



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Cadenas musicales de Markov.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

Javier García Garay.



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Pablo Padilla Longoria.
2010.**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.
García
Garay
Javier
41 71 94 82
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
300101223
2. Datos del tutor.
Dr
Pablo
Padilla
Longoria
3. Datos del sinodal 1.
Dr
Raúl
Rueda
Díaz del Campo
4. Datos del sinodal 2.
Fís
Alejandro
Ramos
Amézquita
5. Datos del sinodal 3.
M en I
Hernando
Ortega
Carrillo
6. Datos del sinodal 4.
M en C
Gerardo
Rubio
Hernández

Contenido

Compendio.....	1
INTRODUCCIÓN. Arte y Ciencia, uno solo.....	2
CAPÍTULO 1.....	6
1.1 Conexión con la Lingüística.....	11
1.2 Ritmo.....	14
1.2.1 La Repetición.....	18
1.2.2 Estructura De Agrupamiento.....	18
1.2.2.1 Jerarquía rítmica.....	22
1.2.3 Estructura Métrica.....	23
1.2.3.1 Tipos de acentos.....	23
1.2.3.2 Jerarquía Métrica.....	24
1.2.4 Interacción entre Agrupamiento y Métrica.....	26
1.3 Armonía Básica.....	27
1.3.1 CONCEPTOS BASICOS (Previos).....	28
Semitono.....	28
Tono Entero.....	28
Modo mayor.....	29
Modo menor puro.....	29
Pentagrama.....	29
Clave.....	30
Tipos de clave.....	30
Modulación.....	31
Accidentes (Alteraciones).....	31
Armadura.....	32
Intervalos.....	32
1.3.2 Intervalos Simples.....	33
1.3.3 Acordes.....	33
1.3.3.1 TRIADAS TRADICIONALES.....	34
1.3.3.2 TRIADAS CONTEMPORANEAS.....	34
1.3.4 Tonalidades Mayores Y Menores de acuerdo al círculo de quintas....	35
CAPÍTULO 2.....	36
2.1 Cadenas de MARKOV.....	37
2.1.1 Nociones Preliminares.....	37
Espacio de Probabilidad.....	37
Vector de probabilidad.....	37
Matriz estocástica.....	38
TEOREMA 1.....	39
Matriz estocástica regular.....	39
Punto Fijo (vector invariante).....	40
TEOREMA 2.....	40
2.1.2 Definición General.....	41

2.1.3 Definiciones Y Primeros Resultados.....	44
PROPOSICIÓN.....	44
2.1.3.1 CLASIFICACIÓN DE ESTADOS Y TIEMPOS DE ENTRADA.....	47
2.1.3.1.1 Definición. EL PRIMER TIEMPO DE ENTRADA.....	47
2.1.3.1.2 Definición. ESTADO RECURRENTE, TRANSITORIO, ABSORBENTE.....	48
2.1.3.2 Definición. CADENAS IRREDUCIBLES.....	49
2.1.3.3 Definición. DISTRIBUCIÓN ESTACIONARIA.....	49
2.1.3.4 Definición. PERIODO.....	50
2.1.3.4.1 Definición. CADENAS PERIÓDICAS Y APERIÓDICAS.....	50
2.1.4 Cadenas Especiales.....	50
2.1.4.1 Definición. CADENAS REGULARES.....	50
TEOREMA 3.....	50
LEMA 1.....	51
2.1.4.2 Definición. CADENAS ABSORBENTES.....	58
2.1.5 DIAGRAMAS DE TRANSICIÓN.....	58
2.1.6 MODELO OCULTO DE MARKOV.....	59
2.2 Redes Neuronales.....	61
2.2.1 Estructura en Redes Neuronales.....	61
2.2.2 Unidades en Redes Neuronales.....	62
2.2.3. Redes Neuronales de una sola capa con Alimentación-Hacia-Delante (Perceptrón).....	64
2.2.4 Redes Neuronales Multicapa con Alimentación-Hacia-Delante.....	66
CAPÍTULO 3.....	71
3.1 Métodos y Algoritmos.....	72
3.1.1 Método De Guido.....	72
3.1.2 Algoritmo de La División.....	74
3.2 El Arte de Elegir.....	76
3.2.1 Elección Subjetiva.....	77
3.2.2 Elección Objetiva.....	78
3.3 Aleatoriedad.....	79
3.3.1 ¿Qué es El Azar?.....	79
3.3.2 Pseudoaleatoriedad.....	80
3. 4 Cadenas de Markov.....	80
3.4.1 Música Tradicional Cubana.....	84
3.4.2 Música Tradicional Mexicana.....	85
3.4.3 Jazz.....	87
3.4.4 Música Clásica.....	88
3.5 Redes Neuronales.....	90
CAPÍTULO 4.....	91
4.1 Generador Distributivo (GD).....	92
Danza Cubana 1.....	92

Análisis Rítmico.....	92
Análisis Armónico.....	94
El Sinaloense.....	95
Análisis Rítmico.....	95
4.2 Generador Paso a Paso.....	95
La Llorona.....	96
Análisis Rítmico.....	96
Análisis Armónico.....	98
Lobgesang-Mendelssohn.....	100
Análisis Rítmico.....	100
Análisis Armónico.....	103
4.3 Generador Regular.....	104
Bruca Manigua.....	104
Análisis Rítmico.....	104
Análisis Armónico.....	106
Spain.....	108
Análisis Rítmico.....	108
Análisis Armónico.....	108
Rex Tremendae.....	109
Análisis Rítmico.....	109
Análisis Armónico.....	110
4.4 Generador Absorbente.....	110
El Sinaloense.....	110
Análisis Armónico.....	110
Análisis de Resultados.....	116
Conclusiones.....	117
Bibliografía.....	118
Apéndice 1.....	119

Compendio.

Las cadenas musicales de Markov son instrumentos matemáticos auxiliares en el proceso creativo de la composición musical. Dichas herramientas sugieren melodías generadas a partir del desarrollo tecnológico de la aplicación de la teoría formal de cadenas de Markov en el ámbito musical. Se intenta motivar la exploración de los recursos científicos dentro del arte con el objetivo de modelar la estética.

Para ir familiarizando al lector con este entorno, en la introducción se presenta una breve cronología de la relación entre ciencia y arte; en particular, se aborda lo referente a la música y las matemáticas a través de particulares anécdotas acerca de su interacción epistemológica y práctica desde la antigüedad.

Generalmente, la necesidad de estructurar música mediante leyes científicas y los efectos estéticos producidos son la justificación de su reciprocidad actual.

A lo largo de esta tesis se considera una composición musical como la viva expresión de una concepción mental. De este modo, las ideas expuestas entrarán en campos como la cognición y el aprendizaje. Sin embargo, este no será el tema de discusión central de esta tesis.

Para generar las cadenas musicales de Markov, el presente estudio se desarrollará en cuatro capítulos:

En el primero, se revisan algunos aspectos importantes de la música que tratan sobre su movimiento en el tiempo y su estructura. Se examinan atentamente algunos criterios musicales formales con el fin de entender y analizar fenómenos complejos en la parte artística.

En el capítulo dos, se detalla lo referente a la teoría matemática formal de cadenas de Markov estudiado a nivel licenciatura y se introduce al reconocimiento de redes neuronales artificiales como herramientas asociadas al aprendizaje.

Dentro del tercer capítulo se analiza la composición musical a través de algoritmos matemáticos. Se construyen dos tipos de matrices de probabilidad de transición para cada cadena musical de Markov, generadas mediante un estudio, rítmico y armónico respectivamente, de piezas pertenecientes a diversos géneros musicales como el jazz, la música tradicional mexicana, la música clásica y la música tradicional cubana. Además se pretende inspirar el entrenamiento de redes

neuronales para el desarrollo de composiciones musicales, pudiendo constituir éste un tema de posgrado.

El cuarto capítulo contiene los resultados de aplicar metodológicamente la teoría formal de cadenas de Markov a las matrices rítmicas y armónicas generadas.

Con el uso de software especializado como *Matlab*, *Sibelius* y *Reason*, se implementa la metodología, se hace simulación y se generan los archivos de audio respectivos a los resultados obtenidos.

Por último se analizan las cadenas musicales de Markov obtenidas y se ejemplifica el uso de los resultados para generar una composición musical.

INTRODUCCIÓN. Arte y Ciencia, uno solo.

*... "siempre gozarás de libertad para cambiar de idea,
incluso elegir otro futuro u otro pasado."*

Desde la antigüedad, las relaciones y diferencias entre arte y ciencia han constituido una inquietud para el pensamiento humano en su afán de hallar sentido perfecto a la vida. Los artistas y los científicos intentan descifrar un orden partiendo de experiencias diversas y, en apariencia, aleatorias en su universo. Tanto el arte como la ciencia requieren habilidad técnica. El término arte deriva del latín *ars*, que significa habilidad y el término ciencia tiene como origen la raíz *scientia* (*scire*), conocer, referente al conocimiento sistematizado verificable. Sin embargo, existe una diferencia esencial entre ambas intenciones: la ciencia estudia las percepciones de los sentidos de modo cuantitativo, para descubrir leyes o conceptos que reflejen una verdad universal. El artista, en cambio, selecciona las percepciones cualitativamente y las ordenan de forma que manifiesten su comprensión cultural.

A lo largo de al menos treinta siglos la literatura, música, danza, pintura, escultura y arquitectura han involucrado matemáticas para crecer en su sentido puramente estético y conceptual. En el siglo XVIII, el mundo occidental comenzó a concebir el arte como un valor puramente estético que, además, tenía una función práctica: las bellas artes.

El presente trabajo se concreta en estudiar, de una manera científica particular, la estética de algunas piezas musicales concebidas en el sistema occidental.

Para comenzar, se explora el excesivamente peculiar universo de música y ciencia, destacando algunas de sus facetas importantes a través del tiempo:

En primer lugar, se conmemora al discípulo de Tales de Mileto, el legendario Pitágoras de Samos quien, contemporáneo de Buda y Confucio, describe un sistema de ideas que busca unificar los fenómenos del mundo físico y del mundo del espíritu en términos de números, razones y proporciones.

Nacido alrededor de 580 A. C., en el territorio que actualmente es Turquía, Pitágoras, quien acuñó la palabra matemáticas, estudió la naturaleza de los sonidos musicales. La música griega existía antes, esencialmente melódica más que armónica o micro tonal. Sin embargo, descubrió que uno de los más bellos y placenteros lenguajes esenciales podía ser medido.

La escuela pitagórica estaba interesada sobre todo en las relaciones interválicas entre dos sonidos. Observó que al dividir una cuerda en ciertas proporciones (puntos de apoyo, no cortes de la cuerda) se producían sonidos agradables al oído, independientemente de la longitud, grosor y tensión de la cuerda. Mostró que existía una relación “armónica” entre todos los fenómenos perceptibles. Con esto, propició la idea de que el número era el motor del mundo.

El pensamiento de Pitágoras y sus seguidores, que fueron altamente respetados por sus ideas filosóficas y religiosas durante los siglos VI y V A. C. en Grecia y el sur de Italia, llega a la actualidad por una variedad de fuentes secundarias.

La larga vida de la tradición pitagórica tuvo como motor a Severino Boecio, filósofo y matemático romano quien fue el principal traductor de la teoría musical en la Edad Media. Escribió *Los principios de la música*, interpretando los trabajos de Nicómaco, Ptolomeo y Euclides.

Con la llegada del periodo barroco, la jerarquización de la música entorno a un centro tonal se convirtió en la columna vertebral musical. Esto no es casual, ya que durante este periodo se desarrolló la ley de la gravitación universal.

Johannes Kepler (1571-1630) astrólogo real, astrónomo y matemático alemán quien reconociendo que los planetas giraban alrededor del sol, refinó la teoría de la *música de las esferas* de los pitagóricos, sugiriendo que los planetas producían diferentes sonidos, pues creía que si se conocía la masa y la velocidad de un objeto que gira, se podría calcular su sonido fundamental.

Se debe nombrar a Marín Mersenne (1588-1648) filósofo, teólogo, matemático y músico descubridor de los números primos que llevan su nombre. En *L'armonie universelle* (1627) escribe sobre la teoría musical y los instrumentos. Propone como razón principal el semitono.

También grandes compositores de música barroca son Claudio Monteverdi (1567-1643) *el gran maestro de la imitación* con sus geometrías y J. S. Bach (1685-1750) con quien las matemáticas ayudan a determinar el sistema, casi como nos ha llegado a nuestros días. Su música está llena de construcciones y se pueden encontrar, de un modo u otro, muchos elementos que tendrán cabida en teorizaciones futuras.

En el periodo clásico aparecen *razones áureas* con Mozart (1756-1791), compositor austriaco, uno de los más influyentes en la historia de la música occidental. En su sonata para piano número 1, si se juega curiosamente a dar un valor significativo a sus secciones de 38 y 62 compases ($62/38=1.6315$), se observan aproximaciones numéricas a dicha proporción.

En Beethoven (1770-1827), cuya herencia más notable fue un cambio en el papel del compositor en la sociedad; de ser un artesano que creaba a las órdenes de la Iglesia o de alguna autoridad aristocrática (hecho que Mozart y Haydn tuvieron que aceptar), pasó a ser un artista independiente desde el punto de vista económico gracias a la publicación de sus obras y a sus representaciones, con una motivación creadora íntima, concepto que fue el sello del romanticismo durante el siglo XIX. El tema principal de su quinta sinfonía va apareciendo a lo largo de la obra teniendo en cuenta la proporción áurea. Se debe decir que este tipo de proporción se ha utilizado en música desde mucho antes, e incluso cada autor la ha trabajado a su manera.

Podría pensarse que las matemáticas se utilizan en música como base primera en la producción de reglas que servirán para regular un tipo especial de estética. Esta forma de aproximación de disciplinas en cierto modo ha existido siempre. Las leyes del contrapunto y de la armonía, podrían incluirse en este apartado.

Sin embargo, la música práctica hace tiempo que camina lejos de la puramente especulativa y cada autor tiene reglas comunes al movimiento estético que sigue y sus propios trucos artesanales de tipo empírico.

Ya en el siglo XX, con el agotamiento en occidente del sistema tonal y la aparición de la atonalidad y el dodecafonismo, es necesario echar mano de procedimientos todavía artesanales pero con un mayor acercamiento al mundo de las matemáticas, pues se comienza a trabajar con listas de letras, números, y otro tipo de símbolos que, aunque se habían utilizado de un modo u otro con anterioridad, van a tener

nuevas connotaciones. Con la llegada del serialismo integral todo esto se hace más patente puesto que las viejas reglas compositivas deben ser sustituidas por otras nuevas mucho más cercanas a los procedimientos abstractos de la matemáticas.

Por lo tanto hay dos facetas importantes en la relación de música y matemáticas: por un lado, la necesidad de estructurar música mediante leyes que surgen de forma consciente o inconsciente de las matemáticas; por otro, el acercamiento a éstas por el propio hecho estético. Por ejemplo, piense en un haz de curvas en el espacio que nos resultan altamente atractivas y especule rápidamente la posibilidad de que éstas sean una representación gráfica de un hecho musical. De manera más abstracta ciertas formulaciones pueden igualmente producirnos un efecto estético. En la mayoría de los casos se unen ambos procedimientos.

Se debe hacer énfasis en que la interacción entre ambas disciplinas no es un tema nuevo, desde hace mucho tiempo y actualmente muchas personas construyen conocimiento, desarrollando diversas metodologías, algoritmos y descubriendo importantísimas correspondencias y aplicaciones. Se sugieren las siguientes lecturas:

- CRAWFORD, Tim and GIBSON, Lorna [edited]. *Modern Methods for Musicology. Prospects, proposals and realities.* Ashgate Publishing Limited. England. 2009.
- *Computer music magazine.* Future Publishing Ltd. [edited] Ronan Macdonald. num. 147. January 2010.
- *Computer music magazine.* Future Publishing Ltd. [edited] Ronan Macdonald num. 148. February 2010.

... "aprender es descubrir lo que ya sabes."

CAPÍTULO 1.

En el primer capítulo se revisan algunos aspectos de la música que tratan sobre su movimiento en el tiempo y su estructura.

Al igual que en la naturaleza, en el movimiento de los planetas o en el pulso del corazón, el tiempo suele organizarse en patrones de recurrencia regular. Dichos patrones controlan el movimiento de la vida misma. Existe ritmo en infinitas actividades que gobiernan la existencia de todo ser vivo.

El ritmo es el flujo de movimiento controlado o medido, sonoro o visual, generalmente producido por una ordenación de elementos diferentes del medio en cuestión.

Sin embargo, cuando se habla de ritmo, la primera referencia lógica que viene a nuestras mentes parecería ser el arte, ya que el ritmo es una característica básica de todas, especialmente de la poesía, la música y la danza.

En la danza, el ritmo gobierna los movimientos del cuerpo. En la poesía, determina la estructura, el equilibrio y la disposición de las palabras. Así, los patrones que dirigen el movimiento en la música, ayudan al oído humano a comprender su estructura.

La unidad rítmica básica por excelencia es el pulso, un patrón espaciado regularmente periódico que se parece al ritmo de un reloj. En la mayor parte de la música de baile y en la popular, el pulso aparece de forma explícita, a menudo por medio del batir de los tambores o mediante un patrón de acompañamiento regular. En música más compleja, el pulso sólo está implícito; es una especie de denominador común para las longitudes de las notas, que pueden ser más largas o cortas que el pulso mismo.

¿Quién no se ha sentido arrastrado por el sabor irresistible de una pieza latina, o ha comenzado a tamborilear con los dedos o algún cubierto en el borde de la mesa?

Para que el pulso pueda ser oído como denominador común, las longitudes de las notas individuales generalmente serán múltiplos o subdivisiones exactas (como la mitad o el doble de la duración del pulso). El tempo en la música determina la velocidad del pulso.

La forma musical utilizada para este estudio queda determinada por las relaciones entre estas distintas unidades de tiempo y su interacción con los esquemas armónicos.

Nos proponemos formular una herramienta composicional que sugiera descripciones formales de las intuiciones musicales que un oyente experimenta en un lenguaje musical. Se comienza con algunas observaciones generales sobre la teoría de la música.

Desde hace algún tiempo la música se ha discutido de las siguientes maneras:

En primer lugar, se puede hablar informalmente sobre las distintas piezas musicales, tratando de iluminar sus interesantes facetas. Este tipo de explicación a menudo puede capturar información musical de gran sutileza, a pesar de no ser rigurosa su naturaleza.

Alternativamente, se puede tratar de crear un sistemático modo de descripción dentro del cual se puedan discutir piezas individuales. Aquí se trata de una expresión musical a través de un método analítico. Puede ser tan sencillo como una clasificación de piezas, de sus formas, o tan complicado como construir sus gráficos.

En un nuevo nivel de generalidad, uno puede tratar de definir los principios que subyacen a un sistema analítico, lo que en nuestro caso constituye la teoría musical occidental. Esta teoría puede considerarse como una hipótesis acerca de cómo la música, o un particular lenguaje musical, se organiza y sus consecuencias,

redactado en términos de algún conjunto de constructores teóricos. Uno siempre debe preguntar en cuanto a la situación de sus constructores teóricos. Por ejemplo, el constructor medieval teórico, para justificarse, construye en parte motivos teológicos.

En el siglo veinte este tipo de constructores dejaron de inspirar al compositor. Se distinguen dos tipos de tendencias:

- Buscar un fundamento matemático para la construcción y las relaciones de la teoría musical.
- La intuición artística.

Sin embargo, la primera tendencia no es suficiente. Las matemáticas son capaces de describir cualquier tipo de organización. Para establecer la teoría musical uno quisiera explicar por qué ciertas construcciones son utilizadas y otras no. La segunda aproximación, para una teoría, es inadecuada, debido a que se ignora la fuente de intuición y la razón queda de lado.

Es por estas cuestiones que cabe preguntar sobre el principio u origen de la música. La música es producto de la actividad humana. Es un lenguaje, es una cuenta, es una función, hay mucho más relacionado con la música que una simple señal física y su funcionamiento.

Una pieza musical es una construcción mental. A pesar de que la música tenga diversas propiedades físicas, para tratar la realidad de la estructura musical entrará en áreas como la psicología cognitiva, teorías de visión y aprendizaje.

Esta vertiente completa las dos tendencias pues aporta la parte de la percepción. Se elabora la noción de *intuición musical del escucha experimentado*. Esto se refiere al conocimiento inconsciente (intuición musical) que el que escucha brinda a lo que esta escuchando, un conocimiento que le permite organizar, encontrar patrones coherentes, distinguir intensidad, timbre, duración, entre otros.

Es experimentado porque una vez que esta familiarizado con el idioma, la organización mental que construye está obligada a cosas específicas: una gramática musical explícita y formal, la cual comprende una serie de reglas y de análisis.

Por experimentado se debe entender una idealización acerca de su intuición. Un idioma musical de cualquier complejidad demanda una sofisticación particular considerable para su completa apreciación.

¿Qué extensión tiene la capacidad innata o la capacidad cognitiva general? La interacción entre este nivel de investigación y la teoría de un idioma musical es de gran importancia. Si el conocimiento del escucha de un idioma fuese relativamente sencillo (por decir, la memorización de la superficie musical de varias piezas), se necesitaría una teoría de capacidad cognitiva musical especial. Entre más se profundice en su conocimiento, más será revelada la complejidad y abstracción, ya que no resulta obvio cómo el escucha obtiene, de la superficie musical de las piezas, evidencia para sus estructuras. Así, una teoría suficientemente completa del idioma musical debe ser una fuente rica de hipótesis acerca de la psicología musical.

Sin pérdida de generalidad, para el desarrollo de este trabajo se considera que cualquier tipo de música contiene dos componentes principales: tono y rítmica. El tono es la frecuencia fundamental de un sonido. La frecuencia fundamental es la frecuencia más baja del espectro de frecuencias que percibe el oído humano. El timbre de un sonido está constituido por el conjunto de múltiplos de esta frecuencia fundamental, producidas en cada instrumento. La rítmica son las distintas duraciones de los tonos y los silencios entre ellos. Por consecuencia, en términos más claros, una pieza musical consiste en una sucesión de combinaciones de diferentes frecuencias fundamentales en distintas duraciones. En adelante, se utilizará el término frecuencia para referir el concepto de frecuencia fundamental.

Como primer paso se debe saber que la distancia entre dos frecuencias se llama *intervalo*^[1]. Dos frecuencias son nombradas *octava*, si una es el doble de la otra. Para el oído humano, suenan muy similares. En la música occidental, el intervalo de octava, o claramente *la octava*, se divide en doce intervalos iguales. Las frecuencias están etiquetados con las primeras siete letras del alfabeto occidental. Su ubicación en el piano y nomenclatura se muestran en la Fig. 1.1.

[1] Don Michael Randel, *Diccionario Harvard de música*, Diana, México, 1984.

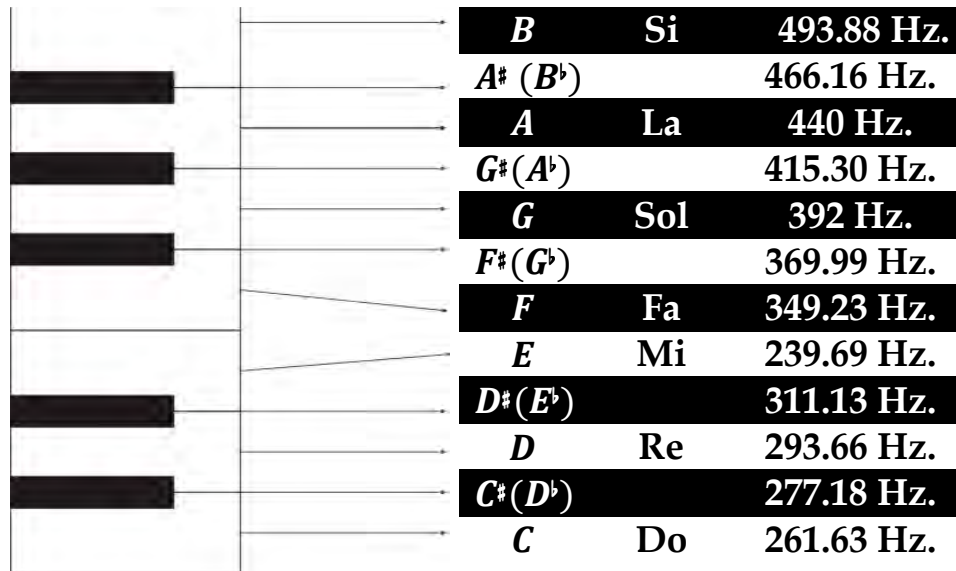


Fig. 1.1

Más adelante, se profundiza en la teoría de la música tonal clásica (occidental). Será necesario profundizar en ella relativamente a la complejidad requerida para desarrollar la presente tesis.

Con el objetivo de ayudar en la comprensión de la estructura rítmica musical, de manera breve, se comenta una herramienta científica que aborda este tema de un modo gráfico muy particular, publicada en el artículo 'Time-frequency analysis of musical rhythm'^[2].

En dicho artículo, nos presentan el método de transformadas de Gabor, también conocido como transformadas rápidas de Fourier o espectrogramas, que proporciona una herramienta para visualizar los patrones de tiempo-frecuencia dentro de la estructura de una pieza musical, cuyos parámetros son elegidos con el fin de proporcionar una solución satisfactoria para mostrar los *trenes de pulso* que caracterizan un pasaje percusivo.

La razón por la cual utilizan este método es la facilidad en la interpretación gráfica de la información.

^[2] Xiaowen Cheng, Jarod V. Hart y James S. Walker, "Time-frequency analysis of musical rhythm", en *Notices of the AMS*, vol. 53, núm. 3, pp. 356-372, 2009.

En el procesamiento de los trenes de pulso, las transformadas rápidas de Fourier no sólo nos ayudan a visualizar agrupamientos jerárquicos complejos de las notas, sino que muestra el arreglo de intervalos de tiempo entre ellas. La gráfica final obtenida se llama *escalograma*.

Un escalograma nos permite percibir las estructuras jerárquicas en la música, especialmente en pasajes rítmicos. Cuando arrojan resultados precisos; es decir, una descripción correcta de la duración de las notas, revelan la estructura rítmica de la música. Proveen una representación visual, que ayuda a nuestra comprensión auditiva, pues nos permiten identificar rápidamente la duración y el agrupamiento jerárquico de las notas.

La memoria musical del escucha incluye codificación jerárquico de los grupos de notas. Por ejemplo, en el caso lingüístico, no todas palabras sobresalen igual, análogamente, no todas las partes de una pieza musical mantienen el mismo estatus.

Experimentos con estudiantes de música han confirmado esta noción de codificación jerárquico, puesto que no pueden comenzar a tocar una pieza musical que conozcan en cualquier punto arbitrario, aprenden música de acuerdo a una estructura jerárquica de frases. Grupos de notas forman unidades, estas pequeñas unidades son combinadas en unidades más grandes para conformar versos y coros.

Así, los escalogramas percutivos pueden ser muy útiles en la enseñanza y aprendizaje de técnicas de ejecución ya que proporcionan una magnífica ayuda visual que, junto con el entrenamiento auditivo, mejoran la apreciación de diferencias sutiles.

1.1 Conexión con la Lingüística.

La teoría lingüística generativa es una tentativa para caracterizar lo que un humano sabe cuando puede hablar en un idioma, permitiéndole entender y crear indefinidamente un gran número de enunciados, la mayoría jamás escuchados anteriormente. Este conocimiento, no está del todo al alcance para una introspección consciente y por lo tanto, no puede ser adquirido por instrucción directa. La teoría lingüística modela este conocimiento inconsciente por un sistema formal de principios y reglas llamadas gramática, la cual describe (o genera) la posibilidad de enunciados en el lenguaje.

Debido a que mucha gente ha pensado usar la lingüística generativa como modelo para la teoría musical, es importante señalar lo que se toma como significado paralelo: la combinación de temas psicológicos y la naturaleza formal de la teoría. El formalismo por si solo no es de interés en este rubro excepto porque sirve para expresar musicalmente o psicológicamente generalizaciones interesantes y para hablar de temas empíricos con mayor precisión.

Se han encontrado muchas aplicaciones de la metodología lingüística a la música debido a la tentativa traducción literal en algún aspecto de la teoría lingüística en términos musicales; como por ejemplo, analizar las partes de la oratoria, estructuras profundas, transformaciones o semánticas. Pero, señalar las analogías musicales y del lenguaje sin la ayuda de una gramática generativa es inútil. A pesar de ello, estas dos, lingüística y música, no son del todo iguales.

Los conceptos fundamentales de la estructura musical deben involucrar factores tales como la rítmica y la organización del tono, la diferenciación dinámica-timbral y los procesos motivo-tema. Estos factores y sus interacciones desde la estructura pueden ser un poco diferentes, pero no menos complejos, que aquellos de la estructura lingüística. Si se ha adoptado algún marco teórico y metodología de la lingüística es porque esta aproximación sugiere una buena forma para pensar en la música.

Para definir de manera precisa lo que es una metodología, se sugiere tomar como punto de partida el entendimiento del concepto 'algoritmo'.

Un algoritmo es el conjunto de normas o la secuencia de operaciones para realizar una tarea o resolver un problema de acuerdo con cada una de las siguientes cinco características:

- El algoritmo debe ser Finito.
- Cada paso debe tener una significancia que es comprendida comúnmente.
- Debe tener material válido o información de entrada sobre la cual operar.
- El algoritmo debe producir al menos un resultado, generado por aplicar el método a la información de entrada.
- El algoritmo reproduce siempre el mismo resultado desde la misma entrada. No debe depender de datos desconocidos, ni ser ambiguo.

Bajo esta interpretación, la gramática musical debe ser un algoritmo que componga piezas de música.

Existen, al menos, tres objeciones a este punto de vista:

El sentido de 'generar' en el término gramática generativa es en sentido matemático; es decir, describir un conjunto (usualmente infinito) por medio de significados finitos formales.

