lo que se concluye que el caso PP1 es la generalización de todos los demás casos. Este caso, aporta entonces, las fórmulas más generales del estudio de las posibles orientaciones materiales de los constituyentes del compuesto. Las fórmulas analíticas encontradas para los coeficientes efectivos, abarca los casos límite clásicos: *inclusión super conductora e inclusión aislante*. Permiten distinguir clara y fácilmente las contribuciones de la geometría del compuesto, del radio de las fibras y de las propiedades de los materiales constituyentes, todos ellos son válidos para un arreglo rectangular de fibras infinitamente largas. Sin embargo, es posible generalizarlas a cualquier tipo de arreglo, pues las sumas de retícula son fácilmente expresables en términos de las sumas  $S_4$  y  $S_6$ , en el caso de las sumas armónicas usadas en el potencial complejo del caso PP3, y en términos de  $T_k$ , con  $k \in \{4, 6, 8, \dots\}$ , en el caso de las sumas biarmónicas, usadas en el potencial complejo de los dos casos restantes.

El modelo piezoeléctrico da como resultado, también, fórmulas analíticas cerradas, simples, mnemónicas y fácilmente programables, para un material reforzado de fibras cilíndricas, infinitamente largas, distribuidas en un arreglo cuadrado, fibras y matriz pertenecientes al grupo cristalográfico hexagonal clase 622. Nuevamente, las propiedades, dependen únicamente del tipo de arreglo que se tiene, del radio de las fibras, el cual no puede ser mayor a  $\frac{1}{2}$ , y de las propiedades de los materiales constituyentes. Presentan una estructura tal que pueden identificarse fácilmente las contribuciones de éstas en la fórmula. Gracias a esta forma simple y organizada, se pueden verificar casos límite, pues al anular los coeficientes piezoeléctricos se desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas asociadas a cada problema local, y se puede analizar por separado los fenómenos elástico y dieléctrico de cualquier material transversalmente isótropo.

El modelo piezoeléctrico PP3, estudió un material con propiedades piezoeléctricas en el grupo hexagonal clases 622, reforzado de fibras cilíndricas, con propiedades también piezoeléctricas en el mismo grupo y clase, distribuidas periódicamente en un arreglo cuadrado. Permite identificar que el efecto piezoeléctrico de esta clase de materiales es, sin duda, considerable, ya que la magnitud del coeficiente piezoeléctrico de deformación alcanza valores significativos a nivel biológico (ver sec. 5.2.1). Lo anterior, aunado a los experimentos recientemente realizados por Ferreira *et al.* (2007) y Noris-Suárez *et al.* (2007), donde se comprobó que sólo el efecto piezoeléctrico de la colágena es suficiente para pre-

sentar adhesión de hidroxiapatita a la misma colágena, y con ello inducir la osteogénesis. El resultado analítico presente, predice esa clase de comportamiento de una forma mucho más económica y sencilla, pues involucra únicamente el cálculo de los coeficientes efectivos usando una PC estándar, además de servir como un instrumento verificador, en el caso de cálculos y experimentos numéricos y de laboratorio.

El modelo piezoeléctrico AP3, al igual que el modelo PP3, estudia un material con propiedades piezoeléctricas en el grupo hexagonal clases 622 y 6mm; reforzado de fibras cilíndricas, con propiedades piezoeléctricas en el mismo grupo y clases. Se realizó un experimento numérico en el que se considera un compuesto hecho de un solo material, pero en el que las fibras son distribuidas periódicamente en un arreglo cuadrado, con la polarización de las fibras en dirección opuesta a la dirección de la polarización de la matriz. Los resultados obtenidos son particularmente interesantes, ya que muestra que las propiedades elásticas cortantes de cada compuesto, se ven incrementadas hasta en un 20 % es decir, se endurece. La permitividad también se ve incrementada en la misma proporción. El efecto piezoeléctrico puede ser potenciado o anulado, en esta clase de biomateriales, dependiendo de la fracción volumétrica de la fibra. Este efecto puede estar presente en otras combinaciones de biomateriales y en geometrías paralelogramáticas, por ejemplo, en hueso; por lo que este resultado puede encontrar aplicaciones en uso médico como andamios, implantes o incluso dispositivos electromagnéticos que promuevan la osteogénesis.

