UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE RAMSEY

TESINA

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

HUMBERTO SAUL PINO VILLELA

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. SALVADOR GARCÍA FERREIRA

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE 2009

Índice general

Introducción

El Teorema original de Ramsey [6] dice: *si n y k son números naturales y $\{X_0, ..., X_n\}$ es una partición de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de cardinalidad k, entonces existe un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que todos los subconjuntos de H de tamaño k están contenidos en X_i para algún $0 \leq i \leq n$.* Equivalentemente, para cada función f con rango finito definida en la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de cardinalidad k, existe $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que f es constante restringida al conjunto de todos los subconjuntos de H de tamaño k. Existen muchas generalizaciones del Teorema de Ramsey, básicamente un teorema del tipo Ramsey es un enunciado de la forma: dado un conjunto con cierta estructura y una partición finita de tal estructura siempre podemos encontrar una subestructura lo suficientemente grande que se preserve bajo la partición, es decir, una subestructura totalmente contenida en un sólo elemento de la partición. Los conjuntos con esta cualidad se dice que cumplen una propiedad del tipo Ramsey. En esta tesina presentamos una de estas generalizaciones, el Teorema de Nash-Williams (1965), el cual afirma que toda familia de subconjuntos finitos de números naturales que es una anticadena respecto al orden parcial dado por ser un segmento inicial satisface una propiedad de Ramsey. Veremos algunas aplicaciones de este teorema en la Teoría de Frentes y Barreras de Nash-Williams y en funciones que cumplen una propiedad de Lipschitz, en concreto veremos que toda función de una barrera en el espacio de sucesiones $c_0 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que satisface una propiedad semi-Lipschitz tiene una restricción en donde la función es de Lipschitz. Todo el documento está basado en [1] y [2], los cuales además el lector puede consultar si desea profundizar en los temas aquí tratados. Los conceptos topológicos que no se definen se pueden encontrar en [3], igualmente en [4] y [5] se pueden hallar definiciones no enunciadas en la tesina acerca de números ordinales.

Capítulo 1

Frentes y Barreras.

1.1. Frentes y Barreras.

A lo largo del texto siempre que consideremos conjuntos de números naturales, finitos o infinitos, los estaremos pensando enumerados de manera creciente.

Notación 1.1. *Dado un conjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ denotamos*

$$[M]^{\infty} = \{N \subseteq M : N \ \textit{es infinito}\} \ \ y \ \ [M]^{<\infty} = \{s \subseteq M : s \ \textit{es finito}\}$$

respectivamente. En particular cuando $M = \mathbb{N}$ escribimos FIN *en lugar de $[\mathbb{N}]^{<\infty}$.*

Notación 1.2. *Sean $s, t \in \mathrm{FIN}$ y $A \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Usaremos las notaciones*

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Leftrightarrow \quad \max(s) < \min(t), \\ s < A \quad &\Leftrightarrow \quad \max(s) < \min A \end{aligned}$$

y por conveniencia $\emptyset < s$ y $s < \emptyset$ para todo $s \in \mathrm{FIN}$. Además

$$\begin{aligned} s \sqsubseteq t \quad &\Leftrightarrow \quad s \subseteq t \ \ y \ \ s < t \setminus s,^{1} \\ s \sqsubset A \quad &\Leftrightarrow \quad s \subset A \ \ y \ \ s < A \setminus s \end{aligned}$$

y decimos que s es un segmento inicial de t (también decimos que t extiende a s) o s es un segmento inicial de A respectivamente.

[1] Si X y Y son conjuntos recordemos que $X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$.

Las relaciones $\sqsubseteq$ y $\subseteq$ definen órdenes parciales en FIN, por ello diremos que $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ es una $\sqsubseteq$-anticadena si $\mathcal{F}$ es una anticadena como subconjunto de $(\mathrm{FIN}, \sqsubseteq)$, es decir, si para cada par s, t de elementos distintos de $\mathcal{F}$ se tiene que $s \not\sqsubseteq t$ y $t \not\sqsubseteq s$. Cuando $\mathcal{F}$ sea una anticadena respecto del orden parcial dado por $\subseteq$ lo distinguiremos diciendo que $\mathcal{F}$ es una $\subseteq$-anticadena.

Dado un conjunto arbitrario X de números naturales podemos definir una función en el conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$, a saber, la función característica del conjunto X. Inversamente toda función $f \in 2^{\mathbb{N}}$ define el subconjunto $f^{-1}\{1\} \subseteq \mathbb{N}$. Por este motivo FIN es un espacio topológico visto como subespacio del espacio producto $2^{\mathbb{N}}$ y esta es la topología con la que trabajaremos. Definiendo los conjuntos $[n, 1] = \{s \in \mathrm{FIN} : n \in s\}$ y $[n, 0] = \{s \in \mathrm{FIN} : n \notin s\}$, un abierto básico de la topología en FIN es de la forma

$$U = \bigcap_{n \in r} [n, 1] \cap \bigcap_{n \in t} [n, 0],$$

donde $r, t \in \mathrm{FIN}$. Más aún, cada $s \in \mathrm{FIN}$ define un abierto básico dado por

$$[s] = \bigcap_{n \in s} [n, 1] \cap \bigcap_{\substack{n \leq \text{máx}(s) \\ n \notin s}} [n, 0].$$

Notemos que $[s]$ es simplemente el conjunto $\{t \in \mathrm{FIN} : s \sqsubseteq t\}$. Por otro lado, una métrica que genera la topología producto de $2^{\mathbb{N}}$ es la siguiente: dados $f, g \in 2^{\mathbb{N}}$ se define $d(f, g) = \frac{1}{2^k}$ donde $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}$ si $f \neq g$ y $d(f, g) = 0$ si $f = g$. Restringiendo esta métrica a FIN podemos reescribirla como

$$d(s, t) = \frac{1}{2^{\text{mín}(s \Delta t)}},$$

para cada par $s, t \in \mathrm{FIN}$ y donde $s \Delta t$ denota la diferencia simétrica de los conjuntos s y t.

Definición 1.3. *Decimos que una sucesión* $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathrm{FIN}$ *es una sucesión bloque si* $s_i < s_j$ *siempre que* $i < j$.

Definición 1.4. *Una sucesión* $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathrm{FIN}$ *se llama una* Δ*-sucesión si existe* $s \in \mathrm{FIN}$ *tal que*

(1) $(\forall i \in \mathbb{N})(s \sqsubseteq s_i)$ *y*

(2) $(s_i \setminus s)_{i \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión bloque.*

Llamamos al conjunto s *la raíz de* $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo 1.5. *Dado* $s \in \mathrm{FIN}$ *la sucesión* $(s \cup \{n\})_{n > \text{máx}(s)}$ *es un ejemplo sencillo de una* Δ*-sucesión que tiene a* s *como raíz.*

Lema 1.6. *Si* $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *es una* Δ*-sucesión en* FIN *con raíz* s *entonces* s_i *converge a* s*.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Escojamos $j = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{\text{mín}(s_i \setminus s)}} < \varepsilon\}$, el cual existe por ser $(s_i \setminus s)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión bloque. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $s_k \Delta s = s_k \setminus s$, para cada $k \geq j$ tenemos

$$d(s_k, s) \leq \frac{1}{2^{\text{mín}(s_j \setminus s)}} < \varepsilon.$$

■

Lema 1.7. *Supongamos que* $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{FIN}$ *es una sucesión convergente con límite* s*. Entonces,* $s \in \mathrm{FIN}$ *si y sólo si* $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *contiene una* Δ*-subsucesión con raíz* s*.*

Demostración: Necesidad. Construimos por inducción una Δ-subsucesión $(s_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ como sigue. Consideremos el abierto $[s]$ y tomemos $s_{i_1} \in [s]$. Para el paso inductivo supongamos que hemos definido s_{i_k}, escogemos $i_{k+1} > i_k$ tal que $s_{i_{k+1}} \in [s \cup \{\text{máx}(s_{i_k}) + 1\}]$. De este modo $(s_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ resulta ser una Δ-sucesión con raíz s.

Suficiencia. Se sigue del Lema 1.6 que $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a la raíz s de una Δ-subsucesión y por definición $s \in$FIN. ■

Definición 1.8. *Una familia* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ *se llama precompacta si* $\mathrm{cl}_{2^{\mathbb{N}}}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{FIN}$*.*

Sea $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{FIN}$ una sucesión estrictamente creciente respecto de la inclusión $\subseteq$, es decir $s_i \subset s_j$ siempre que $i < j$. Entonces s_i converge a $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} s_i \in [\mathbb{N}]^\infty$ y claramente esta sucesión no puede contener ninguna Δ-subsucesión. Si hacemos $\mathcal{F} = \{s_i : i \in \mathbb{N}\}$, la familia $\mathcal{F}$ es también un ejemplo de una familia que no es precompacta. Esta observación la enunciamos en el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *Una familia* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ *es precompacta si y sólo si toda sucesión* $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ *contiene una* Δ*-subsucesión.*

Demostración: Necesidad. Sea $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Como $\mathrm{cl}_{2^{\mathbb{N}}}(\mathcal{F})$ es un espacio métrico compacto, podemos suponer que existe $s \in \mathrm{cl}_{2^{\mathbb{N}}}(\mathcal{F})$

tal que la sucesión s_i converge a s. Por hipótesis $s \in \mathrm{FIN}$ y por el Lema 1.7 $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contiene una Δ-subsucesión con raíz s.

Suficiencia. Sea $s \in \mathrm{cl}_{2^{\mathbb{N}}}(\mathcal{F})$. Tomemos $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ tal que s_i converge al conjunto s. Por hipótesis $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contiene una Δ-subsucesión con raíz t. Por lo tanto, $s = t \in \mathrm{FIN}$. ■

Ahora definiremos el concepto de frentes y barreras que son las familias que estudiamos en este capítulo.

