UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

INDUCCIÓN TENSORIAL EN FUNTORES DE MACKEY

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JESUS TADEO IBARRA TACHO

DIRECTOR DE LA TESINA: DR., GERARDO RAGGI CARDENAS

MÉXICO, D.F. ENERO, 2010

Índice general

Introducción 1

1. Biconjuntos 4

2. Funtores de Mackey 8

3. Funtores exactos derechos no aditivos 10

4. Funtores de permutación 16

5. Invariantes de Lefschetz 20

6. Inducción tensorial 23

Introducción

Un funtor de Mackey, definido de la manera clásica (Green [2]), consiste de una función M de los subgrupos de G a R-mod, donde G es un grupo finito y R un anillo tal que, dados $H \leq K \leq G$ se tienen morfismos de R-mod

$$i_H^K : M(H) \to M(K) \qquad r_H^K : M(K) \to M(H) \qquad c_x, H : M(H) \to M({}^xH)$$

que satisfacen ciertas propiedades. Estas propiedades surgen naturalmente como el proceso de abstracción de muchas construcciones en representaciones de grupos finitos, como álgebra de grupo, anillo de Burnside, anillo de caracteres, cohomología, etc. La construcción de funtor de Mackey que usaremos aquí es más general y la podemos encontrar en [6] donde funtores de Mackey serán funtores de una categoría auxiliar Ω a R-mod.

Dados $H \leq K \leq G$, R anillo conmutativo con 1 y A un RH-módulo, podemos construir un RK-módulo llamado la inducción tensorial de H en K de A, más aun, éste define un morfismo de R-módulos $i_H^{\otimes K} : RH \to RK$, no necesariamente aditivo como RH- módulo, que satisface ciertas propiedades, las cuales podemos encontrar en [4], pagina 97. Dicho morfismo no es aditivo, pero sí se tiene que $i_H^{\otimes K}(A \otimes B) = i_H^{\otimes K}(A) \otimes i_H^{\otimes K}(B)$.

En el presente trabajo construiremos la inducción tensorial en la categoría de funtores de Mackey, que resultará ser un funtor exacto derecho, no necesariamente aditivo, compatible con el producto tensorial de funtores de Mackey, esto generalizaá la noción de inducción tensorial para funtores de Mackey, lo cual lo podemos encontrar en [1], pagina 60.

El primer capítulo trata de biconjuntos, es decir, conjuntos con una acción de por derecha y por izquierda, compatibles estas, sus propiedades elementales asi como establecer la notación que usaremos a lo largo del presente trabajo. Estas propiedades nos permitirán definir la categoría de funtores de Mackey. En el segundo caítulo definiremos la categoria de funtores de Mackey, veremos sus propiedades elementales así como que estos forman una categoría abeliana. En el tercer capítulo definiremos el concepto de funtor exacto derecho entre categorias abelianas, algunas de sus propiedades básicas asi como el teorema de extensión que nos permitirá extender un funtor de una subcategoria plena de objetos proyectivos de manera única a un funtor exacto derecho, no necesariamente aditivo. Este capítulo es independiente y mas general de lo visto hasta el momento. En el tercer capítulo definiremos los funtores de Mackey de permutación, veremos que estos cumplen las hipótesis de nuestro teorema de extensión. En el cuarto caítulo definiremos el concepto de G-poset así como el invariante de Lefschetz de un G-poset, de manera que en el último capítulo usaremos esto para definir nuestro funtor en morfismos, estudiando la estructura de las tranformaciones naturales entre dos funtores de Mackey de permutación. Veremos que nuestro funtor inducción tensorial es compatible con el producto de biconjuntos y que respeta el producto de funtores de Mackey.

Capítulo 1

Biconjuntos

Definición 1. *Sean G, H grupos finitos, X conjunto. Decimos que X es un (G, H)-biconjunto si X es un G-conjunto a la izquierda, un H conjunto a la derecha y se tiene que $(gx)h = g(xh)$ para todo $x \in X, g \in G, h \in H$. Denotaremos esto por ${}_GX_H$.*

Notemos que un biconjunto ${}_GX_H$ es un $G \times H$-conjunto izquierdo con la acción dada por $(g, h)x = gxh^{-1}$. Diremos que ${}_GX_H$ es transitivo si X es transitivo como $G \times H$-conjunto.

Definición 2. *Un morfismo $f : {}_GX_H \to {}_GY_H$ de (G, H)-biconjuntos es un morfismo de $G \times H$-conjuntos, es decir, $f(gxh) = gf(x)h$ para todo $g \in G$, $h \in H, x \in X$.*

Ejemplo 1. *Sea X un G-Conjunto, entonces X es un $(G, 1)$-Conjunto.*

Ejemplo 2. *Sea $\alpha : G \to H$ morfismo de grupos, H es un (G, H)-biconjunto, con la acción dada por*

$$g \cdot h \cdot k = \alpha(g)hk.$$

Este biconjunto lo denotaremos por ${}_{G^\alpha}H_H$.

Análogamente definimos ${}_HH_{\alpha G}$ por la acción dada por $k \cdot h \cdot g = kh\alpha(g)$.

Ejemplo 3. *Sean $G \xrightarrow{\alpha} H \xleftarrow{\beta} K$ morfismos de grupos, entonces H es un (G, K)-biconjunto con la acción dada por*

$$g \cdot h \cdot k = \alpha(g)h\beta(k)$$

Este biconjunto lo denotaremos por ${}_{G^\alpha}H_{\beta K}$ o simplemente ${}_GH_K$ si α y β no se prestan a confusión.

Definición 3.

- *Sea $H \leq G$, el (G, H)- Conjunto ${}_GG_H$ dado por la inclusión de H en G será llamado inducción de H en G*
- *El (H, G)- Conjunto ${}_HG_G$ dado por la inclusión de H en G será llamado la restricción de G en H.*

- *Sea $G \to K$ un morfismo suprayectivo, el (G,K) conjunto ${}_GK_K$ dado por la proyección de G en K será llamado la inflación de K en G.*
- *El (K,G)- Conjunto ${}_KK_G$ dado por la proyección de G en K será llamado la deflación de G en K.*

Definición 4. *Dados ${}_GX_H$ y ${}_HY_K$ biconjuntos, el producto de X por Y bajo H es el conjunto definido por*

$$ {}_GX_H \circ {}_HY_K = X \times Y / \sim $$

donde $(x,y) \sim (xh, h^{-1}y)$ para todo $h \in H$

la clase de (x,y) se denotará por $[x,y]$.

Lema 1. *${}_GX_H \circ {}_HY_K$ es un (G,K)-biconjunto.*

Demostración. La acción de $G \times K$ está dada por

$$ g[x,y]k = [gx, yk] $$

Veamos que está bien definida, si $[x,y] = [xh, h^{-1}y]$, entonces $[gxh, h^{-1}yk] = [gx, yk]$, por lo tanto $g[x,y]k = g[xh, h^{-1}y]k$.

