



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

OSCILADORES NO LINEALES ACOPLADOS

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F Í S I C O
P R E S E N T A:**

ELFEGO RUIZ GUTIÉRREZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DOCTOR RAFAEL PÉREZ PASCUAL**

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Ruiz
Gutiérrez
Elfego
58 12 29 02
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
300 51 37 23

2. Datos del tutor

Dr
Rafael
Pérez
Pascual

3. Datos del sinodal 1

Dr
Guillermo
Sierra
Loera

4. Datos del sinodal 2

Dr
Octavio
Miramontes
Vidal

5. Datos del sinodal 3

Dr
Edgar
Álvarez
Zauco

6. Datos del sinodal 4

M en I
Fernando
Garfias
Macedo

7. Datos del trabajo escrito

Osciladores No Lineales Acoplados
130p
2010

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Rafael Pérez Pascual, por la paciencia que me tuvo a lo largo de este trabajo.

A la UNAM, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Física por el apoyo y las facilidades que nos brindan a los estudiantes.

A mis padres, Aurora del Pilar Gutiérrez Torres y Elfego Ruiz Schneider por toda la ayuda a lo largo de mi vida.

A Elisa Iseth Cepeda Pérez por su cariño.

A los sinodales del examen profesional por su tiempo y valiosos comentarios.

Dedicatoria

Dedico la tesis a mis padres y a mi abuela Alma Torres por ser un ejemplo de rectitud...

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatoria	III
Índice general	V
Introducción	1
1. Sistemas Dinámicos	3
1.1. El concepto de sistema dinámico	3
1.2. Sistemas dinámicos continuos	8
1.3. Sistemas dinámicos discretos	18
2. Sistemas Dinámicos en Neurociencia	25
2.1. La Neurona Como Sistema Dinámico	26
2.2. Sincronización	28
3. Dos OIDs acoplados	41
3.1. Un OID Forzado	41
3.2. Dos OIDs acoplados	47
4. Tres OIDs acoplados	73
4.1. Los sistemas de tres OIDs acoplados	74
4.2. El Espacio Fase y las Trayectorias	77
4.3. La Técnica de los Mapeos	79
4.4. El sistema $(T+)^6$	79
4.5. El sistema $(T-)^6$	87
Conclusiones Generales	93

A. Apéndice	95
A.1. Parámetros del Mapeo I.	95
A.2. Parámetros del Mapeo II.	96
A.3. Parámetros del Mapeo III.	96
A.4. Parámetros del Mapeo IV.	97
A.5. Secuencia de relajamientos del sistema $(T+)^6$	99
A.6. El mapeo del sistema $(T+)^6$	99
A.7. Códigos de los programas de computadora.	109
 Bibliografía	 119

Introducción

En el siglo XVIII Christiaan Huygens revolucionó la medida del tiempo al construir el primer reloj de péndulo autosostenido; años más tarde descubrió un comportamiento extraño al colocar dos relojes de este tipo en los extremos de un soporte horizontal. Para su asombro, las lentejas de ambos relojes se columpiaban a la misma frecuencia pero con fase contraria, es decir, los péndulos llegaban a un estado de sincronización. Si los péndulos son desfasados manualmente el estado de sincronización con fase contraria se recupera en un tiempo corto.

Motivado por el descubrimiento, Huygens pensó que se podría resolver el problema de medición del tiempo en la navegación marítima. Sin embargo, las observaciones de Huygens no resolvieron el ambicionado problema pero, inspiraron estudios modernos de sincronización de oscilaciones en la dinámica no lineal.

El fenómeno de sincronización se llega a observar cuando dos o más osciladores no lineales ajustan sus ritmos como efecto de alguna interacción. Este fenómeno se presenta en sistemas vivos a nivel de células simples, subsistemas fisiológicos, organismos o incluso al nivel de poblaciones. [Glass, Mackey, 1988, Picovsky, et. al., 2001]

La sincronización es esencial para el funcionamiento normal de muchos sistemas, por ejemplo, en la comunicación por radio, en los marcapasos que ajustan el ritmo cardíaco y en fenómenos meteorológicos, entre otros. En el campo de las neurociencias, la sincronización es de vital importancia pues es la base de todos los ritmos biológicos como en la coordinación motora y los procesos de atención. Sin embargo, una sincronización desmedida puede conducir a malfuncionamientos como en el caso de la epilepsia.

Este fenómeno y muchos otros se pueden estudiar bajo la teoría de los sistemas dinámicos. En particular, los osciladores de integración y disparo resultan muy útiles y eficientes pues emulan, siendo sumamente simples, muchas de las características de sistemas de osciladores muy complejos. La intención de este trabajo es encaminarnos en el estudio de una red neuronal, con el fin de modelar un sistema de esta naturaleza, se desarrollará a profundidad el caso de tres osciladores de integración y disparo acoplados. A partir de esto se busca tener

una perspectiva más amplia de las posibles generalizaciones a sistemas de muchos osciladores acoplados por sofisticados que sean.

En el capítulo 1 se comienza con una breve reseña de la teoría de los sistemas dinámicos, introduciendo algunos de los conceptos más básicos, con base en ello, en el capítulo 2 se aborda el terreno de las neurociencias, modelando algunas de las propiedades básicas de las neuronas y su respuesta bajo la estimulación o la interacción entre ellas. En el capítulo 3 se analiza a los osciladores de integración y disparo, mostrando sus características y el comportamiento cuando se acoplan dos de estos y finalmente, en el capítulo 4, se realiza una investigación sobre el comportamiento de un sistema de tres osciladores.

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos

1.1. El concepto de sistema dinámico

Una **ecuación diferencial ordinaria** es una relación de la forma

$$f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(k)}) = 0. \quad (1.1)$$

con $f \in C(\mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R})$ ¹ y x una función desconocida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Al grado de la derivada más alta, k , en este caso, se le llama el **orden** de la ecuación.

Una solución de la ecuación diferencial es una función $\phi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que la satisface, es decir, que cumple con 1.1,

$$f(t, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \dots, \phi^{(k)}) \equiv 0. \quad (1.2)$$

El **teorema de existencia y unicidad** muestra que, cuando f es una función continua y de derivada continua² y dadas unas condiciones iniciales, esto es, un conjunto de valores específicos de la función $x(t)$ y de sus primeras $k-1$ derivadas a un cierto tiempo t_0 , existe una y sólo una solución de la ecuación diferencial la cual, además de satisfacer la ecuación, cumple con dichas condiciones iniciales.

Se puede ver de otra forma a las ecuaciones diferenciales; se puede despejar a $x^{(k)}$ de ec. 1.1,

$$x^{(k)} = g(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(k-1)}), \quad (1.3)$$

¹En este texto se empleará la siguiente notación, \dot{x} se refiere a la primera derivada temporal de la variable x , esto es $\dot{x} = dx/dt$, para la segunda derivada se utilizarán dos puntos. Si se tiene una derivada de orden mayor de la variable x , se denotará el orden entre paréntesis en el superíndice, por ejemplo $x^{(m)} = d^m x/dt^m$. Además, la notación $C^m(U, V)$ significa el conjunto de funciones de $U \rightarrow V$ con derivada continua hasta orden m . Si $m = 1$ se omitirá escribir el número.

²Puede pedirse a f cumplir con condiciones menos estrictas, pero para nuestros propósitos no es necesario este refinamiento.

con lo que al cambiar a un nuevo conjunto de variables independientes $y = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(k-1)})$ se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ &\vdots \\ \dot{y}_{k-1} &= y_k, \\ \dot{y}_k &= g(t, y).\end{aligned}$$

Así se lleva la ecuación original a un **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden**. Más aún, es posible agregar t a las variables independientes, esto es, $z = (t, y)$ para hacer al segundo miembro de la ecuación independiente del tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 1, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_k &= z_{k+1}, \\ \dot{z}_{k+1} &= g(z).\end{aligned}$$

Un sistema en el que no hay dependencia temporal se llama **autónomo**, y como se mostró anteriormente, basta con considerar a los sistemas autónomos de primer orden para el estudio de las ecuaciones diferenciales.

A menos de especificarse lo contrario, de ahora en adelante se trabajará con ecuaciones en la forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.4}$$

con $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ y $f \in C(\mathbb{R}^k)$. A \mathbb{R}^k , el espacio donde está definida la ecuación diferencial, se le conoce como espacio fase³. [Teschl, 2003]

El mapeo f puede interpretarse como un **campo vectorial** sobre \mathbb{R}^k . Las soluciones son entonces, curvas tangentes en todo punto a ese campo vectorial. En particular, las soluciones de la ecuación diferencial ajustadas a las condiciones iniciales son llamadas **curvas integrales** o **trayectorias**. Se dice entonces, que x es una curva integral si satisface a la ecuación diferencial y cumple la condición $x(t_0) = x_0$. En la figura 1.1 se muestra un ejemplo del espacio fase del péndulo simple.

³En la mecánica clásica, particularmente en el ámbito de la mecánica hamiltoniana, el espacio fase toma otro significado, pues está conformado por las coordenadas y momentos generalizados. En este trabajo, no se empleará esta definición.

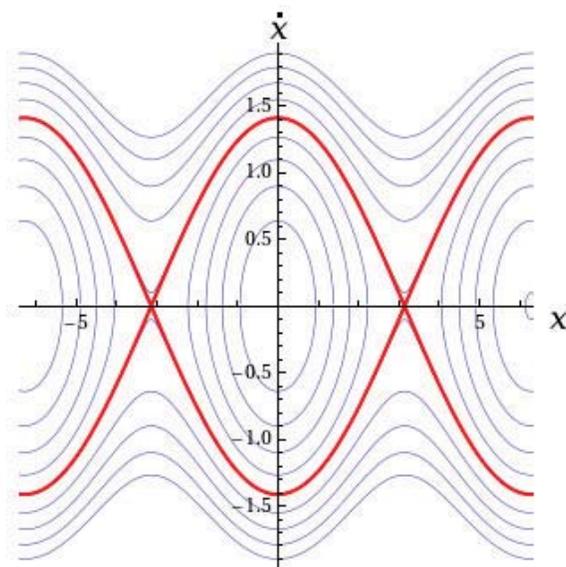


Figura 1.1: Ejemplo pictórico del espacio fase del péndulo simple. Las líneas muestran algunas de las trayectorias que describe una partícula.

Desde el punto de vista físico, el estado de un sistema está representado por un punto en el espacio fase. Desde una perspectiva geométrica, las soluciones a la ecuación diferencial son curvas parametrizadas por el tiempo tales que los vectores tangentes a dichas curvas coinciden con el campo f .

El teorema de existencia y unicidad hace ver que para cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^k$ existe una y sólo una solución de la ecuación diferencial que tiene a ese punto como condición inicial. Esto implica que, por cada punto del espacio fase, pasará una y sólo una curva solución y por tanto, éstas curvas o trayectorias llenan el espacio y no se intersectan.

El teorema de existencia y unicidad trae consecuencias importantes en la topología de las soluciones, por ejemplo, si hay una curva cerrada en \mathbb{R}^2 , es decir, una solución periódica que encierra a una región, las trayectorias dentro de esta región quedan atrapadas para todo t , análogamente, si una trayectoria comienza fuera de la región encerrada, jamás podrá entrar.

1.1.1. El concepto de flujo en el espacio fase

Es posible contemplar a las ecuaciones diferenciales bajo otro punto de vista. Al tener un valor del tiempo, por ejemplo cero y un cierto punto del espacio fase, x , después de un tiempo t , el punto x habrá recorrido la trayectoria correspondiente y se encontrará en el punto x' . Al ser esto válido para todo punto del espacio fase, dado un valor del tiempo t , es posible establecer un mapeo del espacio fase en si mismo:

$$\psi_t : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (1.5)$$

definido por

$$\psi_t(x) = x', \quad (1.6)$$

esto es, a cada punto del espacio fase se le asocia aquel punto al que irá a parar cuando se recorre la trayectoria durante un tiempo t .

Generalizando esto es posible construir un mapeo $\psi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ que a cada punto $x \in \mathbb{R}^k$ y a cada tiempo $t \in \mathbb{R}$ le asocia un punto $x' \in \mathbb{R}^k$ dado por $\psi_t(x)$.

Estos mapeos representan las soluciones de la ecuación diferencial, ya que si se tienen estos mapeos, se tiene el conjunto de soluciones y, viceversa, si se tienen las soluciones se puede construir el mapeo. Por esta razón los mapeos son equivalentes a la ecuación diferencial y se puede decir que el estudio de este tipo de mapeos es otra forma de tratar a las ecuaciones diferenciales.

Por la semejanza con la descripción del fluir de un líquido, a estos mapeos se les llama el flujo del espacio fase y presentan la ventaja de poder contemplar en un sólo objeto matemático todas las soluciones de la ecuación diferencial.

El conjunto de los mapeos ψ_t tiene propiedades interesantes. En primer lugar el mapeo ψ_0 es el mapeo cuando no ha transcurrido tiempo alguno, por lo tanto, todos los puntos se quedan en su lugar, es decir, es el mapeo idéntico,

$$\psi_0 = \mathbf{1}. \quad (1.7)$$

En segundo lugar, la composición de dos de estos mapeos es equivalente a un mapeo con un intervalo de tiempo igual a la suma de los tiempos de los dos mapeos,

$$\psi_{t_1} \circ \psi_{t_2} = \psi_{t_1+t_2}. \quad (1.8)$$

En tercer lugar, dado uno de ellos, ψ_t , existe otro, que corresponde a recorrer la trayectoria en sentido contrario del tiempo ψ_{-t} , tal que al componerlo con el mapeo original da el mapeo idéntico, esto es, existe un inverso,

$$\psi_t \circ \psi_{-t} = \psi_0. \quad (1.9)$$

Finalmente, al igual que para cualquier conjunto de mapeos, la operación de composición es asociativa,

$$\psi_{t_1} \circ (\psi_{t_2} \circ \psi_{t_3}) = (\psi_{t_1} \circ \psi_{t_2}) \circ \psi_{t_3}. \quad (1.10)$$

Por tanto, que el conjunto de mapeos ψ_t forma un **grupo** ante la operación de composición; es más, la estructura de este grupo es la misma que la estructura del grupo de los números reales ante la adición. Se dice entonces que el flujo es un grupo de un parámetro de mapeos del espacio fase en si mismo.

Esta propiedad de flujo es, desde luego, consecuencia de haber sido construido a partir de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, pero lo inverso es también cierto. Esto es, para un conjunto de mapeos de $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ parametrizados por \mathbb{R} tales que, ante la composición, forman un grupo con la estructura del grupo de los reales ante la suma, entonces conforman un flujo y habrá un ecuación diferencial en \mathbb{R}^k cuyas soluciones generan ese flujo. Esto es, el flujo de $\psi_t(x_0)$ mapea a x_0 en x_t y en particular, la diferencial de este mapeo corresponde al campo vectorial del flujo, pero visto de otra forma, siendo lo mismo que la derivada con respecto al tiempo de x evaluada en algún tiempo, por ejemplo cero, entonces,

$$\dot{x} = \left. \frac{d}{dt} \psi_t(x) \right|_{t=0} = f(x), \quad (1.11)$$

ésta es la ecuación diferencial derivada del flujo. A un conjunto de mapeos parametrizados de la forma descrita se le llama también una **acción** del grupo de los reales sobre la variedad \mathbb{R}^k . [Pérez]

1.1.2. Definición de sistema dinámico

Un sistema dinámico es aquél que cambia o evoluciona con el paso del tiempo cuando dicho cambio está determinado por el estado mismo del sistema. Existen muchos ejemplos de sistemas dinámicos como el balanceo del péndulo en un reloj, la cinética de una reacción química e incluso la población de peces en un estanque.

Formalmente, un sistema dinámico está definido como la acción de un **semi-grupo** G actuando sobre un espacio de estados o espacio fase M . Es decir, un mapeo

$$\begin{aligned} T : \quad M \times G &\rightarrow M \\ (x, g) &\rightarrow T_g(x) \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} T_g \circ T_h &= T_{g \oplus h}, \\ T_0 &= 1, \end{aligned}$$

donde \oplus denota la operación del grupo. Si G es un grupo se tienen los inversos operacionales, por lo tanto, el sistema dinámico es **invertible**.

Se tiene un **sistema dinámico continuo** cuando,

$$G = \mathbb{R}^+ \quad \text{ó} \quad G = \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

y un **sistema dinámico discreto** cuando,

$$G = \mathbb{N}_0 \quad \text{ó} \quad G = \mathbb{Z}. \quad (1.13)$$

Como se mostró con anterioridad, el ejemplo más común de un sistema dinámico continuo es el flujo de una **ecuación diferencial autónoma**,

$$T_t = \psi_t, \quad G = \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

El ejemplo más común de un sistema dinámico discreto es el de la iteración de un mapeo. Para una f que mapea \mathbb{R}^n en si mismo,

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.15)$$

el sistema es:

$$T_n = f^n = f \circ f \circ \dots \circ f, \quad (n \text{ veces}) \quad G = \mathbb{N}_0. \quad (1.16)$$

Si el mapeo f es invertible y $n \in \mathbb{Z}$, G será un grupo y el sistema dinámico será invertible. Este trabajo se limita a estos casos.

Se podría decir que la meta principal de la teoría de los sistemas dinámicos es entender el comportamiento eventual o asintótico de los procesos del sistema. Si se trata de una ecuación diferencial cuya variable independiente es el tiempo, entonces, la teoría intenta predecir el comportamiento ulterior de las soluciones de la ecuación ya sea en el pasado remoto ($t \rightarrow -\infty$) o en el futuro distante ($t \rightarrow \infty$). Si el proceso es discreto, tal como la iteración de una función, entonces la teoría busca entender el comportamiento eventual de la serie de puntos $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\}$ conforme n tiende a ∞ . [Teschl, 2003]

Con este propósito se mostrarán algunos conceptos importantes para el tratamiento de los sistemas dinámicos.