Definición 1.10. [***Nash-Williams***]. *Sean $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{FIN}$ y $M \in [\mathbb{N}]^\infty$. Decimos que $\mathcal{B}$ es un frente en M si*

(1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$,

(2) $\mathcal{B}$ *es una $\sqsubseteq$-anticadena, y*

(3) *cada $B \in [M]^\infty$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{B}$.*

Si en lugar de (2), *$\mathcal{B}$ satisface la propiedad de ser una $\subseteq$-anticadena entonces $\mathcal{B}$ se llama una barrera en M.*

Claramente toda barrera es un frente. Más aún, si $\mathcal{B}$ es un frente o una barrera en M y $B \in [M]^\infty$, entonces B tiene un único segmento inicial en $\mathcal{B}$. La familia $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$ es obviamente un frente (barrera), el frente (barrera) trivial. Si $\mathcal{B} \neq \{\emptyset\}$ es un frente (barrera) en M entonces $\mathcal{B}$ es infinito ya que en caso contrario el conjunto $M \setminus \bigcup \mathcal{B}$ no tiene un segmento inicial en $\mathcal{B}$. Antes de ver algunos ejemplos probamos el siguiente lema el cual nos asegura que, en general, sólo basta considerar frentes y barreras en $\mathbb{N}$.

Lema 1.11. *Sean $M, N \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $f : M \to N$ una función estrictamente creciente y suprayectiva. Si $\mathcal{B}$ es una barrera* (*frente*) *en M entonces la familia $\mathcal{C} = \{f[s] : s \in \mathcal{B}\}$ es una barrera* (*frente*) *en N.*

Demostración: Probaremos el lema sólo para el caso de una barrera, si $\mathcal{B}$ es un frente la demostración es análoga. Claramente $\mathcal{C} \subseteq [N]^{<\infty}$. Si además $f[s] \subseteq f[t]$ el hecho de que f sea biyección implica que $s \subseteq t$ y por lo cual $s = t$, por lo tanto $f[s] = f[t]$. Por último sea $B \in [N]^\infty$, como $A = f^{-1}[B] \in [M]^\infty$ existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $s \sqsubset A$. Obviamente $f[s] \subseteq B$, y como $\max(s) < \min(A \setminus s)$ y f es creciente y suprayectiva tenemos que $f[s] < f[A \setminus s] = f[A] \setminus f[s] = B \setminus f[s]$. Es decir, $f[s] \sqsubset B$. ■

Notación 1.12. *Dados $M \in [\mathbb{N}]^\infty$, $t \in \mathrm{FIN}$ y k un número natural definimos los siguientes conjuntos*

$$\begin{aligned} [M]^k &= \{s \subseteq M : |s| = k\}, \\ M/t &= \{m \in M : m > \text{máx}(t)\} \end{aligned}$$

y si $t = \{n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ escribiremos simplemente M/n en lugar de $M/\{n\}$. Por otro lado si $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ denotaremos

$$\mathcal{F} \restriction M = \{s \in \mathcal{F} : s \subseteq M\}.$$

Ejemplo 1.13. *Para cada $k \in \mathbb{N}$. La familia $[\mathbb{N}]^k$ es una barrera (frente).*

Lema 1.14. (1) *Si $\mathcal{B}$ es un frente (barrera), entonces para cada conjunto $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ la familia $\mathcal{B} \restriction N$ es un frente (barrera) en N.*

(2) *Dados dos frentes (barreras) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.*

Demostración: (1) Se sigue inmediatamente de la definición.

(2) Sea $s \in \mathcal{C}$. Entonces $s \cup (\mathbb{N}/s)$ tiene un segmento inicial $t \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ y así $s \sqsubseteq t$ o $t \sqsubseteq s$. Como $\mathcal{C}$ es $\sqsubseteq$-anticadena se sigue que $s = t \in \mathcal{B}$. ■

Notación 1.15. *Si $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ y $t \in \mathrm{FIN}$ denotamos*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= \{s \in \mathrm{FIN} : t < s \ \ y \ \ t \cup s \in \mathcal{F}\} \ \ y \\ \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq} &= \{r \in \mathrm{FIN} : r \sqsubseteq s \ \ para\ algún \ \ s \in \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

Notemos que la familia $\mathcal{F}_t$ es no vacía si y sólo si $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$, por lo cual siempre que consideremos al conjunto $\mathcal{F}_t$ entenderemos implícitamente que $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$.

Lema 1.16. *Si $\mathcal{B}$ es una barrera y $t \in \mathrm{FIN}$, entonces $\mathcal{B}_t$ es una barrera en $\mathbb{N}/t$.*

Demostración: Supongamos que $s, r \in \mathcal{B}_t$ y que $s \subseteq r$, entonces $t \cup s \subseteq t \cup r$ y como $\mathcal{B}$ es una $\subseteq$-anticadena se sigue que $t \cup s = t \cup r$. Más aún, como $t \cap s = t \cap r = \emptyset$ debemos tener que $s = r$ y así $\mathcal{B}_t$ es una $\subseteq$-anticadena. Ahora tomemos $B \in [\mathbb{N}/t]^\infty$. Como $t \cup B \in [\mathbb{N}]^\infty$ por hipótesis existe $s \in \mathcal{B}$ con $s \sqsubset t \cup B$. Tenemos dos posibles casos, $s \sqsubseteq t$ ó $t \sqsubset s$. Si $s \sqsubseteq t$, por definición existe $r \in \mathcal{B}$ con $t \sqsubseteq r$ lo cual implica que $s \subseteq r$ y por lo tanto $s = r$. Por esta razón $t \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_t = \{\emptyset\}$ la cual es trivialmente una barrera. Si el caso que se cumple es $t \sqsubset s$, entonces $s \setminus t \in \mathcal{B}_t$ y $s \setminus t \sqsubset B$ como se deseaba. ■

Notación 1.17. *Dadas dos familias no vacías $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathrm{FIN}$, definimos*

$$\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} = \{s \cup t : s \in \mathcal{C}, t \in \mathcal{B} \text{ y } s < t\}.$$

Por ejemplo, si $i, j \in \mathbb{N}$ entonces $[\mathbb{N}]^i \oplus [\mathbb{N}]^j = [\mathbb{N}]^{i+j}$. A continuación veamos cómo la operación $\oplus$ nos ayuda a formar nuevos frentes y barreras.

Lema 1.18. *Si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathrm{FIN}$ son $\sqsubseteq$-anticadenas, entonces $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ es también una $\sqsubseteq$-anticadena.*

Demostración: Sean $s_0 \cup t_0, s_1 \cup t_1 \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ y supongamos que $s_0 \cup t_0 \sqsubseteq s_1 \cup t_1$. Como $s_0 < t_0$ tenemos que $s_0 \sqsubseteq s_1 \cup t_1$. También, $s_1 < t_1$ implica que $s_0 \sqsubseteq s_1$ ó $s_1 \sqsubseteq s_0$. Por lo cual $s_0 = s_1$ y entonces $t_0 \sqsubseteq t_1$. Nuevamente esto implica que $t_0 = t_1$ y por lo tanto $s_0 \cup t_0 = s_1 \cup t_1$ ■

Lema 1.19. *Si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathrm{FIN}$ son $\subseteq$-anticadenas, entonces $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ es también una $\subseteq$-anticadena.*

Demostración: Sean $s_0 \cup t_0, s_1 \cup t_1 \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ tales que $s_0 \cup t_0 \subseteq s_1 \cup t_1$. Como $s_0 \subseteq s_1 \cup t_1$ hay dos posibles casos: $s_0 \subseteq s_1$ ó $s_0 \cap t_1 \neq \emptyset$. Si $s_0 \cap t_1 \neq \emptyset$ tenemos que $t_0 \subseteq t_1$ y por lo cual $t_0 = t_1$ pero esto implica que $s_0 \subseteq s_1$ lo cual no es posible ya que $s_1 \cap t_1 = \emptyset$. Por lo tanto sólo el primer caso es posible y así $s_0 \subseteq s_1$ implica que $s_0 = s_1$ y $t_0 = t_1$. ■

Lema 1.20. *Si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathrm{FIN}$ son frentes (barreras), entonces $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ es un frente (barrera).*

Demostración: Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ dos frentes. La condición de $\sqsubseteq$-anticadena se sigue del Lema 1.18. Para verificar que todo conjunto tiene un segmento inicial en $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ tomemos $B \in [\mathbb{N}]^\infty$, por hipótesis existe $s \in \mathcal{C}$ con $s \sqsubset B$. Es claro que $B \setminus s \in [\mathbb{N}]^\infty$ y como $\mathcal{B}$ es un frente, existe $t \in \mathcal{B}$ tal que $t \sqsubset M \setminus s$. Por lo tanto, $s \cup t \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ y $s \cup t \sqsubset B$. Teniendo en mente el Lema 1.19 un argumento similar funciona si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son barreras. ■

Enseguida veremos la relación entre los frentes y barreras con las familias precompactas definidas anteriormente.

Teorema 1.21. *Todo frente es una familia precompacta.*

Demostración: Sean $\mathcal{B}$ un frente y $s \in \mathrm{cl}_{2^{\mathbb{N}}}(\mathcal{B})$. Por definición existe $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}$ tal que $s_j \to s$. Supogamos que $s \in [\mathbb{N}]^\infty$. Sea $t \in \mathcal{B}$ un segmento inicial de s. El conjunto $[t]$, visto en el espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$, es un abierto que contiene a s y por lo cual existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq k$, $s_j \in [t]$. En otras palabras $t \sqsubseteq s_j$ y como $\mathcal{B}$ es $\sqsubseteq$-anticadena se sigue que $t = s_j$ para todo $j \geq k$. Por lo tanto, $t = s \in \mathrm{FIN}$. Contradicción. ■

Evidentemente el inverso de este teorema es falso, sólo basta pensar en una familia $\mathcal{F} = \{s_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{FIN}$ donde la sucesión $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una Δ-sucesión. Por el Teorema 1.9, $\mathcal{F}$ es precompacta y claramente no es un frente.

Veamos ahora que se puede ordenar lexicográficamente al conjunto FIN.