Lo realmente interesante en la gramática generativa es la estructura que se asigna a los enunciados, no cuáles cadenas de palabras son o no enunciados gramaticalmente correctos. Lo mismo se mantiene en la teoría musical. No se intenta enumerar que piezas son posibles, sino especificar una descripción estructural para cualquier pieza tonal.

En la concepción de la gramática generativa, la teoría lingüística no está relacionada simplemente con el análisis de un conjunto de enunciados; sino considera una gama de la psicología, concerniente con hacer empíricamente verificable enunciados de un aspecto complejo de la vida humana, como lo es el lenguaje. Similarmente, uno de nuestros objetivos es entender la cognición musical como fenómeno psicológico.

La teoría musical orientada a explicar grandes piezas musicales lleva a estructuras complejas y controvertidas formales, como la métrica, el motivo y los adornos.

En resumen, uno debe abordar el idioma de la música tonal para llegar a entender fenómenos más complejos en la parte artística.

Hay dos beneficios importantes de esto. Uno viene de ver la organización musical de forma más compleja basada en concepciones matemáticas; sin embargo, este aspecto frecuentemente no es considerado porque puede pasar desapercibido a quien escucha. El segundo, es el interés artístico en el cual la manipulación de ciertos parámetros es responsable de ciertas intuiciones; es decir, la relación entre la música y las respuestas emocionales.

Para aproximarse a cualquiera de estas dos, se requiere entender mejor la estructura musical. A continuación, se aborda la estructura rítmica y algunos principios básicos de armonía, con el objetivo de orientar hacia el entendimiento de una composición musical. Existen otras dimensiones como lo son el timbre, la dinámica y los procesos motivo-tema, los cuales no son jerárquicos en naturaleza, pero deben ser tomados en cuenta en la teoría por su influencia.

La teoría musical generativa, a diferencia de la lingüística, no sólo asigna una descripción estructural a la pieza, sino que también diferencia en ella la escala de coherencia y el peso de ésta.

1.2 Ritmo.

¿Por qué la música emociona tanto a tantas personas?

Una primera clave para responder a esta difícil pregunta se encuentra en los orígenes de la música. Hasta ahora se ha sostenido que es posible considerar en parte la música como un lenguaje que está por debajo del umbral de la conciencia. En la comunicación con nuestros semejantes a través de la palabra, no sólo se transmite la información textual, sino que la intensidad, inflexiones y cadencia de la voz aportan otro tipo de información tan valiosa o más, para una acertada comunicación emocional, que el propio texto. Son esas características del habla (intensidad, cadencia, inflexión) las que se exportan a la música.

Hablar con absoluta monotonía, además de exponernos a aburrir considerablemente al receptor, priva a la comunicación de la información emotiva, a no ser que ésta se aporte mediante otros signos como el lenguaje corporal. Ahora bien, la experiencia es fundamental para una correcta interpretación en el proceso de comunicación. Aparece entonces una segunda clave: El reconocimiento de una experiencia anterior.

Reconocer es un proceso básico en cualquier tipo de emoción. Igualmente, para emocionarse con una composición musical, se necesita cierto tipo de reconocimiento.

Uno de los primeros elementos que se deben distinguir en la estructura rítmica es el compás. El compás es el signo que determina el metro y el ritmo en cada composición, o parte de ella, y las relaciones de valor entre los sonidos.^[3] Es posible encontrar muchos patrones rítmicos en la música que escuchamos. Generalmente, los tiempos (o pulsaciones) se apiñan en grupos de dos, tres o cuatro. Se utilizan también compases menos comunes como son los de cinco o siete tiempos y compases de hasta doce tiempos, como en el caso de la música flamenca.

El compás se escribe al principio de una obra musical. Se simboliza mediante una razón, donde el numerador nos indica el número de tiempos que tiene el compás y el denominador nos indica la unidad de tiempo (la figura que llenará cada tiempo del compás).

^[3] Don Michael Randel, op. cit.

Con el objetivo de lograr mayor precisión en nuestro reconocimiento y análisis musical se deben conocer las figuras musicales (Fig. 1.2) las relaciones *figura-cifra* (Fig. 1.3) y las indicaciones de los compases más comunes (Fig. 1.4).



FIGURA	NOMBRE	VALOR
	Cuadrada	1. El doble de una redonda.
	Redonda	2. El doble de una blanca. 3. La mitad de una cuadrada.
	Blanca	4. El doble de una negra. 5. La mitad de una Redonda.
	Negra	6. El doble de una corchea. 7. La mitad de una blanca.
	Corchea	8. El doble de una semicorchea. 9. La mitad de una negra.
	Semicorchea	10.El doble de una fusa. 11.La mitad de una corchea.
	Fusa	12.El doble de una semifusa. 13.La mitad de una semicorchea.
	Semifusa	14.La mitad de una semifusa.

Fig. 1.2








FIGURA	CIFRA	FIGURA	CIFRA
	1		16
	2		32
	4		64
	8		

Fig. 1.3

A cada figura musical se le asocia un silencio de igual duración. (Fig. 1.5)









FIGURA	SILENCIO
	
	
	
	
	
	
	

Fig. 1.5



















COMPÁS	UNIDAD DE TIEMPO	UNIDAD DE COMPÁS
$\frac{2}{4}$		
$\frac{3}{4}$		
$\frac{4}{4}$		
$\frac{2}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{2}{8}$		
$\frac{3}{8}$		
$\frac{6}{8}$		

Fig. 1.4

[*] El puntillo es un símbolo que al añadirlo a una figura aumenta su duración en la mitad de su valor. Por ejemplo, sabemos que una redonda vale dos blancas y si le aumentamos el puntillo su nuevo valor es de tres blancas por que le aumentamos la mitad de su duración.

1.2.1 LA REPETICIÓN.

Tal vez la forma más eficaz de provocar el reconocimiento sea la repetición, conocida como una de las estrategias básicas, junto con la relación, en los procesos de aprendizaje.

La repetición forma parte tanto de la música como del propio medio sonoro. Las ondas sonoras no son más que perturbaciones periódicas de la presión del aire. El reconocimiento de estos patrones sonoros, más o menos complejos, se realiza normalmente gracias a ciertos tipos de repeticiones.

Sin embargo, la repetición constante puede provocar efectos no deseados, el más leve de los cuales es simplemente la insensibilización. Esto es lo que sucede cuando se deja de percibir el sonido de una lámpara después de un rato.

Excepcionalmente, existen casos en donde la repetición es justo lo deseado, como sucede, por ejemplo, en las danzas y rituales para crear un clima hipnótico.

El preciso equilibrio entre reconocimiento y repetición obliga, por tanto, a que ésta se realice de forma moderada y con ligeros cambios. Es así como la repetición forma el ritmo cardiaco, el ritmo del universo.

Por lo tanto, se comienza por tomar en cuenta adecuadamente el ritmo, antes que todo, pues se requiere de una identificación precisa de dimensiones rítmicas individuales.

En la presente tesis se presenta la organización rítmica a través de sus componentes más importantes: la estructura de agrupamiento y la estructura métrica.

1.2.2 ESTRUCTURA DE AGRUPAMIENTO.

El proceso de agrupamiento es común en muchas áreas de la cognición humana. Si se confronta una persona con una secuencia de eventos, espontáneamente los agrupará de alguna forma. La facilidad o dificultad con que la persona realiza esta operación es una organización intrínseca que corresponde a principios inconscientes de construir grupos. El agrupamiento es el componente más básico del entendimiento musical.

La característica primordial del agrupamiento musical se halla en que es organizado en una moda jerárquica. Un motivo, es escuchado como parte de un

tema, un tema como parte de un grupo temático y una sección como parte de una pieza.

Sin embargo, el concepto de jerarquía debe ser examinado con mayor precisión. Una jerarquía estructural, en el sentido usado en esta teoría, es una organización compuesta de regiones o elementos discretos relacionados de tal forma que una región resume o contiene otros elementos o regiones.

Con el objetivo de ilustrar estos conceptos, a continuación, se retoma la herramienta de escalogramas percusivos^[4], profundizando en su desarrollo.

Usualmente, una señal física es representada mediante una función del *tiempo* $s(t)$ o, alternativamente, en el dominio de la *frecuencia* por su Transformada de Fourier $\mathcal{F}[s(t)]$. Ambas contienen exactamente la misma información sobre la señal, respondiendo a enfoques distintos y complementarios.

Recordemos que la eficacia de este método reside en lo bien que se muestra gráficamente la relación tiempo-frecuencia que, además, concuerda con la percepción auditiva.

Para comenzar, se discretiza una señal acústica dada en un intervalo finito de tiempo $[0, T]$. Por medio de una secuencia de funciones de ventaneo, se obtienen subseñales localizadas en el tiempo y uniformemente espaciadas:

$$\{\mathcal{F}\{f(t_k)w(t_k - \tau_l)\}\}_{l=0}^M.$$

Para completar el procesamiento de análisis se utiliza la llamada *ventana Blackman*, consistente a una transformación de Gabor definida por:

$$w(t) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(2\pi t/\lambda) + 0.08 \cos(4\pi t/\lambda) & \text{para } |t| \leq \lambda/2. \\ 0 & \text{para } |t| > \lambda/2. \end{cases}$$

Esta ventana, hace una fina partición del eje de frecuencias y por lo tanto del espectro de la señal. Las gráficas resultantes son llamadas espectrogramas (Fig. 1.6)

^[4] Xiaowen Cheng, Jarod V. Hart y James S. Walker, op. cit.

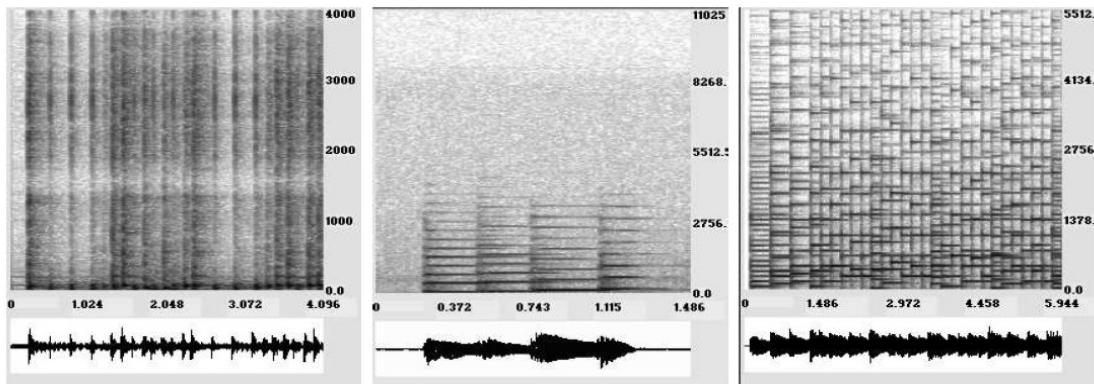
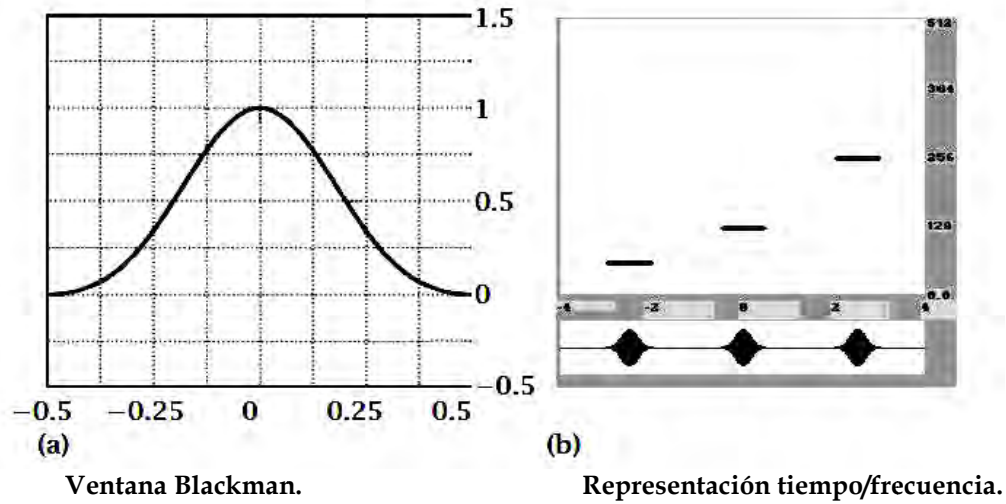


Fig. 1.6 Tres espectrogramas. El primero (de derecha a izquierda) corresponde a un solo de batería de una canción de rock. El segundo, a notas en una escala de piano. El tercero, es un solo de piano de una melodía de Bach.

Finalmente se generan los escalogramas que, a diferencia de los espectrogramas, utilizan diferentes tamaños de ventanas que inducen una división logarítmica del eje de frecuencias. Esto provee un método de acercamiento (o zoom) en regiones selectas del espectrograma.

El método para generar un escalograma consta de dos partes:

1. Generación del *tren de pulso*: Consiste en generar una secuencia de subintervalos de valores de ceros y unos. Las anchuras de los pulsos son aproximadamente iguales a las anchuras de las muestras verticales presentadas en el espectrograma, pero lo más importante es que la

ubicación y duración de los intervalos de valor 1, corresponden a cuando se escucha el golpe del tambor y los valores correspondientes a 0, se interpretan como los silencios. Sin embargo, los trenes de pulso no reflejan variación en el volumen. Cuando un pulso es muy largo, significa que requiere mayor energía el golpe, lo que se traduce en mayor volumen y que en el escalograma se muestra como las partes más oscuras.

2. Transformadas continuas de tren de onda (CWT): El tren de pulso es una función de paso análoga a una curva sinusoidal de frecuencia variable. Al aplicar el análisis de CWT se muestra gráficamente la unión de los segmentos de golpes y silencios, en los cuales se visualizan los niveles jerárquicos en la pieza musical, lo que nos ayuda a analizar la estructura rítmica de ésta.

Describiendo detalladamente el método, primero se calcula el promedio sobre todas las frecuencias en cada valor temporal τ_l de la siguiente forma:

$$\vec{a}(\tau_l) = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} a(\tau_l, y_k),$$

donde P es el número total de frecuencias y_k .

Se denota el promedio de \vec{a} como:

$$A = \frac{1}{M+1} \sum_{l=0}^M \vec{a}(\tau_l),$$

por lo tanto, el tren de pulso $\{\mathcal{P}(\tau_l)\}$ queda definido por:

$$\mathcal{P}(\tau_l) = \mathbf{1}_{\{\tau_k: \vec{a}(\tau_k) > A\}}(\tau_l),$$

donde $\mathbf{1}$ es la función indicador. Como segundo paso, se grafican estos valores que describen al tren de pulso, sus intervalos de posición y duración (Fig. 1.7).

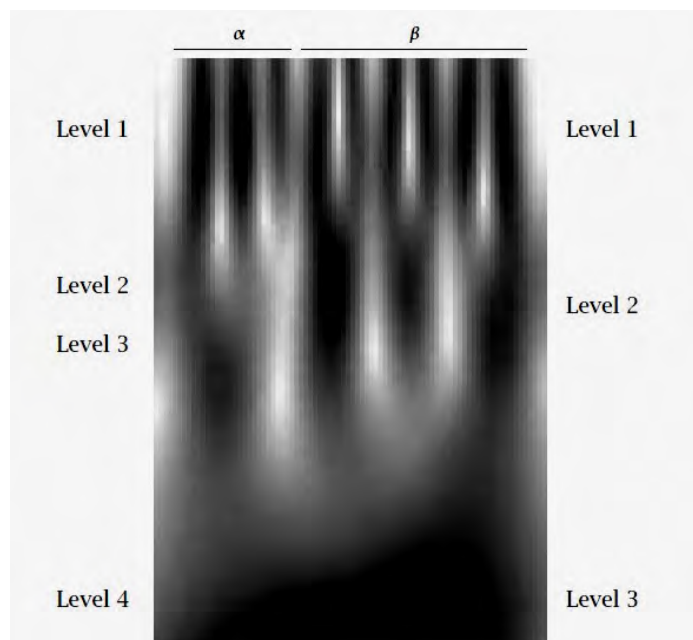


Fig. 1.7 Escalograma.

1.2.2.1 Jerarquía rítmica.

Para reflejar la jerarquía rítmica en la estructura de agrupamiento, los grupos se representan con ligaduras colocadas debajo de la notación musical, que indican los diferentes énfasis en el ritmo.



Fig. 1.8 Ligaduras.

Por lo tanto, todos los elementos o regiones en una jerarquía, excepto aquellos al principio o final de la estructura, están subordinados en una dirección y dominados en otra. Los elementos o regiones que están igualmente subordinadas en la jerarquía entera, pueden ser pensados como un nivel jerárquico particular. Un nivel particular, puede ser nombrado como una pequeña o larga escala dependiendo del tamaño de los elementos o regiones que lo constituyen.

En una organización estrictamente jerárquica, una región dominante contiene regiones subordinadas pero no puede superponerse parcialmente con dichas regiones.

Dos puntos generales están implícitos en la discusión de la organización jerárquica:

El primero, es concerniente a la relación entre grupos subordinados y grupos dominantes. Esta relación no difiere de nivel a nivel; es decir, no cambia en forma sustantiva en ningún nivel particular, sino que es esencialmente el mismo en todos los niveles de la estructura musical. Por ejemplo, nunca pasa que un tipo de superposición sea permitida en un nivel y no sea permitida en otro.

El segundo punto, se sigue de la condición de no sobreposición para estructuras jerárquicas: unidades no adyacentes no pueden ser agrupadas en ningún nivel particular del análisis.

En resumen, la estructura de agrupamiento es jerárquica en una moda no-sobrepuesta, es recursiva y cada grupo debe estar compuesto de elementos contiguos. Estas condiciones constituyen una fuerte hipótesis acerca de la naturaleza de la cognición musical con respecto al agrupamiento.

1.2.3 ESTRUCTURA MÉTRICA.

1.2.3.1 Tipos de acentos.

Es esencial distinguir tres tipos de acentos: fenomenológico, estructural y métrico.

El acento fenomenológico, se refiere a cualquier evento en la superficie musical que da énfasis o tensión a un momento en el flujo musical. En ésta categoría están incluidos los puntos de ataque, las tensiones locales (tales como el 'sforzandi'), cambios repentinos en la dinámica o en el timbre, notas largas, saltos a notas relativamente altas o bajas y cambios armónicos, entre otros.

El acento estructural es causado por puntos melódicos-armónicos de gravedad en una frase o sección, especialmente provocados por la cadencia que es la meta del movimiento tonal.

El acento métrico, es cualquier golpe que es relativamente fuerte en su contexto métrico.

Los tres están relacionados en diversas formas:

El acento fenomenológico funciona como entrada perceptual al acento métrico. Esto significa que los momentos de tensión musical en la señal cruda sirven como señales a partir de las cuales el escucha tentativamente extrapola un patrón regular de acentos métricos. Si existe una pequeña irregularidad en estas señales el sentido del acento métrico se vuelve atenuado o ambiguo. Si por otro lado, las señales son regulares, el sentido del acento métrico se vuelve definido y multinivelado.

Una vez que se ha establecido un patrón métrico claro, el escucha renuncia a él sólo si se encuentra con evidencia contradictoria. Es decir, la tarea cognitiva del escucha es embonar un patrón dado de acentuación fenomenológico, tanto como sea posible, a un patrón permisible de acentuación métrica. Donde los dos patrones divergen, o cuando se contradice la repetición regular de los acentos métricos, el resultado es una síncope, ambigüedad, o algún otro tipo de complejidad rítmica. La sincopación toma lugar cuando las señales son fuertemente contradictorias en la sucesión de tiempos fuertes y débiles dentro de un compás, o conjunto de compases, pero no lo suficientemente regulares para invalidar el patrón inferido.

El acento métrico es, entonces, una construcción mental inferida de los patrones de acentuación en la superficie musical, pero no idéntica a éstos. Antes de continuar se hace hincapié en que los principios de estructura de agrupamiento tienen un carácter universal por encima de la métrica. Más adelante, se comprenderá que la complejidad rítmica de la música tonal viene de la interacción de una organización métrica comparativamente simple con una estructura de agrupamiento y, sobre todo, de la interacción de ambas componentes con una estructura tonal rica.

1.2.3.2 Jerarquía Métrica.

Los elementos que conforman el patrón métrico se llaman golpes o '*beats*'. Cabe enfatizar que los *beats* no tienen duración, son idealizaciones utilizadas por el ejecutante e inferidas por el escucha de la señal musical. Sin embargo, ocurren en un tiempo. Entonces, un intervalo de tiempo, llamado lapso (*time-span*), tiene lugar entre *beats* sucesivos. En la analogía espacial, los lapsos corresponden a espacios entre puntos geométricos. Por lo tanto, los lapsos tienen duración, pero los *beats* no.

El término métrica, implica una medida para la música, así que su función es estructurar el flujo musical, en la medida en que sea posible, en lapsos iguales. Así, la estructura métrica es inherentemente periódica. Como primera aproximación, se dice que los *beats* deben estar igualmente espaciados.

También es fundamental la idea de que la métrica es una noción de alternancia periódica de *beats* fuertes y débiles, y por tanto, debe existir una jerarquía (dos o más niveles de *beats*). La relación entre *beat* fuerte y el nivel métrico es simplemente que, si un *beat* se siente fuerte en un nivel particular, es también un *beat* en el siguiente nivel.

Las normas en la música tonal proveen la cuadrícula métrica, en la cual, la periodicidad de los golpes es reforzado de nivel en nivel. Como el espaciamiento entre los *beats* tiene la misma longitud en cualquier nivel, es conveniente referirnos a un nivel dado por la longitud de lapsos.

Es interesante notar cómo las tres restricciones en la jerarquía de agrupamiento (no-sobreposición, adyacencia, y recursión) nos proporcionan un formalismo de la estructura métrica:

- El principio de no-superposición. Evita que los lapsos de *beat a beat* en un nivel se encimen en los lapsos de *beat a beat* en otro nivel.
- El principio de adyacencia, significa que los *beats* se relacionan sucesivamente en cualquier nivel métrico dado.
- El principio de recursión dice que los elementos de una estructura métrica son esencialmente los mismos que los encontrados en el nivel más pequeño.

Sin embargo, no todos los niveles de la estructura métrica se escuchan igual de prominentes. El escucha tiende primariamente a uno (o dos) nivel(es) intermedio(s), en el(los) cual(es), los *beats* pasan a una razón moderada de tiempo. En el renacimiento, se le conocía a esto con el término de *tactus*, y es el nivel en el que el escucha marca con el pie, el bailarín completa un cambio en el peso o el director mueve su batuta.

Las regularidades de la estructura métrica son más rigurosas en cada nivel. Conforme el escucha avanza de nivel, a partir del *tactus* en cualquier dirección, la agudeza de su percepción métrica falla gradualmente; correspondientemente una mayor libertad en la estructura métrica se vuelve posible sin romper su sentido de flujo musical.

Así, a niveles muy pequeños las distinciones métricas se vuelven académicas, mientras que a niveles mayores los patrones de acentuación fenomenológicos tienden a volverse menos distintivos. La estructura métrica se escucha en el contexto de la estructura de agrupamiento, la cual es raramente regular en tal nivel. Sin regularidad, el sentido métrico es muy débil. Por lo tanto, la estructura métrica es un fenómeno relativamente local.

1.2.4 INTERACCIÓN ENTRE AGRUPAMIENTO Y MÉTRICA.

La diferencia fundamental entre los elementos básicos del agrupamiento y la métrica es que la estructura de agrupamiento consiste en unidades organizadas jerárquicamente, mientras que la estructura métrica consiste en *beats* organizados jerárquicamente.

Se debe enfatizar que los grupos no reciben acento métrico, y los *beats* no poseen ningún agrupamiento inherente. Cada uno debe ser considerado independiente. Es decir, aunque interactúen, ninguno está implícito intrínsecamente en el otro. Están visual y formalmente separados.

Al interactuar, algunas características rítmicas fundamentales, tales como patrones de acentuación métrica en agrupamientos, aumentos y descensos, y aspectos de cadencias, emergen de forma natural. Ahora se generaliza su interacción en términos de la estructura de lapsos.

Los únicos lapsos que tienen relevancia en la estructura métrica percibida son los que se dibujan entre *beats* sucesivos en el mismo nivel métrico; estos lapsos reflejan la periodicidad inherente en la estructura métrica. La jerarquía de dichos lapsos se representa con corchetes, empezando en un *beat* dado y extendido hasta el siguiente (pero no lo incluye).

Si un grupo se extiende entre *beats* en el mismo nivel métrico, y si el primer *beat* es el más fuerte, entonces el lapso producido por el grupo coincide con el lapso métrico, es decir, están en fase. Si el grupo comienza en un *beat* más débil que el fuerte, se dice que están fuera de fase.

Agrupamiento y métrica pueden estar fuera de fase en varios grados. Para aclarar esto se define 'anacrusa' como el lapso desde el principio del grupo hasta el *beat* más fuerte del grupo. Si la anacrusa es corta, agrupamiento y métrica están levemente desfasados.

Los desfasamientos grandes son más difíciles de procesar para el escucha ya que los patrones recurrentes en los dos componentes conflictúan en vez de reforzarse. El grado de desfasamiento es muy importante en las características rítmicas.

A diferencia de la estructura métrica, la estructura tonal es una fuerte organización a nivel global de la estructura musical.

El lanzamiento de una sección, el regreso a una región tonal, o la articulación de una cadencia pueden tener reverberaciones a gran escala. Los eventos tonales

funcionando a tales niveles causan acentos estructurales debido a que son pilares de la organización tonal, son puntos de gravedad.

La relación entre los acentos estructurales con el agrupamiento está dispuesta por acentos estructurales que articulan las fronteras de los grupos a nivel de frases o a niveles más altos de agrupamientos.

Estos eventos forman un arco de movimiento tonal sobre la duración del grupo. Los acentos estructurales ocurren precisamente en los puntos de ataque del inicio estructural y de cadencia; el acento estructural también tiene lugar en el momento de la resolución.

1.3 Armonía Básica.

La armonía es el aspecto de la música consistente en hacer sonar tonos simultáneamente. Es una consecuencia del contrapunto, más no debe confundirse con éste, que se refiere a melodías o líneas melódicas sonadas al mismo tiempo. A pesar de que las cadenas musicales de Markov sugieren melodías, es conveniente que se conozca la conformación básica de la estructura armónica ya que ambos elementos son fundamentalmente inseparables. En términos de notación formal, la armonía es el elemento vertical de la textura musical y el contrapunto es el elemento horizontal.

Lo mismo que con otros aspectos de la música, los gustos en lo concerniente a la armonía han variado considerablemente, según el tiempo y el lugar, aunque se han hecho numerosos intentos para demostrar que el estilo armónico particular de la música occidental de los siglos XVIII y XIX es el que prescribe la naturaleza.

A continuación, se presentan algunos principios básicos de armonía que utilizados en la música contemporánea, vistos desde un punto de vista práctico, no dejando de lado la parte teórica-analítica del caso y que serán de gran utilidad para abordar lo referente a la composición y arreglos musicales. Se dice que es práctico por el hecho de querer manejar con relativa prisa lo que se cree será urgente para desarrollar el presente trabajo.

Se pone principal atención a la formación y aplicación de los acordes, sus funciones y utilidades más comunes, sin descartar su utilidad para trabajos de relativa complejidad, pudiendo utilizarse en la gran mayoría de géneros musicales.

Estos datos son parte del estudio de la armonía básica contemporánea, los cuales siempre están sujetos a constantes aportes, producto de la experimentación de aquellos músicos en busca de nuevos sonidos e ideas frescas.

1.3.1 CONCEPTOS BASICOS (PREVIOS)^[5].

En casi todas las piezas de la música occidental, no todas las doce frecuencias de sonido que conforman una octava se utilizan de igual manera. Un *modo* es un subconjunto particular de estas doce frecuencias, organizadas en secuencias. La secuencia de frecuencias ascendentes en un modo se llama una *escala* y forman la sustancia tonal básica de una composición. Puesto que el material tonal varía mucho en diferentes periodos, así como en diferentes culturas, existen numerosas escalas. Para poder hablar de ellas de manera generalizada es necesario definir los siguientes conceptos:

Semitono.

Es el intervalo más pequeño en la música tradicional occidental. Corresponde a la distancia entre dos frecuencias vecinas. Por ejemplo, C y C # tienen un semitono de separación, así como E y F.

Tono Entero.

En términos de intervalos, un tono entero es equivalente a dos veces el semitono. Ejemplo: C y D.

La escala básica de la música artística europea es la *escala diatónica*, que consiste en cinco tonos enteros y dos semitonos. Generalmente se le llama *modo mayor* en contraposición a la *escala menor pura*.

^[5] Don Michael Randel, op. cit.

Modo mayor.

Suponga que X_1 es la frecuencia fundamental inicial, la escala X_1 mayor es la sucesión $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$, con $i_{1,2} =$ tono entero, $i_{2,3} =$ tono entero, $i_{3,4} =$ semitono, $i_{4,5} =$ tono entero, $i_{5,6} =$ tono entero, $i_{6,7} =$ tono entero e $i_{7,8} =$ semitono. Donde $i_{a,b}$ es el intervalo entre las frecuencias X_a y X_b . Esta definición se ilustra en la Fig. 1.9.

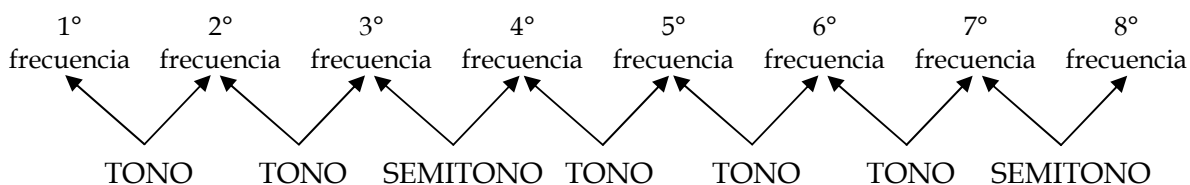


Fig. 1.9

Un ejemplo del modo mayor es la escala de C mayor (C, D, E, F, G, A, B, C'). Ubicándonos en el piano, esta escala corresponde a las teclas blancas.