1.2. Sistemas dinámicos continuos

Uno de los ejemplos más comunes de sistemas dinámicos continuos son las ecuaciones diferenciales autónomas, por lo tanto, se comenzará por el estudio de éstas. Considérese la ecuación diferencial autónoma siguiente,

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.17)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Cuando la dimensión $n > 1$, la ecuación se puede expandir a un sistema de ecuaciones acopladas, esto es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x).\end{aligned}$$

Esta ecuación se dice que es **lineal** si,

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad (1.18)$$

con a_{ij} y b_i constantes, $i = 1, 2, \dots, m$. Esto es, la ecuación diferencial se presenta de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + b. \quad (1.19)$$

Si \mathbf{A} es una matriz real no singular de $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$, siempre se puede hacer una traslación mediante un cambio de coordenadas tal que la constante b se anule,

$$\dot{x}' = \mathbf{A}x'. \quad (1.20)$$

Considérese ahora una transformación lineal a unas nuevas variables:

$$y = \mathbf{W}x', \quad (1.21)$$

la ecuación se reescribe,

$$\dot{y} = \mathbf{WAW}^{-1}y. \quad (1.22)$$

Si la matriz \mathbf{A} es diagonalizable, es posible escoger \mathbf{W} tal que el producto de las matrices \mathbf{WAW}^{-1} sea una matriz diagonal \mathbf{E} de **eigenvalores**. Entonces, la solución de la ecuación es:

$$y(t) = ce^{\mathbf{E}t},$$

es decir,

$$y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, \quad (1.23)$$

con c_i constantes que dependen de las condiciones iniciales y λ_i el i -ésimo eigenvalor de \mathbf{A} . Es posible regresar a las variables originales mediante el mapeo inverso de ec. 1.21, con lo que la ecuación queda resuelta.

Para el caso general que la matriz \mathbf{A} no sea diagonalizable o sea degenerada, se puede resolver el sistema vía la forma canónica de Jordan que es un método más robusto. [Teschl, 2003]

Este es un método para obtener la solución de algunas de las ecuaciones diferenciales lineales, sin embargo, la inmensa mayoría de las ecuaciones diferenciales no son lineales. En el caso de las no lineales no existen métodos sistemáticos para resolverlas ni para clasificarlas o encontrar sus comportamientos cualitativos o topológicos generales, tanto es así que, actualmente el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales es un tema abierto a la investigación.

A pesar de la rareza de las ecuaciones lineales, el estudio anterior no resulta en vano como se mostrará a continuación, ya que auxilia en el estudio de las ecuaciones no lineales.

1.2.1. Puntos críticos

Nótese que para las ecuaciones diferenciales lineales (ec. 1.20) sin importar cual sea la matriz \mathbf{A} , el origen es un punto que por si mismo satisface la ecuación diferencial. En general, a los puntos del espacio fase del sistema dinámico que permanecen en su lugar todo el tiempo se les llama puntos críticos. Conocer los puntos críticos de una ecuación diferencial es de gran importancia ya que nos permite iniciar el estudio del comportamiento de sus soluciones.

Para una ecuación diferencial, los puntos críticos o de equilibrio, ξ , satisfacen $f(\xi) = 0$ y corresponden a estados de equilibrio o reposo del sistema. Existen diferentes clasificaciones para estos puntos según el comportamiento de las trayectorias en una vecindad de ellos. Esto se logra al hacer una expansión en serie de Taylor de $f : M \rightarrow M$, donde M es el espacio fase de dimensión n , al rededor del punto crítico ξ se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(\xi) + Df(\xi)x + o(x^2) \\ &\simeq \mathbf{J}x.\end{aligned}$$

Donde $\mathbf{J} = Df(\xi)$ es la diferencial de f , una matriz cuadrada de $n \times n$, conocida como **matriz Jacobiana** del mapeo en el punto ξ .

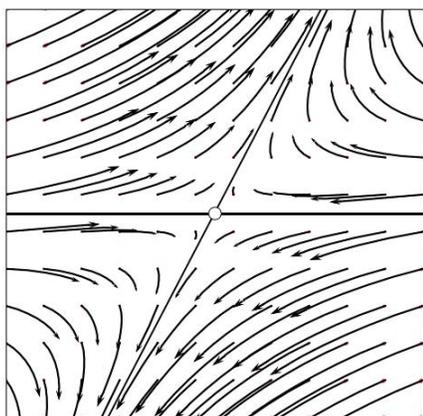
La ecuación:

$$\dot{x} = \mathbf{J}x, \tag{1.24}$$

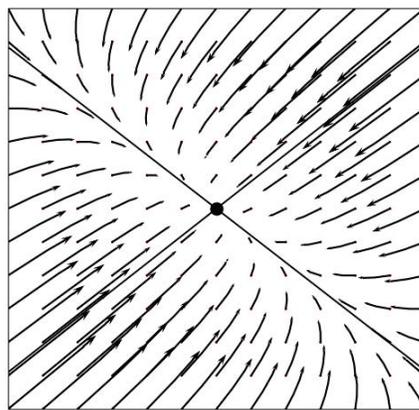
es conocida como una linealización de ec. 1.17.

Los puntos críticos están clasificados según el comportamiento de las trayectorias en su vecindad. Resulta conveniente encontrar los eigenvectores y eigenvalores de \mathbf{J} para su taxonomía. Por simplicidad, considérese al plano real como el espacio

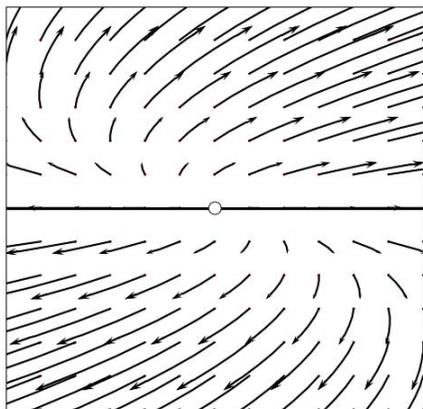
Punto Silla



Nodo Estable



Nodo Degenerado



Espiral Divergente

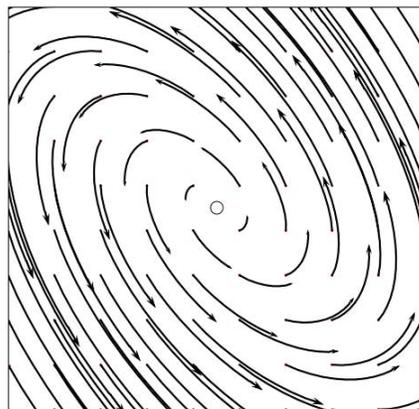


Figura 1.2: Ejemplos de puntos críticos y su clasificación según el comportamiento de las trayectorias en su vecindad.

fase del sistema. En tal caso \mathbf{J} es una matriz cuadrada de 2×2 y los eigenvectores y eigenvalores vienen en parejas.

1. Si los eigenvalores son reales y de signos opuestos el punto crítico es un **punto silla**.
2. Si los eigenvalores son distintos pero reales y del mismo signo, entonces, el punto crítico es un **nodo**. Existen dos tipos de nodos.
 - a) Si los eigenvalores son positivos entonces se tiene un punto de equilibrio **repulsor** o **inestable**.
 - b) Si los eigenvalores son negativos el punto crítico es un **atractor**.
3. En caso de tener un eigenvalor nulo, el punto crítico no está aislado y probablemente sea parte de toda una curva de puntos de equilibrio, si son iguales hay degeneración, esto causa singularidades y no serán consideradas en este trabajo. En ésta se encuentran las **estrellas** y **nodos degenerados**.
4. Cuando los eigenvalores de la matriz \mathbf{J} son complejos, deben ser complejos conjugados, y se pueden presentar las siguientes posibilidades:
 - a) Si la parte real del valor propio es positivo se tienen **espirales divergentes** y el punto crítico será un **foco inestable**.
 - b) Si ésta es negativa entonces las trayectorias al rededor del punto fijo son **espirales convergentes** y el punto crítico será un **foco estable**.
 - c) Cuando la parte real es nula los eigenvalores son puramente imaginarios lo que induce rotaciones alrededor del punto fijo formando **órbitas cerradas**, estas se encuentran comúnmente en sistemas físicos conservativos cuando el potencial presenta mínimos locales.⁴

En la figura 1.2 se muestran algunos ejemplos del comportamiento de las trayectorias en la vecindad de los puntos críticos.

Naturalmente, este análisis únicamente permite estudiar al sistema en torno a los puntos críticos, pero se sabe que el resto del espacio fase debe estar lleno de trayectorias que no se pueden intersectar y que deben extenderse de manera continua y congruente con el comportamiento cercano a los puntos críticos.

⁴Es posible que el sistema no muestre órbitas cerradas al rededor del punto fijo, a pesar de que la linealización afirme lo contrario, en esos casos se debe hacer una mejor aproximación.

Esto permite simplificar el estudio de la ecuación diferencial, sin embargo, se debe recordar que dada una configuración de puntos críticos pueden existir muchas formas cualitativamente distintas de llenar el espacio fase con trayectorias, por lo que el estudio topológico no es conclusivo.

Para sistemas definidos en un espacio de mayor dimensionalidad, por ejemplo, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m > 2$. La matriz \mathbf{J} será de $m \times m$ con entradas reales. En este caso se tienen m eigenvalores y el estudio anterior puede ser generalizado sin mayores dificultades. [Strogatz, 1994]

1.2.2. Ciclos límite

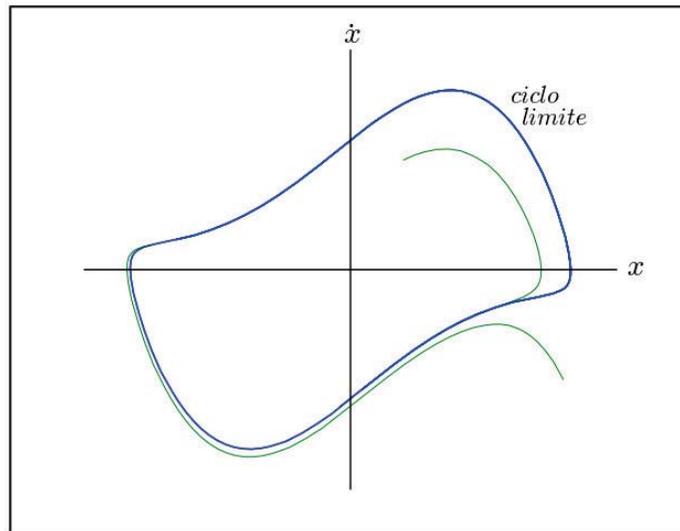


Figura 1.3: Ciclo límite del oscilador de van der Pol.

Otras de las curvas solución cuyo comportamiento es sobresaliente son los llamados ciclos límite. Un ciclo límite es una **trayectoria cerrada** en cuya vecindad no todas las trayectorias son cerradas. Una trayectoria cerrada implica que con el transcurso del tiempo, el estado del sistema regresa idénticamente a las condiciones iniciales y por tanto corresponde a una solución periódica.

Cuando las trayectorias circundantes a un ciclo límite se aproximan en espiral a él, se dice que éste es un ciclo límite atractor. Si por el contrario, las trayectorias vecinas se alejan con el paso del tiempo, se dice que el ciclo límite es inestable.

Hay casos excepcionales, en los que el ciclo límite puede ser **semiestable**, por ejemplo, si dentro de éste las trayectorias se alejan pero por fuera se acercan o viceversa. En la figura 1.3 se muestra un ciclo límite y algunas trayectorias cercanas a éste.

Los ciclos límite estables son muy importantes, pues corresponden a sistemas que muestran oscilaciones autosostenidas. En otras palabras, los sistemas muestran estabilidad para un tipo de oscilación, por ejemplo: el latir del corazón, el disparo periódico de un neurona marcapaso, el péndulo de un reloj, etc. En cada caso, hay una oscilación de un período prefente, forma y amplitud; si el sistema es perturbado ligeramente, no tardará mucho en recuperarse. Los ciclos límite únicamente se presentan en fenómenos no lineales de por lo menos dos dimensiones. [Strogatz, 1994]

1.2.3. Bifurcaciones

En el espacio fase muchas de las trayectorias especiales mencionadas anteriormente pueden coexistir y pueden organizar el flujo de muy diferentes maneras. Por ejemplo, considérese una barra en un espacio de dos dimensiones orientada verticalmente y sosteniendo una masa sobre su eje natural como la mostrada en la figura 1.4. Al principio, si el peso no es muy grande, la barra permanece recta, sin deformación alguna. Si por demás, se le desea doblar, ésta se opondrá y regresará rápidamente a su estado erguido. Desde el punto de vista dinámico, esto corresponde a un nodo estable. Si el peso que sostiene la barra se incrementa, eventualmente, ésta no soportará más y, ante la menor perturbación, se doblará hacia uno u otro lado. Es decir, el punto crítico que antes era estable se ha convertido en inestable y se han generado dos nodos estables a los lados.

El comportamiento cualitativo de la barra ha cambiado significativamente al

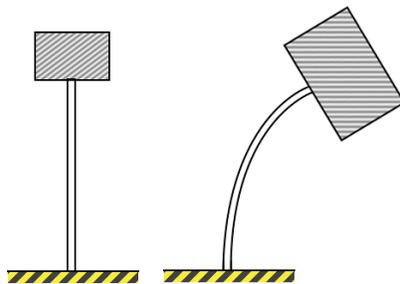


Figura 1.4: Bifurcación en la estabilidad de una barra al soportar diferentes pesos.

aumentar el peso que carga. El nodo estable original se ha transformado en tres nodos, dos estables a los lados, y uno central inestable. Éste es un ejemplo de **bifurcación**, o sea, de un cambio en el comportamiento cualitativo del sistema ante el cambio de un parámetro estructural del mismo. Se dice que la bifurcación ocurre en el momento en que el sistema presenta el cambio cualitativo, en este caso, cuando el peso que sostiene la barra es tal que la barra pierde estabilidad para mantenerse erguida.

En general, ante un cambio de un parámetro estructural pueden ocurrir bifurcaciones, los puntos fijos pueden ser creados o aniquilados, la estabilidad del sistema puede variar rotundamente, órbitas cerradas pueden desaparecer, etc. El estudio de las bifurcaciones es relevante pues no cualquier cambio es posible, por lo que las bifurcaciones ayudan a entender el comportamiento general de los sistemas dinámicos.

En general, cuando se tiene una ecuación diferencial como la siguiente

$$\dot{x} = f_{\beta}(x), \quad (1.25)$$

donde β es un parámetro estructural. Se dice que hay una bifurcación si se presentan **cambios cualitativos** o **topológicos** en las soluciones cuando el parámetro β transita por un valor específico.

Para ilustrar mejor este concepto se mostrará otro ejemplo. Considérese siguiente ecuación,

$$\dot{x} = \beta + x^2. \quad (1.26)$$

Donde β es un parámetro que puede tomar valores negativos, positivos o cero. Cuando β es negativo, hay dos puntos críticos ($\pm\sqrt{\beta}$), uno estable y otro inestable. Conforme el valor de β aumenta, los puntos de equilibrio se acercan el uno al otro. Para $\beta = 0$, existe un único punto crítico semiestable, esto es, estable por la izquierda pero inestable por la derecha. Si el parámetro β es positivo, no existen puntos críticos o de equilibrio. Entonces, se dice que ocurrió una bifurcación en $\beta = 0$, ya que el campo vectorial, para valores de β positivos y negativos, es cualitativamente distinto.

A esta bifurcación se le conoce como bifurcación de **silla-nodo**.

Existen innumerables clasificaciones de bifurcaciones, como la **bifurcación supercrítica de tridente** ejemplificada con la barra del inicio de la subsección y un sinnúmero más. Por lo pronto, no se indagará más en la taxonomía de éstas. [Strogatz, 1994]

1.2.4. Caos

Entre los comportamientos que pueden destacar los sistemas dinámicos hay que destacar el llamado caos dinámico o simplemente caos. El caos en general es difícil definirlo, y por ese motivo hay diferencias entre los especialistas para su definición. Para nuestros fines se empleará la siguiente definición:

Caos es el comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinista que muestra alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

Por *comportamiento aperiódico a largo plazo* se debe entender que las trayectorias no tienden a órbitas periódicas, cuasiperiódicas, a puntos fijos o al infinito conforme $t \rightarrow \infty$. Por razones prácticas se requiere que tales trayectorias no sean de medida cero dentro del espacio fase, esto es, dado un conjunto de condiciones iniciales aleatorias, es probable que el sistema tenga una trayectoria de este tipo.

Determinista significa que el sistema no tiene ruido o alguna variable aleatoria. El comportamiento irregular proviene únicamente de la no linealidad de la ecuación diferencial.

La *alta sensibilidad a condiciones iniciales* se refiere a que trayectorias cercanas se alejan exponencialmente rápido. Sin embargo, es importante recalcar el hecho de que las trayectorias deben estar acotadas, de lo contrario, se podría cometer el error de incluir varios sistemas que muestran sensibilidad a las condiciones iniciales conforme las trayectorias se alejan al infinito.

Estas características hacen que el comportamiento sea aparentemente aleatorio, además, dada la alta sensibilidad en la práctica, el comportamiento se vuelve impredecible.

Para ilustrar el comportamiento caótico considérese el problema de Sitnikov por ejemplo. El problema consiste en un sistema de dos cuerpos llamados primarios, por ejemplo, dos estrellas, de masas iguales y un tercer cuerpo, de masa mucho menor a la de los primarios, por ejemplo, un asteroide, de tal manera que se considera que no afecta al movimiento de los primarios. Las estrellas se mueven sobre un plano cuyo origen está dado por el centro de masas. El movimiento del tercer cuerpo está constreñido a una línea perpendicular al plano de los primarios que pasa por el origen. La fuerza neta que actúa sobre el cuerpo de menor masa es:

$$F = -\frac{2GMmx}{[x^2 + r^2(t)]^{3/2}}, \quad (1.27)$$

donde x es la posición de la masa respecto al plano y $r(t)$ la distancia de los primarios a su centro de masas que está dada por la solución del problema de Kepler.

Si las órbitas de los primarios fuesen circulares, entonces $r(t)$ resultaría con-

stante y el sistema resulta integrable. Cabe mencionar que en estas condiciones el movimiento del cuerpo pequeño realizará oscilaciones periódicas en torno al origen. Para órbitas con excentricidad ligeramente mayor a cero, la reducción a cuadraturas del problema no es posible, sin embargo, se tienen algunos resultados importantes sobre el sistema.

Considérese una sucesión cualquiera de números aleatorios reales $\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ finita o infinita por un lado o por los dos y la sucesión de tiempos entre dos pasos consecutivos del planeta por el centro de masas de las estrellas, por ejemplo $\dots, \tau_{-2}, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$, donde una sucesión finita por la izquierda significa que el planeta venía de infinito y es capturado por el sistema binario y una finita por la derecha indica que el planeta escapa a infinito después de su último paso por el centro de masas. Se ha demostrado que dada la sucesión arbitraria de números reales, existen condiciones iniciales para el planeta, esto es una posición x_0 y una velocidad v_0 , tales que la sucesión de intervalos de tiempo entre pasos sucesivos por el centro de masas reproduce la sucesión de números reales dada.

Por ejemplo, si la sucesión de números reales es $\dots, 7.8, 15.3, 7.8, 15.3, 7.8, 15.3, \dots$ esto es, una sucesión periódica, entonces con las condiciones iniciales adecuadas el planeta describirá una órbita periódica, con exactamente esos períodos.