Definición 1.22. *Dados $s, t \in \mathrm{FIN}$ definimos*

$$s <_\ell t \Leftrightarrow \mathrm{mín}(s\Delta t) \in s.$$

Escribimos $s \leq_\ell t$ si y sólo si $s <_\ell t$ o $s = t$.

Notemos que $(\mathrm{FIN}, \leq_\ell)$ es un conjunto linealmente ordenado.

Lema 1.23. *Si $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{FIN}$ es una Δ-sucesión entonces $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente respecto al orden lexicográfico $\leq_\ell$.*

Demostración: Por definición tenemos que $s_i \Delta s_j = (s_i \setminus s) \cup (s_j \setminus s)$, donde s es la raíz de $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Si además $i < j$ se tiene que $(s_i \setminus s) < (s_j \setminus s)$ y por lo tanto $\mathrm{mín}(s_i \Delta s_j) \in s_i$. ■

Lema 1.24. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ una familia precompacta, entonces $(\mathcal{F}, \leq_\ell)$ es un conjunto bien ordenado.*

Demostración: Supongamos que $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ es una sucesión estrictamente decreciente respecto al orden $\leq_\ell$. Por el Teorema 1.9 la sucesión $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contiene una Δ-subsucesión, la cual por el Lema 1.23 es creciente, pero esto es imposible. ■

Como una consecuencia del Teorema 1.21 y el Lema 1.24 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.25. *Todo frente, y por lo tanto toda barrera, es un conjunto lexicográficamente bien ordenado.* ■

El tipo de orden de una barrera o frente $(\mathcal{B}, \leq_\ell)$ es un ordinal numerable llamado el rango lexicográfico de $\mathcal{B}$ y denotado por $ran(\mathcal{B})$. Esta propiedad es de mucha utilidad ya que permite utilizar argumentos inductivos en demostraciones involucrando resultados concernientes a barreras y frentes.

Supongamos que $\mathcal{B}$ es una barrera. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el conjunto $\mathcal{B}_n = \{s \in \mathcal{B} : \{n\} \sqsubseteq s\}$. Es claro que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n.$$

Más aún para cada par m, n de números naturales distintos tenemos que $\mathcal{B}_m \cap \mathcal{B}_n = \emptyset$ y si además $m < n$ se tiene que $s <_\ell t$ para todo $s \in \mathcal{B}_m$ y cada $t \in \mathcal{B}_n$. Por lo tanto,

$$ran(\mathcal{B}) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} ran(\mathcal{B}_i) : n \in \mathbb{N}\} = \sum_{i \in \mathbb{N}} ran(\mathcal{B}_i).$$

Es fácil ver que $\mathcal{B}_i$ es isomorfo, en el orden lexicográfico, a la barrera $\mathcal{B}_{\{i\}}$ y así podemos reescribir la ecuación anterior como

$$ran(\mathcal{B}) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} ran(\mathcal{B}_{\{i\}}) : n \in \mathbb{N}\} = \sum_{i \in \mathbb{N}} ran(\mathcal{B}_{\{i\}}).$$

Notemos también que para todo n

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i = \{s \in \mathcal{B} : s <_\ell \min \mathcal{B}_{n+1}\} \sqsubset \mathcal{B}.$$

Se sigue que $\mathcal{B}_{\{n\}}$ es isomorfo a un subconjunto del segmento inicial $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ de la barrera $\mathcal{B}$. Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.26. *Sean $\mathcal{B}$ una barrera y $n \in \mathbb{N}$ entonces tenemos que*

$$ran(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ran(\mathcal{B}).$$

■

Corolario 1.27. *Si una barrera $\mathcal{B}$ tiene rango lexicográfico ω entonces $\mathcal{B} = [\mathbb{N}]^1$*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $ran(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ran(\mathcal{B}) = \omega$ y por ello $ran(\mathcal{B}_{\{n\}}) = 1$. Esto implica que $\mathcal{B}_{\{n\}} = \{\emptyset\}$ y por lo tanto $[\mathbb{N}]^1 \subseteq \mathcal{B}$. La igualdad la da el Lema 1.14. ■

Lema 1.28. *Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son frentes, entonces*

$$ran(\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}) = ran(\mathcal{B}) \cdot ran(\mathcal{C}).$$

Demostración: Sean $\alpha = ran(\mathcal{B})$ y $\beta = ran(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{C}$ está bien ordenado ponemos $\mathcal{C} = \{s_\xi : \xi < \beta\}$. Notemos que para cada $\xi < \beta$,

$$\{t \in \mathcal{B} : t > s_\xi\} = \bigcup_{i > \text{máx}(s_\xi)} \mathcal{B}_i$$

el cual es un segmento final de $\mathcal{B}$ y por ello tenemos que $\{t \in \mathcal{B} : t > s_\xi\} \cong \{s_\xi \cup t : t \in \mathcal{B} \text{ y } s_\xi < t\} \cong \alpha$. Ahora notemos que $s_\xi \cup t <_\ell s_{\xi'} \cup t'$ si y sólo si $s_\xi <_\ell s_{\xi'}$ o bien $s_\xi = s_{\xi'}$ y $t <_\ell t'$. Es decir, $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ es isomorfo a $\beta \times \alpha$ con el orden lexicográfico vertical. Por lo tanto, $ran(\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}) = \alpha \cdot \beta$. ■

Como una aplicación del lema anterior calculamos el rango lexicográfico de la barrera $[\mathbb{N}]^k$.

Ejemplo 1.29. *Por inducción en k probamos que $ran([\mathbb{N}]^k) = \omega^k$.*
Es claro que $ran([\mathbb{N}]^1) = \omega$. Para el paso inductivo aplicando el Lema 2.5 tenemos que

$$ran([\mathbb{N}]^{k+1}) = ran([\mathbb{N}]^k \oplus [\mathbb{N}]^1) = \omega^k \cdot \omega = \omega^{k+1}.$$

Ejemplo 1.30. *Si $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de frentes, entonces la familia*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_i \oplus \{\{i\}\},$$

es también un frente. En particular si hacemos $\mathcal{B}_i = [\mathbb{N}]^1$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [\mathbb{N}]^i \oplus \{\{i\}\},$$

que resulta ser una barrera conocida como la barrera de Schreier y su rango lexicográfico es igual a ω^ω.

Como vimos antes si $\mathcal{B}$ es un frente o barrera no trivial, $ran(\mathcal{B}) \geq \omega$. De hecho el rango lexicográfico de un frente o barrera no trivial es un ordinal límite.

Lema 1.31. *Si $\mathcal{B}$ es un frente o una barrera, entonces $ran(\mathcal{B}) \neq \alpha + i$, donde $\omega \leq \alpha < \omega_1$ y $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{B}$ es un frente o una barrera con $ran(\mathcal{B}) = \alpha + i$. Entonces, existe $s \in \mathcal{B}$ tal que para cada $t \in \mathcal{B} \setminus \{s\}$ tenemos que $t <_\ell s$. El conjunto $\mathbb{N}/s$ tiene un segmento inicial t_0 en $\mathcal{B}$, pero ésto implica que $s <_\ell t_0$, lo cual no puede ser. ■

Definición 1.32. *Un ordinal γ se llama indescomponible si no existen ordinales $\alpha, \beta < \gamma$ tales que $\alpha + \beta = \gamma$.*

Lema 1.33. [5] *Un ordinal numerable γ es indescomponible si y sólo si $\gamma = \omega^\alpha$ con α numerable.*

Teorema 1.34. *Para cada $\gamma < \omega_1$ indescomponible existe un frente con rango lexicográfico γ.*

Demostración: Por el Lema 1.33 sabemos que γ tiene la forma ω^α. La prueba se hace por inducción sobre α. Si $\alpha = 1$, sabemos que $ran([\mathbb{N}]^1) = \omega$. Si $\alpha = \beta + 1$, por hipótesis de inducción existe un frente $\mathcal{B}$ con $ran(\mathcal{B}) = \beta$. Consideremos el frente $\mathcal{B} \oplus [\mathbb{N}]^1$, entonces $ran(\mathcal{B} \oplus [\mathbb{N}]^1) = \omega^{\beta+1}$. Si α es límite, entonces $\omega^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{\alpha_n}$, donde $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ y $\alpha = \sup \alpha_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_n$ un frente con $ran(\mathcal{B}_n) = \omega^{\alpha_n}$. De este modo

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_n \oplus \{\{n\}\},$$

es un frente tal que $ran(\mathcal{B}) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} ran(\mathcal{B}_i) : n \in \mathbb{N}\} = \omega^\alpha$. ■

1.2. Familias Uniformes.

Primero definimos por inducción el concepto de familia α-uniforme.

Definición 1.35. *Sean $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{FIN}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $\alpha < \omega_1$ un número ordinal. Decimos que $\mathcal{B}$ es α-uniforme en M, si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ y además se cumple:*

(1) *Si $\alpha = 0$, entonces $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$.*

(2) *Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para cada $n \in M$ la familia $\mathcal{B}_{\{n\}}$ es β-uniforme en M/n.*

(3) *Si $\alpha > 0$ es límite, entonces existe una sucesión $\alpha_n \nearrow \alpha$ tal que $\mathcal{B}_{\{n\}}$ es α_n-uniforme en M/n para todo $n \in M$.*

Diremos que $\mathcal{B}$ es uniforme en M si es α-uniforme para algún $\alpha < \omega_1$.

Ejemplo 1.36. $[\mathbb{N}]^k$ *es una familia k-uniforme en* $\mathbb{N}$.

De manera análoga al caso de frentes y barreras el siguiente lema nos dice que será suficiente considerar familias uniformes en $\mathbb{N}$.