Para ver que ésta es una acción, dados $(g,k),(h,l) \in G \times K$ tenemos que

$$ g(h[x,y]k)l = g[hx,yk]l = [ghx, ykl] = (gh)[x,y](kl) $$

Mientras que $1[x,y]1 = [x,y]$ trivialmente. □

Lema 2.

$$ ({}_GX_H \circ {}_HY_K) \circ {}_KZ_L \cong {}_GX_H \circ ({}_HY_K \circ {}_KZ_L) $$

Demostración. Sea $\varphi : ({}_GX_H \circ {}_HY_K) \circ {}_KZ_L \to {}_GX_H \circ ({}_HY_K \circ {}_KZ_L)$ dada por

$$ f([[x,y],z]) = [x,[y,z]] $$

φ ésta bien definida
si

$$ [[x,y],z] = [[xh,h^{-1}y]k, k^{-1}z] = [[x,h,h^{-1}yk], k^{-1}z] $$

entonces

$$ [x,[y,z]] = [xh, [h^{-1}yk, k^{-1}z]] $$

Es de (G,K)-biconjuntos pues

$$ \varphi(g[[x,y],z]k) = \varphi([[gx,y],zk) = [gx,[y,zk]] = g[x,[y,z]]k = g\varphi([[x,y],z])k $$

Es isomorfismo pues ψ definida por $\psi([x,[y,z]]) = [[x,y],z]$ es su inversa. □

Proposición 1. ${}_GX_H \circ ({}_HY_K \bigsqcup {}_HZ_K) = (X \circ Y) \bigsqcup (X \circ Z)$

Ejemplo 4. ${}_GG_G \circ {}_GX_H \cong {}_GX_H$
El isomorfismo está dado por $[g,x] \mapsto gx$, con inversa $x \mapsto [1,x]$

Ejemplo 5. *Análogamente* ${}_GX_H \circ {}_HH_H \cong {}_GX_H$

Ejemplo 6. *Sean* $K \xrightarrow{\beta} H \xrightarrow{\alpha} G$*, morfismo de grupos, tenemos que*

$$ {}_GG_{{}^\alpha H} \circ {}_HH_{{}^\beta K} = {}_GG_{{}^{\alpha\beta}K} $$

El isomorfismo está dado por $[g, h] \mapsto g\alpha(h)$.

Sea X un (G, H)-Conjunto transitivo, sabemos que $X \cong (G \times H)/D$ con $D \leq G \times H$, en este caso sean $\pi_G : G \times H \to G$ y $\pi_H : G \times H \to H$ las proyecciones. Sean A, C dados por

$$ A = \pi_G(D) \leq G, \quad C = \pi_H(D) \leq H $$

Tenemos el siguiente resultado

Lema 3. *Sean*

$$ \begin{array}{rcl} A_1 & = & \{g \in G : (g, 1) \in D\} \leq A \\ C_1 & = & \{h \in H : (1, h) \in D\} \leq C \end{array} $$

Entonces $A_1 \lhd A$*,* $C_1 \lhd C$ *y* $A/A_1 \cong C/C_1$

Demostración. Sea $\varphi : A \to C/C_1$ dada por $\varphi(g) = hC_1$ si $(g, h) \in D$.

Si $(g, h), (g, h') \in D$ entonces $(1, h^{-1}h') \in D$, por lo que $h^{-1}h' \in C_1$, de esta forma, $h'C_1 = hC_1$ por lo que φ está bien definida.

Si $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in D$ entonces

$$ \varphi(g_1g_2) = h_1h_2C_1 = h_1C_1h_2C_1 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) $$

Por lo tanto, φ es un homomorfismo de grupos.

El núcleo de este morfismo es

$$ \{g \in A : (g, h) \in D, h \in C_1\}\{g \in A : (g, 1) \in C_1\} = A_1 $$

Por lo tanto $A/A_1 \cong C/C_1$ □

Teorema 1 (Serge Bouc)**.** *Con la notación anterior, si denotamos* $B = A/A_1$*, tenemos que*

$$ \frac{G \times H}{D} \cong {}_GG_A \circ {}_AB_B \circ {}_BB_C \circ {}_CH_H $$

Demostración. Definimos $\varphi : (G \times H)/D \to {}_GG_A \circ {}_AB_B \circ {}_BB_C \circ {}_CH_H$ como $\varphi((g, h)D) = [g, 1, 1, h^{-1}]$.

Veamos que φ está bien definida. Sea $d = (d_1, d_2) \in D$, entonces $d_1 \in A, d_2 \in C$ y tenemos que

$$ \begin{array}{rcl} \varphi(gd_1, hd_2) & = & [gd_1, 1, 1, d_2^{-1}h^{-1}] \\ & = & [g, d_1 \circ 1, 1 \circ d_2^{-1}, h^{-1}] \\ & = & [g, 1, 1, h^{-1}]. \end{array} $$

Veamos que φ es de (G,H)-biconjuntos.

$$\begin{array}{rcl}\varphi(g'\circ((g,h)D)\circ h') & = & \varphi((g',h'^{-1})(g,h)D)\\ & = & [gg',1,1,h^{-1}h']\\ & = & g'[g,1,1,h]h'\\ & = & g'\varphi((g,h)D)h'.\end{array}$$

Veamos que φ es suprayectiva. Sea $[g,b_1,b_2,h]\in {}_GG_A\circ {}_AB_B\circ {}_BB_C\circ {}_CH_H$, donde $b_1=a_1A$, $b_2=c_2C$, $(a_1,c_1)\in D$ y $(a_2,c_2)\in D$, entonces

$$[g,a_1A,c_2C,h]=[ga_1,A_1,C_1,c_2h]=[ha_1,1,1,c_2h]$$

por lo tanto, $\varphi(ga_1,c_2h)=[g,b_1,b_2,h]$.

Veamos que φ es inyectiva. Sea $\varphi((g,h)D)=\varphi((g',h')D)$, entonces $[g,1,1,h]=[g',1,1,h]$, por lo tanto, existen $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$ tales que $(ga,a^{-1}b,b^1c,c^{-1}h)=(g',1,1,h')$

□

Teorema 2 (Mackey)**.** *Sean $H,K\leq G$, $g\in G$, y $c_g:K\to {}^gK$, entonces*

$$ {}_HG_G\circ {}_GG_K\cong {}_HG_K=\biguplus_{g\in[H\backslash G/K]} HgK$$

donde

$$HgK\cong {}_HH_{H\cap {}^gK}\circ {}_{H\cap {}^gK}{}^gK_{c_gK}$$

Demostración. Definimos $\varphi:HgK\to {}_HH_{H\cap {}^gK}\circ {}_{H\cap {}^gK}{}^gK_{c_gK}$ como $\varphi(hgk)=[h,gkg^{-1}]$.