Si la sucesión es $\dots, 7.8, 15.3, 7.8, 15.3, 7.8, 15.3$, nótese que es casi la misma del ejemplo anterior, excepto que es finita por la derecha, dadas las condiciones iniciales adecuadas el planeta estará en una órbita que después de pasar por la multitud de veces por el origen en los tiempos indicados, escapa al infinito y no vuelve a pasar por el centro de masas. Lo que significa que si se ha observado por muchos ciclos al planeta y se tiene los datos de la sucesión de intervalos de tiempo entre pasos por el centro de masas, no es posible calcular el tiempo del siguiente paso, pues las condiciones pudieran ser las que dan origen a la órbita periódica, las que determinan que en un momento dado escapa a infinito o cualquier otra, por ejemplo, una que comienza de igual manera pero concluye con números distintos, $\dots, 7.8, 15.3, 7.8, 15.3, 7.8, 15.3, e^{10}, \cos(2/3), \pi, 2, \dots$

Al observar al planeta y tomar esos tiempos, en principio, no es posible distinguir si son producto del azar, o como es el caso, producto de un sistema totalmente determinista.

Cuando un sistema mecánico presenta trayectorias de esta naturaleza se dice que es un sistema caótico o que presenta el fenómeno del caos determinista. [Pérez]

1.3. Sistemas dinámicos discretos

Los sistemas dinámicos discretos son también conocidos como **ecuaciones en diferencias**, **relaciones de recurrencia**, **iteraciones de mapeos** o informalmente **mapeos**. A diferencia de las ecuaciones diferenciales, donde el tiempo es continuo, el parámetro que parametriza a los mapeos en estos sistemas es discreto. La electrónica digital, algunos casos de finanzas y la ecología son algunos campos donde abundan este tipo de sistemas.

Por lo general se representa a las iteraciones de mapeos con la ecuación

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.28)$$

donde $x_i \in M$, donde M es el espacio fase. En las ecuaciones diferenciales el mapeo ψ_t representa el papel de un propagador temporal, parametrizado por el tiempo, en esta ocasión será la misma f la que juega ese papel.

Una solución de la ecuación diferencial es el conjunto de puntos $\psi_t(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En las iteraciones de mapeos, a la sucesión de puntos x_0, x_1, x_2, \dots se le llama la **órbita hacia adelante** del punto x_0 , o más breve $O^+(x_0)$. En caso de que el mapeo tenga inversa, se puede definir la **órbita hacia atrás** como la sucesión de puntos $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots$ que se abrevia $O^-(x_0)$; naturalmente, al conjunto $\{x_i | \forall i \in \mathbb{Z}\}$ se le llama la **órbita completa**, $O(x_0)$.

1.3.1. Puntos fijos y puntos periódicos

Las órbitas de un mapeo pueden ser conjuntos bastante complejos aún para un mapeo no lineal aparentemente simple. Sin embargo, hay órbitas que son especialmente sencillas y juegan un papel central en el estudio del sistema completo. Se trata de los puntos fijos y los puntos periódicos.

Un punto ξ es un **punto fijo** de f si $f(\xi) = \xi$. Es decir, es un punto que permanece en su lugar para todas las iteraciones futuras.

Para determinar la estabilidad de ξ se considera una órbita local en torno al punto fijo $x_n = \xi + \eta_n$ y se indaga si la órbita se acerca o se aleja de este, es decir, si $|\eta_n|$ aumenta o disminuye conforme aumenta n . Haciendo una expansión en serie de Taylor al rededor del punto fijo se tiene:

$$\xi + \eta_{n+1} = f(\xi) + Df(\xi)\eta_n + o(\eta_n^2)$$

esto es

$$\eta_{n+1} \simeq \mathbf{J}\eta_n. \quad (1.29)$$

donde $\mathbf{J} = Df(\xi)$ es la diferencial del mapeo f evaluada en ξ . Esta última expresión es la linealización del sistema discreto en la vecindad del punto fijo ξ . La solución de esta linealización es muy sencilla, por inducción, uno puede ver que

$$\eta_n = \mathbf{J}^n \eta_0. \quad (1.30)$$

Cuando el espacio fase es la recta real, $\lambda \equiv \mathbf{J} = \frac{d}{dx}f|_{\xi}$, si $|\lambda| < 1$ entonces $\lambda^n \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$, esto significa que η_n se hace cada vez más pequeña y por lo tanto el punto fijo es **atractor** o **estable**. Contrariamente, si $|\lambda| > 1$, la diferencia entre la órbita y el punto fijo crece, esto implica que el punto fijo es **inestable** o **repulsor**.

El análisis cuando se tienen más dimensiones no presenta mayores dificultades conceptuales. Se busca un sistema de coordenadas para el cual \mathbf{J} sea diagonalizable o diagonalizable en bloques de 2×2 , lo que desacopla el sistema. Se llega a una clasificación similar a la de los puntos críticos del caso continuo.

Hay puntos en el dominio de los mapeos que no se quedan invariantes con la primera iteración del mapeo sino después de p iteraciones, a estos se les llama **puntos periódicos**; esto es, el punto ξ_1 es un punto periódico de período p si $f^p(\xi_1) = \xi_1$ para el menor número natural positivo p para el que esto ocurra⁵. La semejanza es clara con las curvas cerradas que son solución de las ecuaciones diferenciales. Aquí el período es un número natural a diferencia de un real.

La órbita $\{\xi_1, \xi_2 = f(\xi_1), \dots, \xi_{p-1} = f(\xi_{p-2})\}$, constará de p puntos periódicos de período p , $\xi_p = f(\xi_{p-1}) = \xi_1$.

Los puntos periódicos también pueden ser atractores o repulsores dependiendo del comportamiento de los puntos de su vecindad. Para determinar la estabilidad en la vecindad se hace el siguiente análisis.

Considérese al mapeo $F = f^p$. Este es un mapeo auxiliar en el que los puntos periódicos de f son puntos fijos. Con este mapeo se puede hacer el análisis de estabilidad que se tiene para los puntos fijos. Por lo tanto si $|DF(\xi_k)|$ es menor a la unidad el punto periódico k es estable o atractor, en caso de que dicha cantidad sea mayor a uno, el punto es inestable o repulsor. En caso de n dimensiones, los eigenvalores de la diferencial del mapeo proporcionan esta información.

Nótese que la estabilidad de un punto periódico es la misma que la de los

⁵Nótese que $f^{Np}(\xi_1) = \xi_1$ para todo entero N .

demás, esto se debe a que,

$$\begin{aligned}
 Df^p(\xi_k) &= Df(f^{p-1}(\xi_k)) \cdot Df(f^{p-2}(\xi_k)) \cdot \dots \cdot Df(\xi_k) \\
 &= Df(\xi_{k+p-1}) \cdot Df(\xi_{k+p-2}) \cdot \dots \cdot Df(\xi_k) \\
 &= \prod_{i=1}^p Df(\xi_i).
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Se puede ver que la diferencial no depende de la k , por lo tanto es la misma para cualquiera de los puntos que constituyen una órbita periódica.[Strogatz, 1994]

1.3.2. Bifurcaciones

El concepto de bifurcación de los sistemas dinámicos discretos es el mismo que se tenía en los sistemas continuos. Esencialmente, la teoría de bifurcaciones estudia los cambios cualitativos que un mapeo presenta ante el cambio de un parámetro. En la iteración de mapeos los cambios normalmente involucran la estructura y estabilidad de los puntos periódicos, pero también pueden incluir otros tipos de cambios.

Por ejemplo, el mapeo

$$x_{n+1} = f_\beta(x_n) = \beta e^{x_n} \tag{1.32}$$

presenta dos comportamientos cualitativamente distintos en función de los valores de β , aún para $\beta > 0$. Si $\beta < e^{-1}$, f_β tiene dos puntos fijos, uno estable y uno inestable (figura 1.5 izquierda). Si $\beta > e^{-1}$, el mapeo no tiene punto fijo alguno (figura 1.5 derecha). El cambio se da en $\beta = e^{-1}$, es decir, el valor donde ocurre la bifurcación (figura 1.5 centro). Esta bifurcación es un ejemplo de las bifurcaciones **silla-nodo** para iteraciones de mapeos.

Existen muchos tipos distintos de bifurcaciones en los sistemas dinámicos discretos al igual que en los continuos, pero hay un tipo de bifurcación que es propio de los discretos, la llamada bifurcación de **doblamiento de período**, un ejemplo de ésta se puede observar en la figura 1.6. Básicamente, este tipo de bifurcación se da cuando se tiene una órbita periódica de período p^6 para un cierto valor de β . Al transitar β por un valor crítico β_c , los puntos de la órbita periódica pierden estabilidad pero surgen dos puntos estables por cada punto periódico de la órbita. Si antes de la bifurcación los puntos periódicos eran p , ahora se tienen $2p$ puntos y la periodicidad de la órbita es $2p$. Por esta razón se le llama bifurcación de doblamiento de período.[Devaney, 1948]

⁶Por supuesto también se puede incluir a los puntos fijos, esto es, cuando $p = 1$.

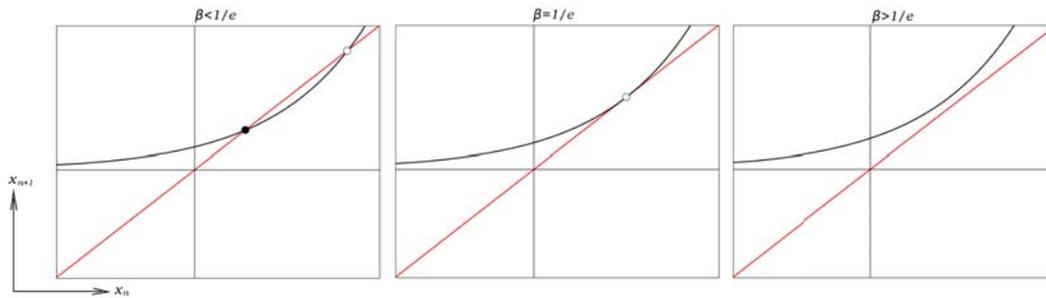


Figura 1.5: Ejemplo de bifurcación que se presentan en los sistemas dinámicos discretos.

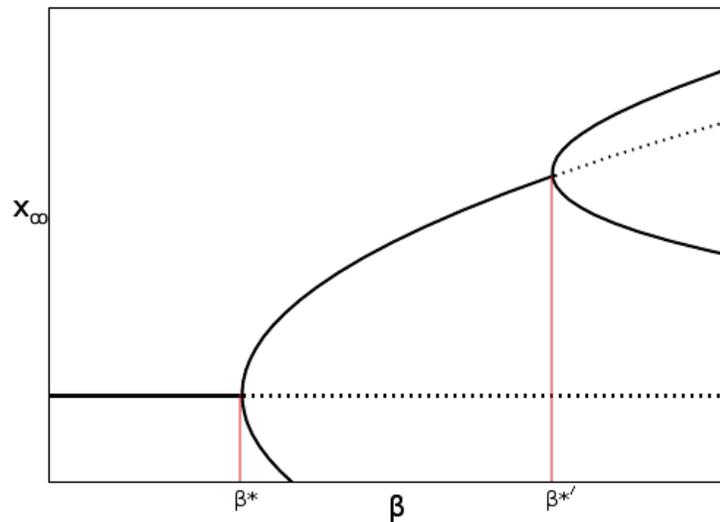


Figura 1.6: Ejemplo de una bifurcación de doblamiento de período.

1.3.3. Caos

Hay muchos mapeos que muestran comportamientos llamados caóticos. De nuevo, hay muchas posibles definiciones de caos que van de la medición de algunas propiedades extrapoladas de la teoría ergódica [Pérez] hasta la aproximación topológica que se adoptará aquí.

Intuitivamente, se dice que un mapeo $f : M \rightarrow M$ es caótico en M si cumple con las siguientes propiedades:

1. f tiene *sensibilidad a las condiciones iniciales*.
2. f es *topológicamente transitivo*.
3. Los puntos periódicos son densos en M .

Un mapeo posee *sensibilidad a las condiciones iniciales* si existen puntos arbitrariamente cercanos cuyas órbitas se separan con las iteraciones de f . Si un mapeo posee sensibilidad a las condiciones iniciales, para propósitos prácticos, la dinámica del mapeo sobrepasa las capacidades de los métodos numéricos. Pequeños errores en la computación numérica que son introducidos por el redondeo se magnifican con el paso de las iteraciones. Por lo tanto, se puede perder noción de la órbita caótica real a partir de los métodos numéricos. Esto hace a los sistemas caóticos prácticamente impredecibles a largo plazo.

Se dice que un mapeo $f : M \rightarrow M$ es *topológicamente transitivo* si para cualquier par de conjuntos abiertos $U, V \subset M$ existe un número entero $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En palabras, la transitividad topológica de un mapeo se refiere a que cualquier par de conjuntos abiertos dentro del espacio fase eventualmente se intersectarán bajo un número finito de iteraciones. Consecuentemente, M no se puede descomponer en dos conjuntos abiertos ajenos que resulten invariantes al mapearse puesto que cada punto pasa tan cerca como se quiera de todo punto en M . Nótese que si el mapeo posee una órbita densa entonces, el mapeo es topológicamente transitivo. Lo contrario también es cierto, pues los mapeos topológicamente transitivos poseen al menos una órbita densa.

Por último, en medio del comportamiento aparentemente aleatorio, se tiene un elemento de regularidad, este debido a que los puntos periódicos son densos en M . [Devaney, 1948]

El ejemplo a continuación muestra comportamiento caótico. Considérese al siguiente mapeo:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = 2\theta_n \pmod{1}. \quad (1.33)$$

Este es un mapeo del círculo (de perímetro unitario) en si mismo ($f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$).

Nótese que el mapeo tiene un punto fijo $\theta = 0$ y tiene órbitas que eventualmente llegan al punto fijo, por ejemplo, la órbita que comienza en $\theta_0 = 1/4$; la órbita hacia adelante es $\{1/4, 1/2, 0, 0, \dots\}$. Hay también órbitas periódicas, por ejemplo, si se comienza desde $\theta_0 = 1/3$, la órbita es $\{1/3, 2/3, 1/3, \dots\}$. Como es de esperarse, hay puntos que eventualmente son periódicos, por ejemplo, con $\theta_0 = 19/24$, $\theta_1 = 7/12$, $\theta_2 = 1/6$, $\theta_3 = 1/3$ y de aquí comienza la órbita de período dos anterior.

Éste sistema tiene propiedades similares a las del caso de tres cuerpos que se estudia en la sección de caos dinámico para ecuaciones diferenciales. Si se expresa la variable θ en sistema de numeración binaria, entonces $\theta = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$, donde α_i son cero o uno. Ahora, en este sistema el dos se escribe 10 y, por lo tanto, multiplicar por dos es recorrer la sucesión decimal un lugar a la izquierda, modulo 1 simplemente iguala a cero la entrada a la izquierda del punto, es decir, si,

$$\theta_n = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots \quad (1.34)$$

entonces,

$$\theta_{n+1} = 0.\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots \quad (1.35)$$

Queda claro que dada una sucesión de ceros y unos se puede generar una condición inicial θ_0 pues se trata de un número real entre cero y uno en sistema binario.

Cualquier número escrito en sistema binario con una colección finita de α_i , con las iteraciones del mapeo, eventualmente caerá al cero, es decir, llegará al punto fijo. Otra variante puede ser que θ_0 sea tal que tenga una subsucesión finita de α 's y que estos se repitan indefinidamente. Este punto inicial, reproducirá una órbita periódica o eventualmente periódica y su periodicidad dependerá del número de α 's de dicha subsucesión. Los puntos en el intervalo $[0, 1)$ que cumplen con estas características forman un conjunto denso. Lo que prueba la última de las propiedades mencionadas del caos, esto es, los puntos periódicos son densos pues se puede probar que este conjunto de puntos corresponden a los racionales de intervalo $[0, 1)$.

La transitividad topológica se muestra de una manera muy sencilla. Tómese una fracción del intervalo $[1, 0)$, por ejemplo, al conjunto de puntos que comienzan con 0.01..., nótese que, a las tres iteraciones, los puntos del conjunto cubren densamente a todo $[0, 1)$ y por lo tanto, el mapeo es topológicamente transitivo.

Ahora, considérense dos números θ_0 y ϑ_0 tal que expresados en sistema binario, difieren desde la i -ésima entrada, para una i arbitrariamente grande. Con las iteraciones del mapeo, las órbitas que aparentaban ser muy semejantes en un principio, cada vez se pueden distinguir más una de la otra. Sin embargo, a partir de la i -ésima iteración, θ_i y ϑ_i ya no tienen semejanza alguna en su expresión

binaria y por consiguiente el resto de las órbitas diferirán enormemente, lo cual muestra la alta sensibilidad a las condiciones iniciales.[Devaney, 1948]

Se ha visto en este capítulo un breve panorama de los sistemas dinámicos, es preciso advertir que nuestra intención ha sido hacer una breve exposición de esta teoría con el fin de introducir algunos conceptos que serán de utilidad en el estudio de los osciladores de integración y disparo, en particular, como se exhibirá en el siguiente capítulo, con aplicaciones a las neurociencias.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos en Neurociencia

Una neurona es una célula del sistema nervioso que se destaca por una propiedad fundamental: la excitabilidad. Las neuronas son células altamente especializadas en el procesamiento y transmisión de señales electroquímicas. Hay una variedad muy amplia de formas, tamaños y propiedades electroquímicas de estas células. De manera esquemática, una neurona se divide en tres partes: el soma, las dendritas y el axón, como se muestra en la figura 2.1.

El **soma** o cuerpo celular es la parte que contiene al núcleo de la célula y es donde se realiza la mayoría de las funciones fisiológicas. Las **dendritas** son extensiones del soma en forma de ramas. El **axón** es una prolongación que porta las señales producidas en el soma hacia otras células. La longitud de esta parte llega a medir decenas, centenas o en ocasiones miles de veces el tamaño del cuerpo.

Las neuronas al término de su axón, pueden hacer contacto con otra neurona, este contacto es llamado **sinapsis** y se distingue por ser una unión de brecha, es decir, consta de pequeño espacio entre neurona y neurona. Esta interacción tiene el efecto de promover o inhibir la producción de pulsos, llamados potenciales de acción, en la neurona que los recibe.

Los pulsos son los medios principales de comunicación entre este tipo de células y son electroquímicos.

Hay neuronas que emiten espontáneamente y otras que sólo lo hacen como respuesta a estimulación adecuada que reciben.

La mecánica de la generación de estos pulsos en una neurona se puede modelar como un sistema dinámico.