Todos los resultados fueron obtenidos suponiendo que las fibras tienen área transversal circular, sin embargo, es posible generalizar a una fibra con cualquier forma en su área transversal, siempre y cuando ésta sea lo suficientemente suave como para aplicar el Teorema de Green. Además, todos los resultados obtenidos, pueden ser fácilmente generalizados a un arreglo paralelogramático, en la distribución de las fibras; pues, al igual que en el caso dieléctrico, todas las sumas de retícula se pueden expresar en términos únicamente de  $S_4$  y  $S_6$ . Todos los resultados pueden ser usados como un método de control para modelos numéricos o incluso experimentos de estructuras o situaciones más complejas.

El estudio de materiales reforzados de fibras es muy importante, dado que se puede aplicar ampliamente al desarrollo de sensores y actuadores así como de transductores. Sin embargo, son pocos los casos de estudio de una configuración tal que los ejes materiales difieran del eje geométrico del arreglo. En especial el resultado obtenido en el modelo piezoeléctrico AP3, es importante ya que demuestra que esta clase de arreglos puede incrementar, dar cabida o anular el efecto piezoeléctrico a materiales compuestos, con todas las posibles aplicaciones que esto implica.

El cambio de dirección en la polarización del material en el modelo AP3, merece ser estudiado a nivel biológico ya que se especula si un cambio de dirección en el campo eléctrico, inhiba, en lugar de estimular, la actividad osteoblástica o la de los osteoclastos, implicando con ello una nueva área de estudio para encontrar un método de control, o de cura, de la osteoporosis. A la fecha se desconoce, en gran proporción, la acción del campo eléctrico sobre las otras dos clases de células presentes en el hueso compacto.

El trabajo reportado, en la presente tesis, abre nuevas posibilidades de estudio en el

área biomédica, pues el estudio de un material piezoeléctrico, con la polarización de las fibras en dirección ortogonal a aquella de la matriz, proporcionará información suficiente para la construcción y pruebas de control, de compuestos susceptibles a ser utilizados como material para implantes, en la ingeniería de tejidos. Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno permiten aumentar la fidelidad en el modelo de la interacción de las osteonas. Puede ser considerado un material reforzado de fibras multicapa, incluso, con diferentes direcciones en la polarización de cada capa. No obstante, un trabajo a futuro más inmediato es el plantear el análisis de un material con fibras tricapa en donde la capa media tenga las mismas propiedades elásticas que los osteoblastos. Aún se desconoce si el hecho de que una capa no presente efecto piezoeléctrico inhiba el comportamiento del material; debido a que se ha comprobado que la simple acción mecánica, realizada mediante fisioterapias en pacientes que sufrieron fracturas de huesos, es suficiente para disminuir el tiempo de recuperación, por lo que aún en el caso de inhibir el efecto piezoeléctrico se podrá aportar datos y hechos esclarecedores. Considerar a la uno de los constituyentes del compuesto como un material piro-piezoeléctrico, abre la posibilidad a obtener resultados encaminados a la construcción de nuevos dispositivos que permitan la regeneración del hueso en enfermedades degenerativas o en traumas.

Si bien la metodología desarrollada en el presente estudio fue basada en la distribución de las fibrillas de colágena de la osteona según Ascenzi y Bonucci (1967), ver figura 3.1; es factible suponer que puede ser aplicada, sin mayor modificación, a el modelo de distribución de fibrillas de Girauld-Guille (1988), figura 3.2. Lo anterior, debido a que en las dos clases de osteonas de Girauld-Guille, las laminillas adyacentes presentan ángulos similares a los considerados en los modelos PP1 y OP2.

Los resultados de éste estudio, abren una nueva posibilidad para la construcción, y sobre todo la simulación y control, de materiales que respondan mecánica y biológicamente como hueso, para ser utilizados como implantes. No obstante, si se pretende crear un material compuesto para utilizarlo como andamio de hueso, y de esta forma reemplazar o mejorar los materiales actualmente usados para implantes, se debe comprender mejor la interacción entre las partes involucradas en el proceso de la osteogénesis (acciones mecánicas, reacciones químicas, estímulos celulares, etc.). Razón por la que las líneas de continuidad del presente trabajo son muy bastas y ricas en bifurcaciones que, potencialmente, pueden conducir al diseño y construcción de dispositivos que aumenten la calidad de vida de las personas que han sufrido traumas óseos severos.