φ está bien definida. Sea $hgk=h'gk'$, entonces $h^{-1}h'g=gkk'^{-1}$, si denotamos $c=h^{-1}h'$, entonces $c=gkk'^{-1}g^{-1}\in H\cap {}^gK$, por lo tanto,

$$[h,gkg^{-1}]=[hc,c^{-1}gkg^{-1}]=[hh^{-1}h',gk'k^{-1}g^{-1}gkg^{-1}]=[h',gk'g^{-1}]$$

φ es de (H,K)-conjuntos. Sean $h'\in H$ y $k'\in K$, entonces

$$\begin{array}{rcl}\varphi(h'hgkk') & = & [h'h,gkk'g^{-1}]\\ & = & h'[h,gkg^{-1}gk'g^{-1}]\\ & = & h'[h,gkg^{-1}]k'\\ & = & h'\varphi(hgk)k'\end{array}$$

Es isomorfismo con inversa $[h,gkg^{-1}]=hgk$. □

Capítulo 2

Funtores de Mackey

Definición 5. *Sea R anillo conmutativo y sean $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ familias de grupos finitos cerradas bajo subgrupos, cocientes y extensiones. Sea $\mathscr{Z}$ familia de grupos finitos cerrada bajo subgrupos y cocientes con núcleo en $\mathscr{X}$ y en $\mathscr{Y}$, para $G, H \in \mathscr{Z}$ definimos $A_+^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H)$ como*

$$A_+^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H) = \{{}_G X_H : \forall x \in X, \quad \mathrm{Stab}_G(x) \in \mathscr{X}, \mathrm{Stab}_H(x) \in \mathscr{Y}\}$$

Sea $A^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H)$ el grupo de Grothendieck de $A_+^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H)$ con respecto a la unión disjunta. Denotaremos además $A_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H) = R \otimes_{\mathbb{Z}} A^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H)$.

Para ${}_G X_H, {}_H Y_K$, dado que la operación $\circ$ distribuye a $\sqcup$, $\circ$ se extiende a elementos $A \in A_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H)$ y $B \in A_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(H,K)$.

Lema 4. *Sean $G, H, K \in \mathscr{Z}$, y sean $X \in A_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H)$, $Y \in A_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(H,K)$, entonces $X \circ Y \in A_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,K)$.*

Demostración. Sea $[x,y] \in X \circ Y$.

$$\mathrm{Stab}_G([x,y]) = \{g \in G : g[x,y] = [x,y]\} = \{g \in G : \exists h \in \mathrm{Stab}_H(y) : gxh = x\}$$

P.D. $\{g \in G : \exists h \in \mathrm{Stab}_H(y) : gxh = x\} \in \mathscr{X}$. Denotemos este grupo por A.

Veamos primero que $\mathrm{Stab}_G(x) \lhd A$. Sea $i : \mathrm{Stab}_G(x) \to A$ la inclusión, $g \in A$, $l \in \mathrm{Stab}_G(x)$. Sabemos que $\exists h \in \mathrm{Stab}_H(y)$ tal que $gxh = x$, por lo tanto, $glg^{-1}x = glxh = gxh = x$.

Sea $B = \mathrm{coker}\, i$, veamos que $B \in \mathscr{X}$. Sea $C = \mathrm{Stab}_H(y) \cap \mathrm{Stab}_H(x) \leq H$ y $N = N_{\mathrm{Stab}_H(y)}(C) \leq \mathrm{Stab}_H(x)$. Veamos que $C \lhd N$.Sea $c \in C$, $h \in N$, entonces $xhch^{-1} = g^{-1}xch^{-1} = g^{-1}xh^{-1} = g^{-1}gx = x$. Definimos el morfismo $\varphi : B \to N/C$ como $\bar{g} \mapsto \bar{h}C$ donde $gxh = x$.

φ está bien definido. Sea $gxh = gxh'$, entonces $xhh'^{-1} = x$, por lo tanto, $hh'^{-1} \in \mathrm{Stab}_H(x)$.

φ es inyectivo. Para $g \in B$, $\varphi(g) = 1$, entonces $g \in \mathrm{Stab}_G(x)$.

Hemos demostrado que B se inyecta enN/C, pero $N \in \mathscr{X}$, por lo tanto, $N/C \in \mathscr{X}$ y todo subgrupo también lo está, en particular, B.

La prueba de $\mathrm{Stab}_H([x,y]) \in \mathscr{Y}$ es análoga. □

Definición 6. *Definimos la categoria* $\Omega_{R,\mathscr{Z}}^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}$ *cuyos objetos son los elementos de* $\mathscr{Z}$*, donde dados* $G, H \in \mathscr{Z}$*,* $\mathrm{hom(G,H)} = \mathrm{A}_{\mathrm{R}}^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}$

Definición 7. *Definimos la categoría de funtores de Mackey* $Mac_{R,\mathscr{Z}}^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}$ *en objetos como los funtores* R*-aditivos contravariantes* $M : \Omega_{R,\mathscr{Z}}^{\mathscr{X},\mathscr{Y}} \to R$-mod y en morfismos como las transformaciones naturales entre estos.

Teorema 3. $Mac_{R,\mathscr{Z}}^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}$ *es una categoria abeliana.*

Demostración. Sea $U_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}$ el grupo abeliano $\bigoplus_{G,H} A_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}(G,H)$. Se tiene un producto definido en biconjuntos como

$$ {}_GX_H \circ {}_KY_L = \begin{cases} X \circ Y & \text{si } H = K \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} $$

De esta forma, se puede ver que $U_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}$ es un anillo, sin 1 y que
$Mac_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}} \cong U_R^{\mathscr{X},\mathscr{Y}} - mod$ donde el morfismo entre categorias está dado por la transformación natural $M \mapsto \bigoplus_G M(G)$. □

Capítulo 3

Funtores exactos derechos no aditivos

Cambiemos un poco la discusión sobre funtores de Mackey para presentar algunos resultados sobre funtores exactos no aditivos sobre categorías abelianas, retomándola en la próxima sección ya con este material.

Comencemos haciendo unas convenciones notacionales, si $f : M \oplus N \to S$, denotamos f por $(f \circ i_M, f \circ i_N)$ donde $i_M : M \to M \oplus N$ y $i_N : N \to M \oplus N$ son las inclusiones naturales, análogamente, para $g : T \to M \oplus N$, denotamos g por $\begin{pmatrix} p_M \circ g \\ p_N \circ g \end{pmatrix}$ donde $p_M : M \oplus N \to M$ y $p_N : M \oplus N \to N$ son las proyecciones naturales. Con esta notación, la composición de morfismos corresponde con la multiplicación de matrices

Lo primero que veremos es que el concepto usual de funtor exacto derecho implica aditivo.

Lema 5. *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorias abelianas y $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor covariante, si para $A, A', A'' \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ tales que si*

$$A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \longrightarrow 0 \qquad \textit{es exacta}$$

entonces

$$F(A') \xrightarrow{F(\varphi)} F(A) \xrightarrow{F(\psi)} F(A'') \longrightarrow 0 \qquad \textit{es exacta}$$

entonces tenemos que F es aditivo.