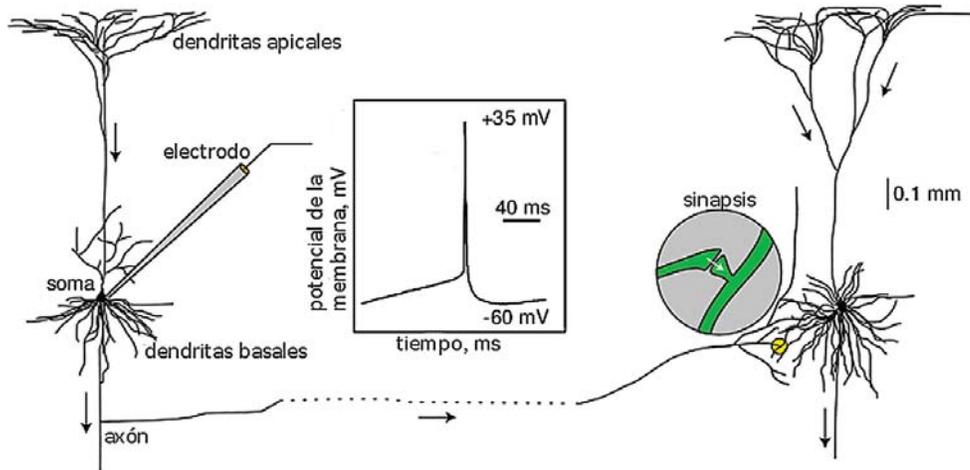


Figura 2.1: Dos neuronas interconectadas (dibujo a mano, [Izhikevich, 2007]) y un pulso registrado *in vitro*.

2.1. La Neurona Como Sistema Dinámico

Para entender los mecanismos de generación de los impulsos nerviosos es necesario comprender la dinámica de los iones en la membrana. En resumen, se podría decir que las **corrientes iónicas** son las que definen el tipo de sistema dinámico que representa a la célula. Entre éstas se distinguen dos tipos de corrientes: las corrientes amplificadoras y las corrientes resonantes.

Las **corrientes amplificadoras** son corrientes que aumentan la diferencia de potencial entre la parte interna y la externa de la célula e inhiben las corrientes salientes, es decir, **despolarizan** la membrana. Las **corrientes resonantes**, por el contrario, son corrientes que reducen la susceptibilidad de la célula a cambios de potencial en la membrana, es decir, la **hiperpolarizan**. Muchos modelos incluyen, por simpleza, únicamente una corriente amplificadora y una resonante.

2.1.1. La neurona vista en el espacio fase

Una neurona aislada puede estar representada por una ecuación diferencial autónoma,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

donde \mathbb{R}^n es el espacio fase, f es un campo vectorial definido por las características de la célula y rige su dinámica. Este campo, por lo general, no es simple en su forma algebraica. La variable x representa el estado de la neurona y esta puede incluir el

potencial de la membrana, las variables de activación de algunas corrientes iónicas o la concentración de diferentes iones dentro de la célula.

El modelo conocido como $I_{Na,p} + I_K$ (sodio persistente más potasio) presenta las suficientes características como para comenzar el estudio del comportamiento neuronal, por tal motivo, se tomará este modelo de ahora en adelante. Este modelo sólo contempla una corriente amplificadora y una resonante, éstas son la de Na^+ y la de K^+ respectivamente, por tal motivo se le considera un modelo simplista. En este modelo, el estado de la célula nerviosa está descrito por el potencial de la membrana V y una variable de activación de la corriente de K^+ , denotada n . La activación instantánea del sodio es una función del potencial, por lo tanto, el espacio fase consta de dos dimensiones.

La evolución del sistema traza una trayectoria en el espacio fase parametrizada por el tiempo, $(V(t), n(t))$. La descripción cualitativa general puede obtenerse mediante el estudio del espacio fase del sistema. [Izhikevich, 2007]

Cuando el potencial de la membrana descansa la neurona mora en estado de quietud. Desde el punto de vista dinámico, no hay cambios en el estado de las variables de la célula, por consiguiente, se dice que está en equilibrio. Todas las corrientes entrantes que despolarizan la membrana están en balance con las corrientes salientes que la hiperpolarizan. Si la neurona permanece quieta, salvo por pequeñas fluctuaciones estocásticas, se puede concluir que el equilibrio es estable y pequeñas perturbaciones resultan en desplazamientos del equilibrio que eventualmente regresan. Sin embargo, perturbaciones más intensas pueden ser amplificadas por la propia neurona resultando en una espiga de voltaje.

Si, por ejemplo, se inyecta corriente suficientemente intensa, se puede traer a la neurona a un modo de actividad periódica sostenida tipo marcapaso. Desde el punto de vista dinámico, la neurona se encuentra en un ciclo límite estable. La electrofisiología de la célula sólo determina la forma, la localización y el período del ciclo.

Cabe resaltar que los puntos de equilibrio y los ciclos límite pueden coexistir, es decir, hay **multiestabilidad**. Una neurona puede alterar de un modo a otro mediante estimulación adecuada.

2.1.2. Bifurcaciones en el comportamiento neuronal

En la figura 2.2 se observa cómo cambia la dinámica de la célula nerviosa al variar los estímulos. Cuando la magnitud de la corriente inyectada por el estímulo es leve, ésta permanece alrededor del punto de equilibrio. Si por el contrario, la corriente inyectada es suficientemente alta, la neurona actúa como marcapaso, el comportamiento cualitativo resulta ser completamente distinto. Aparentemente,

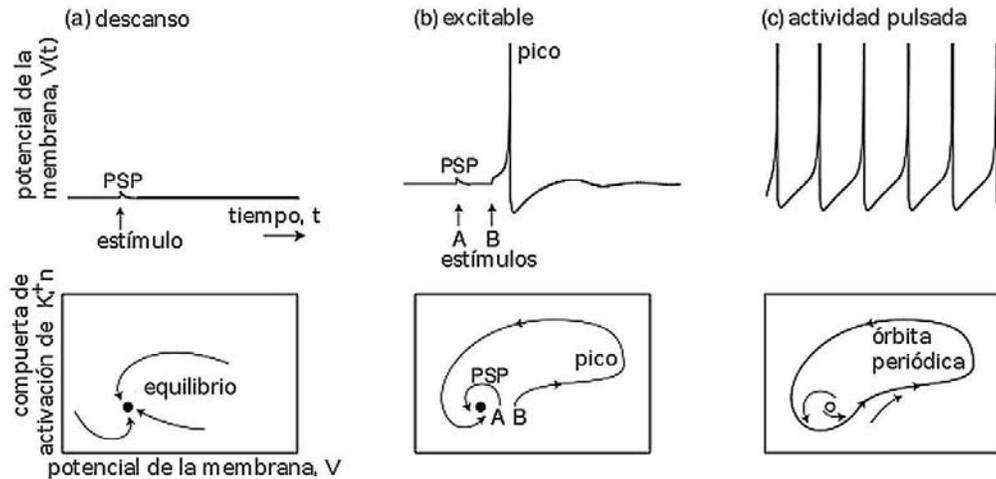


Figura 2.2: En la parte superior de la figura se muestran diversos modos de actividad de una neurona con sus retratos fase en la parte inferior. (a) Una neurona en descanso, en éste modo, las trayectorias convergen rápidamente al punto de equilibrio. (b) Una neurona excitable, dependiendo del estímulo, las trayectorias regresan al punto de equilibrio o la célula responde con un pico transitorio denotados en la figura como A y B respectivamente. (c) Una neurona en actividad sostenida, la trayectoria aparece como una curva cerrada, curvas cercanas se aproximan a este circuito rápidamente.[Izhikevich, 2007]

debe existir un punto intermedio en la magnitud de la corriente que corresponde a la transición de un comportamiento a otro.

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, la transición corresponde a una bifurcación en la dinámica de la célula y por lo general, las neuronas son excitables ya que se encuentran cercanas a una bifurcación entre quietud y equilibrio, por esta razón, el tipo de bifurcación determina las propiedades de excitabilidad.

2.2. Sincronización

Como ejemplo de las propiedades que se pueden presentar al tener un conjunto de neuronas que conforman una red vía las sinapsis, se estudiará el caso simple de neuronas marcapaso cuando las conexiones pueden excitar o inhibir el ritmo de disparos de cada una de ellas; en especial nos interesamos en fenómenos de sincronización en estos conjuntos de neuronas.

La sincronización dentro de los sistemas neuronales es uno de los mecanismos

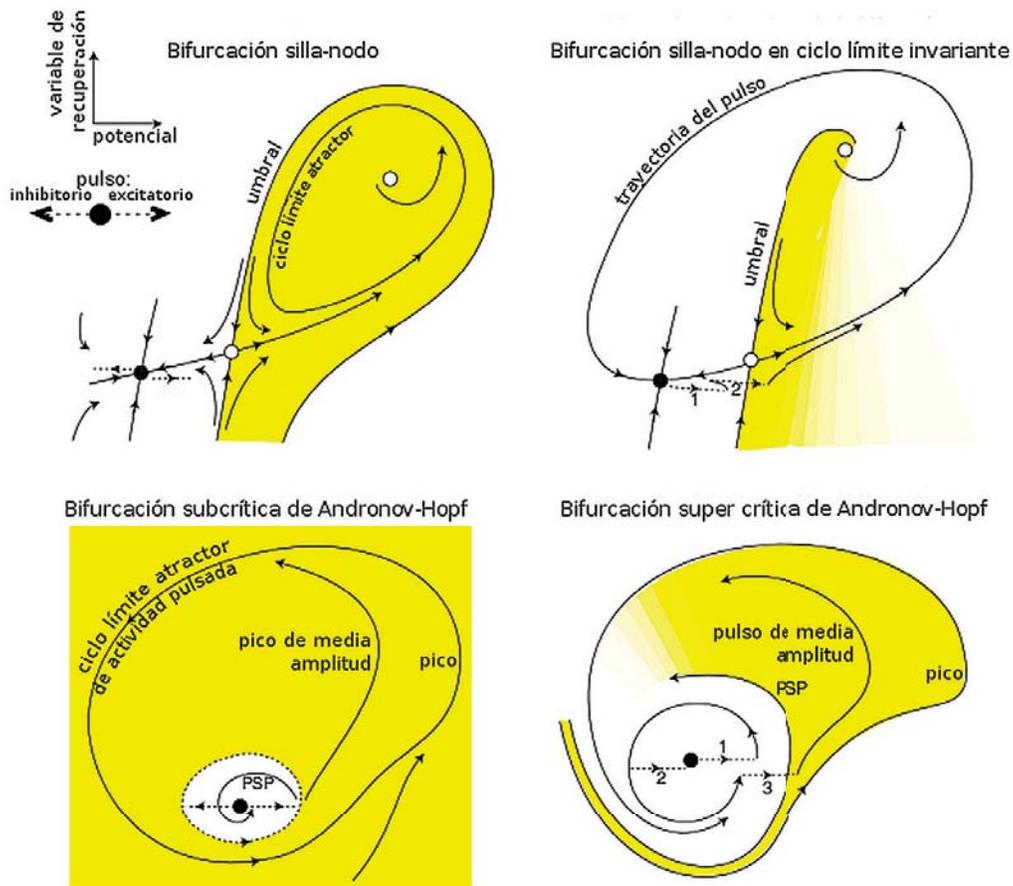


Figura 2.3: Los cuatro tipos de bifurcaciones por las que una neurona puede transitar si alterna su modo de actividad. La geometría de los retratos fase puede explicar muchas propiedades neurocomputacionales.[Izhikevich, 2007]

que sustentan muchas de las propiedades del sistema nervioso central. Se cree, por ejemplo, que una sincronía parcial en conjuntos de neuronas de la corteza cerebral es la responsable de las oscilaciones eléctricas colectivas conocidas como las ondas alfa y gamma encontradas en el electroencefalograma. Así mismo se considera que la sincronía es necesaria para controlar el movimiento físico de un animal o incluso para generar algunos de los procesos de atención. Por otro lado, una sincronía generalizada puede resultar en modos de actividad patológica como la epilepsia. En lo siguiente se mostrará con una aproximación cómo puede ocurrir este fenómeno de la sincronización neuronal.

2.2.1. El concepto de fase de oscilación

Al igual que muchos tipos de osciladores, las neuronas marcapaso, es decir, neuronas en el modo de actividad pulsada periódica, son descriptibles mediante una sola variable de fase, ϑ . La idea es la siguiente.

Una neurona que periódicamente emite pulsos nerviosos o potenciales de acción, puede entenderse como aquella cuya dinámica está caracterizada por un ciclo límite estable en su espacio fase o de estados. Mientras la célula esté en esa situación se puede parametrizar la trayectoria, que es una curva cerrada por medio de una fase,

$$\vartheta \equiv 2\pi \frac{t}{T} \text{ mod } 2\pi, \quad (2.2)$$

donde T es el período y ϑ es llamada la **fase de oscilación**.¹ Por costumbre se emplea el punto del ciclo límite donde el potencial alcanza su valor máximo para situar el cero de la fase. Esto lo se puede ver en la parte derecha de la figura 2.4 donde el ciclo límite es mapeado al círculo.

¹La definición de fase de oscilación puede extenderse fuera del contexto de las neurociencias, es decir, a cualquier trayectoria cíclica se le puede definir una fase.

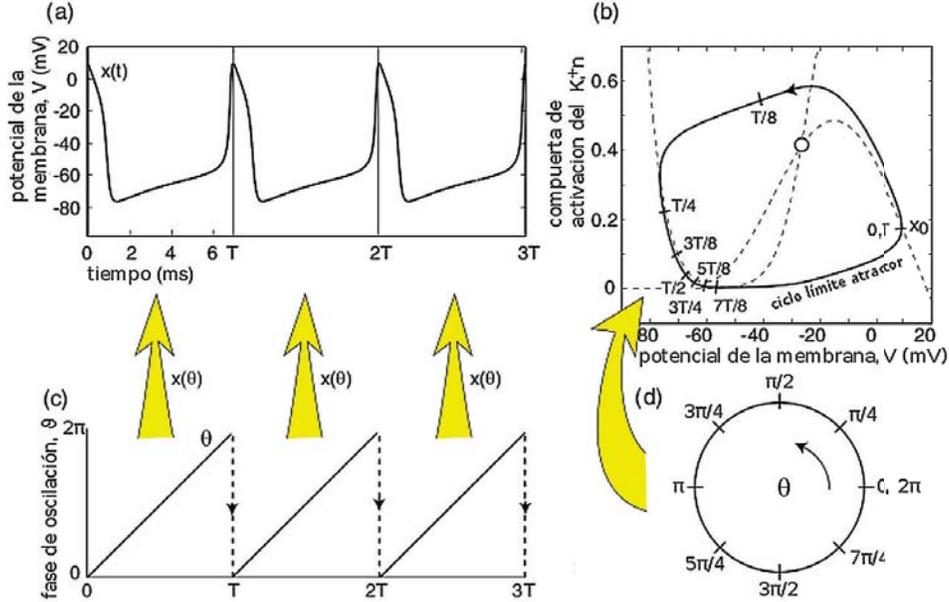


Figura 2.4: Definición de fase de oscilación, ϑ , para el modelo $I_{Na,p} + I_K$. El ciclo límite (arriba) es homeomorfo al círculo S^1 (abajo). [Izhikevich, 2007]

La fase de oscilación también puede ser definida fuera del ciclo límite siempre y cuando sea atractor. Considérese, por ejemplo, a un punto y_0 en la cuenca de atracción del ciclo. Con el paso del tiempo, la evolución del sistema trazará una curva $y(t)$. Estrictamente hablando, la trayectoria $y(t)$ al no estar sobre el ciclo límite no es periódica, sin embargo, tiende a éste asintóticamente. Es decir, existe una trayectoria $x(t)$ sobre el ciclo límite que comienza en cierto punto x_0 y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x(t)| = 0. \quad (2.3)$$

Es importante señalar la importancia de escoger bien al punto x_0 ; de no ser así, la diferencia entre las trayectorias no tiende a cero con el paso del tiempo. Por esta razón se dice que el punto y_0 y el punto x_0 tienen la misma fase.

Análogamente, es posible, al tiempo inicial $t = 0$ fijar un punto x_0 sobre el ciclo límite y encontrar todos los puntos y_0 que cumplen con ec. 2.3 cuando $x(0) = x_0$. Al conjunto que forma todos esos puntos se le conoce como la **isócrona** de x_0 . Todos los puntos de esta curva tienen comportamiento asintótico indistinguible de $x(t)$, por ello, se dice que tienen la fase de x_0 .

Todos los puntos y en la cuenca de atracción del ciclo límite dan lugar a trayectorias asintóticas a él, por tanto, se les puede asociar una fase. Se puede, entonces,

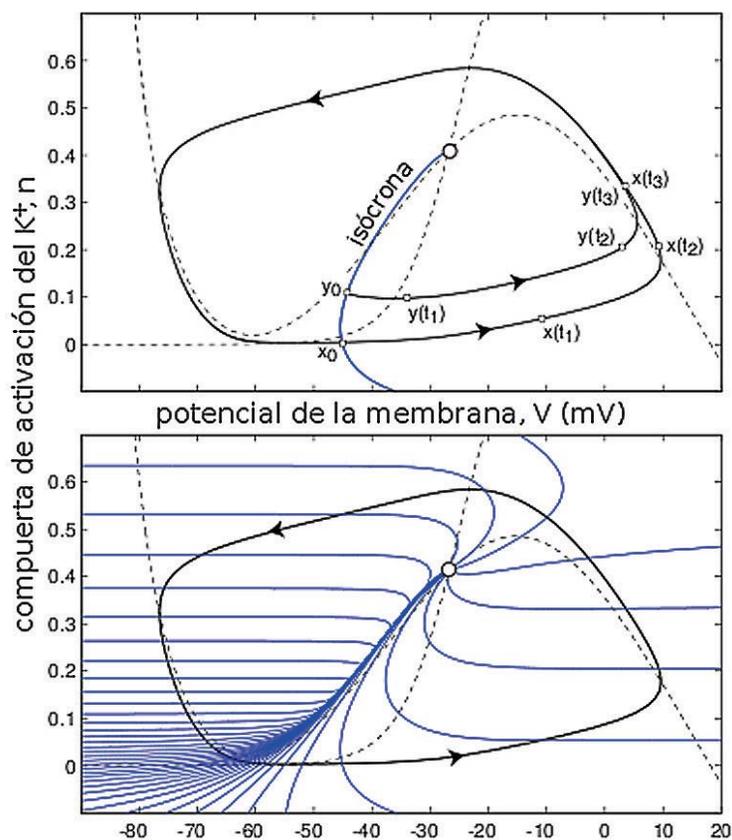


Figura 2.5: *Arriba*. Una isócrona, o la variedad con la misma fase de oscilación que el punto x_0 , es decir, el conjunto de puntos que comienzan trayectorias indistinguibles de la que empieza en x_0 . *Abajo*. Cuarenta isócronas igualmente distribuidas en cuanto la fase, $2\pi n/40$, $n = 1, 2, 3, \dots, 40$. [Izhikevich, 2007]

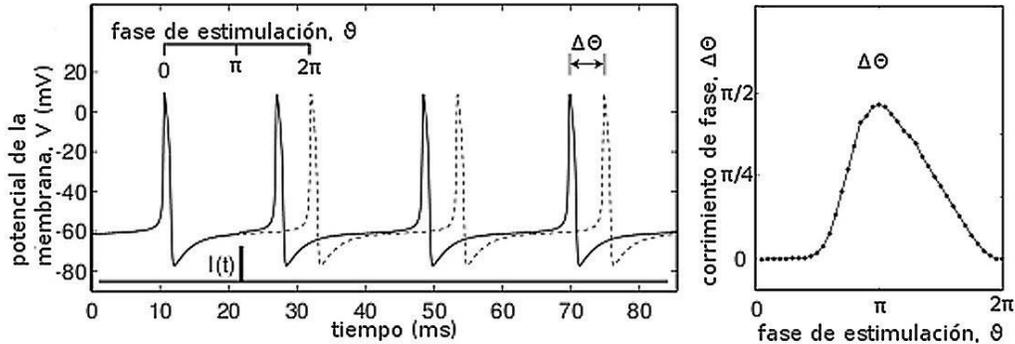


Figura 2.6: *Izquierda.* Respuesta de una neurona ante un estímulo $I(t)$ (línea sólida) comparada con una neurona libre de estímulo (línea punteada) según el modelo $I_{Na,p} + I_K$. *Derecha.* Gráfica del valor del corrimiento de fase para diferentes estados de la neurona en el momento de recibir un estímulo. [Izhikevich, 2007]

definir la función $\vartheta(y)$, es decir, la fase del punto y ; las isócronas son, entonces, las curvas de nivel de $\vartheta(y)$ constante.