Modo menor puro.

Hay tres variantes para el modo menor; sólo uno de ellos, el puro o natural, se examinarán aquí. Suponga que X_1 es la frecuencia inicial, la escala X_1 menor natural es la sucesión $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$, con $i_{1,2} =$ tono entero, $i_{2,3} =$ semitono, $i_{3,4} =$ tono entero, $i_{4,5} =$ tono entero, $i_{5,6} =$ semitono, $i_{6,7} =$ tono entero e $i_{7,8} =$ tono entero. Donde $i_{a,b}$ es el intervalo entre las frecuencias X_a y X_b . Por ejemplo, la escala A menor natural es la secuencia (A, B, C, D, E, F, G, A').

Como se puede observar, las escalas C mayor y A menor natural contienen las mismas frecuencias, la diferencia entre ellas es el orden de aparición. Se debe tener en cuenta que las escalas se pueden iniciar en cualquiera de las doce frecuencias.

Pentagrama.

Conjunto de líneas horizontales equidistantes, actualmente compuesto por cinco, entre y sobre las cuales se escriben las notas musicales, indicando su frecuencia por su posición (en conexión con una *clave*). Puesto que las líneas y los espacios del pentagrama representan la escala diatónica, equivalente a las teclas blancas del piano, deben emplearse *accidentes* y/o *armaduras* de la clave para indicar la escala cromática, es decir, incluir sostenidos y bemoles (teclas negras). La invención del pentagrama se atribuye a Guido d'Arezzo.

Clave.

Signo escrito al comienzo del pentagrama para indicar la tonalidad; es decir, establecer el nombre de los sonidos representados dentro y fuera de este.

Tipos de clave.

Se emplean diferentes tipos de signos, los cuales representan, respectivamente, las frecuencias sol, do y fa, por lo que las claves reciben sus nombres. La clave de Sol, llamada también de agudos, o clave de violín, se emplea en segunda línea del pentagrama; indica que la nota en la segunda línea es sol. La clave de Fa, llamada también clave de bajo, se emplea en la cuarta línea e indica que la nota escrita en esa línea es fa. La clave de Do se usa en dos posiciones, en la tercera línea (clave de contralto, o clave de viola) o en cuarta línea (clave de tenor) Fig. 1.10.

La clave de Sol se emplea en el pentagrama superior de la música de piano (mano derecha) y en todos los instrumentos altos (violín, flauta).

La clave de Fa se emplea en el pentagrama inferior de la música de piano (mano izquierda) y para instrumentos bajos (cello, contrabajo).

La clave de Do, cuando está en la tercera línea, se emplea para la viola e instrumentos de extensión semejante y cuando se encuentra escrita en la cuarta línea para el registro alto del cello, el fagot, el trombón tenor, entre otros.

The image displays four musical staves, each with a different clef and a sequence of notes corresponding to solfège syllables. The notes are written as quarter notes on a five-line staff.

- Clave de Sol:** Treble clef. Notes: Do (1st line), Re (2nd line), Mi (3rd line), Fa (4th line), Sol (5th line), La (1st space), Si (2nd space), Do (3rd space), Re (4th space), Mi (5th space), Fa (6th space), Sol (7th space).
- Clave de Fa (4ª línea):** Bass clef. Notes: Mi (4th line), Fa (5th line), Sol (1st space), La (2nd space), Si (3rd space), Do (4th space), Re (5th space), Mi (6th space), Fa (7th space), Sol (8th space), La (9th space), Si (10th space).
- Clave de Do (4ª línea):** Bass clef. Notes: Si (4th line), Do (5th line), Re (1st space), Mi (2nd space), Fa (3rd space), Sol (4th space), La (5th space), Si (6th space), Do (7th space), Re (8th space), Mi (9th space), Fa (10th space).
- Clave de Do (3ª línea):** Bass clef. Notes: Re (3rd line), Mi (4th line), Fa (5th line), Sol (1st space), La (2nd space), Si (3rd space), Do (4th space), Re (5th space), Mi (6th space), Fa (7th space), Sol (8th space), La (9th space).

Fig. 1.10

Modulación.

Es el cambio de clave dentro de una composición. La modulación se efectúa frecuentemente por medio de un acorde pivote o común a la clave inicial y a la clave nueva. Es un fenómeno de tonalidad que depende de la existencia de un conjunto de centros tonales claramente definidos.

Accidentes (Alteraciones).

Signos empleados en la notación musical para indicar alteraciones cromáticas, o para cancelarlas. Las alteraciones válidas para la composición completa se encuentran en la *armadura* de la clave, en tanto que el término *accidentes* se refiere concretamente a las alteraciones introducidas para notas únicas. Los signos de alteración cromática se presentan en la Fig. 1.11.

NOMBRE	SIGNO
Sostenido	#
Bemol	b
Doble sostenido	×
Doble bemol	bb
Becadro	q

Fig. 1.11

El sostenido eleva la tonalidad un semitono, el bemol la baja un semitono, el doble sostenido y el doble bemol, la elevan y bajan, respectivamente, un tono entero. El becuadro se emplea para cancelar, en parte o completamente, un signo anterior.

Armadura.

Es el conjunto de sostenidos o bemoles escritos junto a la clave al comienzo de cada pentagrama para indicar la tonalidad de la composición.

Intervalos.

Como se ha dicho antes, un intervalo es la distancia entre dos frecuencias. Toma su nombre del número de tonos o semitonos que se encuentran separando ambas frecuencias. Se denominan intervalos simples a todos los sonidos de diferente frecuencia que se encuentran dentro de una misma octava, mientras que intervalos compuestos son los sonidos que se encuentran fuera de la octava con relación a la frecuencia base. También se debe saber que se llaman intervalos armónicos a dos sonidos ejecutados simultáneamente, e intervalos melódicos a dos sonidos ejecutados de manera consecutiva. Cabe mencionar también que la distancia entre dos sonidos de igual frecuencia (sonido idéntico) se denomina Unísono.

1.3.2 INTERVALOS SIMPLES.

NOMBRE	DISTANCIA	EJEMPLO	SÍMBOLO
Primera Aumentada* o Segunda Menor/Bemol	Un semitono	De C a C [#] (D ^b)	1# 2m/2b
Segunda Mayor	Un tono	De C a D	2M
Tercera Menor o Segunda Aumentada*	Un tono y medio	De C a D [#] (E ^b)	3m 2#
Tercera Mayor	Dos tonos	De C a E	3M
Cuarta Justa	Dos tonos y medio	De C a F	4J
Cuarta Aumentada o Quinta Disminuida/Bemol	Tres tonos	De C a F [#] (G ^b)	4# 5o/5b
Quinta Justa	Tres tonos y medio	De C a G	5J
Quinta Aumentada o Sexta Menor/Bemol	Cuatro tonos	De C a G [#] (A ^b)	5# 6m/6b
Sexta Mayor o Séptima Disminuida/doble Bemol*	Cuatro tonos y medio	De C a A/Bbb*	6M 7o /7bb
Séptima Menor/Bemol	Cinco tonos	De C a B ^b	7m/7b
Séptima Mayor	Cinco tonos y medio	De c a B	7M
Octava Justa	Seis tonos	De C a C ⁸	8J

Fig. 1.12

1.3.3 ACORDES.

Un acorde es el producto de la ejecución de diferentes sonidos de manera simultánea, agrupados de tal forma que puedan sonar agradables a nuestro oído. La base de esta agrupación son las triadas, pequeñas agrupaciones de tres notas distintas, que reciben su nombre según lo especifique la tabla siguiente:

1.3.3.1 TRIADAS TRADICIONALES

Son las triadas que se conocen comúnmente y que forman parte de los acordes mas conocidos en la música occidental.

NOMBRE	FORMACIÓN	NOMENCLATURA	EJEMPLO
Triada Mayor	Tónica, Tercera Mayor y Quinta Justa	maj, M	Cmaj/CM (do, mi, sol)
Triada Menor	Tónica, Tercera Menor y Quinta Justa	M	Cm (di, mi ^b , sol)
Triada Aumentada	Tónica, Tercera Mayor y Quinta Aumentada	+, aug	C+/Caug (do, mi, sol [#])
Triada Disminuida	Tónica, Tercera Menor y Quinta Bemol	o, dim	Co/Cdim (do, mi ^b , sol ^b)
Triada Suspendida	Tónica, Cuarta Justa y Quinta Justa	sus, sus4	Csus/Csus4 (do, fa, sol)

Fig. 1.13

1.3.3.2 TRIADAS CONTEMPORANEAS.

Son las triadas que dan origen a acordes relativamente complejos, y que se utilizan en la actualidad; pero que no son muy populares por ser poco difundidas.

NOMBRE	FORMACIÓN	NOMENCLATURA	EJEMPLO
Triada Mayor con Quinta Bemol	Tónica, Tercera Mayor y Quinta Bemol	M(5 ^b)	CM(5 ^b) (do, mi sol ^b)
Triada Menor con Quinta Aumentada	Tónica, Tercera Menor y Quinta Aumentada	m(5 [#])	Cm(5 [#]) (do, mi ^b , sol [#])

Fig. 1.14

1.3.4 TONALIDADES MAYORES Y MENORES DE ACUERDO AL CÍRCULO DE QUINTAS.

Todas las tonalidades estarán sujetas a lo que establezca el círculo de quintas, que es un arreglo circular, en dirección de las manecillas del reloj, de las claves en orden de quintas ascendentes. Este ciclo muestra que después de doce pasos se llega nuevamente a la clave inicial. En este orden cada clave sucesiva aumenta en uno el número de sostenidos en la armadura. Si se ve el círculo en dirección contraria, es decir, en orden de quintas descendentes, las claves se siguen unas a otras con un bemol más en la armadura. En un punto del círculo, debe hacerse la transición de las claves de sostenidos a las claves de bemoles. Por ejemplo, $F\#m = Sol^b m$ (cambio enarmónico[*]). Por lo tanto, a través del círculo de quintas se establece en que tonalidad mayor o menor se encuentra el tema a ejecutarse. En la siguiente tabla se muestran las alteraciones que contiene cada tonalidad.

TONALIDAD MAYOR	CANTIDAD DE ALTERACIONES	NOTAS ALTERADAS	ESCALA RELATIVA MENOR
CM	Ninguna	---	Am
GM	Un sostenido	F [#]	Em
DM	Dos sostenidos	F [#] , C [#]	Bm
AM	Tres sostenidos	F [#] , C [#] , G [#]	F [#] m
EM	Cuatro sostenidos	F [#] , C [#] , G [#] , D [#]	C [#] m
BM	Cinco sostenidos	F [#] , C [#] , G [#] , D [#] , A [#]	G [#] m
F [#] M	Seis sostenidos	F [#] , C [#] , G [#] , D [#] , A [#] , E [#]	D [#] m
C [#] M	Siete sostenidos	F [#] , C [#] , G [#] , D [#] , A [#] , E [#] , B [#]	A [#] m
FM	Un bemol	B ^b	Dm
B ^b M	Dos bemoles	B ^b , E ^b	Gm
E ^b M	Tres bemoles	B ^b , E ^b , A ^b	Cm
A ^b M	Cuatro bemoles	B ^b , E ^b , A ^b , D ^b	Fm
D ^b M	Cinco bemoles	B ^b , E ^b , A ^b , D ^b , G ^b	B ^b m
G ^b M	Seis bemoles	B ^b , E ^b , A ^b , D ^b , G ^b , C ^b	E ^b m
C ^b M	Siete bemoles	B ^b , E ^b , A ^b , D ^b , G ^b , C ^b , F ^b	A ^b m

Fig. 1.15

[*] tonos que realmente son uno solo y del mismo grado, pero que se nombran de manera diferente.

CAPÍTULO 2.

Una vez establecidos ciertos parámetros, los eventos musicales pueden ser clasificados dentro de un número finito, o contable de categorías que ocurren en una secuencia temporal. Una pregunta natural es ¿cuándo la transición entre diferentes categorías puede ser caracterizada por probabilidades?

La teoría de la probabilidad ha constituido una pieza clave en el desarrollo matemático del siglo XX, buscando modelar fenómenos aleatorios que evolucionan con el tiempo. A lo largo del segundo capítulo se aborda, de manera formal, la teoría de cadenas de Markov y resultados acerca de redes neuronales, con el objetivo de establecer las bases científicas de un modelo algorítmico exitoso capaz de realizar una composición musical.

Las cadenas de Markov son modelos de procesos estocásticos (procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria) en tiempo discreto en los que el futuro y el pasado dependen sólo del presente. Por otro lado, las redes neuronales permanecen como una de las formas más populares y efectivas de construir sistemas de aprendizaje. Entonces, no es sorprendente que estos modelos sean también muy útiles para analizar y manipular señales musicales. Sin embargo, estos temas no son triviales, se requiere cierta madurez matemática para su estudio. En este capítulo, se presenta un panorama general de ellos, tratando de hacerlos accesibles a cualquier persona sin perder rigurosidad en cada uno de los resultados.

2.1 Cadenas de MARKOV.

2.1.1 NOCIONES PRELIMINARES.

Espacio de Probabilidad^[6]:

A lo largo de este texto se trabaja con el *espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ en donde Ω es finito o numerable y la familia de subconjuntos \mathfrak{F} es la potencia de Ω ; es decir, se trata de la familia de todos los subconjuntos de Ω . A los elementos de esta familia se les llama eventos. En estos espacios, la medida usual de probabilidad \mathbb{P} definida en \mathfrak{F} se da simplemente mediante una serie de números

$(a_w \in (0, 1])_{w \in \Omega}$ tal que $\sum_{w \in \Omega} a_w = 1$,

que determinan el valor de \mathbb{P} en todo \mathfrak{F} con la regla:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} a_w.$$

Vector de probabilidad:

Un vector $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, se llama vector de probabilidad ssi:

i) $\mu_i \geq 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n$.

ii) $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$.

Ejemplos:

$\vec{\mu} = (3, 1, 5, \frac{3}{4})$, no es un vector de probabilidad pues $\sum_{i=1}^n \mu_i > 1$.

$\vec{\mu} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{2})$, es un vector de probabilidad.

$\vec{\mu} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, no es un vector de probabilidad pues $\mu_2 < 0$.

[6] María Emilia Caballero, et. al., *Cadenas de Markov. Un enfoque elemental*, Sociedad Matemática Mexicana, Textos nivel medio, núm. 29, México, 2004, pp. 107.

OBSERVACIÓN.

Sea $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector de probabilidad,

$$\Rightarrow \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = \mathbf{1}$$

$$\therefore \mu_n = \mathbf{1} - \mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_{n-1},$$

de modo que el vector se puede escribir:

$$\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mathbf{1} - \mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_{n-1}).$$

En particular, un vector de probabilidad de 2 componentes se puede representar de la forma:

$$(x, \mathbf{1} - x)$$

y uno de 3 componentes:

$$(x, y, \mathbf{1} - x - y).$$

Matriz estocástica:

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es estocástica, si cada una de sus filas es un vector de probabilidad; es decir, si cada elemento de A es no negativo y la suma de los elementos de cada fila es 1.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \mathbf{0} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ no es una matriz estocástica pues } a_{22} < \mathbf{0}.$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ no es una matriz estocástica pues } a_{21} + a_{22} > \mathbf{1}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ es una matriz estocástica.}$$

TEOREMA 1

Si A y B son matrices estocásticas entonces:

- i) AB es una matriz estocástica.
- ii) A^n es una matriz estocástica $\forall n, n \in \mathbb{N}$.

DEM

i) Por demostrar que $C = AB$ es una matriz estocástica.

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \therefore C = \left(c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j} \right)$$

Como A y B son matrices estocásticas se sabe que todas sus entradas son no negativas; por lo tanto, c_{ij} es no negativo para todo i, j . Basta demostrar entonces que la suma de las entradas de cada fila es uno.

$$\sum_j c_{i,j} = \sum_j \sum_k a_{i,k} b_{k,j} = \sum_k \sum_j a_{i,k} b_{k,j} = \sum_k a_{i,k} \left(\sum_j b_{k,j} \right) = (\mathbf{1})(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

ii) Esta demostración resulta obvia si se hace inducción sobre n .

Para $n = 1$ se sabe que A es estocástica por hipótesis. Se supone válido para $n = m$. Por demostrar que A^{m+1} es estocástica; sin embargo, es inmediato por el inciso anterior si se elige $B = A^m$.

■

Matriz estocástica regular:

Una matriz estocástica A es regular, si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que A^n es una matriz con todas sus componentes estrictamente positivas.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \therefore A \text{ es regular, pues } \exists n = 2.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}; A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$\text{en general } A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2^{n-1}}{2^n} & \frac{1}{2^n} \end{bmatrix} \therefore \nexists n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \text{ no es regular.}$$

Punto Fijo (vector invariante):

Un vector fila no nulo $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n)$ es un punto fijo de una matriz cuadrada A , si $\vec{\mu}$ permanece invariante cuando se multiplica por A ; es decir,

$$\vec{\mu}[A] = \vec{\mu}.$$

Ejemplo:

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{\mu} = (2, -1)$$

$$\Rightarrow \vec{\mu}[A] = (2, -1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (2, -1) \therefore \vec{\mu} \text{ es un punto fijo de } A.$$

TEOREMA 2.

Si $\vec{\mu}$ es un punto fijo de una matriz A , entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \lambda \vec{\mu}$ es también un punto fijo de A .

DEM

Por hipótesis $\vec{\mu}[A] = \vec{\mu}$.

Sea $\vec{v} = \lambda \vec{\mu}$. Por demostrar que $\vec{v}[A] = \vec{v}$.

$$\vec{v}[A] = (\lambda\vec{\mu})[A] = (\lambda)(\vec{\mu}[A]) = (\lambda)(\vec{\mu}) = \vec{v}$$

■

2.1.2 DEFINICIÓN GENERAL^[7].

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y S un conjunto no vacío, finito o numerable. Una sucesión de variables aleatorias

$$\{X_n: \Omega \rightarrow S, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

es llamada cadena de Markov con espacio de estados S , si para todo $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ y toda sucesión $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, i, j \in S$ se cumple

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \quad (2.1)$$

La condición (2.1) significa que el futuro desarrollo del proceso, dado el pasado, depende solamente del valor más reciente.

Frecuentemente S es un subconjunto de los números enteros. En estos casos S es un conjunto ordenado.

La distribución de una variable aleatoria discreta $X: \Omega \rightarrow S$ es $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in S}$. La distribución se considera como un vector de dimensión igual a la cardinalidad de S , puesto que S es finito o numerable.

Si para cualquiera $i, j \in S$, la probabilidad condicional $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ no depende en el tiempo n , se dice que la cadena de Markov es homogénea. Para una cadena de Markov homogénea se denota a $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ simplemente como $p_{i,j}$ que es la probabilidad de que j ocurra inmediatamente después de la ocurrencia de i .

Para $m \geq 1$ se denota por $p_{i,j}^{(m)}$ a $\mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$ y significa la probabilidad de ir en m pasos, o unidades de tiempo, de i a j . Se llama *probabilidad de transición en m pasos*.

^[7] María Emilia Caballero, op. cit., pp. 7-9.

Para $i, j \in \mathcal{S}$ se define a $p_{i,j}^{(0)}$ como $\delta_{i,j}$, donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker; es decir, vale 1 si $i = j$ y vale 0 si $i \neq j$.

La distribución de un proceso estocástico se genera a través de las distribuciones finito-dimensionales. Para una cadena de Markov homogénea X_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), la distribución (finito-dimensional) de probabilidad se calcula a partir de la distribución inicial:

$$\pi_i = \mathbb{P}(X_0 = i) \quad (2.2)$$

y las probabilidades de transición:

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) \quad i, j = 1, 2, \dots, |\mathcal{S}|, \quad (2.3)$$

donde $|\mathcal{S}| = n \leq \infty$, es el número de elementos en el espacio de resultados \mathcal{S} . Sin pérdida de generalidad, se puede suponer $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, n\}$ ^[8].

La familia $\{\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i); n \in \mathbb{N}, i, j \in \mathcal{S}\}$, llamada familia de probabilidades de transición, describe la evolución de la cadena en el tiempo. Estas probabilidades pueden ser organizadas de manera adecuada para formar la matriz de probabilidades de transición. Note que el vector $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)^t$ y la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov

$$P = (p_{i,j}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix}$$

tiene las siguientes propiedades:

$$0 \leq \pi_i, p_{i,j} \leq 1,$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$$

^[8] Jan Beran, *Statistics in musicology*, Chapman & Hall/CRC, U.S.A., 2004, pp. 170.

y

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j} = \mathbf{1},$$

i.e., $\vec{\pi}$ es un vector de probabilidad y \mathbf{P} es una matriz estocástica.

En efecto, sea $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \mathbb{P}_{\mathbf{x}}(X_{n+1} \in \mathcal{S}) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in \mathcal{S} | X_n = \mathbf{x}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in \mathcal{S}} \{X_{n+1} = y\} | X_n = \mathbf{x}\right) = \sum_{y \in \mathcal{S}} p_{\mathbf{x},y}. \end{aligned}$$

Ejemplos:

1. Una persona puede elegir entre desayunar ‘huevos al gusto’ o ‘fruta y cereal’ cada día. Suponga que la persona nunca desayuna huevos dos días seguidos, pero si fruta y cereal. Entonces, al día siguiente puede desayunar futa o huevos revueltos.

El espacio de estados del sistema es:

$$\{\mathbf{1} = \text{huevos al gusto}, \mathbf{2} = \text{fruta y cereal}\}$$

Este proceso es una cadena de Markov, puesto que el resultado de cada día sólo depende de lo que ha sucedido el día anterior.

La matriz de Transición de esta cadena de Markov es:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{bmatrix}.$$

2. Un compositor debe diseñar una melodía para su obra maestra “La Trinidad”. Con el objetivo de lograr una completa sincronización entre todos los elementos de su pieza, desea que su composición sólo contenga las tres notas que él considera más importantes en la tonalidad de Re mayor: Re, Fa# y La. Notas que, apoyándonos en el material presentado en el capítulo anterior, corresponden a los intervalos: Unísono, tercera mayor y

quinta justa. Suponga que el compositor desea además que las notas tengan la siguiente distribución:

- Siempre que haya elegido unísono, su siguiente elección puede ser cualquier intervalo, incluso repetir unísono.
- Si el intervalo elegido es tercera mayor, nunca regresará al unísono.
- Después de una quinta justa, siempre elegirá quinta justa.

El espacio de estados del sistema es:

$$\{1 = \text{Unísono}, 2 = \text{Tercera Mayor}, 3 = \text{Quinta Justa}\}$$

Este proceso es una cadena de Markov, puesto que cada intervalo sólo depende de lo que ha sucedido en la elección anterior.

La matriz de Transición de esta cadena de Markov es:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.3 DEFINICIONES Y PRIMEROS RESULTADOS^{[9][10]}.

PROPOSICIÓN.

Las probabilidades de los eventos pueden ser obtenidas por la multiplicación de matrices, dado

$$p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = \sum_{j_1, \dots, j_{n-1}=1}^m p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \dots p_{j_{n-1},j} = [P^n]_{i,j} \quad (2.4)$$

y

^[9] Jan Beran, op. cit., pp. 170-173.

^[10] María Emilia Caballero, op. cit., pp. 19-24.

$$\mathbf{p}_j^{(n)} = \mathbb{P}(X_{t+n} = j) = [\boldsymbol{\pi}^t \mathbf{P}^n]_j. \quad (5)$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}.$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^2.$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(2)} \mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)} \mathbf{P}^2 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^3.$$

$$\mathbf{p}^{(4)} = \mathbf{p}^{(3)} \mathbf{P} = \mathbf{p}^{(2)} \mathbf{P}^2 = \mathbf{p}^{(1)} \mathbf{P}^3 = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^4.$$

⋮

↓

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n-1)} \mathbf{P} = \mathbf{p}^{(n-2)} \mathbf{P}^2 = \mathbf{p}^{(n-3)} \mathbf{P}^3 = \dots = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}^n.$$

Ejemplo:

Considere la cadena de Markov del ejemplo del desayuno, cuya matriz de Transición es $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y el espacio de estados del sistema es

{ $\mathbf{1}$ = huevos al gusto, $\mathbf{2}$ = fruta y cereal}, entonces:

PRIMER CASO:

Si $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$, es decir, desayunó huevos al gusto, entonces, los pasos siguientes son:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \vec{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{P} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}), \text{ es decir, desayuna fruta y cereal.}$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} \mathbf{P} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ o bien,}$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \vec{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{P}^2 = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(2)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \text{ o bien,}$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P}^2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \vec{\pi}\mathbf{P}^3 = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

\therefore si $\vec{\pi} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$, la probabilidad de que al tercer día (paso 3) desayune huevos al gusto es de $\frac{1}{4}$ (25%) y la probabilidad de que desayune fruta y cereal es de $\frac{3}{4}$ (75%).

SEGUNDO CASO:

Si $\vec{\pi} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, es decir, desayunó fruta y cereal, entonces, los pasos siguientes son:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \vec{\pi}\mathbf{P} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ es decir, desayuna huevos al gusto}$$

o fruta y cereal.

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \text{ o bien,}$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \vec{\pi}\mathbf{P}^2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(2)}\mathbf{P} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \text{ o bien,}$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right),$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \vec{\pi} \mathbf{P}^3 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right),$$

\therefore si $\vec{\pi} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, la probabilidad de que al tercer día (paso 3) desayune huevos al gusto es de $\frac{3}{8}$ (37.5%) y la probabilidad de que desayune fruta y cereal es de $\frac{5}{8}$ (62.5%).

Suponga ahora que el primer día lanzó un dado de seis caras y desayuna fruta y cereal si y sólo si aparece un seis. En este caso, la distribución inicial será:

$$\vec{\pi} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right),$$

\therefore la distribución de probabilidad después de cuatro días será:

$\mathbf{p}^{(4)} = \vec{\pi} \mathbf{P}^4 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right) \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} = \left(\frac{35}{96}, \frac{61}{96} \right)$, es decir, desayunará huevos al gusto con una probabilidad de 36.5% y fruta y cereal con una probabilidad de 63.5%.

Después de siete días será:

$$\mathbf{p}^{(7)} = \vec{\pi} \mathbf{P}^7 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right) \begin{bmatrix} \frac{21}{64} & \frac{43}{64} \\ \frac{43}{128} & \frac{85}{128} \\ \frac{43}{128} & \frac{85}{128} \end{bmatrix} = \left(\frac{253}{768}, \frac{515}{768} \right) = (32.94\%, 67.06\%).$$

2.1.3.1 CLASIFICACIÓN DE ESTADOS Y TIEMPOS DE ENTRADA.

2.1.3.1.1 Definición. EL PRIMER TIEMPO DE ENTRADA.

Considere la probabilidad de que la primera visita al estado j ocurra al tiempo n , dado que el proceso comenzó en el estado i ,

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i). \quad (2.6)$$

$f_{ij}^{(n)}$ se define como $f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j = n \mid X_0 = i)$, donde

$$T_j = \inf_{n \geq 1} \{n: X_n = j\}$$

es el primer tiempo cuando el proceso alcance el estado j . Se hace énfasis en “primer” porque se puede definir el enésimo tiempo de entrada; sin embargo, no se profundizará en ello. La probabilidad condicional de que el proceso alguna vez visite el estado j puede ser escrita como

$$f_{ij} = \mathbb{P}(T_j < \infty | X_0 = i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = j\} | X_0 = i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_j = n\} | X_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}. \quad (2.7)$$

2.1.3.1.2 Definición. ESTADO RECURRENTE, TRANSITORIO, ABSORBENTE.

En una cadena de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados S , matriz de transición $(P_{x,y})_{x,y \in S}$ y para $i, j \in S$, se dice que:

- De i **se accede a j** si existe $n \geq 0$ tal que $p_{i,j}^{(n)} > 0$ y se denota por $(i \rightarrow j)$.
- i y j **se comunican entre sí**, si ocurre que $(i \rightarrow j)$ y $(j \rightarrow i)$. Se denota por $(i \leftrightarrow j)$.
- Un estado $i \in S$ es **estado recurrente** si

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = i) \equiv 1 \quad (f_{ii} = 1).$$

- Un estado $i \in S$ es **estado transitorio** si

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = i) < 1 \quad (f_{ii} < 1).$$

- Un estado $i \in S$ es **estado absorbente** si $p_{i,i} \equiv 1$.

Observe que en el caso en que $i \in S$ sea un **estado transitorio** se tiene

$$\mathbb{P}(X_n \neq i \text{ para todo } n \geq 1 | X_0 = i) > 0,$$

Es decir, la probabilidad de nunca regresar al estado i es estrictamente positiva. En el caso de que $i \in S$ es **estado absorbente**, una vez que se llega a él, ya no se sale nunca.

Recurrencia significa que se regresa al mismo estado con certeza. Para estados transitorios puede ocurrir con probabilidad positiva, que nunca se regrese al mismo lugar. Como resultado, una probabilidad positiva de nunca regresar, implica que hay un ‘punto de no retorno’; es decir, un punto en el tiempo después del cual uno nunca regresa. Esto puede ser visto como sigue. Condicionalmente en $X_0 = i$, la probabilidad de que el estado j sea alcanzado al menos $k + 1$ veces es

igual a $f_{ij}f_{jj}^k$. Así, cuando $k \rightarrow \infty$, se obtiene la probabilidad regresar un número infinito de veces.

$$q_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \text{ un número infinito de veces} \mid X_0 = i) = f_{ij} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{jj}^k, \quad (2.8)$$

esto implica:

$$q_{ij} = 0 \text{ para } f_{jj} < 1 \text{ y}$$

$$q_{ij} = 1 \text{ para } f_{jj} = 1.$$

2.1.3.2 Definición. CADENAS IRREDUCIBLES.

Una cadena de Markov es llamada irreducible, si cualquiera de las siguientes condiciones (equivalentes entre sí) se cumple:

- Desde cualquier estado de S se puede acceder a cualquier otro.
- Todos los estados se comunican entre sí.
- Para cada $i, j \in S$, $p_{ij}^{(n)} > 0$ para alguna n .

