



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**“RESULTADOS ALGORÍTMICOS Y  
COMBINATORIOS SOBRE GRÁFICAS  
GEOMÉTRICAS”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS  
(Computación)**

**P R E S E N T A:**

**JOSÉ DAVID FLORES PEÑALOZA**

**DIRECCIÓN:  
DR. JORGE URRUTIA GALICIA**

**CODIRECCIÓN:  
DR. FERNANDO ALFREDO HURTADO DÍAZ**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Para Angie y Tito,  
y todos nuestros niños por venir.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría extremal de gráficas . . . . .	3
1.2. Dibujo de gráficas . . . . .	4
1.3. Iluminación de galerías de arte . . . . .	5
1.4. Gráficas geométricas sobre conjuntos de puntos <i>rojo/azules</i> . . . . .	7
<b>2. Eliminación de aristas</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	10
2.2. Apareamiento perfecto . . . . .	11
2.2.1. Cota inferior a $e_{n-1}(2n)$ . . . . .	12
2.2.2. Cota superior a $e_{n-1}(2n)$ . . . . .	13
2.3. Árboles planos . . . . .	17
2.3.1. Conjuntos de puntos con muchos puntos en el interior . . . . .	22
2.4. Triangulaciones . . . . .	24
2.4.1. Caso convexo . . . . .	25
2.4.2. Caso no convexo . . . . .	25
2.5. Aspectos algorítmicos . . . . .	26
2.5.1. Apareamientos perfectos . . . . .	27
2.5.2. Árboles generadores planos . . . . .	28
2.5.3. Triangulación del conjunto de vértices . . . . .	28
2.6. Conclusiones y problemas abiertos . . . . .	29

<b>3. Dibujos primitivos</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Definiciones y trabajo previo . . . . .	32
3.3. Caracterización . . . . .	35
3.4. Dimensiones superiores . . . . .	38
3.5. Algoritmo . . . . .	40
3.5.1. Propiedades del dibujo . . . . .	41
3.6. Conclusiones y problemas abiertos . . . . .	41
<b>4. <math>k</math>-módems</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. Iluminación de Polígonos Monótonos . . . . .	45
4.2.1. Aspectos Algorítmicos . . . . .	49
4.3. Iluminación de Polígonos Monótonos Ortogonales . . . . .	52
4.3.1. Aspectos algorítmicos . . . . .	54
4.4. Conclusiones . . . . .	56
<b>5. Triángulos monocromáticos vacíos</b>	<b>57</b>
5.1. Introducción . . . . .	57
5.2. Construcción de la cota inferior . . . . .	59
5.3. Mejorando nuestra construcción . . . . .	63
5.4. Conclusiones y problemas abiertos . . . . .	65
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La *geometría computacional* es una área de la computación con un desarrollo muy activo en los últimos años. Su objetivo es el estudio de algoritmos para resolver problemas planteados en términos geométricos. La *geometría combinatoria* es la rama de la matemática que estudia los objetos geométricos considerándolos como entidades discretas. La geometría computacional se desarrolla junto con la geometría combinatoria en una perfecta simbiosis, en la que un nuevo descubrimiento en una de ellas, usualmente inspira un nuevo problema en la otra. Es justo en la intersección de estas dos disciplinas en donde se desarrolla la investigación presentada en este trabajo. Nuestro objeto de estudio son las *gráficas geométricas*.

Una gráfica geométrica es una gráfica cuyos vértices son puntos en el plano euclidiano, generalmente (aunque no necesariamente) en *posición general*<sup>1</sup>, y cuyas aristas son segmentos de recta cuyos extremos son los vértices correspondientes. La relevancia en la práctica de las gráficas geométricas es evidente: casi cualquier gráfica se representa mediante un dibujo en el que los vértices son puntos; y es muy natural dibujar las aristas usando segmentos de recta. Por esto y el interés matemático intrínseco de estas gráficas, no es sorprendente que exista una gran cantidad de trabajo previo cuyo objeto de estudio es precisamente éste: en prácticamente cualquier revista sobre geometría computacional y/o combinatoria se pueden encontrar múltiples trabajos al respecto. La monografía [Pac04] presenta una selección de artículos que tratan exclusivamente sobre gráficas geométricas. Dos compendios sobre resultados en gráficas geométricas se presentan en [Pac99] y en el Capítulo 9 de [BMP05].

En esta tesis presentamos un estudio de las gráficas geométricas desde cuatro enfoques diferentes:

---

<sup>1</sup>*Esto quiere decir que la gráfica no tiene tres de sus vértices sobre la misma recta.*

- En el Capítulo 2, abordamos nuestro estudio desde una variante geométrica de la *teoría extremal de gráficas*.
- En el Capítulo 3, abordamos nuestro estudio desde el punto de vista del área de *dibujo de gráficas*.
- En el Capítulo 4, abordamos nuestro estudio desde el punto de vista del área de *iluminación de galerías de arte*.
- En el Capítulo 5, abordamos nuestro estudio desde el punto de vista de la geometría combinatoria sobre conjuntos de puntos *rojo/azules* en el plano.

Vale la pena mencionar que no es necesario que el lector esté familiarizado con estas áreas para comprender los resultados aquí presentados; aunque por supuesto, si está familiarizado con algunas de ellas, podrá apreciar (y espero que incluso disfrutar) más los mismos.

El orden lógico con el que estos capítulos son presentados, corresponde a la “universalidad” con la que el trabajo respectivo aborda las gráficas geométricas: los capítulos 2 a 5 abarcan, respectivamente:

- todas las gráficas geométricas con vértices en posición general,
- todas las gráficas geométricas cuyos vértices tienen coordenadas enteras (y no necesariamente están en posición general).
- todas las gráficas geométricas correspondientes a polígonos simples *monótonos*.
- dado un conjunto de puntos  $S$  en posición general, las gráficas geométricas con vértices en  $S$  que son dibujos de  $K_3$ , y que además no contienen ningún punto de  $S$  en su interior (triángulos vacíos de la gráfica geométrica con conjunto de vértices  $S$ ).

A lo largo de este trabajo usaremos conceptos de teoría de gráficas y de algoritmos. Los libros [Die05] y [CLRS09] son, respectivamente, una buena fuente de consulta para los conceptos de estas áreas. En este trabajo introduciremos, en el capítulo respectivo, los conceptos usados que no sean tan familiares; aunque vale la pena aclarar que la mayoría de los conceptos que usamos son bien conocidos.

En el resto de este capítulo introduciremos brevemente las áreas de la geometría computacional/combinatoria relevantes a la tesis. Aclaremos que la discusión de los resultados previos relevantes a cada uno de los capítulos ha sido pospuesta a la introducción del capítulo respectivo, con el propósito de hacer más autocontenidos a los mismos.

## 1.1. Teoría extremal de gráficas

La teoría extremal de gráficas estudia, en abstracto, la manera en la que las propiedades globales de una gráfica influyen en las subestructuras locales de la gráfica. En particular estudia preguntas de la forma *¿cuál es el máximo número de aristas que una gráfica puede tener sin contener una subestructura dada?* El inicio de la teoría extremal de gráficas puede situarse en 1941, cuando Turán probó su famoso resultado. (Aunque para ser justos, debemos mencionar que el caso  $r = 2$  de este teorema fue probado en 1907 por Mantel [Man07].)

**Teorema 1.1** (Turán(1941)). *Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices tal que no contiene una subgráfica isomorfa a  $K_{r+1}$ , y tal que su número de aristas es el máximo posible. Entonces  $G$  es la gráfica  $r$ -partita completa con tamaños de las particiones lo más balanceadas posibles. En particular, si  $r$  divide a  $n$ , entonces el número de aristas de  $G$  es*

$$\frac{r-1}{r} \cdot \frac{n^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{n^2}{2}.$$

Otro resultado fundamental en esta área es el celebrado Teorema de Erdős-Stone, el cual, generalizando el Teorema de Turán, da información asintótica del número máximo de aristas que puede tener una gráfica con  $n$  vértices, tal que no contenga una subgráfica isomorfa a una gráfica  $r$ -partita completa con  $t$  vértices en cada clase cromática.

**Teorema 1.2** (Erdős-Stone(1946)). *Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices, de tal forma que  $G$  no contiene una subgráfica  $r$ -partita completa con  $t$  vértices en cada clase cromática. Entonces el número de aristas de  $G$  es a lo más*

$$\left(\frac{r-2}{r-1} + o(1)\right) \binom{n}{2}.$$

De inmediato obtenemos como corolario una cota al número máximo de aristas que puede tener una gráfica sin tener una subgráfica isomorfa a una gráfica arbitraria  $H$  en términos del número cromático de  $H$ ; pues toda gráfica con número cromático  $\chi$  es una subgráfica de la gráfica  $\chi$ -partita completa regular con el suficiente número de vértices.

Los dos teoremas anteriores dan una idea clara del tipo de problemas considerados en la teoría extremal de gráficas. Si agregamos un componente geométrico a estos

problemas, obtenemos la teoría extremal de gráficas geométricas; algunos de sus resultados son los siguientes.

**Teorema 1.3** ([Tót00]). *Sea  $G$  una gráfica geométrica con  $n$  vértices, tal que  $G$  no contiene una trayectoria plana de longitud  $k$ . Entonces el número máximo de aristas que  $G$  puede tener es*

$$Ck^2n,$$

para una cierta constante  $C$ .

También podemos considerar problemas algorítmicos relacionados con este tipo de problemas, uno de ellos es el siguiente. ¿Cuál es la complejidad computacional de determinar si una gráfica geométrica dada contiene un ciclo hamiltoniano? La respuesta es que el problema es NP-completo, y esto se sigue como corolario del siguiente resultado.

(La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos  $S$ , es la gráfica geométrica con conjunto de vértices  $S$ , en donde dos puntos son adyacentes si por ellos pasa un círculo cuyo interior no contiene puntos de  $S$ .)

**Teorema 1.4** ([Dil96]). *Sea  $S$  un conjunto de puntos de tal forma que la triangulación de Delaunay de  $S$  no es degenerada. Decidir si la triangulación de Delaunay de  $S$  contiene un ciclo Hamiltoniano es NP-completo.*

En el Capítulo 2 estudiamos varios problemas de este tipo, obteniendo resultados combinatorios del tipo del Teorema 1.3, y también resultados algorítmicos del tipo del Teorema 1.4.

## 1.2. Dibujo de gráficas

*Dibujo de gráficas* es una rama de la geometría combinatoria/computacional, cuyo objeto de estudio son las propiedades de los dibujos de gráficas, principalmente en el plano. El Capítulo 9 de [BMP05] presenta un compendio sobre esta rama desde el punto de vista combinatorio. El libro [BETT99] es una colección de algoritmos para calcular dibujos de gráficas. Es claro que una gráfica geométrica es un dibujo de una gráfica en el plano. Las gráficas geométricas juegan un papel central en esta rama.

Una clase de problemas estudiados por *dibujo de gráficas*, es la caracterización de las gráficas que admiten un dibujo de cierto tipo. Uno de los primeros resultados en esta línea, probado independientemente en múltiples ocasiones, es el siguiente. Antes de

enunciarlo, recordemos que una gráfica es *planar* si admite un dibujo en el plano en el que sus aristas son segmentos de curvas en el plano y, dos a dos, no se intersecan en sus interiores.

**Teorema 1.5** ([Fár48, Ste51, SR34, Wag36]). *Una gráfica  $G$  admite un dibujo en el plano en el que sus aristas son segmentos de recta y, dos a dos, no se intersecan en sus interiores, si y sólo si  $G$  es planar.*

El teorema anterior caracteriza la clase de gráficas que pueden realizarse como gráficas geométricas sin cruces, como la clase de gráficas planares.

En esta rama también se investiga la complejidad de los algoritmos para decidir si una gráfica tiene un dibujo de cierto tipo, y si es así, calcular el dibujo correspondiente. El problema correspondiente de decidir si una gráfica admite un dibujo sin cruces en el plano, y de calcular semejante dibujo si es el caso, puede llevarse a cabo en tiempo lineal en el número de vértices, como lo establece el siguiente resultado de Hopcroft y Tarjan.

**Teorema 1.6** ([HT74]). *Dada una gráfica  $G$  con  $n$  vértices, existe un algoritmo que en tiempo óptimo  $O(n)$  determina si  $G$  admite un dibujo sin cruces en el plano. El algoritmo se puede modificar para construir semejante dibujo, si es que éste existe.*

En el espíritu de los dos teoremas anteriores, en el Capítulo 3 caracterizamos la clase de gráficas que admiten un *dibujo primitivo*, el cual es un cierto tipo de gráfica geométrica. De nuestra caracterización se sigue que el problema de decisión correspondiente es NP-completo. Extendemos nuestros resultados a dimensiones superiores, y discutimos un algoritmo que en tiempo óptimo  $O(n)$  calcula un dibujo primitivo de una gráfica 4-coloreada dada.

### 1.3. Iluminación de galerías de arte

Esta es una rama de la geometría computacional que estudia problemas de visibilidad en diversos objetos geométricos. El objetivo común es “cubrir” o “iluminar” los objetos geométricos correspondientes, usando el mínimo número posible de “guardias”. Típicamente un guardia cubre un objeto, si existe un segmento de recta que los conecta y que no interseca ningún otro objeto. Esta explicación se entiende mejor considerando el problema original de galerías de arte, del cual se desprenden las demás variantes.

**Problema de iluminación de galerías de arte:** ¿Cuántos guardias son necesarios, y cuántos son suficientes, para patrullar las pinturas y obras de arte en una galería con  $n$  paredes?

Este problema fue planteado originalmente por Victor Klee en 1973. Poco tiempo después V. Chvátl dio la siguiente respuesta.

**Teorema 1.7** ([Chv75]). *Toda galería de arte con  $n$  paredes puede patrullarse con  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardias, y existen galerías de arte en las que este número de guardias es necesario.*

Desafortunadamente, la demostración de Chvátl es complicada. Fisk dio unos años después una prueba mucho más simple [Fis78]. La prueba es simplemente demostrar que todo polígono triangulado admite una 3-coloración; colocando guardias en la clase cromática más pequeña de semejante coloración, se vigila todo el polígono.

El problema es también interesante desde el punto de vista algorítmico. Agarwal demostró que el problema de decidir si un polígono puede ser vigilado con  $k$  guardias es NP-completo [Aga84]. Si lo que se quiere es calcular un conjunto de  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardias para vigilar un polígono de  $n$  lados, entonces la construcción de Fisk se puede combinar con el algoritmo de Chazelle [Cha91] para triangular un polígono, y entonces obtenemos un algoritmo que calcula el conjunto de puntos guardia en tiempo óptimo  $O(n)$ .

Numerosas variantes sobre el problema original han aparecido en la literatura. Sin ser exhaustivos podemos mencionar las siguientes:

- El problema de iluminación con aristas guardia, en el que una *arista guardia* es una arista del polígono que puede iluminar todos los puntos visibles desde alguno de sus puntos. Esta variante está inspirada por las lámparas fluorescentes en forma de tubo.
- El problema de iluminación con reflectores, en el que un punto guardia puede iluminar todos los puntos visibles desde él, contenidos en un sector angular cuya apertura está acotada por cierta constante  $\alpha$ .
- El problema de iluminación de polígonos con hoyos, en el cual el polígono que modela la galería de arte ya no es simple, sino que contiene polígonos *hoyo* en su interior, que actúan como obstáculos a la visibilidad entre puntos.
- El problema de iluminación con guardias en vértices, en el que los guardias se pueden colocar únicamente en vértices del polígono. Claramente la prueba de Fisk resuelve esta variante.

En todas estas variantes el objetivo es siempre el determinar el número de guardias suficientes, y a veces necesarios, para iluminar la galería correspondiente en función de su tamaño. También es importante encontrar algoritmos que calculan una solución óptima, dada alguna galería concreta.

La intensa actividad de investigación sobre problemas de este tipo puede constatarse con la extensa bibliografía al respecto. El libro [O'R87] y los compendios [She92] y [Urr00] se dedican exclusivamente a resultados sobre iluminación de galerías de arte.

En el Capítulo 4 introducimos una nueva variante del problema de iluminación de galerías de arte. Abordamos el problema desde un punto de vista tanto combinatorio como algorítmico.

## 1.4. Gráficas geométricas sobre conjuntos de puntos rojo/azules

El problema general de esta línea de investigación es, dada una gráfica geométrica completa con  $n$  vértices, los cuales se han coloreado cada uno con color *rojo* o con color *azul*, determinar la existencia de ciertas subgráficas cuyas aristas son todas *bicromáticas* (sus dos extremos tienen colores distintos) o *monocromáticas* (sus dos extremos tienen el mismo color). Un resultado clásico es el siguiente.

**Teorema 1.8** (Apareamiento rojo/azul). *Dados  $m$  puntos rojos y  $m$  puntos azules, existe un apareamiento perfecto plano en la gráfica geométrica completa inducida por esos puntos, tal que cada arista tiene un extremo rojo y un extremo azul.*

Usando recursivamente el algoritmo de [LMS94] para calcular en tiempo lineal un *corte Ham-Sandwich*, se puede calcular el apareamiento rojo/azul en tiempo  $O(m \log m)$ . Notemos que este resultado es generalizado para el caso en el que el conjunto es  $k$ -coloreado, con  $k \geq 2$ , en el Teorema 2.4 en el Capítulo 2.

Si, en contraste con el teorema anterior, nos preguntamos por emparejamientos planos máximos tales que todas sus aristas sean monocromáticas, entonces el siguiente Teorema de Dumitrescu y Kaye da una respuesta parcial.

**Teorema 1.9** ([DK01]). *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general con  $r$  puntos rojos y  $b = n - r$  puntos azules. Entonces existe un apareamiento plano con aristas monocromáticas que cubre al menos  $0,8571n$  puntos de  $S$ . Semejante apareamiento se puede calcular en tiempo  $O(n^2)$ . Respecto a la cota superior al tamaño*

*del apareamiento plano monocromático máximo, existe un conjunto bicoloreado de  $n$  puntos,  $S$ , tal que todo apareamiento plano monocromático cubre a lo más  $0,9871n$  puntos de  $S$ .*

Un problema abierto muy interesante sobre conjuntos de puntos rojo/azules es la Conjetura 3.1 de [DHKS03]. En esta, Devillers, Hurtado, Károlyi y Seara sugieren que en todo conjunto de puntos bicoloreado *suficientemente grande*, existe un *cuadrilátero convexo monocromático vacío*, esto es, un conjunto de cuatro puntos en posición convexa, todos coloreados del mismo color, y tal que no hay ningún punto del conjunto en el interior de su cierre convexo. C. Huemer y C. Seara [Hue09] han verificado que, de ser cierta la conjetura, se necesitan al menos 37 puntos para forzar el cuadrilátero monocromático vacío. Un resultado parcial para esta conjetura fue obtenido en 2009, cuando Aichholzer, Hackl, Huemer, Hurtado y Vogtenhuber [AHH<sup>+</sup>09] demostraron que todo conjunto bicoloreado con al menos 5044 puntos, determina un cuadrilátero monocromático vacío (no necesariamente convexo).

En el Capítulo 5 estudiamos un problema relacionado con el de esta conjetura: nos preguntamos por el número de *triángulos* monocromáticos vacíos que hay en todo conjunto bicoloreado de  $n$  puntos en posición general.

Para una colección de problemas similares sobre conjuntos de puntos rojo/azules, el lector puede consultar los compendios [Pac99], [KK03], y el Capítulo 9 de [BMP05].

## Capítulo 2

# Eliminación de aristas y subconfiguraciones planas en gráficas geométricas

El trabajo descrito en este capítulo corresponde a la subárea de *teoría extremal de gráficas geométricas*.

El problema *canónico* de la *teoría extremal de gráficas* consiste en encontrar el número máximo de aristas que puede contener una gráfica  $G$  con  $n$  vértices, de tal forma que  $G$  *no* contenga una subgráfica isomorfa a una gráfica  $F$  dada. En el caso de la *teoría extremal de gráficas geométricas*, el problema extremal se plantea sobre gráficas geométricas. El problema puede ser entonces de la forma:

¿Cuál es el número máximo de aristas que cualquier gráfica geométrica puede tener, de tal forma que *no* contenga *una cierta* subestructura plana?

En este capítulo damos una respuesta a esta pregunta cuando esta es planteada sobre alguna de las tres siguientes subestructuras:

1. Apareamiento perfecto plano.
2. Árbol plano que cubre  $k$  vértices.
3. Triangulación del conjunto de vértices.

En todos los casos damos cotas justas, y como producto de nuestros resultados existenciales, obtenemos consecuencias algorítmicas sobre el problema de decisión que determina si una gráfica dada contiene la subestructura respectiva.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la sección 2.1 se presenta un panorama general sobre el trabajo previo relacionado. En la segunda parte, correspondiente a las secciones 2.2, 2.3 y 2.4, estudiamos el problema extremal del apareamiento plano, árbol que cubre un cierto número de vértices, y triangulación del conjunto de vértices, respectivamente. En la sección 2.5 discutimos las consecuencias algorítmicas de los resultados presentados en la segunda parte del capítulo. Por último, en la sección 2.6 presentamos un resumen de los resultados y discutimos los problemas más importantes que dejamos abiertos.

La mayor parte del material presentado en este capítulo fue publicado en las actas de congreso [ACFM<sup>+</sup>08], y recientemente fue aceptado para su publicación en *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* [ACFM<sup>+</sup>09].

## 2.1. Introducción

El problema típico de la *teoría extremal de gráficas* tiene la siguiente forma: dada una gráfica  $G$  con  $n$  vértices, ¿cuál es el número máximo de aristas que  $G$  puede tener sin que contenga una cierta subestructura? Si la subestructura por la que nos preguntamos es una gráfica completa con  $r$  vértices,  $K_r$ , entonces la pregunta corresponde justamente al problema clásico de Turán; el cual es uno de los primeros problemas de teoría extremal de gráficas.

Si al tipo de problemas anteriormente descritos le añadimos una componente geométrica, entonces llegamos al área de *teoría extremal de gráficas geométricas*. En este caso, la pregunta resulta ser: ¿cuál es el máximo número de aristas que puede tener una gráfica *geométrica* con  $n$  vértices, sin contener una subgráfica *geométrica*  $F$ ? Alternativamente, podemos plantear la pregunta de la forma: ¿cuál es el máximo número de aristas que pueden *eliminarse* de *cualquier* gráfica geométrica con  $n$  vértices, de tal forma que la subgráfica resultante *contiene* a la subgráfica  $F$ ? Este enfoque alternativo puede resultar más conveniente en algunos casos, y es de hecho el que adoptamos en este capítulo.

Los problemas extremales sobre gráficas geométricas han tenido considerable atención. Uno de estos problemas, antecedente del trabajo abordado en este capítulo, es determinar el número mínimo  $e_k(n)$  tal que toda gráfica geométrica con  $n$  vértices y

$m > e_k(n)$  aristas contiene  $k + 1$  aristas disjuntas par a par; esto es, un apareamiento plano con  $k + 1$  parejas. Planteado de manera alterna,  $e_k(n)$  es el número máximo de aristas en una gráfica geométrica con  $n$  vértices, sin  $k + 1$  aristas disjuntas par a par.