# Bibliografía

- [1] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1979.
- [2] JC Anderson and C Erickson. Electrical properties of wet collagen. *Nature*, 218:166–168, 1968.
- [3] JC Anderson and C Erickson. Piezoelectric properties of dry and wet bone. *Nature*, 227:491–492, 1970.
- [4] A Ascenzi and E Bonucci. The tensile properties of single osteons. *Anatomical Record*, 158:375–386, 1967.
- [5] G Aschero, P Gizdulich, and F Mango. Statistical characterization of piezoelectric coefficient  $d_{23}$  in cow bone. *J Biomech*, 32:573–577, 1999.
- [6] BA Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. Wiley, NY, 1973.
- [7] S Baïotto and M Zidi. Theoretical and numerical study of a bone remodeling model: The effect of osteocyte cells distribution. *Biomech Model Mechanobio*, 3:6–16, 2004.
- [8] S Baïotto and M Zidi. Un modèle viscoélastique de remodelage osseux: approche unidimensionnelle. *Comptes Rendus Mecanique*, 332:633–638, 2004.
- [9] N. Bakhvalov and G. Panasenko. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.
- [10] CAL Bassett and RO Becker. Generation of electric potentials in bone in response to mechanical stress. *Science*, 137:1063–1064, 1962.
- [11] RO Becker. Search for evidence of axial current flow in peripheral nerves of salamander. *Science*, 134:101–102, 1961.
- [12] RO Becker. Stimulation of partial limb regeneration in rats. *Nature*, 235:109–111, 1972.
- [13] RO Becker. The significance of bioelectric potentials. *Bioelectrochemistry and Bioenergetics*, 1:187–199, 1974.

- [14] Y Benveniste. Correspondence relations among equivalent classes of heterogeneous piezoelectric solids under anti-plane mechanical and in-plane electrical fields. *J Mech Phys Solids*, 43:553–571, 1995.
- [15] V. Berdichevsky, V. Jikov, and G. Papanicolaou. *Homogenization*. World Scientific, Singapore, 1999.
- [16] JJ Blaker, V Marquet, R Jérôme, AR Boccaccini, and SN Nazhat. Mechanical properties of highly porous PDLA/bioglass<sup>6</sup> composite foams as scaffolds for bone tissue engineering. *Acta Biomaterialia*, 1:643–652, 2005.
- [17] J Bravo-Castillero, R Guinovart-Díaz, FJ Sabina, and R Rodríguez-Ramos. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents – II. Piezoelectric and square symmetry. *Mechanics of Materials*, 33:237–248, 2001.
- [18] A Bur. Measurements of the dynamic piezoelectric properties of bone as a function of temperature and humidity. *J Biomech*, 1:495–507, 1976.
- [19] GT Charras, PP Lehenkari, and MA Horton. Atomic force microscopy can be used to mechanically stimulate osteoblasts and evaluate cellular strain distributions. *Ultra-microscopy*, 86:85–95, 2001.
- [20] Doina Cioranescu and Patrizia Donato. *An Introduction to Homogenization*. Oxford University Press, New York, 1999.
- [21] SC Cowin. Wolff’s law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *J Biomechanical Engineering*, 108:83–88, 1986.
- [22] SC Cowin. *Bone Mechanics Handbook*. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [23] J Currey. *The mechanical adaptations of bones*. Princeton University Press, NJ, 1984.
- [24] C Du, GJ Meijer, C van de Valk, RE Haan, JM Bezemer, SC Hesselink, FZ Cui, K de Groot, and P Layrolle. Bone growth in biomimetic apatite coated porous Polyactive®1000pegt70pbt30 implants. *Biomaterials*, 23:4649–4656, 2002.
- [25] FG Evans. *The mechanical properties of bone*. Thomas, Springfield, Ill, 1973.
- [26] AM Ferreira, K Noris-Suárez, J Lira-Olivares, JL Feijoo, and G González. Collagen piezoelectric effect induce bone healing. *Acta Microscopica*, 16:122–125, 2007.
- [27] E Fukada and I Yasuda. On the piezoelectric effect of bone. *J Phys Soc Japan*, 12:1158–1162, 1957.
- [28] C Galassi, E Roncari, C Capianni, G Fabbri, A Piancastelli, M Peselli, and F Silvano. Processing of porous PZT materials for underwater acoustics. *Ferroelectrics*, 268:47–52, 2002.