En otras palabras, si la cadena es irreducible, donde quiera que se empiece, cualquier estado j puede ser alcanzado dado algún tiempo con probabilidad positiva. Esto excluye la posibilidad de ser atrapado por tiempo indefinido en cierto subconjunto de S .

2.1.3.3 Definición. DISTRIBUCIÓN ESTACIONARIA.

Una distribución π es llamada estacionaria si

$$\sum_{i=1}^k \pi_i p_{i,j} = \pi_j; \quad (2.9)$$

o en forma matricial,

$$\pi^t P = \pi. \quad (2.10)$$

Esto significa que si se empieza con la distribución π , entonces la distribución de todas las X_t subsecuentes es de nuevo π .

2.1.3.4 Definición. PERIODO.

Un estado $j \in S$ se dice que tiene un periodo τ , si

$$p_{jj}^{(n)} > 0$$

implica que n es un múltiplo de τ .

Para una cadena de Markov irreducible, todos los estados poseen el mismo periodo. Así, la siguiente definición es significativa:

2.1.3.4.1 Definición. CADENAS PERIÓDICAS Y APERIÓDICAS.

Una cadena de Markov irreducible es llamada periódica si $\tau > 1$, y es llamada aperiódica si $\tau = 1$.

2.1.4 CADENAS ESPECIALES^[11].

Para esta sección el espacio de estados será finito.

2.1.4.1 Definición. CADENAS REGULARES.

Una cadena de Markov se llama *regular* si su matriz de transición \mathbf{P} es una matriz estocástica regular; es decir, si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que \mathbf{P}^n es una matriz con todas sus componentes estrictamente positivas.

TEOREMA 3.

Sea \mathbf{P} la matriz de transición correspondiente a una cadena de Markov regular $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados S finito. Se cumplen las siguientes propiedades:

Si n tiende a ∞ , las potencias \mathbf{P}^n se aproximan a una matriz $\mathbf{W}^{[*]}$ tal que todos sus renglones son iguales a un mismo vector \mathbf{w} de probabilidad con componente estrictamente positivas.

[11] María Emilia Caballero, op. cit., pp. 33-37.

[*] Esto quiere decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{x,y}^n - w_{x,y}| = 0$ para todo $x, y \in S$ y donde $\mathbf{W} = (w_{x,y})_{x,y \in S}$.

El vector \mathbf{w} resulta ser vector de probabilidad invariante para la cadena y cualquier otro vector \mathbf{v} tal que $\mathbf{vP} = \mathbf{v}$, es un escalar multiplicado por \mathbf{w} .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = w_x, \quad x \in \mathcal{S}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_y(X_n = x) = w_x, \quad x, y \in \mathcal{S};$$

donde w_x es la x -ésima componente de \mathbf{w} .

Primero se verá un resultado de tipo geométrico que nos será de gran utilidad para demostrar el teorema 3.

LEMA 1.

Sea $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_{x,y} : x, y \in \mathcal{S})$ una matriz de transición tal que

$$d = \min(\mathbf{P}_{x,y} : x, y \in \mathcal{S}) > 0.$$

Dado un vector columna \mathbf{y} de dimensión r (r es la cardinalidad de \mathcal{S}), con todas sus componentes no negativas, si \mathbf{M}_0 y \mathbf{m}_0 respectivamente denotan al máximo y al mínimo de las componentes de \mathbf{y} , \mathbf{M}_1 y \mathbf{m}_1 a los correspondientes máximo y mínimo de $\mathbf{P}\mathbf{y}$, entonces

$$\mathbf{M}_1 - \mathbf{m}_1 \leq (1 - 2d)(\mathbf{M}_0 - \mathbf{m}_0)$$

y además

$$\mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_1 \leq \mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}_0.$$

OBSERVACIÓN: Se define el rango de un vector $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^r$ como $\mathfrak{R}(\vec{y}) = \max\{y_i : i = 1, 2, \dots, r\} - \min\{y_i : i = 1, 2, \dots, r\}$ y lo que dice el lema es que si \mathbf{P} es una matriz regular, entonces

$$\mathfrak{R}(\mathbf{P}\vec{y}) \leq (1 - 2d)\mathfrak{R}(\vec{y}),$$

Es decir, que \mathbf{P} es una contracción del rango, \mathbf{P} tiene el efecto de acercar a las componentes de \vec{y} entre sí.

DEM (LEMA 1)

Se supone que $r > 1$ y $m_0 < M_0$, porque en caso contrario el resultado es trivial. Las componentes de $P_{\vec{y}}$ son una especie de promedios (con peso) de las componentes de \vec{y} . Se ve que una cota superior para las componentes de $\{P_{\vec{y}} : \vec{y} \in \mathbb{R}^r\}$ se obtiene a partir del vector \vec{y}_0 cuyas componentes son todas menos una iguales a M_0 y la restante igual a m_0 . Además la componente donde aparece m_0 tiene por coordenada a la columna donde aparece el mínimo $d > 0$. Dicha cota superior será

$$dm_0 + (1 - d)M_0.$$

Análogamente, se ve que el menor valor posible es

$$dM_0 + (1 - d)m_0.$$

Entonces

$$M_1 \leq dm_0 + (1 - d)M_0$$

y

$$m_1 \geq dM_0 + (1 - d)m_0,$$

por lo que

$$M_1 - m_1 \leq (dm_0 + (1 - d)M_0) - (dM_0 + (1 - d)m_0) = (1 - 2d)(M_0 - m_0)$$

y

$$m_0 \leq (dM_0 + (1 - d)m_0) \leq m_1 \leq M_1 \leq (dm_0 + (1 - d)M_0) \leq M_0.$$

■

DEM (TEOREMA 3)

Se hará primero en el caso de que P tenga entradas estrictamente positivas. Sea \vec{y} un vector columna de $r > 1$ componentes y sean M_n, m_n el máximo y el mínimo de las componentes de $P^n \vec{y}$.

Como el vector $P^n \vec{y}$ se obtiene del vector $P^{n-1} \vec{y}$ (al aplicarle la transformación P), se deduce del lema anterior que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_1 \leq \dots \leq \mathbf{m}_n \leq \mathbf{M}_n \leq \dots \leq \mathbf{M}_1 \leq \mathbf{M}_0.$$

Dado que se trata de sucesiones monótonas y acotadas, existen los siguientes límites:

$$\mathbf{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_n = \mathbf{M}.$$

Se verá que $\mathbf{M} = \mathbf{m}$; es decir, que en el límite, el máximo y el mínimo coinciden, por lo que se trata de un vector con todas las componentes iguales. En efecto, por el lema aplicado al vector $P^{n-1} \vec{y}$ se tiene,

$$\mathbf{M}_n - \mathbf{m}_n \leq (1 - 2d)(\mathbf{M}_{n-1} - \mathbf{m}_{n-1}),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_n - \mathbf{m}_n \leq (1 - 2d)^n (\mathbf{M}_0 - \mathbf{m}_0).$$

Como $r > 1$ y d es el mínimo de las entradas de P , se tiene que

$$0 \leq (1 - 2d) < 1$$

y en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{M}_n - \mathbf{m}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2d)^n (\mathbf{M}_0 - \mathbf{m}_0) = 0.$$

Se ha demostrado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \vec{y} = \vec{u}_y,$$

donde el vector columna \vec{u}_y tiene todas sus componentes iguales.

Si se aplica lo anterior a los vectores de la base canónica

$$\{\vec{e}_j : j = 1, 2, \dots, r\},$$

cada uno en el papel de \vec{y} , entonces $P^n \vec{e}_j$ es la j -ésima columna de P^n y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n \vec{e}_j = \vec{u}_y,$$

donde \vec{u}_y es un vector con todas sus componentes constantes e iguales a un real que se denotará por u_y .

Lo anterior es válido para cada vector de la base canónica $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$ de \mathbb{R}^r . Sea

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_r \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_r \end{bmatrix};$$

Es ahora inmediato que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = W.$$

Como consecuencia de esto, se tiene para todo vector de probabilidad \vec{p} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p} P^n = \vec{p} W = \vec{w}.$$

Ahora re revisará el caso general en que P es regular, pero no necesariamente las entradas de P son estrictamente positivas. Sólo se sabe que existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que P^N tiene todas sus entradas positivas.

Considere una distribución inicial $\vec{\pi}$ y sea $k \in \{0, 1, 2, \dots, (N-1)\}$ fijo. Se denota por $\vec{\mu}$ a $\vec{\pi} P^k$. Se tiene

$$\vec{\pi} P^{Nd+k} = \vec{\mu} P^{Nd}.$$

Como P^{Nd} tiene todas sus entradas estrictamente positivas, por la primera parte de la demostración se obtiene que:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \vec{\pi} P^{Nd+k} = \vec{w},$$

Y el límite no depende de k , ni de $\vec{\pi}$, ni de $\vec{\mu}$, por lo que se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = W,$$

donde W es la matriz de transición que tiene en cada renglón al vector \vec{w} .

Para ver la segunda parte del teorema, en vista del resultado anterior, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1} = P \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = PW$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{n+1} = W,$$

por lo que $WP = W$ y $\bar{w}P = \bar{w}$ donde \bar{w} es el vector de probabilidad que aparece en cualquier renglón de la matriz W (recuerde que W tiene todos sus renglones iguales ya que está formada por vectores columna con todas sus componentes iguales).

Por último, si \vec{v} es otro vector tal que $\vec{v}P = \vec{v}$ entonces $\vec{v}P^n = \vec{v}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $\vec{v}W = \vec{v}$. Al hacer los cálculos explícitamente se obtiene que $\vec{v} = c\bar{w}$ donde c es la suma de las componente de \vec{v} .

La tercera afirmación del teorema es ahora inmediata y además, el teorema nos indica que no importa cuál sea la distribución inicial dada; es decir, el comportamiento asintótico de la cadena no depende de ésta. Por último, si la distribución inicial se elige igual a \bar{w} la cadena está en equilibrio, ya que se mantendrá dicha distribución en cada paso o periodo de tiempo.

■

Ejemplo:

Sea $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ una matriz estocástica regular, se busca un vector de probabilidad $\vec{u} = (x, 1-x)$ tal que $\vec{u}P = \vec{u}$.

$$\begin{aligned} (x, 1-x) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} &= (x, 1-x) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \right) &= (x, 1-x) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{x}{2} = x \quad \wedge \quad \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = 1-x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Considere ahora $W = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33333 & 0.66666 \\ 0.33333 & 0.66666 \end{bmatrix}$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}; \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.375 & 0.625 \end{bmatrix};$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.625 \\ 0.3125 & 0.6875 \end{bmatrix}; \quad P^5 = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.6875 \\ 0.3437 & 0.6562 \end{bmatrix};$$

$$P^6 = \begin{bmatrix} 0.3437 & 0.6562 \\ 0.3281 & 0.6718 \end{bmatrix}; \quad P^7 = \begin{bmatrix} 0.3281 & 0.6718 \\ 0.3359 & 0.6664 \end{bmatrix};$$

$$P^8 = \begin{bmatrix} 0.3359 & 0.6664 \\ 0.3320 & 0.6679 \end{bmatrix}; \quad P^9 = \begin{bmatrix} 0.3320 & 0.6679 \\ 0.3339 & 0.6660 \end{bmatrix}.$$

En la secuencia se observa claramente que $\{P^n\} \rightarrow W$.

El vector de probabilidad fijo único \vec{u} de P es llamado distribución estacionaria de la cadena de Markov.

OBSERVACIÓN.

El vector de probabilidad fijo representa los estados de equilibrio del proceso.

Ejemplo:

Considere nuevamente la cadena de Markov del ejemplo del desayuno, cuya matriz de Transición es $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Ahora se encontrará su vector de probabilidad fijo único:

$$\vec{t} = (x, 1-x) \quad \rightarrow \quad (x, 1-x) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (x, 1-x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = (x, 1-x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{x}{2} = x \quad \wedge \quad \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = 1 - x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \vec{t} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

\therefore a la larga, la persona desayunará huevos al gusto 33.3% del tiempo y fruta y cereal el 66.6%.

El territorio de un vendedor consta de tres ciudades A, B y C. Nunca vende en la misma ciudad en dos días sucesivos. Si el vendedor trabaja en la ciudad A entonces al día siguiente trabajará en la ciudad B. Sin embargo, si trabaja en la ciudad B o en la ciudad C, la probabilidad de que trabaje en la ciudad A es el doble de la probabilidad de que lo haga en cualquiera de las otras dos ciudades. A la larga, ¿con qué reiteración trabaja el vendedor en cada una de las dos ciudades?

SOLUCIÓN:

El espacio de estados del sistema es $\{A, B, C\}$.

La matriz de Transición es $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

Se obtiene el vector fijo único de probabilidad $\vec{t} = (x, y, 1 - x - y)$:

$$(x, y, 1 - x - y) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = (x, y, 1 - x - y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}(1 - x - y) = x \\ x + \frac{1}{3}(1 - x - y) = y \\ \frac{1}{3}y = 1 - x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 5x = 0 \\ 2x - 4y = -1 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5}; y = \frac{9}{20}; z = 1 - x - y = \frac{3}{20},$$

$$\therefore \vec{t} = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20} \right) = (0.4, 0.45, 0.15),$$

esto significa que a la larga, trabaja en la ciudad A el 40% del tiempo, en la ciudad B 45% del tiempo y en la ciudad C el 15% del tiempo.

2.1.4.2 Definición. CADENAS ABSORBENTES^[12].

Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena con espacio de estados finito y matriz de transición P de $N \times N$ para algún natural N . Se dice que la cadena es *absorbente* si:

1. Tiene al menos un estado absorbente y
2. Desde cualquier estado no absorbente es posible acceder a alguno absorbente.

$A \subset S$ denota al conjunto de todos los estados absorbentes y sea $r > 0$ su cardinalidad. El complemento de A se denota por D y su cardinalidad será $t = N - r$.

La matriz de transición de una cadena absorbente siempre se puede llevar a la forma

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix},$$

donde la matriz Q es de $t \times t$ y corresponde a los estados del conjunto D , la matriz I es la matriz identidad de $r \times r$ correspondiente a los estados absorbentes, $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $r \times t$ y R es una matriz de $t \times r$.

2.1.5 DIAGRAMAS DE TRANSICIÓN.

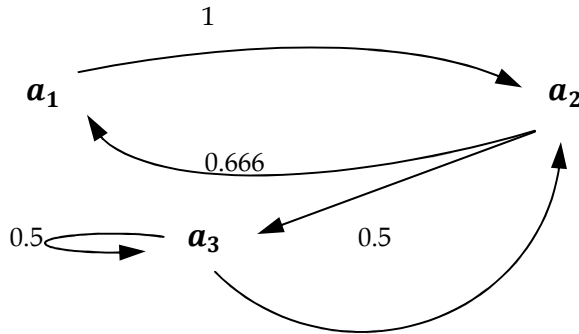
Las probabilidades de transición de una cadena de Markov pueden representarse mediante un diagrama, llamado diagrama de transición, donde una probabilidad positiva p_{ij} se representa con una flecha del estado i al estado j .

^[12] María Emilia Caballero, op. cit., pp .40.

Ejemplo:

Sea $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \frac{2}{3} & \mathbf{0} & \frac{1}{3} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ la matriz de transición de una cadena de Markov, entonces el

diagrama de transición de dicha cadena es:



2.1.6 MODELO OCULTO DE MARKOV^[13].

Un modelo oculto de Markov es un modelo donde un proceso sobresaliente de Markov no es directamente observable. En cambio, las observaciones $\mathbf{X}_t (t = 1, 2, \dots)$ son generadas por series de distribuciones de probabilidad, las cuales a su vez son controladas por una cadena de Markov no observada. Específicamente, las siguientes definiciones son utilizadas:

Sea $\theta_t (t = 1, 2, \dots)$ una cadena de Markov con distribución inicial $\boldsymbol{\pi}$ por lo que $\mathbb{P}(\theta_1 = j) = \pi_j$, y probabilidades de transición

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(\theta_{t+1} = j \mid \theta_t = i). \quad (2.11)$$

El estado de la cadena de Markov determina la distribución de probabilidad de las variables aleatorias observables \mathbf{X}_t por

$$\psi_{ij} = \mathbb{P}(X_t = j \mid \theta_t = i). \quad (2.12)$$

^[13] Jan Beran, op. cit., pp. 174-175.

En particular, si los espacios de estado de θ_t y X_t son finitos con dimensiones m_1 y m_2 respectivamente, entonces la distribución de probabilidad del proceso X_t está determinado por el vector π (m_1 -dimensional), la matriz de transición $P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,m_1}$ ($m_1 \times m_1$ -dimensional) y la matriz $\Psi = (\psi_{ij})_{i=1,\dots,m_2;j=1,\dots,m_1}$ ($m_2 \times m_1$ -dimensional) que relaciona θ_t con X_t . Modelos análogos pueden ser definidos para el caso donde $X_t (t \in \mathbb{N})$ son variables continuas.

La flexibilidad de los modelos escondidos de Markov se debe al hecho de que X_t puede ser una cantidad arbitraria con una distribución arbitraria que puede cambiar en el tiempo. Por el momento, X_t puede ser igual a una serie de tiempo $X_t = (Z_1, \dots, Z_n) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ cuya distribución depende de θ_t . Típicamente tales modelos son utilizados en el procesamiento de voz. La variable θ_t debe representar el estado no observable de la vocal al tiempo t , la cual a su vez produce una señal acústica observable $Z_1(t), \dots, Z_n(t)$ generada por una distribución caracterizada por θ_t . Dadas las observaciones $X_t (t = 1, 2, \dots, N)$, la meta es adivinar cuáles configuraciones $\theta_t (t = 1, 2, \dots, N)$ de vocales se tenían inicialmente. Más específicamente, se asume a veces que hay sólo un número finito de posibles señales acústicas. Se denota por X_t la etiqueta de la señal observada y estimar θ maximizando la probabilidad a posteriori $P(\theta = j | X_t = i)$. Usando las reglas de Bayes, se deduce que

$$\begin{aligned} \theta_t &= \mathop{\text{arg max}}_{j=1,\dots,m_1} \mathbb{P}(\theta_t = j | X_t = i) \\ &= \mathop{\text{arg max}}_{j=1,\dots,m_1} \frac{\mathbb{P}(X_t = i | \theta_t = j) \mathbb{P}(\theta_t = j)}{\sum_{l=1}^{m_1} \mathbb{P}(X_t = i | \theta_t = l) \mathbb{P}(\theta_t = l)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

En principio, el parámetro de estimación para cadenas de Markov y modelos escondidos de Markov es simple, debido al parecido de la función puede ser escrito explícitamente en términos de probabilidades condicionales. Las principales dificultades que pueden ocurrir son:

1. Gran número de parámetros desconocidos: los parámetros desconocidos para una cadena de Markov son la distribución inicial π y la matriz de transición $P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$. Si m es finito, entonces el número de parámetros desconocidos es $(m - 1) + m(m - 1)$. Si la distribución inicial no tiene importancia, entonces esto se reduce a $m(m - 1)$. Ambos números pueden ser grandes, comparados al tamaño de la muestra disponible, ya que se incrementan cuadráticamente en m . La situación es aún peor si el espacio de estados es infinito, ya que el número de parámetros desconocidos es infinito. Una solución a este problema es imponer

restricciones sobre los parámetros o definir modelos donde P es caracterizada por un parámetro vectorial de baja dimensión.

2. Solución implícita: La máxima estimación parecida de los parámetros desconocidos es la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, y por lo tanto, debe encontrarse un algoritmo numéricamente ajustable. Para aplicaciones en tiempo real, con una entrada de datos masiva, como ocurre típicamente en el procesamiento de señales musicales, se requieren algoritmos rápidos.
3. Distribución asintótica: La distribución asintótica del máximo de estimaciones parecidas no siempre es fácil de derivar.

2.2 Redes Neuronales^[14].

Una neurona es una célula cuya función principal es el acopio, procesamiento y emisión de señales eléctricas. La capacidad de procesamiento de información del cerebro proviene de redes de neuronas.

Los primeros trabajos de Inteligencia Artificial pretendían crear redes neuronales artificiales, donde una neurona se ‘dispara’ cuando una combinación lineal de sus entradas excede cierto umbral.

Desde 1943 se han desarrollado modelos más realistas y detallados, tanto para neuronas como para sistemas más grandes del cerebro y nace formalmente la neurociencia computacional. Una red neuronal se puede usar, entre otras aplicaciones, para clasificación o regresión.

2.2.1 ESTRUCTURA EN REDES NEURONALES.

Existen al menos dos categorías principales de redes neuronales:

- Redes acíclicas (Redes con alimentación-hacia-delante).
- Redes cíclicas (Recurrentes).

[14] Stuart Russell, Peter Norvig, *Inteligencia Artificial, un enfoque moderno*, Pearson - Prentice Hall, España, 2004, pp. 838-851.

Las redes con alimentación hacia adelante representan una función de sus entradas actuales, no tiene otro estado interno que no sea el de sus propios pesos. Se organizan en capas, de forma que cada unidad recibe entradas únicamente de las unidades de la capa que le precede inmediatamente.

Por otro lado, las redes cíclicas permiten que sus salidas alimenten sus propias entradas; es decir, los niveles de activación de la red forman un sistema dinámico que puede alcanzar un estado estable, exhibir oscilaciones o incluso comportamiento caótico. Por lo tanto, las redes recurrentes pueden tener memoria a corto plazo, esto las hace más interesantes como modelos del cerebro.

2.2.2 UNIDADES EN REDES NEURONALES.

Las redes neuronales están compuestas de nodos (unidades) conectadas a través de conexiones dirigidas. Una conexión del nodo j al nodo i sirve para propagar la activación a_j de j a i .

Cada conexión tiene un peso numérico $W_{j,i}$ asociado, que determina la fuerza y el signo de la conexión.

Se calcula la suma ponderada de las entradas de i .

$$in_i = \sum_{j=0}^n W_{i,j} a_j$$

Se aplica la función de activación g a esta suma para producir la salida:

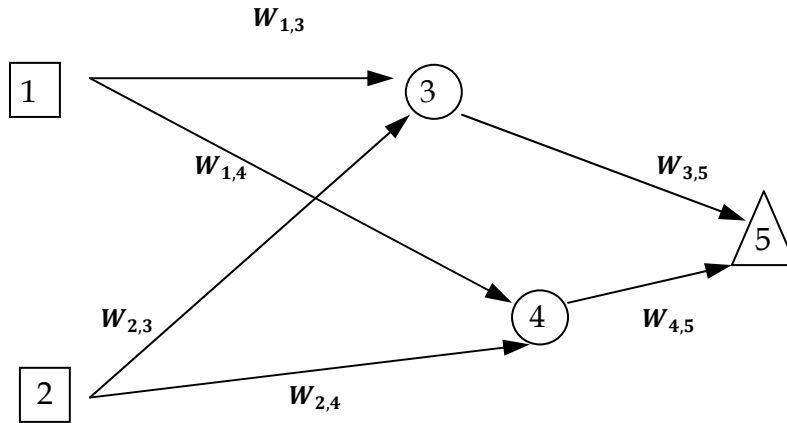
$$a_i = g(in_i) = g\left(\sum_{j=0}^n W_{i,j} a_j\right) \quad (2.14)$$

La función de activación g se diseña con dos objetivos:

- i) El nodo está 'activo' (cercana a +1) cuando se proporcionan las entradas 'correctas'.
El nodo está 'inactivo' (cercana a 0) cuando se proporcionan las entradas 'erróneas'.
- ii) g tiene que ser no-lineal.

A continuación, se analiza más detalladamente la afirmación de que una red con alimentación-hacia-delante representa una función de sus entradas.

Consideremos la siguiente red:



que tiene dos unidades de entrada, dos unidades ocultas y una unidad de salida. (Por simplicidad se han omitido sesgos)

Dado un vector de entrada $\vec{x} = (x_1, x_2)$, las activaciones de las unidades de entrada se ponen a $(a_1, a_2) = (x_1, x_2)$ y la red calcula

$$a_5 = g(W_{3,5}a_3 + W_{4,5}a_4) = g\left(W_{3,5}g(W_{1,3}a_1 + W_{2,3}a_2) + W_{4,5}g(W_{1,4}a_1 + W_{2,4}a_2)\right).$$

Es decir, expresando la salida de cada unidad oculta como una función en de sus entradas, se ha mostrado la salida de la red como una suma, a_5 , en función de las entradas de la red. Además, se observa que los pesos de la red actúan como parámetros de la función, ajustando los pesos se puede cambiar la función que representa la red. Esta es la manera en que se produce el aprendizaje en redes neuronales.

A continuación, se introduce el estudio de redes de una única capa, sin unidades ocultas, y redes multicapa, con una o más capas de unidades ocultas.

2.2.3. REDES NEURONALES DE UNA SOLA CAPA CON ALIMENTACIÓN-HACIA-DELANTE (PERCEPTRÓN).

Una red con todas las entradas conectadas directamente a las salidas se denomina perceptrón. Ya que cada unidad de salida es independiente de las otras, se puede limitar nuestro estudio a perceptrones con una única unidad de salida.

Se comienza examinando el espacio de hipótesis que un perceptron puede representar:

Con una función de activación umbral, el perceptron puede representar algunas funciones booleanas elementales o complejas de forma compacta.

Por ejemplo, la 'función mayoría', cuya salida es 1 sólo si más de la mitad de sus n entradas están a 1, puede representarse con un perceptrón con peso $W_j = 1$ y umbral $W_0 = \frac{n}{2}$.

Con una función de activación sigmoide, el perceptrón puede representar una probabilidad; específicamente, la probabilidad de que la salida verdadera sea 1 dadas las entradas.

Por ejemplo, se puede usar la sigmoide como una representación canónica para distribuciones condicionales en redes bayesianas.

Desafortunadamente existen muchas funciones booleanas que el perceptrón umbral no puede representar pues devuelve 1 si y sólo si la suma ponderada de sus entradas (incluyendo sesgos) es positiva:

$$\sum_{j=0}^n W_j x_j > 0 \quad \text{ó} \quad W \cdot x > 0$$

La ecuación $W \cdot x = 0$ define un hiperplano (una recta, en dos dimensiones) en el espacio de entrada, así que el perceptrón devuelve 1 si y sólo si la entrada está en un lado de ese hiperplano. El perceptrón umbral se denomina separador lineal y en general, los perceptrones umbral pueden representar sólo funciones linealmente separables.

A pesar de su poder de expresividad limitado, los perceptrones umbral tienen algunas ventajas. En particular, existe un algoritmo de aprendizaje sencillo que ajusta un perceptrón umbral a cualquier conjunto de entrenamiento que sea linealmente separable. La idea del algoritmo para aprendizaje de redes neuronales

es ajustar los pesos de la red para minimizar alguna medida del error que se produce con el conjunto de entrenamiento. Así, el aprendizaje se formula como una búsqueda optimizada en el espacio de pesos.

La medida clásica del error es la suma de los errores cuadrados que se usan para regresión lineal. El error cuadrado para un único ejemplo de entrenamiento con entrada \mathbf{x} y valor verdadero de salida \mathbf{y} es:

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{Err}^2 \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{h}_w(\mathbf{x}))^2,$$

donde $\mathbf{h}_w(\mathbf{x})$ es la salida del perceptrón para el ejemplo e \mathbf{y} es el valor real de la salida.

Usando el método del descenso del gradiente para reducir el error cuadrado, se calcula la derivada parcial de E con respecto a cada peso y se obtiene:

$$\frac{\partial E}{\partial W_j} = \mathbf{Err} \times \frac{\partial \mathbf{Err}}{\partial W_j} = \mathbf{Err} \times \frac{\partial}{\partial W_j} g \left(\mathbf{y} - \sum_{j=0}^n W_j x_j \right) = -\mathbf{Err} \times g^{(in)} \times x_j,$$

donde g' es la derivada de la función de activación. En el algoritmo del descenso del gradiente, para reducir E , se actualizan los pesos de la siguiente manera:

$$W_j \leftarrow W_j + \alpha \times \mathbf{Err} \times g^{(in)} \times x_j, \quad (2.15)$$

donde α es la tasa de aprendizaje.

Intuitivamente, esto tiene mucho sentido. Si el error $\mathbf{Err} = \mathbf{y} - \mathbf{h}_w(\mathbf{x})$ es positivo, la salida de la red es demasiado pequeña y por ello los pesos se incrementan para las entradas positivas y se decrementan para las entradas negativas. Cuando el error es negativo, ocurre lo contrario.

Cada ciclo con todos los ajustes se denomina época. Las épocas se repiten hasta que se alcanza algún criterio de parada (típicamente, que los cambios de los pesos sean muy pequeños). Otros métodos calculan el gradiente para el conjunto total de entrenamiento añadiendo todas las contribuciones en la ecuación (2.15) antes de actualizar los pesos. El método del gradiente estocástico selecciona ejemplos aleatoriamente del conjunto de entrenamiento en vez de hacer ciclos con ellos.

En el caso de un perceptrón sigmoide, también se puede derivar una regla de aprendizaje usando el método estándar de maximización del logaritmo de la verosimilitud de los datos. Veamos cómo funciona esto.

Considere un único ejemplo de entrenamiento con valor de salida verdadera T , y sea p la probabilidad devuelta por el perceptrón para este ejemplo. Si $T = 1$, la probabilidad condicional del dato es p , y si $T = 0$, la probabilidad condicional del dato es $(1 - p)$. Ahora se puede usar un truco sencillo para escribir el logaritmo de la verosimilitud de una forma que sea diferenciable. El truco es que una variable $0 - 1$ en el exponente de una expresión actúa como una variable indicadora: p^T es p si $T = 1$ y 1 en otro caso; de forma análoga $(1 - p)^{(1-T)}$ es $(1 - p)$ si $T = 0$ y 1 en otro caso. Por ello, se puede escribir el logaritmo de la verosimilitud del dato como:

$$L = \log p^T (1 - p)^{(1-T)} = T \log p + (1 - T) \log (1 - p). \quad (2.16)$$

Gracias a las propiedades de la función sigmoide, el gradiente se reduce a una fórmula muy sencilla:

$$\frac{\partial L}{\partial W_j} = \text{Err} \times a_j,$$

Nótese que el vector de actualización de los pesos para aprendizaje por máxima verosimilitud en los perceptrones sigmoides es esencialmente idéntico al vector de actualización para minimización del error cuadrado. Por ello, se puede decir que los perceptrones tienen una interpretación probabilística incluso cuando la regla de aprendizaje se obtiene desde un punto de vista determinístico.