Un resultado de Erdős [Erd46] asegura que  $e_1(n) = n$ ; esto es, toda gráfica geométrica con  $n$  vértices y al menos  $n + 1$  aristas contiene a dos de ellas que no se intersecan. Para tres aristas que par a par no se intersecan, cotas para  $e_2(n)$  fueron dadas en [AE89, GKK96], culminando en  $e_2(n) = 5n/2$  más alguna constante, como demostró recientemente Černý [Čer05]. Cotas para  $e_3(n)$  se dan en [TV99, GKK96].

Para valores generales de  $k$ , Goddard y coautores [GKK96] mostraron que  $e_k(n) \leq cn(\log n)^{k-4}$  para alguna constante  $c$ . Esto fue mejorado por Pach y Törőcsik [PT94] a  $e_k(n) \leq k^4 n$ , la primera cota superior lineal en  $n$ . Tóth y Valtr mejoraron la dependencia en  $k$  a  $e_k(n) \leq k^3(n + 1)$ . Esta cota fue mejorada por Tóth [Tót00] (para  $k \geq 2^9$ ) a  $e_k(n) \leq 2^9 k^2 n$ , donde la constante  $2^9$  fue mejorada a  $2^8$  por Felsner [Fel04]. Respecto a cotas inferiores, Kupitz probó que  $e_k(n) \geq kn$ , lo cual fue mejorado por Tóth y Valtr [TV99] a  $e_k(n) \geq \frac{3}{2}(k - 1)n - 2k^2$ . Se conjetura que  $e_k(n) \leq ckn$ , para alguna constante  $c$ . Trabajo relacionado incluye [BKV03, KPT97, Kup84, KP96].

Respecto a árboles geométricos planos, recientemente Benediktovich [Ben06] probó que toda gráfica geométrica completa con  $n \geq 5$  vértices, sigue conteniendo un árbol generador plano después de eliminar de ella un 2-factor *no* plano (esto es, una subgráfica generadora 2-regular en la que dos aristas comparten un punto interior).

## 2.2. El problema extremal del apareamiento perfecto

En esta sección damos una respuesta a la pregunta ¿cuál es el número máximo de aristas que se pueden eliminar de cualquier gráfica geométrica completa con  $2n$  vértices, de tal forma que la subgráfica resultante *contiene* un apareamiento perfecto plano? La respuesta exacta resulta ser  $n - 1$ . En otras palabras, tenemos que

$$e_{n-1}(2n) = \binom{2n}{2} - n = 2n(n - 1). \quad (2.1)$$

Este valor generaliza la cota para el caso convexo de Kupitz y Perles (ver [GKK96]) al caso no-convexo.

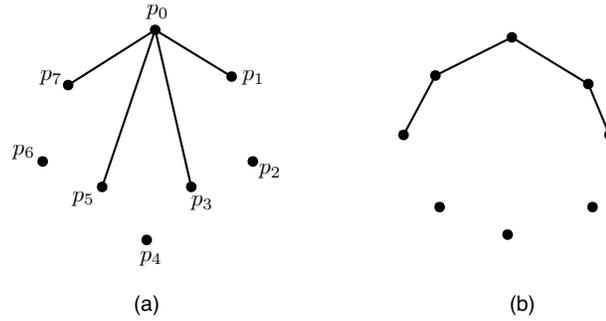


Figura 2.1: La eliminación de las  $n$  aristas indicadas en estos conjuntos de  $2n$  puntos deshabilita cualquier apareamiento perfecto plano.

Vale la pena mencionar que Jansen y Woeginger [JW93] demostraron que en general, el problema de determinar si una gráfica geométrica dada tiene un apareamiento perfecto plano es NP-completo.

### 2.2.1. Cota inferior a $e_{n-1}(2n)$

Probamos que  $e_{n-1}(2n) \geq 2n(n-1)$  exhibiendo, para toda  $2n \geq 6$ , una gráfica geométrica *no convexa* con  $2n$  vértices, tal que la eliminación de  $n$  aristas en ella da como resultado una subgráfica sin apareamiento perfecto plano.

El caso  $2n = 8$  se ilustra en la Figura 2.1-(a) en esta página. Consideremos la gráfica geométrica que resulta al eliminar las aristas mostradas en esa figura, de la gráfica geométrica completa sobre el conjunto de puntos  $\{p_0, \dots, p_7\}$ . Es fácil verificar que esta gráfica no contiene un apareamiento perfecto plano: apariemos al punto  $p_0$  con alguno de  $p_2, p_4$  o  $p_6$ , los cuales son sus únicas parejas posibles. Llamemos  $e$  a la arista que resulta de esta pareja. Es imposible completar  $e$  a un apareamiento perfecto plano, pues como los extremos de  $e$  están en la frontera convexa del conjunto,  $e$  *separa* el resto de los puntos en dos subconjuntos; cada uno de cardinalidad impar, y por lo tanto no apareables perfectamente de manera plana.

**Lema 2.1.** *Para todo entero positivo  $2n$ , existe una gráfica geométrica completa con  $2n$  vértices, tal que la eliminación de  $n$  aristas en ella deshabilita cualquier apareamiento perfecto plano.*

*Demostración.* La construcción mostrada en la Figura 2.1-(a) se generaliza para toda  $2n \geq 6$ : comenzando con una gráfica geométrica completa sobre un conjunto

de  $2n$  puntos en posición convexa, sea  $p_0$  cualquier punto de ese conjunto, y sean  $p_1, \dots, p_{2n-1}$  el resto de los puntos, ordenados radialmente respecto a  $p_0$ . Movamos cada uno de los puntos  $p_3, p_5, \dots, p_{2n-3}$  con dirección a  $p_0$  hasta que crucen la frontera convexa del conjunto. La eliminación del conjunto de  $n$  aristas  $\{p_0 p_i \mid i \in \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}\}$  deshabilita cualquier apareamiento perfecto plano en la subgráfica geométrica resultante. Nuevamente, cualquier arista que contiene a  $p_0$  como extremo separa el resto de los puntos en dos subconjuntos, cada uno de ellos de cardinalidad impar.  $\square$

### 2.2.2. Cota superior a $e_{n-1}(2n)$

Para probar que en toda gráfica geométrica completa con  $2n$  vértices y a lo más  $n-1$  aristas eliminadas hay un apareamiento perfecto plano, hacemos uso del siguiente resultado para gráficas abstractas.

**Teorema 2.2.** *Para cualesquiera dos enteros  $p \geq 2$  y  $n \geq 1$ , y para toda subgráfica generadora  $H = (V, E')$  de la gráfica completa  $K_{pn}$ , con  $|E'| \leq n-1$ , la gráfica  $K_{pn} - H$  contiene una copia de la gráfica  $p$ -partita completa  $K_{n,n,\dots,n}$ .*

*Demostración.* Para cada  $p$ , procedemos por inducción sobre  $n$ . El caso base  $n = 1$  es trivialmente cierto.

Supongamos que  $n \geq 2$  y que el teorema es cierto para toda  $n' < n$ . Supongamos también que  $|E'| \geq 1$ , pues de otra forma no habría nada que demostrar.

Observemos que en  $H$ , el número máximo de vértices incidentes a alguna arista es  $2|E'| = 2n - 2$ . Por lo tanto el número de vértices aislados en  $H$  es al menos

$$pn - (2n - 2) = n(p - 2) + 2 \geq 2(p - 2) + 2 = 2(p - 1).$$

Sea  $S$  un conjunto de  $p - 1$  vértices aislados en  $H$ , y sea  $v$  un vértice incidente a alguna arista de  $H$ . Denotemos con  $N(v)$  el conjunto de vecinos de  $v$  en  $H$ .

Consideremos la gráfica  $H^* = (V^*, E^*)$ , donde  $V^*$  es el conjunto  $V \setminus (S \cup \{v\})$ , y  $E^*$  es el conjunto de aristas de la gráfica inducida en  $H$  por  $V^*$ , al cual le agregamos el mínimo número de aristas para que la subgráfica inducida por  $N(v)$  en  $H^*$  sea conexa. Es claro que  $|V^*| = (n - 1)p$  y que  $|E^*| \leq |E'| - 1 \leq n - 2$ , pues eliminamos  $|N(v)|$  aristas de  $H$  y le añadimos a lo más  $|N(v)| - 1$  aristas para restaurar la conexidad de la subgráfica inducida por  $N(v)$ .

Por inducción,  $K_{(n-1)p} - H^*$  tiene una copia de la gráfica  $p$ -partita completa  $K_{n-1, n-1, \dots, n-1}$ . Como la subgráfica inducida por  $N(v)$  en  $H$  es conexa, todos los vértices de  $N(v)$  pertenecen a la misma clase de vértices de  $K_{n-1, n-1, \dots, n-1}$ . Extendamos esa clase de vértices añadiéndole el vértice  $v$ , y añadamos a cada una de las otras  $p-1$  clases un vértice distinto de  $S$ ; el resultado es una gráfica  $p$ -partita completa  $K_{n, n, \dots, n} \subseteq K_{pn}$ .  $\square$

Con el teorema anterior estamos listos para probar el resultado principal de esta sección.

**Corolario 2.3.** *Para toda gráfica geométrica completa  $G$  con  $2n$  vértices, y para toda subgráfica  $H \subseteq G$  con a lo más  $n-1$  aristas, la gráfica  $G - H$  contiene un apareamiento perfecto plano. La cota es justa.*

*Demostración.* Aplicamos el caso  $p = 2$  del Teorema 2.2 y concluimos que  $G - H$  tiene una gráfica bipartita completa  $K_{n, n}$ . Coloreamos el conjunto de vértices con dos colores de acuerdo a esta bipartición; asignemos a los vértices de una clase el color *rojo* y a los de la otra clase el color *azul*. Es un resultado bien conocido [AKE85] que semejante conjunto bicolorado tiene un apareamiento perfecto plano *rojo-azul*; es decir, todas las aristas del apareamiento contienen un extremo rojo y uno azul. Del Lema 2.1 se sigue que la cota es justa.  $\square$

Otro ejemplo, aparte del presentado en el Lema 2.1, de una gráfica con  $2n$  vértices en el que la eliminación de  $n$  aristas deshabilita cualquier apareamiento perfecto plano, es el ilustrado en la Figura 2.1-(b) en la página 12. En el caso de puntos en posición convexa, la eliminación de  $n$  aristas consecutivas sobre la frontera convexa deshabilita cualquier apareamiento perfecto plano. Esto se sigue del hecho de que cualquier apareamiento perfecto plano sobre semejante conjunto de puntos contiene al menos *dos* aristas en la frontera convexa [HHN02]; como el conjunto de aristas eliminadas cubre  $n+1$  puntos, hay al menos dos de ellos que se tienen que aparear entre sí. Estos dos puntos no pueden ser consecutivos, pues la arista que los conecta ha sido eliminada, y por lo tanto la arista que los aparea divide el conjunto en dos subconjuntos en posición convexa; uno de esos dos subconjuntos (el que contiene sólo vértices cubiertos por las aristas eliminadas) no puede emparejarse perfectamente de manera plana, pues solo tiene *una* arista en su frontera convexa.

Los dos ejemplos mostrados de gráficas geométricas completas con  $2n$  puntos, en los que la eliminación de  $n$  aristas deshabilita cualquier apareamiento perfecto plano, tienen en común que el conjunto de aristas eliminadas cubre  $n+1$  vértices. Esto no es casualidad, pues resulta que el *tamaño* de la componente más grande de la

gráfica eliminada es crítica para asegurar el apareamiento en la gráfica resultante. El siguiente teorema sobre puntos multicoloreados formaliza esta idea, extendiendo el teorema del apareamiento *rojo-azul* en conjuntos de puntos bicoloreados.

**Teorema 2.4.** *Sea  $S$  un conjunto de puntos multicoloreado en posición general en el plano, tal que  $|S| = 2n$ . Entonces  $S$  tiene un apareamiento perfecto plano con aristas bicromáticas (cada arista tiene extremos de distinto color) si y sólo si la clase cromática más grande de  $S$  tiene a lo más  $n$  vértices.*

*Demostración.* La necesidad se sigue de inmediato. Para probar la suficiencia, primero probaremos que cualquier conjunto de puntos que satisface las hipótesis tiene al menos un apareamiento perfecto con aristas bicromáticas *no necesariamente plano*. Después probaremos que al menos uno de estos apareamientos es plano. Procedemos por inducción sobre el tamaño de  $S$ .

El caso base  $n = 1$  corresponde a un conjunto con un punto rojo y uno azul; la única arista que los une es el apareamiento plano buscado.

Supongamos que  $n \geq 2$  y que el teorema es cierto para toda  $n' \leq n$ . Sea  $v$  un vértice de la clase cromática más grande, y sea  $w$  un vértice de cualquier otra clase cromática. Consideremos el conjunto de puntos  $S' = S \setminus \{u, w\}$ , en donde los puntos heredan la coloración que tienen en  $S$ . El conjunto  $S'$  tiene la propiedad de que su tamaño es  $2(n-1)$ , y la clase cromática más grande tiene tamaño a lo más  $n-1$ . Por inducción,  $S'$  tiene un apareamiento perfecto  $M'$  con aristas bicromáticas. Extendemos  $M'$  a un apareamiento perfecto de  $M$  con aristas bicromáticas haciendo  $M := M' \cup \{uw\}$ .

(Cabe mencionar que Sitton [Sit96] probó un resultado más general sobre el apareamiento de tamaño máximo en un gráfica multipartita arbitraria.)

Lo anterior prueba que  $S$  tiene al menos un apareamiento perfecto con aristas bicromáticas. Para ver que al menos uno de estos apareamientos es plano, consideremos el apareamiento perfecto con aristas bicromáticas de  $S$  de longitud mínima,  $M_l$ , donde la longitud de un apareamiento es la suma de las longitudes de sus aristas. Supongamos por contradicción que  $M_l$  *no* es plano. Entonces hay al menos dos aristas  $xv$  y  $yw$  de  $M_l$  que se cortan en su interior en el punto  $p$  (ver Figura 2.2-(a)). Consideremos el apareamiento  $M'_l$  que obtenemos a partir de  $M_l$  apareando a  $x$  con  $w$  y a  $y$  con  $v$  (ver Figura 2.2-(b)). Denotemos con  $l(M)$  la longitud del apareamiento  $M$ , y con  $d(a, b)$  la distancia entre los puntos  $a$  y  $b$ . La longitud de  $M'_l$  es

$$\begin{aligned} l(M'_l) &= l(M) + [d(x, w) - (d(x, p) + d(p, w))] \\ &\quad + [d(y, v) - (d(y, p) + d(p, v))]. \end{aligned}$$

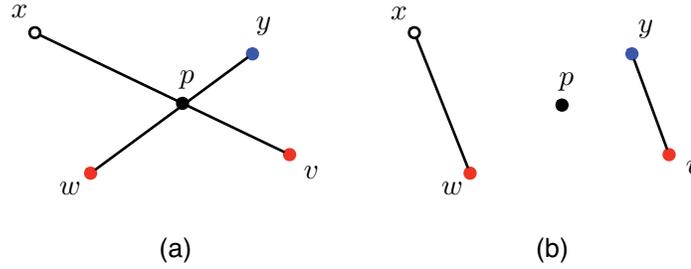


Figura 2.2: (a) Dos aristas que se cortan. (b) Reemparejar a los vértices de esas aristas disminuye la longitud total del apareamiento.

Por la desigualdad del triángulo,  $d(x, w) < d(x, p) + d(p, w)$  y también  $d(y, v) < d(y, p) + d(p, v)$ ; de lo que se sigue que  $l(M'_i) < l(M_i)$ . Esta es una contradicción a la minimalidad de  $l(M_i)$ , que implica que el apareamiento perfecto con aristas bicromáticas de longitud mínima de  $S$  es plano.  $\square$

Vale la pena mencionar en este punto que un problema relacionado con el Teorema 2.4, encontrar la trayectoria plana más larga con aristas bicromáticas que hay en todo conjunto multicolorado con  $n$  puntos en posición general, ha sido estudiado antes. Kynčl, Pach y Toth [KPT05] estudian el caso bicolorado, mientras que Merino, Salazar y Urrutia [MSU06] el caso de tres o más colores.

**Corolario 2.5.** *Para cada gráfica geométrica completa  $G$  con  $2n$  vértices, y para cada subgráfica  $H$  de  $G$  con a lo más  $n$  vértices en cada componente, la gráfica  $G - H$  contiene un apareamiento perfecto plano.*

*Demostración.* Coloreamos cada componente de  $H$  con un color diferente, y aplicamos el Teorema 2.4.  $\square$

Vale la pena mencionar que el Corolario 2.5 implica el Corolario 2.3.

Creemos que otra propiedad del conjunto de puntos crítica para la existencia del apareamiento perfecto plano después de la eliminación de un conjunto de aristas, es el número de puntos que hay al interior del cierre convexo del conjunto. Pensamos que si el número de puntos que hay en el interior del cierre convexo es grande (esencialmente la mitad del total de puntos), entonces se pueden eliminar aún más aristas, de tal

forma que la gráfica resultante aún tiene un apareamiento perfecto plano. Observemos que la construcción del Lema 2.1 produce una gráfica completa con  $2n$  vértices, de los cuales  $n - 2$  están en el interior del cierre convexo; y en donde la eliminación de  $n$  aristas deshabilita cualquier apareamiento perfecto plano. Esto nos lleva a formular la Conjetura 2.12 en la página 29 en la Sección 2.6.

### 2.3. El problema extremal del árbol plano que cubre $n - k$ vértices

En esta sección damos una respuesta a la pregunta extremal ¿cuál es el máximo número de aristas que una gráfica geométrica completa con  $n$  vértices puede tener, de tal forma que *no* contenga un subárbol plano que cubre  $n - k$  vértices? La respuesta la damos demostrando que en cualquier gráfica geométrica con  $n$  vértices y al menos  $\binom{n}{2} - n + 2$  aristas hay un árbol generador plano; también probamos que para todo  $2 \leq k \leq n - 1$ , cualquier árbol con  $n$  vértices y

$$\binom{n}{2} - \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil + 1$$

aristas tiene un árbol plano que cubre  $n - k$  vértices. En ambos casos nuestras cotas son justas.

El caso  $k = 0$ , que corresponde a encontrar un árbol generador plano, es un corolario de un resultado de Károlyi, Pach y Tóth (Teorema 1.1 en [KPT97]), que asegura que en cualquier dos-coloración de las aristas de una gráfica geométrica completa, al menos una de las dos clases cromáticas contiene un árbol generador plano. Esto implica que al eliminar  $n - 2$  aristas de cualquier gráfica geométrica completa en  $n$  vértices, la gráfica que resulta contiene un árbol generador plano: en lugar de eliminarlas, coloreamos a esas  $n - 2$  aristas de color *rojo*, y el resto de las aristas las coloreamos de *azul*; por el resultado de Károlyi et al. [KPT97], el conjunto azul de aristas tiene un árbol generador plano. La cota es justa, pues eliminar  $n - 1$  aristas incidentes a un mismo vértice lo desconecta, y por lo tanto en la gráfica resultante no hay ningún árbol generador.

Otra manera de deshabilitar un árbol generador plano en una gráfica geométrica convexa con  $n$  vértices eliminando  $n - 1$  aristas, es suprimiendo  $n - 1$  aristas de la frontera convexa de la gráfica. Esto es un corolario del siguiente lema.

**Lema 2.6.** *Todo árbol geométrico plano con  $n \geq 3$  vértices en posición convexa, tiene al menos dos aristas en su frontera convexa.*

*Demostración.* Procedemos por inducción en  $n$ . El caso base  $n = 3$  es trivialmente verificable. Supongamos que  $n > 3$  y que el lema es cierto para todo árbol  $T$  con a lo más  $n' < n$  vértices en posición convexa.

Supongamos que hay al menos una arista de  $T$  que *no* está en su frontera convexa, pues de otra forma no hay nada que demostrar. Denotemos por  $e = uv$  a esa arista que no está en la frontera convexa. Puesto que el conjunto de puntos está en posición convexa,  $e$  separa el resto de los puntos en dos subconjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , cada uno en posición convexa. Consideremos la gráfica inducida en  $T$  por el conjunto  $A \cup \{u, v\}$ ; esta es un árbol plano con  $n'' \leq n - 1$  vértices en posición convexa, y, por inducción, contiene al menos dos aristas en su frontera convexa, siendo una de ellas la arista  $e$ ; el resto de las aristas en su frontera convexa son también aristas de  $T$  en la frontera convexa de  $T$ . De manera similar, la gráfica inducida por  $B \cup \{u, v\}$  en  $T$  contiene al menos una arista en su frontera convexa, la cual es también una arista de  $T$  en su frontera convexa. El resultado se sigue.  $\square$

Cabe mencionar que Garcia et al. demostraron una versión mucho más general del lema anterior (Teorema 3 en [GHH<sup>+</sup>02]).

Los dos ejemplos que hemos mencionado en los cuales la eliminación de  $n - 1$  aristas deshabilita cualquier árbol generador plano, tienen en común que el conjunto de aristas eliminadas forma una gráfica conexa que cubre todos los vértices del árbol. Esto no es casualidad, pues la conexidad de la gráfica eliminada resulta ser crítica para la existencia de un árbol plano que cubre un cierto número de vértices en la gráfica resultante. El siguiente teorema formaliza esta idea.

**Teorema 2.7.** *Para toda gráfica geométrica completa  $G = (V, E)$  con  $n$  vértices, y para toda subgráfica generadora  $H$  de  $G$  con conexidad  $k$ , la gráfica  $G - H$  contiene un árbol plano que cubre  $n - k$  vértices. Aún más, existe una subgráfica  $H'$  de  $G$  con conexidad  $k$ , tal que todo subárbol plano de  $G - H'$  cubre a lo más  $n - k$  vértices.*

*Demostración.* Sea  $C$  un conjunto de corte de  $H$  de tamaño  $k$ , y sea  $V'$  el conjunto  $V - C$ . Denotemos por  $H'$  a la subgráfica inducida en  $H$  por  $V'$ ; esta es una gráfica *no* conexa con  $n - k$  vértices. Sea  $R$  una componente de  $H'$ , y sea  $B$  el conjunto de los vértices de  $H'$  que no pertenecen a  $R$ . Por construcción, no existe ninguna arista en  $H'$  que conecta un vértice de  $R$  con un vértice de  $B$ ; esto quiere decir que la subgráfica inducida por los vértices de  $H'$  en  $G - H$  contiene una subgráfica bipartita completa con partición  $(R, B)$ . A continuación mostramos que en esta subgráfica bipartita hay un árbol generador plano.