Demostración. Veamos que $F(0) = 0$ en objetos, esto lo obtenemos de la exactitud de $0 \to 0 \to 0 \to 0$ puesto que $F(0) = F(0 \circ 0) = 0$ en morfismos y $F(0) \xrightarrow{0} F(0) \xrightarrow{0} F(0) \longrightarrow 0$ es exacta, entonces el morfismo cero es suprayectivo en $F(0)$ lo cual solo es posible si $F(0) = 0$.

Sean $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"] & A \oplus B \arrow[r, "(0,1)"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Exacta.

Como esta sucesión exacta se divide, existe $r : B \to A$ retracción, es decir, $(0,1)r = 1_B$

y por lo tanto,

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"] & F(A \oplus B) \arrow[r, "F(0,1)"] & F(B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Es exacta. Sean $i_{M,N}= \begin{pmatrix}F(1,0)\\F(0,1)\end{pmatrix}$, $j_{M,N} = \left(F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $f, g : N \to M$,

tenemos que $f \oplus g$ es la siguiente composición

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "(1,1)"] & M \oplus M \arrow[r, "\begin{pmatrix}f & 0\\0 & g\end{pmatrix}"] & N \oplus N \arrow[r, "(1,1)"] & N \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & F(M \oplus M) \arrow[r, "F\begin{pmatrix}f & 0\\0 & g\end{pmatrix}"] \arrow[d, shift left, "i_{M,M}"] & F(N \oplus N) \arrow[r, "F(1,1)"] \arrow[d, shift left, "i_{N,N}"] & F(N) \arrow[d, equal] \\ F(M) \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}"] & F(M) \oplus F(N) \arrow[r, "\begin{pmatrix}F(f) & 0\\0 & F(g)\end{pmatrix}"] \arrow[u, shift left, "j_{M,M}"] & F(N) \oplus F(N) \arrow[r, "(1,1)"] \arrow[u, shift left, "j_{N,N}"] & F(N) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $F(f+g) = F(f) + F(g)$.

$\square$

Definición 8. *Sea $\varphi \in hom_{\mathscr{A}}(A, B)$ y $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ funtor covariante, tenemos morfismos $(\varphi, 1), (0, 1) : A \oplus B \to B$, si $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un funtor, denotamos por $\Delta F(\varphi)$ al morfismo $F(\varphi, 1) - F(1, 0)$ que va de $F(A \oplus B)$ a $F(B)$.*

Notemos que si $\psi : B \to C$ es tal que $\psi\varphi = 0$, entonces

$$F(\psi)\Delta F(\varphi) = F(\psi \circ (\varphi, 1)) - F(\psi \circ (1, 0)) = (0, \psi) - (0, \psi) = 0$$

Definición 9. *Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ funtor no necesariamente aditivo, decimos que F es exacto derecho si para toda sucesión exacta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\psi"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

tenemos que

$$F(A \oplus B) \xrightarrow{\Delta F(\varphi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C) \longrightarrow 0$$

Es exacta.

Notemos que si F es aditivo exacto derecho, entonces $\Delta F(\varphi) = F(\varphi, 0)$, en este caso tenemos que

$$F(A \oplus B) \xrightarrow{F(1,0)} F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C) \longrightarrow 0$$

Es exacta , por lo que para funtores aditivos tenemos que

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

Es exacta si y solo si

$$F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C) \longrightarrow 0$$

Es exacta.

Ejemplo 7. *Sea $P \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$ y $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ dada por $F(A) = P$, $\forall A \in \mathrm{ob}(\mathrm{A})$ y si $\varphi : A \to B$, $F(\varphi) = 1_P$. En este caso $\Delta F = 0$ y tenemos un funtor exacto derecho que no es aditivo.*

Proposición 2. *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ categorías abelianas y sean $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ funtores exactos derechos, entonces $G \circ F$ es exacto derecho.*

Demostración. Sea $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ sucesión exacta en $\mathscr{A}$, entonces

$$F(A \oplus B) \xrightarrow{\Delta F(\varphi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C) \longrightarrow 0$$

Es exacta en $\mathscr{B}$, por lo que

$$G(F(A \oplus B)) \xrightarrow{\Delta G(\Delta F(\varphi))} G(F(B)) \xrightarrow{GF(\psi)} GF(C) \longrightarrow 0$$

Es exacta en $\mathscr{C}$

Tenemos que $\Delta G(\Delta F(\varphi)) = G(F(\varphi, 1) - F(0, 1), 1) - G(0, 1)$

Sean

$$D = G(F(\varphi, 1) - F(0, 1), 1) - G(0, 1)$$
$$D' = \Delta GF(\varphi) = GF(\varphi, 0) - GF(0, 1)$$

Veamos que $ImD = ImD'$.

Sean

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 - F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ F(0,1) \end{pmatrix} \qquad \beta = \left(1 - F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

tenemos entonces que $G(\beta)G(\alpha) = G(1) = 1$.

Por lo tanto, $G(\beta)$ es suprayectivo y tenemos que $ImD = ImD'$ $\square$

El teorema principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 4. *Sea $\mathscr{P}$ una subcategoria plena de una categoria abeliana $\mathscr{A}$ con las siguientes propiedades:*

a) Cada objeto de $\mathscr{P}$ es proyectivo en $\mathscr{A}$.

b) Cada objeto de $\mathscr{A}$ es cociente de un objeto de $\mathscr{P}$.

c) Si P y P' son objetos de $\mathscr{P}$ entonces $P \oplus P'$ es objeto de $\mathscr{P}$

Entonces todo funtor $F : \mathscr{P} \to \mathscr{B}$ puede extenderse de manera única a un funtor exacto derecho $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

Demostración. Veamos primero la existencia. Sea $A \in \mathscr{A}$ y $P \in \mathscr{P}$ tal que $\psi : P \to A$ es suprayectivo. Sea $K = \ker \psi$ y $Q \in \mathscr{P}$ tal que $\varphi' : Q \to K$ es suprayectivo. Sea $\varphi : Q \to P = i\varphi'$ donde $i : K \to P$ es la inclusión, entonces, tenemos que la sucesión

$$Q \xrightarrow{\varphi} P \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0$$

es exacta. Definimos $F(A) = \operatorname{coker}(\Delta F(\varphi))$. Veamos que $F(A)$está bien definida. Sea $Q' \xrightarrow{\varphi'} P' \xrightarrow{\psi'} A \longrightarrow 0$ exacta. Como P es proyectivo, existe $f : P \to P'$ tal que $\psi' f = \psi$. Análogamente, existe $g : Q \to Im\varphi - \ker \psi$ tal que $f\varphi = \varphi' g$ puesto que $\ker \psi' = Im\varphi'$ y $Q' \to Im\varphi' \to 0$.

tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"] & P \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
Q' \arrow[r, "\varphi'"] & P' \arrow[r, "\psi'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Análogamente existen f', g' tales que