2.2.4 REDES NEURONALES MULTICAPA CON ALIMENTACIÓN-HACIA-DELANTE.

Ahora se estudiarán redes con unidades ocultas. El caso más común supone una única capa oculta (también es denominada red de tres-capas o red de dos-capas - porque las entradas no son unidades 'reales'- evitaremos confusiones y llamándolas redes de una única capa oculta). La ventaja de añadir capas ocultas es que se amplía el espacio de hipótesis que puede ser representado por la red. Cada unidad oculta se considera como un perceptrón que representa una función umbral suave en el espacio de entradas. Entonces, se tendrá una unidad de salida que es una combinación lineal con umbral suave de varias de estas funciones. De hecho, con una única capa oculta suficientemente grande, es posible representar cualquier función continua de las entradas con una precisión arbitraria; con dos

capas, incluso se pueden representar funciones discontinuas. Desafortunadamente, para una estructura de red determinada, es difícil caracterizar exactamente qué funciones pueden ser representadas y cuáles no.

Los algoritmos de aprendizaje para redes multicapa son similares al algoritmo de aprendizaje del perceptrón. Una pequeña diferencia es que se tiene un vector de salida $\mathbf{h}_w(\mathbf{x})$ en vez de un único valor, y cada ejemplo tiene un vector de salida \mathbf{y} . La mayor diferencia es que, mientras que el error $\mathbf{y} - \mathbf{h}_w$ en la capa de salida es claro, el error en las capas ocultas no se conoce, porque los datos de entrenamiento no dicen cuál es el valor que han de tomar los nodos ocultos. Resulta que es posible 'propagar hacia atrás' el error desde la capa de salida a las capas ocultas. El proceso de propagación-hacia-atrás proviene directamente a partir del gradiente del error total. Primero, se describe el proceso de manera intuitiva; luego, se verá cómo obtenerlo formalmente.

En la capa de salida, la regla de actualización de pesos es idéntica a la ecuación (2.15). Se tienen múltiples unidades de salida, así será \mathbf{Err}_i la i -ésima componente del vector de error $\mathbf{y} - \mathbf{h}_w$. También será conveniente definir un error modificado $\Delta_i = \mathbf{Err}_i \times \mathbf{g}'(\mathbf{in}_i)$, de forma que la regla de actualización de los pesos se convierte en

$$\mathbf{W}_{j,i} \leftarrow \mathbf{W}_{j,i} + \alpha \times \mathbf{a}_j \times \Delta_i \quad (2.17)$$

Para actualizar las conexiones entre las unidades de entrada y las unidades ocultas se necesita definir una cantidad análoga al término que representa el error para los nodos de salida. Aquí es donde es posible hacer la propagación hacia atrás del error. La idea es que el nodo oculto j es 'responsable' de una fracción del error Δ_i en cada nodo de salida al que está conectado. Así, los valores de Δ_i se dividen de acuerdo con la fuerza de la conexión entre el nodo oculto y el nodo de salida, y se propagan hacia atrás para proporcionar los valores de Δ_j en la capa oculta. La regla de propagación para los valores de Δ es la siguiente:

$$\Delta_j = \mathbf{g}'(\mathbf{in}_j) \sum_i \mathbf{W}_{j,i} \Delta_i \quad (2.18)$$

Ahora la regla de actualización de los pesos entre las entradas y la capa oculta es casi idéntica a la regla de actualización de la capa de salida:

$$\mathbf{W}_{k,j} \leftarrow \mathbf{W}_{k,j} + \alpha \times \mathbf{a}_k \times \Delta_j$$

El proceso de propagación hacia atrás puede resumirse de la manera siguiente:

- i) Calcular los valores Δ para las unidades de salida, usando el error observado.
- ii) Comenzando con la capa oculta, repetir lo siguiente para cada capa en la red, hasta que se alcance la primera capa oculta:
 - Propagar los valores Δ hacia atrás a la capa anterior.
 - Actualizar los pesos entre las dos capas.

Ahora, se obtienen las ecuaciones de la propagación hacia atrás desde el principio. El error cuadrado para un único ejemplo se define como

$$E = \frac{1}{2} \sum_i (y_i - a_i)^2$$

Donde la suma se realiza para todos los nodos de la capa de salida. Para obtener el gradiente respecto al peso específico $W_{j,i}$ en la capa de salida, sólo se necesita desarrollar la activación a_i , ya que todos los otros términos de la suma no dependen de $W_{j,i}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial W_{j,i}} &= -(y_i - a_i) \frac{\partial a_i}{\partial W_{j,i}} = -(y_i - a_i) \frac{\partial g(in_i)}{\partial W_{j,i}} = -(y_i - a_i) g'(in_i) \frac{\partial in_i}{\partial W_{j,i}} \\ &= -(y_i - a_i) g'(in_i) \frac{\partial}{\partial W_{j,i}} \left(\sum_j W_{j,i} a_j \right) = -(y_i - a_i) g'(in_i) a_j = -a_j \Delta_i \end{aligned}$$

con Δ_i definido como antes. Para obtener el gradiente respecto a los pesos $W_{k,j}$ que conectan la capa de entrada con la capa oculta, se mantiene la suma para todo i , ya que cada valor de salida a_i puede verse afectado por cambios en $W_{k,j}$. También se deben desarrollar las activaciones a_j . A continuación se muestra la derivación en más detalle, ya que es interesante ver cómo el operador derivada se propaga hacia atrás por la red:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial W_{k,j}} &= - \sum_i (y_i - a_i) \frac{\partial a_i}{\partial W_{k,j}} \\
&= - \sum_i (y_i - a_i) \frac{\partial g(\text{in}_i)}{\partial W_{k,j}} = - \sum_i (y_i - a_i) g'(\text{in}_i) \frac{\partial \text{in}_i}{\partial W_{k,j}} \\
&= - \sum_i \Delta_i \frac{\partial}{\partial W_{k,j}} \left(\sum_j W_{j,i} a_j \right) \\
&= - \sum_i \Delta_i W_{j,i} \frac{\partial a_j}{\partial W_{k,j}} = - \sum_i \Delta_i W_{j,i} \frac{\partial g(\text{in}_i)}{\partial W_{k,j}} \\
&= - \sum_i \Delta_i W_{j,i} g'(\text{in}_j) \frac{\partial \text{in}_j}{\partial W_{k,j}} \\
&= - \sum_i \Delta_i W_{j,i} g'(\text{in}_j) \frac{\partial}{\partial W_{k,j}} \left(\sum_k W_{k,j} a_k \right) \\
&= - \sum_i \Delta_i W_{j,i} g'(\text{in}_j) a_k = - a_k \Delta_j
\end{aligned}$$

donde Δ_j se define como anteriormente. Así, se consiguen las reglas de actualización obtenidas anteriormente a partir de consideraciones intuitivas. Está también claro que el proceso puede continuarse para redes con más de una capa oculta.

Por supuesto, las redes neuronales son capaces de hacer tareas de aprendizaje muy complejas, aunque se debe decir que es necesaria una cierta cantidad de trabajo para conseguir la estructura correcta de la red y para conseguir la convergencia a algo cercano al óptimo global del espacio de estados.

Hasta aquí, se ha considerado el problema del aprendizaje de los pesos, dada una estructura fija de la red; también es necesario comprender cómo encontrar la mejor estructura de la red. Si se elige una red que es demasiado grande, será capaz de memorizar todos los ejemplos formando una gran tabla de búsqueda, pero generalizará necesariamente bien para entradas que no se han visto anteriormente. Como todos los modelos estocásticos, las redes neuronales son sujeto de sobreajuste cuando hay demasiados parámetros en el modelo.

Si nos encontramos en redes totalmente conectadas, las únicas elecciones por las que nos podemos preocupar son el número de capas ocultas y su tamaño. Si se quiere considerar redes que no están conectadas en su totalidad, es necesario encontrar algún método de búsqueda efectivo a través del gran espacio de topologías de posibles conexiones. Después de que la red está entrenada por primera vez, un enfoque teórico de información identifica una selección óptima de

las conexiones que pueden ser eliminadas. La red vuelve a entrenarse y si su rendimiento no se ve decrementado, se repite el proceso. Además de la eliminación de conexiones, también es posible eliminar unidades que no contribuyen mucho al resultado.

También se puede comenzar con una única unidad que se comporta de la mejor forma posible para devolver la salida correcta para tantos ejemplos de entrenamiento como sea posible. Se añaden más unidades para corregir los ejemplos en que la primera unidad falló. El algoritmo añade sólo las unidades necesarias para cubrir todos los ejemplos.

CAPÍTULO 3.

La composición musical es la viva expresión de una concepción mental. Por lo tanto, sus elementos varían drásticamente de persona a persona, de cultura a cultura, logrando cargarla de imaginación, emociones e historia.

La mejor perspectiva de la composición musical es proporcionada por un estudio de su metodología. El uso de metodologías es considerado en el desarrollo de la mayoría de las actividades humanas, incluyendo las artes y la ciencia. Al conocer diversas metodologías de composición musical se tendrá una nítida y eficaz manera de identificar y comparar, con precisión, los objetivos estéticos particulares de cada compositor; es decir, mediante la exploración de diferentes metodologías se conocerá significativamente la música que generan. Durante este capítulo, se estudia el desarrollo y evolución de sistemas de composición *artificial* cuyas implicaciones agitan y provocan preguntas acerca de la naturaleza de su música.

La música occidental es muy estructurada. Hay muchísimas reglas que el compositor debe seguir. Sin embargo, un gran compositor sabe cómo y cuándo doblar, o estirar inteligentemente, estas reglas. Normalmente, cuando las reglas musicales se rompen, un oído entrenado reacciona con desagrado o disgusto. Pero cuando esto es realizado por un gran compositor, un oído entrenado reacciona con alegría y asombro.

Así, una metodología nos permite construir y resolver. Recuerde que un algoritmo es la metodología más altamente calificada. No obstante, se debe tener presente

que para elaborar un algoritmo composicional se requiere de un amplio *background* de conocimientos musicales, más o menos equivalente al presentado en el capítulo uno.

A continuación, se presenta una de las primeras metodologías composicionales cuyas características servirán como punto de partida de la discusión central de este capítulo, acerca de la naturaleza algorítmica y artística de la composición musical.

Después de discutir algunos métodos composicionales, haciendo uso de la información presentada en los capítulos anteriores, se construye una metodología de composición musical científica actual, que será implementada con el uso de software especializado y cuyos resultados se presentan en el siguiente capítulo.

3.1 Métodos y Algoritmos.

3.1.1 MÉTODO DE GUIDO.

Conocido también con el nombre de Guido Aretinus, Guido d'Arezzo fue un monje benedictino que ha pasado a la historia de la música como uno de los más importantes reformadores del sistema de notación musical.

Nació en **Arezzo (Toscana)** en el año **990**. Falleció en **Avellano** aproximadamente en **1050**.

Después de haber concluido sus estudios en la abadía benedictina de Pomposa, en la costa **adriática**, en Ferrara, hacia 1025 ingresó como maestro en la escuela catedralicia de Arezzo, donde sobresalió en la enseñanza del arte vocal.

Alrededor de 1026 Guido d'Arezzo desarrolló una manera de enseñar a sus alumnos composición, la cual, en sus ambientes religiosos, ascendía a componer melodías para acompañar a los textos sagrados en latín.

El mismo Guido inventó la teoría musical medieval del hexacordo: un grupo de seis tonos diatónicos con un intervalo de semitono en medio (C◊D◊E◊F◊G◊A) y cuya nomenclatura (ut o do, re, mi, fa, sol, la) extrajo de las sílabas iniciales de cada hemistiquio del himno de san Juan *Ut queant laxis*. Este método era muy familiar para sus estudiantes de música.

Desarrolló un método de memorización de escalas musicales asociando tonos con posiciones de la mano, llegando a resumir lo fundamental de todo el sistema de modos musicales eclesiásticos en la Europa medieval.

La brillante forma como Guido combinó las proezas teóricas y las prácticas de aptitud, sentó las bases de la composición objetiva. Aunque se asocia el desarrollo automatizado de composición con el siglo XX, el trabajo de Guido demuestra que es una práctica muy antigua.

Publicó su método de composición para estudiantes como parte de su tratado principal titulado *Micrologus de disciplina artis musicae*. Hay un gran debate sobre si Guido propone seriamente su método como una forma de componer música, o si fue sólo una ayuda didáctica para la enseñanza de la composición. Pero en cualquier caso, logró, por primera vez en la historia, una forma objetiva de componer música con un determinado conjunto de reglas. Aunque elemental, su método es el prototipo de todos los sistemas de composición objetiva de ese día hasta hoy. Se puede utilizar para la reflexión sobre la generación de experimentos de la naturaleza de la composición.

El primer paso de Guido era construir una tabla de correspondencias entre las notas de la escala con las vocales que figuran en el texto sagrado que se va a fijar a la música.

Distribuye repeticiones de la secuencia de vocales (a, e, i, o, u) a lo largo de poco más de dos octavas, estándar de la brújula de la música vocal de su tiempo, de la siguiente manera:

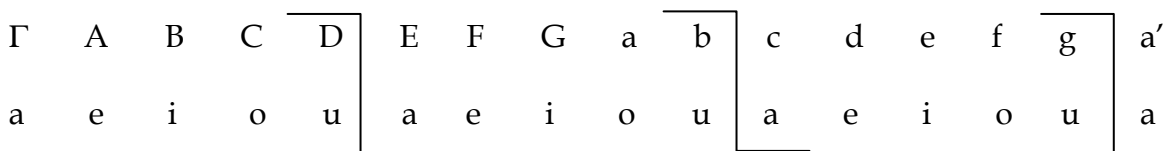


Fig. 3. 1 Método composicional de Guido.
 La línea superior representa las notas musicales sol, la, si, do, re, mi, fa, ... representadas por Γ, A, B, C, D, E, F, ... respectivamente.

Dado que este método suministra de tres opciones para cada vocal (y cuatro opciones de la vocal a), el método tiene múltiples soluciones para cada uno de los

textos. Siguiendo este procedimiento, compuso una melodía para todo el texto sagrado cambiando de frecuencia en cada vocal.

Se debe observar que en este método hay dos entradas: las vocales del texto sagrado y las decisiones tomadas por el juicio subjetivo del compositor. Es a partir de estas decisiones como determina desde qué grupo de vocales dibujar la frecuencia. La salida es una melodía.

Para un grupo de texto mono-vocal, hay tres posibles melodías de una nota; para un grupo de texto de dos vocales hay 3^2 melodías de dos notas, y para el grupo de texto de N-vocales, 3^N melodías. Así, el número de melodías posibles crece de manera muy significativa para textos largos.

Guido indicó que cualquiera que sienta que su sistema es demasiado restrictivo, debe ampliarlo mediante la incorporación de otra línea de vocales, en virtud de las notas que tienen diferente punto de inicio, incrementando el número de opciones. Aun así, el método todavía limita las opciones de un compositor, que de otra manera podría elegir cualquier nota en cualquier momento. Se asume que esto fue intención de Guido para facilitararlo a sus estudiantes.

Pero incluso si la elección se ve limitada por el método, los compositores aún deben ejercer sus facultades subjetivas para desarrollar una agradable y musicalmente interesante línea. Guido indicó que seleccionando sólo los mejores extractos de varios intentos, el compositor podría obtener una composición adaptada perfectamente al texto y que cumpla los requisitos de una práctica composicional buena.

En 1029 se retiró al convento de Avellana, en el que posiblemente murió.

3.1.2 ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.

Euclides, matemático griego que probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón. Enseñó geometría en Alejandría y allí fundó una escuela de matemáticas. *Cálculos* (una colección de teoremas geométricos), *Fenómenos* (una descripción del firmamento), *Óptica*, *División del canon* (un estudio matemático de música) y otros libros se han atribuido durante mucho tiempo a Euclides. Sin embargo, algunos historiadores creen que alguna o todas estas obras (aparte de *Los Elementos*) se le han adjudicado erróneamente; sin embargo, Euclides hizo diversas aportaciones en la teoría de números.

Euclides diseñó el algoritmo de la división. A modo de ejemplo, considere el problema de encontrar el máximo común divisor (m. c. d.), que es el mayor número que divide dos números sin resto. Esto es práctico cuando se descomponen los dos números en factores primos.

Euclides desarrolló el siguiente método para resolver esta clase de problemas para \mathbb{N} .

1. Dados dos números, m y $n \in \mathbb{N}$, encontrar sus restos después de operar la división entera.
2. Si el resto r es igual a cero, la respuesta es n .
3. De lo contrario, sea $m = n$ y $n = r$ y comenzar de nuevo.

La siguiente tabla muestra el método de Euclides para 91 y 416

PASO	m	n	r
1	91	416	91
2	416	91	52
3	91	52	39
4	52	39	13
5	39	13	0

Por lo tanto, el m. c. d. es 13.

En la siguiente tabla se confrontan ambos métodos:

GUIDO	EUCLIDES
<u>NO</u> es un método algorítmico	<u>SI</u> es un método algorítmico
Es requerida la elección subjetiva, por lo que no está definido un criterio.	Es finito. Eventualmente $r=0$.
Es una metodología no determinista (¿arte?)	Es definitivo para \mathbb{N} , porque la división de enteros está perfectamente definida.
	Tiene 2 entradas: m y n .
	Produce una única salida: el m.c.d.
	Es efectivo porque no hay procesos aleatorios o elementos subjetivos.

Un aspecto característico del arte de todo tipo es que combina criterios objetivos con métodos de hacer elección. La diferencia entre el arte y algoritmo, es que el algoritmo es una metodología determinista, siempre produce el mismo resultado desde las mismas entradas, mientras que en el arte pueden variar los resultados, incluso con los mismos insumos.

Con el fin de crear sus métodos, tanto Euclides como Guido, tuvieron que llegar dentro de su propio subjetivo a mantener sus objetivos en mente, observando simultáneamente sus propios procesos mentales durante el tiempo suficiente para objetivar lo que descubrieron en un conjunto de normas, lo requiere una considerable disciplina mental.

Esto sugiere que el estudio de métodos puede revelar nuestros valores y suposiciones ocultas. Por ejemplo, el método de Guido se limita a seguir la música de las palabras, pues el propósito de su composición era activar el texto bíblico.

El principio rector de este capítulo es establecer una metodología que pueda ser directriz de nuestra estética composicional.

3.2 El Arte de Elegir.

Tomar decisiones, tales como el pensamiento de un número entre 1 y 6, es siempre subjetivo. Tirar un dado, es en realidad la delegación de elección subjetiva a un proceso externo. Delegar a un externo la toma de elección es un oráculo. Si un método requiere consultar un oráculo de cualquier tipo, automáticamente adquirirá un valor artístico perdiendo su carácter algorítmico.

También se debe distinguir entre la elección y la elección de aceptar. Esta última es siempre subjetiva. De este modo, la elección composicional puede ser delegada de una persona a otra, o de una persona a un proceso objetivo.

Un compositor puede delegar la elección de elementos musicales a un asistente. Esta es una práctica común, por ejemplo, entre los compositores de cine de Hollywood. Aunque el jefe compositor podrá estipular criterios, la composición se hace por los asistentes. Por la delegación, el jefe compositor pierde cierto control sobre el resultado.

Incluso si un compositor escribe minuciosamente cada nota en la partitura, su realización necesariamente incluirá muchos elementos introducidos por casualidad artística del intérprete o ejecutante. Normas convencionales para la interpretación de música clásica son sólo algunas de las incertidumbres que afectan a la música del compositor.

Algunos compositores además incluyen quién será el ejecutante, el lugar, la elección de los instrumentos y el equipo, si será grabado, otras composiciones sobre el programa, su orden en el programa, y así sucesivamente. Sin embargo, todas estas instrucciones del compositor pueden ser ignoradas por completo. Por supuesto, hay muchas formas de música, como el jazz, donde predomina la incertidumbre porque la música es más o menos improvisada.

3.2.1 ELECCIÓN SUBJETIVA.

Varios compositores con formación clásica del siglo XX experimentaron delegando elementos adicionales del proceso de composición a los intérpretes. Una de las primeras piezas de este tipo fue *Karlheinz Stockhausen's Klavierstück XI (1956)*, donde la partitura para piano sólo consta de 19 fragmentos inconexos de notación musical de duración variable, plasmados en una hoja grande de cartón con un cúmulo de espacio vacío entre ellos. Stockhausen indicó que el ejecutante debe desempeñar los fragmentos en cualquier orden "que capte su ojo", y también debería elegir el tempo, el nivel dinámico y el tipo de ataque durante la ejecución.

Otros compositores de la época, incluyendo John Cage, Earle Brown y Pierre Boulez, elaboraron piezas que invitan al artista intérprete a determinar una parte de la estructura de la música que está reproduciendo. Uno puede hacer una analogía entre esas composiciones abiertas y las esculturas móviles de Alexander Calder. Los móviles de Calder son estructuras fijas, pero las partes pueden moverse entre sí. Las posibles formas son determinadas por el artista, pero prácticamente infinitas configuraciones son posibles.

El arte creado por Stockhausen, Cage, Feldman, entre algunos otros compositores ha planteado serias dudas sobre el futuro de la música clásica occidental.

Muchas preguntas surgen con respecto a la apertura formal de la elección subjetiva: ¿Se trata de un compositor abdicando su responsabilidad cuando requiere control formal? ¿Debería un grupo desordenado de segmentos musicales ser considerado una pieza musical? ¿Qué objetivo persigue el material musical obtenido? ¿Es consciente de la apertura formal?

Aunque estas son excelentes preguntas que merecen respuestas, nuestra intención no es responder a ellas directamente, sino que se trata de abordarlas desde una perspectiva más amplia.

3.2.2 ELECCIÓN OBJETIVA.

Es posible delegar la elección a un proceso objetivo tal como utilizar los dados o una urna de bolas numeradas (una bola se extrae "al azar" de la urna, y el color o el número de la bola se utiliza para determinar la elección), pero formas más imaginativas han sido detalladas específicamente para componer música por casualidad.

De hecho, cualquier proceso objetivo se puede utilizar si es aleatorio o no. Emplear oportunidad como agente de elección tiene una larga historia en la cultura humana. Por ejemplo, el viento y las arpas eólicas aprovechan el azar de las fuerzas de la naturaleza para crear agradables y musicales sonidos.

¿Ha utilizado alguna vez una moneda para decidir qué hacer? Esto puede ayudarle si está indeciso o realmente no se preocupa por el resultado. Pero después de que la moneda fue lanzada, ¿usted realmente siguió el dictado de la moneda? o ¿eligió su propio resultado después de todo? Tal vez la elección de su moneda sólo no lo hizo sentir cómodo. Es poco probable que un proceso de este tipo tenga la misma calidad que las elecciones realizadas por una persona.

En realidad, esto podría ser bueno o malo. En el lado positivo, la oportunidad de decisiones puede ayudar a un estudiante de composición a prevenirse de ser abrumado por la inmensidad de los posibles resultados. Guido puede haber tenido en cuenta este punto. El resultado de un proceso de azar puede proporcionar una nueva perspectiva de la recepción que tiene un compositor fuera de la rutina.

En el lado opuesto, pura casualidad no tiene en cuenta lo que un compositor piensa o prefiere.

La música es un delicado equilibrio entre lo que se conoce y lo que es sorprendente. Y la última fuente de sorpresa es la casualidad. Sin embargo, este enfoque no está exento de riesgo. Un verdadero proceso aleatorio como voltear una moneda no muestra alguna habilidad, ni el *sabor* en la composición, porque no tiene conciencia ni intención de la música que se está creando y, como consecuencia, sus resultados tienen un indeseable errante de calidad.

Si se quiere incorporar casualidad en la composición, que se convertirá en interés primordial de este trabajo, se deben buscar maneras de aumentar la probabilidad de que las elecciones realizadas en nuestro nombre sean interesantes, ya que sin interés no hay música, sólo ruido.

3.3 Aleatoriedad.

La aleatoriedad está literalmente en el ojo del espectador. Se puede obtener aleatoriedad desde cualquier proceso natural, como el movimiento del viento o las olas, la distribución de manchas de tinta en una página, el movimiento de los átomos cerca de un electrodo, o tirar los dados.

Héctor Villalobos utilizó la silueta de la ciudad de Nueva York para crear la melodía de su composición *Horizonte de Nueva York*. John Cage compuso *Atlas Eclipticalis* utilizando cartas astronómicas. Charles Dodge utilizó las fluctuaciones del campo magnético terrestre para crear una gran obra de música electrónica titulada *El campo magnético de la Tierra*. ¿Son éstos procesos aleatorios? ¿No son las alturas de construcción en Nueva York una función de los códigos de edificio? ¿No es la distribución de estrellas una función de las leyes de la gravitación? Ciertamente, pero la cuestión central es epistemológica, no física, ¿se puede determinar una fórmula que caracteriza el fenómeno exactamente? Si la respuesta es *no*, entonces es un proceso aleatorio para el observador. Tenga en cuenta que esto implica que no existe el azar sin un observador.

3.3.1 ¿QUÉ ES EL AZAR?

La característica fundamental del útil proceso aleatorio es la oportunidad de que los eventos pueden ser independientes el uno del otro; es decir, que incluso conociendo un gran conjunto de resultados no ayudan a adivinar cualquier otro resultado. Si los resultados de un proceso aleatorio son absolutamente independientes, entonces el proceso es infinitamente aleatorio y aperiódico. Dicha secuencia constituye una inagotable fuente de sorpresa y novedad.

Un proceso aleatorio puede ser visto como una distribución en el tiempo o en el espacio. Por ejemplo, la ubicación de estrellas en el cielo de la noche constituye un cambio, muy lentamente al azar, en función de su posición, uno que evoluciona a lo largo de millones de años.

3.3.2 PSEUDOALEATORIEDAD.

Las computadoras sólo pueden ejecutar métodos estrictamente algorítmicos y la eficacia requerida por los algoritmos excluye todo lo que depende de incógnitas, por lo que las computadoras no pueden ser una verdadera fuente de secuencias al azar para el diseño. Sin embargo, los matemáticos han gastado una buena cantidad de efectos computables tratando de desarrollar fuentes de aleatoriedad.

Por principio, acerca de independencia, sólo se sabe que una secuencia perfectamente aleatoria si nunca repite sus elecciones en su totalidad o en parte. Pero en la práctica una secuencia no tiene que ser totalmente aleatoria para ser útil, tan sólo debe ser *suficientemente aleatoria* para sorprendernos. Por lo tanto, la aleatoriedad es esencial en un criterio empírico que se utiliza para caracterizar los procesos que no es posible predecir.

Aunque las computadoras no pueden generar secuencias aleatorias puras, hay técnicas numéricas que les permiten generar un número de secuencias que son suficientemente aleatorias para su uso práctico. Como siempre, todas las secuencias generadas por una computadora eventualmente se repiten, por lo que son llamadas *pseudoaleatorias*.

3.4 Cadenas de Markov.

Como consecuencia de la aparición de aleatoriedad en la música, se ha buscado incluir el uso de modelos de procesos estocásticos, con el objetivo de generar algunas curiosidades estéticas significativas heredadas de propiedades científicas. Desde luego que esta fue una de las principales razones por las cuales elegí trabajar con cadenas de Markov para modelar la composición musical.

El motor inconsciente que me llevó a concretar este trabajo se encendió a temprana edad, teniendo mis primeros contactos con la música aproximadamente a los cuatro o cinco años, a partir de los cuales comenzó el desarrollo de mi intuición musical de escucha experimentado que, como se explicó en el capítulo uno, es un conocimiento que permite organizar, encontrar patrones coherentes, distinguir intensidad, timbres, duraciones y demás sutilezas cuya complejidad, con el paso del tiempo, demanda una gramática musical explícita y formal.

Al ir logrando la ejecución de algunos instrumentos musicales y formalizando conceptos, se despertó mi creatividad composicional. Es desde este punto tan cotidiano que se buscan y emprenden las metodologías.

Si alguien se ha dado a la tarea de componer líneas melódicas, en algún momento, de forma consciente o inconsciente, debe considerar algunas reglas de contrapunto, armonía y rítmica. Una pieza musical consiste en una sucesión de combinaciones de diferentes frecuencias de sonido (tonos) con diferentes duraciones (ritmo). Por tal motivo, para elegir el rumbo que seguirá una línea melódica, es muy importante establecer el conjunto de frecuencias y duraciones con que será desarrollada; cambios muy bruscos de frecuencia y ritmo pueden lograr o impedir la línea deseada.

En la mayor parte de la música, los grupos de sonidos que conforman una idea musical, motivo, frase o tema, normalmente tiene duraciones similares, son patrones acompañados de variaciones que acentúan y enriquecen su carácter rítmico. En cuanto a las frecuencias, las líneas melódicas comúnmente se desarrollan dentro del intervalo de frecuencia s de una misma octava, algunas veces extendiéndose a dos. Es por esto que la mayoría de los compositores, en su incesante búsqueda de coherencia dentro de sus obras, guardan un registro, implícito o explícito, de cada elemento musical elegido. Por ejemplo, toman en consideración la nota inicial y su duración, que bajo algún método fijaron, para realizar su siguiente elección, luego cada nueva elección toma como referencia la última realizada. Este comportamiento es muy parecido al de las cadenas de Markov que, como se dijo antes, son procesos que sólo dependen del pasado inmediato.

A continuación, se presenta de forma detallada la metodología propuesta para la composición musical. En ella se hará uso de cadenas de Markov para modelar la estética musical.

Como se ha supuesto a lo largo de este trabajo, cualquier tipo de música tiene dos componentes principales: frecuencia y ritmo. Se desea construir sucesiones de estos dos elementos elegidos de forma aleatoria. Dichas sucesiones de variables aleatorias serán tratadas como cadenas de Markov.