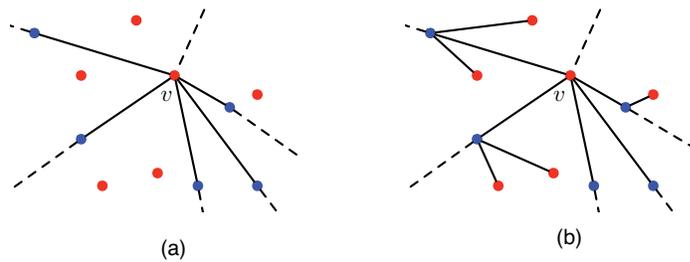


Figura 2.3: Árbol generador plano en gráfica bipartita completa.

Comenzamos coloreando los vértices de  $R$  de color *rojo* y los vértices de  $B$  de color *azul*. Sea  $v$  algún vértice de  $R$ . Denotemos con  $A_1$  el conjunto de aristas incidentes a  $v$ ; este conjunto de aristas es una estrella que conecta a  $v$  con todos los puntos de  $A$ , ver Figura 2.3-(a). Extendamos cada una de las aristas de  $A_1$  a la semirecta que la contiene y que tiene como extremo a  $v$ . Este conjunto de semirectas divide el plano en  $|B|$  regiones, de las cuales a lo más una es no convexa; si existe semejante región no convexa, tracemos una nueva semirecta con  $v$  como extremo, de tal forma que divida esta región en dos regiones convexas del mismo tamaño. Por construcción, en la frontera de cada una de esas regiones convexas se encuentra al menos un punto azul; asociemos a cada una de las regiones un punto azul  $b$  de su frontera, y conectemos cada uno de los puntos rojos contenidos en ella con el vértice  $b$ , ver Figura 2.3-(b). Sea  $A_2$  el conjunto de las aristas que conectan los puntos rojos al interior de las regiones convexas con los puntos azules asociados a ellas. La unión de  $A_1$  y  $A_2$  es un árbol generador plano de la gráfica bipartita completa con partición  $(A, B)$ .

Este árbol es un árbol plano que cubre  $n - k$  vértices de  $G - H$ , lo que prueba la primera parte del Teorema.

Para mostrar que hay una subgráfica generadora  $H$  de  $G$  con conexidad  $k$ , tal que todo subárbol de  $G - H$  cubre a lo más  $n - k$  vértices, consideremos la siguiente gráfica: sea  $Q$  un conjunto arbitrario de  $k$  vértices de  $G$ , y sea  $H$  la subgráfica generadora de  $G$  que tiene como aristas al conjunto de aristas de  $G$  que tienen uno o ambos extremos en  $Q$ . Es fácil verificar que la conexidad de  $H$  es  $k$ , pues la eliminación de cualesquiera  $k - 1$  vértices deja sin eliminar al menos un vértice de  $Q$ , el cual es adyacente al resto de los vértices no eliminados; y por otro lado, eliminar los  $k$  vértices de  $Q$  desconecta a  $H$ . El conjunto  $Q$  es un conjunto de  $k$  vértices aislados en  $G - H$ , y por lo tanto cualquier árbol de  $G - H$  cubre a lo más  $n - k$  vértices.  $\square$

Observemos que la construcción del árbol generador dada por el teorema anterior se puede implementar algorítmicamente en tiempo polinomial. Dada una gráfica

geométrica  $H$  con  $n$  vértices y un conjunto de corte  $C$  de  $H$  con  $k$  vértices, podemos construir algorítmicamente el árbol plano que cubre  $n - k$  vértices del complemento de  $H$  en tiempo polinomial: Comenzamos eliminando  $C$  de  $H$  para desconectarla. En el segundo paso detectamos una componente conexa de  $H - C$  (usando por ejemplo DFS); habiendo detectado esta componente, coloreamos a los puntos de la misma de rojo y al resto de los puntos de azul. En el tercer paso, escogemos un punto rojo  $v$  y ordenamos radialmente al resto de los puntos; esto nos agrupa al resto de los puntos en los sectores convexos usados en la prueba del teorema (trazamos la línea auxiliar si es que uno de los sectores es no convexo). Una vez agrupados estos puntos, las aristas que conforman al árbol se calculan trivialmente en tiempo lineal. Si sólo se conoce la gráfica  $H$ , pero no su conjunto de corte, es bien sabido que éste se puede calcular en tiempo polinomial, por lo que en cualquier caso el árbol generador plano correspondiente puede ser calculado en tiempo polinomial.

El Teorema 2.7 en la página 18 implica como casos particulares, que para toda subgráfica  $H$  con a lo más  $n - 1$  aristas, de una gráfica geométrica completa  $G$  con  $n$  vértices, la gráfica geométrica  $G - H$  tiene un árbol plano que cubre  $n - 1$  vértices; también implica que para toda subgráfica  $H$  disconexa,  $G - H$  tiene un árbol generador plano.

La cota anterior relaciona la existencia de un árbol de cierto tamaño, con la conexidad de la subgráfica eliminada. Al igual que podemos relacionar el número de aristas de la gráfica eliminada con su conexidad, podemos relacionar este número de aristas con la existencia del árbol; como lo muestra el siguiente teorema.

Dada una gráfica geométrica convexa  $G$  con  $n$  vértices, numeremos los vértices  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  en el sentido contrario al reloj. Definimos la *profundidad* de la arista  $ij$  como  $\min\{|i - j|, \{n - |i - j|\}\}$ . Las aristas en la frontera convexa tienen profundidad *ceró*. A las aristas con profundidad *uno* las llamamos *orejas*.

**Teorema 2.8.** *Para  $2 \leq k \leq n - 1$ , para toda gráfica geométrica completa  $G$  con  $n$  vértices, y para toda subgráfica  $H$  de  $G$  con a lo más  $\lceil kn/2 \rceil - 1$  aristas, la gráfica geométrica  $G - H$  contiene un árbol plano que cubre  $n - k + 1$  vértices. Esta cota es justa respecto al número de aristas de la subgráfica  $H$ : la gráfica geométrica convexa completa  $G$  tiene una subgráfica  $H$  con  $\lceil kn/2 \rceil$  aristas, tal que todo subárbol plano de  $G - H$  cubre a lo más  $n - k$  vértices.*

*Demostración.* Como  $H$  tiene a lo más  $\lceil kn/2 \rceil - 1$  aristas,

$$\sum_{v \in H} \deg(v) \leq 2(\lceil n/2 \rceil - 1) \leq kn - 1.$$

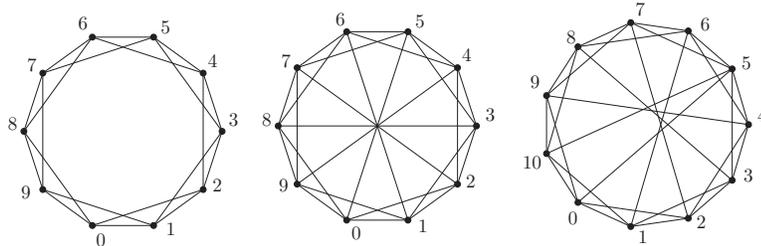


Figura 2.4: Las gráficas de Harary  $H_{4,10}$ ,  $H_{5,10}$  y  $H_{5,11}$ .

Por lo tanto, el grado promedio es a lo más  $k(n-1)/n < k$ ; lo que implica que hay un vértice de grado a lo más  $k-1$ , y entonces la conexidad de  $H$  es a lo más  $k-1$ . Del Teorema 2.7 se sigue que  $G-H$  tiene un árbol plano que cubre  $n-k+1$  vértices.

Para probar la segunda parte del teorema, mostaremos que la gráfica geométrica convexa  $G$  tiene una subgráfica  $H$  con  $\lceil kn/2 \rceil$  aristas, tal que cualquier árbol plano de  $G-H$  cubre a lo más  $n-k$  vértices. La subgráfica  $H$  es la *gráfica de Harary*  $H_{k,n}$  [Har62], y tiene la propiedad de ser la gráfica con  $n$  vértices y conexidad  $k$  con el mínimo número de aristas. A continuación definimos esta gráfica y la dibujamos en posición convexa con los vértices numerados  $0, 1, \dots, n-1$  en sentido contrario al reloj (ver Figura 2.4). Cada arista con profundidad a lo más  $\lfloor k/2 \rfloor$  está en  $H_{k,n}$ ; esto añade  $2\lfloor k/2 \rfloor$  aristas incidentes a cada vértice. Si  $k$  es impar, entonces también añadimos a  $H_{k,n}$  toda arista  $ij$  tal que  $|i-j| = \lfloor n/2 \rfloor$ ; esto añade una arista a cada vértice, excepto para  $n$  impar, en cuyo caso el vértice  $(n-1)/2$  obtiene dos aristas incidentes. Se sigue que  $H_{k,n}$  tiene  $\lceil kn/2 \rceil$  aristas en todos los casos.

Supongamos por contradicción que hay un árbol plano  $T$  en  $G-H_{k,n}$  con  $t \geq n-k+1$  vértices. Consideremos la gráfica dual  $D$  de  $T$ , la cual contiene un vértice por cada región que es acotada por aristas de  $T$  y la frontera del cierre convexo de  $G$  (excluyendo la región exterior al cierre convexo de  $G$ ). Dos vértices de  $D$  son adyacentes si las regiones correspondientes comparten una arista de  $T$ . Es bien sabido que  $D$  es un árbol.

Una arista en la frontera convexa de  $T$  se denomina *arista frontera*. Cada arista frontera con profundidad  $d$  fuerza a  $T$  a evitar cubrir un conjunto diferente de  $d-1$  vértices. Como  $T$  no contiene aristas de  $H_{k,n}$ , cada arista de  $T$  tiene profundidad al menos  $\lfloor k/2 \rfloor + 1$ . Así que si  $T$  tiene  $b$  aristas frontera, entonces  $T$  cubre a lo más  $n - b\lfloor k/2 \rfloor$  vértices; se sigue que  $n - k + 1 \leq t \leq n - b\lfloor k/2 \rfloor$ . Por el Lema 2.6 tenemos que  $b \geq 2$ ; se sigue que  $b = 2$ ,  $k$  es impar, y  $t = n - k + 1$ . García et al. [GHH<sup>+</sup>02] probaron que todo árbol que admite un dibujo rectilíneo con vértices en

posición convexa y sólo dos aristas frontera, es una *oruga*<sup>1</sup>, y en ese caso su dual es una trayectoria; se sigue que  $T$  es una oruga y  $D$  es una trayectoria. Como se ilustra en la Figura 2.5,  $T$  tiene exactamente dos aristas  $f'$  y  $f''$  de profundidad  $(k+1)/2$ , las hojas de  $D$  corresponden a las regiones definidas por  $f'$  y  $f''$ , y cada subregión contiene  $(k-1)/2$  vértices no en  $T$ ; cualquier otro vértice está en  $T$ .

Definimos la función  $q$  de la siguiente manera. Para cada arista  $e$  de  $D$ , si  $ij$  es la arista de  $T$  que cruza  $e$ , entonces  $q(e) := |i-j|$ . A continuación mostramos que  $q(e) = \lfloor n/2 \rfloor$  para alguna arista  $e$  de  $D$ ; esto implica que  $|i-j| = \lfloor n/2 \rfloor$  para alguna arista  $ij$  de  $T$ , lo cual es una contradicción, pues semejante arista está en  $H_{k,n}$ .

Ahora consideramos dos casos dependiendo de si el vértice 0 está o no en la frontera de una de las regiones correspondientes a  $f'$  o a  $f''$ .

Primero supongamos que el vértice 0 está en la frontera de la región correspondiente a  $f'$ , como lo ilustra la Figura 2.5 (izquierda). En este caso, caminando sobre  $D$  a partir de la arista que cruza  $f''$ , la función  $q$  comienza en  $(k+1)/2$ , se incrementa en uno en cada paso, y termina en  $n - (k+1)/2$ ; por lo tanto  $q(e) = \lfloor n/2 \rfloor$  para alguna arista  $e$  de  $D$ . El caso en el que el 0 está en la frontera de la región correspondiente a  $f''$  es análogo.

Ahora supongamos que 0 no está en la frontera de las regiones correspondientes a  $f'$  y  $f''$ , como lo ilustra la Figura 2.5 (derecha). Sea  $v$  el vecino de 0 con índice máximo. Tenemos que  $v$  es adyacente a  $n-1$  en  $T$ . Sea  $\alpha$  la arista de  $d$  que cruza la arista  $\{0, v\}$  de  $T$ . Sea  $\beta$  la arista de  $D$  que cruza la arista  $\{v, n-1\}$  de  $T$ . Primero suponemos que  $v \geq \lfloor n/2 \rfloor$ . Caminando sobre  $D$  comenzando en  $\alpha$  en la dirección contraria a  $\beta$ , la función  $q$  comienza en  $v$ , disminuye en uno en cada paso, y termina en  $(k+1)/2$ ; por lo que  $q(e) = \lfloor n/2 \rfloor$  para alguna arista  $e$  de  $D$ . Ahora supongamos que  $v \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$ . Caminando sobre  $D$  comenzando en  $\beta$  con dirección contraria a  $\alpha$ , la función  $q$  comienza en  $n-1-v$  (lo cuál es al menos  $\lfloor n/2 \rfloor$ ), disminuye en uno en cada paso, y termina en  $(k+1)/2$ ; por lo cuál  $q(e) = \lfloor n/2 \rfloor$  para alguna arista  $e$  de  $D$ . □

### 2.3.1. Conjuntos de puntos con muchos puntos en el interior

A continuación presentamos conjuntos de puntos en posición no convexa en los que no es posible eliminar más aristas que en el caso convexo, asegurando que aún persiste un árbol plano que cubre un cierto número de vértices. Estos conjuntos corresponden a

<sup>1</sup>Un árbol es *oruga* si la eliminación de todos sus vértices hoja produce una trayectoria.

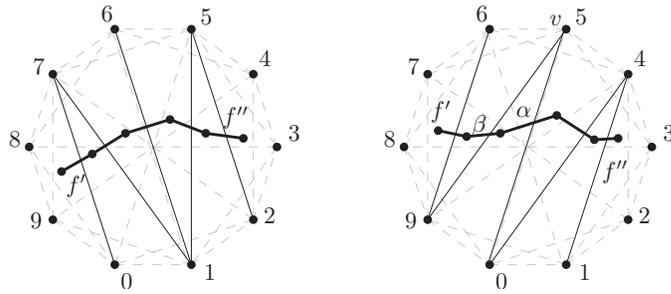


Figura 2.5: La oruga  $T$ , su gráfica dual  $D$  (resaltada) y las aristas eliminadas (segmentos discontinuos).

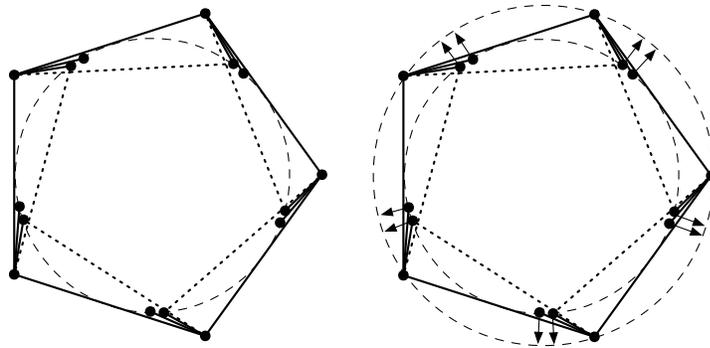


Figura 2.6: Ilustración de la Proposición 2.9 con  $h = 5$  y  $l = 2$ .

los casos  $k = 2(l+1)$  y  $n = h(l+1)$  del Teorema 2.8, para prácticamente cualesquiera dos enteros  $l$  y  $h$ .

**Proposición 2.9.** *Para cualesquiera enteros positivos  $h \geq 3$  y  $l \geq 0$ , existe un conjunto  $S$  con  $h$  puntos en la frontera convexa y  $l \cdot h$  puntos en su interior, y una subgráfica  $H$  de la gráfica geométrica completa  $G$  inducida por  $S$ , con  $|E(H)| = (l+1)^2 \cdot h$ , tal que cualquier árbol plano de  $G - H$  cubre a lo más  $h(l+1) - 2(l+1)$  vértices.*

*Demostración.* Para construir  $S$ , comenzamos con los vértices de un  $h$ -ágono convexo, y extendemos el conjunto añadiendo  $h \cdot l$  puntos sobre el incírculo del  $h$ -ágono; haciendo esto de tal forma que los nuevos vértices se agregan en grupos de  $l$  vértices, cada grupo *muy cerca* de una arista diferente del polígono, de manera que la distancia entre los vértices de un grupo y el punto más cercano del  $h$ -ágono aumenta

cuando los consideramos en el orden de las manecillas del reloj. La Figura 2.6 (izq.) ilustra esta situación.

Ahora consideremos el conjunto  $S'$  que resulta de mover todos los puntos del incírculo al circuncírculo del  $h$ -ágono, tomando como dirección para mover el punto  $p$ , el rayo que conecta el centro del  $h$ -ágono con  $p$ , ver Figura 2.6 (der.).

Sea  $H' = H_{2(l+1),h(l+1)}$  la gráfica definida respecto a  $S'$  de acuerdo al Teorema 2.8; consideremos a  $H'$  como una subgráfica de  $G$ . Observemos que cada par de aristas que *no* se corta en la gráfica geométrica completa inducida por  $S$ , pero que *sí* se corta en la gráfica geométrica completa inducida por  $S'$ , contiene o bien una arista que conecta un vértice del interior con su más cercano en el  $h$ -ágono, o bien una arista que conecta dos vértices adyacentes del  $h$ -ágono (aristas sólidas en la Figura 2.6). Cualquiera de estas aristas tiene profundidad a lo más  $l + 1$ ; por definición, semejantes aristas están en  $H_{2(l+1),h(l+1)}$ . Se sigue que cualquier subgráfica plana de  $G - H$  es también una subgráfica plana de  $G - H'$ , en particular cualquier subárbol plano de  $G - H$  es también un subárbol plano de  $G - H'$ . El Teorema 2.8 implica que cualquier árbol plano de  $G - H'$  cubre a lo más  $h(l + 1) - 2(l + 1)$  vértices; por lo tanto cualquier subárbol de  $G - H$  cubre a lo más  $h(l + 1) - 2(l + 1)$  vértices.  $\square$

## 2.4. El problema extremal de la triangulación del conjunto de puntos

En esta sección resolvemos el problema de determinar el máximo número de aristas que se pueden eliminar de cualquier gráfica geométrica completa  $G$  con  $n$  vértices, de tal forma que la subgráfica resultante aún contiene una triangulación del conjunto de vértices de  $G$ . En un trabajo relacionado, Lloyd [Llo77] probó que el problema de determinar si una gráfica geométrica contiene una triangulación de sus vértices como subgráfica, es NP-completo.

Dado un conjunto de puntos, hay ciertas aristas que están en cualquier triangulación del conjunto de puntos –por ejemplo, las de la frontera convexa–, a dichas aristas las denominamos *inevitables*. Es evidente que al eliminar una sola arista inevitable, deshabilitamos cualquier triangulación del conjunto de puntos. Es por ésto que en esta sección solamente consideramos a las aristas que *no* son inevitables, como aristas potencialmente eliminables. Observemos que como cualquier conjunto plano de aristas puede extenderse a una triangulación del conjunto de puntos, entonces una arista es inevitable si y sólo si *no* es cruzada por ninguna otra arista.

### 2.4.1. Caso convexo

Comenzamos investigando el caso convexo. En este escenario, las únicas aristas que no son cruzadas por alguna otra –y por lo tanto las únicas aristas inevitables– son las de la frontera convexa.

**Teorema 2.10.** *Para cualquier subgráfica  $H = (V, E')$  que tiene sólo aristas no inevitables de la gráfica geométrica convexa completa  $G$  con  $n$  vértices, tal que  $|E'| \leq n-3$ , la gráfica  $G - H$  contiene una triangulación de los vértices de  $G$ .*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $n$ . El caso  $n \leq 4$  es trivialmente verificable. Supongamos que  $n \geq 5$  y que el teorema es cierto para todo  $n' \leq n$ .

Recordemos que una *oreja* es una arista con profundidad *uno*. Observemos que en  $G$  existen una oreja  $e$  y una arista  $f$  tales que  $e$  y  $f$  se cortan,  $e \notin E'$  y  $f \in E'$ . Para esto distingamos dos casos: si  $E'$  no contiene ninguna oreja de  $G$ , entonces  $f$  es cualquier arista de  $E'$ , y  $e$  es una de las dos orejas que  $f$  cruza. De otra forma,  $E'$  contiene al menos una oreja de  $G$ . Como  $|E'| \leq n-3$  y hay exactamente  $n$  orejas de  $G$ , entonces existen dos orejas consecutivas de  $G$  tales que la primera está en  $|E'|$  y la segunda no lo está; sea  $f$  la primera y sea  $e$  la segunda.

Sea  $v$  el vértice adyacente a ambos extremos de  $e$ . Es claro que  $v$  es un extremo de  $f$ . Consideremos la gráfica  $H' := H \setminus \{v\}$ . Esta es una gráfica con por lo menos una arista menos que  $H$ , y por lo tanto con a lo más  $(n-1) - 3$  aristas, mientras que su número de vértices es  $n-1$ . Por inducción,  $H'$  contiene una triangulación del conjunto de sus vértices. Podemos extender esta triangulación a una del conjunto de vértices de  $H$ , añadiéndole el vértice  $v$  y las dos aristas de la frontera convexa de  $G$  incidentes a él.  $\square$

Es fácil ver que la cota es justa, pues para cualquier punto  $v$ , eliminar las  $n-3$  aristas incidentes a  $v$  que *no* están sobre la frontera convexa, junto con la oreja que une los extremos de las otras dos aristas incidentes a  $v$ , deshabilita cualquier triangulación del conjunto de puntos.

### 2.4.2. Caso no convexo

En el caso en el que la gráfica geométrica completa no está en posición convexa, es probable que un número pequeño (constante) de aristas eliminadas deshabiliten cualquier triangulación del conjunto de vértices.

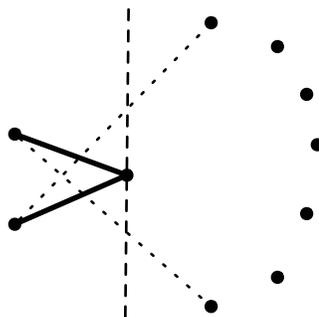


Figura 2.7: Eliminar las dos aristas indicadas deshabilita cualquier triangulación del conjunto de puntos.

**Proposición 2.11.** *Para todo  $n \geq 4$ , existe una gráfica geométrica completa con  $n$  vértices, en la cual la eliminación de dos aristas no inevitables deshabilita cualquier triangulación del conjunto de vértices.*

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto de puntos en posición general con al menos un punto,  $v$ , en el interior de la frontera convexa, y sea  $T$  una triangulación de  $S$ . Consideremos las aristas de  $T$  incidentes a  $v$  ordenadas angularmente respecto a  $v$ . Como toda cara interior de  $T$  es un triángulo, entonces el ángulo formado por cualesquiera dos aristas consecutivas alrededor de  $v$  es estrictamente menor que  $\pi$ . Se sigue que para cualquier punto interior de una triangulación de un conjunto de puntos, y para cualquier línea que pasa por ese punto, hay al menos una arista de la triangulación en cada lado de la recta.