La función ϑ será de gran relevancia para el resto del capítulo, aquí se analizan un par de propiedades:

- *Continuidad.* La función $\vartheta(y)$ es continua, esto es, puntos cercanos tienen fases similares.
- *Invariancia.* Si $\vartheta(x_0) = \vartheta(y_0)$, entonces $\vartheta(x(t)) = \vartheta(y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. El flujo del campo vectorial mapea isócronas en isócronas.

El comportamiento de la fase de oscilación provee la información necesaria para el análisis cualitativo del fenómeno de sincronización entre neuronas, o inclusive para muchos otros tipos de osciladores. Para los fines de este trabajo, bastará observar el comportamiento de la fase de oscilación en función de diversos estímulos.

2.2.2. Corrimiento de Fase

Las neuronas reciben estímulos breves pero intensos de otras células nerviosas. Al ser breves, estos estímulos no inducen bifurcaciones en la dinámica de la neurona, pero si alteran la trayectoria, es decir, los estímulos hacen “brincar” a la neurona de un estado a otro, esto puede llegar al grado de colocar el estado en una cuenca de atracción distinta y así cambiar el comportamiento cualitativo de la célula, no obstante, la forma del espacio fase no cambia.

Para hacer más ilustrativo este punto, considérese un ejemplo hipotético de dos neuronas idénticas en modo marcapaso tal que su actividad es indistinguible. Súbitamente, a una de ellas se le estimula con un pico de corriente breve que cambia el potencial de su membrana, donde la perturbación no incita a que la neurona responda inmediatamente, sin embargo, altera el tiempo que tarda la célula en dar el siguiente disparo, es decir, modifica la fase de su oscilación. Como se puede ver en la figura 2.6, al comparar el potencial de la membrana de las células, esto es, la perturbada (línea continua) y la no perturbada (línea punteada), se puede observar una diferencia de tiempo entre los picos.

En una gráfica donde se muestre la fase de oscilación de la neurona estimulada se observaría una discontinuidad en el momento en que se inyecta el pulso de corriente. Tal discontinuidad se ve como un cambio en el tiempo que tardará para dar el siguiente pulso.

Básicamente, la neurona traza una trayectoria $x(t)$ en el espacio fase, dada por:

$$\dot{x} = f(x) + A\delta(t - t_s), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

donde la f es el campo vectorial determinado por las características de la neurona, y el segundo sumando aproxima el efecto que produce el pulso de corriente inyectado a la neurona, $A \in \mathbb{R}^n$ es una constante, $\delta(t)$ es la delta de Dirac y t_s es el tiempo en el que ocurre el estímulo.

En el tiempo t_s la trayectoria salta de $x(t_s^-)$ a $x(t_s^+) = x(t_s^-) + A$; en general este salto cambiará la isócrona de la trayectoria, esto es, la fase de oscilación cambia. Se denomina **corrimiento de fase**² a la diferencia entre la fase después del estímulo y la fase anterior a este, (ver figuras 2.6 (derecha) y 2.7), es decir,

$$\Delta\Theta(A, \vartheta) \equiv \vartheta_{t_s^+} - \vartheta_{t_s^-}. \quad (2.5)$$

Naturalmente, el corrimiento de fase dependerá de la fase en que se encuentre el oscilador al momento del estímulo y de la intensidad de este, que se ha denotado por A . Conocer el valor de $\Delta\Theta$ para cualquier fase ϑ y valor de A sería de gran utilidad para dilucidar la dinámica de la neurona bajo cualquier tipo de estimulación, no obstante, esto no es una tarea fácil y, por lo general, se tiene que recurrir a métodos numéricos.

²En ocasiones se encuentra bajo el nombre de curva de restablecimiento de la fase, PRC por sus siglas en inglés.

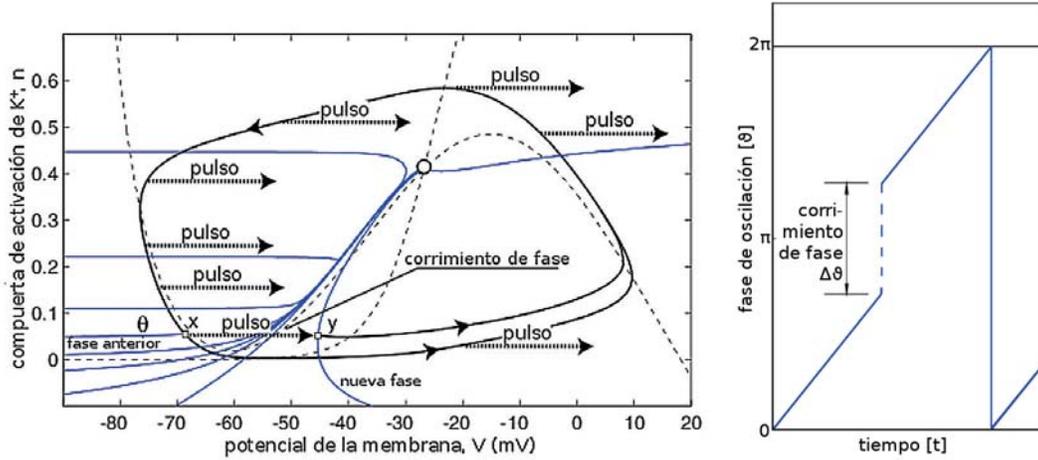


Figura 2.7: *Izquierda.* La relación geométrica entre las isócronas y el corrimiento de fase, $\Delta\theta$, para el modelo $I_{Na,p} + I_K$. *Derecha.* Cambio en la fase de oscilación por un estímulo. [Izhikevich, 2007]

2.2.3. Mapeos de Fase de Poincaré

La función de corrimiento de fase describe la respuesta de un oscilador al ser estimulado mediante un pulso breve. También se puede usar para estudiar la respuesta a un tren de pulsos periódicos. Particularmente resulta muy eficiente el estudio de este último problema mediante una técnica desarrollada por Poincaré.

Tómese el valor de la fase de oscilación al momento anterior al n -ésimo pulso de corriente inyectada a la célula, ϑ_n . Tal pulso cambia la fase por un valor $\Delta\theta(\vartheta_n)$, de manera que la nueva fase después del pulso es $\vartheta_n + \Delta\theta(\vartheta_n)$. Si los pulsos se encuentran separados por un intervalo de tiempo T_s , entonces la fase de oscilación en el momento anterior al $(n + 1)$ -ésimo pulso está dado por:

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \Delta\theta(\vartheta_n) + 2\pi \frac{T_s}{T} \pmod{2\pi}, \quad (2.6)$$

donde T es el período natural del oscilador. Este es un mapeo del círculo es si mismo conocido como el mapeo de fase de Poincaré. Conociendo la fase inicial ϑ_1 (justo antes del primer pulso), se puede determinar ϑ_2 y posteriormente ϑ_3 y así sucesivamente, es decir, la órbita hacia adelante de ϑ_1 , $\{\vartheta_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Para ilustrar mejor este nuevo concepto se utilizará de ejemplo al modelo $I_{Na,p} + I_K$ en modo marcapaso. El período del sistema en actividad libre es de $T \approx 21.37$ ms, con un período de estimulación $T_s = 18.37$ ms, que resulta en el

mapeo de Poincaré mostrado en la figura 2.8. Nótese que la órbita se aproxima a un punto fijo que corresponde a un estado de sincronización o de amarramiento de fase en el que la fase y el período del comportamiento de la neurona queda sujeto al de la estimulación periódica a la que se le somete.

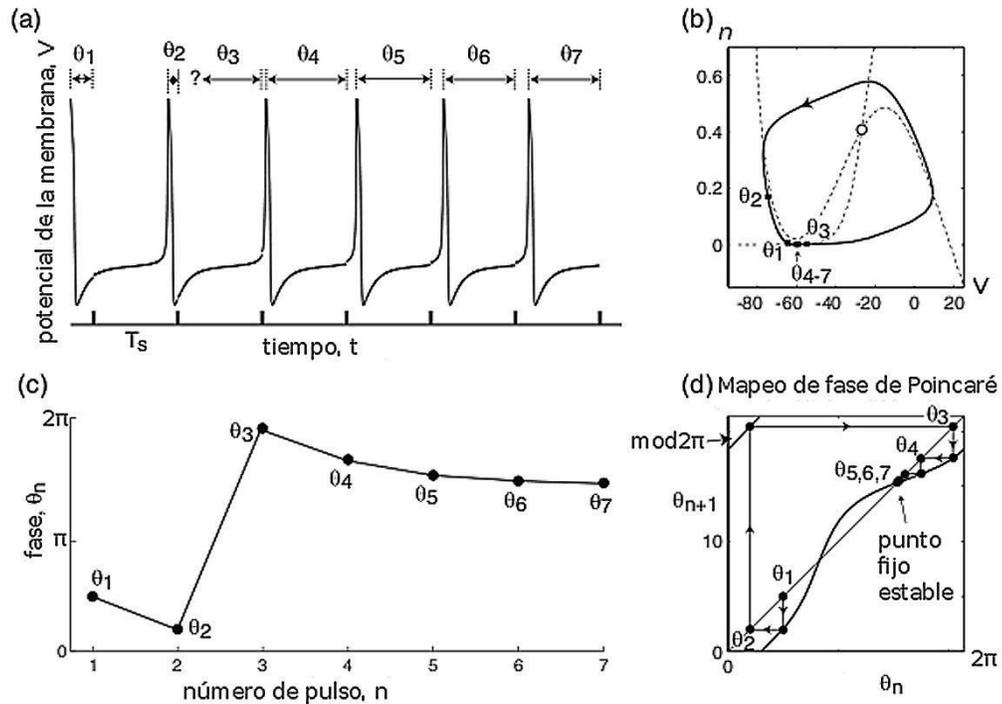


Figura 2.8: Fenómeno de sincronización observado en los mapeos de Poincaré de una neurona (modelo $I_{Na,p} + I_K$) con un tren de pulsos de período T_s . [Izhikevich, 2007]

2.2.4. Sincronización y Amarramiento de Fase

En general, se dice que dos o más osciladores periódicos están **sincronizados** o son **sincrónicos** si sus ciclos tienen el mismo periodo y ocurren con una diferencia constante de fase. Básicamente existen tres tipos de sincronización: en fase, en fase contraria y fuera de fase que corresponden a $\Delta\vartheta = 0, \pi$, ó cualquier valor entre 0 y 2π respectivamente. Es una costumbre llamar al estado de sincronización en fase simplemente sincronización y en los otros casos se especifica la diferencia de fases.

Se tiene un **amarramiento de fase** $p : q$ de un oscilador a su forzador

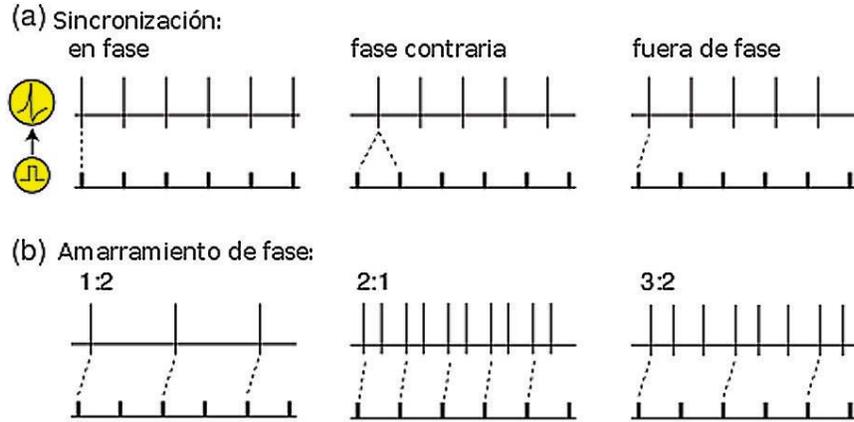


Figura 2.9: Ejemplos de sincronización y amarramiento de fase.[Izhikevich, 2007]

periódico cuando el oscilador modifica su ciclo de tal suerte que por cada q períodos del forzamiento el oscilador cumple con p ciclos.

Es posible generalizar el concepto de sincronización para el caso de acoplamiento entre osciladores. En caso de haber acoplamiento, es decir, no simplemente forzamiento, entre dos osciladores se dirá que hay **sincronización** $p : q$ si por cada p ciclos de uno el otro oscilador ha cumplido con q períodos.

Típicamente se produce amarramiento de fase $p : q$ en una neurona si es estimulada débilmente con un tren de pulsos de período T_s y sucede que $pT \approx qT_s$ donde T es el período natural de la célula y $p, q \in \mathbb{Z}$ los cuales no necesitan ser primos relativos. En el mapeo de Poincaré asociado al sistema, el amarramiento de fase $p : q$ corresponde a un punto fijo en la q -ésima iteración independientemente del valor de p , esto implica que, los mapeos de Poincaré no pueden mostrar el número de disparos que da la neurona durante un tiempo qT_s .

2.2.5. Las lenguas de Arnold

Una pregunta que naturalmente surge es: ¿Qué condiciones debe cumplir un tren de pulsos para propiciar un estado de amarramiento de fase $p : q$ de una neurona en modo marcapaso?

Sólo hay dos parámetros que caracterizan a los trenes de estímulos, la periodicidad, T_s , y la amplitud de los pulsos, A , por este motivo, basta con construir un espacio en el que se muestre la relación de amarramiento de fase, $p : q$, para el punto (T_s, A) . A este espacio se le conoce como las **lenguas de Arnold**, que es un ejemplo de espacio de bifurcación. En general, se le conoce al **espacio de bi-**

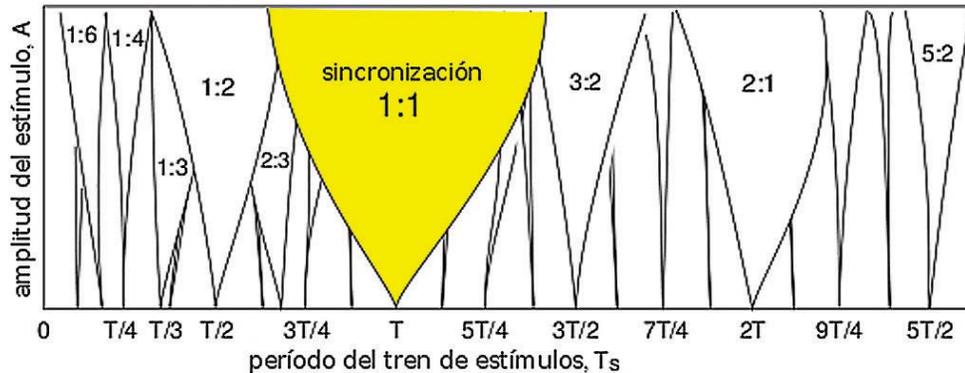


Figura 2.10: Espacio de bifurcaciones dado por los parámetros $T_s \times A$ para la sincronización o el amarramiento de fase. Las regiones delineadas se les conoce como *lenguas de Arnold* y representan los valores para los cuales se forma el amarramiento de fase señalado.[Izhikevich, 2007]

furcaciones como el lugar en donde se describe el comportamiento de un sistema en función de los parámetros que lo caracterizan.

Para el amarramiento de fase $p : q$ de un oscilador, qT_s debe estar cercano a pT , en particular, la tolerancia está dada por $|\Delta\Theta|$. Ésta cantidad decrece con A , por lo tanto, la región de amarramiento de fase $p : q$ se angosta conforme la amplitud del estímulo disminuye y se asemeja a una lengua, es por eso que este espacio recibe el nombre de las lenguas de Arnold.

Cada estado de amarramiento de fase $p : q$ tiene su propia región en el espacio de bifurcaciones, es decir, una lengua, converge al punto pT/q del eje T_s donde no hay forzamiento y las frecuencias de oscilación sólo son conmensurables. Entre más grande sea el orden de amarramiento, $p + q$, las lenguas se angostan más haciendo menos probable su observación.

Como se mencionó con anterioridad, los estados de amarramiento de fase pueden coexistir, esto se refleja en que las lenguas se traslapan. Curiosamente, para valores de A suficientemente grandes existe la posibilidad de que el comportamiento sea caótico. [Izhikevich, 2007]

2.2.6. Forzamiento y Acoplamiento

La ecuación diferencial que describe el comportamiento de una neurona en modo marcapaso forzada por una función del tiempo $p(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon p(t), \quad (2.7)$$

donde la constante ε es ajustada por la susceptibilidad de la neurona ante el estímulo. Si $\varepsilon = 0$, la neurona se encuentra libre de forzamiento y, por lo tanto, oscila en forma autosostenida.

De manera similar, el acoplamiento entre m neuronas se puede modelar de la siguiente manera:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \varepsilon \sum_{j \neq i}^m g_{ij}(x_i, x_j), \quad (2.8)$$

donde x_i representa el estado de la i -ésima célula, ε_i su susceptibilidad y $g_{ij} : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ modela el acoplamiento entre el i -ésimo oscilador y los $m-1$ restantes.