Por lo tanto, el espacio de estados \mathcal{S} de la cadena de Markov quedará definido por dos subconjuntos: \mathcal{S}_t que es el conjunto de todas las posibles frecuencias y \mathcal{S}_r que contiene las duraciones rítmicas que conformarán nuestra pieza. Para indicar la probabilidad que existe de ir de una frecuencia a otra y de una duración a otra respectivamente, se generan las matrices de transición \mathbf{P}_t y \mathbf{P}_r .

Así, nuestra metodología se resume a saber cómo rellenar dichas matrices de transición; es decir, cómo obtener las probabilidades de transición entre los estados.

Una primera idea propuso fijar las probabilidades de acuerdo a reglas musicales formales occidentales. Sin embargo, esto es muy restringido y la música actual busca traspasar esas barreras. Por lo que se perdería actualidad en nuestro modelo.

La segunda iniciativa propone hacer elecciones subjetivas de acuerdo a la capacidad individual o sorteando como si fuese un juego. Esto demeritaría la naturaleza de la música producida ya que pura casualidad no tiene en cuenta las preferencias del compositor.

Evitando que nuestras matrices produzcan sólo ruido, surgió la tercera idea. Se tomará como punto de partida, para encontrar las probabilidades de transición, las matrices que describen las piezas de autores de música tradicional mexicana, música tradicional cubana, jazz y música clásica, todas ellas tomadas de su notación musical formal. Esto heredará el componente occidental a nuestra metodología. Cada una de las partituras estudiadas en el presente trabajo se encuentran en el Apéndice 1.

Para obtener las matrices de transición que arroja cada pieza, se realiza un estudio armónico y rítmico de su partitura, que consiste en establecer la cantidad de eventos y su distribución durante la obra. Primero se realiza un conteo, haciendo distinción entre cada tipo de elemento musical registrado, tanto rítmico como interválico armónico, luego se estima la frecuencia y el orden con que se repiten los eventos a lo largo de la obra. Por último, se normalizan los resultados y se generan las probabilidades de transición. A manera de ejemplo, se analiza el siguiente fragmento de una pieza musical:



Este fragmento consta de tres elementos rítmicos (octavo, negra con puntillo y silencio de negra) cada uno aparece dos veces a lo largo del fragmento. En cuanto a los intervalos armónicos, se tienen tres elementos (una cuarta justa y una tercera mayor ascendentes y una quinta justa descendente) en la tonalidad de Sol Mayor. Por lo tanto, nuestro espacio de estados S queda definido por $S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♩}, 3 = \text{♩}\}$ y $S_t = \{1 = G, 2 = B, 3 = C, 4 = E\}$ y las matrices obtenidas son:

$$P_r = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde es posible interpretar lo siguiente:

- | P_r | P_t |
|---|---|
| • $p_{1,1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = \text{♩} X_n = \text{♩}) = \frac{1}{2}$. | • $p_{1,1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = G X_n = G) = 0$. |
| • $p_{1,2} = \mathbb{P}(X_{n+1} = \text{♩} X_n = \text{♩}) = \frac{1}{2}$. | • \vdots |
| • $p_{1,3} = \mathbb{P}(X_{n+1} = \text{♯} X_n = \text{♩}) = 0$. | • $p_{4,1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = G X_n = E) = 0$. |
| • $p_{2,1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = \text{♩} X_n = \text{♩}) = \frac{1}{2}$. | • $p_{4,2} = \mathbb{P}(X_{n+1} = B X_n = E) = 1$. |
| • \vdots | • $p_{4,3} = \mathbb{P}(X_{n+1} = C X_n = E) = 0$. |
| • $p_{3,3} = \mathbb{P}(X_{n+1} = \text{♯} X_n = \text{♯}) = 0$. | • $p_{4,4} = \mathbb{P}(X_{n+1} = E X_n = E) = 0$. |

Una vez obtenida la información que arroja cada pieza musical, con ayuda de nuestra intuición artística y basados en criterios formales de composición, se detallan las matrices para hacer que cumplan con algunas propiedades de las cadenas de Markov, pues como se observa en el ejemplo las matrices originales no siempre corresponden a matrices de transición de cadenas de Markov.

Utilizando *MATLAB*, un software matemático creado por la compañía *The MathWorks*, que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio (lenguaje M), se capturan las matrices resultantes y se generan nuestras líneas melódicas. En el siguiente capítulo se discuten las composiciones resultantes.

Las principales problemáticas que se presentan al utilizar cadenas de Markov son las siguientes:

- Existencia y unicidad del vector invariante.
- Comportamiento asintótico de la cadena con respecto a cada vector de distribución inicial.
- Existencia de límites tipo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x), \quad x \in S$$

o de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = y), \quad x, y \in S.$$

- Comportamiento asintótico de las potencias de la matriz de transición.

La preocupación en estas problemáticas se debe a la dificultad para calcular sus aproximaciones numéricas y las de potencias con exponentes grandes de la matriz de transición; es decir, el modo de poder predecir el comportamiento de la cadena en tiempos grandes es aprovechando las respuestas teóricas a estas cuestiones. Sin embargo, en este trabajo no se profundizará en ello.

3.4.1 MÚSICA TRADICIONAL CUBANA.

La música cubana es un punto de contacto entre dos linajes: El español y el africano.

En los pueblos europeos, como se dijo antes, la liturgia siempre fue íntimamente ligada a la música y durante más de diez siglos se consideró que el único objetivo de la música era contener y dar relieve al texto sacro. Hubo peligro de que en el desarrollo y evolución de la música profana pudiera ser descubierto un vínculo y no una identidad, entre religión y música. Con el desarrollo de la música instrumental definitivamente se dividieron los campos.

En la raza negra, las dos cualidades se fusionaron en un florecimiento espiritual y el tambor ascendió a tomar un carácter divino.

Un pequeño conocimiento de las canciones tradicionales cubanas nos da el hecho de que su melodía es absolutamente opuesta a aquella del negro, del cual puede decirse que no tiene otra voz que aquella de sus tambores (África nativa). Así, la música tradicional cubana toma como punto de expresión rítmica la base africana. En cuanto a sus melodías, contienen una fuerte influencia del folklor español cuya riqueza consiste sobre todo en su variedad modal. Las canciones tradicionales cubanas son un eco de España. Uno de los datos más interesantes se encuentra al observar el final de las guajiras y puntos, siempre en la dominante. La cadencia tradicional es una derivación de aquella de Andalucía, conservando su sucesión típica de quintas, pero careciendo también de su propio ambiente modal.

Por lo tanto, parece lógico creer que la organización musical tradicional cubana, muy parecida a la española, ha encontrado en el ambiente de la raza negra una

oportunidad de expansión en la cual las reglas clásicas son negadas y se procede a interpretar expresando los más profundos sentimientos. En esto recae la esencia de la música Afro-Cubana, la combinación de un modo melódico en la manera española con la fortaleza del ritmo africano.

Si se profundiza ligeramente en la estructura rítmica de la música cubana se reconocerá que todo su diseño melódico se construye sobre un patrón rítmico de dos medidas, como si ambas formaran una sola. El primero es antecedente, fuerte, y el segundo es consecuente, débil. Esto ocurre no sólo en piezas instrumentales, sino también en la música vocal. La canción cubana, donde hay una razón más para extender el desarrollo rítmico de la melodía, muestra estos patrones para compases de $\frac{2}{4}$ y $\frac{6}{8}$. Esta adaptación del concepto melódico con el patrón rítmico es manifestada de tal manera que el cambio de una medida en la percusión produce una discrepancia notoria entre la melodía y el ritmo que se vuelve insoportable. Esto es lo que los cubanos, utilizando un término muy gráfico, llaman *atravesarse*. En el deseo de ajustarse a una interpretación cercana al verdadero sonido cubano, los compositores utilizan como principal expresión rítmica de la música tradicional el cinquillo, que para los nativos de Cuba, en los cuales este ritmo es innato, su interpretación no ofrece dificultad; en cambio, el extranjero, preocupado por la adaptación de sus propios sentimientos a la música cubana, normalmente exagera la acentuación y deforma el patrón rítmico.

Otra característica primordial de la música cubana es el uso de *las claves*, dos piezas cilíndricas de madera, las cuales al ser golpeadas una contra la otra producen un sonido muy parecido al de un bloque de madera, cuya calidad las hace sobresalir y dominar con autoridad absoluta. Las claves encarnan la tiranía rítmica de la canción cubana, rompiendo su fórmula inmutable, guiando los pasos de los bailarines que siguen las claves tan cerca como la sombra sigue al cuerpo. Esto explica el hecho de que el espíritu de la danza siempre predomina en la música. Se puede decir, tanto de Cuba como de América, que la gente baila como manifestación de un dinamismo en el cual la humanidad está viviendo el presente.

En este género musical se analiza una *danza cubana tradicional* de Ignacio Cervantes y "*Bruca Manigua*", un son afrocubano de Arsenio Rodríguez.

3.4.2 MÚSICA TRADICIONAL MEXICANA.

Desafortunadamente la diversidad cultural y artística de los pueblos del continente americano fue conquistada por el mundo occidental. Es muy difícil encontrarse con

evidencia del pasado musical puramente americano. Sin embargo, nos resultaría fácil pensar que su origen también es religioso y ceremonial.

Con el mestizaje, en México surge una gran variedad de estilos de música y baile de carácter profano y festivo que han permanecido como tradición entre la población. El ritmo de casi toda la música tradicional mexicana utiliza compases compuestos como $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$. Es muy poca la música escrita en compases simples. En cuanto a la armonía, se utilizan principalmente las progresiones elementales de las escalas tonales.

Aunque varias de las melodías originales pertenecieron a cantos populares traídos por los españoles (coplas provenientes de España del siglo XVI), dichas tonadas han sufrido tal cantidad de modificaciones que hoy poco o nada tienen que ver con sus antepasados.

La estructura de la música mexicana está basada en la alternancia de coplas y partes instrumentales. Suele combinarse una introducción con un canto o el desarrollo de un tema melódico, un estribillo que se repite entre canto o tema y un remate final.

Cuando además aparece la voz humana, todos cantan, aunque suele haber uno que destaca como voz solista. La variedad de su temática incluye el amor, descripciones de mitos, costumbres, tradiciones, leyendas, personajes, paisajes naturales y animales, nombres geográficos o rutas de viajes, así como organización social y acontecimientos políticos y religiosos. En general, es orientada al baile social, no a la danza ritual. Suelen intervenir una o más parejas que ejecutan zapateados sobre tarimas que complementan y realzan la parte rítmica de la música. Casi siempre el zapateo comienza con el primer acento musical. Cuando el trovador entona su pregón se pasa al escobilleo. Posteriormente se ataca con mucha fuerza en los tacones y las plantas de los pies cuando los instrumentos repican, pero la suavidad reaparece en el paseo cuando se escucha la cantada. El coqueteo y el acecho son partes imprescindibles del baile. Además, es común que cada cantante haga variaciones melódicas en un estilo muy personal, lo cual hace que a veces la melodía de un mismo son suene muy diferente en versiones de intérpretes distintos, aun pertenecientes a la misma región.

Muchos consideran que por su riqueza, difusión y popularidad, el son es la manifestación más representativa de la música tradicional mexicana. Este género se halla ampliamente difundido en el territorio nacional en una importante

variedad de estilos regionales que constituyen una expresión de diferentes zonas geográficas y culturales del país.

Para el análisis rítmico y armónico de esta sección se eligieron las piezas: “*La llorona*”, un famoso son del istmo de Tehuantepec (Oaxaca), sin autor específico y “*El Sinaloense*” de Severiano Briseño.

3.4.3 JAZZ.

El jazz es un género musical que se desarrolló a partir de la combinación de las tradiciones de África occidental, Europa y Norteamérica, que hallaron su crisol entre la comunidad afroamericana asentada en el sur de Estados Unidos.

Sus dos características principales son la superposición de ritmos regulares e irregulares mediante el uso de contratiempo y síncopas, y la improvisación. Su instrumentación básica común es batería, bajo (contrabajo), piano o guitarra e instrumentos de aliento.

Este género nace en la ciudad de Nueva Orleans a orillas del Mississippi a finales del siglo XIX y durante los primeros años del siglo XX. Durante este periodo, la actividad musical norteamericana se centraba en un barrio llamado Storyville donde se escuchaban distintos géneros musicales como *Blues*, *Góspel* y *rag-time*, entre otros.

En esta ubicación geográfica surgen las primeras bandas musicales de negros. Posteriormente, como imitación, de los blancos surgió un nuevo estilo llamado *Dixieland*. La banda más famosa, la *Original Dixieland Jazz-Band*, grabó en enero de 1917 y fue el primer disco donde aparece la palabra *jazz* para definir un género musical. En este año se cierran los salones de Nueva Orleans y toda la actividad musical pasa a la ciudad de Chicago. Hay una emigración del Sur al Norte.

El jazz que se escuchaba en Chicago es el llamado *Estilo Nueva Orleans*. Aquí aparecen grandes genios de la música, pioneros del jazz como *King Oliver*, *Freddie Keppard*, *Louis Armstrong*, *Jelly Roll Morton*, *Sidney Bechet* y *Buddy Bolden*. No debe olvidarse que en estos momentos el *blues* estaba en su época dorada y esto influyó en el jazz (escalas pentatónicas y estructuras de 12 compases).

Durante finales de los años veinte y hasta mediados de la década de los 40's, la Big-Band dominó la escena musical cargándola de perfeccionismo europeo. El

Swing se caracterizó por su carácter melódico que permitió que fuera una música perfecta para el baile, por lo que su penetración mundial fue acelerada. Las composiciones seguían un formato escrito y no se daba gran libertad a la improvisación. Al principio las bandas eran raciales, finalmente se fueron integrando músicos blancos y negros. Algunos de los directores de Big-Band más reconocidos fueron Fletcher Henderson, Count Basie, Duke Ellington y Benny Goodman, entre otros.

Después de la segunda guerra mundial surge el bebop, la revolución musical base de todo el jazz moderno. Se caracteriza por tener tempo rápido, muy vivo y estructura de 32 compases. Las melodías son fragmentarias, con mucha improvisación y armonía más compleja. Destacan músicos como Charlie Parker, Dizzy Gillespie y Thelonious Monk, quienes fueron los grandes gestores de este género.

En los años cincuentas el *cool-jazz* o *West Coast jazz*, y el *hardbop* convivieron en una pugna por la hegemonía musical del jazz. Vuelve el jazz equilibrado de los años 20, se busca una sonoridad más elegante y más académica (parecido al swing). Es más tranquilo, con melodías cantables y memorizables, pero con una armonía complicada. Utilizan 5 instrumentos y se inventan las escobillas de la batería. Sin embargo, como reacción se oscila hacia el funky acentuando sus características.

Finalmente con Miles Davis principalmente, surge un jazz que funciona a base de improvisaciones modales, propio de la música europea que más adelante daría origen al *free-jazz*, con la colaboración de maestros como Tom Cherry y Chick Corea. Este estilo de jazz ha permanecido popular hasta nuestros días.

Precisamente, en este género se analizará rítmica y melódicamente la pieza "*Spain (I can recall)*", cuya música es de Chick Corea.

3.4.4 MÚSICA CLÁSICA.

Música Clásica es el nombre habitual de la música culta y académica occidental. Este término aparece por primera vez aproximadamente a mitad de los 30's y señala las composiciones europeas más destacadas. Con el paso del tiempo se ha utilizado para referirse a lo opuesto a la música popular.

Se debe tener en cuenta que la música culta europea surgió tomando componentes de otras tradiciones musicales, principalmente la griega y la romana, incluyendo, como se ha comentado a lo largo del capítulo, su desarrollo en la liturgia católica.

No obstante, se puede distinguir diferentes periodos históricos de la música occidental como parte de una generalización ampliamente aceptada:

Música antigua: Música previa al año 476, desarrollada aproximadamente durante la época de la caída del Imperio Romano. A ella pertenecen la música de la Antigua Grecia y la música de la Antigua Roma. Con el ascenso de la Iglesia Católica como religión oficial, el canto gregoriano toma un papel protagónico.

Música medieval: Anterior a 1450. El canto monofónico o gregoriano predominó hasta el año 1100. La música polifónica (a varias voces) se desarrolló a partir de finales de la Edad Media y hasta el Renacimiento.

Música renacentista: Música desarrollada entre 1450 y 1600. Se caracteriza por un mayor uso de instrumentos, incluye múltiples líneas melódicas y el uso de los primeros instrumentos graves o bajos.

Música barroca: Entre 1600 y 1750. Caracterizada por tonalidades más complejas y el uso de adornos, contrapunto y fugas. Además se popularizan los instrumentos de teclado como el clavicémbalo y el órgano.

Música clásica: Entre 1730 y 1820, fue una era importante que estableció varias de las normas de composición, estilo y estructura. El período clásico también está marcado por la desaparición del clavicémbalo y el clavicordio en favor del nuevo piano, que a partir de ese momento se convirtió en el instrumento predominante para la interpretación en teclado y la composición.

Música romántica: Entre 1815 y 1910. Se expandió el rol de la música en la vida cultural y se crearon instituciones para la enseñanza, ejecución y conservación de las obras musicales.

Música moderna: Entre 1905 y 1985. Período que representó una crisis en los valores de la música clásica y su rol dentro de la vida intelectual, la extensión de la teoría y la técnica. Representa una progresión lógica de las tendencias en la composición del siglo XIX, aunque otros sostienen que representa el rechazo o la negación del método de composición clásica.

Para el análisis musical de esta sección se eligieron el cuarto número del *Requiem* de Mozart titulado "*Rex Tremendae*" y el cuarto número de "*Lobgesan*", la segunda Sinfonía de Mendelssohn.

3.5 Redes Neuronales.

Como se estableció a lo largo del primer capítulo, el desarrollo de una idea musical está íntimamente relacionado con la capacidad cognitiva individual. No obstante, esta organización mental producida requiere entrenamiento para lograr, con mayor precisión, los resultados deseados.

Paralelamente, en las redes neuronales, se pueden distinguir dos fases principales: la fase de aprendizaje y la fase de aplicación. La fase de aprendizaje consiste en intentar optimizar las salidas de la red neuronal para que se ajusten a las salidas esperadas dentro del ámbito de aplicación de la red. La forma de operar radica fundamentalmente en modificar los pesos asociados a las conexiones entre las neuronas, en base a la presentación de una serie de patrones de entrada, que en nuestro caso se refiere a la información original obtenida de las piezas musicales.

Adicionalmente, se le indica a la red neuronal, junto con los patrones de entrada, la salida esperada que debe generar (propiedades de cadenas de Markov) y la red ajusta los pesos de las conexiones.

Como se puede apreciar *los nuevos pesos* se calcularían en base a los pesos originales, incrementándole el error obtenido, resultado de comparar la salida real generada por la red y la salida deseada asociada.

Se deja abierto el tema para futuras aportaciones acerca del entrenamiento de una red neuronal que ajuste las probabilidades de transición de las cadenas de Markov en base a una función de minimización del error producido.

CAPÍTULO 4.

La música existe prácticamente en todas las culturas del mundo. Entre otras cosas, es una manera de expresar las emociones de uno. Durante este capítulo se desarrollan diferentes herramientas generadoras de ideas musicales, siendo todas ellas aplicaciones de la teoría formal de cadenas de Markov. Se estudian las matrices construidas en el capítulo anterior, haciendo uso de los recursos y teoremas revisados a lo largo de los primeros capítulos.

Comenzaremos por afirmar que todas las matrices generadas son estocásticas; es decir, cada uno de sus reglones es un vector de probabilidad. Cada entrada se calculó de acuerdo a los principios de Probabilidad Clásica a razón de casos *favorables* entre casos *totales*, con el fin de medir la frecuencia y el orden con el que se pasa de un estado a otro. Gracias a esta cualidad, la información obtenida podrá ser manipulada como matrices de transición asociadas a cadenas de Markov. Se debe mencionar que las matrices correspondientes a cada pieza se irán presentando a lo largo de este capítulo; se han distribuido con el objetivo de ilustrar adecuadamente los resultados utilizados en cada sección de la metodología.

Como se podrá ver en todos los ejemplos, el espacio de estados S es finito y numerable, diferente en cada pieza, de acuerdo con la tonalidad y rítmica elegida por cada autor. Por lo tanto, las cadenas generadas, realmente conformarán un modelo discreto.

Cada cadena resultante recibirá el nombre de la pieza que la genera con un indicador final referente a si es Armónica(A) o Rítmica(R). Por ejemplo, *LaLloronaA* es la cadena generada por la matriz armónica obtenida de la pieza *La Llorona*.

Para generar cada línea melódica, como último paso se fusionan ambas cadenas (rítmica y armónica) de cada pieza. Cada uno de los resultados se presenta en el disco adjunto a este trabajo.

4.1 Generador Distributivo (GD).

Como primer herramienta, se construye una simulación que genera un número aleatorio $r \in (0, 1)$ el cual es comparado con cada vector de probabilidad de la matriz y por la acumulación de probabilidad se decide el estado que visita.

Para comenzar a generar música se aplica esta herramienta a la *Danza Cubana 1*, de Ignacio Cervantes, y a *El Sinaloense*, de Severiano Briseño.

Danza Cubana 1.

ANÁLISIS RÍTMICO.

Como se puede leer en su partitura, la rítmica de esta pieza se desarrolla en compases de $\frac{2}{4}$. Este compás es utilizado comúnmente en las marchas, esto podrá orientarnos en la interpretación de la música generada.

El espacio de estados de la cadena *DanzaCubanaR* es

$$S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♩}, 3 = \text{♩}, 4 = \text{♩}, 5 = \text{♩}, 6 = \text{♩}\},$$

con matriz de transición asociada

$$DCR = \begin{pmatrix} 0.7172 & 0.2323 & 0 & 0.0101 & 0.0404 & 0 \\ 0.2656 & 0.6250 & 0.0156 & 0.0625 & 0.0313 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.9167 & 0 & 0 & 0.0833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8333 & 0 & 0.1667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para realizar la simulación, se utiliza *MATLAB*. A continuación se muestra el código necesario para programar el *GD* de esta matriz^[*]:

```
rand('state',sum(100*clock));

K=6;

for j=1:K,
    r=rand;
    if (r<DCR(j,1))
        DanzaCubanaR(j)=1;

    elseif (DCR(j,1)<=r<DCR(j,1)+DCR(j,2))
        DanzaCubanaR(j)=2;

    elseif (DCR(j,1)+DCR(j,2)<=r<DCR(j,1)+DCR(j,2)+DCR(j,3))
        DanzaCubanaR(j)=3;

elseif
    (DCR(j,1)+DCR(j,2)+DCR(j,3)<=r<DCR(j,1)+DCR(j,2)+DCR(j,3)
    +DCR(j,4))
        DanzaCubanaR(j)=4;

    elseif
    (DCR(j,1)+DCR(j,2)+DCR(j,3)+DCR(j,4)<=r<DCR(j,1)+DCR(j,2)
    +DCR(j,3)+DCR(j,4)+DCR(j,5))
        DanzaCubanaR(j)=5;

    elseif
    (DCR(j,1)+DCR(j,2)+DCR(j,3)+DCR(j,4)+DCR(j,5)<=r<DCR(j,1)
    +DCR(j,2)+DCR(j,3)+DCR(j,4)+DCR(j,5)+DCR(j,6))
        DanzaCubanaR(j)=6;

    else
        DanzaCubanaR(j)=0;

end

r
DanzaCubanaR
End
```

[*] Análogamente se construye el *GD* para cada matriz.

En caso de generarse un cero, la creatividad y la intuición artística deberán ayudarnos a elegir el estado que visitará la cadena musical.

$$\mathbf{DanzaCubanaR}_1 = \{1, 3, 6, 1, 5, 3\} \equiv \{\text{♩}, \text{♩}, \text{♩}, \text{♩}, \text{♩}, \text{♩}\}.$$

$$\mathbf{DanzaCubanaR}_2 = \{3, 3, 4, 5, 2, 3\}.$$

$$\mathbf{DanzaCubanaR}_3 = \{2, 1, 2, 4, 1, 6\}.$$

$$\mathbf{DanzaCubanaR}_4 = \{1, 5, 6, 1, 3, 2\}.$$

ANÁLISIS ARMÓNICO.

En la armadura de esta pieza aparece una sola alteración (F^\sharp); por lo tanto, de acuerdo con la tabla de tonalidades (Fig. 1.15), su tonalidad es GM , cuya escala relativa menor es Em .

El espacio de estados de la cadena $\mathbf{DanzaCubanaA}$ es:

$$S_t = \left\{ \begin{array}{l} [**] \quad 1 = A_{-8}, 2 = A^\sharp_{-8}, 3 = B^\flat_{-8}, 4 = B, 5 = C, 6 = C^\sharp, 7 = D^\sharp, 8 = E, \\ 9 = F^\sharp, 10 = G, 11 = G^\sharp, 12 = A, 13 = A^\sharp, 14 = B, 15 = C_8, 16 = C^\sharp_8, 17 = D_8, \\ 18 = D^\sharp_8, 19 = E_8, 20 = F^\sharp_8, 21 = F^\sharp_8, 22 = G_8, 23 = G^\sharp_8, 24 = A_8, 25 = B_8 \end{array} \right\},$$

cuya matriz de transición asociada DCA se presenta en la Fig. 4.1.

Aplicando el GD a DCA , se obtiene:

$$\mathbf{DanzaCubanaA} = \{13, 8, 13, 15, 8, 5, 17, 18, 12, 4, 6, 14, 15, 20, 16, 19, 16, 24, 18, 22, 23, 20, 22, 23, 5\}.$$

[**] La nomenclatura (-8) se refiere a la octava siguiente hacia abajo (C2) de la octava central dibujada sobre el pentagrama en clave de Sol (C3).

(8) Se refiere a la siguiente octava hacia arriba (C4) de la octava central dibujada sobre el pentagrama en clave de Sol (C3).

El Sinaloense.

ANÁLISIS RÍTMICO.

La rítmica de esta pieza queda determinada por un compás compuesto de $\frac{6}{8}$, que como se menciona en el capítulo anterior es típico en la música tradicional mexicana.

El espacio de estados de la cadena *ElSinaloenseR* es

$$S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♩}, 3 = \text{♩}, 4 = \text{♩}, 5 = \text{♩}, 6 = \text{♩}, 7 = \text{♩}\},$$

con matriz de transición asociada

$$SR = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1667 & 0 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5574 & 0.4262 & 0 & 0.0164 & 0 & 0 \\ 0.0217 & 0.4348 & 0.3478 & 0.0217 & 0 & 0.1522 & 0.0217 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1429 & 0.8571 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando *GD* a *SR*, se obtiene:

$$ElSinaloenseR = \{6, 3, 7, 4, 4, 3, 1\}.$$

4.2 Generador Paso a Paso.

Como segunda herramienta, estableciendo la distribución inicial (2.2), se genera el vector de probabilidad de la cadena de Markov en cada paso.

Con el objetivo de ilustrar, en esta sección se utiliza la pieza *La Llorona* y el No.4 de la Sinfonía *Lobgesang*.

La Llorona

ANÁLISIS RÍTMICO.

El compás de esta pieza es $\frac{3}{4}$. Además de ser un compás característico en la música tradicional mexicana, es comúnmente utilizado para el vals y la mazurka por la métrica que propone.

El espacio de estados de la cadena *LaLloronaR* es

$$S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♩}, 3 = \text{♩}, 4 = \text{♩}, 5 = \text{♩}\},$$

con matriz de transición asociada

$$LLR = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1549 & 0.6197 & 0.1127 & 0.0282 & 0.0704 \\ 0 & 0.667 & 0.25 & 0 & 0.0833 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8333 & 0.1667 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para el primer caso suponga que la cadena comienza en el primer estado (♩). Por lo tanto, sea

$$\pi_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = (1, 0, 0, 0, 0)$$

la distribución inicial de la cadena.