Consideremos el conjunto de puntos de la Figura 2.7. Las dos aristas indicadas son las únicas aristas a la izquierda de la recta discontinua que pasa por el punto interior. Observemos que ninguna es inevitable, pues cada una es cortada por una de las aristas punteadas. Por la observación del párrafo anterior, la eliminación de esas dos aristas en la gráfica geométrica completa, deshabilita en la gráfica resultante cualquier posible triangulación del conjunto de puntos.  $\square$

## 2.5. Aspectos algorítmicos

En esta sección discutimos las implicaciones algorítmicas de los resultados existenciales presentados en este capítulo.

A diferencia de los Lemas 3.3 y 3.7 del Capítulo 3, y de los Teoremas 4.6 y 4.13 del Capítulo 4, y con la excepción del Teorema 2.7, las construcciones de este capítulo no dan algoritmos especialmente eficientes para la construcción de las estructuras relevantes. Sin embargo, las implicaciones algorítmicas de los teoremas de este capítulo resultan ser muy interesantes en un sentido teórico: en todos los casos estudiados, se sabe que el problema de decisión correspondiente es NP-completo. Dada una gráfica geométrica  $G$ ,

- Jansen y Woeginger [JW93] demostraron que determinar si  $G$  contiene un apareamiento perfecto plano es NP-completo.
- En el mismo artículo, Jansen y Woeginger también demostraron que determinar si  $G$  contiene un árbol generador plano es NP-completo.
- Lloyd [Llo77] demostró que determinar si  $G$  tiene una triangulación es NP-completo.

Si bien los problemas de decisión anteriormente mencionados son NP-completos para gráficas geométricas en general, de nuestros resultados existenciales se sigue de inmediato que para la clase de gráficas *saturadas* respectiva (definidas a continuación), el problema de decisión correspondiente es claramente polinomial, pues nuestros resultados implican que la subestructura buscada siempre existe en las gráficas de éstas clases. Aún más, dada una gráfica geométrica, decidir si pertenece a la clase respectiva puede hacerse en tiempo polinomial, como explicamos en la discusión de cada una de ellas.

### 2.5.1. Apareamientos perfectos

En el caso del problema de determinar si una gráfica geométrica dada contiene un apareamiento perfecto plano, la clase de gráficas *saturadas* corresponde, según el Teorema 2.5, a la clase de gráficas con  $2n$  vértices, con la propiedad de que cualquier componente conexa de su complemento tiene a lo más  $n$  vértices. Naturalmente, esta clase contiene a todas las gráficas con más de  $\binom{2n}{2} - n = 2n(n-1)$  aristas.

Es claro que reconocer si una gráfica pertenece a esta clase toma tiempo a lo más  $O(n^2)$ , pues basta calcular su complemento y determinar sus componentes conexas usando DFS o BFS.

### 2.5.2. Árboles generadores planos

Para el problema de determinar si una gráfica geométrica dada contiene un árbol generador plano, la clase de gráficas *saturadas* es, de acuerdo al Corolario 2.7, la clase de gráficas cuyo complemento es desconexo.

Es claro que determinar si una gráfica pertenece a esta clase toma tiempo a lo más cuadrático en el número de vértices; pues, de manera similar al caso del apareamiento perfecto plano, sólo hay que calcular el complemento de la gráfica y determinar si éste es desconexo usando BFS o DFS. Aún más, la construcción explícita de semejante árbol puede realizarse en tiempo a lo más  $O(n \lg n)$  de acuerdo a la construcción de la prueba del Teorema 2.7.

### 2.5.3. Triangulación del conjunto de vértices

Para el problema de determinar si una gráfica geométrica contiene una triangulación de sus vértices, la clase de gráficas *saturadas* con  $n$  vértices es la unión de:

1. La clase de gráficas cuyos vértices están en posición convexa, contienen las  $n$  aristas de la frontera convexa, y cuyo complemento contiene a lo más  $n - 3$  aristas (esta clase corresponde al Teorema 2.10).

Observemos que esta clase de gráficas se puede reconocer en tiempo a lo más  $O(n^2)$ , pues sólo hemos de verificar si sus vértices están en posición convexa (lo cual es bien sabido que toma tiempo  $\Theta(n \log n)$ ), y después debemos contar su número de aristas (lo cual toma tiempo cuadrático en el peor caso.)

2. La clase de gráficas cuyos vértices no están en posición convexa, y cuyo complemento contiene a lo más una arista y esta arista *no* es inevitable<sup>2</sup> (esta clase corresponde a la Proposición 2.11).

Observemos que esta clase se puede reconocer en tiempo cuadrático respecto a  $n$ , pues sólo hay que verificar que la única arista del complemento no sea inevitable. Para ello un algoritmo inocente es verificar la intersección de esa arista con las otras  $\binom{n}{2} - 1$  aristas, tomando tiempo constante cada una de estas verificaciones.

---

<sup>2</sup>Recordemos que una arista es *inevitable* si aparece en cualquier triangulación de un conjunto de puntos.

## 2.6. Conclusiones y problemas abiertos

Para todo  $n$ , probamos que el número mínimo de aristas que debe tener cualquier gráfica geométrica  $G$  con  $2n$  vértices para asegurar que tiene un apareamiento perfecto plano es:

$$e_{n-1}(2n) + 1 = \binom{2n}{2} - n + 1 = 2n(n-1) + 1,$$

y probamos que la cota es justa.

En un resultado más general, probamos que si la componente conexa más grande del complemento de  $G$  tiene a lo más  $n$  vértices, entonces  $G$  tiene un apareamiento perfecto plano.

Pensamos que si la gráfica tiene esencialmente la mitad de sus puntos al interior del cierre convexo, entonces la cota justa puede ser aún menor. Más formalmente, enunciarnos la siguiente conjetura.

**Conjetura 2.12.** *Toda gráfica geométrica completa con  $2n$  vértices en total, de los cuales  $k \geq n - 2$  están en el interior de su cierre convexo, y con al menos*

$$\binom{2n}{2} - (k + 1)$$

*aristas, tiene un apareamiento perfecto plano.*

Respecto a árboles que cubren un cierto número de vértices, damos una prueba alterna al hecho ya conocido ([KPT97]) de que toda gráfica geométrica con  $n$  vértices y al menos  $\binom{n}{2} - n + 2$  aristas tiene un árbol generador plano.

También demostramos que para todo  $n$  y todo  $2 \leq k \leq n$ , toda gráfica geométrica con  $n$  vértices y al menos

$$\binom{n}{2} - \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil + 1$$

aristas contiene un árbol plano que cubre  $n - k$  vértices; la cota es justa.

Probamos también una cota justa al número de aristas no *inevitables*<sup>3</sup> que toda gráfica geométrica debe tener para poder contener una triangulación de su conjunto de vértices.

---

<sup>3</sup>Recordemos que una arista es *inevitable* si aparece en cualquier triangulación de un conjunto de puntos.

La complejidad de los problemas de decisión para determinar si una gráfica geométrica dada contiene una de las tres subestructuras estudiadas en este capítulo, es en cada uno de los casos un problema NP-completo [JW93, Llo77]. Nuestros resultados existenciales muestran que en cada uno de estos casos, existe una familia de gráficas respectiva sobre la cual el problema de decisión correspondiente tiene complejidad nula. Aún más, dada una gráfica geométrica con  $n$  vértices, determinar si esa gráfica pertenece a alguna de esas tres clases puede llevarse a cabo en tiempo a lo más cuadrático en  $n$ .

# Capítulo 3

## Dibujos primitivos de gráficas geométricas

### 3.1. Introducción

El trabajo presentado en este capítulo corresponde al área de *dibujo de gráficas*, la cual estudia dibujos de gráficas en espacios geométricos, típicamente el plano euclidiano. Un tipo de problemas que se estudian en *dibujo de gráficas* investiga cual es la clase de gráficas que pueden dibujarse si se piden ciertas restricciones en los dibujos obtenidos, y cual es la complejidad computacional de producir dichos dibujos. Generalmente la motivación de las restricciones que se piden a los dibujos proviene de cuestiones prácticas, que faciliten el entendimiento de la estructura que el dibujo representa [BETT99]. Como ejemplo de estas restricciones, podemos exigir que las coordenadas de los vértices sean ambas enteras, para así poder desplegar la gráfica en una pantalla de computadora. Otra restricción útil es pedir que las aristas sean lo menos curvas posibles, en el caso extremo exigiendo que estas sean segmentos de rectas. Una tercera restricción útil es pedir que el dibujo ocupe poca área: en el caso de dibujos donde los vértices tienen coordenadas enteras, queremos que el dibujo quede contenido en una “malla” pequeña.

Es sobre las líneas de este tipo de problemas que se desarrolla el trabajo presentado en este capítulo, el cual consiste en caracterizar la clase de gráficas que admiten un *dibujo primitivo*, y de determinar la complejidad de calcular semejante dibujo. Un *dibujo primitivo* de una gráfica, es un dibujo en el plano tal que las coordenadas de todo vértice son ambas enteros, y las aristas son segmentos de recta que no contienen un tercer punto con coordenadas ambas enteras.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la sección 3.2 discutimos algunos de los trabajos previos relacionados con este trabajo. En la sección 3.3 demostramos que la clase de gráficas que admiten dibujos primitivos es exactamente la clase de gráficas cuatro-coloreables. En la sección 3.4 extendemos la caracterización de gráficas que admiten dibujos primitivos, a dimensiones superiores, mostrando que la clase de gráficas que admiten un dibujo primitivo  $d$ -dimensional es exactamente la clase de gráficas  $2^d$ -coloreables. En la sección 3.5 se discute el algoritmo de tiempo  $O(dn)$  que se obtiene de nuestras construcciones, el cual calcula las coordenadas de los vértices en un dibujo  $d$ -dimensional primitivo de una gráfica con  $n$  vértices  $2^d$ -coloreada dada. Concluimos el capítulo en la sección 3.6 presentando un resumen de los resultados y algunos problemas abiertos.

Una versión preliminar de los resultados de este capítulo fue publicada en las actas de congreso [FPM09].

## 3.2. Definiciones y trabajo previo relacionado

Un *punto de malla* es un punto del plano cuyas abcisa y ordenada son ambas enteros. La *malla entera*,  $\mathbb{Z}^2$ , es el conjunto de todos los puntos de malla. Una *malla* de tamaño  $m \times n$  es la intersección de la malla entera con un rectángulo (incluyendo su interior) de altura  $m$  y anchura  $n$ , cuyos lados son paralelos a los ejes y sus vértices están en la malla entera.

Una gráfica  $G = (V, E)$  se denomina *planar* si existe un dibujo en el que los vértices de  $G$  son puntos en el plano, y las aristas de  $G$  corresponden a curvas simples que no se intersecan dos a dos en sus interiores. Un resultado clásico de *dibujo de gráficas* relacionado con este trabajo, probado independientemente por Fary [Fár48], Stein [Ste51], Wagner [Wag36], e implícitamente por Steinitz [SR34], asegura que toda gráfica planar  $G$  admite un dibujo tal que los vértices corresponden a puntos en el plano, y donde las aristas corresponden a *segmentos de rectas* cuyos extremos son vértices de  $G$ , las cuales no se intersecan dos a dos, excepto posiblemente en sus extremos.

Si además de requerir que las aristas sean segmentos de rectas, pedimos que los vértices estén contenidos en una malla “pequeña”, entonces, independientemente, De Fraysseix, Pach y Pollack [dFPP88, dFPP90], Schnyder [Sch90] y Chrobak y Nakano [CN98], probaron que toda gráfica planar  $G$  con  $n$  vértices tiene un dibujo rectilíneo con sus vértices en mallas de tamaño  $(2n - 4) \times (n - 2)$ ,  $(n - 2) \times (n - 2)$  y  $\lfloor 2(n - 1)/3 \rfloor \times (4 \lfloor 2(n - 1)/3 \rfloor - 1)$ , respectivamente; estas cotas son casi justas, pues De

Fraysseix y coautores [dFPP88] hacen notar que hay clases de gráficas las cuales, para un dibujo de este tipo, necesitan una malla de tamaño al menos  $(2n/3-1) \times (2n/3-1)$ .

Respecto a la complejidad algorítmica de calcular un dibujo plano rectilíneo de una gráfica con  $n$  vértices sobre una malla, la construcción de De Fraysseix y coautores [dFPP88] da un algoritmo de tiempo  $O(n \log n)$  y espacio  $O(n)$ ; Chrobak y Payne [CP95] observaron que la construcción de [dFPP88] podía incluso dar un algoritmo de tiempo lineal. Las construcciones de Schnyder [Sch90] y de Chrobak y Nakano [CN98] dan ambas un algoritmo de tiempo lineal para calcular los dibujos correspondientes. Para una historia general de los algoritmos para dibujos de gráficas, el lector puede revisar el compendio [BETT94] o el libro [BETT99].

En un trabajo muy relacionado con el nuestro, Wood [Woo05] mostró que si se pide que el segmento correspondiente a cada arista del dibujo contenga únicamente a sus puntos finales como vértices de la gráfica (aunque cada arista puede contener más de dos puntos de malla), entonces toda gráfica  $k$ -coloreable con  $n$  vértices puede dibujarse (posiblemente con cortes) en una malla de área  $O(kn)$ , y que la cota es justa. Nuestro trabajo mejora estos resultados para el caso  $k \leq 4$  mostrando que entonces hay un tipo de dibujo aún más restringido usando el mismo tamaño de malla.

Para una serie de trabajos sobre visibilidad en mallas enteras (no directamente relacionados con este), el lector puede consultar la Sección 10.4 del libro [BMP05].

Dado un conjunto de puntos  $S$ , decimos que dos puntos  $p, q \in S$  son *visibles* en  $S$  si el segmento  $\overline{pq}$  contiene únicamente a  $p$  y a  $q$  como puntos de  $S$ . La *gráfica de visibilidad* de  $S$ ,  $\mathcal{V}(S)$ , es la gráfica geométrica cuyo conjunto de vértices es  $S$ , y donde dos puntos son adyacentes si son visibles en  $S$ . La *gráfica de visibilidad de la malla entera*,  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ , es entonces la gráfica infinita cuyos vértices son todos los puntos de malla, y donde dos son adyacentes si son los únicos puntos de malla contenidos en el segmento que los une. Un segmento  $\overline{pq}$  se denomina *primitivo* si  $p$  y  $q$  son dos vértices adyacentes en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ .

Un *dibujo primitivo* de una gráfica  $G = (V, E)$ , es un dibujo de  $G$  tal que los vértices corresponden a puntos de malla y las aristas a segmentos primitivos. Un ejemplo de un dibujo primitivo se ilustra en la Figura 3.1. Es claro que una gráfica  $G$  tiene un dibujo primitivo si y sólo si  $G \subseteq \mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ .

Dados un entero  $k$  y una gráfica  $G = (V, E)$ , una  $k$ -coloración de  $G$  es una función  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tal que  $f(u) \neq f(v)$  para toda  $uv \in E$ . Si existe dicha función, entonces decimos que  $G$  es  $k$ -coloreable. El *número cromático* de una gráfica  $G$ ,  $\chi(G)$ , es el entero  $k$  más pequeño tal que  $G$  es  $k$ -coloreable. En el 2005 Kara, Pór y Wood

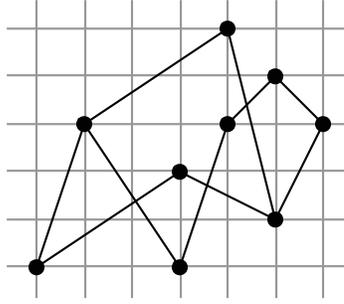


Figura 3.1: Dibujo primitivo de una gráfica.

[KPW05] estudiaron el número cromático de gráficas de visibilidad de conjuntos de puntos en el plano. En particular observaron que  $\chi(\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)) = 4$ . Esto se sigue de que el conjunto de cuatro puntos  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  induce un  $K_4$  en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ , y de la siguiente proposición.

**Proposición 3.1** ([KPW05]). *La función*

$$\text{col} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

*definida como*

$$\text{col}((x, y)) := (x \bmod 2, y \bmod 2)$$

*es una cuatro-coloración de  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ .*

*Demostración.* Supongamos por contradicción que hay dos puntos de malla  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$  adyacentes en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$  tales que  $\text{col}(p) = \text{col}(q)$ . Entonces  $(a + c) \bmod 2 = (b + d) \bmod 2 = 0$ . Se sigue que el punto medio del segmento  $\overline{pq}$ , cuyas coordenadas son  $((a + c)/2, (b + d)/2)$  son ambas enteras, y por lo tanto es un punto de malla. Esto implica que  $p$  y  $q$  no son visibles en  $\mathbb{Z}^2$ , y por lo tanto no son adyacentes en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ .  $\square$

Es claro que el hecho de que  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$  sea cuatro-coloreable, implica de inmediato que toda gráfica que admite un dibujo primitivo es también cuatro-coloreable. Es natural entonces hacernos la pregunta contraria: ¿es cierto que toda gráfica cuatro-coloreable admite un dibujo primitivo? En la siguiente sección damos una respuesta afirmativa a esta pregunta. Para ello, damos una construcción explícita de una familia de conjuntos de puntos, cada uno de los cuales induce una gráfica cuatro-partita completa en la gráfica de visibilidad de la malla entera. Las cuatro clases cromáticas de estas gráficas pueden usarse para acomodar los vértices de cualquier gráfica cuatro-coloreable

$G = (V, E)$ , de tal manera que el arreglo de vértices resultante es un dibujo primitivo de  $G$ .

Como nuestra construcción es muy sencilla, la posición de los vértices en el dibujo obtenido puede calcularse en tiempo  $O(|V|)$ . Nuestra construcción tiene también la virtud de ser compacta, en el sentido de que el área y el perímetro de la malla más pequeña que contiene al dibujo crece de manera lineal respecto al número de vértices del dibujo.

### 3.3. Caracterización de las gráficas que admiten dibujos primitivos

Es claro que toda gráfica cuatro coloreable con  $n$  vértices es subgráfica de la gráfica cuatro-partita completa  $K_{n,n,n,n}$ . Por lo tanto, el problema de determinar si toda gráfica cuatro-coloreable puede dibujarse de manera primitiva puede replantearse en el lenguaje de teoría de las gráficas de la siguiente manera: ¿Para todo entero positivo  $n$ , la gráfica de visibilidad de la malla entera tiene una subgráfica isomorfa a  $K_{n,n,n,n}$ ?

Para mostrar que la respuesta es afirmativa, damos una construcción explícita de semejante subgráfica para todo valor de  $n$ . Denotemos con  $[n]$  el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Para cada entero positivo  $n$  consideremos los siguientes cuatro conjuntos de puntos.

$$\begin{aligned} P_0(n) &\stackrel{def}{=} \{(6i, 0) | i \in [n]\}, \\ P_1(n) &\stackrel{def}{=} \{(2i - 1, 1) | i \in [n]\}, \\ P_2(n) &\stackrel{def}{=} \{(2i - 1, 2) | i \in [n]\}, \\ P_3(n) &\stackrel{def}{=} \{(2[i - 1 + \lceil i/2 \rceil], 3) | i \in [n]\}. \end{aligned}$$

Observemos que el conjunto de las abscisas de  $P_3(n)$  es el conjunto de los primeros  $n$  enteros positivos pares que *no* son múltiplos del número tres.

Ahora consideremos la unión de esos cuatro conjuntos:

$$P(n) = P_0(n) \cup P_1(n) \cup P_2(n) \cup P_3(n).$$

La Figura 3.2 ilustra un ejemplo pequeño de esta construcción.

Antes de proceder con la caracterización de las gráficas que admiten un dibujo primitivo, enunciamos el siguiente resultado auxiliar.

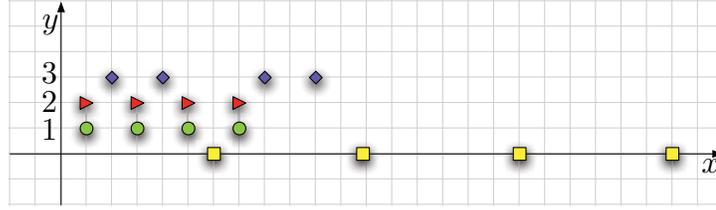
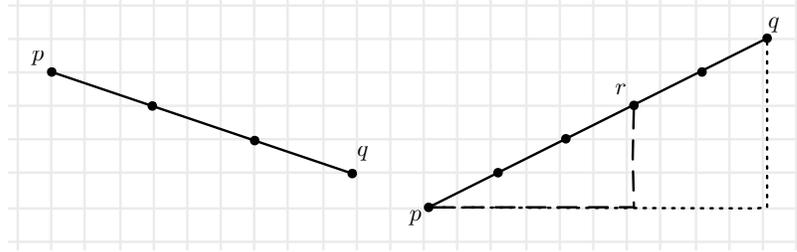
Figura 3.2: El conjunto  $P(4)$ .

Figura 3.3: Ilustración de la Proposición 3.2.

**Proposición 3.2.** Sean  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$  dos puntos de malla distintos. El segmento  $\overline{pq}$  es primitivo si y sólo si  $\gcd(|c - a|, |d - b|) = 1$ .

*Demostración.* Primero demostramos por contraposición que si  $\overline{pq}$  es primitivo, entonces  $\gcd(|c - a|, |d - b|) = 1$ . Si  $\gcd(|c - a|, |d - b|) = z > 1$ , entonces al dividir el segmento  $\overline{pq}$  en  $z$  partes iguales, los  $z - 1$  puntos de división son puntos de malla que bloquean la visibilidad entre  $p$  y  $q$ , y por lo tanto  $\overline{pq}$  no es primitivo; ver Figura 3.3 (izquierda).

Ahora supongamos que  $\overline{pq}$  no es primitivo y, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\overline{pq}$  no es horizontal. Entonces hay al menos un punto de malla en el interior de  $\overline{pq}$ . Sea  $r = (x, y)$  alguno de estos puntos; ver Figura 3.3 (derecha). Observemos que, por semejanza de triángulos,

$$\frac{|x - a|}{|y - b|} = \frac{|c - a|}{|d - b|},$$

con  $|x - a| \leq |c - a|$  y  $|y - b| < |d - b|$ . Se sigue que  $|c - a|/|d - b|$  es una fracción reducible, y por lo tanto  $\gcd(|c - a|, |d - b|) > 1$ .

□

Ahora estamos listos para probar una propiedad especial de  $P(n)$ .

**Lema 3.3.** *El conjunto  $P(n)$  induce en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$  una subgráfica isomorfa a  $K_{n,n,n}$ .*

*Demostración.* Usamos la caracterización de segmentos primitivos de la Proposición 3.2 para discutir si dos puntos de  $P(n)$  son adyacentes o no en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ .

Como cada uno de los conjuntos  $P_0(n), P_1(n), P_2(n)$  y  $P_3(n)$  está totalmente contenido en una fila de la malla entera, y como cada uno de ellos tiene dos puntos a distancia al menos dos, se sigue que cada uno de estos conjuntos es independiente en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ .