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, shift left, "g"] & P \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, shift left, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
Q' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[u, shift left, "g'"] & P' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[u, shift left, "f'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sabemos por definición que si $Q \to P \to A \to 0$ exacta, entonces $F(Q \oplus P) \to F(P) \to \operatorname{coker} \Delta F(\varphi) \to 0$ es exacta, asi que F, resulta exacto derecho y ademas

$$\begin{tikzcd}
F(Q \oplus P) \arrow[r, "\Delta F(\varphi)"] \arrow[d, shift left, "F(g\oplus f)"] & F(P) \arrow[r, "F(\psi)"] \arrow[d, shift left, "F(f)"] & \operatorname{coker}(\Delta F(\varphi) \arrow[r] & 0 \\
F(Q' \oplus P) \arrow[r, "\Delta F(\varphi')"] \arrow[u, shift left, "F(g'\oplus f')"] & P(F') \arrow[r, "F(\psi')"] \arrow[u, shift left, "F(f')"] & \operatorname{coker} \Delta F(\varphi) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del $\operatorname{coker} \Delta F(\varphi)$, existe una única $h : \operatorname{coker} \Delta F(\varphi) : \operatorname{coker} \Delta F(\varphi')$ tal que $F(\psi')F(f) = hF(\psi)$, análogamente, existe una única $h' : \operatorname{coker} \Delta F(\varphi') : \operatorname{coker} \Delta F(\varphi)$ tal que $h'F(\psi') = F(\psi)F(f')$, componiendo hh' por unicidad tenemos que $hh' = 1$, análogamente hh' y por lo tanto $\operatorname{coker} \Delta F(\varphi) = \operatorname{coker} \Delta F(\varphi')$.

Definamos F en morfismos, Dada $f : A \to A'$ y resoluciones

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\varphi"] & P \arrow[r, "\psi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ Q' \arrow[r, "\varphi'"] & P' \arrow[r, "\psi'"] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por el mismo argumento, existen morfismos $g : P \to P'$, $h : Q \to Q'$ tales que

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h"] & P \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ Q' \arrow[r, "\varphi'"] & P' \arrow[r, "\psi'"] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama con renglones exactos es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(Q \oplus P) \arrow[r, "\Delta F(\varphi)"] \arrow[d, "F(h \oplus g)"] & F(P) \arrow[r, "F(\psi)"] \arrow[d, "F(g)"] & \operatorname{coker} \Delta F(\varphi) \arrow[r] & 0 \\ F(Q' \oplus P) \arrow[r, "\Delta F(\varphi')"] & F(P) \arrow[r, "F(\psi')"] & \operatorname{coker} \Delta F(\varphi') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de $\operatorname{coker} \Delta F(\varphi)$, existe un único $f' : \operatorname{coker} \Delta F(\varphi) \to \operatorname{coker} \Delta F(\varphi')$ tal que

$$\begin{tikzcd} F(Q \oplus P) \arrow[r, "\Delta F(\varphi)"] \arrow[d, "F(h \oplus g)"] & F(P) \arrow[r, "F(\psi)"] \arrow[d, "F(g)"] & \operatorname{coker} \Delta F(\varphi) ar[d]^{f'} \arrow[r] & 0 \\ F(Q' \oplus P) \arrow[r, "\Delta F(\varphi')"] & F(P) \arrow[r, "F(\psi')"] & \operatorname{coker} \Delta F(\varphi') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definimos $F(f) = f'$. Por la propiedad universal de $\operatorname{coker} \Delta F(\varphi)$, está bien definido, $F(1) = 1$ y $F(fg) = F(f)F(g)$.

Para ver que $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ extiende a $F : \mathscr{P} \to \mathscr{B}$ tomamos la resolución $P \xrightarrow{0} P \xrightarrow{1} P \longrightarrow 0$ y obtenemos que $\Delta F(0) = 0$ puesto que F es exacto derecho y $Im \Delta F(0) = \ker 1 = 0$, por lo tanto, $\operatorname{coker} \Delta F(0) = F(P)$.

Para ver que la extensión es única, sea $F' : A \to \mathscr{B}$ un funtor exacto derecho, dado $A \in A$ tomando una resolución proyectiva $Q \to P \to A \to 0$ y tenemos que

$$F'(Q \oplus P) \xrightarrow{\Delta F(\varphi)} F'(P) \xrightarrow{F(\psi)} F'(A)$$

es exacta. Como F coincide con F' tenemos que $F'(A) = \operatorname{coker} \Delta F(A)$ y por lo tanto, F' coincide con F en objetos, ademas, por la propiedad universal del $coker \Delta F(\varphi)$, F' coincide con F en morfismos puesto que el morfismo es único. $\square$

Capítulo 4

Funtores de permutación

Sean $\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}, R$ como en la sección 2, dado $H \in \mathscr{Z}$ tenemos el funtor de Mackey $A(\_, H)$ que a cada $G \in \mathscr{Z}$ le asignamos el R-módulo $A_R(G, H)$ y a cada biconjunto ${}_GU_{G'}$ le asignamos el morfismo de R-módulos $A_R(U, H) : A_R(G', H) \to A_R(G, H)$. que a cada biconjunto ${}_{G'}X_G$ le asigna el biconjunto $U \circ X$.

En este caso el lema de Yoneda nos da un isomorfismo de R-módulos.

Lema 6. *dados M funtor de Mackey y $H \in \mathscr{Z}$ existe*

$$\varphi : Hom_{Mac}(A(\_, H), M) \to M(H)$$

isomorfismo de R-módulos natural en M.

Demostración. Dada $f = (f_K)_{K \in \mathscr{Z}}$, donde $f_K : A(K, H) \to M(K)$, definimos $\varphi(f) = f_H({}_HH_H)$

Dado $m \in M(H)$, definimos $\psi(m) = f^m$ donde $f^m = \{f^m_K\}_{K \in Z}$ y $f^m_K(X) = M(X)(m)$ donde $X \in A(K, H)$.

Veamos que f^m es una transformación natural, para esto, basta verificarlo en biconjuntos.

Sea${}_{K'}U_K : K' \to K$, y ${}_KX_H \in A(K, H)$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A(K,H) \arrow[r, "f^m_K"] \arrow[d, "A(U,H)"] & M(K) \arrow[d, "M(U)"] \\ A(K',H) \arrow[r, "f^m_{K'}"] & M(K') \end{tikzcd}$$

Puesto que $M(U)M(X)(m) = M(U \circ X)(m)$, por lo tanto, f^m es natural.

$$\varphi\psi_i(m) = \varphi(f^m) = f^m_H({}_HH_H)(m) = M({}_HH_H)(m) = m$$

$$\psi\varphi(f) = \psi(f_H\,({}_HH_H)) = f^{f_H({}_HH_H)}$$

Solo falta ver que $\left(f^{f_H({}_HH_H)}\right)_K = f_K$, para esto, dado $X \in A(K,H)$, tenemos que

$$\left(f^{f_H({}_HH_H)}\right)_K (X) = M(X)(f_H({}_HH_H)) = f_K(X \circ {}_HH_H) f_K(X)$$

Por naturalidad de f pues el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A(H,H) \arrow[r, "f_H"] \arrow[d, "A(X,H)"] & M(H) \arrow[d, "M(X)"] \\ A(K,H) \arrow[r, "f_K"] & m(K) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, φ es inversa de ψ, sólo falta ver que alguna de ellas es de R-módulos.