De acuerdo con (2.5), se tiene que:

$$p^{(1)} = \pi_1 LLR = (0, 1, 0, 0, 0).$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} LLR = \pi_1 LLR^2 = (1, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0.1549 & 0.6197 & 0.1127 & 0.0282 & 0.0704 \\ 0.1242 & 0.6728 & 0.1097 & 0.0175 & 0.0530 \\ 0.1033 & 0.6493 & 0.1515 & 0.0188 & 0.0678 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1291 & 0.6275 & 0.1356 & 0.0235 & 0.0726 \end{pmatrix}$$

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4444	0.1111	0	0	0.4444	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0.3333	0	0	0	0.3333	0	0	0	0	0	0.3333	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.125	0	0	0	0	0.125	0	0.125	0	0	0	0	0.125	0	0	0.25	0	0.25	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0.4	0	0.3	0.1	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.0625	0.25	0	0	0	0	0.375	0.0625	0	0	0	0.1875	0	0	0	0	0	0.0625	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0.2	0	0	0.2	0.2	0	0	0.2	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DCA =	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0588	0.4118	0.1176	0.2941	0.0588	0	0	0.0588	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0	0	0.6	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0.0769	0	0	0	0.0385	0	0	0	0.3462	0.1154	0.0769	0.0385	0.0385	0.0385	0.0385	0.0769	0	0	0	0	0.0385	0.0769
	0.1429	0	0	0	0.1429	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2857	0.2857	0	0.1429	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1667	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0.1667	0	0	0	0.1667	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.125	0.5	0.125	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.4	0	0.2	0	0	0	0	0	0.2	0.2	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0.1667	0	0	0	0	0.1667	0	0	0	0.3333	0.1667	0	0	0	0	0.1667	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0.25	0	0	0.25	0	0	0.25
	0	0	0	0	0	0	0	0.3333	0	0	0	0	0	0.1667	0	0	0	0	0.1667	0	0.1667	0.1667	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0	0	0.5	0	0	0	0.25
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3333	0.1667	0.3333	0.1667
	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.6	0

Fig. 4.1 Danza Cubana. Matriz Armónica.

$$p^{(2)} = (0.1549, 0.6197, 0.1127, 0.0282, 0.0704).$$

$$p^{(3)} = p^{(2)}LLR = \pi_1LLR^3 = (1, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0.1242 & 0.6728 & 0.1097 & 0.0175 & 0.0530 \\ 0.1217 & 0.6585 & 0.1121 & 0.0190 & 0.0565 \\ 0.1194 & 0.6631 & 0.1223 & 0.0183 & 0.0583 \\ 0.1549 & 0.6197 & 0.1127 & 0.0282 & 0.0704 \\ 0.1207 & 0.6689 & 0.1167 & 0.0177 & 0.0555 \end{pmatrix}$$

$$= (0.1242, 0.6728, 0.1097, 0.0175, 0.0530).$$

$$p^{(4)} = p^{(3)}LLR = \pi_1LLR^4 = (1, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0.1217 & 0.6585 & 0.1121 & 0.0190 & 0.0565 \\ 0.1210 & 0.6516 & 0.1116 & 0.0185 & 0.0557 \\ 0.1210 & 0.6605 & 0.1150 & 0.0187 & 0.0569 \\ 0.1242 & 0.6728 & 0.1097 & 0.0175 & 0.0530 \\ 0.1213 & 0.6592 & 0.1138 & 0.0188 & 0.0568 \end{pmatrix}$$

$$= (0.1217, 0.6585, 0.1121, 0.0190, 0.0565).$$

$$p^{(5)} = p^{(4)}LLR = \pi_1LLR^5 = (1, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0.1210 & 0.6516 & 0.1116 & 0.0185 & 0.0557 \\ 0.1195 & 0.6456 & 0.1106 & 0.0184 & 0.0552 \\ 0.1210 & 0.6544 & 0.1127 & 0.0186 & 0.0561 \\ 0.1217 & 0.6585 & 0.1121 & 0.0190 & 0.0565 \\ 0.1210 & 0.6531 & 0.1122 & 0.0186 & 0.0559 \end{pmatrix}$$

$$= (0.1210, 0.6516, 0.1116, 0.0185, 0.0557).$$

Por lo tanto, si la cadena comienza en \sharp , la probabilidad de que la quinta duración seleccionada sea \sharp es de 12.1%, la probabilidad de sea \flat es de 65.16%, al probabilidad de que sea elegida \natural es de 11.16%, la probabilidad de elegir silencio de octavo es de 1.85% y la probabilidad se elija silencio de negra es de 5.57%.

ANÁLISIS ARMÓNICO.

La armadura de esta pieza contiene tres alteraciones (B^\flat , E^\flat , A^\flat) correspondientes a la tonalidad de $E^\flat M$ y cuya escala relativa menor es Cm (Fig. 1.15).

El espacio de estados de la cadena $LaLloronaA$ es

$$S_t = \{1 = D, 2 = E^\flat, 3 = F, 4 = G, 5 = A^\flat, 6 = B^\flat, 7 = B^\natural, 8 = C_8, 9 = D_8, 10 = E_8^\flat\},$$

cuya matriz de transición asociada LLA se presenta en la Fig. 4.2.

Para este ejemplo, se toma como distribución inicial, la dada originalmente por el autor; es decir, de acuerdo con la partitura, la pieza comienza en G . Por lo tanto, sea

$$\pi_4 = \mathbb{P}(X_0 = 4) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

la distribución inicial de la cadena.

Se genera el vector de probabilidad de la cadena paso a paso:

$$\mathbf{p}^{(1)} = \pi_4 LLA = (0, 0.2727, 0, 0.5, 0, 0.1364, 0, 0.0909, 0, 0)$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} LLA = \pi_4 LLA^2,$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = (0, 0.2455, 0.0545, 0.3591, 0.0620, 0.1178, 0.0152, 0.1061, 0.0248, 0.0152).$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(2)} LLA = \pi_4 LLA^3,$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = (0.0545, 0.1961, 0.0491, 0.3062, 0.0934, 0.1166, 0.0177, 0.1122, 0.0290, 0.0253).$$

$$\mathbf{p}^{(4)} = \mathbf{p}^{(3)} LLA = \pi_4 LLA^4,$$

$$\mathbf{p}^{(4)} = (0.0764, 0.1619, 0.0392, 0.2965, 0.1130, 0.1131, 0.0187, 0.1160, 0.0338, 0.0313).$$

$$\mathbf{p}^{(5)} = \mathbf{p}^{(4)} LLA = \pi_4 LLA^5,$$

$$\mathbf{p}^{(5)} = (0.0774, 0.1456, 0.0324, 0.2941, 0.1241, 0.1154, 0.0193, 0.1204, 0.0362, 0.0350).$$

$$\mathbf{p}^{(6)} = \mathbf{p}^{(5)} LLA = \pi_4 LLA^6,$$

$$\mathbf{p}^{(6)} = (0.0711, 0.1385, 0.0291, 0.2899, 0.1322, 0.1183, 0.0201, 0.1247, 0.0385, 0.0376).$$

$$\mathbf{p}^{(7)} = (0.0647, 0.1345, 0.0277, 0.2843, 0.1388, 0.1210, 0.0208, 0.1284, 0.0403, 0.0396).$$

$$\mathbf{p}^{(10)} = (0.0547, 0.1262, 0.0257, 0.2707, 0.1522, 0.1257, 0.0222, 0.1351, 0.0439, 0.0435).$$

$$\mathbf{p}^{(17)} = (0.0484, 0.1191, 0.0239, 0.2609, 0.1625, 0.1288, 0.0233, 0.1401, 0.0465, 0.0464).$$

$$\mathbf{p}^{(27)} = (0.0472, 0.1178, 0.0236, 0.2590, 0.1645, 0.1294, 0.0235, 0.1411, 0.0470, 0.0470).$$

$$\mathbf{p}^{(44)} = (0.0471, 0.1176, 0.0235, 0.2588, 0.1647, 0.1294, 0.0235, 0.1412, 0.0471, 0.0471).$$

Por lo tanto, si la cadena comienza en G , a la larga, la probabilidad de elegir D es de 4.71%, la probabilidad elegir E es de 11.76%, la probabilidad de F es de 2.35%, G tiene una probabilidad de ocurrir de 25.88%, A de 16.47%, la probabilidad de elegir B es de 12.94%, elegir *si natural* (B^{\natural}) 2.35%, elegir C_B tiene una probabilidad de 14.12% y la probabilidad de que ocurran D_B y E_B es de 4.71%.

Como se puede observar, conforme n crece los componentes del vector de probabilidad de la cadena tiene menos variaciones.

Aplicando el GD a las matrices LLR y LLA , se obtiene:

$$LaLloronaR = \{3, 3, 3, 1, 3\},$$

$$LaLloronaA = \{5, 5, 1, 5, 6, 9, 5, 8, 7, 10\}.$$

Lobgesang-Mendelssohn.

ANÁLISIS RÍTMICO.

El compás de esta obra es C , equivalente a $\frac{4}{4}$. Efectivamente, un compás clásico.

El espacio de estados de la cadena $MendelssohnR$ es

$$S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♪}, 3 = \text{♫}, 4 = \text{♩}, 5 = \text{♪}, 6 = \text{♩}, 7 = \text{♩}, 8 = \text{♩}\},$$

con matriz de transición asociada

$$MR = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6667 & 0 & 0.1333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0313 & 0.7083 & 0.0729 & 0.1458 & 0.0104 & 0.0208 & 0.0104 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4286 & 0.0952 & 0.2381 & 0 & 0.0952 & 0.0476 & 0.0952 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 & 0.6667 \end{pmatrix}.$$

Para este análisis se trabaja diferentes distribuciones iniciales y se comparan resultados.

Sea $\pi_3 = \mathbb{P}(X_0 = 3) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ la distribución inicial de la cadena. Por lo tanto,

$$\mathbf{p}^{(1)} = \pi_3 MR = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} MR = \pi_3 MR^2 = (0.2000, 0.6667, 0, 0.1333, 0, 0, 0, 0).$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(2)} MR = \pi_3 MR^3,$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = (0.0608, 0.6627, 0.0613, 0.1556, 0.0069, 0.0266, 0.0133, 0.0127).$$

$$\mathbf{p}^{(4)} = \mathbf{p}^{(3)} MR = \pi_3 MR^4,$$

$$\mathbf{p}^{(4)} = (0.0942, 0.6112, 0.0631, 0.1418, 0.0069, 0.0286, 0.0231, 0.0310).$$

$$\mathbf{p}^{(5)} = (0.1011, 0.5982, 0.0581, 0.1355, 0.0064, 0.0262, 0.0298, 0.0447).$$

$$\mathbf{p}^{(6)} = (0.0970, 0.5923, 0.0565, 0.1330, 0.0062, 0.0254, 0.0351, 0.0546).$$

$$\mathbf{p}^{(7)} = (0.0944, 0.5864, 0.0559, 0.1310, 0.0062, 0.0250, 0.0391, 0.0620).$$

$$\mathbf{p}^{(8)} = (0.0931, 0.5816, 0.0552, 0.1293, 0.0061, 0.0247, 0.0422, 0.0678).$$

$$\mathbf{p}^{(16)} = (0.0890, 0.5680, 0.0533, 0.1245, 0.0059, 0.0237, 0.0512, 0.0843).$$

$$\mathbf{p}^{(24)} = (0.0885, 0.5664, 0.0531, 0.1239, 0.0059, 0.0236, 0.0523, 0.0862).$$

Ahora tome como distribución inicial

$$\pi_6 = \mathbb{P}(X_0 = 6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

entonces:

$$\mathbf{p}^{(1)} = (0, 0.8333, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1667).$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = (0.0260, 0.6181, 0.0608, 0.1215, 0.0087, 0.0174, 0.0365, 0.1111).$$

$$\mathbf{p}^{(3)} = (0.0853, 0.5580, 0.0566, 0.1225, 0.0064, 0.0245, 0.0490, 0.0977).$$

$$\mathbf{p}^{(4)} = (0.0911, 0.5600, 0.0524, 0.1219, 0.0058, 0.0233, 0.0524, 0.0931).$$

	0.5	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0
	0	0.4	0.2	0.4	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.2727	0	0.5	0	0.1364	0	0.0909	0	0
LLA =	0	0	0	0.2143	0.6429	0	0	0.1429	0	0
	0	0	0	0	0.4545	0.3636	0	0	0.1818	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.1667	0.6667	0	0.1667
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5

Fig. 4.2 La Llorona. Matriz Armónica.

$$\mathbf{p}^{(5)} = (0.0881, 0.5635, 0.0524, 0.1228, 0.0058, 0.0233, 0.0534, 0.0907).$$

$$\mathbf{p}^{(6)} = (0.0877, 0.5642, 0.0528, 0.1232, 0.0059, 0.0234, 0.0535, 0.0894).$$

$$\mathbf{p}^{(7)} = (0.0880, 0.5645, 0.0529, 0.1233, 0.0059, 0.0235, 0.0534, 0.0886).$$

$$\mathbf{p}^{(8)} = (0.0881, 0.5649, 0.0529, 0.1234, 0.0059, 0.0235, 0.0532, 0.0881).$$

$$\mathbf{p}^{(24)} = (0.0885, 0.5662, 0.0531, 0.1238, 0.0059, 0.0236, 0.0524, 0.0865).$$

$$\mathbf{p}^{(32)} = (0.0885, 0.5662, 0.0531, 0.1239, 0.0059, 0.0236, 0.0524, 0.0865).$$

De acuerdo con estos resultados, con el paso del tiempo, el vector de probabilidad de ocurrencia de la cadena será similar sin importar la distribución inicial que se tenga.

ANÁLISIS ARMÓNICO.

La armadura de esta pieza contiene dos alteraciones (B^b, E^b) que corresponden a la tonalidad de B^bM y cuya escala relativa menor es Gm (Fig. 1.15).

El espacio de estados de la cadena *MendelssohnA* es

$$S_t = \left\{ \begin{array}{l} 1 = F^\sharp, 2 = G, 3 = A^b, 4 = A, 5 = B^b, 6 = B^\sharp, 7 = C_B, 8 = C_B^\sharp, 9 = D_B, 10 = E_B, 11 = E_B^\sharp, \\ 12 = F_B, 13 = G_B \end{array} \right\}$$

cuya matriz de transición asociada MA se presenta en la Fig. 4.3.

De acuerdo con la partitura, la pieza comienza en G . Por lo tanto, sea

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \mathbb{P}(X_0 = 2) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

la distribución inicial de la cadena. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(1)} &= \boldsymbol{\pi}_2 MA \\ &= (0.0476, 0.5714, 0, 0, 0.1429, 0.0476, 0, 0, 0.0476, 0.0952, 0.0476, 0, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(5)} &= (0.0090, 0.1690, 0.0088, 0.0854, 0.2145, 0.0195, 0.2704, 0.0080, 0.2455, 0.1386, 0.0234, 0.0647, 0.0070). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(10)} &= (0.0087, 0.1940, 0.0132, 0.1168, 0.3102, 0.0249, 0.4000, 0.0094, 0.3554, 0.2037, 0.0303, 0.1012, 0.0105). \end{aligned}$$

$$p^{(13)} = (0.0105, 0.2370, 0.0162, 0.1435, 0.3816, 0.0305, 0.4924, 0.0116, 0.4376, 0.2510, 0.0372, 0.1248, 0.0130).$$

$$p^{(15)} = (0.0121, 0.2718, 0.0186, 0.1647, 0.4380, 0.035, 0.5653, 0.0133, 0.5023, 0.2881, 0.0427, 0.1434, 0.0149).$$

$$p^{(20)} = (0.0170, 0.3835, 0.0262, 0.2325, 0.6183, 0.0494, 0.7981, 0.0187, 0.7091, 0.4068, 0.0602, 0.2024, 0.0211).$$

Como se puede observar, a pesar de crecer n , no se nos es revelado ningún patrón de comportamiento del vector, lo que nos lleva a pensar en el límite cuando n tiende a infinito.

Aplicando el **GD** a las matrices **MR** y **MA**, se obtiene:

$$\text{Mendelssohn}R = \{1, 5, 1, 3, 7, 3, 8, 8\},$$

$$\text{Mendelssohn}A = \{10, 3, 3, 5, 5, 8, 6, 5, 8, 10, 11, 13, 13\}.$$

4.3 Generador Regular.

Hasta ahora todos los resultados obtenidos han ayudado a comprobar de forma plausible la teoría. La característica quizás más importante que comparten casi todas las matrices de transición obtenidas es que son regulares y por tanto, las cadenas generadas heredan esta propiedad cumpliendo con la Definición 2. 1. 4. 1.

Por lo tanto, es posible utilizar los resultados demostrados para cadenas regulares.

Bruca Manigua.

ANÁLISIS RÍTMICO.

La rítmica de esta obra está determinada por un compás de $\frac{2}{4}$. El espacio de estados de la cadena **BrucaManiguaR** es

$$S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♩.}, 3 = \text{♩}, 4 = \text{♩.}, 5 = \text{♩}, 6 = \text{♩.}, 7 = \text{♩}, 8 = \text{♩}, 9 = \text{♩}\},$$

con matriz de probabilidad de transición asociada

$$\begin{matrix}
\mathbf{BMR} \\
= \begin{pmatrix}
0.7097 & 0 & 0.2043 & 0.0108 & 0.0108 & 0 & 0.0645 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5172 & 0 & 0.0345 & 0 & 0.1379 & 0.0345 & 0.1379 & 0.1379 & 0 \\
0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.6 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0.2727 & 0.0909 & 0.4545 & 0 & 0.0909 & 0 & 0.0909 \\
0.1429 & 0 & 0.7143 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1429 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{matrix}$$

Para demostrar que \mathbf{BMR} es regular, sea $n = 4$, entonces:

$$\mathbf{BMR}^4 = \begin{pmatrix}
0.5980 & 0.0070 & 0.1798 & 0.0128 & 0.0637 & 0.0063 & 0.0698 & 0.0376 & 0.0250 \\
0.5925 & 0.0067 & 0.1820 & 0.0139 & 0.0665 & 0.0059 & 0.0709 & 0.0371 & 0.0245 \\
0.5969 & 0.0049 & 0.1854 & 0.0129 & 0.0620 & 0.0058 & 0.0682 & 0.0383 & 0.0255 \\
0.6068 & 0.0061 & 0.1763 & 0.0137 & 0.0658 & 0.0065 & 0.0754 & 0.0332 & 0.0162 \\
0.5935 & 0.0061 & 0.1838 & 0.0137 & 0.0656 & 0.006 & 0.0713 & 0.0367 & 0.0299 \\
0.5382 & 0.0008 & 0.2370 & 0.0164 & 0.0630 & 0.0019 & 0.0568 & 0.0421 & 0.0439 \\
0.6224 & 0.0050 & 0.1752 & 0.0115 & 0.0568 & 0.0067 & 0.0728 & 0.0334 & 0.0162 \\
0.6012 & 0.0082 & 0.17 & 0.0110 & 0.0643 & 0.0082 & 0.0726 & 0.0408 & 0.0238 \\
0.5925 & 0.0067 & 0.182 & 0.0139 & 0.0665 & 0.0059 & 0.0709 & 0.0371 & 0.0245
\end{pmatrix}$$

que tiene todas sus componentes estrictamente positivas.

De acuerdo con el TEOREMA 3, la matriz \mathbf{BMR} converge a

$$\mathbf{W}_{\mathbf{BMR}} \approx \begin{pmatrix}
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243 \\
0.5990 & 0.0064 & 0.1808 & 0.0128 & 0.0632 & 0.0062 & 0.0699 & 0.0375 & 0.0243
\end{pmatrix}$$

resultado que también puede ser obtenido si se calcula:

$$\vec{w} = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_3 \mathbf{BMR}^n$$

$$\vec{w} \approx (0.5990, 0.0064, 0.1808, 0.0128, 0.0632, 0.0062, 0.0699, 0.0375, 0.0243).$$

Por último, si se aplica el \mathbf{GD} a la matriz $\mathbf{W}_{\mathbf{BMR}}$, se obtiene:

$$\mathbf{BrucaManiguaR} = \{1, 1, 1, 1, 1, 9, 5, 4, 1\}.$$

ANÁLISIS ARMÓNICO.

La armadura de esta pieza contiene tres alteraciones (B^b, E^b, A^b) que corresponden a la tonalidad de E^bM y cuya escala relativa menor es Cm (Fig. 1.15).

El espacio de estados de la cadena *BrucaManiguaA* es

$$S_t = \{1 = B^b_8, 2 = C, 3 = E^b, 4 = F, 5 = G, 6 = A^b, 7 = B^b, 8 = C_8, 9 = D_8, 10 = E^b_8, 11 = F_8, 12 = G_8\},$$

con matriz de transición asociada

$BMA =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0952 & 0 & 0.6667 & 0 & 0.1429 & 0 & 0 & 0.0952 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0 & 0.2222 & 0.3333 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0294 & 0.0588 & 0.0588 & 0.4118 & 0.1471 & 0.1471 & 0.1176 & 0.0294 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1154 & 0.0385 & 0.3077 & 0.3077 & 0.0385 & 0.0769 & 0.1154 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0526 & 0 & 0 & 0.0526 & 0.0526 & 0.1579 & 0 & 0.4211 & 0.2632 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1333 & 0 & 0.1333 & 0 & 0.2667 & 0.4 & 0.0667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el TEOREMA 3, la matriz BMA converge a

$$\begin{matrix} W_{BMA} \\ \approx \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.1082 & 0.0210 & 0.0566 & 0.0623 & 0.2409 & 0.1730 & 0.0699 & 0.1313 & 0.1027 & 0.0137 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, aplicando GD a W_{BMA} , se obtiene:

$$BrucaManiguaA = \{8, 9, 10, 4, 9, 9, 6, 6, 11, 10, 4, 12\}.$$

	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0.0476	0.5714	0	0	0.1429	0.0476	0	0	0.0476	0.0952	0.0476	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.2	0	0.3	0.1	0	0.1	0	0.3	0	0	0	0
	0	0.1364	0.0455	0.2273	0.3636	0	0.0455	0	0.0909	0.0909	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
MA =	0	0.0435	0	0	0.3913	0.0435	0.2174	0	0.2609	0	0	0.0435	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0.0667	0	0.3667	0	0.2	0.2333	0.0333	0.1	0
	0	0	0	0	0	0	0.1667	0	0.5556	0.0556	0.0556	0.1111	0.0556
	0	0	0	0.3333	0	0	0	0.3333	0	0.3333	0	0	0
	0	0	0	0		0	0	0	0.1111	0.6667	0	0.2222	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Fig. 4. 3 Lobgesang. Matriz Armónica.

Spain.

ANÁLISIS RÍTMICO.

La medida rítmica de esta pieza es $\frac{4}{4}$, dato que parecería extraño, pues en el jazz comúnmente se recurre a compases compuestos. Sin embargo, gracias a este compás se logra el carácter *rock-latino* presente a lo largo de la obra.

El espacio de estados de la cadena *SpainR* es

$$S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♩}, 3 = \text{♩}, 4 = \text{♩}, 5 = \text{♩}, 6 = \text{♩}, 7 = \text{♩}, 8 = \text{♩}, 9 = \text{♩}, 10 = \text{♩}\},$$

con matriz asociada

$$SPR = \begin{pmatrix} 0.6493 & 0.2239 & 0.0597 & 0.0299 & 0.0224 & 0.0075 & 0.0075 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4219 & 0.3750 & 0.0781 & 0.0469 & 0.0156 & 0.0156 & 0.0156 & 0.0156 & 0.156 & 0 \\ 0.9375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por el TEOREMA 3, también se sabe que cada uno de los renglones de *W* es el vector de probabilidad invariante. Si se calcula para este caso se obtiene:

$$\bar{w} \approx (0.5583, 0.2667, 0.0667, 0.0417, 0.0208, 0.0167, 0.0167, 0.0042, 0.0042, 0.0042).$$

De este modo si se conoce \bar{w} , se conoce toda la matriz.

Por lo tanto, aplicando *GD* a *W_{SPR}*, se obtiene:

$$SpainR = \{3, 1, 1, 7, 3, 3, 1, 3, 1, 1\}.$$

ANÁLISIS ARMÓNICO.

La armadura de esta pieza contiene dos alteraciones (*F[♯]*, *C[♯]*) que corresponden a la tonalidad de *DM* y cuya escala relativa menor es *Bm* (Fig. 1.15).

El espacio de estados de la cadena *SpainA* es

$$S_t = \left\{ \begin{array}{l} 1 = F_{-8}^t, 2 = B_{-8}, 3 = C^t, 4 = D, 5 = E, 6 = F^t, 7 = F^t, 8 = G, \\ 9 = G^t, 10 = A, 11 = A^t, 12 = B, 13 = B^t, 14 = C_8^t, 15 = D_8, \\ 16 = E_8, 17 = F_8^t, 18 = F_8^t, 19 = G_8 \end{array} \right\},$$

cuya matriz de transición asociada SPA se presenta en la Fig. 4.4.

Se genera el vector de probabilidad invariante para este caso:

$$\vec{w} \approx (0.0045, 0.0363, 0.0589, 0.0535, 0.0681, 0.0045, 0.1178, 0.0619, 0.0087, 0.1253, 0.0083, \\ 0.0045, 0.1258, 0.0866, 0.1076, 0.0576, 0.0083, 0.0534, 0.0082).$$

Por último, aplicando *GD* a W_{SPA} , se obtiene:

$$SpainA = \{8, 15, 14, 15, 11, 3, 11, 11, 17, 17, 16, 19, 15, 11, 8, 15, 5, 8, 14\}.$$

Rex Tremendae.

ANÁLISIS RÍTMICO.

El compás que comanda esta pieza es **C**.

El espacio de estados de la cadena *RexR* es

$$S_r = \{1 = \text{♩}, 2 = \text{♩}, 3 = \text{♩}, 4 = \text{♩}, 5 = \text{♩}, 6 = \text{♩}, 7 = \text{♩}, 8 = \text{♩}, 9 = \text{♩}, 10 = \text{♩}, 11 = \text{♩}, 12 = \text{♩}\},$$

cuya matriz de transición asociada RR se presenta en la Fig. 4.5.

Cada uno de los renglones de la matriz W_{RR} es el vector

$$\vec{w} \approx (0.0192, 0.1923, 0.0192, 0.2404, 0.1635, 0.0865, 0.0096, 0.0385, 0.0288, 0.1154, 0.0577, 0.0288).$$

Por lo tanto, aplicando *GD* a W_{RR} , se obtiene:

$$RexR = \{5, 5, 12, 9, 5, 11, 6, 3, 11, 7, 6, 3\}.$$

ANÁLISIS ARMÓNICO.

La armadura de esta pieza contiene dos alteraciones (B^b, E^b) que corresponden a la tonalidad de B^bM y cuya escala relativa menor es Gm (Fig. 1.15).

El espacio de estados de la cadena $RexA$ es

$$S_t = \left\{ \begin{array}{l} 1 = F, 2 = G, 3 = A, 4 = B^b, 5 = C_8, 6 = C^t_8, \\ 7 = D_8, 8 = E^b_8, 9 = E^b_8, 10 = F_8, 11 = F^t_8, 12 = G_8 \end{array} \right\}$$

cuya matriz de transición asociada RA se presenta en la Fig. 4.6.

Calculando el vector de probabilidad invariante para este caso, se obtiene

$$\vec{w} \approx (0.0532, 0.0669, 0.0266, 0.0400, 0.1595, 0.0402, 0.2816, 0.0743, 0.0727, 0.0946, 0.0101, 0.0804)$$

y es posible construir la matriz W_{RA} que en cada renglón es igual \vec{w} . Por último, si aplicando GD a la matriz W_{RA} , se obtiene:

$$RexA = \{8, 4, 8, 7, 8, 11, 3, 11, 10, 6, 1, 8\}.$$

4.4 Generador Absorbente.

Como se dijo antes, casi todas las matrices obtenidas de las partituras son regulares, excepto la matriz armónica de *El Sinaloense*, que nos servirá para estudiar otro tipo de cadenas especiales.

El Sinaloense.

ANÁLISIS ARMÓNICO.

Esta pieza está en la tonalidad de FM , debido a que su armadura presenta una alteración (B^b). Su escala relativa menor es Dm (Fig. 1.15).

El espacio de estados de la cadena $ElSinaloenseA$ es

$$S_t = \{1 = E, 2 = F, 3 = G, 4 = A, 5 = B^b, 6 = B^b, 7 = C_8, 8 = D_8, 9 = F_8\},$$

con matriz de transición

$$SA = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1111 & 0 & 0.5556 & 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0769 & 0.0769 & 0.2692 & 0 & 0.2308 & 0.2308 & 0.0385 & 0.0385 & 0 \\ 0 & 0.1364 & 0.0909 & 0.3636 & 0.0455 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0526 & 0 & 0 & 0.1053 & 0.1053 & 0.0789 & 0.6053 & 0.0526 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como se puede apreciar esta matriz no es regular, pues no existe n tal que SA^n tenga todas sus componentes estrictamente positivas. Para comprobarlo, se debe poner especial atención en el último renglón de la matriz, pues sin importar el valor de n permanecerá sin cambios. Esto nos lleva a reconocer que el último estado de la cadena es absorbente pues $p_{9,9} \equiv 1$, cumpliendo con la definición. Además como $(4 \rightarrow 9)$ se concluye que nuestra cadena es absorbente.

Sea $\pi_2 = \mathbb{P}(X_0 = 2) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ la distribución inicial de la cadena. Por lo tanto,

$$p^{(1)} = \pi_2 SA = (0, 0.1111, 0, 0.5556, 0.3333, 0, 0, 0, 0).$$

$$p^{(2)} = (0, 0.1005, 0.0730, 0.3325, 0.3078, 0.0152, 0.1282, 0.0214, 0.0214).$$

$$p^{(3)} = (0.0067, 0.0933, 0.0828, 0.2854, 0.2485, 0.0241, 0.2055, 0.0195, 0.0342).$$

$$p^{(4)} = (0.0142, 0.0828, 0.0810, 0.2572, 0.2199, 0.0275, 0.2504, 0.0218, 0.0451).$$

$$p^{(5)} = (0.0203, 0.0752, 0.0793, 0.2378, 0.2032, 0.0298, 0.2764, 0.0231, 0.0550).$$

$$p^{(6)} = (0.0247, 0.0702, 0.0786, 0.2246, 0.1921, 0.0311, 0.2909, 0.0237, 0.0642).$$

$$p^{(9)} = (0.0306, 0.0634, 0.0786, 0.2049, 0.1748, 0.0319, 0.3026, 0.0239, 0.0892).$$

$$p^{(15)} = (0.0312, 0.0591, 0.0761, 0.1909, 0.1623, 0.0307, 0.2920, 0.0229, 0.1349).$$

$$p^{(24)} = (0.0290, 0.0547, 0.0705, 0.1766, 0.1502, 0.0284, 0.2706, 0.0212, 0.1987).$$

$$p^{(39)} = (0.0255, 0.0482, 0.0621, 0.1555, 0.1322, 0.0250, 0.2381, 0.0187, 0.2948).$$

$$p^{(63)} = (0.0208, 0.0393, 0.0506, 0.1267, 0.1077, 0.0204, 0.1941, 0.0152, 0.4252).$$

$$p^{(102)} = (0.0149, 0.0282, 0.0363, 0.0909, 0.0773, 0.0146, 0.1393, 0.0109, 0.5876).$$

$$p^{(165)} = (0.0087, 0.0165, 0.0212, 0.0532, 0.0452, 0.0086, 0.0814, 0.0064, 0.7588).$$

$$p^{(267)} = (0.0037, 0.0069, 0.0089, 0.0223, 0.0190, 0.0036, 0.0342, 0.0027, 0.8988).$$

$$p^{(432)} = (0.0009, 0.0017, 0.0022, 0.0055, 0.0047, 0.0009, 0.0084, 0.0007, 0.9752).$$

$$p^{(1034)} \approx (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Se puede observar la tendencia en cada paso y el crecimiento en la probabilidad de ocurrencia para el estado absorbente nos hace comprobar que, como era de esperarse, a la larga, una vez que se entra al estado absorbente ya no se sale nunca. Sin embargo, es hasta la elección 1034 que el vector de probabilidad de la cadena nos asegura al cien por ciento esto.