Ahora probamos que cualesquiera dos puntos en conjuntos diferentes  $P_i(n)$  y  $P_j(n)$ , son adyacentes en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$ .

1. Para cada  $i \in \{0, 1, 2\}$ , cada punto  $(a, i)$  de  $P_i(n)$  es adyacente a cada punto  $(c, i + 1)$  de  $P_{i+1}(n)$  puesto que

$$\gcd(|c - a|, |(i + 1) - i|) = \gcd(|c - a|, 1) = 1.$$

2. Cada punto  $(a, 0)$  de  $P_0(n)$  es adyacente a cada punto  $(c, 2)$  de  $P_2(n)$  puesto que  $c - a$  es impar, y por lo tanto

$$\gcd(|c - a|, 2 - 0) = 1.$$

3. Cada punto  $(a, 1)$  de  $P_1(n)$  es adyacente a cada punto  $(c, 3)$  de  $P_3(n)$  puesto que  $c - a$  es impar, y por lo tanto

$$\gcd(|c - a|, 3 - 1) = 1.$$

4. Cada punto  $(a, 0)$  de  $P_0(n)$  es adyacente a cada punto  $(c, 3)$  de  $P_3(n)$  puesto que  $c - a$  no es un múltiplo de tres, y por lo tanto

$$\gcd(|c - a|, 3 - 0) = 3.$$

□

La caracterización de las gráficas que admiten un dibujo primitivo en relación con su número cromático se sigue de inmediato.

**Teorema 3.4.** *Una gráfica admite un dibujo primitivo si y solo si es cuatro-coloreable.*

### 3.4. Dibujos primitivos en dimensiones superiores

En esta sección generalizamos la caracterización de gráficas que admiten dibujos primitivos, a dimensiones superiores. Probamos que una gráfica  $G$  admite un dibujo primitivo  $d$ -dimensional si y solo si  $G$  es  $2^d$ -coloreable.

Para cualquier dimensión  $d \geq 2$ , un punto  $p \in \mathbb{R}^d$  es un *punto de malla* si sus  $d$  coordenadas son todas enteras. La *malla  $d$ -dimensional*,  $\mathbb{Z}^d$ , es el conjunto de los puntos de malla en  $d$  dimensiones. Para cualesquiera dos puntos diferentes  $p, q \in \mathbb{Z}^d$ , el segmento  $\overline{pq}$  es *primitivo* si  $p$  y  $q$  son los únicos puntos de malla que  $\overline{pq}$  contiene. La *gráfica de visibilidad de la malla  $d$ -dimensional*,  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)$ , es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a  $\mathbb{Z}^d$ , y donde dos son adyacentes si el segmento que los une es primitivo. Un *dibujo primitivo  $d$ -dimensional* de una gráfica  $G = (V, E)$ , es un dibujo de  $G$  en el que los vértices corresponden a puntos de la malla  $d$ -dimensional, y donde las aristas corresponden a segmentos primitivos.

Observemos que la caracterización de segmentos primitivos 2-dimensionales dada por la Proposición 3.2 se generaliza de inmediato a  $d$ -dimensiones, estableciendo la siguiente caracterización de segmentos primitivos  $d$ -dimensionales:

**Proposición 3.5.** *Dados dos puntos  $p, q \in \mathbb{Z}^d$ , tales que  $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$  y  $q = (q_1, q_2, \dots, q_d)$ , el segmento  $\overline{pq}$  es primitivo si y solo si*

$$\gcd(|q_1 - p_1|, |q_2 - p_2|, \dots, |q_d - p_d|) = 1.$$

A continuación probamos que toda gráfica con un dibujo primitivo  $d$ -dimensional es  $2^d$ -coloreable, y después probamos que toda gráfica  $2^d$ -coloreable admite un dibujo primitivo  $d$ -dimensional.

**Proposición 3.6.** *Para todo  $d \geq 2$ , el número cromático de  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)$  es  $2^d$ .*

*Demostración.* Primero observemos que el conjunto de puntos  $\{0, 1\}^d$  induce un clan de tamaño  $2^d$  en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)$ . Se sigue que  $\chi(\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)) \geq 2^d$ .

Ahora observemos que la 4-coloración de  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^2)$  dada por la Proposición 3.1 se generaliza a una  $2^d$ -coloración de  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)$ : Para un punto  $(p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$ , la función

$$\text{col}_d((p_1, p_2, \dots, p_d)) = (p_1 \pmod{2}, \dots, p_d \pmod{2})$$

es una  $2^d$ -coloración de  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)$ . □

**Lema 3.7.** *Para cualquier  $d \geq 2$ , toda gráfica  $2^d$ -coloreable admite un dibujo primitivo  $d$ -dimensional.*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $d$ . El caso base  $d = 2$  es probado por el Teorema 3.4. Supongamos que  $d > 2$  y que el teorema es cierto para todo  $2 \leq d' < d$ .

Para probar que toda gráfica  $2^d$ -coloreable  $G$  admite un dibujo primitivo  $d$ -dimensional, basta con probar que para todo entero positivo  $n$ , la gráfica  $2^d$ -partita completa  $K_{n,\dots,n}$  es una subgráfica de  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)$ : usamos las  $2^d$  clases cromáticas de  $K_{n,\dots,n}$  para colocar los vértices de las (a lo más)  $2^d$  clases cromáticas de  $G$ , y el arreglo resultante resulta ser un dibujo primitivo de  $G$ .

Particionemos los vértices de la gráfica  $2^d$ -partita completa  $K = K_{n,\dots,n}$  en dos clases: La clase  $A$  contiene los vértices de las primeras  $2^{d-1}$  clases cromáticas de  $K$ , y la clase  $B$  contiene las últimas  $2^{d-1}$  clases cromáticas de  $K$ . Es claro que tanto la subgráfica inducida en  $K$  por  $A$ ,  $K[A]$ , como la subgráfica inducida por  $B$  en  $K$ ,  $K[B]$ , son gráficas isomorfas a la gráfica  $2^{d-1}$ -partita completa  $K' = K_{n,\dots,n}$ .

Sean  $\mathbb{M}_0$  y  $\mathbb{M}_1$  las dos mallas  $2^{d-1}$  dimensionales tales que

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_0 &:= \{(z_1, z_2, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d \mid z_d = 0\}, \\ \mathbb{M}_1 &:= \{(z_1, z_2, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d \mid z_d = 1\}.\end{aligned}$$

Por inducción,  $K[A]$  es isomorfa a una subgráfica de  $\mathcal{V}(\mathbb{M}_0)$ , y  $K[B]$  es isomorfa a una subgráfica de  $\mathcal{V}(\mathbb{M}_1)$ . Sea  $V_0 \subseteq \mathbb{M}_0$  el conjunto de vértices de la subgráfica isomorfa a  $K[A]$  en  $\mathcal{V}(\mathbb{M}_0)$ , y sea  $V_1 \subseteq \mathbb{M}_1$  el conjunto de vértices de la subgráfica isomorfa a  $K[B]$  en  $\mathcal{V}(\mathbb{M}_1)$ . Como cualquier pareja de puntos  $p, q$  tal que  $p \in \mathbb{M}_0, q \in \mathbb{M}_1$  se encuentra en hiperplanos consecutivos perpendiculares al eje  $x_d$ , entonces el segmento  $\overline{pq}$  es primitivo. Se sigue que  $V_0 \cup V_1$  induce en  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d)$  una subgráfica isomorfa a la gráfica  $2^d$ -partita completa  $K_{n,\dots,n}$ .  $\square$

Se sigue de inmediato la caracterización de las gráficas que admiten un dibujo primitivo  $d$ -dimensional.

**Teorema 3.8.** *Una gráfica admite un dibujo primitivo  $d$ -dimensional si y sólo si es  $2^d$ -coloreable.*

**Corolario 3.9.** *La dimensión más pequeña en la que una gráfica  $G$  admite un dibujo primitivo es  $\lceil \log_2 \chi(G) \rceil$ .*

### 3.5. Algoritmo para calcular dibujos primitivos

De las demostraciones constructivas de los Lemas 3.3 y 3.7 se sigue de inmediato un algoritmo para calcular las coordenadas de los vértices en un dibujo  $d$ -dimensional de una gráfica  $2^d$ -coloreada dada. A continuación describimos explícitamente este algoritmo y discutimos las propiedades del dibujo generado por él.

Es importante mencionar que la gráfica se debe dar  $2^d$ -coloreada para que el algoritmo pueda operar eficientemente, pues el calcular la  $2^d$ -coloración es un problema NP-completo. Incluso en el caso de dimensión 2, calcular una 4-coloración de una gráfica es en general NP-completo [Lov73]. El problema permanece NP-completo incluso para gráficas 3-coloreables [KLS00]. Sin embargo, una clase muy importante sobre la cual el problema es polinomial, es el de las gráficas planas; en este caso la 4-coloración puede calcularse en tiempo cuadrático respecto al número de vértices [RSST96].

**Teorema 3.10.** *Dada una gráfica  $2^d$ -coloreada  $G$  con  $n$  vértices, hay un algoritmo que calcula en tiempo  $O(dn)$  y espacio  $O(1)$  –excluyendo el espacio para escribir las coordenadas de los puntos calculados–, las coordenadas de los puntos correspondientes a los vértices en un dibujo primitivo  $d$ -dimensional de  $G$ .*

*Demostración.* Sean  $f_{00}, f_{01}, f_{10}$  y  $f_{11}$  las funciones de los enteros a los enteros definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_{00}(n) &:= 6n, \\ f_{01}(n) &:= 2n - 1, \\ f_{10}(n) &:= 2n - 1, \\ f_{11}(n) &:= 2[i - 1 + \lceil i/2 \rceil]. \end{aligned}$$

Es claro que evaluar cada una de estas funciones toma tiempo constante.

Sea  $v$  el  $i$ -ésimo vértice de la  $k$ -ésima clase cromática de  $G$  y sea  $b_{d-1}, b_{d-2}, \dots, b_1, b_0$  la secuencia de bits correspondiente al número  $k$  expresado en base dos. Podemos calcular cada uno de esos  $d$  bits en tiempo constante a partir de  $k$ .

Sea  $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^d$  la función definida como:

$$g(i, k) := (f_{b_1 b_0}(i), 2 \cdot b_1 + b_0, b_3, b_4, \dots, b_{d-1}).$$

Es fácil verificar por inducción en  $d$  que la función  $g$  calcula las coordenadas del punto  $p \in \mathbb{Z}^d$  asociado al vértice  $v$ , en el dibujo primitivo de  $G$  que corresponde a las construcciones de los Lemas 3.3 y 3.7. Es claro que evaluar  $g$  toma tiempo  $\Theta(d)$ .

El algoritmo en concreto para calcular las coordenadas de los puntos en el dibujo primitivo de  $G$ , es iterar sobre los  $n$  vértices de  $G$ , estableciendo  $k$  como el color del vértice actual, y llevando la cuenta de los vértices que se han visto en cada clase cromática hasta el momento (para poder determinar en tiempo constante  $i$ ), y entonces evaluar  $g(i, k)$  sobre cada uno de los vértices según se van visitando.

Con este algoritmo podemos calcular en tiempo  $O(dn)$  y espacio  $O(1)$  (exceptuando el espacio para escribir las coordenadas de los puntos calculados), las coordenadas de todos los vértices en un dibujo primitivo  $d$ -dimensional de  $G$ .  $\square$

### 3.5.1. Propiedades del dibujo calculado

Una buena característica del dibujo generado por el algoritmo del Teorema 3.10 es que es muy compacto, en el sentido de que todas sus dimensiones (perímetro, área, volumen  $d$ -dimensional) son lineales en el número de vértices de la gráfica. Como hemos mencionado en la introducción, es muy deseable que en general, los dibujos de una gráfica sean compactos.

El caso de dibujos primitivos en el plano, la malla que se usa para dibujar una gráfica con  $n$  vértices tiene perímetro a lo más  $6(2n+1)$  y área a lo más  $6n \times 3$ . Cuando el dibujo tiene que hacerse en dimensiones superiores porque el número cromático de la gráfica es alto, entonces el volumen queda acotado también por  $18n$  unidades volumétricas  $d$ -dimensionales.

## 3.6. Conclusiones y problemas abiertos

Hemos demostrado que una gráfica admite un dibujo primitivo si y sólo si es cuatro-coloreable. Nuestro resultado puede extenderse a cualquier dimensión  $d \geq 3$ , estableciendo que una gráfica admite un dibujo primitivo  $d$ -dimensional si y sólo si es  $2^d$ -coloreable. De nuestras construcciones se sigue un algoritmo que para cualquier gráfica  $2^d$ -coloreada  $G = (V, E)$  dada, calcula en tiempo  $O(d \cdot |V|)$  las coordenadas de los vértices en un dibujo primitivo  $d$ -dimensional de  $G$ . Una característica valiosa del dibujo calculado es que la malla que lo contiene es muy compacta, en el sentido de que dos de sus dimensiones son 3 y  $6 \cdot |V|$ , y el resto es 1.

El problema abierto más importante corresponde a caracterizar la clase de gráficas que admiten dibujos primitivos *planos*. Al respecto formulamos la siguiente conjetura:

**Conjetura 3.11.** *Una gráfica es planar si y sólo si admite un dibujo primitivo plano.*

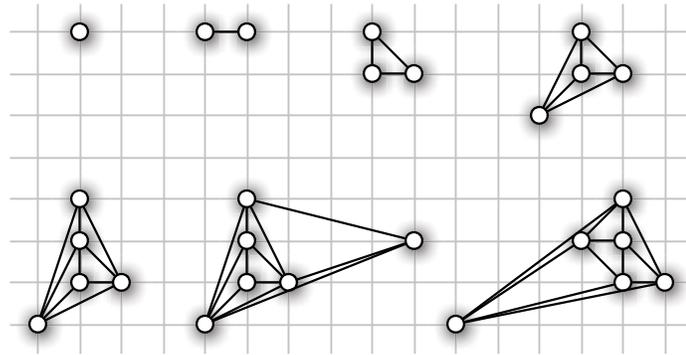


Figura 3.4: Dibujos primitivos planos de todas las gráficas planares maximales con hasta seis vértices.

Hemos verificado manualmente la conjetura para todas las gráficas planares de hasta siete vértices. Observemos que sólo hace falta verificar la conjetura para las gráficas planares maximales, pues si una gráfica no es planar maximal, añadimos aristas hasta que lo sea, dibujamos la gráfica extendida de manera primitiva plana, y después eliminamos del dibujo las aristas artificiales. La Figura 3.4 muestra un dibujo primitivo plano de cada gráfica plana maximal no isomorfa con hasta seis vértices.

Es importante observar que de ser cierta nuestra conjetura, entonces una prueba de ella podría dar una prueba alternativa al Teorema de los cuatro colores [AH76].

También, de ser cierta la conjetura, sería muy importante determinar la malla más pequeña sobre la cual toda gráfica planar con  $n$  vértices puede dibujarse de forma plana y primitiva.

# Capítulo 4

## Iluminación de polígonos monótonos con $k$ -módems

Las gráficas geométricas estudiadas en este capítulo son ciclos planos –equivalentemente, polígonos simples–. Estos polígonos modelan *galerías de arte*. En este capítulo estudiamos una generalización del problema clásico de *iluminación de galerías de arte*.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la Sección 4.1 introducimos el concepto de *iluminación de polígonos con módems inalámbricos*. En la Secciones 4.2 y 4.3 estudiamos el problema de iluminación con módems para polígonos monótonos y para polígonos monótonos ortogonales, respectivamente. En la segunda parte de ambos capítulos discutimos los aspectos algorítmicos relevantes de la variante correspondiente. Por último, en la Sección 4.4 concluimos el capítulo haciendo un breve resumen de los resultados presentados.

La mayoría de los resultados presentados en este capítulo fueron publicados en las actas de congreso [AFMFP<sup>+</sup>09b].

### 4.1. Introducción

Las nuevas tecnologías inspiran nuevos problemas de investigación, y las redes inalámbricas son un ejemplo claro de esto. Uno de estos nuevos problemas es lo que hemos denominado *iluminación con módems* de regiones poligonales. Nuestro problema se lleva a cabo en el siguiente escenario. Es bien sabido que cuando se intenta conectar una *laptop* a un módem inalámbrico, hay dos factores que deben considerarse: la *distancia* de la *laptop* al módem y, tal vez más importante en la mayoría de los edificios,

el número de paredes que separan la *laptop* del módem. Denotamos con *k-módem* un módem que es lo suficientemente potente como para transmitir una señal estable capaz de atravesar  $k$  paredes en línea recta. Decimos entonces que un punto  $p$  en un polígono  $P$  es *iluminado* por un  $k$ -módem  $m$  en  $P$ , si el segmento que conecta  $m$  con  $p$  cruza a lo más  $k$  paredes (aristas) de  $P$ .

Debemos resaltar el hecho de que permitimos que un módem se localice en un punto  $p$  sobre una arista de  $P$ . En este caso, si  $q$  es un punto en el interior de  $P$ , el segmento que conecta  $p$  y  $q$  puede atravesar un número impar de paredes. Esto se sigue de que la línea que conecta  $p$  y  $q$  no cruza la arista de  $P$  que contiene a  $q$ . En este capítulo consideramos el siguiente problema.

**Problema de iluminación con módems:** Sea  $P$  una galería de arte modelada por un polígono  $P$  con  $n$  vértices. ¿Cuántos módems son suficientes, y a veces necesarios, para iluminar todos los puntos en  $P$ ?

Para  $k = 0$ , nuestro problema corresponde al Teorema de galerías de arte de Chvátal [Chv75], el cual asegura que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardias son suficientes y en ocasiones necesarios para iluminar una galería de arte con  $n$  paredes. Muchas generalizaciones del problema original de galerías de arte se han estudiado. Véase el compendio [Urr00] para una discusión general.

La iluminación de polígonos monótonos con dispositivos inalámbricos se ha estudiado recientemente en [CHOU08, EGS07] en un contexto ligeramente distinto, el llamado *problema del jardín de esculturas*. Allí, cada dispositivo emite una señal que está confinada a un ángulo del polígono, y tiene un alcance ilimitado. La tarea es describir el polígono (distinguirlo de sus exterior) mediante una combinación de los dispositivos, esto es, para cada punto  $p$  en el interior del polígono, ningún punto fuera del polígono recibe señales de los mismos dispositivos que  $p$ . Véanse también [WHT08] y [FMRVU09] para problemas relacionados con iluminación inalámbrica.

En este trabajo mostramos cotas inferiores y superiores para el problema de iluminación con módems para polígonos monótonos y para polígonos monótonos ortogonales, los cuales modelan perfectamente la mayoría de los edificios en la vida real.

Por razones técnicas hacemos las siguientes suposiciones: para un polígono monótono no-ortogonal, suponemos que no hay dos de sus aristas que sean paralelas; cuando hablamos de un polígono, nos referimos tanto a la frontera como en el interior del polígono.

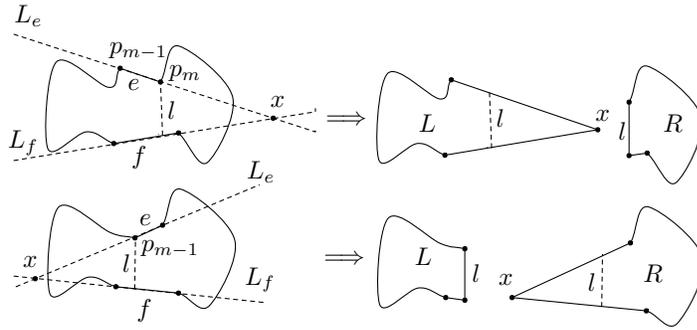


Figura 4.1: Ilustración del Lema de división.

## 4.2. Iluminación con Módems de Polígonos Monótonos

El siguiente lema provee nuestra herramienta principal para demostrar cotas superiores al número de módems necesarios para iluminar polígonos monótonos. Nos permite *dividir* polígonos monótonos en subpolígonos más pequeños, de tal forma que podemos iluminar cada uno de estos polígonos independientemente de los demás.

**Lema 4.1** (Lema de división). *Sea  $P$  un polígono monótono con vértices  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , ordenados de izquierda a derecha. Para cada entero positivo  $m < n$ , existe un segmento de recta vertical  $l$ , y dos polígonos monótonos  $L$  y  $R$  tales que:*

- *$L$  tiene  $m$  vértices y  $R$  tiene  $n - m + 2$  vértices.*
- *Se tiene que, o bien  $l$  es una cuerda de  $L$  y una arista de  $R$ , o  $l$  es una arista de  $L$  y una cuerda de  $R$ .*
- *$p_m$  o  $p_{m+1}$  es un extremo de  $l$ .*
- *Denotemos con  $L'$  el subconjunto de  $L$  a la izquierda de  $l$ , y denotemos con  $R'$  el subconjunto de  $R$  a la derecha de  $l$ ; entonces  $P = L' \cup l \cup R'$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad supongamos que  $p_{m-1}$  está en la cadena poligonal superior de  $P$ . Sea  $f$  la arista de  $P$  por debajo de  $p_{m-1}$  y sea  $e$  la arista de  $P$  que tiene a  $p_{m-1}$  como su extremo izquierdo. También sean  $e_l = p_{m-1}$  y  $e_r$  los extremos izquierdo y derecho respectivamente de  $e$ . De la misma forma, denotemos con  $f_l$  y  $f_r$  los extremos izquierdo y derecho de  $f$ , respectivamente.

Extendemos tanto  $e$  como  $f$  a líneas rectas, de tal modo que  $L_e$  es la recta que contiene a  $e$  y  $L_f$  es la recta que contiene a  $f$ .

Como suponemos que  $P$  no tiene aristas paralelas,  $L_e$  y  $L_f$  se intersecan en un punto  $x$ . Resultan dos casos (ver Figura 4.1):

1.  $x$  está a la izquierda de  $p_{m-1}$ .

Dibujemos la línea vertical que pasa por  $p_{m-1}$ , y sea  $l$  su intersección con  $P$ . Sea  $P^-$  el subconjunto de  $P$  a la izquierda de  $l$  y asignemos  $L := P^- \cup l$ . Definimos a  $R$  como el polígono limitado por:

- la cadena poligonal superior de  $P$  desde  $e_r$  hasta  $p_n$ ,
- la cadena poligonal inferior de  $P$  desde  $f_r$  hasta  $p_n$ ,
- el segmento de recta de  $x$  a  $e_r$  y el segmento de  $x$  a  $f_r$ .

2.  $x$  está a la derecha de  $p_{m-1}$ .

Dibujemos la línea vertical que pasa por  $p_m$ , y sea  $l$  su intersección con  $P$ . Sea  $P^+$  el subconjunto de  $P$  a la derecha de  $l$  y asignemos  $R := P^+ \cup l$ . Definimos  $L$  como el polígono limitado por:

- la cadena poligonal superior de  $P$  desde  $p_1$  hasta  $p_{m-1}$ ,
- la cadena poligonal inferior de  $P$  desde  $p_1$  hasta  $f_l$ .
- el segmento de recta desde  $e_l = p_{m-1}$  a  $x$  y el segmento de recta desde  $f_l$  a  $x$ .