En el caso de forzamiento, la función $p(t)$ se puede interpretar como una perturbación, que se supone, no saca a la trayectoria fuera de la cuenca de atracción del ciclo límite. Si el valor de ε es suficientemente pequeño, la ecuación diferencial de la fase de oscilación se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$\dot{\vartheta} = \frac{2\pi}{T} + \varepsilon \Delta\Theta(\vartheta)p(t) + o(\varepsilon^2, t). \quad (2.9)$$

Nótese que en el caso en que $p(t) = 0$ para todo tiempo, el valor de ϑ crece en el tiempo con tasa constante. Debido a que ϑ es una fase, en el momento en que llega a 2π , su valor es restablecido a 0, es decir, se comporta como un oscilador tipo diente de sierra, véase figura 2.4 de la sección 2.2.1.

Los osciladores tipo diente de sierra también son conocidos como **osciladores de integración y disparo (OID)**. El estado de un OID parte de un valor base, crece linealmente con el tiempo (integra) hasta alcanzar un umbral en donde decrece instantáneamente a su valor base (dispara) y esto se repite indefinidamente³. Este tipo de osciladores son sumamente simples y pueden reflejar esquemáticamente algunas de las propiedades de las neuronas marcapaso o, en general, cualquier oscilador autosostenido, motivo por el cual, se le dedicará gran parte de la tesis al estudio de este tipo de osciladores.

Si el forzamiento no es nulo, la tasa de crecimiento de la fase cambia con el tiempo, naturalmente esto altera los intervalos de tiempo entre las caídas del diente de sierra. Al ser cualitativamente equivalente, se puede pensar que no es la razón de crecimiento la que varía en el tiempo sino el umbral del oscilador; por lo tanto, en el valor umbral habrá una variación dependiente del tiempo Δh . En la figura 2.11 se muestra la equivalencia entre los dos comportamientos.

En el caso de acoplamiento, la fase de oscilación de cada oscilador se puede representar con un OID. Si el acoplamiento es débil, es decir, $0 < |\varepsilon| \ll 1$, la

³En el siguiente capítulo se estudiará con más detalle las características de los OIDs.

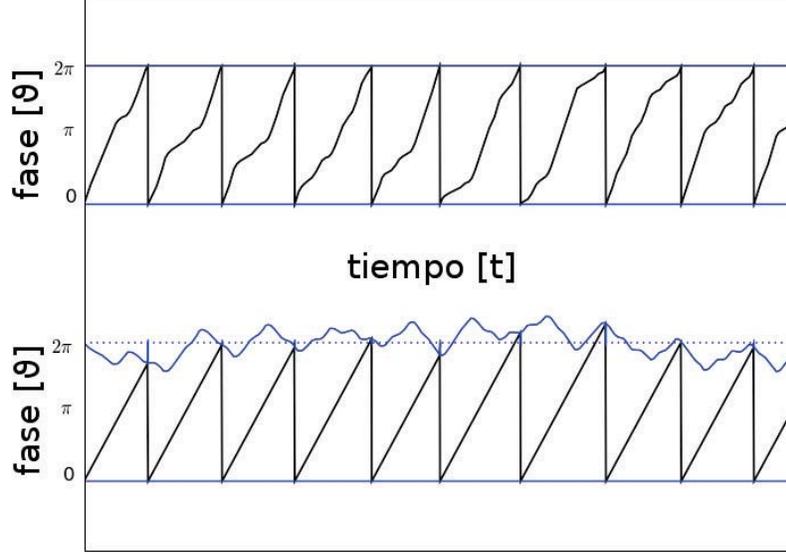


Figura 2.11: Equivalencia en el comportamiento cualitativo entre la variación en el tiempo de la tasa de crecimiento y el umbral de un oscilador de integración y disparo.

ecuación que modela la fase de oscilación está dada por:

$$\dot{\vartheta} = \frac{2\pi}{T} + \varepsilon \Delta\Theta(\vartheta) \sum_{j \neq i}^m \gamma_{ij}(\vartheta_i, \vartheta_j) + o(\varepsilon^2), \quad (2.10)$$

donde γ_{ij} se refiere al acoplamiento entre los osciladores en función de sus fases. Análogamente, es posible pensar lo como varios osciladores diente de sierra acoplados por medio del umbral por una función del estado de los otros osciladores,

$$\Delta h_i = \Delta h_i(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m), \quad (2.11)$$

donde Δh_i es la variación del valor original del umbral.

Encontrar el valor de cada función Δh_i no es una tarea sencilla aún con la ayuda de métodos numéricos. Para nuestros fines, que es el análisis cualitativo del acoplamiento entre osciladores, se aproximará a Δh_i como una función lineal de las fases ϑ_i , i. e.,

$$\Delta h_i \simeq \sum_j \alpha_{ij} \vartheta_j, \quad (2.12)$$

donde α_{ij} son constantes que serán los parámetros de acoplamiento. Este tipo de sistemas serán estudiados en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Dos OIDs acoplados

En este capítulo se profundizará el estudio de los osciladores de integración y disparo, OID, tratándose este tema desde un aspecto más general que el enfoque neurocientífico anterior.

El valor de la variable de estado de un OID aumenta linealmente con el tiempo hasta alcanzar un umbral h , en ese instante el estado se relaja a un valor base b y continua, a partir de b , su incremento lineal con el tiempo. A la razón de crecimiento lineal del estado del oscilador se le llamará A . Naturalmente esto produce una variación periódica del estado del sistema con período,

$$\tau = \frac{h - b}{A}. \quad (3.1)$$

Un OID puede, por tanto, ser visto como un sistema dinámico unidimensional cuyas soluciones, trayectorias u órbitas son todas periódicas y del mismo período, como puede observarse en la figura 3.1.

Este trabajo está dedicado a estudiar el comportamiento cualitativo de estos osciladores, en especial se le dedicará gran parte del trabajo a sistemas compuestos por varios osciladores en interacción, esto es, cuando están acoplados. En especial nos interesa el estudio de la sincronización en estos sistemas.

Por comodidad, y, dado que no representa ninguna pérdida de generalidad para nuestros propósitos, se tomará al intervalo de actividad del oscilador unitario tomando $b = 0$ y $h = 1$.

3.1. Un OID Forzado

Los osciladores de integración y disparo pueden ser forzados al introducir una variación temporal de cualquiera de sus parámetros A , h o b . Los casos de mayor

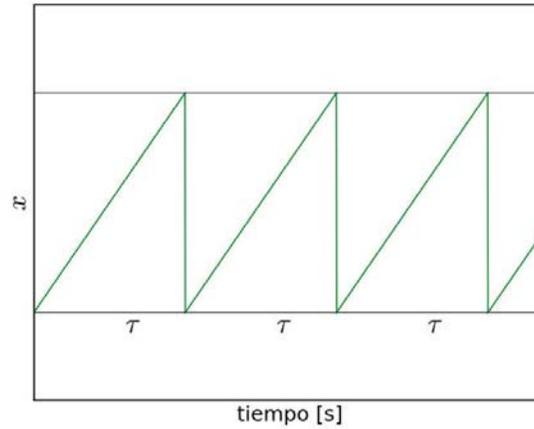


Figura 3.1: La evolución temporal de un oscilador de integración y disparo también conocido como diente de sierra.

interés ocurren cuando el forzamiento es una función periódica del tiempo.

Puede ocurrir, desde luego, que el forzamiento periódico esté generado por otro sistema dinámico, particularmente por otro OID. Cuando ocurre que el sistema dinámico que produce el forzamiento se ve a su vez modificado o forzado por el primer oscilador, es decir, ocurre un forzamiento mutuo, no se dice entonces, que hay forzamiento, se dice que se presenta un acoplamiento entre los dos osciladores. En general, este acoplamiento genera un nuevo sistema dinámico consistente de dos o más osciladores acoplados. La diferencia entre ambos casos es muy importante, basta para ver esto, el hecho de que el primer caso puede ser tratado en el espacio fase del primer oscilador, mientras que para el segundo se requiere de un espacio de mayor dimensión, el producto cartesiano de los espacios de todos los osciladores que estén acoplados.

Existen muchas formas de forzamiento, y por lo tanto de acoplamiento, una puede ser afectando la razón de crecimiento del oscilador, otra variando el umbral o la base o sus combinaciones.

Este trabajo se restringirá a estudiar forzamientos en el umbral o la base de los osciladores de integración y disparo, recalcando el hecho de que la pérdida de generalidad no es grande ya que la variación en la razón de crecimiento es equivalente a una variación en el umbral.

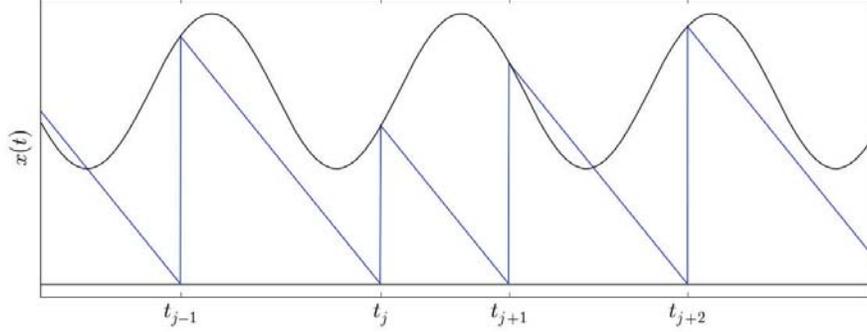


Figura 3.2: Forzamiento de un OID por medio del umbral dado por una función sinusoidal en el tiempo.

3.1.1. El caso de un forzamiento sinusoidal al umbral

Un ejemplo que vale la pena mostrar para ilustrar algunas propiedades que surgen en la dinámica de los osciladores forzados es el siguiente. Considérese una variable $x(t)$ y un umbral $h(t)$ dado de la siguiente manera,

$$h(t) = 1 + \beta \sin(2\pi t), \quad (3.2)$$

donde $0 \leq \beta < 1$. La variable $x(t)$ es una función lineal por partes dependiente tiempo. La pendiente de $x(t)$ es $-\alpha$ para todo tiempo excepto en instantes aislados t_0, t_1, \dots . En tales instantes t_j , la variable x salta discontinuamente de cero a $h(t_j)$, véase figura 3.2.

Por las intersecciones de $x(t)$ con $h(t)$ se puede obtener una relación de recurrencia entre los tiempos de relajamiento,

$$t_{j+1} = t_j + \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sin(2\pi t_j). \quad (3.3)$$

Para estos valores en el tiempo, el valor de la variable es igual a la del umbral, por lo tanto,

$$x_i = x(t_i) = 1 + \beta \sin(2\pi t_i).$$

Debido a que el período de la función seno es 2π , $x(t_i) = x(t_i \pmod{1})$, por lo tanto, las iteraciones del mapeo

$$t_{i+1} = f_{a,b}(t_i) = t_i + a + b \sin(2\pi t_i) \pmod{1}, \quad (3.4)$$

con $a = 1/\alpha$ y $b = \beta/\alpha$ reales positivos, permiten conocer el comportamiento del oscilador forzado, pues la dinámica de éste está caracterizada por los tiempos de disparo.

El mapeo f puede verse como un mapeo del círculo en si y su dinámica ha sido ampliamente estudiada. A continuación se presentan algunas propiedades importantes de esta dinámica.

Comenzando por el estudio de los puntos fijos del mapeo $f_{a,b}$, para ello es necesario resolver la ecuación $\xi = f_{a,b}(\xi)$, esto es,

$$a + b \sin(2\pi\xi) = 0 \quad (3.5)$$

para $\xi \in [0, 1)$. La soluciones de esta ecuación están dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_- &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{a}{b}\right), \\ \xi_+ &= -\frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

La estabilidad de estos puntos fijos la se obtiene al derivar a la función respecto a su argumento. Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda &= \left. \frac{d}{dt} f_{a,b}(t) \right|_{\xi} = 1 + 2\pi b \cos(2\pi\xi) \\ &= 1 \mp 2\pi b \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \end{aligned}$$

donde los signos negativo y positivo están dados por la soluciones ξ_- y ξ_+ respectivamente. Si $|\lambda| < 1$, el punto fijo es estable, esto sucede cuando los parámetros a y b cumplen con:

$$\begin{aligned} b &> |a + n|, \\ b &< \sqrt{(a + n)^2 + \frac{1}{\pi^2}}, \end{aligned}$$

donde n es un número entero fijo que se introduce por el módulo en el mapeo $f_{a,b}$. Estas inecuaciones encierran regiones en el espacio de bifurcaciones del sistema, que en este caso se trata del plano (a, b) .

Para encontrar los puntos de período dos, es necesario resolver la ecuación $\xi = f_{a,b}^2(\xi)$, es decir,

$$a + b \sin(2\pi\xi + 2\pi a + 2\pi b \sin(2\pi\xi)) = 0. \quad (3.6)$$

La ecuación anterior es una ecuación trascendental y no hay solución analítica general. En cambio, es posible utilizar métodos numéricos para encontrar los puntos periódicos y las regiones en el espacio de bifurcación donde se pueden encontrar, es decir, las “lenguas” de Arnold.

En la figura 3.3 se presenta el diagrama de bifurcaciones de este sistema dinámico en el espacio de parámetros (a, b) . Puede verse que las lenguas que llegan al eje a tienen forma de “V” y que en el interior de esta “V” se forman regiones que presentan el fenómeno de duplicación del período.

Por otro lado, nótese que hay partes en este espacio donde distintas regiones se intersectan; en esos lugares, es decir, para sistemas en los que los parámetros (a, b) tienen los valores correspondientes, se presenta el fenómeno de biestabilidad.

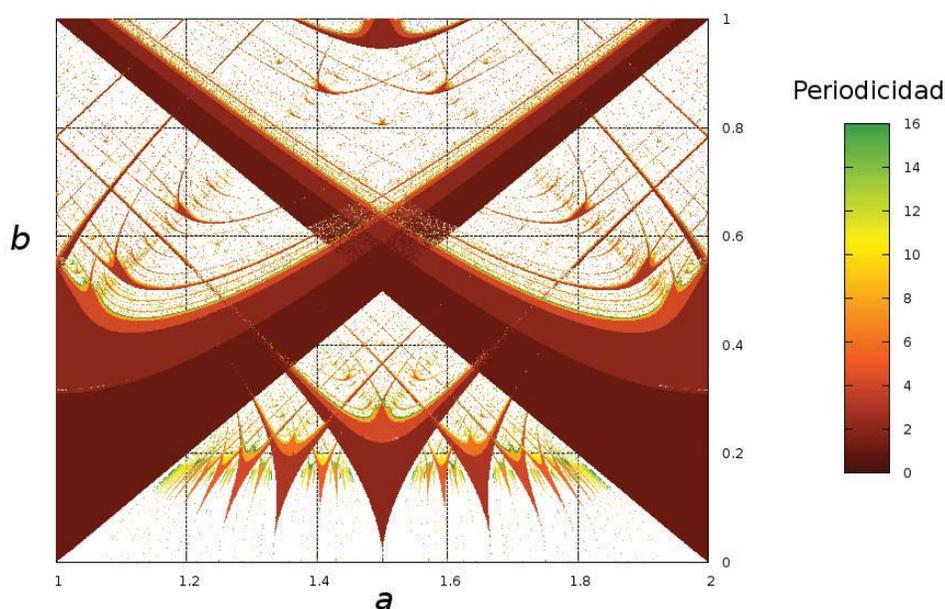


Figura 3.3: Espacio de bifurcaciones de un OID forzado sinusoidalmente. Los diferentes tonos muestran la periodicidad del sistema para los valores de a y b fijos.

Para el caso en que $a = 1.05$ y $b = 0.4$ se puede ver que no hay un punto fijo u órbita de período uno estable, en cambio, hay una órbita de período dos

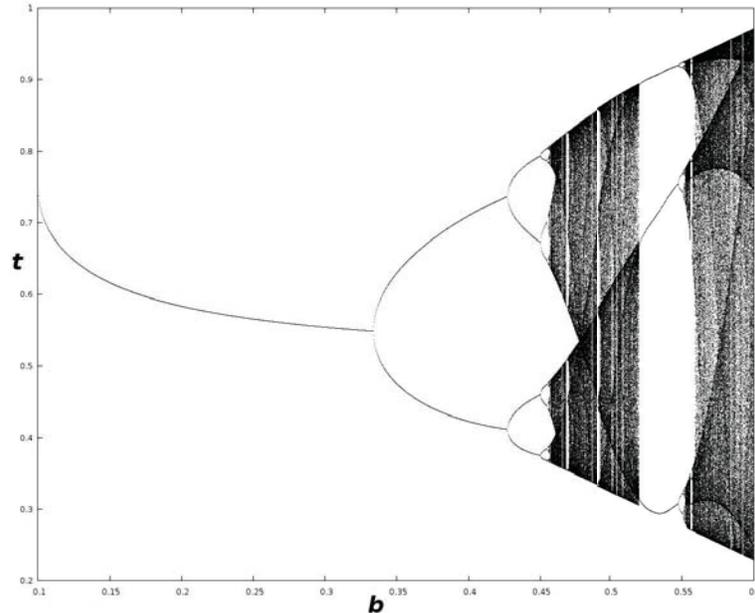


Figura 3.4: Diagrama de bifurcaciones en el que se observa la bifurcación de doblamiento de período en el mapeo $f_{a,b}$ definido en ec. 3.4 cuando $a = 1.1$ y b varía entre 0.1 y 0.5.

consistente de los puntos $\xi_1 \approx 0.37247$ y $\xi_2 \approx 0.70976$ a la que todas las demás tienden asintóticamente, es decir, hay un atractor global de período dos. Si se continua incrementando el valor de b llegaría a un valor en que esta órbita de período dos se hace inestable y aparece una órbita estable de período cuatro y así sucesivamente, entonces, el sistema dinámico presenta bifurcación de doblamiento de período (figura 3.4). Como se puede observar, con cada duplicación de período, el espacio fase se llena cada vez más con órbitas periódicas inestables y se puede probar que, para ciertos valores de b , los puntos periódicos forman un conjunto denso en un subintervalo de $[0, 1]$, una de las propiedades del caos dinámico. Más aún, se puede probar que la dinámica de este sistema dinámico, para ciertos valores de a y b , es efectivamente caótica.[Glass, Pérez, 1948]

Desde luego la presencia de todo esto muestra claramente que hay regiones del espacio de bifurcaciones que comprenden mapeos en los que se presenta el fenómeno del caos, es más, hay regiones que representan mapeos biestables con un atractor periódico y uno caótico o, como suele llamárseles, extraño.