Lema 1.37. *Sean $M, N \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $f : M \to N$ una función estrictamente creciente y suprayectiva. Si $\mathcal{B}$ es α-uniforme en M entonces la familia $\mathcal{C} = \{f[s] : s \in \mathcal{B}\}$ es α-uniforme en N.*

Demostración: Por inducción en α. Si $\alpha = 0$ el resultado es inmediato. Si $\alpha = \beta + 1$ basta notar que si $n \in N$ y $m \in M$ es tal que $f(m) = n$, entonces

$$\mathcal{C}_{\{n\}} = \{f[s] : s \in \mathcal{B}_{\{m\}}\},$$

la cual por hipótesis inductiva es β-uniforme en N/n. El caso límite se demuestra de manera similar. ■

Lema 1.38. *Toda familia α-uniforme es un frente.*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una familia α-uniforme. Probamos el resultado por inducción sobre α. Si $\alpha = 0$, $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$ y no hay nada que probar. Supongamos que $\alpha = \beta + 1$ y que $s, t \in \mathcal{B}$ son tales que $s \sqsubseteq t$. Si $s_0 = \min(s) = \min(t)$ entonces $s \setminus \{s_0\}, t \setminus \{s_0\} \in \mathcal{B}_{\{s_0\}}$ y $s \setminus \{s_0\} \sqsubseteq t \setminus \{s_0\}$. Por hipótesis de inducción tenemos que $s \setminus \{s_0\} = t \setminus \{s_0\}$ lo que implica que $s = t$. Es decir, $\mathcal{B}$ es una $\sqsubseteq$-anticadena. Ahora sea $A \in [\mathbb{N}]^\infty$. Si $a = \min A$, por hipótesis, $A/\{a\}$ tiene un segmento inicial $t \in \mathcal{B}_{\{a\}}$ y por lo tanto $\{a\} \cup t \in \mathcal{B}$ es un segmento inicial de A. Si α es límite la demostración es análoga. ■

Ejemplo 1.39. *Por un argumento inductivo podemos ver que $[\mathbb{N}]^k$ es la única familia k-uniforme para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $k = 1$ y $\mathcal{B}$ una familia 1-uniforme. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\mathcal{B}_{\{n\}} = \{\emptyset\}$ y por ello $[\mathbb{N}]^1 \subseteq \mathcal{B}$. La igualdad se obtiene como consecuencia de los Lemas 1.14 y 1.38. Para el paso inductivo, sea $\mathcal{B}$ una familia k-uniforme. Por definición, para cada conjunto finito de la forma $\{n_1, ..., n_k\}$ tal que $n_1 < \cdots < n_k$ tenemos que $\mathcal{B}_{\{n_1,...,n_k\}} = \{\emptyset\}$ y por lo cual $[\mathbb{N}]^k \subseteq \mathcal{B}$. Nuevamente los lemas citados anteriormente nos dan la igualdad deseada.*

Lema 1.40. *Si $\mathcal{B}$ es una familia α-uniforme y $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ entonces $\mathcal{B} \upharpoonright N$ es α-uniforme en N.*

Demostración: La prueba del Lema se hace por inducción en α, teniendo en cuenta que para cada $n \in N$ se cumple $(\mathcal{B} \upharpoonright N)_{\{n\}} = \mathcal{B}_{\{n\}} \upharpoonright N$. ■

Lema 1.41. *Sean $\alpha < \omega_1$ un ordinal límite y $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente o constante de ordinales con $\alpha = \sup\{\alpha_i + 1 : i \in \mathbb{N}\}$. Si $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de familias α_i-uniformes, entonces*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i \oplus \{\{i\}\}$$

es α-uniforme.

Demostración: Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}_{\{n\}} = \mathcal{B}_n \upharpoonright (\mathbb{N}/n),$$

la cual por hipótesis y el Lema 1.40 es α_n-uniforme en $\mathbb{N}/n$. ■

Ejemplo 1.42. *La barrera de Schreier*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [\mathbb{N}]^i \oplus \{\{i\}\},$$

es una familia ω-uniforme.

Lema 1.43. *Si $\mathcal{B}$ es una barrera α-uniforme, entonces $ran(\mathcal{B}) = \omega^\alpha$.*

Demostración: Procedemos por inducción en α. Si $\alpha = 0$, por definición $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$ y el resultado es inmediato. Si $\alpha = \beta + 1$ por hipótesis cada $\mathcal{B}_{\{n\}}$ tiene rango lexicográfico ω^β lo cual implica que

$$ran(\mathcal{B}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \omega^\beta = \omega^\beta \cdot \omega = \omega^\alpha.$$

Para el caso límite, sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente convergente a α tal que $ran(\mathcal{B}_{\{n\}}) = \omega^{\alpha_n}$. Entonces,

$$ran(\mathcal{B}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \omega^{\alpha_n} = \omega^{\sup\{\alpha_n\}} = \omega^\alpha.$$

■

Por el lema anterior y las observaciones recientes, en el caso en que una barrera sea α-uniforme la sucesión $(ran(\mathcal{B}_{\{n\}}))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión constante en el caso α sucesor, o bien es estrictamente creciente en el caso límite. Por ejemplo, consideremos la barrera $\mathcal{B} = \{\{1\}\} \cup [\mathbb{N}/1]^2$. En este caso,

$$\mathcal{B}_{\{n\}} = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{si } n = 1, \\ [\mathbb{N}/n]^1 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto esta barrera no es α-uniforme para ningún $\alpha < \omega_1$. Sin embargo, podemos darnos cuenta que $\mathcal{B}$ es una barrera uniforme restringida al conjunto $\mathbb{N}/1$. En realidad siempre podemos encontrar un conjunto infinito tal que la restricción sea uniforme, ver Lema 1.45. Antes de enunciar este resultado probamos un lema que nos será muy útil en la demostración y otros resultados posteriores.

Lema 1.44. *Sean $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $\mathcal{C} \subseteq$FIN tal que $[M]^1 \subseteq \mathcal{C}$. Si $P(\cdot,\cdot)$ es una propiedad que cumple:*

(1) $\forall s \in \mathcal{C} \forall X \in [M]^\infty \exists Y \in [X]^\infty P(s, Y)$ y

(2) $\forall s \in \mathcal{C} \forall X \in [M]^\infty \forall Y \in [X]^\infty (P(s, X) \Rightarrow P(s, Y))$.

Entonces, existe $N \in [M]^\infty$ tal que $P(s, N/s)$ para todo $s \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}(N)$.

Demostración: Por inducción vamos a construir sucesiones $M \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq \cdots$ y $m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$ de subconjuntos infinitos de M y números naturales respectivamente, donde $m_k = \min M_k$, tal que si $s \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}(\{m_1, ..., m_k\})$ se cumpla $P(s, M_{k+1})$. Tomando $N = \{m_k : k \in \mathbb{N}\}$, afirmamos que N es el conjunto que buscamos. Para ver esto tomemos $s \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}(N)$ y sea $m_{k_0} = \max(s)$, por construcción tendremos que $P(s, M_{k_0+1})$ y como $N/s \subseteq M_{k_0+1}$ la condición (2) de la hipótesis nos da $P(s, N/s)$. Comenzamos tomando $M_1 = M$ y $m_1 = \min M_1$. Por la condición (1) existe $M_2 \in [M_1]^\infty$ tal que $P(\{m_1\}, M_2)$ y hagamos $m_2 = \min M_2$. Notemos que por (2) podemos suponer que $m_1 < m_2$. En el paso inductivo supongamos que tenemos definidos $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_k$ y $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. Observemos que será suficiente considerar conjuntos $s \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}(\{m_1, ..., m_k\})$ tales que $m_k \in s$ ya que si $s \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}(\{m_1, ..., m_{k-1}\})$ por hipótesis inductiva $P(s, M_k)$ y por (2) tenemos $P(s, Y)$ para cada $Y \in [M_k]^\infty$, en particular si $M_{k+1} \subseteq M_k$ tendremos $P(s, M_{k+1})$. Sea $\{s_i : 1 \leq i \leq 2^{k-1}\}$ una enumeración de la familia de los elementos de $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}(\{m_1, ..., m_k\})$ que contienen a m_k. Por (1) existe $Y_1 \subseteq M_k$ tal que $P(s_1, Y_1)$. En el paso $1 < j \leq 2^{k-1}$ nuevamente (1) nos permite encontrar $Y_j \subseteq Y_{j-1}$ tal que $P(s_j, Y_j)$. Poniendo

$M_{k+1} = Y_{2^{k-1}}$ la parte (2) nos da $P(s_i, M_{k+1})$ para cada $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ lo cual termina la inducción. ■

Lema 1.45. *Para toda barrera $\mathcal{B}$ existe $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ tal que $\mathcal{B} \restriction N$ es una barrera uniforme.*

Demostración: Por inducción en $ran(\mathcal{B})$. Si $ran(\mathcal{B}) = \omega$ sabemos por el Lema 1.27 que $\mathcal{B} = [\mathbb{N}]^1$, la cual es una barrera uniforme. Para probar el paso inductivo aplicamos el Lema 1.44 a $M = \mathbb{N}$, $\mathcal{C} = [M]^1$ y a la propiedad $P(n, X)$ dada por $\mathcal{B}_{\{n\}} \restriction X$ es uniforme. Notemos que la parte (2) es una consecuencia del Lema 1.40. Para probar (1) sea $X \in [\mathbb{N}]^\infty$. Como $\mathcal{B}_{\{n\}}$ es una barrera en $\mathbb{N}/n$ y $X/n \subseteq \mathbb{N}/n$, $\mathcal{B}_{\{n\}} \restriction (X/n)$ es una barrera en X/n y por hipótesis inductiva existe $Y \in [X/n]^\infty$ tal que $\mathcal{B}_{\{n\}} \restriction Y$ es uniforme. Por lo tanto dicho lema nos dice que existe $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ tal que

$$\mathcal{B}_{\{n\}} \restriction (N/n) = \mathcal{B}_{\{n\}} \restriction N = (\mathcal{B} \restriction N)_{\{n\}},$$

es α_n-uniforme para cada $n \in N$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $(\alpha_n)_{n \in N}$ es constante o bien es estrictamente creciente, esto porque en un conjunto bien ordenado toda sucesión contiene una subsucesión que es constante o bien estrictamente creciente. Pero esto simplemente nos dice que $\mathcal{B} \restriction N$ es α-uniforme donde $\alpha = \sup\{\alpha_n + 1 : n \in N\}$. ■

Capítulo 2

Teorema de Ramsey.