Notemos que en ambos casos las tres propiedades anteriormente mencionadas entre  $L$ ,  $R$ ,  $l$  y  $P$  se cumplen.

□

Antes de enunciar nuestro teorema principal para polígonos monótonos, enunciamos dos lemas técnicos importantes.

**Lema 4.2.** *Todo  $(k + 2)$ -ágono puede iluminarse con un  $k$ -módem ubicado en cualquier punto del interior o de la frontera del polígono.*

*Demostración.* Un  $(k + 2)$ -módem contiene  $k + 2$  aristas. Notemos que cualquier segmento de recta que une dos puntos de la frontera de  $P$  interseca a lo más  $k$  aristas de  $P$  en su interior. Por lo tanto, un  $k$ -módem ubicado en cualquier punto del interior o de la frontera ilumina todo el polígono. □

**Lema 4.3.** *Todo  $(2k + 2)$ -ágono  $P$  puede iluminarse con un  $k$ -módem ubicado en su  $(k + 2)$ -ésimo o en su  $(k + 1)$ -ésimo vértice.*

*Demostración.* Aplicamos el Lema 4.1 a  $P$  y obtenemos un segmento  $l$  y dos polígonos monótonos  $L$  y  $R$ , cada uno con  $k + 2$  vértices, que satisfacen las propiedades enunciadas por el Lema 4.1. Ponemos un  $k$ -módem en un extremo de  $l$ . Por el Lema 4.2, este  $k$ -módem ilumina tanto  $L$  como  $R$ . Como en particular también ilumina  $L'$  y  $R'$ , entonces todo  $P$  es iluminado.  $\square$

Resaltamos el hecho de que en los casos particulares en que  $k = 2$  ó  $3$ , el Lema 4.3 puede fortalecerse con los siguientes lemas:

**Lema 4.4.** *Todo octágono monótono puede iluminarse con un 2-módem ubicado en su cuarto o quinto vértice.*

*Demostración.* Primero observemos que todo pentágono puede ser iluminado con un 2-módem ubicado en cualquier punto en su interior o en su frontera. Esto se sigue del hecho de que cualesquiera dos puntos  $x$  y  $y$  del pentágono están unidos por un segmento de recta que cruza un número par de aristas del polígono, junto con la observación de que hay dos aristas del pentágono que no son cruzadas por este segmento: la primera y la última arista cortada por la recta  $xy$ . Por lo tanto, el número máximo de aristas que cruza el segmento es dos, y entonces cualquier 2-módem ilumina el pentágono.

Ahora aplicamos el Lema de división al octágono, y obtenemos dos pentágonos con al menos un punto en común. Por la observación anterior, un 2-módem ubicado en este punto ilumina la totalidad de los dos pentágonos, y en particular ilumina todo el octágono.  $\square$

**Lema 4.5.** *Todo 9-ágono monótono puede iluminarse con un 3-módem ubicado en su quinto vértice.*

*Demostración.* Primero observemos que todo hexágono puede iluminarse con un 3-módem ubicado en su primer o último vértice. Esto se sigue de que cualquier línea que pasa por el primer (último) vértice del hexágono, cruza un número impar de aristas del polígono, junto con la observación de que esa línea no cruza ninguna de las dos aristas incidentes al primer (último) vértice del hexágono.

Para iluminar el 9-ágono, dibujemos una recta vertical a través de su quinto vértice, dividiendo el 9-ágono en dos hexágonos. Por la observación anterior, cualquier 3-módem ubicado en su intersección ilumina todo el 9-ágono.  $\square$



Figura 4.2: Un  $n$ -ágono monótono que requiere  $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$   $k$ -módems.

Ahora estamos listos para demostrar nuestro resultado principal para la iluminación de polígonos monótonos.

**Teorema 4.6.** *Todo  $n$ -ágono monótono  $P$  puede iluminarse con  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$   $k$ -módems, y existen  $n$ -ágonos monótonos que requieren al menos  $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$   $k$ -módems para ser iluminados.*

*Demostración.* Un ejemplo que alcanza la cota inferior se muestra en la Figura 4.2. Así que lo que hace falta es probar la cota superior. Usando el Lema 4.1 recursivamente, dividimos el  $n$ -ágono en  $m = \lceil \frac{n}{2k} \rceil$   $(2k+2)$ -ágonos de la siguiente manera: apliquemos el Lema 4.1 a  $P$  y obtengamos un segmento  $l_1$ , un polígono monótono  $L_1$  con  $2k+2$  vértices, y un polígono monótono  $R_1$  con  $n-2k$  vértices; todos satisfaciendo las propiedades del Lema 4.1. Ahora apliquemos el Lema 4.1 a  $R_1$  para obtener un segmento  $l_2$ , un polígono monótono  $L_2$  de  $2k+2$  vértices y un polígono monótono  $R_2$  de  $n-4k$  vértices.

Continuemos este proceso hasta obtener los  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$   $(2k+2)$ -ágonos monótonos  $L_1, L_2, \dots, L_m$  y los segmentos  $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}$ ; todos satisfaciendo las propiedades del Lema 4.1.

Para cada  $L_i$  ( $1 < i < m$ ), sea  $Q_i$  el subconjunto de  $L_i$  a la izquierda de  $l_i$  y a la derecha de  $l_{i+1}$ . Para  $L_1$  y  $L_m$ , sea  $Q_1$  el subconjunto de  $L_1$  a la izquierda de  $l_1$  y sea  $Q_m$  el subconjunto de  $L_m$  a la derecha de  $l_{m-1}$ .

Por el Lema 4.3, cada  $L_i$  puede iluminarse con un  $k$ -módem ubicado en  $Q_i$ . Notemos que como  $P = (\cup Q_i) \cup (\cup l_i)$ , estos  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$  módems de potencia  $k$  iluminan todo  $P$ .  $\square$

La prueba de la cota superior en el Teorema 4.6 usa el Lema 4.3, el cual sirve para iluminar  $(2k+2)$ -ágonos genéricos, sin embargo para  $k=1, 2$ , la versión reforzada correspondiente del Lema 4.3 puede usarse para obtener una cota superior aún mejor:

**Teorema 4.7.** *Para  $k=2$  ó  $3$ , cualquier  $n$ -ágono monótono puede iluminarse usando  $\lceil \frac{n}{k+4} \rceil$   $k$ -módems.*

*Demostración.* Al igual que en la prueba del Teorema 4.6, iteramos el Lema de división para partir el  $n$ -ágono en  $\lceil \frac{n}{6} \rceil$  8-ágonos (resp.  $\lceil \frac{n}{7} \rceil$  9-ágonos). Por el Lema 4.4

(resp. Lema 4.5), ubicando un 2-módem (resp. 3-módem) en cada uno de estos subpolígonos, todos los subpolígonos son iluminados. Como la unión de estos subpolígonos contiene el  $n$ -ágono original, éste es iluminado completamente.  $\square$

### 4.2.1. Aspectos Algorítmicos

El Teorema 4.6 establece que  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$   $k$ -módems son suficientes para iluminar cualquier  $n$ -ágono monótono. La demostración es constructiva y de ella se desprende de inmediato un algoritmo para iluminar un  $n$ -ágono monótono dado. En la construcción se aplica iterativamente el Lema de división para descomponer el polígono original en subpolígonos más pequeños.

Observemos que la demostración del Lema de división es también constructiva, y de ella también se desprende un algoritmo para implementar este lema. Si el polígono se representa con una estructura de datos adecuada, p. ej. una lista doblemente ligada, entonces la subrutina correspondiente a este lema puede implementarse con la complejidad adecuada para que el algoritmo para iluminar un  $n$ -ágono monótono se implemente en tiempo  $O(n)$ . A continuación establecemos la complejidad de la subrutina correspondiente al Lema de división, y después la usamos para establecer la complejidad de nuestro algoritmo de iluminación.

**Teorema 4.8.** *La división de un  $n$ -ágono monótono en un  $m$ -ágono monótono  $L$  y un  $(n - m + 2)$ -ágono monótono  $R$  que cumplen las propiedades del Lema de división, puede realizarse en tiempo  $O(m)$ .*

*Demostración.* Sean  $p_1, p_2, \dots, p_n$  los vértices del  $n$ -ágono original en su orden de izquierda a derecha. Supongamos que tenemos los vértices en una lista doblemente ligada, *Vertices*, ordenados de acuerdo a como aparecen en el polígono cuando éste se recorre en el sentido del reloj; y supongamos que tenemos apuntadores a los elementos de esa lista correspondientes a  $p_1$  y a  $p_n$ . (Esto quiere decir que la cadena superior del polígono se puede recuperar recorriendo la lista de  $p_1$  a  $p_n$  en el sentido normal, y que la cadena inferior se recupera recorriendo la lista de  $p_1$  a  $p_n$  en el sentido inverso.)

Observemos las operaciones (y su costo computacional) que lleva a cabo el Lema de división:

1. Identificar el vértice  $(m - 1)$ -ésimo de izquierda a derecha en la lista *Vertices*:  
Con la ayuda de dos apuntadores, uno para la cadena inferior y otro para la superior, y avanzando en cada paso el apuntador cuyo *siguiente* punto es el

más a la izquierda de entre los dos puntos *siguientes*, esto se puede hacer en tiempo  $O(m)$ .

Sin pérdida de generalidad supongamos que el vértice  $(m - 1)$ -ésimo se encuentra en la cadena superior. El caso contrario se analiza de manera idéntica.

2. Identificar la arista  $f$  que se encuentra justo debajo del vértice  $(m - 1)$ -ésimo:

Esto toma tiempo constante pues, al terminar el paso anterior, el apuntador de la cadena inferior corresponde al extremo izquierdo de esa arista, y su *siguiente* (en sentido inverso en la lista) punto es el extremo derecho.

3. Identificar la arista  $e$  cuyo extremo izquierdo es el vértice  $(m - 1)$ -ésimo:

Nuevamente, esto toma tiempo constante por los mismos argumentos del punto anterior.

4. Calcular el punto de intersección,  $x$ , de las líneas que contienen las aristas  $e$  y  $f$  resp.:

Basta resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello podemos usar la regla de Cramer, la cual evalúa los determinantes de tres matrices de  $2 \times 2$ . Se lleva a cabo en tiempo constante.

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $x$  está a la izquierda de  $p_{m-1}$ .

5. Calcular el punto de intersección,  $y$ , de la línea vertical que pasa por  $p_{m-1}$  y la arista  $f$ :

Nuevamente, mediante la regla de Cramer, esta operación toma tiempo constante.

6. Dividir la lista *Vertices* en la sublista *Vertices<sub>L</sub>* y *Vertices<sub>R</sub>*, correspondientes a los polígonos  $L$  y  $R$ , respectivamente:

Para llevar a cabo este paso, creamos dos nuevos nodos, uno correspondiente al punto  $x$  y uno correspondiente al punto  $y$ , y actualizamos varios apuntadores para que reflejen la nueva estructura; los apuntadores que actualizamos son los correspondientes a los puntos  $x$ ,  $y$ , y los extremos de  $e$  y de  $f$ . También (creamos y) actualizamos los apuntadores al primero y último elemento de ambas listas.

Es claro que este paso toma un número constante de operaciones, cada una de las cuales puede llevarse a cabo en tiempo constante. Se sigue que ejecutar este paso en su totalidad toma tiempo constante.

Del análisis anterior podemos concluir que la subrutina correspondiente al Lema de división puede implementarse en tiempo  $O(m)$ .

□

Habiendo establecido la complejidad de la subrutina correspondiente al Lema de división, es fácil determinar la complejidad de nuestro algoritmo para iluminar un  $n$ -ágono monótono.

**Teorema 4.9.** *Dado un  $n$ -ágono monótono expresado como una lista doblemente ligada de sus vértices, y un entero positivo  $k$ , se puede calcular en tiempo  $\Theta(n)$  un conjunto de  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$  puntos de ese polígono, tales que al ubicar un  $k$  módem en cada uno de esos puntos, se ilumina todo el  $n$ -ágono.*

*Demostración.* El algoritmo para iluminar el polígono es muy simple: hay que iterar aplicando la subrutina del Lema de división en cada paso para descomponer el  $n$ -ágono en  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$   $(2k + 2)$ -ágonos, y después hay que iluminar cada uno de ellos por separado usando el algoritmo correspondiente al Lema 4.3 (es posible que el último polígono tenga menos de  $2k + 2$  vértices, pero ésto no afecta ni la corrección ni la complejidad del algoritmo).

En esta iteración hay que realizar  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil - 1$  llamadas a la subrutina para dividir el polígono, y por el Teorema 4.8, cada una de estas llamadas toma tiempo a lo más  $O(2k + 2)$ . Si el tiempo que toma preparar la invocación a esta subrutina es constante (como lo es en cualquier máquina RAM), entonces el tiempo total que estas  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil - 1$  invocaciones toman es  $O(n(1 + 1/k)) + O(\lceil \frac{n}{2k} \rceil - 1) = O(n)$ .

Lo único que falta es determinar el tiempo que toma iluminar cada (a lo más)  $(2k + 2)$ -ágono con la subrutina correspondiente al Lema 4.2. Es fácil ver que el tiempo que toma a esta rutina dividir el  $(2k + 2)$ -ágono en dos  $(k + 2)$ -ágonos y calcular su punto de intersección, en el cual ubicaremos el  $k$ -módem, es a lo más  $O(2k + 2)$ . Nuevamente, el tiempo total usado por las invocaciones a esta subrutina es entonces  $O(n)$ .

Del análisis anterior es claro que podemos calcular las posiciones de los  $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$   $k$ -módems en tiempo  $O(n)$ ; y que la cota es óptima, pues el número de puntos calculados es lineal en  $n$ .

□



Figura 4.3: Ilustración de la Proposición 4.11.

### 4.3. Iluminación con Módems de Polígonos Monótonos Ortogonales

En esta sección damos cotas superiores e inferiores al número de  $k$ -módems necesarios para iluminar polígonos ortogonales y polígonos monótonos ortogonales. Recordemos que para la motivación original de nuestra investigación, ubicar módems dentro de edificios para que todo el interior del edificio sea cubierto con recepción inalámbrica, los polígonos ortogonales son un escenario bastante realista la mayor parte del tiempo.

**Proposición 4.10.** *Todo polígono ortogonal con a lo más  $(k + 4)$  vértices puede iluminarse con un  $k$ -módem ubicado en cualquier punto de su frontera o de su interior.*

*Demostración.* Cualquier segmento  $l$  con extremos en el interior o en la frontera del polígono, no puede cruzar (intersecar con su interior) ninguna de las cuatro aristas horizontal superior, horizontal inferior, vertical izquierda y vertical derecha de  $P$ . Por lo tanto, como  $P$  tiene  $n + 4$  aristas,  $l$  puede intersecar a lo más  $k$  de ellas. Se sigue que cualquier  $k$ -módem ubicado en un punto interior o en la frontera de  $P$  ilumina completamente el polígono.  $\square$

**Proposición 4.11.** *En cualquier  $(k + 5)$ -ágono ortogonal  $x$ -monótono, existe un punto en su arista vertical más a la izquierda (y un punto en su arista vertical más a la derecha) en el cual se puede ubicar un  $k$ -módem para iluminar todo el polígono.*

*Demostración.* Si (al menos) una de las dos arista horizontales adyacentes a la arista vertical más a la izquierda del polígono (ver Figura 4.3 izquierda), digamos  $e$ , no es la arista horizontal superior o inferior, respectivamente, del polígono, entonces un  $k$ -módem ubicado en el punto común de  $e$  y la arista vertical más a la izquierda,

ilumina todo el polígono. Esto se sigue de la prueba de la proposición 4.10 y del hecho de que  $e$  no bloquea la señal del módem al interior del polígono.

De otra manera (ver Figura 4.3 derecha), consideremos a la arista horizontal  $e'$  adyacente a la arista vertical más a la derecha y por arriba de esta. La recta que contiene  $e'$  interseca la arista vertical más a la izquierda. Un  $k$ -módem ubicado en este punto de intersección ilumina todo el interior del polígono, pues, análogamente al caso anterior,  $e'$  no bloquea la visibilidad del módem al interior del polígono. Observemos que es en este caso en donde necesitamos la hipótesis de que el polígono es  $x$ -monótono para poder asegurar que  $e'$  no bloquea la visibilidad del módem.  $\square$

Usando las observaciones previas podemos demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 4.12.** *Todo  $(2k + 6)$ -ágono ortogonal  $x$ -monótono puede iluminarse con un  $k$ -módem.*

*Demostración.* Si  $k$  es par, dividimos el polígono verticalmente en dos  $(k+4)$ -ágonos y ubicamos un  $k$ -módem en su intersección; la Proposición 4.10 asegura que el polígono completo es iluminado.

Si  $k$  es impar, dividimos el polígono en un  $(k + 3)$ -ágono y un  $(k + 5)$ -ágono. Por la Proposición 4.11, existe un punto en su intersección en donde se puede colocar un  $k$ -módem para iluminar el  $(k + 5)$ -ágono completo; la proposición 4.10 asegura que también el  $(k + 3)$ -ágono es iluminado.  $\square$

Nuestro resultado principal para polígonos monótonos es entonces:

**Teorema 4.13.** *Todo polígono ortogonal  $x$ -monótono con  $n$  vértices se puede iluminar con  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems.*

*Demostración.* Dividamos el polígono en  $(2k+6)$ -ágonos y apliquemos la Proposición 4.12.  $\square$

Para el caso en el que  $k$  es par, la cota del Teorema 4.13 es justa, como lo muestra la Figura 4.4 (derecha), en donde se muestra un  $n$ -ágono ortogonal monótono que requiere  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems para ser iluminado. Para  $k$  impar, el mismo ejemplo da una cota inferior de  $\lceil \frac{n-2}{2k+6} \rceil$   $k$ -módems.

Sin embargo, para el caso de 1-módems, un ejemplo de un  $n$ -ágono monótono ortogonal que requiere  $\lceil \frac{n-2}{6} \rceil$  1-módems para ser iluminado, se muestra en la Figura 4.4 (izquierda). Por lo tanto, en este caso nuestra cota también es justa.

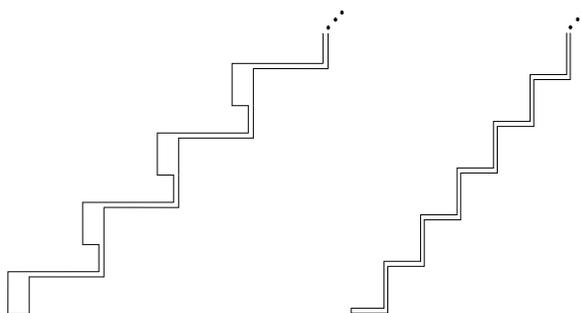


Figura 4.4: Construcciones de las cotas inferiores para los polígonos monótonos ortogonales.

### 4.3.1. Aspectos algorítmicos

El Teorema 4.13 asegura que  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems son suficientes para iluminar cualquier  $n$ -ágono monótono ortogonal. La prueba de este teorema y de sus lemas auxiliares son constructivas y de ellas se desprende de inmediato un algoritmo para calcular las posiciones de los  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$  puntos del polígono en los que se deben colocar los  $k$ -módems. Un bosquejo del algoritmo se presenta en el Algoritmo 4.1.

Representando los polígonos con la estructura de datos adecuada, los puntos en donde debemos colocar los  $k$ -módems para iluminar un  $n$ -ágono monótono ortogonal se pueden calcular en tiempo  $O(n)$ .

**Teorema 4.14.** *Dado un  $n$ -ágono monótono ortogonal, se pueden calcular en tiempo  $\Theta(n)$  un conjunto de  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$  puntos, tales que colocando un  $k$ -módem en cada uno de estos puntos se ilumina todo el  $k$ -ágono.*

*Demostración.* Supongamos que los polígonos son representados mediante una lista doblemente ligada, tal como se describe en la Subsección 4.2.1.

La subrutina para dividir el  $n$ -ágono en un  $m$ -ágono y un  $(n-m+2)$ -ágono invocada en la línea 8 del Algoritmo 4.1, puede calcularse en tiempo  $O(m)$ . Esto se hace usando dos apuntadores (al igual que en la prueba del Teorema 4.8), para encontrar el  $(m-1)$ -ésimo punto del polígono según aparecen de izquierda a derecha; y actualizando los apuntadores pertinentes para dividir la lista en dos listas que representan los dos subpolígonos buscados.

También es fácil ver que la subrutina invocada en la penúltima línea del Algoritmo 4.1 puede implementarse en tiempo  $O(k)$ , pues sólo hace falta encontrar el vértice

---

**Algorithm 4.1** Algoritmo para iluminar un polígono monotono ortogonal.

---

```
1 polígono_derecho := polígono_de_entrada;
2 n := tamaño_de_polígono_derecho;
3 subpolígonos := nueva lista;
4
5
6 mientras n > 2*k+6
7 hacer
8   L,R := divide_polígono
9     en_2k+6_ágonos_y_
10    n-2k-4_ágonos(polígono_derecho, 2*k+6, n)
11
12   polígono_derecho := R;
13   n := n - 2*k - 4;
14   añade_a_lista(subpolígonos, L);
15 fin hacer
16
17 añade_a_lista(subpolígonos, polígono_derecho);
18
19 for polígono in subpolígonos
20 hacer
21   encuentra_donde_colocar_k_módem
22 fin hacer
```

---

medio del polígono para poder dividirlo en dos polígonos (cada uno de tamaño a lo más  $k + 5$ ), y después reportar el punto común a ambos polígonos, que es donde colocaremos el  $k$ -módem que ilumina el polígono procesado en esta línea. Este punto común lo calculamos de acuerdo a las proposiciones 4.10 y 4.11 según sea el caso. Es claro que el cálculo de este punto común puede realizarse en tiempo  $O(k)$ .

Del análisis anterior resulta claro que las ubicaciones de los  $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$   $k$ -módems que iluminan el  $n$ -ágono monótono ortogonal se pueden calcular en tiempo  $O(n)$ , y que la cota es justa por que el número de ubicaciones calculadas es lineal en  $n$ .  $\square$

## 4.4. Conclusiones

Inspirados por las redes inalámbricas actuales, estudiamos una nueva variante del problema clásico de iluminación de polígonos. Para modelar la manera en que los dispositivos inalámbricos se comunican dentro de un edificio, permitimos que la luz penetre un cierto número variable de paredes.

Usando como herramienta principal el *Lema de división*, el cual nos permite dividir un polígono en subpolígonos más simples que se traslapan, damos una cota superior en el número de  $k$ -módems necesarios para iluminar cualquier polígono monótono dado. También presentamos una familia de polígonos monótonos que requieren al menos un número de  $k$ -módems muy cercano a nuestra cota superior.

También estudiamos el caso particular en el que los módems son ortogonales, en el cual hemos sido capaces de dar cotas justas en la mayoría de los subcasos.