- [29] MM Girault-Guille. Twisted plywood architecture of collagen fibrils in human compacto bone osteons. *Calc Tiss Int*, 42:167–180, 1988.
- [30] JC Góes, SD Figueiró, JAC de Pavia, and ASB Sombra. Piezoelectric and dielectric properties od collagen films. *Phys Stat Sol (a)*, 176:1077–1083, 1999.
- [31] J González-Macias and S Serrano-Figueras. Enfermedades Óseas. In P Farreras, editor, *Medicina Interna*, pages 1064–1089, Madrid, 1995. Mosby-Doyma. Décimoterceera Edición.
- [32] H Gray. *Anatomía de Gray: Bases anatómicas de la Medicina y la cirugía*. Elsevier, España, 38 edition, 2004.
- [33] R Guinovart-Díaz, J Bravo-Castillero, R Rodríguez-Ramos, and FJ Sabina. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry. *J Mech Phys Solids*, 49:1445–1462, 2001.
- [34] N Guzclu. A piezoelectric model for dry bone tissue. *J Biomechanics*, 11:257–267, 1978.
- [35] NM Hancox. *Biology of Bone*. Cambridge University Press, UK, 1972.
- [36] SJ Hollister, TMG Chu, JW Halloran, and SE Feinberg. *Design and manufacture of bone replacement scaffolds*, chapter 36, pages 36–1 –36–14. CRC Press, Boca Raton, 2nd edition, 2001.
- [37] SJ Hollister and N Kikuchi. A comparision of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Comp Mech*, 10:73–95, 1992.
- [38] N Ignjatović, V Savić, Sñajman, M Plavsić, and D Uskoković. A study of Hap/PLLA composite as a substitute for bone powder, using FT-IR spectroscopy. *Biomaterials*, 22:571–575, 2001.
- [39] N Ignjatović, S Tomić, M Dakić, M Miljković, M Plavsić, and D Uskoković. Synthesis and properties of hydroxyapatite/poly-L-lactide composite biomaterials. *Biomaterials*, 20:809–816, 1999.
- [40] T Ikeda. *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [41] S Itoh, M Kikuchi, Y Koyama, K Takakuda, K Shinomiya, and J Tanaka. Development of an artificial vertebral body using a novel biomaterial, hydroxyapatite/collagen composite. *Biomaterials*, 23:3919–1926, 2002.
- [42] F Jianqing, Y Huipin, and Z Xingdong. Promotion of osteogenesis by a piezoelectric biological ceramic. *Biomaterials*, 18:1531–1534, 1997.

- [43] VV Jikov, SM Kozlov, OA Oleinik, and GA Yosifian. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer, Heidelberg, 1994.
- [44] LV Kantorovich and VI Krylov. *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience Publishers, Inc, The Netherlands, 1964.
- [45] R Kar-Gupta and T A Venkatesh. Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: Effect of poling characteristics. *Journal of Applied Physics*, 98:054102–1 – 054102–14, 2005.
- [46] R Kar-Gupta and TA Venkatesh. Electromechanical response of porous piezoelectric materials. *Acta Mater*, 54:4063–4078, 2006.
- [47] R Kar-Gupta and TA Venkatesh. Electromechanical response of 1–3 piezoelectric composites: An analytical model. *Acta Materialia*, 55:1093–1108, 2007.
- [48] R Kar-Gupta and TA Venkatesh. Electromechanical response of 1–3 piezoelectric composites: A numerical model to assess the effects of fiber distribution. *Acta Materialia*, 55:1275–1292, 2007.
- [49] Landolt-Börnstein. *Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*. Springer, Berlin, 1979.
- [50] J Leor and S Cohen. Myocardial tissue engineering: Creating a muscle patch for a wounded heart. *Ann NY Acad Sci*, 1015:312–319, 2004.
- [51] E López-López, FJ Sabina, J Bravo-Castillero, R Guinovart-Díaz, and R Rodríguez-Ramos. Overall electromechanical properties of a binary composite with 622 symmetry constituents. Antiplane shear piezoelectric state. *Int J Solids Structures*, 42:5765–5777, 2005.
- [52] E López-López, FJ Sabina, R Guinovart-Díaz, J Bravo-Castillero, and R Rodríguez-Ramos. Piezoelectric effect in composites with different poling directions constituents. In J Jeulin and S Forest, editors, *Continuum Models and Discrete Systems CMDS11*, pages 437–442. Les Presses de l'École de Mines de Paris, 2008.
- [53] AA Marino and RO Becker. Piezoelectric effect and growth control in bone. *Nature*, 228:473, 1970.
- [54] RB Martin, DB Burr, and NA Sharkey. *Skeletal Tissue Mechanics*. Springer, New York, 1998.
- [55] RC McPhedran. Electrostatic and optical resonances of arrays of cylinders. *Appl Phys*, 23:223–235, 1980.
- [56] B Miara, E Rohan, M Zidi, and B Labat. Piezomaterials for bone regeneration design – Homogenization approach. *J Mech Phys Solids*, 53:2529–2556, 2005.