En este capítulo presentamos la demostración original del Teorema de Nash-Williams.

Definición 2.1. *Decimos que una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ es de Ramsey, o que tiene la propiedad de Ramsey, si para cada partición finita*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n$$

existe $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ tal que a lo más una de las restricciones

$$\mathcal{F}_0 \restriction M, ..., \mathcal{F}_n \restriction M$$

es no vacía. De manera equivalente, para toda función f con rango finito definida en $\mathcal{F}$ existe un conjunto infinito M tal que f es constante restringida al conjunto $\mathcal{F} \restriction M$.

De aquí en adelante si no especificamos lo contrario las letras mayúsculas A, B, M, N, P denotarán subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, asimismo letras minúsculas r, s, t denotarán subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Definición 2.2. *Sea $\mathcal{D} \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$. Diremos que $\mathcal{D}$ es abierto si $N \subseteq M \in \mathcal{D}$ implica que $N \in \mathcal{D}$. Decimos que $\mathcal{D}$ es denso por debajo de M si para cada $N \subseteq M$ existe $P \subseteq N$ con $P \in \mathcal{D}$. Finalmente, una asignación densa-abierta en M es una familia $\{\mathcal{D}_s : s \in [M]^{<\infty}\}$ tal que para todo $s \in [M]^{<\infty}$, $\mathcal{D}_s$ es abierto y denso por debajo de M/s.*

Lema 2.3. *Para cada asignación densa-abierta $\{\mathcal{D}_s : s \in [M]^{<\infty}\}$ en M existe $N \subseteq M$ tal que $N/s \in \mathcal{D}_s$ siempre que $s \in [N]^{<\infty}$.*

Demostración: Apliquemos el Lema 1.44 a la familia $\mathcal{C} = [M]^{<\infty}$ y a la propiedad $P(s, X) := X \in \mathcal{D}_s$. Como cada $\mathcal{D}_s$ es denso por debajo de M/s, $P(\cdot, \cdot)$ satisface (1) del Lema 1.44. Además $P(\cdot, \cdot)$ satisface (2) del mismo Lema por ser $\mathcal{D}_s$ abierto para todo $s \in [M]^{<\infty}$. Por lo tanto existe $N \in [M]^\infty$ tal que $P(s, N/s)$ para todo $s \in [N]^{<\infty}$ como queríamos. ■

Definición 2.4. *Una función $f : \mathrm{FIN} \to \mathcal{P}(\mathrm{FIN})$ se llama extensor si dados $s \in \mathrm{FIN}$ y $t \in f(s)$ tenemos que $s \sqsubseteq t$.*

Para la siguiente definición es necesario recordar la notación: $[s, M] = \{N \in [\mathbb{N}]^\infty : s \sqsubset N \subseteq s \cup M\}$.

Definición 2.5. **[*Forcing Combinatorio*].** *Fijemos un extensor f. Decimos que s es inextensible en M si $f(s) \cap \mathcal{P}(M) = \emptyset$ y contrariamente s se dice extensible en M si $f(s) \cap \mathcal{P}(M) \neq \emptyset$. Decimos que s es fuertemente extensible en M si $f(s) \cap \mathcal{P}(N) \neq \emptyset$ siempre que $N \in [s, M]$. Si s es inextensible o bien fuertemente extensible en M diremos que M decide a s.*

Notemos que si f es un extensor y $s \in f(s)$ entonces s es fuertemente extensible en M para todo M. Además, si $s \nsubseteq M$ se tiene que s es inextensible en M. Las primeras propiedades de la Definición 2.5 se presentan en los siguientes dos lemas.

Lema 2.6. *Sea $f : \mathrm{FIN} \to \mathcal{P}(\mathrm{FIN})$ un extensor.*

(1) *Si s es inextensible (fuertemente extensible) en M y $N \subseteq M$ entonces s es inextensible (fuertemente extensible) en N.*

(2) *Dados s y M arbitrarios existe $N \subseteq M$ tal que N decide a s.*

(3) *Para cada M existe $N \subseteq M$ tal que N decide a cada uno de sus subconjuntos finitos.*

Demostración: (1) Que s es inextensible en N se sigue de la contención $f(s) \cap \mathcal{P}(N) \subseteq f(s) \cap \mathcal{P}(M)$. Por otro lado, supongamos que s no es fuertemente extensible en N. Como $[s, N] \subseteq [s, M]$ se tiene que s no es fuertemente extensible en M.

(2) Por la observación siguiente a la definición 2.5 podemos suponer que $s \notin f(s)$ y $s \subseteq M$. Si s es fuertemente extensible en M hemos terminado, en caso contrario existe $N \in [s, M]$ tal que $f(s) \cap \mathcal{P}(N) = \emptyset$ y así N decide a s, porque s es inextensible en N y $N \subseteq M$.

(3) Vamos a aplicar el Lema 1.44 a la familia $\mathcal{C} = [M]^{<\infty}$ y a la propiedad $P(s, X)$ dada por $X \cup s$ decide a s. Sean $s \in [M]^{<\infty}$ y $X \in [M]^{\infty}$. Por el inciso (2) de este lema aplicado a s y $X \cup s$ existe $Y \subseteq X \cup s$ tal que Y decide a s, por ello Y/s también decide a s y como $Y/s \subseteq X$ se tiene que $P(\cdot, \cdot)$ satisface la primera condición del Lema 1.44. La segunda cláusula se satisface ya que si $X \in [M]^{\infty}$ y $X \cup s$ decide a s entonces para cada $Y \in [X]^{\infty}$, $Y \cup s \subseteq X \cup s$. Tomando N como en el Lema 1.44 tenemos que $(N/s) \cup s$ decide a s para cada $s \in [N]^{<\infty}$. Veamos ahora que esto implica que N decide a s. Tenemos dos casos. Si s es fuertemente extensible en $(N/s) \cup s$ también resulta ser fuertemente extensible en N ya que $[s, (N/s) \cup s] = [s, N]$. Para el otro caso, si s no es inextensible en N es porque existe $t \in f(s) \cap \mathcal{P}(N)$ y así $t/s \subseteq N/s$ y por lo cual $t \subseteq (N/s) \cup s$, es decir s no es inextensible en $(N/s) \cup s$. ■

Lema 2.7. *Sean $\mathcal{F}$ una $\sqsubseteq$-anticadena en* FIN *y f :* FIN $\to \mathcal{P}(\text{FIN})$ *un extensor definido para cada $s \in$* FIN *por*

$$t \in f(s) \Leftrightarrow t \sqsupseteq s \ \text{ y } \ t \ \text{ tiene un segmento inicial en } \mathcal{F}.$$

Sean $M \subseteq \mathbb{N}$ y $s \subseteq M$, entonces s es extensible en M si y sólo si existe $n \in M/s$ tal que $s \cup \{n\}$ es extensible en M.

Demostración: Necesidad. Sea $t \subseteq M$ tal que $t \sqsupseteq s$ y t tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$. Consideremos los casos $t \sqsupset s$ y $t = s$. Si $t \sqsupset s$ tomamos $n = \min(t/s)$ entonces $t \sqsupseteq s \cup \{n\}$ y así $s \cup \{n\}$ es extensible en M. Si $t = s$, entonces $s \cup \min(M/s)$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$ y por lo cual $s \cup \min(M/s)$ es extensible en M.

Suficiencia. Si $s \cup \{n\}$ es extensible en M para algún $n \in M/s$ entonces cualquier conjunto $t \subseteq M$ que extiende a $s \cup \{n\}$ también extiende a s. ■

Con lo desarrollado hasta ahora en el capítulo podemos demostrar el siguiente teorema el cual es fundamental en la prueba del Teorema de Nash-Williams.

Teorema 2.8. *Sean $\mathcal{F} \subseteq$* FIN *una $\sqsubseteq$-anticadena, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ y $M \subseteq \mathbb{N}$. Entonces, existe $N \subseteq M$ tal que*

$$\mathcal{F}_0 \restriction N = \emptyset \ \text{ o bien } \ \mathcal{F} \restriction N \subseteq \mathcal{F}_0. \tag{2.1}$$

Demostración: Tomemos $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ y M como en las hipótesis. Definamos un extensor f : FIN $\to \mathcal{P}(\text{FIN})$ como sigue

$$t \in f(s) \Leftrightarrow t \sqsupseteq s \ \text{ y } \ t \ \text{ tiene un segmento inicial en } \mathcal{F}_0,$$

para cada $s \in \mathrm{FIN}$. Por (3) del Lema 2.6 podemos suponer que M decide a cada uno de sus subconjuntos finitos. Para cada $s \in [M]^{<\infty}$ consideremos a todos los conjuntos $P \in [M]^{\infty}$ de la forma

$$\begin{aligned} (i)\ P &= \{n \in M/s : s \cup \{n\} \text{ es inextensible en } M\}, \text{ o bien} \\ (ii)\ P &= \{n \in M/s : s \cup \{n\} \text{ es fuertemente extensible en } M\} \end{aligned}$$

(existen porque M decide a cada uno de sus subconjuntos finitos) y definamos a $\mathcal{D}_s$ como la familia de todos los conjuntos P definidos así. Por (1) del Lema 2.6 cada $\mathcal{D}_s$ es abierto y el hecho de que M decide a cada uno de sus subconjuntos finitos implica que $\mathcal{D}_s$ es denso por debajo de M/s. Por lo tanto $\{\mathcal{D}_s : s \in [M]^{<\infty}\}$ es una asignación densa-abierta en M y por el Lema 2.3 existe $N \subseteq M$ con $N/s \in \mathcal{D}_s$ para todo $s \in [N]^{<\infty}$. Como $N \subseteq M$ tenemos que N decide a cada uno de sus subconjuntos finitos y en particular N decide a $\emptyset$. Consideremos los dos posibles casos.