Por último, aplicando **GD** a **SA**, se obtiene:

$$ElSinaloenseA = \{1, 5, 4, 9, 6, 8, 9, 8, 9\}.$$

	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.625	0.125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.125	0	0.125	0	0	0
	0.0769	0.2308	0.0769	0.3846	0	0	0.0769	0	0.0769	0	0	0.0769	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.5385	0	0.3846	0	0.0769	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.0667	0.3333	0.2667	0.0667	0.2667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.069	0.069	0.1724	0	0.3793	0.2069	0	0.0345	0	0	0.0345	0	0	0	0	0.0345
	0	0	0	0	0	0	0.2667	0.2	0	0.4667	0	0	0	0	0.0667	0	0	0
	0	0	0.5	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SPA =	0	0	0	0	0	0	0.1379	0.1034	0	0.2759	0	0	0.3793	0.069	0.0345	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.0323	0	0	0	0.0323	0.0968	0	0.1935	0	0	0.2258	0.2258	0.0968	0.0968	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.0476	0	0	0.2381	0.0476	0	0.2381	0.2381	0.1905	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0385	0	0	0.1923	0.2308	0.2308	0.2308	0.0385	0.0385
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0714	0	0	0	0.0714	0.4286	0.0714	0.0714	0.1429
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3077	0.1538	0	0.5385
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 4.4 (I can recall) Spain. Matriz Armónica.

	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0.3	0.45	0.1	0	0.15	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.12	0	0.52	0.04	0.04	0	0	0.08	0.2	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RR =	0	0	0	0	0.1111	0.1111	0	0.1111	0.1111	0.1111	0.4444	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0.75	0.25	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.6667	0.3333	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0.1667	0.1667	0.3333	0	0	0	0.1667	0.1667	0
	0	0	0	0	0.1667	0	0	0	0	0.5	0	0.3333
	0	0	0	0	0	0	0.3333	0	0	0.3333	0	0.3333

Fig. 4.5 Rex Tremendae. Matriz Rítmica.

	0.5	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0.25	0	0
	0	0.4	0	0	0.2	0	0	0.2	0	0	0	0.2
	0.5	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0	0	0
	0	0.3333	0.3333	0	0	0	0	0.3333	0	0	0	0
RA =	0.0833	0	0	0.1667	0.25	0	0.25	0.0833	0.0833	0.0833	0	0
	0	0	0	0	0.6667	0	0.3333	0	0	0	0	0
	0	0.0952	0	0.0476	0.2381	0.1429	0.381	0	0	0	0	0.0952
	0	0	0	0	0.1667	0	0.6667	0.1667	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0.1667	0.3333	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.125	0.125	0.5	0.25	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0.125	0	0.25	0.125	0.5

Fig. 4.6 Rex Tremendae. Matriz Armónica.

Análisis de Resultados.

A continuación, se hará un breve análisis de cada cadena musical de Markov generada. Para que los resultados puedan ser interpretados desde elementos armónicos más profundos, como el contrapunto, se sugieren las siguientes lecturas:

- HORWOOD, Frederick. *Elementary counterpoint*. Robbins Music Corporation. U.S.A. 1958.
- KENNAN, Kent. *Counterpoint*. Prentice Hall. Fourth edition. New Jersey. 1999.

Como se mencionó en el tercer capítulo los cambios muy bruscos de frecuencia y ritmo pueden lograr o impedir la melodía deseada. Este punto es realmente subjetivo pues el gusto artístico es individual; además, la música contemporánea busca el tipo de elementos que rompan con la coherencia occidental.

Es posible apreciar que en gran parte de las cadenas generadas se presentan algunas violaciones al contrapunto, tales como el uso de tritonos, saltos de octava, saltos de sextas, resoluciones de quintas, entre otros.

1. Danza Cubana. Esta cadena musical fue generada fusionando la cadena armónica con las cuatro cadenas rítmicas obtenidas. Mantiene una rítmica más o menos regular por grupos. Conserva poco la armonía de la pieza original pues aproximadamente un poco más del 30% de las frecuencias corresponden a elementos indispensables de la escalas **GM** y **Em**, tales como E, C, D y G.
2. La Llorona. En esta cadena musical se tiene un grupo rítmico de duraciones similares y se conserva plausiblemente la armonía, pues aproximadamente el 70% de las frecuencias corresponde a elementos indispensables de **E^bM** y **Cm**, tales como B^b, A^b, C y E^b.
3. Lobgesang. La rítmica de esta cadena contiene silencios de blanca y redonda, lo que interrumpe la coherencia de sus grupos. Se mantiene la armonía en un 50% aproximadamente, visitando las frecuencias B^b, E^b y G.
4. Bruca Manigua. La armonía se conserva en un 50% con la elección de las frecuencias E^b, A^b, C y G. En cuanto a la rítmica, en esta cadena musical se tiene un grupo de duraciones similares.

5. Spain. Esta cadena musical consta de un grupo rítmico de duraciones similares. En cuanto a la armonía se conserva en un 60%, con la elección de frecuencias como G, D y C[#].
6. Rex. Esta cadena musical conserva la armonía en un 70% mediante el uso de frecuencias como E^b, B^b, D y F. En cuanto a la rítmica no se genera un grupo representativo.
7. El Sinaloense. Esta cadena musical consta de un grupo de duraciones rítmicas más o menos similares y coherentes. La armonía se conserva aproximadamente en un 80% con el uso de frecuencias como B^b, A, F y D.

En el CD adjunto a este trabajo se agregan tres ideas musicales de corta duración compuestas a partir de la elección de algunas cadenas musicales de Markov.

Conclusiones.

Las cadenas musicales de Markov constituyen una herramienta exitosa auxiliar en la composición musical. Los porcentajes en los resultados sugieren la idea de que, efectivamente, es posible modelar la estética musical a través de ellas. Como otros instrumentos, algunas veces genera resultados que pueden ser considerados como erróneos, de acuerdo a la apreciación individual; sin embargo, la conclusión más importante radica en que, las cadenas musicales de Markov, realmente constituyen una fuente abundante de sugerencias para el compositor.

Al igual que con la herramienta de los escalogramas percutivos^[1], es posible generar una excelente aplicación didáctica utilizando las cadenas musicales de Markov para ejercitar el entrenamiento auditivo de estudiantes de música, cotejando y ejercitando el reconocimiento de formalismos occidentales.

^[1] Xiaowen Cheng, Jarod V. Hart y James S. Walker, op. cit.

Bibliografía.

- RANDEL, Don Michel. *Diccionario Harvard de música*. Diana. México. 1984.
- MORENO RIVAS, Yolanda. *Rostros del nacionalismo en la música mexicana*. Escuela Nacional de Música UNAM. 1995.
- BERAN, Jan. *Statistics in musicology*. Interdisciplinary Statistics Series. Chapman & Hall/CRC. USA. 2004.
- *Notices of the american mathematical society*. Volume 56, Number 3. AMS. 2009.
- LERDAHL, Fred y JACKENDOFF, Ray. *A generative theory of tonal music*. The MIT Press. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge. Londres. 1996.
- RUSSELL, Stuart y NORVIG, Peter. *Inteligencia artificial, un enfoque moderno*. Pearson - Prentice Hall. España 2004.
- *Geografía musical de México*. Promotora Hispano Americana de México. México. 1968.
- GRENET, Emilio. *Popular cuban music*. Havana. 1939.
- *The big book of jazz*. Leonard Publishing Corporation. 1992.
- HORWOOD, Frederick. *Elementary counterpoint*. Robbins Music Corporation. U.S.A. 1958.
- KENNAN, Kent. *Counterpoint*. Prentice Hall. Fourth edition. New Jersey. 1999

Apéndice 1

LA LLORONA

821

9

Cla. _____

Adapt. _____

CANCION MEXICANA

dos me di- cen el ne- gro llo- ro- na ne- gro pe- ro

Salas del Templo india Llorona
 Cansado al pasar yo la vi
 temeroso tiíful llevabas Llorona
 que un ángel yo te creí -
 ay de mi Llorona, Llorona llevame al río

Vol 21 #

ca - ri - ño - so 1 To 2 Yo soy co - mo el chi - le

ver - de llo - ro - ña pi - can - te pe - ro sa - bro - so

yo - bro - so ¡Ay! de mi llo -

- ro - ña llo - ro - ña de a - yer y ho - y

2

ho - y A - yer ma - ra - vi - lla

1

e - ra llo - ro - na ya - ho - ra ni som - bra so - y

Al *f*

A so - y

2- Di -
3- Si -
al *f*

- 2. - 4 -

<p>Dicen que no tengo duelo llorona porque no me ven llorar Hay muertos que no hacen ruido y es más grande su penar</p>	<p>Si al cielo subir pudiera las estrellas te bajara La luna a tus pies pusiera con el sol te coronara</p>
<p>¡Ay de mí! llorona llorona de azul celeste y aunque la vida me cueste No dejaré de quererte</p>	<p>¡Ay de mí! llorona llorona de negros ojos ya con esta se despiden Tu negrito cariñoso</p>

BRUCA MANIGUA

ARSENIO RODRIGUEZ CUBANO

Arsenio Rodríguez

LENTO

No se ca-ra-ba-le

pe-go do na-vo

sen ta te be-tá

no pue-o ve-rá

man-de la ca-bá

con mi co-ra-són

lan-to ma-tra-tá

Bruca manigua 1=

cue-po van sui-ri

Mun-

-de la com-ba fio-le

siem-pre lan-gu-ru-cha

po

mu-cho que lon-din-ga

siem-pre la ma-tre-ta

ya ne me ca-da

la fio la gu-ru

ESTRIBILLO

(repetir 12 veces)

D.C.

bru-ca-re bru-ca-ma-ni-gua-a-be-cu-logui-rin-

(Solo)

-sin-ga bru-ca ma-ni-gua-a-be

(CORO)

che-che-re bru-ca-ma-ni-gua.

(CORO)


FIN

Bruca manigua 2:

El Sinaloense

HUAPANGO

LETRA Y MÚSICA DE
SEVERIANO BRISEÑO.

Allegretto. 

First system of piano introduction, featuring a treble and bass clef with a key signature of one flat and a 6/8 time signature. The music consists of rhythmic chords and eighth-note patterns.

Second system of piano introduction, continuing the rhythmic patterns from the first system. A marking "M.D." with a fermata is present above the bass line.

Third system of piano introduction, concluding the instrumental part with sustained chords and rhythmic accompaniment.

(VOZ) 1. _ Des.de Na.vo _ la.to ven.goy di.cen que na.cíen el Ro.ble Me
2. _ Me di _ cen e _ na.mo _ ra.do pe.ro de_e _ so na_da ten_go To_

First system of the vocal melody, corresponding to the first line of lyrics. It features a treble clef and a key signature of one flat.

di.cen que soy a _ rrie.ro por_ que les chifloy se pa.ran si les a.viento el som.
das me di.cen el Ne_gro un Ne_gro pe_ro con suer.te por_ que si me sal.ta un

Second system of the vocal melody, corresponding to the second line of lyrics. It continues the melodic line with various rhythmic values and rests.

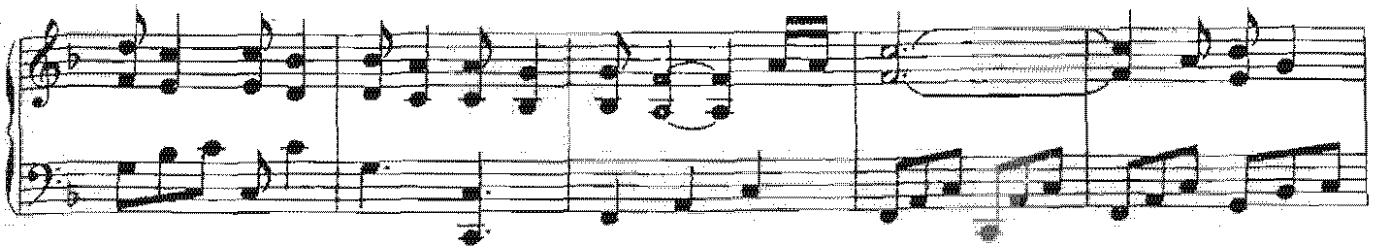
COPYRIGHT 1945.

"PROMOTORA HISPANO AMERICANA DE MUSICA, S.A."

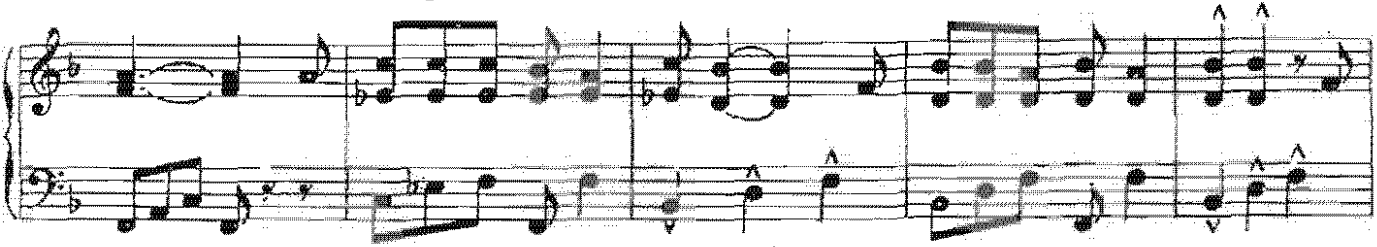
DR. VALENZUELA No. 10-MÉXICO 7, D.F.

ALL RIGHTS RESERVED

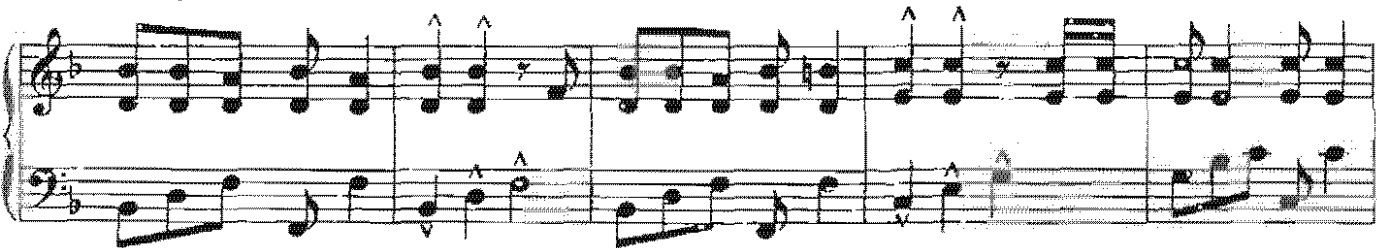
bre ro ya ve_rán co_mo re_pa_ran Ay Ay Ay ----- ma_má por
 ga.llo no me le ra_je_a la muerte Ay Ay Ay ----- ma_má por



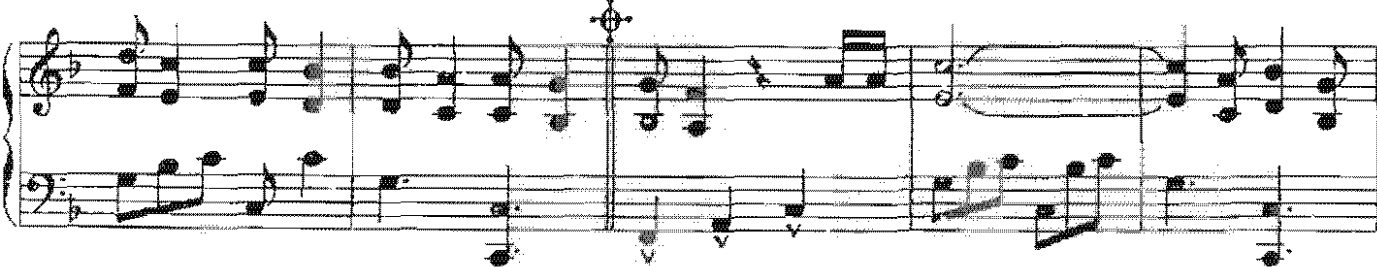
Dios ---- Por Dios que bo_rra_cho ven_go ---- que me si_ga la tam_bara que
 Dios ---- Soy de pu_ro Si_na_lo_a ---- don_de se rompen las o_las y



me to_quen El Que_li_te des_pués El Ni_ño Per_di_do y por úl_timo El To_
 bus_coy_na que an_de só_la y que no tenga ma_ri_do pa'no es bar_om pro me_



ri_to pa' que vean co_mo me pin_to Ay Ay Ay ----- ma_má por
 ti_do cuando re_sul_te la

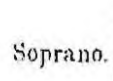



Dios. ----- bo_la ---- Ay Ay Ay -----

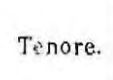


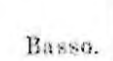
Nº 4. Rex tremendae.

Grave. **Tutti.**

Soprano. 

Alto. 

Tenore. 

Basso. 

Grave. *Fag., Corni di Bassetto.* **Rex!**

Piano. 

U

rex! rex! rex tremendae ma. je.

rex! rex! rex tremendae ma. je.

rex! rex! rex tremendae ma. je.

rex! rex! rex tremendae ma. je.

U

rex tremendae ma. je. *con Trombe e Timp.*



sta - tis, rex tre - men - dae ma - je -

sta - tis, rex tre - men - dae ma - je - sta.

sta - tis, qui sal - van - dos an - vas

sta - tis, qui sal - van - dos



sta - tis, rex tre - men - dae ma -
 tis, rex tre - men - dae ma - je - sta -
 gra - tis, qui sal - van - dos sal - vas gra -
 sal - vas gra - tis, sal - vas gra -

sta - tis, rex tre - men - dae ma - je - sta - tis, qui sal -
 tis, rex tre - men - dae ma - je - sta - tis,
 tis, rex tre - men - dae ma - je - sta - tis, rex tre - men -
 tis, rex tre - men - dae ma - je - sta - tis, rex tre -

van - dos sal - vas gra - tis, rex tre - men -
 qui sal - van - dos sal - vas gra - tis,
 dae ma - je - sta - tis, rex tre - men -
 men - dae ma - je - sta - tis, rex tre -

dae, rex tre - men - dae ma - je - sta - tis, qui sal - van - dos sal - va -
 rex tre - men - dae ma - je - sta - tis, qui sal - van - dos sal - va -
 dae, rex tre - men - dae ma - je - sta - tis, qui sal - van - dos sal - va -
 men - dae, rex tre - men - dae ma - je - sta - tis, qui sal - van - dos sal - va -

gra - tis, sal - va me!
 gra - tis, sal - va me!
 gra - tis, sal - va me!
 gra - tis, sal - va me!

sal - va me, fons pi - e - ta - tis!
 sal - va me, fons pi - e - ta - tis!
 sal - va me! sal - va me, fons pi - e - ta - tis!
 sal - va me! sal - va me, fons pi - e - ta - tis!

(I CAN RECALL) SPAIN

Lyrics by ARTIE MARIN & AL JARREAL
 Music by CHICK COKE
 Introduction after a theme of the 3rd Movement
 of the Concerto in D Arranged by JOAQUIN RODRIGUEZ

Freely
 Bno3rd(add9)

Bno3rd(add9)

Yes - ter - day, just a pho - to - graph of yes - ter - day and all it's ed - ges

Fm11

fold - ed and the cor - ners, fad - ed se - pi - a brown, and

Gmaj7

F#m7

F#7

F7#9

Bm9(add9)

yet it's all I have of our past love; a post-script to it's end - ing.

Gmaj7 F#m11 F9#11

Bright-er days, I can see such bright-er days when ev - 'ry

Em9 A13b5 C#7/D

song we sang is sung a - gain and now we know we know this time it's for

Dmaj7 Gmaj9 C#7 C#7#9 F#7 Bm7

good, and we're lov - ers once a - gain and you're near me.

Moderately bright Samba

no chord

Em11 F#7sus

I can re-mem-ber the rain in De-cem - ber the leaves of brown on the tum - bling

F#7 Gmaj7 F#7

ground. In Spain I did love and a - dore you. The
 ground. Our love was a Span - ish Fi - es - ta. The
 down. In Spain I did love and a - dore you. The

E#m7 A7b9 Dmaj7 Gmaj9

nights filled with joy were our yes - ter - days and to -
 bright lights and songs were our joy each day and the
 nights filled with joy were our yes - ter - days and to -

C#7 F#7b9 F#7b9 F#sus Bm Badd9

mor - row will bring you near me. }
 nights were the heat of yearn - ing. }
 mor - row will bring you near me. }

no chord

I can re-call my de-sire, ev-e-ry re-ver-ie is on

To Coda

fire and I get a pic-ture of all our yes-ter-days, yes, to-day I can say

1 Bm11

"I get a kick ev-'ry time they play that 'Spain' a-gain."
 "I get a kick ev-'ry time I see you

2 Gmaj7

gaze at me."

F#7b9



I see mo-ments of his - tor - y.

F#7



Em7



Your eyes — meet mine

A13



Dmaj7



and they dance to the mel - o - dy,

Gmaj9



C=7#9



and we live a - gain

F#7alt



Bm



as if dream - ing.

B7#5



Em7



A7#9



Dmaj7



Gmaj9



The sound of our hearts beat like eas - la - nets and for -

C#7#9



F#7#9/C



F#7#9

1,2
Bsus

B7



ev - er we'll know their mean - ing.

no chord

I can re - call my de - sire, ev - e - ry re - ver - ie is on

fire and I get a pic - ture of all our yes - ter - days, — yes, to - day I — can say,

"I get a kick ev - 'ry time. I see — you gaze at me." — mean - ing —

Gmaj9 | 3 Bsus | B7

D.S.
al Cod

CODA

I get a kick and I'm here — to say, — "Here's 'Spain'

A/G

Bb/F# | Bm11

a gain."

DANZA CUBANA No. 1

Ignacio Cervantes

The image displays a musical score for 'Danza Cubana No. 1' by Ignacio Cervantes. The score is written for piano and consists of six systems of music. Each system contains a grand staff with a treble and bass clef. The music is characterized by rhythmic complexity and dynamic markings. The first system includes a 'Cresc.' marking. The second system features a 'V' marking. The third system includes 'Cresc.' and 'Viv.' markings. The fourth system has a 'P' marking. The fifth system includes a 'pp' marking. The sixth system includes a 'P' marking. The score concludes with the text 'Danza I' centered below the final system.

Nr. 3 Chor

A tempo moderato (♩ = 64)

Tenor solo

First musical staff for Tenor solo, showing a treble clef, a key signature of one flat (B-flat), and a 4/4 time signature. The notes are: G4, A4, Bb4, A4, G4.

Sopran

Second musical staff for Soprano, showing a treble clef, a key signature of one flat (B-flat), and a 4/4 time signature. The notes are: G4, A4, Bb4, A4, G4.

Alt

Third musical staff for Alto, showing a treble clef, a key signature of one flat (B-flat), and a 4/4 time signature. The notes are: G4, A4, Bb4, A4, G4.

Tenor

Fourth musical staff for Tenor, showing a treble clef, a key signature of one flat (B-flat), and a 4/4 time signature. The notes are: G4, A4, Bb4, A4, G4.

Bass

Fifth musical staff for Bass, showing a bass clef, a key signature of one flat (B-flat), and a 4/4 time signature. The notes are: G3, A3, Bb3, A3, G3.

Klavier

Two musical staves for the piano accompaniment, showing a grand staff with treble and bass clefs, a key signature of one flat (B-flat), and a 4/4 time signature. The piano part features a rhythmic accompaniment with eighth and sixteenth notes.

Soll es die dir er
 All in that great sea

Soll es die dir er
 All in that great sea

Soll es die dir er
 All in that great sea

to - be - saved from their sin - ful - ness - let us - say - the - Lord - God - our - King -
 to - be - saved from their sin - ful - ness - let us - say - the - Lord - God - our - King -

Soll es die dir er
 All in that great sea

to - set send von dem Herrn aus al - ler Trüb - sal,
 to the Lord in dis - tress and deep of fle - tion,

Er - set send von dem Herrn aus al - ler Trüb - sal,
 Er die Lord in dis - tress and deep of fle - tion,

Er - set send von dem Herrn aus al - ler Trüb - sal,
 Er die Lord in dis - tress and deep of fle - tion,

to - set send von dem Herrn aus al - ler Trüb - sal,
 to the Lord in dis - tress and deep of fle - tion,

von dem Herrn, von dem Herrn aus al - ler
 in dis - tress, in dis - tress, and deep of

von dem Herrn, von dem Herrn aus al - ler
 in dis - tress, in dis - tress, and deep of

von dem Herrn, von dem Herrn aus al - ler
 in dis - tress, in dis - tress, and deep of

von dem Herrn, von dem Herrn aus al - ler
 in dis - tress, in dis - tress, and deep of

13

Soprano: Trüb - - sal
für - - - - - ton,

Alto: Trüb - - sal
für - - - - - ton,

Tenor: Trüb - - sal.
für - - - - - ton

Bass: Trüb - - sal. sagt es, die ihr er - - lö - - set seid!
für - - - - - ton, ge - - - - - hat - - - - - we - - - - - to für - - - - - Land.

17

Soprano: *p* sagt er die ihr er - - lö - - set seid!
all we that crowd are - - - - - to the Lord

Alto: *p* sagt es, die ihr er - - lö - - set seid!
we s - - - - - are the Lord

Tenor: *p* he - - - - - set uns - - - - -
he - - - - - rowe - - - - - rid all - - - - - your

Bass: die ihr er - - lö - - set seid!
that crowd are - - - - - to the Lord.

19

cresc.

Et zahn - let ions - re Tra - non, er He
He ronal - zih all just ser ans, He
zahn - lei uns - re Tra - non, uns - re Tra - non,
ronal - zih all pour ser ans, all just ser ans,
Tra non, er zahn - let uns - re Tra - non, er
ser ronal, He ronal - zih all just ser non, er He
He ronal - zih all just ser non, er He

cresc.

zahn - let ions - re Tra - non, uns - re
ronal - zih all just ser ans, He
zahn - lei uns - re Tra - non, er
ronal - zih all just ser ans, He
zahn - let ions - re Tra - non, uns - re
ronal - zih all just ser ans, He
zahn - lei uns - re Tra - non, er
ronal - zih all just ser ans, He



26

più f (*sf*)
 Trä - nen, er zäh - let uns - re Trä - nen, er
 sor - rows, He count - eth all your sor - rows, He

sf *più f*
 zäh - let uns - re Trä - - - nen, er zäh - - - let,
 count - eth all your sor - rows, He count - - - eth,

più f
 Trä - - - nen, zählt uns - re Trä - - - nen,
 sor - - - rows, yea, all your sor - - - rows,

più f
 Trä - - - nen, er zäh - - - let, er zäh - - - let
 sor - - - rows, He count - - - eth, He count - - - eth

29

sf *P*
 zäh - let uns - re Trä - - - nen, er zäh - let
 count - eth all your sor - - - rows, He count - eth

P
 er zäh - let uns - re Trä - - - nen,
 He count - eth all your sor - - - rows,

P
 Sagt es, die ihr er -
 All ye that cried un -

P
 uns - - - re Trä - - - nen, zählt uns - - - re
 all your sor - - - rows, yea, all your

11

tra - re Tra - ren. Sagt es, die ihr er - lo - set seid von dem Herrn aus
 all your sor - rows. All ye that crowd un - to the Lord in the heav - ens and

es zah - let sie, er zah - let uns - re Tra - re
 He count - eth, He count - eth all your sor -

lo - set seid, er zah - let uns - re Tra - re, der da er -
 to the Lord, He count - eth all your sor - rows, that crowd un -

Tra - ren. Sagt es, die ihr er - lo - set seid von dem Herrn er -
 sor - rows. All ye that crowd un - to the Lord in the heav - ens and

tra - re Tra - ren. Sagt es, die ihr er - lo - set seid von dem Herrn aus
 all your sor - rows. All ye that crowd un - to the Lord in the heav - ens and

12

al - ler Tra - ren. Sagt es, die ihr er - lo - set seid aus al - ler
 deep of sor - rows. All ye that crowd un - to the Lord in deep of

tra - ren. Sagt es, die ihr er - lo - set seid aus al - ler
 sor - rows. All ye that crowd un - to the Lord in deep of

lo - set seid, sagt es, die ihr er - lo - set seid aus al - ler
 to the Lord, all ye that crowd, He count - eth all your

lo - set seid, sagt es, die ihr er - lo - set seid aus al - ler
 deep of sor - rows, all ye that crowd un - to the Lord in deep of

al - ler Tra - ren. Sagt es, die ihr er - lo - set seid aus al - ler
 deep of sor - rows. All ye that crowd un - to the Lord in deep of

40

Trüb - - sal, sagt es, die ihr er - lö - set seid aus al - ler
 fle - - tion, all ye that cried un - to the Lord in deep af -

Trüb - - sal, sagt es, die ihr er - lö - set seid aus al - ler
 fle - - tion, all ye that cried un - to the Lord in deep af -

Trüb - - sal, sagt es, die ihr er - lö - set seid aus al - ler
 sor - - rous, all ye that cried un - to the Lord in deep af -

Trüb - - sal, die ihr er - lö - set seid aus al - ler
 fle - - tion, that cried un - to the Lord in deep af -

41

Trüb - - sal Er zäh - let uns - re
 fle - - tion, He count - eth all your

Trüb - - sal Er zäh - let uns - re
 fle - - tion, He count - eth all your

Trüb - - sal Er zäh - let uns - re Trä - - nen,
 fle - - tion, He count - eth all your sor - - rous,

Trüb - - sal Er zäh - let uns - re Trä - - nen,
 fle - - tion, He count - eth all your sor - - rous,

pp

Trä - - nen, er sah - bet uns - re Tra - nen in der Zeit der Not
 ser - - rous, He crant - est all your ser - vices in the time of need.

pp

Trä - - nen, die Trä - - nen in der Zeit der Not,
 ser - - rous, your ser - vices in the time of need.

pp

er sah - bet uns - re Tra - nen in der Zeit der Not
 He crant - est all your ser - vices in the time of need.

pp

er sah - bet uns - re Tra - nen in der Zeit der Not,
 He crant - est all your ser - vices in the time of need.

==