- [57] M Milgrom and S Shtrikman. Linear response of two-phase composite with cross moduli: Exact universal relations. *Phys Rev A*, 40:1568–1575, 1989.
- [58] J Mythili, TP Sastry, and M Subramanian. Preparation and characterization of a new bioinorganic composite: collagen and hydroxyapatite. *Biotechnol Appl Biochem*, 32:155–159, 2000.
- [59] ACÑeville. *Biology of Fibrous Composites*. Cambridge University Press, 1993.
- [60] NAÑicorovici, DR McKenzie, and RC McPhedran. Optical resonances of three-phase composite and anomalies in transmission. *Optics Communications*, 117:151–169, 1995.
- [61] NAÑicorovici and RC McPhedran. Optical and dielectric properties of partially resonant composites. *Phys Rev B*, 49:8479–8482, 1994.
- [62] KÑoris-Suárez, J Lira-Olivares, AM Ferreira, JL Feijoo, N Suárez, MC Hernández, and E Barrios. In vitro deposition of hydroxyapatite on cortical bone collagen stimulated by deformation-induced piezoelectricity. *Biomacromolecules*, 8:941–948, 2007.
- [63] KÑoris-Suárez, J Lira-Olivares, AM Ferreira, A Graterol, JL Feijoo, and SW Lee. Electrochemical influence of collagen piezoelectric effect in bone healing. *Material Science Forum*, 544–545:981–984, 2007.
- [64] J F Nye. *Physical Properties of Crystals*. Clarendon Press, Oxford, 1957.
- [65] C Piña Barba, N Murguía Acevedo, R Palma Cortés, and E Lima. Caracterización de hueso de bovino anorgánico: Nukbone. *Acta Ortopédica Mexicana*, 20(4):150–155, 2006.
- [66] SR Pollack. *Streaming potentials in bone*, chapter 24, pages 24–1 – 24–22. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [67] A Quinto Hernández and C Piña Barba. Caracterización física y química de pastas de cementos óseos con  $ZrO_2$ . *Revista Mexicana de Física*, 49(2):123–131, 2003.
- [68] Lord Rayleigh. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of medium. *Phil. Mag.*, 34:481–502, 1892.
- [69] R Rodríguez-Ramos, FJ Sabina, R Guinovart-Díaz, and J Bravo-Castillero. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents – I. Elastic and square symmetry. *Mech Mat*, 33:223–235, 2001.
- [70] FJ Sabina, R Rodríguez-Ramos, J Bravo-Castillero, and R Guinovart-Díaz. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. II: Piezoelectric and hexagonal symmetry. *J Mech Phys Solids*, 49:1463–1479, 2001.



- [71] ND Searby, RK Globus, and CR Steele. Structural modeling of an osteoblast subjected to hypergravity loading. *BED Bioengineering Conference*, 50:665–666, 2001.
- [72] CC Silva, D Thomazini, AG Pinheiro, N Aranha, SD Figueri6, JC G6es, and ASB Sombra. Collagen-hydroxyapatite films: piezoelectric properties. *Materials Sci Engrg B*, 86:210–218, 2001.
- [73] I S Sokolnikoff. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1956.
- [74] SM Tanaka. A new mechanical stumulator for cultured bone cells using piezoelectric actuator. *J Biomech*, 32:427–430, 1999.
- [75] JJ Telega. Piezoelectricity and homogenization. application to biomechanics. In GA Maugin, editor, *Continuum Models and Discrete Systems*, volume 2, pages 220–229. HOLA, 1991.
- [76] HP Wiesmann, M Harting, U Stratmann, U Meyer, and U Joos. Electrical stimulat6o influences mineral formation of osteoblast-like cells in vitro. *Biochimica et Biophysica Acta*, 1538:28–37, 2001.
- [77] G Yang, J Kabel, BV Rietbergen, A Odgaard, R Huiskes, and SC Cowin. The anisotropic hooke's law for cancellous bone and wood. *J Elasticity*, 53:125–146, 1999.