Caso I. $\emptyset$ es inextensible en N. Supongamos que $t \in \mathcal{F}_0 \restriction N$, entonces $t \subseteq N$ extiende a $\emptyset$, lo cual es imposible. Por ello, en este caso $\mathcal{F}_0 \restriction N = \emptyset$ y se cumple la primera identidad de 2.1.

Caso II. $\emptyset$ es fuertemente extensible en N. Sea $s \in [N]^{<\infty}$, por definición de N tenemos que $N/s \in \mathcal{D}_s$, es decir $N/s = P$ donde P es un conjunto del tipo (i) o (ii) definidos antes. Pero el Lema 2.7 y $N \subseteq M$ implican que s es extensible en N si y sólo si existe $n \in N/s$ tal que $s \cup \{n\}$ es extensible en N y esto obliga a que $N/s = P$ donde P es un conjunto del tipo (ii), en otras palabras, s es extensible en N si y sólo si $s \cup \{n\}$ es extensible en N para todo $n \in N/s$. A continuación veremos que esto implica que cada subconjunto finito s de N es extensible en N, lo hacemos por inducción en $|s|$. Como $\emptyset$ es extensible en N entonces $\emptyset \cup \{n\}$ es extensible en N para todo $n \in N$, lo que prueba el paso inicial. En el paso inductivo tenemos por hipótesis que $s \setminus \{\text{máx}(s)\}$ es extensible en N y esto implica que $s = (s \setminus \{\text{máx}(s)\}) \cup \{\text{máx}(s)\}$ es extensible en N. Para completar la demostración supongamos por el contrario que $s \in \mathcal{F} \restriction N$ y $s \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$. Como s es extensible en N podemos hallar $t \sqsupseteq s$ tal que t tiene un segmento inicial r en $\mathcal{F}_0$, lo que conlleva a que $s \sqsubseteq r$ o bien $r \sqsubseteq s$, pero $\mathcal{F}$ es una $\sqsubseteq$-anticadena y $r, s \in \mathcal{F}$ implica que $s = r \in \mathcal{F}_0$, contradiciendo nuestra suposición. Concluimos que $\mathcal{F} \restriction N \subseteq \mathcal{F}_0$. ■

Finalmente llegamos al resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.9. [***Nash-Williams***]. *Si* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ *es una* $\sqsubseteq$*-anticadena entonces tiene la propiedad de Ramsey.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ una $\sqsubseteq$-anticadena y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{F}_n$ una partición. Aplicando el Teorema 2.8 a $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ y $M = \bigcup \mathcal{F}$ obtenemos $N_0 \in \bigcup \mathcal{F}$ tal que se cumple 2.1. Si $\mathcal{F} \restriction N_0 \subseteq \mathcal{F}_0$ hemos terminado. Si por el contrario se cumple $\mathcal{F}_0 \restriction N_0 = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{F} \restriction N_0 = \mathcal{F}_1 \restriction N_0 \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{F}_n \restriction N_0$ y repetimos el proceso al par de $\sqsubseteq$-anticadenas $\mathcal{F}_1 \restriction N_0 \subseteq \mathcal{F} \restriction N_0$. Si este proceso no termina antes de n repeticiones, en dicho paso considerando a las $\sqsubseteq$-anticadenas $\mathcal{F}_{n-1} \restriction N_{n-2} \subseteq \mathcal{F} \restriction N_{n-2}$ encontramos N_{n-1} tal que $\mathcal{F} \restriction N_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ o bien $\mathcal{F}_{n-1} \restriction N_{n-1} = \emptyset$ y esto último implica que $\mathcal{F} \restriction N_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$. ■

Corolario 2.10. *Para cada frente $\mathcal{F}$ existe $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F} \restriction M$ es una barrera en M.*

Demostración: Consideremos la partición $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0)$, donde $\mathcal{F}_0 = \{s \in \mathcal{F} : s \text{ es } \subseteq\text{-minimal}\}$. Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Ramsey existe $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que solamente una de las restricciones $\mathcal{F}_0 \restriction M$, $(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0) \restriction M$ es no vacía. Si $t \in (\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0) \restriction M$ entonces existe $s \in \mathcal{F}_0$ minimal tal que $s \subseteq t$ y por lo cual $s \in \mathcal{F}_0 \restriction M$ lo cual no es posible. Por consiguiente tenemos que $\mathcal{F} \restriction M \subseteq \mathcal{F}_0$. Es decir $\mathcal{F} \restriction M$ es una $\subseteq$-anticadena. Por último, como $\mathcal{F} \restriction M$ es un frente todo subconjunto infinito de M tiene un segmento inicial en $\mathcal{F} \restriction M$ y así la restricción al conjunto M es una barrera. ■

Obviamente el Teorema 2.9 nos dice que toda barrera es de Ramsey, este hecho lo enunciamos de manera formal ya que lo estaremos aplicando cuando veamos funciones definidas en barreras.

Corolario 2.11. [***Teorema de Ramsey de las Barreras***]**.** *Toda barrera tiene la propiedad de Ramsey.* ■

Otra consecuencia inmediata es el Teorema clásico de Ramsey.

Corolario 2.12. [***Teorema de Ramsey***]**.** *Sean n y k números naturales. Para cada partición $\{X_0, ..., X_n\}$ de $[\mathbb{N}]^k$ existen $i \in n+1$ y $H \in [\mathbb{N}]^\infty$ tales que $[H]^k \subseteq X_i$.*

■

Capítulo 3

Lema de Galvin.

El Lema de Galvin es uno de los resultados más importantes de la teoría de Frentes y Barreras, este lema nos dice que para cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos finitos de números naturales y cada conjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ siempre podemos hallar un subconjunto infinito N de M de tal modo que: o bien ningún elemento de $\mathcal{F}$ es un subconjunto de N o bien todos los elementos de $\mathcal{F}$ que son subconjuntos de N forman una barrera. En este capítulo presentamos la demostración de este resultado y para tal fin primero enunciamos una definición y varios lemas de utilidad. Comenzamos redefiniendo la propiedad de un conjunto finito de ser extensible o ser inextensible.

Definición 3.1. [***Forcing Combinatorio***]. *Fijemos* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$. *Decimos que* s *es extensible en* A *si todo* $B \in [s, A]$ *tiene un segmento inicial en* $\mathcal{F}$. *Diremos que* s *es inextensible en* A *si* s *no es extensible en ningún subconjunto* $B \subseteq A$. *Si* s *es extensible o bien inextensible en* A *diremos que* A *decide a* s.

De aquí en adelante cuando hablemos de conceptos relacionados con la definición anterior estaremos considerando una familia fija $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$. Las primeras propiedades de la definición anterior se exponen en los siguientes lemas.

Lema 3.2. (1) *Si* s *es extensible* (*inextensible*) *en* A *y* $B \subseteq A$, *entonces* s *es extensible* (*inextensible*) *en* B.

(2) *Dados* s *y* A *arbitrarios existe* $B \subseteq A$ *tal que* B *decide a* s.

(3) *s es extensible en A si y sólo si $s \cup \{n\}$ es extensible en A para cada $n \in A/s$.*

Demostración: (1) Supongamos que s es extensible en A. Sean $B \subseteq A$ y $M \in [s, B]$, en particular $M \in [s, A]$ y por ello M tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$. Ahora supongamos que s no es inextensible en B, es decir, existe $M \subseteq B$ tal que s es extensible en M, pero $M \subseteq A$ y entonces s no es inextensible en A.

(2) Podemos suponer que s no es inextensible en A, en caso contrario hemos terminado. Por tal motivo, existe $B \subseteq A$ tal que s es extensible en B.

(3) Necesidad. Notemos que $[s \cup \{n\}, A] \subseteq [s, A]$. De aquí se sigue que cualquier $B \in [s \cup \{n\}, A]$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$.

Suficiencia. Sean $B \in [s, A]$ y $n = \text{mín}(B/s)$, entonces $B \in [s \cup \{n\}, A]$ y B tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$. ■

Lema 3.3. *Si s es inextensible en A, entonces el conjunto*

$$X = \{\, n \in A/s : s \cup \{n\} \ \text{ es extensible en } \ A \,\},$$

es finito.

Demostración: Supongamos por el contrario que X es infinito. Por definición $s \cup \{n\}$ es extensible en A para cada $n \in X$ y como $X \in [A]^{\infty}$ se sigue de la parte (1) del Lema 3.2 que $s \cup \{n\}$ es extensible en X para todo $n \in X$. Por (3) del mismo lema concluimos que s es extensible en X, contradiciendo el hecho de que s es inextensible en A. ■

Lema 3.4. *Para cada B existe $A \subseteq B$ tal que A decide a cada uno de sus subconjuntos finitos.*

Demostración: Sean $\mathcal{C} = [B]^{<\infty}$ y la propiedad $P(s, X) := X$ decide a s. Entonces $P(\cdot, \cdot)$ satisface las hipótesis (1) y (2) del Lema 1.44 por los incisos (2) y (1) del Lema 3.2 respectivamente, se sigue que existe $A \subseteq B$ tal que A/s decide a s para cada $s \in [A]^{<\infty}$. Veamos que esto implica que A decide a s. Consideremos los dos casos. Si s es extensible en A/s la igualdad $[s, A] = [s, A/s]$ nos dice que s es también extensible en A. Supongamos ahora que s no es inextensible en A y sea $M \subseteq A$ tal que s es extensible en M. Nuevamente $[s, M] = [s, M/s]$ nos dice que s es extensible en $M/s \subseteq A/s$ y así s no es inextensible en A/s. ■

Lema 3.5. *Supongamos que $\emptyset$ es inextensible en A. Entonces, existe $N \in [A]^{\infty}$ tal que cada subconjunto finito de N es inextensible en N.*

Demostración: Por inducción construimos una sucesión de números naturales $n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ de tal forma que si $s \subseteq \{n_1, ..., n_k\}$ se tenga que s es inextensible en A. Por el Lema 3.3 el conjunto $\{n \in A : \{n\}$ es extensible en $A\}$ es finito. Esto nos permite escoger n_1 como el mínimo elemento de A tal que para cada $m \in A$ con $m \geq n_1$, $\{m\}$ es inextensible en A. Para el paso inductivo, supongamos que tenemos definida una sucesión $n_1 < \cdots < n_k$ de elementos de A tal que cada subconjunto $s \subseteq \{n_1, ..., n_k\}$ es inextensible en A. Nuevamente el Lema 3.3 nos dice que para cada $s \subseteq \{n_1, ..., n_k\}$ existe $n_s \in A/s$ tal que si $m \in A/s$ y $m \geq n_s$, $s \cup \{m\}$ es inextensible en A. Definiendo $n_{k+1} = \text{máx}\{n_s : s \subseteq \{n_1, ..., n_k\}\}$ tenemos que $s \cup \{n_{k+1}\}$ es inextensible en A para todo s. Finalmente, pongamos $N = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, por construcción cada subconjunto finito de N es inextensible en A y por lo tanto también en N. ■

Podemos ahora enunciar y demostrar el Lema de Galvin.