En resumen, se puede decir que el OID forzado sinusoidalmente por medio del umbral presenta bifurcaciones de doblamiento de período, biestabilidad y caos

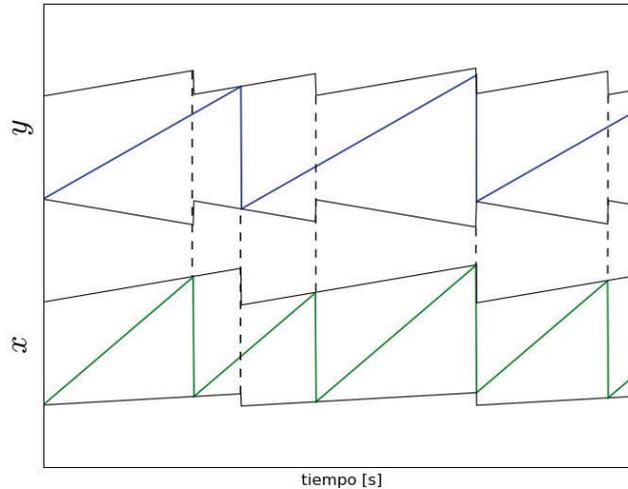


Figura 3.5: El estado de dos OIDs acoplados por medio del umbral y de la base.

para distintos valores de los parámetros estructurales del sistema, por ejemplo, en la razón de crecimiento y de la intensidad del forzamiento.

El ejemplo que se acaba de mostrar tiene relación con una neurona estimulada periódicamente. Se puede mostrar que el corrimiento de fase para una neurona se puede aproximar muy bien a una función seno siempre y cuando el estímulo sea suficientemente débil [Izhikevich, 2007]. No deja de sorprender la enorme complejidad que llega a presentarse en un sistema tan simple, pero también nos hace ver que el comportamiento, en el más simple de los sistemas neuronales puede llegar a ser sumamente complejo e interesante.

3.2. Dos OIDs acoplados

3.2.1. Descripción del acoplamiento

Para un sistema sustentado en los OIDs pero un poco más complejo que el anterior, con dos osciladores de integración y disparo acoplados, donde los estados de los dos subsistemas, es decir, de los dos osciladores, están determinados por los valores x_1 y x_2 respectivamente¹. El espacio fase del sistema acoplado tendrá dos

¹En ocasiones se hará referencia al estado de los osciladores por $x_1 = x$, $x_2 = y$ y, cuando se incluya a un tercero, $x_3 = z$.

dimensiones y lo se representará en las coordenadas (x_1, x_2) .

Considérese que el acoplamiento entre los dos subsistemas se da al hacer variar el umbral o la base de uno en función del valor del estado del otro, se supone adicionalmente que estos acoplamientos son lineales, entonces,

$$\begin{aligned} h_i(x_j) &= 1 + \alpha_i x_j, \\ b_i(x_j) &= \beta_i x_j; \end{aligned}$$

donde $i, j = 1, 2, i \neq j$ y las constantes α_j y β_j son los parámetros de acoplamiento, que pueden ser positivos, negativos o cero, i.e., en el último caso no hay acoplamiento.

Con el fin de especificar el tipo de acoplamiento que presenta un sistema se introduce la siguiente notación $(P_{12}S_{12}, P_{12}S_{21})$, P_{12} representa la influencia del *segundo* oscilador sobre el *primero* y puede tomar el valor T ó B (umbral o base respectivamente), S_{12} es el signo del parámetro de acoplamiento de P_{12} ; análogamente P_{21} y S_{21} representan la influencia y el signo del *primer* oscilador sobre el *segundo* y el signo de la constante de acoplamiento.

Por ejemplo, la combinación $(T+, B-)$ denota un sistema con en siguiente acoplamiento:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + \alpha_1 x_2, \\ b_1 &= 0, \\ h_2 &= 1, \\ b_2 &= -\beta_2 x_1, \end{aligned}$$

con $\alpha_1, \beta_2 > 0$.

Como en $(P_{12}S_{12}, P_{21}S_{21})$ cada entrada puede tomar dos valores se tiene un total de $2^4 = 16$ variaciones, no obstante, hay seis formas repetidas al no haber distinción entre el primero o el segundo oscilador. Esto resulta en un total de 10 clases de acoplamiento.

3.2.2. El Espacio Fase y las Trayectorias

La dinámica de estos sistemas puede estudiarse en el espacio fase. En este espacio, el estado del sistema está representado por un punto con coordenadas (x, y) en una región acotada de \mathbb{R}^2 . Como los valores de x y y están acotados por la base y el umbral correspondiente el estado queda limitado a una región definida por

$$x \in [\beta_1 y, 1 + \alpha_1 y), \quad y \in [\beta_2 x, 1 + \alpha_2 x). \quad (3.7)$$

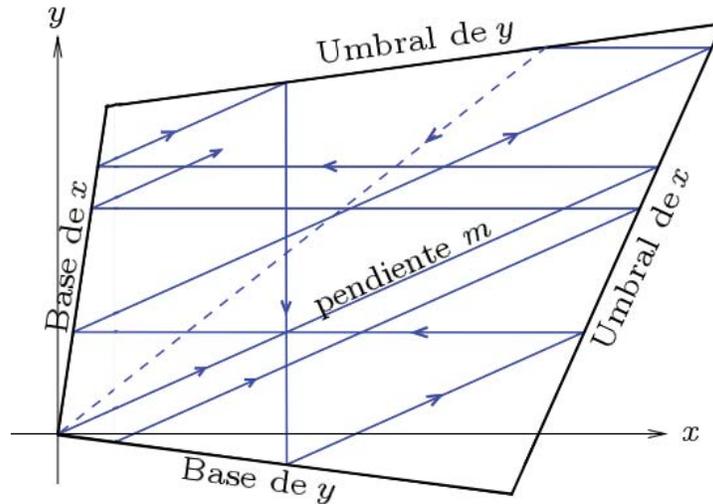


Figura 3.6: Espacio fase de los dos osciladores acoplados de la figura 3.5.

Por ejemplo, para el sistema mostrado en la figura 3.5 el espacio fase se muestra en la figura 3.6.

En ausencia de relajación, x y y crecen linealmente con el tiempo y durante ese lapso de tiempo, la trayectoria en el espacio fase traza una recta de pendiente $m = A_2/A_1$, con A_1 y A_2 tratándose de las razones lineales de crecimiento de x y y respectivamente. Cuando la trayectoria llega a una frontera de la región válida del espacio, de manera discontinua, se traslada a la frontera opuesta desde donde continúa su recorrido.

En caso de que se alcance el umbral de y , con $x < 1$, entonces y regresa a su valor base y x continúa sin alteración alguna, se dirá que se dió un relajamiento simple. En cambio, si el oscilador y se relaja cuando $x \geq 1$, x cae a su base, esto es, tanto x como y caen simultáneamente a su base, se dirá que se dió un relajamiento doble.

Análogamente, cuando x llega a su umbral, habrá relajamiento doble o simple dependiendo del valor de y . Si $y < 1$ el relajamiento será simple y si $y \geq 1$ el relajamiento será doble.

3.2.3. La Técnica de los Mapeos

Para el estudio del comportamiento de los osciladores acoplados es conveniente utilizar una técnica semejante a la de los mapeos de Poincaré. En este caso, se

observará el estado del sistema en el momento de la relajación de uno de los osciladores, por ejemplo y , entonces el estado es (x_0, b_2) ; tanto x como y crecerán con el tiempo y cuando y alcanza su umbral, x tendrá cierto valor x_1 y y se relaja a su base, por lo tanto, la trayectoria estará en el punto (x_1, b_2) , esto es, en situación de comenzar de nuevo. Repitiendo este proceso se obtiene una serie de valores del oscilador $x: \{x_0, x_1, \dots\}$ para cada una de las relajaciones de y .

Es fácil ver que el valor x_n determina totalmente el de x_{n+1} . Esto implica que se puede reproducir la secuencia de valores x_i con la órbita del sistema dinámico generado por un mapeo

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (3.8)$$

Naturalmente se puede hacer lo mismo si se comienza en un punto de la forma (b_1, y_0) y se sigue la trayectoria hasta que se relaje x y llegue a un punto de la forma (b_1, y_1) . La secuencia de valores y_0, y_1, \dots puede reproducirse como la órbita de un sistema dinámico generado por un mapeo de la forma

$$y_{n+1} = g(y_n). \quad (3.9)$$

Como se puede relacionar los tiempos de disparo de x y de y con los valores de y_i y x_i , el estudio de la dinámica del sistema de osciladores acoplados se reduce al estudio de la dinámica de los mapeos f y g , que es considerablemente más simple. En cierta forma es posible decir que se ha desacoplado el sistema de dos dimensiones ya que se ha reducido al estudio de dos sistemas unidimensionales, uno en cada una de las variables.

3.2.4. Ejemplos: $(T+, T+)$ y $(T-, T-)$

A continuación se resolverán dos ejemplos de sistemas acoplados por medio del umbral, uno de ellos con las dos constantes de acoplamiento positivas y el otro negativas.

3.2.4.1. Separación en mapeos de $(T+, T+)$

El primer sistema, que se denotó por $(T+, T+)$, está caracterizado por:

$$\begin{aligned} h_1(y) &= 1 + \alpha_1 y, \\ h_2(x) &= 1 + \alpha_2 x, \\ b_1(y) &= 0, \\ b_2(x) &= 0, \end{aligned}$$

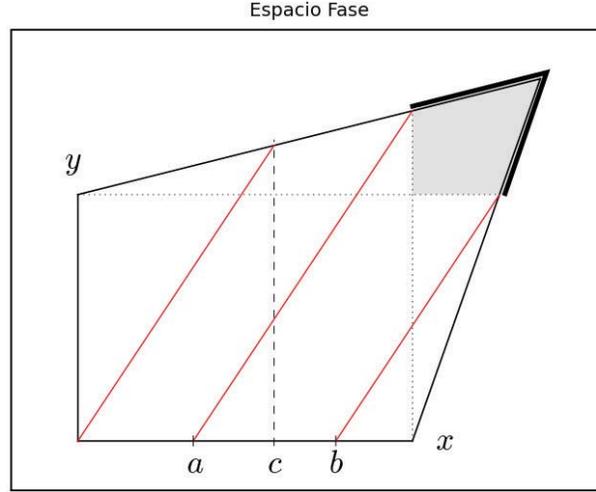


Figura 3.7: Espacio fase del sistema $(T+, T+)$.

con $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Las trayectorias en el espacio fase están acotadas dentro de la región

$$x \in [0, 1 + \alpha_1 y), \quad (3.10)$$

$$y \in [0, 1 + \alpha_2 x). \quad (3.11)$$

Al calcular los mapeos en que se desacopla este sistema, es importante recalcar el hecho de que tanto las trayectorias en el espacio fase como las fronteras del mismo son líneas rectas, por lo tanto, los mapeos de Poincaré de las dos variables necesariamente son lineales, al menos por pedazos.

El mapeo de Poincaré de la variable x que es discretizada por los relajamientos de y , el dominio del mapeo es la base del oscilador x , es decir, el intervalo $[0, 1]$.

El valor de la pendiente m puede variar de cero a infinito, y dependiendo del valor que tome se obtienen diferentes mapeos. Por este motivo se divide en cinco intervalos a los posibles valores de la pendiente:

$$m \in (0, \alpha_2] \cup (\alpha_2, \frac{1}{1 + \alpha_1}) \cup [\frac{1}{1 + \alpha_1}, 1 + \alpha_2] \cup (1 + \alpha_2, \frac{1}{\alpha_1}) \cup [\frac{1}{\alpha_1}, \infty) = (0, \infty). \quad (3.12)$$

▪ Mapeo I

Comenzando por $m \in (1 + \alpha_2, 1/\alpha_1)$, lo que genera el primer tipo de mapeo. Para construir este mapeo se escudriñará el dominio del mapeo en orden creciente y se señalarán los puntos que resultan de importancia para su construcción.

Debido a que el acoplamiento incrementa el valor original de los mapeos, es posible que el estado de los osciladores sea mayor a la unidad, por lo tanto, se espera tener relajamientos tanto simples como dobles.

Si la pendiente de las trayectorias en el espacio fase cumple con $m > 1 + \alpha_2$, entonces se puede garantizar que una trayectoria que parte del origen llegará directamente al umbral de y con un relajamiento simple. Por otra parte, si $m < 1/\alpha_1$ se tiene la garantía de que x tendrá relajamientos simples.

El valor de x al que llega la trayectoria que parte del origen se llamará c , por lo tanto, si,

$$x_n = 0 \longrightarrow x_{n+1} = c. \quad (3.13)$$

Existe toda una familia de trayectorias con relajamiento simple que van directamente al umbral de y , evidentemente, la última de ellas termina donde comienza la región de doble relajamiento señalada en la esquina resaltada de la figura 3.7. Al punto de partida de la primera trayectoria que llega a la zona de doble relajamiento lo se le designará la letra a , de tal forma que una trayectoria que comienza a la izquierda de a sólo tiene relajamiento en y , por lo tanto, si,

$$x_n \rightarrow a^- \longrightarrow x_{n+1} \rightarrow 1. \quad (3.14)$$

Al restringir a $m < 1/\alpha_1$, existe un valor máximo en el eje x para el cual se da doble relajamiento. A este valor se le denotará b , de tal manera que si

$$x_n \in [a, b] \longrightarrow x_{n+1} = 0. \quad (3.15)$$

Con $x_n > b$ las trayectorias llegarán al umbral de x antes que al de y y el relajamiento es simple. Por lo tanto, se tiene una familia de trayectorias con esta característica, ver figura 3.7. Para $x_n = 1$, la trayectoria comienza en el umbral de x y es indistinguible de la que comienza en el origen, por lo tanto, si,

$$x_n = 1 \longrightarrow x_{n+1} = c. \quad (3.16)$$

Debido a que se trata de intersecciones de rectas, el mapeo es lineal por partes (*piecewise linear*) puesto que la dependencia en todos los parámetros de los osciladores es lineal. Si se unen los puntos mencionados anteriormente se construye el mapeo sin la necesidad del cálculo de todas las trayectorias. El mapeo tiene la siguiente forma como el mostrado en la figura 3.8: ²

²Para el lector interesado en la forma algebraica de cada una de las constantes puede revisar el apéndice.

$$x_{n+1} = f_I(x_n) \equiv \begin{cases} \frac{1-c}{a}x_n + c & \text{si } x_n \in [0, a) \\ 0 & \text{si } x_n \in [a, b] \\ c\frac{x_n-b}{1-b} & \text{si } x_n \in (b, 1] \end{cases} \quad (3.17)$$

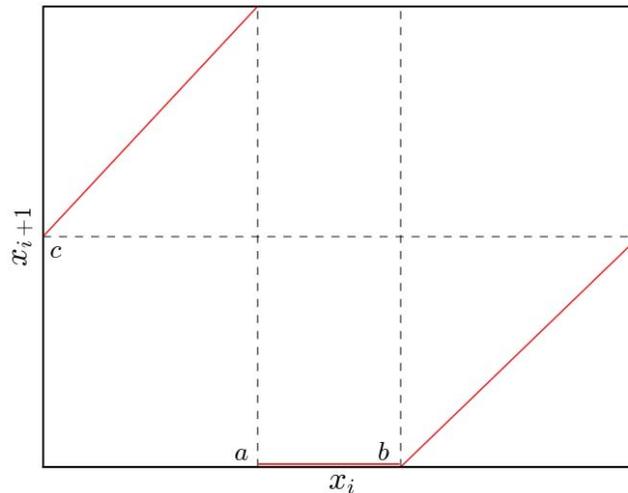


Figura 3.8: Mapeo I

Para valores más altos de m , el mapeo de las x_n es también f_I , al incrementar el valor de la pendiente, el valor de b también lo hace. En el límite, cuando m tiende a $1/\alpha_1$, el valor de b tiende a la unidad, esto significa que la última rama del mapeo se hace cada vez más pequeña conforme la pendiente aumenta. Para trayectorias más verticales que el umbral de x , no habrá relajamiento simple más que de parte de y , por lo tanto, pendientes más elevadas no ofrecen mayor complejidad y el mapeo generado por este sistema es el dado en ec. 3.17 con la especificación $b = 1$ mientras que el resto de los parámetros continúan con la definición original.

Es importante recalcar el hecho de que el mapeo I es suficiente para conocer el comportamiento completo del sistema. La razón por la que no se tiene incertidumbre respecto a la actividad oscilador x entre cada disparo de y es por que este último crece más rápido y entre cada relajación de y el oscilador x puede dar o no un disparo, pero no más de uno. Si $x_{n+1} < x_n$ se sabe que x dió un disparo, mientras que si $x_{n+1} > x_n$ se puede garantizar que no ocurrió tal cosa.

▪ Mapeo II

Si la pendiente de la trayectoria en el espacio fase toma un valor entre $\frac{1}{1+\alpha_1}$ y $1 + \alpha_2$, el mapeo de las x_n resulta ser muy simple. Las trayectorias que parten del origen están destinadas a caer en la zona de doble relajamiento para regresar al origen, de esta manera se conforma un período y por lo tanto, el origen es un punto fijo,

$$x_n = 0 \longrightarrow x_{n+1} = 0. \quad (3.18)$$

Para valores mayores de x_n , la trayectoria exenta el paso por la esquina de relajamiento doble de primera intención. Se designará la letra a como el último de los valores de x_n tal que la trayectoria tiene doble relajamiento, por lo tanto,

$$x_n \in [0, a] \longrightarrow x_{n+1} = 0. \quad (3.19)$$

Para valores ligeramente mayores a a , la trayectorias tendrán relajamiento simple y directo en el umbral de x . En particular, el estado del oscilador x apenas comienza a crecer cuando se llega al umbral de y , esto es,

$$x_n \rightarrow a^+ \longrightarrow x_{n+1} \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Si se continúa con puntos de partida donde el estado de x es mayor se observa que eventualmente la trayectoria, después del relajamiento de x , llega al umbral de y con $x = 1$, por lo tanto, regresa a la zona de doble relajamiento. Al valor de x tal que la trayectoria concluye con este destino se denotará por b , esto es,

$$x_n \rightarrow b^- \longrightarrow x_{n+1} \rightarrow 1. \quad (3.21)$$

Por último, para $x_n \geq b$, las trayectorias caen de nuevo en la zona de doble relajamiento, es decir

$$x_n \in [b, 1] \longrightarrow x_{n+1} = 0. \quad (3.22)$$

Uniéndolos todos los puntos se forma el mapeo II como se puede ver en la figura 3.9,

$$x_{n+1} = f_{II}(x_n) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } x_n \in [0, a] \\ \frac{1}{b-a}(x_n - a) & \text{si } x_n \in (a, b) \\ 0 & \text{si } x_n \in [b, 1] \end{cases}. \quad (3.23)$$

Dado el intervalo de valores que se restringen para la pendiente, no se presenta incertidumbre en la actividad del oscilador x entre cada uno de los disparos de y , la razón es la misma que en el caso anterior.