Para $m, n \in M(H)$, $\left(f_K^{m+n}\right)_K \in \mathscr{Z}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_K^{m+n}({}_KX_H) &= M(X)(m+n) \\ &= M(X)(n) + M(X)(n) \\ &= f_K^m(X) + f_K^n(X) \end{aligned}$$

esto pues por definición, los funtores de Mackey son R-lineales, análogamente tenemos que $f^{rm} = rf^m$.

Naturalidad . Sea $g : M \to N$ morfismo de funtores de Mackey y sea $g_* : hom(A(\_,H),M) \to hom(A(\_,H),N)$ el morfismo inducido, es decir, $g_*(f) = gf$, tenemos entonces que

$$\begin{tikzcd} hom(A(\_,H),M) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "g_*"] & M(H) \arrow[d, "g_H"] \\ hom(A(\_,H),M) \arrow[r, "\varphi_N"] & M(H') \end{tikzcd}$$

es conmutativo puesto que $g_H(f_H({}_HH_H)) = (gf)_H({}_HH_H)$ por naturalidad de g. $\square$

A partir de esta sección nos restringiremos a funtores de Mackey locales, esto es, $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \{1\}$, G un grupo fijo y $\mathscr{Z} = \{H : H \leq G\}$, bajo estas condiciones denotaremos $Mac_{R,\mathscr{Z}}^{\mathscr{X},\mathscr{Y}}$ como $Mac_R(G)$

Definición 10. *Dado G grupo finito, un funtor de permutación es un funtor de Mackey M tal que*

$$M \cong \bigoplus_{K \in \mathscr{C}} A(\_,K)$$

donde los elementos de $\mathscr{C}$ son subgrupos de G, no necesariamente no isomorfos. Denotamos los funtores de Mackey de permutación sobre G como $PMac(G)$.

Corolario 1. *Sea M funtor de permutación, entonces M es proyectivo en $Mac_R(G)$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una familia de subgrupos de G y

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

sucesión exacta de funtores de Mackey, entonces

$$0 \to hom_{Mac(G)}(A(\_, H), M') \to hom_{Mac(G)}(A(\_, H), M) \to hom_{Mac(G)}(A(\_, H), M'') \to 0$$

es exacta puesto que

$$0 \to M'(H) \to M(H) \to M''(H) \to 0$$

lo es. Haciendo producto sobre $\mathscr{C}$ tenemos que

$$0 \to \prod_{H \in \mathscr{C}} M'(H) \to \prod_{H \in \mathscr{C}} M(H) \to \prod_{H \in \mathscr{C}} M''(H) \to 0$$

Es exacta, por lo que, $Hom_{Mack(G)}(A(\_, X),)$ es exacto, por lo tanto, $A(\_, X)$ es proyectivo.

□

Notación: Dado $\mathscr{C}$ familia de subgrupos de G, para el G-Conjunto no necesariamente finito $X = \bigsqcup_{K \in \mathscr{C}} G/K$ denotamos por $A(\_, X)$ al funtor de permutación $\bigoplus_{K \in \mathscr{C}} A(\_, K)$

Proposición 3. *Dado M funtor de Mackey, existe $P \in PMac(G)$ y $\varphi : P \to M$ morfismo de funtores de Mackey suprayectivo.*

Demostración. Sea $X = \bigsqcup_{H \leq G} G/H \times M(H)$. $M(H)$ es un G-conjunto con la acción discreta, de esta forma, X es un G-conjunto cuyo conjunto de órbitas es $G/H \times \{s\}$ con $s \in M(H)$.

Denotamos $\mathscr{C} = \{s : H \leq G, s \in M(H)\}$, para $s \in \mathscr{C}$ denotamos H_s si $s \in M(H_s)$. Por el lema de Yoneda tenemos que

$$hom_{Mac(G)}(A(\_, X), M) \cong \prod_{s \in \mathscr{C}} M(H_s)$$

Como R-módulos. Tomamos φ la transformación natural determinada por $(r)_{H \leq G, r \in M(H)}$ donde r recorre los elementos distintos de $M(H)$.

Veamos que φ es suprayectiva, para esto demostraremos que $\varphi_K : A(K, X) \to M(K)$ es suprayectiva para todo $K \leq G$.

Dado $t \in M(K)$ Tomamos $S \in A(K, X) = \bigoplus_{s \in \mathscr{C}} A(K, H_s)$

$$S = ({}_K A_{H_s})_{s \in \mathscr{C}} = \begin{cases} {}_K K_K & \text{si } K = H \text{ y } s = t \\ \emptyset & \text{otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, $\varphi_K(S) = f^t({}_K K_K) = M({}_K K_K)(t) = t$. □

De esta forma, $PMack(G)$ es una subcategoria plena de $Mac(G)$, de objetos proyectivos que cubren a todo objeto de $Mac(G)$, por lo que se cumplen las hipotesis del lema , asi que todo funtor con dominio en $Pmac(G)$ se extiende a $Mac(G)$.

Proposición 4. *dado* $K \leq G$ *y* $X = \bigsqcup\limits_{L\in\mathscr{C}} G/L$ *, entonces*

$$A(K,X) \cong \bigoplus_{(y,x)\in[G\backslash((G/K)\times X)]} B(\mathrm{Stab}_G(y,x))$$

Demostración. La suma no depende del conjunto de representantes ya que $\mathrm{Stab}_G(gy,gx) = {}^g\,\mathrm{Stab}_G(y,x)$.

Podemos suponer que $X = G/L$ puesto que si $X = \bigsqcup\limits_{L\in\mathscr{C}} G/L$ tenemos que $G/K \times X = \bigsqcup\limits_{L\in\mathscr{C}} G/K \times G/L$ y $A(K,X) = \bigoplus\limits_{L\in\mathscr{C}} A(K,L)$.

Aplicando Mackey para B, el anillo de Burnside tenemos que

$$G/K \times G/L \cong \bigsqcup_{a\in[K\backslash G/L]} G/(K \cap {}^aL)$$

ademas, $\{(K,aL) : a \in [K\backslash G/L]\}$ es un conjunto de representantes para $G/K\times G/L$ bajo la acción de G. Sin pérdida de generalidad, tomaremos $[G\backslash(G/K)\times G/L] = \{(K,aL) : a \in [K\backslash G/L]\}$. Con esta notación, tenemos que $\mathrm{Stab}_G(K,aL) = K \cap {}^aL$.

Definimos $\varphi : A(K,L) \to \bigoplus\limits_{(y,x)\in[G\backslash(G/K\times X)]} B(G_{y,x})$ en conjuntos transitivos.