Teorema 3.6. **[*Lema de Galvin*].** *Dados $\mathcal{F} \subseteq \text{FIN}$ y $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$, existe $N \subseteq M$ tal que*

(1) *$\mathcal{F} \upharpoonright N$ es vacía, o*

(2) *$\mathcal{F} \upharpoonright N$ contiene una barrera en N.*

Demostración: Sea $A \in [M]^{\infty}$ que decide a cada uno de sus subconjuntos finitos. En particular, $\emptyset$ es extensible en A o es inextensible en A. Consideremos estos dos casos.

Caso I. Si $\emptyset$ es extensible en A, es decir todo subconjunto infinito de A tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$, entonces la familia

$$\mathcal{C} = \{s \in \mathcal{F} \upharpoonright A : s \, \text{es} \sqsubseteq\text{-minimal}\}$$

es un frente en A y por el Corolario 2.10 podemos hallar $P \subseteq A$ tal que $\mathcal{C} \upharpoonright P$ es una barrera.

Caso II. Si $\emptyset$ es inextensible en A, por el Lema 3.5 existe $N \in [P]^{\infty}$ tal que cada subconjunto finito de N es inextensible en N. Supongamos que $t \in \mathcal{F} \upharpoonright N$, observemos que esto implica que el conjunto t es extensible en N lo cual es imposible y en este caso $\mathcal{F} \upharpoonright N = \emptyset$. ■

Una consecuencia del Lema de Galvin junto con el Lema 1.45 es el siguiente corolario relacionando familias arbitrarias de subconjuntos finitos de números naturales con barreras uniformes.

Corolario 3.7. *Dados* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ *y* $M \in [\mathbb{N}]^\infty$*, existe* $N \subseteq M$ *tal que*

(1) $\mathcal{F} \upharpoonright N$ *es vacía, o*

(2) $\mathcal{F} \upharpoonright N$ *contiene una barrera uniforme en* N*.* ■

Capítulo 4

Funciones de Lipschitz.

En este capítulo veremos algunas aplicaciones de la teoría de Ramsey en la teoría de Frentes y Barreras y en temas relacionados con el Análisis. En la primera sección empezamos definiendo el concepto de una función de Lipschitz de FIN en FIN y enseguida veremos que si $\varphi : \mathcal{B} \to \mathrm{FIN}$ es una función definida en una barrera $\mathcal{B}$, el Teorema de Nash-Williams asegura la existencia de un conjunto infinito N tal que φ es de Lipschitz en la familia $\mathcal{B} \restriction N$. En la sección 4.2 extendemos la noción de Lipschitz a funciones de FIN en $c_0 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, presentamos algunos ejemplos y generalizamos algunos resultados de la sección 4.1.

4.1. Funciones de Lipschitz definidas en Barreras.

Definición 4.1. *Sean* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ *y* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathrm{FIN}$ *una función.*

(1) *Decimos que* φ *es de Lipschitz si para cada par* $r, s \in \mathcal{F}$ *y cada* $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$ *con* $t \sqsubseteq r$ *y* $t \sqsubseteq s$ *tenemos que*

$$\varphi(r) \cap t = \varphi(s) \cap t.$$

(2) *Decimos que* φ *es fuertemente Lipschitz si dados* $r, s \in \mathcal{F}$ *y* $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$ *tal que* $t \sqsubseteq r$ *y* $t \sqsubseteq s$ *se cumple que*

$$\mathrm{mín}(r \setminus t) \in \varphi(r) \Leftrightarrow \mathrm{mín}(s \setminus t) \in \varphi(s).$$

Lema 4.2. *Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathrm{FIN}$ es fuertemente Lipschitz, entonces φ es de Lipschitz.*

Demostración: Sean $r, s \in \mathcal{F}$ y $t \sqsubseteq r$, $t \sqsubseteq s$. El lema se prueba por inducción en $|t|$. Como φ es fuertemente Lipschitz y el conjunto vacío es un segmento inicial común de r y s tenemos que $\min(r) \in \varphi(r) \Leftrightarrow \min(s) \in \varphi(s)$, lo cual prueba el paso inicial ya que si $|t| = 1$ entonces $t = \{\min(r)\} = \{\min(s)\}$ y así $\varphi(r) \cap t = \varphi(s) \cap t$. En el paso inductivo será suficiente probar que $\varphi(r) \cap \{\max(t)\} = \varphi(s) \cap \{\max(t)\}$, ya que por hipótesis de inducción tenemos que $\varphi(r) \cap (t \setminus \{\max t\}) = \varphi(s) \cap (t \setminus \{\max t\})$. Para ver esto, observemos que $t \setminus \{\max(t)\} \sqsubseteq r$ y también $t \setminus \{\max(t)\} \sqsubseteq s$ y por la hipótesis sobre φ tenemos que $\max(t) \in \varphi(r) \Leftrightarrow \max(t) \in \varphi(s)$. ■

Lema 4.3. *Dados $\mathcal{B}$ una barrera en M y $\varphi : \mathcal{B} \to \mathrm{FIN}$ una función, existe $N \in [M]^\infty$ tal que $\varphi \restriction (\mathcal{B} \restriction N)$ es fuertemente Lipschitz.*

Demostración: Para cada $t \in [M]^{<\infty}$ definamos

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathcal{B}_t &\to \{0, 1\} \\ s &\mapsto \chi_{\varphi(t \cup s)}(\min(s)). \end{aligned}$$

Sean $P(t, X)$ la propiedad $\varphi_t \restriction (\mathcal{B}_t \restriction X)$ es constante y $\mathcal{C} = [M]^{<\infty}$. Sea $X \in [M]^\infty$. Como $\mathcal{B}_t$ es una barrera en M/t tenemos que $\mathcal{B}_t \restriction (X/t)$ es una barrera en X/t. Por el Teorema de Ramsey, existe $Y \subseteq X/t$ tal que $\varphi_t \restriction (\mathcal{B}_t \restriction Y)$ es constante y así $P(\cdot, \cdot)$ satisface la condición (1) del Lema 1.44. Trivialmente $P(\cdot, \cdot)$ satisface el inciso (2) del mismo lema ya que si φ_t es constante en $\mathcal{B}_t \restriction X$ y $Y \subseteq X$, entonces φ_t es constante en $\mathcal{B}_t \restriction Y$. Como $P(\cdot, \cdot)$ satisface las hipótesis de dicho lema podemos tomar $N \subseteq M$ tal que $\varphi_t \restriction (\mathcal{B}_t \restriction N/t)$ es constante para cada $t \in [N]^{<\infty}$. Ahora sean $t \in \overline{\mathcal{B} \restriction N}^{\sqsubseteq}$ y $r, s \in \mathcal{B} \restriction N$ que tienen a t como segmento inicial. Como $r \setminus t, s \setminus t \in \mathcal{B}_t \restriction (N/t)$ tenemos que $\varphi_t(r \setminus t) = \varphi_t(s \setminus t)$, en otras palabras $\min(r \setminus t) \in \varphi(r) \Leftrightarrow \min(s \setminus t) \in \varphi(s)$. ■

Terminamos esta sección con una aplicación del Lema de Galvin a funciones de Lipschitz definidas en barreras, para su demostración ocupamos un lema preliminar.

Lema 4.4. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN} \to \mathrm{FIN}$ una función fuertemente Lipschitz tal que $\varphi(s) \sqsubseteq s$ para cada $s \in \mathcal{F}$. Entonces, la familia $\varphi[\mathcal{F}]$ es una $\sqsubseteq$-anticadena.*

Demostración: Supongamos que existen $t_0, t_1 \in \varphi[\mathcal{F}]$ con $t_0 \sqsubset t_1$. Tomemos s_0 y s_1 tales que $\varphi(s_0) = t_0$ y $\varphi(s_1) = t_1$ respectivamente. Por hipótesis tenemos $t_0 \sqsubset t_1 \sqsubseteq s_1$ lo que implica que $\text{mín}(s_1 \setminus t_0) \in t_1 = \varphi(s_1)$. Como también $t_0 \sqsubseteq s_0$ y la función φ es fuertemente Lipschitz tenemos que $\text{mín}(s_0 \setminus t_0) \in \varphi(s_0) = t_0$ lo cual es imposible. ■

Lema 4.5. *Supongamos que $\mathcal{B}$ es una barrera en M y $\varphi : \mathcal{B} \to \text{FIN}$ una función que cumple que $\varphi(s) \sqsubseteq s$ para cada $s \in \mathcal{B}$. Entonces, existe $N \in [M]^\infty$ tal que $\varphi[\mathcal{B} \upharpoonright N]$ contiene una barrera uniforme en N.*