El problema natural que queda abierto, es cerrar el espacio entre las cotas superiores e inferiores que hemos obtenido para los dos tipos de polígonos: monótonos y monótonos ortogonales.

El problema de iluminación con módems para polígonos generales ha demostrado ser bastante difícil. Creemos que obtener cotas justas para este caso es una tarea altamente no trivial. Hasta el momento, las mejores cotas inferiores que tenemos corresponden a aquellas para el caso de polígonos monótonos, y no conocemos ninguna cota superior significativa. Vale la pena mencionar que no nos sorprendería que las cotas inferiores para polígonos generales, fueran alcanzadas también por polígonos monótonos; observemos que esto sucede para la cota inferior de  $\lfloor n/3 \rfloor$  para el problema clásico de iluminación de polígonos.

# Capítulo 5

## Triángulos monocromáticos vacíos

Las gráficas geométricas estudiadas en este capítulo son *triángulos*. En un problema sobre conjuntos de puntos *rojo/azules*, investigamos el mínimo número de *triángulos monocromáticos vacíos* que hay en todo conjunto de  $n$  puntos bicoloreados en posición general.

Como resultado principal demostramos que en cualquier conjunto de puntos bicoloreado existe un número súper-lineal de triángulos monocromáticos vacíos. En particular damos una cota de  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos.

La mayoría de los resultados presentados en este capítulo fueron publicados en las actas de congreso [AFMFP<sup>+</sup>08] y en el artículo en revista [AFMFP<sup>+</sup>09a].

### 5.1. Introducción

Erdős y Guy [EG73] formularon la siguiente pregunta: “¿Cuál es el mínimo número de  $k$ -ágonos convexos determinados por cualquier conjunto de  $n$  puntos<sup>1</sup> en el plano?”. La solución trivial para el caso  $k = 3$  es  $\binom{n}{3}$ . Si además pedimos que los triángulos estén vacíos, entonces Katchalski y Meir [KM88] mostraron que una cota inferior para todo  $k \geq 3$  está dada por la expresión  $\binom{n-1}{2}$ , y que existe una constante  $c > 0$  tal que existen conjuntos de puntos con a lo más  $cn^2$  triángulos vacíos. Por las mismas fechas Bárány y Füredi [BF87] mostraron que cualquier conjunto de  $n$  puntos tiene al menos  $n^2 - O(n \log n)$  triángulos vacíos y también dieron ejemplos de conjuntos con a lo más  $2n^2$  triángulos vacíos en los cuales  $n$  es una potencia de 2.

---

<sup>1</sup>Todos los conjuntos de puntos considerados en este capítulo se suponen en posición general.

Valtr [Val95] describió una configuración de  $n$  puntos emparentada con los conjuntos de Horton [Hor83] con menos de  $1,8n^2$  triángulos vacíos, y también dio ejemplos con pocos  $k$ -ágonos convexos vacíos para los casos en que  $4 \leq k \leq 6$ : dio ejemplos con a lo más  $2,42n^2$  cuadriláteros,  $1,46n^2$  pentágonos y  $n^2/3$  hexágonos convexos vacíos respectivamente. Después Dumitrescu [Dum00] mejoró la construcción para triángulos a  $\approx 1,68n^2$ , la mejor cota superior conocida hasta ahora. Aún no se sabe si la constante puede ser menor que 1, esto es, si existe una familia de conjuntos de  $n$ -puntos con menos de  $n^2$  triángulos vacíos.

Nosotros consideramos un problema relacionado, en el que los puntos del conjunto dado,  $S$ , están coloreados. Un polígono con vértices en  $S$  se denomina *monocromático* si todos sus vértices están coloreados con el mismo color. A diferencia de la carrera arriba descrita por la mejor constante en el caso no coloreado, nosotros damos la primera cota inferior (no trivial) para el comportamiento asintótico del número de triángulos monocromáticos vacíos en conjuntos de puntos bicolorados.

Un resultado en esta dirección fue obtenido por Devillers, Hurtado, Károlyi, y Seara [DHKS03]. Ellos demostraron que en cualquier conjunto de puntos bicolorado en el plano siempre hay al menos  $\lceil \frac{n}{4} \rceil - 2$  triángulos monocromáticos vacíos con interiores disjuntos. En una generalización, Urrutia [Urr03] mostró que en cualquier conjunto de puntos 4-coloreado en  $\mathbb{R}^3$  en posición general –no cuatro puntos coplanares y no tres colineales– hay al menos un número lineal de tetraedros monocromáticos con interiores disjuntos.

Uno también puede interesarse en el mínimo número de colores para colorear cualquier conjunto  $S$  de  $n$  puntos, de tal forma que  $S$  no determina ningún triángulo monocromático vacío (o en general cualquier  $k$ -ágono convexo monocromático vacío). En [DHKS03] (Teorema 3,3) esta pregunta ha sido contestada, mostrando que ya para tres colores, existen conjuntos de puntos que no contienen ningún triángulo monocromático vacío. Para una colección de problemas similares, el lector interesado puede consultar el Capítulo 8 de [BMP05].

El problema restante es determinar el comportamiento asintótico del número de triángulos monocromáticos vacíos en conjuntos bicolorados. Mostramos que todo conjunto bicolorado de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^2$  en posición general contiene  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos. Hasta donde sabemos, ninguna cota inferior no trivial había sido conocida antes.

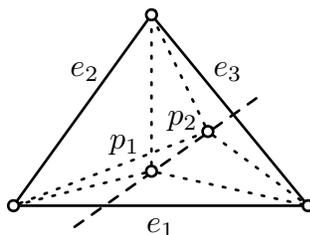


Figura 5.1: Dos puntos comparables con respecto a  $e_1$  ( $p_1 \leq_{e_1} p_2$ ) y con respecto a  $e_3$  ( $p_2 \leq_{e_3} p_1$ ).

## 5.2. Construcción de la cota inferior

Comenzamos con un lema técnico que muestra que en todo conjunto de puntos con frontera convexa triangular, existe una triangulación tal que una fracción “grande” de sus triángulos son incidentes a vértices de la frontera convexa.

**Lema 5.1.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano con tres puntos extremos, esto es, con una frontera convexa triangular, y con  $m = n - 3$  puntos interiores. Entonces  $S$  se puede triangular de tal forma que al menos  $m + \sqrt{m} + 1$  triángulos tengan (al menos) un punto extremo de  $S$  como uno de sus vértices.*

*Demostración.* Sean  $\Delta$  la frontera convexa de  $S$ ,  $E(\Delta)$  las aristas de  $\Delta$ , y  $M = S \setminus \Delta = q_1, \dots, q_m$  los puntos interiores de  $S$ ,  $|M| = m = n - 3$ .

Primero definimos un orden parcial  $\leq_e$  sobre los elementos de  $M$ . Dos puntos  $p_1, p_2 \in M$  son comparables con respecto a una arista  $e \in E(\Delta)$  si el triángulo abierto formado por  $e$  y  $p_1$  está contenido en el triángulo cerrado formado por  $e$  y  $p_2$  ( $p_1 \leq_e p_2$ ) o viceversa ( $p_2 \leq_e p_1$ ), véase la Figura 5.1 para un ejemplo.

Observemos que dos puntos dados  $p_1, p_2 \in M$  son comparables con respecto a exactamente dos de tres aristas de  $\Delta$ . Esto puede entenderse observando la línea que pasa por  $p_1$  y  $p_2$ , véase la Figura 5.1. Dos puntos son comparables respecto a una arista  $e$  de  $\Delta$  si y sólo si la línea que los contiene interseca  $e$ . Esto implica que si dos puntos no son comparables respecto a una arista, entonces lo son respecto a las otras dos aristas de  $\Delta$ .

Una *cadena* es un conjunto ordenado de puntos comparables (par a par) de  $M$ , y una *anticadena* es un conjunto de puntos no comparables par a par de  $M$ . Del Teorema

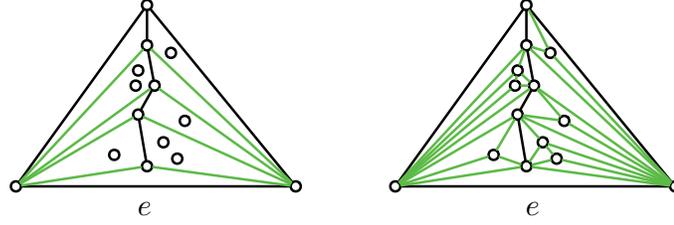


Figura 5.2: Izquierda: Una cadena respecto a  $e$  (orientada hacia arriba) y su triangulación. Derecha: Triangulación extendida.

de Dilworth [Dil50] se sigue que en  $M$  existe una cadena o una anticadena respecto a cualquier arista  $e$  de  $\Delta$ , de tamaño  $\sqrt{m}$ . Como una anticadena respecto a  $e$  es una cadena respecto a las otras dos aristas de  $\Delta$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una cadena  $q_{i_1} \leq_e q_{i_2} \cdots \leq_e q_{i_{\sqrt{m}}}$  respecto a  $e$ .

Construimos una triangulación de  $\Delta \cup \{q_{i_1}, \dots, q_{i_{\sqrt{m}}}\}$  uniendo cada  $q_{i_j}$ ,  $1 \leq j < \sqrt{m}$ , con  $q_{i_{j+1}}$  y con los extremos de  $e$ , y uniendo  $q_{i_{\sqrt{m}}}$  con los vértices de  $\Delta$ , ver Figura 5.2 izquierda. Hay  $2\sqrt{m} + 1$  triángulos en esta triangulación, y cada uno de ellos tiene al menos un vértice en la frontera convexa. Ahora extendemos esta triangulación para que contenga el resto de los puntos. Para cada  $q_i$  que no está en la cadena, hay al menos un extremo  $p$  de  $e$  visible desde  $q_i$ ; agregamos la arista que conecta  $p$  con  $q_i$  a la triangulación.

Hasta ahora contamos con una colección de aristas que no se cortan (una gráfica geométrica plana), y completamos esta a una triangulación de  $\Delta \cup \{q_1, \dots, q_m\}$ , véase la Figura 5.2 derecha. Hay  $2\sqrt{m} + m - \sqrt{m} + 1 = m + \sqrt{m} + 1$  triángulos en esta triangulación con al menos uno de sus vértices en la frontera convexa. □

Ahora generalizamos el resultado anterior a conjuntos de puntos con frontera convexa más grande. Denotemos con  $CH(S)$  el conjunto de vértices de la frontera convexa de  $S$ , y denotemos con  $|CH(S)|$  su cardinalidad, esto es, el número de puntos en la frontera convexa de  $S$ .

**Lema 5.2** (Lema de orden). *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano con  $h = |CH(S)|$  puntos en la frontera convexa. Entonces  $S$  puede triangularse de tal forma que al menos  $n + \sqrt{n - h} - 2$  triángulos contengan uno de sus puntos en la frontera convexa de  $S$ .*

*Demostración.* Consideremos una triangulación arbitraria de los  $h$  puntos de la frontera convexa de  $S$  (ignoremos los puntos interiores). Sean  $\tau_1, \dots, \tau_{h-2}$  los triángulos obtenidos y sea  $s_i$  el número de puntos de  $S$  en el interior de  $\tau_i$ . Por el Lema 5.2, cada triángulo  $t_i$  puede triangularse de manera que al menos  $s_i + \sqrt{s_i} + 1$  triángulos tengan uno de sus vértices en la frontera de  $\tau_i$  y por lo tanto en la frontera convexa de  $S$ . Calculando la suma del número de estos triángulos sobre todos los  $\tau_i$ 's tenemos que : 
$$\sum_{i=1}^{h-2} (s_i + \sqrt{s_i} + 1) = \sum_{i=1}^{h-2} s_i + \sum_{i=1}^{h-2} \sqrt{s_i} + \sum_{i=1}^{h-2} 1 = (n-h) + \sum_{i=1}^{h-2} \sqrt{s_i} + (h-2) \geq n + \sqrt{\sum_{i=1}^{h-2} s_i} - 2 = n + \sqrt{n-h} - 2. \quad \square$$

Para el siguiente resultado consideramos conjuntos de puntos bicolorados. Mostraremos que si la cardinalidad de las dos clases cromáticas difiere significativamente, entonces existe un número grande de triángulos monocromáticos vacíos.

**Lema 5.3** (Lema de discrepancia). *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano, particionado en un conjunto  $R$  y un conjunto  $B$  con  $|R| = |B| + d$ ,  $d \geq 2$ . Entonces  $S$  determina al menos  $\frac{d-2}{6}(n+d)$  triángulos monocromáticos vacíos.*

*Demostración.* Consideremos un punto rojo  $r \in R$  y la estrella que conecta a  $r$  con todos los vértices de  $R \setminus \{r\}$ . Completando esta a una triangulación de  $R$  obtenemos al menos  $|R| - 2$  triángulos que tienen a  $r$  como uno de sus vértices. Al menos  $d - 2$  de estos triángulos no contienen ningún punto de  $B$ , puesto que  $|B| = |R| - d$ . Repitiendo este proceso con todos los puntos de  $R$  obtenemos al menos  $\frac{(d-2)}{3}|R| = \frac{(d-2)}{3} \frac{n+d}{2} = \frac{d-2}{6}(n+d)$  triángulos rojos vacíos, pues sobrecontamos cada triángulo a lo más 3 veces.  $\square$

Notemos que para el caso monocromático, el Lema de discrepancia implica la cota  $\Omega(n^2)$  en el número de triángulos vacíos dada en [KM88], si bien las constantes no son tan buenas.

Ahora estamos listos para probar nuestro resultado principal.

**Teorema 5.4.** *Todo conjunto de  $n$  puntos bicolorado en el plano determina  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos.*

*Demostración.* La idea general de la prueba es ir pelando iterativamente capas monocromáticas convexas del conjunto de puntos. Para cada capa, usamos el Lema de orden para obtener aproximadamente  $\sqrt{n}$  triángulos monocromáticos vacíos. Si en algún momento la diferencia de las cardinalidades de las dos clases cromáticas es

grande, entonces usamos el Lema de discrepancia y terminamos el proceso; de otra forma terminamos después de  $\frac{1}{3}n^{3/4}$  pasos.

Sea  $S_1$  el conjunto de puntos bicoloreados dado, con  $R_1$  el conjunto de puntos rojos y  $B_1$  el conjunto de puntos azules. Sea  $m := n/6$ . En cada paso de la iteración construimos conjuntos más pequeños  $S_{i+1} \subset S_i$ ,  $R_{i+1} \subseteq R_i$  y  $b_{i+1} \leq b_i$  respectivamente, con  $S_{i+1} = R_{i+1} \cup B_{i+1}$ . Como invariante tendremos que en cada paso se cumple que  $|S_i| \geq 2m$ . La iteración termina si en algún paso la discrepancia entre los dos conjuntos es mayor que  $m^{1/4}$ , o después de  $\frac{1}{3}n^{3/4}$  pasos.

Consideremos el  $i$ -ésimo paso de la iteración y, sin pérdida de generalidad, supongamos que  $|R_i| \geq |B_i|$ . Hay dos casos posibles.

- Si  $|R_i| - |B_i| \geq m^{1/4}$ , entonces aplicamos el Lema de discrepancia y obtenemos al menos  $\frac{(m^{1/4}-2)}{6}(2m + m^{1/4}) = \Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos.
- De otra forma, consideramos la frontera convexa de los puntos rojos y denotamos con  $B'_i \subseteq B_i$  el conjunto de puntos azules fuera de esta frontera convexa. Sean  $r_i = |R_i|$  y  $b_i = |B_i \setminus B'_i|$  el número de puntos rojos y azules, respectivamente, dentro de esta frontera convexa. Tenemos que  $r_i \geq m$  por la invariante supuesta, y que  $r_i \geq b_i$  y  $r_i \leq b_i + m^{1/4}$ , pues de otro modo aplicamos el Lema de discrepancia a  $R_i \cup B_i \setminus B'_i$  y terminamos la iteración con  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos como en el primer caso. Notemos que la última desigualdad implica que  $|B'_i| \leq m^{1/4}$ .

Aplicamos el Lema de orden a  $R_i$  y obtenemos al menos  $r_i + \sqrt{r_i - |CH(R_i)|} - 2$  triángulos monocromáticos (rojos), los cuales son por construcción un subconjunto de una triangulación del cierre convexo de  $R_i$ , y son todos adyacentes a la frontera convexa de  $R_i$ . A lo más  $b_i$  de estos triángulos pueden contener un punto azul, así que tenemos al menos  $r_i - b_i + \sqrt{r_i - |CH(R_i)|} - 2 \geq \sqrt{r_i - |CH(R_i)|} - 2$  triángulos monocromáticos vacíos.

Ahora probamos que  $|CH(R_i)| < 2m^{1/4}$ . Supongamos por el contrario que  $|CH(R_i)| \geq 2m^{1/4}$ , y consideremos el conjunto  $(R_i \setminus CH(R_i)) \cup (B_i \setminus B'_i)$ . Este conjunto tiene a lo más  $r_i - 2m^{1/4}$  puntos rojos y  $b_i \geq r_i - m^{1/4}$  puntos azules, así que la diferencia entre ambos conjuntos es al menos  $m^{1/4}$  y como antes, ocupamos el Lema de discrepancia y terminamos la iteración.

Así que si no terminamos la iteración, en el paso  $i$ -ésimo obtenemos al menos  $\sqrt{m - 2m^{1/4}} - 2 \geq \frac{\sqrt{m}}{2}$  triángulos monocromáticos vacíos con al menos un vértice en  $CH(R_i)$ ; éstos son vértices que no usaremos en las siguientes iteraciones, y por lo tanto no sobrecontaremos los triángulos vacíos.

El proceso termina si aplicamos el Lema de discrepancia, o después de  $\frac{1}{3}n^{3/4}$  pasos. Como en cada paso obtenemos al menos  $\frac{\sqrt{m}}{2}$  triángulos monocromáticos vacíos, en ambos casos obtenemos un total de  $\Omega(n^{5/4})$  triángulos monocromáticos vacíos.

Lo único que falta es demostrar que la invariante  $|S_i| \geq 2m$  se mantiene. En el  $i$ -ésimo paso eliminamos  $|B'_i| + |CH(R_i)| < m^{1/4} + 2m^{1/4} = 3m^{1/4}$  puntos. Así que después de  $\frac{1}{3}n^{3/4}$  pasos, tenemos al menos  $n - \frac{1}{3}n^{3/4} \cdot 3m^{1/4} \geq 2m$  puntos no eliminados.  $\square$

### 5.3. Mejorando nuestra construcción

El resultado presentado en la sección anterior es la primera cota súper-lineal conocida, al número mínimo de triángulos monocromáticos vacíos que hay en todo conjunto de puntos bicolorados. Poco después de que la obtuvimos, esta fue mejorada por János Pach y Géza Tóth [PT08]. Ellos modificaron cuidadosamente nuestra construcción y fueron capaces de obtener  $\Omega(n^{4/3})$  como una mejor cota inferior. Con el propósito de hacer más autocontenido este capítulo, presentamos su demostración. Acto seguido, discutimos la diferencia entre ambas construcciones.

**Teorema 5.5** (Pách,Tóth(2008)). *En todo conjunto de  $n$  puntos bicolorados en posición general, siempre hay al menos  $cn^{4/3}$  triángulos monocromáticos vacíos, en donde  $c$  es una constante absoluta.*

*Demostración.* Dado un conjunto bicolorado  $S$  con  $r(S)$  puntos rojos y  $b(S)$  puntos azules, denotemos con  $d(S) := |r(S) - b(S)|$  la discrepancia de  $S$ .

Sea  $S$  un conjunto bicolorado de  $n$  puntos en posición general, y por simplicidad supongamos que  $n \geq 1000$ . Llamamos a un punto  $p \in S$  *rico* si hay al menos  $\sqrt[3]{n}$  triángulos monocromáticos vacíos adyacentes a  $p$ . El siguiente algoritmo demuestra el teorema encontrando al menos  $n/5$  puntos *ricos* en  $S$ .

ALGORITMO ENCUENTRA-PUNTOS-RICOS(S)

PASO 0. Si  $d(S) \geq \sqrt[3]{n}/100$ , entonces, por el Lema de discrepancia, encontramos  $\Omega(n^{4/3})$  triángulos monocromáticos vacíos. Supongamos entonces que  $d(S) < \sqrt[3]{n}/100$ . Se sigue que  $b = b(S) > n/2 - \sqrt[3]{n}/200$ , y que  $r = r(S) > n/2 - \sqrt[3]{n}/200$ . Asignemos  $i := 1$  y  $S_1 := S$ .

PASO  $i$ . Se sigue por inducción en  $i$  que  $b(S_i) = b(S_{i-1}) - 1$ , para  $i > 1$ , así que tenemos que  $b = b(S_i) > n/2 - \sqrt[3]{n}/200 - i$ , para todo  $i \geq 1$ . Suponiendo que nuestro algoritmo termina antes de encontrar al menos  $n/5$  puntos *ricos*, tenemos que  $i \leq n/5$ .

Tomemos la frontera convexa de los puntos azules de  $S_i$ , y eliminemos de  $S$  los puntos rojos fuera de esta frontera, obteniendo con esto un conjunto de puntos  $S'$  cuya frontera convexa contiene únicamente puntos azules. Hasta ahora no hemos eliminado ningún punto azul, así que tenemos que  $b(S') = b(S_i)$ . Si  $d(S') \geq \sqrt[3]{n}/100$ , entonces terminamos el algoritmo, observando que hemos terminado por el Lema de discrepancia. Así que supondremos que  $d(S') < \sqrt[3]{n}/100$ . Se sigue que  $r = r(S') \geq b(S') - d(S') > n/2 - 3\sqrt[3]{n}/200 - i > n/4$ . Si la frontera convexa de  $S'$  tiene al menos  $\sqrt[3]{n}/50$  puntos, eliminémoslos, y denotemos con  $S''$  al conjunto resultante. Como  $d(S') \leq \sqrt[3]{n}/100$  y todos los puntos azules eliminados en el último paso fueron del mismo color (azules), tenemos que  $d(S'') \geq \sqrt[3]{n}/100$ . Tomando en cuenta que  $|S''| \geq r(S') > n/4$ , hemos terminado por el Lema de la discrepancia, así que podemos terminar el algoritmo. Por lo tanto, podemos suponer que hay  $m$  puntos en la frontera convexa de  $S'$ , todos ellos azules, para alguna  $m < \sqrt[3]{n}/50$ . Denotemos con  $p_1, p_2, \dots, p_m$  esos puntos, según su orden en el sentido del reloj. Completeemos la frontera convexa de  $S'$  a una triangulación de su interior, añadiendo las diagonales  $p_1p_j$ , para  $j = 3, \dots, m-1$ . Denotemos con  $T_j$  al triángulo  $p_1p_{j+1}p_{j+2}$ , y sean  $b_j$  y  $r_j$  el número de puntos rojos y de puntos azules en el interior de  $T_j$  ( $j = 1, \dots, m-2$ ).