Sea ${}_KX_L$ transitivo, por Bouc tenemos que

$${}_KX_L \cong {}_KK_A \circ {}_AB_B \circ {}_BB_C \circ {}_CL_L$$

Donde $X \cong (K \times L)/D$, $A \leq K$, $C \leq L$ y se tienen morfismos suprayectivos $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$. Como ${}_AB_B, \in A(A,B)$, tenemos que $\mathrm{Stab}_A(b) = 1$ para todo $b \in B$, en particular, para $b = 1$, $\mathrm{Stab}_A(1) = 1$ pero $\mathrm{Stab}_A(1) = \ker f$ y f es suprayectivo, entonces $A \cong B$, análogamente, $B \cong C$.

Lo que hemos demostrado es que un biconjunto transitivo $X \in A(K,L)$ tiene la descomposición de Bouc

$${}_KK_A \circ {}_CL_L$$

Para $A \leq K$, $C \leq L$ y $f : A \cong C$ donde $f(a) = c$ si $(a,c) \in D$.

Definimos $\varphi({}_KK_A \circ {}_AL_L) = \sum\limits_{x\in[K\backslash G/K]} (K \cap {}^xL)/(A \cap {}^xL)$ donde $A \leq K$.

Por el argumento anterior, φ es suprayectiva.

φ es inyectiva pues si $\varphi({}_KX_L) = \sum\limits_x [\emptyset]$, entonces $X = \emptyset$.

□

Capítulo 5

Invariantes de Lefschetz

Definición 11. *Un* $G-\mathrm{poset}$ *es un conjunto parcialmente ordenado con una acción de grupo tal que las traslaciones son funciones crecientes.*

Definición 12. *Dado un* $G-\mathrm{poset}$ *finito* X*, definimos* Δ_X^G*, el invariante de Lefschetz de* X *como el elemento del anillo de burnside de* G *dado por*

$$\Delta_X^G = -\sum_{s\in[G\backslash Sd(X)]} (-1)^{|s|}\,(G/\,\mathrm{Stab}_G(s))$$

Donde $Sd(X)$ *es el* G*-conjunto de cadenas de* X *con acción por traslación y* $[G\backslash Sd(X)]$ *es un conjunto de representantes de las orbitas de la acción de* G*,* $|s|$ *denota la cardinalidad de* s *y* $Stab_G(s)$ *Denota el estabilizador de* s*.*

Un morfimos de $G-\mathrm{poset}$ *es un morfismo de* G*-conjuntos creciente.*

Otra manera de representar a Δ_X^G es definir $Sd_n(X)$ como las cadenas de tamaño $n+1$ de X,con esta notación $\Delta_X^G = \sum_n (-1)^n Sd_n(X)$.

Todo G conjunto finito X es un G-poset con el orden discreto $x \leq x'$ si $x = x'$.

Definición 13. *Dados* X, Y G*-conjunto, definimos la categoria* $G-\mathrm{poset}_{\downarrow \mathrm{Y,X}}$*, en objetos como parejas* (Δ, f) *donde* Δ *es un* $G-\mathrm{poset}$ *y* $f : \Delta \to Y \times Y$ *es un morfismo de* G*-conjuntos tal que* $(fp_Y)^{-1}(y)$ *es finito para todo* $y \in Y$ *donde* $p_Y : Y \times X \to Y$ *es la proyección en* Y*. Si* $Y = G/K$ *denotamos* $G-\mathrm{poset}_{\downarrow \mathrm{Y,X}}$ *como* $G-\mathrm{poset}_{\downarrow \mathrm{K,X}}$

Definición 14. *Decimos que* $(Z_1, f), (Z_2, g) \in G-\mathrm{poset}_{\downarrow \mathrm{Y,X}}$ *son equivalentes si* $\Lambda^{G_{y,x}}_{f^{-1}(y,x)} = \Lambda^{G_{y,x}}_{g^{-1}(y,x)}$*. Denotamos el conjunto de clases de equivalencia como* $h_G(Y, X)$*.*

Lema 7. *Dado* $K \leq G$ *y* X G*-conjunto, existe una biyección*

$$\theta_{K,X} : h_G(K, X) \to A(K, X)$$

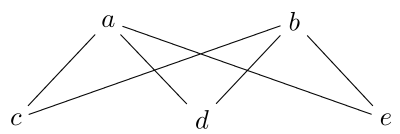
tal que $\theta_{K,X}((Z_1, f_1) \sqcup (Z_2, f_2)) = \theta_{K,X}(Z_1, f_1) + \theta_{K,X}(Z_2, f_2)$

Demostración. Sea $\theta_{K,X}(< Z, f >)$ definida como

$$\sum_{(y,x)\in[G\backslash(G/K\times X)]} \Delta^{\mathrm{Stab}_G(y,x)}_{f^{-1}(y,x)} \in \bigoplus_{(y,x)\in[G\backslash(G/K\times X)]} B(\mathrm{Stab}_G(y,x)) \cong A(K,X).$$

Por definición de $h_G(K,X)$, θ está bien definida y es inyectiva, veamos que es suprayectiva. Sea $(\beta_{y,x})_{(y,x)}$ un elemento en la suma directa.

Veamos primero que dado G grupo finito y $A \in B(G)$, entonces existe Z un G-poset tal que $\Delta^G_Z = A$. Para $A = G/H$, Sea $Z = G/H$ con el orden discreto, entonces $\Delta^G_Z = G/K$. Para $A = -G/H$ tomamos $Z_1 = \{a, b, c, d, e\}$ el conjunto parcialmente ordenado con el siguiente orden



Tenemos que Z_1 es un G-poset con la acción discreta, es decir, $gz = z$ para todo $g \in G, z \in Z$. Definimos Z como $Z_1 \times G/K$ con el órden lexicográfico, de esta forma, tenemos que $\Delta^G_Z = -G/H$.

Ahora, para cada $(y,x) \in [G\backslash(G/K \times X)]$ y $\beta_{y,x} \in B(\mathrm{Stab}_G(y,x))$, existe $Z_{y,x} \in \mathrm{Stab}_G(y,x)$-poset tal que $\Delta^{\mathrm{Stab}_G(y,x)}_{Z_{y,x}} = \beta_{y,x}$.