Demostración: Por el Lema 4.3 podemos escoger $P \in [M]^\infty$ de tal forma que $\varphi \upharpoonright (\mathcal{B} \upharpoonright P)$ es fuertemente Lipschitz. Escribamos $\mathcal{C} = \varphi[\mathcal{B} \upharpoonright P]$ y apliquemos el Corolario 3.7 a $\mathcal{C}$ y a P para encontrar un subconjunto infinito $N \subseteq P$ tal que $\mathcal{C} \upharpoonright N$ es vacía o bien contiene una barrera uniforme. Por la hipótesis sobre φ, se cumple que $\varphi[\mathcal{B} \upharpoonright N] \subseteq \mathcal{C} \upharpoonright N$ y por ende se cumple que $\mathcal{C} \upharpoonright N$ contiene una barrera uniforme. Afirmamos que $\varphi[\mathcal{B} \upharpoonright N] = \mathcal{C} \upharpoonright N$ con lo que habremos terminado la demostración. Tomemos $t \in \mathcal{C} \upharpoonright N$ y $s \in \mathcal{B} \upharpoonright P$ con $\varphi(s) = t$. Queremos probar que existe $r \in \mathcal{B} \upharpoonright N$ con $\varphi(r) = t$. Sea $r \in \mathcal{B} \upharpoonright N$ un segmento inicial del conjunto infinito $t \cup (N/t)$, esto significa que $t \sqsubseteq r$ o $r \sqsubseteq t$ y aunando el hecho de que $\varphi(r) \sqsubseteq r$ deducimos que $\varphi(r) \sqsubseteq t$ o bien $t \sqsubseteq \varphi(r)$, pero sabemos por el Lema 4.4 que $\mathcal{C} \upharpoonright N$ es una $\sqsubseteq$-anticadena, lo cual prueba que $\varphi(r) = t$. ■

4.2. Justificación del adjetivo Lipschitz en funciones de $\mathcal{F} \subseteq$ FIN en FIN.

En esta sección denotamos por c_0 al subespacio topológico del espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el cual tiene la topología producto, que consiste de todas las funciones $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que $\text{lím}_{n\to\infty} g(n) = 0$. Similarmente c_{00} denota el subespacio de c_0 de todas las funciones g con soporte finito, es decir, las funciones para las cuales el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : g(n) \neq 0\}$ es finito. Viendo a $2^{\mathbb{N}}$ como subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ podemos identificar a FIN como un subespacio de $2^{\mathbb{N}} \cap c_0$. Esta topología coincide con la topología generada por la métrica en FIN definida al comienzo del Capítulo 1. Es decir, dados $s, r \in \text{FIN}$ se tiene que

$$d(s, r) = \frac{1}{2^{\text{mín}(s\Delta r)}}.$$

Recordemos del Análisis que una función f entre dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) se llama de Lipschitz si existe un número real $K > 0$, llamado la constante de Lipschitz, tal que para cada $x, y \in X$ se tiene que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y).$$

Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ y supongamos que $\varphi : \mathcal{F} \to \mathrm{FIN} \subseteq c_0$ es una función de Lipschitz entre los espacios métricos $\mathcal{F}$ y FIN con constante de Lipschitz $K \leq 1$. Entonces se cumple que

$$\frac{1}{2^{\min(\varphi(s)\Delta\varphi(r))}} \leq K \frac{1}{2^{\min(s\Delta r)}}.$$

En otras palabras $\min(s\Delta r) \leq \min(\varphi(s)\Delta\varphi(r))$, para cada $s, r \in \mathcal{F}$. Esto significa que para cada $n < \min(s\Delta r)$ se cumple que $\varphi(s)(n) = \varphi(r)(n)$, en particular si $s, r \in \mathcal{F}$ y $t \sqsubseteq s$ y $t \sqsubseteq r$ tenemos que $\varphi(s) \upharpoonright t = \varphi(r) \upharpoonright t$. Esto motiva la siguiente definición la cual es una generalización de la definición 4.1.

Definición 4.6. *Sean $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ y $\varphi : \mathcal{F} \to c_0$ una función.*

(1) *Decimos que φ es semi-Lipschitz si para todo $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$ el conjunto*

$$\{\varphi(s) \upharpoonright t : t \sqsubseteq s \ \ y \ \ s \in \mathcal{F}\}$$

es finito.

(2) *φ se dice de Lipschitz si para cada $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$*

$$|\{\varphi(s) \upharpoonright t : t \sqsubseteq s \ \ y \ \ s \in \mathcal{F}\}| = 1.$$

Lema 4.7. *Sean $\mathcal{B}$ una barrera en M y $\varphi : \mathcal{B} \to c_{00}$ una función semi-Lipschitz. Entonces, existe $N \in [M]^{\infty}$ tal que φ restringida a $\mathcal{B} \upharpoonright N$ es de Lipschitz.*

Demostración: Para cada $t \in [M]^{<\infty}$ definamos

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathcal{B}_t &\to c_{00} \\ s &\mapsto \varphi(t \cup s) \upharpoonright t. \end{aligned}$$

Sean $\mathcal{C} = [M]^{<\infty}$ y $P(t, X)$ la propiedad $\varphi_t \upharpoonright (\mathcal{B}_t \upharpoonright X)$ es constante. Sea $X \in [M]^{\infty}$. Como $\mathcal{B}_t$ es una barrera en M/t tenemos que $\mathcal{B}_t \upharpoonright (X/t)$ es una barrera en X/t. Además, la condición de que φ es semi-Lipschitz implica que la imágen de cada φ_t es finita. Por el Teorema de Ramsey existe $Y \subseteq X/t$ tal que $\varphi_t \upharpoonright (\mathcal{B}_t \upharpoonright Y)$ es constante y así $P(\cdot, \cdot)$ satisface (1) del Lema 1.44. Trivialmente $P(\cdot, \cdot)$ satisface (2) del mismo lema ya que si φ_t es constante en

$\mathcal{B}_t \upharpoonright X$ y $Y \subseteq X$ entonces φ_t es constante en $\mathcal{B}_t \upharpoonright Y$. Por lo cual, el Lema 1.44 nos da $N \in [M]^\infty$ tal que $\varphi_t \upharpoonright (\mathcal{B}_t \upharpoonright N/t)$ es constante para cada $t \in [N]^\infty$. Ahora veamos que N cumple la propiedad deseada. Fijemos $t \in \overline{\mathcal{B} \upharpoonright N}^{\sqsubseteq}$. Sean $r, s \in \mathcal{B} \upharpoonright N$ tales que $t \sqsubseteq r$ y $t \sqsubseteq s$. Entonces $r \setminus t, s \setminus t \in \mathcal{B}_t \upharpoonright (N/t)$ y así

$$\varphi(r) \upharpoonright t = \varphi_t(r \setminus t) = \varphi_t(s \setminus t) = \varphi(s) \upharpoonright t,$$

es decir φ es de Lipschitz restringida a la familia $\mathcal{B} \upharpoonright N$. ■

Definición 4.8. *Sean $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{FIN}$ y $\varphi : \mathcal{F} \to c_0$ una función.*

(1) *Decimos que φ es semi-fuertemente Lipschitz si para todo $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$, el conjunto*

$$\{\varphi(s)\,\mathrm{mín}(s \setminus t) : t \sqsubseteq s \ \ y \ \ s \in \mathcal{F}\}$$

es finito.

(2) *φ se dice fuertemente Lipschitz si para cada $t \in \overline{\mathcal{F}}^{\sqsubseteq}$,*

$$|\{\varphi(s)\,\mathrm{mín}(s \setminus t) : t \sqsubseteq s \ \ y \ \ s \in \mathcal{F}\}| = 1.$$

Lema 4.9. *Dadas $\mathcal{B}$ una barrera en M y $\varphi : \mathcal{B} \to c_{00}$ una función semi-fuertemente Lipschitz, existe $N \in [M]^\infty$ tal que $\varphi \upharpoonright (\mathcal{B} \upharpoonright N)$ es fuertemente Lipschitz.*

Demostración: La demostración es análoga al Lema 4.7. Definimos la familia $\mathcal{C} = [M]^{<\infty}$ y $P(t, X)$ la propiedad de que la función

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathcal{B}_t &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \varphi(t \cup s)(\mathrm{mín}(s)) \end{aligned}$$

es constante restringida a $\mathcal{B}_t \upharpoonright X$. Nuevamente el Teorema de Ramsey, el cual podemos aplicar ya que φ es semi-fuertemente Lipschitz y por ello cada φ_t tiene rango finito, nos dice que $P(\cdot, \cdot)$ satisface las hipótesis del Lema 1.44. Sean $N \in [M]^\infty$ como en dicho lema, $r, s \in \mathcal{B} \upharpoonright N$ y t un segmento inicial común de r y s, entonces $r \setminus t, s \setminus t \in \mathcal{B}_t \upharpoonright (N/t)$ y por lo tanto

$$\varphi(r)(\mathrm{mín}(r \setminus t)) = \varphi_t(r \setminus t) = \varphi_t(s \setminus t) = \varphi(s)(\mathrm{mín}(s \setminus t)),$$

como queriamos demostrar. ■

El siguiente lema se prueba de manera idéntica al Lema 4.2.

Lema 4.10. *Si $\varphi : \mathcal{F} \to c_0$ es fuertemente Lipschitz, entonces φ es de Lipschitz.* ■

El recíproco del resultado anterior en general no se cumple, un ejemplo fácil de una función $\varphi : \mathrm{FIN} \to c_0$ de Lipschitz que no satisface la condición fuerte de Lipschitz es el siguiente: sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ una sucesión estrictamente decreciente y definamos para cada $s \in \mathrm{FIN}$

$$\varphi(s)(n) = \begin{cases} x_n & \text{si } n \in s, \\ 0 & \text{si } n \notin s. \end{cases}$$

Bibliografía

[1] S. A. Argyros and S. Todorcevic: *Ramsey Methods in Analysis*, Advanced Courses in Mathematics, CRM, Barcelona, Birkhauser, 2005.

[2] C. A. Di Prisco y J. López Abad: *Teoría de Ramsey y Espacios de Banach*, Notas, XXI Escuela Venezolana de Matemáticas, 2008.

[3] R. Engelking: *General Topology.* Helderman Verlag. Berlin, 1989.

[4] T. Jech: *Set theory*, second edition. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[5] K. Kunen: *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[6] F. P. Ramsey: *On a Problem of Formal Logic*, Proceedings of the London Mathematical Society (2), vol. 30, pp. 264-286, 1930.