Supongamos que  $|b_j - r_j| > \sqrt[3]{n}/50$  para alguna  $j$ . Al menos una de las regiones  $T_j$ ,  $T_1 \cup T_2 \cdots \cup T_{j-1}$  y  $T_{j+1} \cup \cdots \cup T_{m-2}$  contiene al menos  $(r(S') + b(S') - m)/3 \geq (2b(S') + d(S') - m)/3 = (2b(S_i) + d(S') - m)/3 \geq n/6$  puntos. Si  $T_j$  es semejante región, entonces podemos aplicar el Lema de discrepancia a la región que contiene al menos  $n/6$  puntos, y entonces o bien  $S' \cap (T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{j-1})$ , o  $S' \cap (T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{j-1} \cup T_j)$  tiene discrepancia al menos  $\sqrt[3]{n}/100$ , y nuevamente hemos terminado.

Podemos suponer entonces que  $|b_j - r_j| \leq \sqrt[3]{n}/50$ , para todo  $j = 1, \dots, m-2$ . Como  $\sum_{j=1}^{m-2} b_j = b(S') - m = b(S_i) - m \geq n/4$ , existe una  $j$  tal que  $b_j \geq n/(4m) \geq 50n^{2/3}/4$ , y por nuestra suposición,  $r_j \leq b_j + \sqrt[3]{n}/50$ . Por el Lema de orden, podemos triangular los puntos azules en  $T_j$ , incluyendo los vértices de  $T_j$ , de tal forma que al menos  $b_j + \sqrt{b_j} > b_j + 7\sqrt[3]{n}/2$  triángulos sean adyacentes a uno de los vértices de  $T_j$ . Al menos  $7\sqrt[3]{n}/2 - \sqrt[3]{n}/50 > 3\sqrt[3]{n}$  de estos triángulos no contienen un punto rojo, y al menos un tercio de estos triángulos vacíos comparten un vértice de  $T_j$ , denotado con  $p$ . Así que hemos encontrado al menos  $\sqrt[3]{n}$  triángulos vacíos incidentes al mismo vértice  $p$ , el cual es por lo tanto un punto *rico*. Si  $i \geq n/5$ , entonces nos detenemos. De otra forma, asignemos  $S_{i+1} := S_i \setminus \{p\}$ , y asignemos  $i := i + 1$ .

En resumen: el ALGORITMO ENCUENTRA-PUNTOS-RICOS( $S$ ) pudo terminar en el paso  $i$  para algún  $i \leq n/5$ , o en el paso  $\lceil n/5 \rceil$ . En el primer caso, terminó porque aplicamos el Lema de discrepancia para encontrar  $\Omega(n^{4/3})$  triángulos monocromáticos vacíos. En el segundo caso, encontramos al menos  $n/5$  puntos *ricos*, y por lo tanto al

menos  $n^{4/3}/15$  triángulos monocromáticos vacíos. Esto concluye la demostración.  $\square$

Observemos que la construcción anterior difiere de la nuestra en que, en caso de no ocupar nunca el Lema de discrepancia (porque la discrepancia en cada región involucrada es pequeña), nosotros iteramos  $\Theta(n^{3/4})$  pasos, obteniendo en cada paso  $\Theta(n^{1/2})$  triángulos. En cambio en su construcción, ellos iteran  $\Theta(n)$  pasos, obteniendo en cada paso  $\Theta(n^{1/3})$  triángulos. Ellos pueden iterar más veces porque en cada uno de los pasos eliminan solamente un punto azul; en cambio nosotros eliminamos potencialmente  $\Theta(n^{1/4})$  puntos azules en cada paso.

La diferencia clave de su construcción respecto a la nuestra, es que ellos hacen la observación extra de que en cada paso de la iteración, en la triangulación de la frontera convexa del conjunto, hay un triángulo con un número de puntos grande en su interior, y es en este triángulo en donde aplican el Lema de orden para obtener el número de triángulos adecuado. Haciendo esto, no perturban el resto de los triángulos de esa triangulación, y con ello ganan la ventaja de tener que eliminar únicamente un punto azul para evitar sobreconteo de los triángulos obtenidos.

En contraparte, en nuestra construcción aplicamos el Lema de orden simultáneamente en todos los triángulos de la triangulación de la frontera convexa del conjunto de puntos. Esto tiene la desventaja de que, aunque obtenemos más triángulos en cada paso de la iteración, nos acabamos mucho más rápidamente los puntos, y por lo tanto al final obtenemos menos triángulos vacíos por cada punto eliminado.

Dado lo similar de las dos construcciones, sería muy interesante observar que tan lejos se puede llevar nuestra técnica: en caso de que la cota óptima fuera asintóticamente mayor que  $n^{4/3}$ , sería muy interesante ver si una mejor cota puede probarse con alguna otra modificación de nuestra técnica, o si bien hace falta una idea totalmente diferente para demostrarla.

## 5.4. Conclusiones y problemas abiertos

No hemos podido construir un conjunto de puntos con  $o(n^2)$  triángulos monocromáticos vacíos. Por lo general los conjuntos de Horton son un buen candidato para obtener un ejemplo con un número pequeño de polígonos convexos vacíos. Pero resulta que en toda bicoloración de los conjuntos de Horton hay  $\Omega(n^2)$  triángulos monocromáticos vacíos. Un bosquejo de la prueba de este hecho es el siguiente. Tomemos cualquier bicoloración del conjunto de Horton y notemos que las mitades superior e inferior deben de tener ambas un número lineal de puntos rojos y azules, pues de otra forma

aplicando el Lema de discrepancia obtendríamos un número cuadrático de triángulos monocromáticos vacíos. Ahora tomemos cualquier triángulo conformado por una terna de puntos consecutivos en la mitad superior, los cuales formen una tapa. Cualquier arista de este triángulo, de las cuales al menos una es monocromática, digamos roja, junto con cualquier punto de la mitad inferior, forman un triángulo vacío. Así que junto con los  $\Theta(n)$  puntos rojos de la mitad inferior, esta arista forma un número lineal de triángulos monocromáticos rojos. Como hay un número lineal de semejantes tapas, obtenemos un número cuadrático de triángulos monocromáticos vacíos para el conjunto de Horton.

Otros conjuntos interesantes con  $O(n^2)$  triángulos vacíos, no basados en los conjuntos de Horton, pueden encontrarse en las construcciones de Katchalski y Meir [KM88].

Considerando los resultados de [BV04] y [PRS06], uno puede ver que en el caso sin colores y para  $n$  suficientemente grande, hay siempre un número cuadrático de triángulos vacíos y de cuadriláteros convexos vacíos. Aún más, hay al menos un número lineal de pentágonos convexos vacíos, aunque la cota correcta parece ser cuadrática. El caso de hexágonos convexos vacíos fue por mucho tiempo un problema abierto: ¿Existe siempre un hexágono convexo vacío en todo conjunto de puntos suficientemente grande? Esta pregunta ha sido contestada afirmativamente hasta hace muy poco. Nicolás [Nic07] y Gerken [Ger08] mostraron de manera independiente que en todo conjunto de puntos suficientemente grande, siempre existe al menos un hexágono convexo vacío. Esto por supuesto implica que existe un número lineal de ellos, pero la mejor cota superior es nuevamente cuadrática. Por último, hay conjuntos de puntos arbitrariamente grandes que no contienen ningún heptágono vacío, como lo demostro Horton [Hor83]. Así que parece ser que o bien ninguno, o un número cuadrático de  $k$ -ágonos convexos vacíos existen. Pensamos que esto se puede trasladar a conjuntos de puntos bicoloreados, y por lo tanto enunciamos la siguiente conjetura.

**Conjetura 5.6.** *Cualquier conjunto de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^2$  en posición general determina un número cuadrático de triángulos monocromáticos vacíos.*

No hemos podido construir ninguna familia de puntos en la que, asintóticamente, el número de triángulos monocromáticos vacíos y el número de triángulos vacíos difiera. Lo que hemos podido construir son conjuntos que tienen 5 veces menos triángulos monocromáticos vacíos que triángulos vacíos. La idea detras de la construcción es comenzar con un conjunto  $S$  de  $n$  puntos con  $\tau(S)$  triángulos vacíos. Sin pérdida de generalidad,  $S$  no tiene dos puntos sobre la misma recta horizontal. Entonces añadimos una copia de  $S$  desplazada a la derecha un  $\epsilon$  suficientemente pequeño, y coloreamos los puntos de  $S$  de rojo y sus duplicados de azul. Por cada pareja de

puntos a distancia  $\epsilon$ , obtenemos  $2n - 2$  triángulos monocromáticos vacíos. Por cada triángulo vacío en  $S$  obtenemos 3 nuevos triángulos bicromáticos (que no contienen una pareja de puntos a distancia  $\epsilon$ ), pero sólo un triángulo monocromático vacío. Así que la razón entre triángulos vacíos y triángulos monocromáticos vacíos es  $4 + \frac{2n^2 - 2n}{\tau(S)}$ . Tomando como conjunto  $S$  los conjuntos construídos por Bárány y Valtr [BV04] con  $\tau(s) \approx 1,62n^2$ , obtenemos una razón de  $\approx 5,23$ .

Otra pregunta interesante es considerar  $k$ -ágonos convexos vacíos para  $k > 3$ . Devillers y coautores [DHKS03] (Teorema 3.4) mostraron que para  $k \geq 5$  y cualquier  $n$ , hay conjuntos bicolorados en los cuales no existe ningún  $k$ -ágono convexo monocromático vacío. Recientemente en [AHH<sup>+</sup>09], fue demostrado que en cualquier conjunto bicolorado de puntos suficientemente grande existe al menos un cuadrilátero, no necesariamente convexo, monocromático vacío.

En el caso restante de cuadriláteros convexos monocromáticos vacíos, se sabe que estos siempre existen en cualquier bicoloración del conjunto de Horton para  $n \geq 64$  [DHKS03]. Esto lleva a la conjetura 3.1 en [DHKS03], que establece que en cualquier conjunto bicolorado de puntos suficientemente grande siempre existe un cuadrilátero monocromático vacío.

Poco después de que obtuvimos nuestro resultado, y basándose en nuestro trabajo, la cota inferior al número de triángulos monocromáticos vacíos fue mejorada por J. Pach y G. Tóth a  $\Omega(n^{4/3})$  [PT08].

Solo resta mencionar que parece posible generalizar nuestros resultados a dimensiones superiores, para asegurar que en todo conjunto de puntos bicolorados en  $\mathbb{R}^d$  siempre hay al menos  $\Omega(n^{d-3/4})$  simplejos monocromáticos vacíos.



# Bibliografía

- [ACFM<sup>+</sup>08] O. Aichholzer, S. Cabello, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, F. Hurtado, and D. R. Wood. Edge-removal and non-crossing configurations in geometric graphs. *24th Europ. Workshop On Comput. Geom.*, pages 119–122, 2008.
- [ACFM<sup>+</sup>09] O. Aichholzer, S. Cabello, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, F. Hurtado, and D. R. Wood. Edge-removal and non-crossing configurations in geometric graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2009.
- [AE89] N. Alon and P. Erdős. Disjoint edges in geometric graphs. *Discrete and Computational Geometry*, 4:287—290, 1989.
- [AFMFP<sup>+</sup>08] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, and J. Urrutia. Empty monochromatic triangles. *Proc. 20th Can. Conf. Comp. Geom.*, pages 75–78, 2008.
- [AFMFP<sup>+</sup>09a] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, and J. Urrutia. Empty monochromatic triangles. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 42(9):934–938, 2009.
- [AFMFP<sup>+</sup>09b] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, J. Urrutia, and B. Vogtenhuber. Modern illumination of monotone polygons. *Proc. 25th European Workshop on Computational Geometry.*, pages 167—170, 2009.
- [Aga84] A. Agarwal. *The art gallery problem: Its variations, applications, and algorithmic aspects*. PhD thesis, Johns Hopkins University, 1984.
- [AH76] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(5):711–712, 1976.

- [AHH<sup>+</sup>09] O. Aichholzer, T. Hackl, C. Huemer, F. Hurtado, and B. Vogtenhuber. Large bichromatic point sets admit empty monochromatic 4-gons. *SIAM Journal on Discrete Mathematics (SIDMA)*, page accepted, 2009.
- [AKE85] G. L. Alexanderson, L. F. Klosinski, and L. C. Larson (Eds.). *The William Lowell Putnam Mathematical Competition problems and solutions : 1965-1984*. Mathematical Association of America, USA, 1985.
- [Ben06] V. I. Benediktovich. Plane subgraphs in geometric complement of 2-factor and complete bipartite graph. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 24:31–38, 2006.
- [BETT94] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I.G Tollis. Algorithms for drawing graphs: an annotated bibliography. *Computational Geometry*, 4(5):235–282, 1994.
- [BETT99] G.Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. G. Tollis. *Graph Drawing*. Prentice Hall, 1999.
- [BF87] I. Bárány and Z. Füredi. Empty simplices in euclidean space. *Canad. Math. Bull*, Jan 1987.
- [BKV03] P. Brass, G. Károlyi, and P. Valtr. A turán-type extremal theory of convex geometric graphs. volume 25 of *Discrete and Computational Geometry. The Goodman-Pollack Festschrift. Algorithms and Combinatorics 25*, pages 275—300. Berlin, Springer, 2003.
- [BMP05] P. Brass, W. O. J. Moser, and J. Pach. *Research problems in discrete geometry*. Springer, 2005.
- [BV04] I. Barany and P. Valtr. Planar point sets with a small number of empty convex polygons. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 41(2):243—269, Jan 2004.
- [Čer05] J. Černý. Geometric graphs with no three disjoint edges. *Discrete and Computational Geometry*, 34(4):679—695, 2005.
- [Cha91] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. *Discrete and Computational Geometry*, 6(1):485–524, 1991.

- [CHOU08] D. Christ, M. Hoffmann, Y. Okamoto, and T. Uno. Improved bounds for wireless localization. *Proc. 11th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, pages 77–89, 2008.
- [Chv75] V. Chvatal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 18:39–41, 1975.
- [CLRS09] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 3rd edition, 2009.
- [CN98] M. Chrobak and S. Nakano. Minimum-width grid drawings of plane graphs. *Computational Geometry*, 11(1):29 – 54, 1998.
- [CP95] M. Chrobak and T. H. Payne. A linear-time algorithm for drawing a planar graph on a grid. *Information Processing Letters*, 54(4):241 – 246, 1995.
- [dFPP88] H. de Fraysseix, J. Pach, and R. Pollack. Small sets supporting fary embeddings of planar graphs. *Proc. 20th Annu. ACM Sympos. Theory Comput.*, pages 426–433, 1988.
- [dFPP90] H. de Fraysseix, J. Pach, and R. Pollack. How to draw a planar graph on a grid. *Combinatorica*, 10(1):41–51, Mar 1990.
- [DHKS03] Olivier Devillers, Ferran Hurtado, Gyula Károlyi, and Carlos Seara. Chromatic variants of the erdős-szekeres theorem on points in convex position. *Comput. Geom.*, 26(3):193–208, 2003.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2005.
- [Dil50] R. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. Math.*, 51:161–166, 1950.
- [Dil96] M. Dillencourt. Finding hamiltonian cycles in delaunay triangulations is np-complete. *Discrete Applied Mathematics*, 64(3):207–217, Jan 1996.
- [DK01] A. Dumitrescu and R. Kaye. Matching colored points in the plane: some new results. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 19(1):69–85, 2001.

- [Dum00] A. Dumitrescu. Planar sets with few empty convex polygons. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, Jan 2000.
- [EG73] P. Erdős and R. K. Guy. Crossing number problems. *Amer. Math. Monthly*, 80:52–58, 1973.
- [EGS07] D. Eppstein, MT Goodrich, and N. Sitchinava. Guard placement for efficient point-in-polygon proofs. *Proc. 23rd Symposium on Computational Geometry*, pages 27–36, 2007.
- [Erd46] P. Erdős. On sets of distances of  $n$  points. *American Mathematical Monthly*, 53:248–250, 1946.
- [Fár48] I. Fáry. On straight line representation of planar graphs. *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, 11:229–233, 1948.
- [Fel04] S. Felsner. *Geometric Graphs and Arrangements: Some Chapters from Combinatorial Geometry*. 2004.
- [Fis78] S. Fisk. A short proof of chvátal’s watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(3):374, 1978.
- [FMRVU09] R. Fabila-Monroy, A. Ruiz-Vargas, and J. Urrutia. On modern illumination problems. *Proc. of XIII Encuentros de Geometría Computacional, Zaragoza, Spain*, pages 221–228, 2009.
- [FPM09] D. Flores-Peñaloza and F. J. Z. Martínez. Every four-colorable graph is isomorphic to a subgraph of the visibility graph of the integer lattice. *21st Can. Conf. Comp. Geom.*, pages 91–93, 2009.
- [Ger08] T. Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets. *Discrete and Computational Geometry*, Jan 2008.
- [GHH<sup>+</sup>02] A. García, C. Hernando, F. Hurtado, M. Noy, and J. Tejel. Packing trees into planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 40(3):172–181, 2002.
- [GKK96] W. Goddard, M. Katchalski, and D. J. Kleitman. Forcing disjoint segments in the plane. *European Journal of Combinatorics*, 17(4):391–395, 1996.

- [Har62] F. Harary. The maximum connectivity of a graph. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 48:1142—1146, 1962.
- [HHN02] C. Hernando, F. Hurtado, and M. Noy. Graphs of non-crossing perfect matchings. *Graphs and Combinatorics*, 18(3):517—532, 2002.
- [Hor83] J. D. Horton. Sets with no empty convex  $k$ -gons. *Canad. Math. Bull.*, 26(4):482–484, 1983.
- [HT74] J. Hopcroft and R. E. Tarjan. Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21(4):549–568, 1974.
- [Hue09] C. Seara C. Huemer. 36 two-colored points with no empty monochromatic convex fourgons. *Geombinatorics*, XIX, 2009.
- [JW93] K. Jansen and G. Woeginger. The complexity of detecting crossing-free configurations in the plane. *BIT Numerical Mathematics*, Jan 1993.
- [KK03] A. Kaneko and M. Kano. Discrete geometry on red and blue points in the plane—a survey. *Discrete and Computational Geometry, Algorithms Combin.*, 25:551–570, 2003.
- [KLS00] S. Khanna, N. Linial, and S. Safra. On the hardness of approximating the chromatic number. *Combinatorica*, 20(3):393–415, 2000.
- [KM88] M. Katchalski and A. Meir. On empty triangles determined by points in the plane. *Acta Math. Hungar.*, 51(3-4):323–328, 1988.
- [KP96] Y. S. Kupitz and M. A. Perles. Extremal theory for convex matchings in convex geometric graphs. *Discrete and Computational Geometry*, 15:195—220, 1996.
- [KPT97] G. Károlyi, J. Pach, and G. Tóth. Ramsey-type results for geometric graphs, i. *Discrete and Computational Geometry*, 18:247—255, 1997.
- [KPT05] Jan Kynčl, János Pach, and Géza Tóth. Long alternating paths in bicolored point sets. *Graph Drawing*, pages 340–348, 2005.
- [KPW05] J. Kára, A. Pór, and D.R Wood. On the chromatic number of the visibility graph of a set of points in the plane. *Discrete Comput. Geom.*, 34(3):497–506, 2005.

- [Kup84] Y. S. Kupitz. On pairs of disjoint segments in convex position in the plane. In M. Rosenfeld and J. Zaks, editors, *Convexity and graph theory, Annals of Discrete Mathematics*, volume 20, pages 203–208. 1984.
- [Llo77] E. L. Lloyd. On triangulations of a set of points in the plane. *Proc. of IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 228–240, 1977.
- [LMS94] C. Lo, J. Matoušek, and W. Steiger. Algorithms for ham-sandwich cuts. *Discrete and Computational Geometry*, 11(1):433–452, 1994.
- [Lov73] L. Lovász. Coverings and coloring of hypergraphs. *Proc. Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, pages 3–12, 1973.
- [Man07] W. Mantel. Problem 28, soln. by h. gouwentak, w. mantel, j. teixeira de mattes, f. schuh and w.a. wythoff. *Wiskundige Opgaven*, 10:60—61, 1907.
- [MSU06] C. Merino, G. Salazar, and J. Urrutia. On the length of longest alternating paths for multicoloured point sets in convex position. *Discrete Mathematics*, 306:1791—1797, 2006.
- [Nic07] Carlos Nicolas. The empty hexagon theorem. *Discrete and Computational Geometry*, 38(2):389–397, Sep 2007.
- [O’R87] J. O’Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [Pac99] J. Pach. *Surveys in Combinatorics*, volume 267 of *London Mathematical Society Lecture Notes*, chapter Geometric graph theory, pages 167–200. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Pac04] János Pach, editor. *Towards a Theory of Geometric Graphs*, volume 342 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 2004.
- [PRS06] R. Pinchasi, R. Radoicic, and M. Sharir. On empty convex polygons in a planar point set. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113(3):385–419, 2006.

- [PT94] J. Pach and J. Törőcsik. Some geometric applications of Dilworth's theorem. *Discrete and Computational Geometry*, 12:1–7, 1994.
- [PT08] J. Pach and G. Toth. Monochromatic empty triangles in two-colored point sets. *in: Geometry, Games, Graphs and Education: The Joe Malkevitch Festschrift*, pages 195–198, 2008.
- [RSST96] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. Efficiently four-coloring planar graphs. *Proc. 28th annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 571–574, 1996.
- [Sch90] W. Schnyder. Embedding planar graphs on the grid. pages 138–148, 1990.
- [She92] T. C. Shermer. Recent results in art galleries. *Proceedings of the IEEE*, 80(9):1384–1399, 1992.
- [Sit96] D. Sitton. Maximum matchings in complete multipartite graphs. *Furman University Electronic Journal of undergraduate Mathematics*, 2:6–16, 1996.
- [SR34] E. Steinitz and H. Rademacher. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. *Springer, Berlin*, 1934.
- [Ste51] S. K. Stein. Convex maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2(3):464–466, 1951.
- [Tót00] G. Tóth. Note on geometric graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 89(1):126–132, 2000.
- [TV99] G. Tóth and P. Valtr. Geometric graphs with few disjoint edges. *Discrete and Computational Geometry*, 22(4):633–642, 1999.
- [Urr00] J. Urrutia. Art gallery and illumination problems. In *Handbook of Computational Geometry*, pages 973–1027. North-Holland, 2000.
- [Urr03] J. Urrutia. Coloraciones, tetraedralizaciones, y tetraedros vacíos en coloraciones de conjuntos de puntos en. *Proc. X Encuentros de geometría Computacional*, Jan 2003.
- [Val95] P. Valtr. On the minimum number of empty polygons in planar point sets. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 30(1-2):155–163, 1995.

- [Wag36] K. Wagner. Bemerkungen zum vierfarbenproblem. *Jarhesber Deutsch Math Verin*, 46:26–32, 1936.
- [WHT08] Y. Wang, C. Hu, and Y. Tseng. Efficient placement and dispatch of sensors in a wireless sensor network. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, (7):262—274, 2008.
- [Woo05] D.R Wood. Grid drawings of k-colourable graphs. *Computational Geometry*, 30(1):25–28, 2005.