Sea

$$Z = \bigsqcup_{y,x} {}_G G_{\mathrm{Stab}_G(y,x)} \circ_{\mathrm{Stab}_G(y,x)} Z_{y,x_1}$$

y $f : Z \to G/K \times X$ definida por

$$f([g,z]) = (gy, gx) \quad \text{si } z \in Z_{y,x}$$

entonces f es de G-conjuntos. Ademas, Z es un G-poset con el orden $(g,z) \le (g',z')$ si $z, z' \in Z_{y,x}$ y existe $x \in \mathrm{Stab}_G(y,x)$ tal que $gx = g'$ y $x^{-1}z = z'$.

de esta forma, $f^{-1}(y,x) = \{1\} \times Z_{y,x} \cong Z_{y,x}$ y por lo tanto, $\theta_{K,X}(Z,f) = (\beta_{y,x})_{y,x}$. □

Teorema 5. *Dados X, Y G-conjuntos no necesariamente finitos, entonces existe una correspondencia*

$$\theta_{Y,X} : h_G(Y,X) \to Hom_{Mac(G)}(A(\_,Y), A(\_,X))$$

Ademas, $\theta_{Y,X}((Z_1,f_1) \sqcup (Z_2,f_2)) = \theta_{Y,X}(Z_1,f_1) + \theta_{Y,X}(Z_2,f_2)$

Demostración. Para $Y \cong \bigoplus_{K\in\mathscr{C}} G/K$, $X \cong \bigoplus_{L\in\mathscr{D}} G/L$ tenemos que

$$\begin{aligned} hom_{Mac(G)}(A(\_,Y), A(\_,X)) &\cong \prod_{K\in\mathscr{C}} hom_{Mac(G)}(A(\_,K), A(\_,X)) \\ &\cong \prod_{K\in C} A(K,X) \\ &\cong \prod_{k\in\mathscr{C}} h_G(K,X) \end{aligned}$$

Veamos que $\prod_{L\in\mathscr{C}} h_G(K,X)$ está en biyección con $h_G(Y,X)$

Dado $\{(Z_K,f_K)\}_{K\in\mathscr{C}} \in \prod_{K\in\mathscr{C}} h_G(K,X)$ definimos $(Z,f) \in h_G(Y,X)$ como $Z = \bigsqcup_{K\in\mathscr{C}} Z_K$ y $f : Z \to Y \times X$ como $f(z) = f_K(z)$ si $z \in Z_K$. Análogamente, para $(Z,F) \in h_G(Y,X)$ definimos $Z_K = f^{-1}(G/K \times X)$ y $f_K = f_{|Z_K}$. Definimos θ como la composición de estos isomorfismos con esta aplicación y dado que podemos definir (Z_K,f_K), está función tiene inversa

El hecho de que esta biyección respete uniones disjuntas se debe a que cada uno de los morfismos implicados lo cumple. $\square$

Capítulo 6

Inducción tensorial

Ya estamos preparados para definir nuestro morfismo, lo definiremos con nuestro teorema de extensión para funtores exactos derechos.

Sean G, H grupos finitos. Notemos que si ${}_HU_G$ es un biconjunto y X es un G-conjunto entonces $hom_G(U^{op}, X)$ es un H-conjunto con la acción de H dada por $(hf)(u) = f(h^{-1}u)$ para $h \in H$, $f \in hom_G(U^{op}, X)$ y $u \in U$.

Definición 15. *Definimos la inducción tensorial T_U de G en H como el funtor $T_U : PMac(G) \to PMac(H)$ en objetos*

$$T_U(A(\_, X)) \to A(\_, hom_G(U^{op}, X))$$

y en morfimos, al morfismo $\varphi : A(\_, Y) \to A(\_, X)$ representado por $(Z, f) \in h_G(Y, X)$ como

$$T_U(Z, f) = (hom_G(U^{op}, Z), hom_G(U^{op}, f))$$

Donde

$$hom_G(U^{op}, f) : hom_G(U^{op}, Z) \to hom_G(U^{op}, Y \times X) \cong hom_G(, U^{op}, Y) \times hom_G(U^{op}, X)$$

Definimos $T_U : Mac(G) \to Mac(H)$ como la única extensión exacta derecha de T_U.

Ejemplo 8. *Sea $U = \emptyset$, entonces $hom_G(U^{op}, X)$ tiene un sólo elemento, por lo tanto, $T_\emptyset$ es un funtor constante.*

Ejemplo 9. *Sea $G = H = U$, entonces, para X G-conjunto tenemos $hom_G(U^{op}, X) \cong X$, por lo tanto, T_G es el funtor identidad.*

Proposición 5. *Sean G, H, K grupos finitos y ${}_HU_G, {}_KV_H$ biconjuntos, entonces*

$$T_V \circ T_U \cong T_{V \times_H U}$$

Demostración. Basta verificar que $T_V \circ T_U$ y $T_{V \times_H U}$ son exactos derechos y coinciden en $PMac(G)$. $T_V \circ T_U$ es exacto derecho por composición mientras que $T_{V \times_H U}$ lo es por definición, ahora, para X un G-Conjunto, tenemos que

$$(T_V \circ T_U)(A(\_, X)) = T_V(A(\_, hom_G(U^{op}, X))) = A(\_, hom_H(V^{op}, hom_G(U^{op}, X))$$

Pero tenemos por adjunción que que

$$hom_H(V^{op}, hom_G(U^{op}, X)) \cong hom_G(U^{op} \times_H V^{op}, X)$$

Por un isomorfismo natural, por lo tanto, $T_V \circ T_U \cong T_{V \times_H U}$ $\square$

Definición 16. *Sean $M, N \in Mac(G)$, $M \hat{\otimes} N$ como el funtor $\hat{\otimes} : Mac(G) \times Mac(G) \to Mac(G)$ exacto derecho, obtenido a traves de extender*

$$A(\_, X) \hat{\otimes} A(\_, Y) = A(\_, X \times Y)$$

Teorema 6. *Sean $M, N \in Mac(G)$ y ${}_H U_G$ biconjunto, tenemos entonces que*

$$T_U(M \hat{\otimes} N) \cong T_U(M) \hat{\otimes} T_U(N)$$

Demostración. la composición de funtores

$$T_U \circ \hat{\otimes} : Mac(G) \times Mac(G) \to Mac(H)$$

es exacto derecho, por lo tanto, basta demostrar que concide con $\hat{\otimes} \circ (T_U \times T_U)$ en objetos de la forma $(A(\_, X), A(\_, Y))$, pero por definición, tenemos que

$$T_U(A(\_, X) \hat{\otimes} A(\_, Y)) = T_U(A(\_, X \times Y)) = T_U(A(\_, X)) \times T_U(A(\_, Y))$$

Puesto que $hom_G(U^{op}, X \times Y) \cong hom_G(U^{op}, X) \times hom_G(U^{op}, Y)$. $\square$

Bibliografía

[1] S. Bouc. Non additive exact funtors and tensor induction for Mackey functors. *Memoirs of AMS, 144, 2000.*

[2] J. A. Green. Axiomatic representation theory for finite groups. *Journal of Pure and applied Algebra, 1:4177, 1971.*

[3] J. Thévenaz y P. Webb. The structure of Mackey functors. *Transaction of the AMS 347: 1865-1961, 1995.*

[4] D.J. Benson. Representations and cohomology I. *Cambridge studies in advanced mathematics , vol 30.Cambridge University Press, 1991.*

[5] S.Bouc, Green functors and G-sets,*Lecture Notes in Mathematics, vol. 1671, Springer, October 1997.*

[6] P.Webb. A guide to Mackey functors. *Handbook of algebra vol 2, Elsevier, pages 805836, 2000.*