Nótese que este tipo de mapeos con un punto fijo en el origen se extiende para valores menores de la pendiente. Por ejemplo, hay trayectorias que parten del

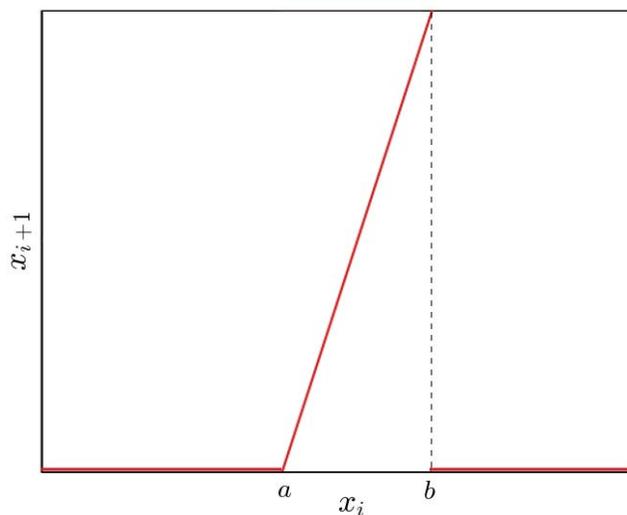


Figura 3.9: Mapeo II

origen y que después de n relajamientos de x concluyen directamente en la esquina de doble relajamiento, figura 3.10. Entonces, existe un conjunto de intervalos para m en la que el mapeo asociado tiene al origen como un punto fijo. Este punto fijo es "super-estable" ya que para una vecindad de x_n , suficientemente pequeña, la trayectoria entra a la zona de doble relajamiento.

Para el resto de los valores de la pendiente es conveniente asociar el mapeo a la otra variable, es decir, en lugar de construir el mapeo con los relajamientos de y , y es conveniente construir el mapeo con los de la otra variable. En cuyo caso, los mapeos serán idénticos al mapeo I, es decir,

$$y_{n+1} = f_{\text{I}}(y_n), \quad (3.24)$$

el valor de las constantes a , b y c es similar, la diferencia es que simplemente se debe intercambiar x por y así como 1 por 2 y viceversa. Con esto se concluye la construcción del mapeo para el sistema $(T+, T+)$.

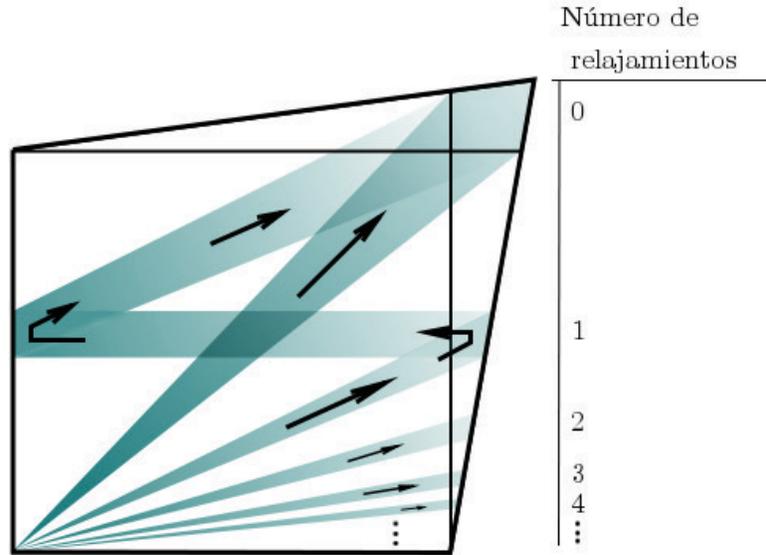


Figura 3.10: Distintos valores para la pendiente m para las cuales las trayectorias caen finalmente en la región de doble relajamiento.

3.2.4.2. Separación en mapeos de $(T-, T-)$

El siguiente ejemplo es el sistema denotado por $(T-, T-)$ cuyo espacio fase se puede ver en la figura 3.11. El acoplamiento está dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1(y) &= 1 - \alpha_1 y, \\ h_2(x) &= 1 - \alpha_2 x, \\ b_1 &= 0, \\ b_2 &= 0; \end{aligned}$$

con $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1$.

En este caso, las trayectorias serán contrastantemente distintas a las del caso anterior, la diferencia radica en que no existe una región de doble relajamiento, en cambio, hay un punto entre los umbrales de las variables que divide a las trayectorias, este punto es el denominado (X_1, Y_1) .

Cuando el sistema tiene un relajamiento en y la variable x se queda con el valor anterior al relajamiento. Por lo tanto, el máximo valor que el oscilador x puede alcanzar después de un relajamiento de y es X_1 . De forma análoga, el máximo valor para y después de un relajamiento en x es Y_1 .

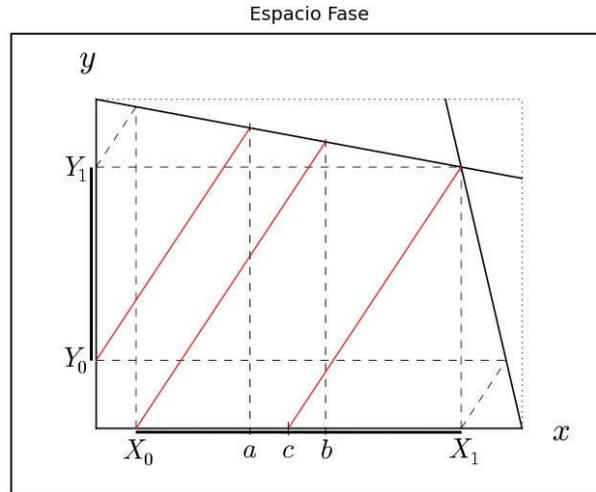


Figura 3.11: Espacio fase del sistema $(T-, T-)$.

Si se continúa con la trayectoria desde $(0, Y_1)$, por ejemplo, se observa que eventualmente el subsistema y alcanza su umbral dejando a x con el valor X_0 . Este es el valor mínimo que x puede acceder después de un relajamiento del otro subsistema. Análogamente, el valor mínimo de y será Y_0 .

Los cuatro parámetros para x y y respectivamente están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\alpha_2(1 - \alpha_1)}{(m + \alpha_2)(1 - \alpha_1\alpha_2)}, \\ X_1 &= \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_1\alpha_2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{m\alpha_1(1 - \alpha_2)}{(m\alpha_1 + 1)(1 - \alpha_1\alpha_2)}, \\ Y_1 &= \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1\alpha_2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede comenzar por estudiar el mapeo del el subsistema x . Al ser inaccesibles los intervalos extremos, $[0, X_0]$ y $(X_1, 1]$, es suficiente el mapeo del intervalo $[X_0, X_1]$ en si mismo. Dada la restricción, es conveniente

normalizar el intervalo a la unidad por medio de la transformación,

$$x' = \frac{x - X_0}{X_1 - X_0}, \quad (3.27)$$

donde $x' \in [0, 1]$.

Por la misma razón que el caso anterior, es conveniente que separar en intervalos de valores para la pendiente:

$$m \in (0, \frac{Y_1 - Y_0}{X_1}) \cup [\frac{Y_1 - Y_0}{X_0}, \frac{Y_1}{X_1 - X_0}] \cup (\frac{Y_1}{X_1 - X_0}, \infty) = (0, \infty). \quad (3.28)$$

■ Mapeo III

Para pendientes mayores a $Y_1/(X_1 - X_0)$, esto es, se garantiza que si se parte del punto $(X_0, 0)$, la primera relajación será del subsistema y . El valor de x cuando se llega a dicho umbral se denominará b , de tal manera que si $x_n = X_0 \rightarrow x_{n+1} = b$, ó en las nuevas coordenadas

$$x'_n = 0 \longrightarrow x'_{n+1} = b'. \quad (3.29)$$

Otra trayectoria a destacar es la que comienza en el eje x y arriba al punto de intersección de los umbrales. Al valor de x del que parte se denotará c . Todas las trayectorias que comienzan en el punto $(x_n, 0)$, tal que $x_n \in [X_0, c)$, llegarán al umbral de y directamente. Si una trayectoria comienza por la izquierda de c en el eje x , el estado final del oscilador x será cercano a X_1 , es decir, $x_n \rightarrow c^- \longrightarrow x_n \rightarrow X_1$, o en las variables primadas,

$$x'_n = c'^- \longrightarrow x'_{n+1} = 1. \quad (3.30)$$

Si, por el contrario, la trayectoria comienza ligeramente a la derecha de c , ésta tendrá primero el relajamiento del subsistema x , por lo tanto, la trayectoria continuará desde el eje y . Más tarde, la trayectoria llegará por fin al umbral de y donde tomará el valor X_0 , entonces, $x_n \rightarrow c^+ \longrightarrow x_{n+1} \rightarrow X_0$, esto es,

$$x'_n = c'^+ \longrightarrow x'_{n+1} = 0. \quad (3.31)$$

Para $x_n > c$, el oscilador x será el primero en restablecerse, por lo tanto, las trayectorias continuarán desde el eje y para finalmente concluir en el umbral de y . Por último, cuando la trayectoria parte de $(X_1, 0)$, equivale a comenzar desde $(0, Y_0)$, para finalmente llegar al umbral de y . El estado de x al que llega se llamará a , esto es, $x_n = X_1 \longrightarrow x_{n+1} = a$, ó

$$x'_n = 1 \longrightarrow x'_{n+1} = a'. \quad (3.32)$$

Finalmente, uniendo todos los puntos, se forma el mapeo³:

$$x'_{n+1} = f_{\text{III}}(x'_n) \equiv \begin{cases} \frac{1-b'}{c'}x'_n + b' & \text{si } x'_n \in [0, c') \\ a'\frac{x'_n - c'}{1-c'} & \text{si } x'_n \in (c', 1] \end{cases}. \quad (3.33)$$

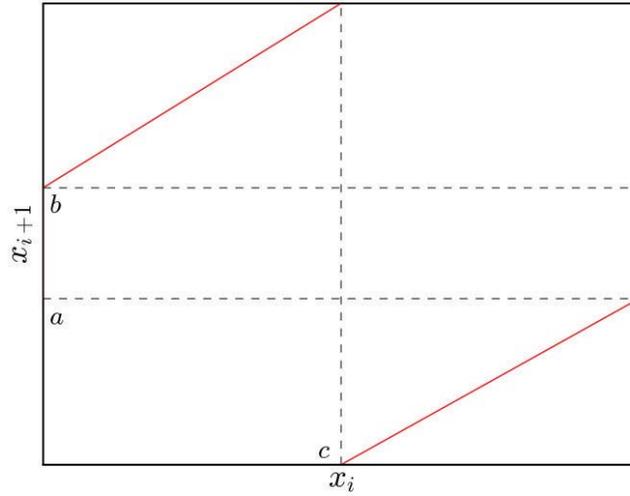


Figura 3.12: Mapeo III

▪ Mapeo IV

En caso de que,

$$\frac{Y_1}{X_1 - X_0} > m > \frac{Y_1 - Y_0}{X_1}, \quad (3.34)$$

se genera un mapeo nuevo. La condición de las pendientes obliga a que las trayectorias que comiencen en cualquier punto $(x_n, 0)$, $x_n \in [X_0, X_1]$, tendrán primero un relajamiento en x y posteriormente en y . Aquí no hay división entre las trayectorias, por lo tanto, el mapeo es continuo. Además la función es creciente, pues conforme mayor es x_n en el punto de partida, menor es el estado de y después del primer relajamiento, y por lo tanto, más tiempo tienen las trayectorias para llegar al siguiente umbral. Si la trayectoria comienza en el punto $(X_0, 0)$ después

³Para más detalles sobre el valor de las constantes consultese el apéndice.

del relajamiento de x , el estado de y es estrictamente menor a Y_1 , esto implica que cuando se llega al umbral de y , el valor de $x_{n+1} = a > X_0$.

Análogamente para el punto de partida $(X_1, 0)$, el siguiente punto después del relajamiento de x será $(0, Y_0)$ por definición, y por la condición de la pendiente, el siguiente punto $X_{n+1} = b < X_1$. Es fácil ver que este mapeo es continuo y monótono creciente (figura 3.13):

$$x'_{n+1} = f_{IV}(x_n) \equiv (b' - a')x'_n + a' \quad x'_n \in [0, 1]. \quad (3.35)$$

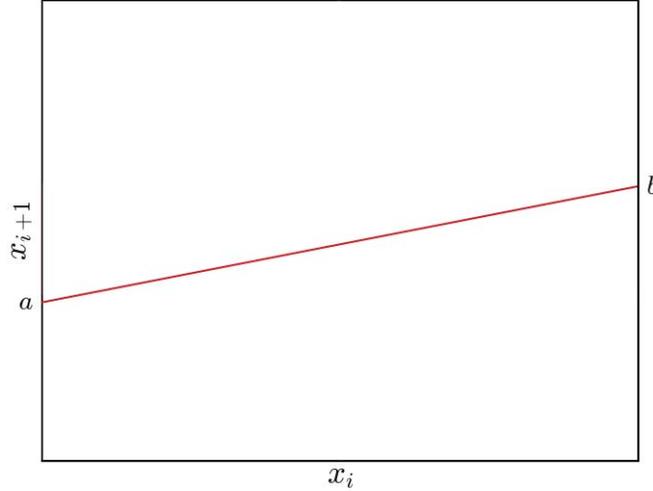


Figura 3.13: Mapeo IV

Para pendientes menores a $(Y_1 - Y_0)/X_1$, los mapeos tendrán la misma forma que los mapeos III ó IV. Dependiendo de los parámetros que caracterizan al sistema, el mapeo alternará entre tipo III y tipo IV. En este trabajo no se detallará el ensamblado de los mapeos para esos casos.

3.2.5. Estudio de los Mapeos

Los mapeos son medios muy eficientes de determinar el comportamiento cualitativo de los sistemas de OID's pues reflejan su dinámica. Por ese motivo se avocará al estudio los mapeos.

Mapeo IV

Por simplicidad, se comenzará por estudiar el mapeo IV. Primero se calculan los puntos fijos y periódicos determinando su estabilidad.

El punto fijo está dado por

$$\xi = f_{IV}(\xi),$$

esto es,

$$\xi = \frac{a}{1 + a - b}. \quad (3.36)$$

Para determinar la estabilidad se toma la derivada del mapeo en el punto fijo, se tiene que:

$$\lambda = \left. \frac{df_{IV}}{dx} \right|_{\xi} = b - a. \quad (3.37)$$

Por lo tanto, $|\lambda| < 1$ ya que $0 < a < b < 1$. Esto implica que el punto fijo es único y estable.

Se puede saber que no hay puntos periódicos pues en la n -ésima iteración del mapeo se obtiene el mismo punto fijo.

Mapeo II

El mapeo tipo II es semejante al inverso del mapeo IV, la diferencia es que el mapeo II cuenta con dos ramas que mapean la x_n al cero. Por lo tanto, las órbitas hacia atrás del mapeo IV serán similares a las órbitas hacia adelante de este mapeo, en particular, se sabe de antemano que habrá un punto fijo inestable dado por 3.36. El otro punto fijo es $\xi = 0$ y dado que la pendiente del mapeo es cero en este punto, el punto es estable.

Mapeo III

Para estudiar este mapeo se establecerá en primer lugar el siguiente teorema:

Teorema

Para $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, un mapeo definido por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-b}{c}x + b & \text{si } 0 < x < c \\ \frac{a(x-c)}{1-c} & \text{si } c < x < 1 \end{cases}, \quad (3.38)$$

con $a, b, c \in [0, 1]$ y $a < b$. Se define a c_k tal que cumple con $c = f^k(c_k)$, es decir, la k -ésima preimagen de c , y N tal que $c_N \in (a, b)$, esto es, c_N es la última de las preimágenes de c . Entonces, $f(x)$ tiene una órbita estable de período $N + 2$.

En otras palabras, el teorema dice:

1. Existe al menos un punto fijo, ξ_0 , para $f^{N+2}(x)$.
2. Existen, además de ξ_0 , $N + 1$ puntos fijos todos distintos.
3. Los puntos fijos son estables.

Demostración.

Lema 1. *Con el mapeo f dado en ec. 3.38, $f^{i+1}(x)$ tiene discontinuidades únicamente en cada c_k con $k \leq i$.*

Prueba:

El mapeo $f(x)$, tiene una única discontinuidad en c , es decir, $f(c^+) \neq f(c^-)$. Para la $(i + 1)$ -ésima iteración se tiene que:

$$f^{i+1}(c_k^+) = f^{i-k+1} \circ f^k(c_k^+) = f^{i-k+1}(c^+) = f^{i-k}(0), \quad (3.39)$$

por la derecha y

$$f^{i+1}(c_k^-) = f^{i-k+1} \circ f^k(c_k^-) = f^{i-k+1}(c^-) = f^{i-k}(1), \quad (3.40)$$

por la izquierda. Como $f^{i-k}(0)$ es distinto de $f^{i-k}(1)$ pues el mapeo es univaluado, $f^{i+1}(c_k^+) \neq f^{i+1}(c_k^-)$ para $k \leq i$, es decir, hay una discontinuidad en cada c_k .

Lema 2. *La altura de la discontinuidad en c_i de la $(i + 1)$ -ésima iteración es de -1 , esto es, $f^{i+1}(c_i^+) - f^{i+1}(c_i^-) = -1$ para $i < N + 1$.*

Prueba:

Se pide que $i < N + 1$ para que no existan más preimágenes de c , es decir, para evitar el punto c_N . Para este caso en particular se tiene que $k = i$, por lo tanto,

$$f^{i+1}(c_i^+) - f^{i+1}(c_i^-) = f^{i-i}(0) - f^{i-i}(1) = 0 - 1 = -1. \quad (3.41)$$

Lema 3. *Para c_k con $k < i \leq N + 1$, las alturas de las discontinuidades de la $i + 1$ -ésima iteración son positivas, esto es, $f^{i+1}(c_k^+) - f^{i+1}(c_k^-) > 0$.*

Prueba:

Se tiene que por la derecha,

$$f^{i+1}(c_k^+) = f^{i-k}(0) = f^{i-k-1}(b), \quad (3.42)$$

y por la izquierda,

$$f^{i+1}(c_k^-) = f^{i-k}(1) = f^{i-k-1}(a). \quad (3.43)$$

Dado que k e i son enteros positivos y $k < i$, $i - k - 1 \geq 0$.

Debido a que las ramas de $f(x)$ son monótonas crecientes, las ramas de las iteraciones del mapeo también deben ser así. Por otra parte, si $k < i$ se puede asegurar que $c_k \notin (a, b)$ lo que implica que $c_k < a$, ó bien, que $b < c_k$; esto es a y b están en la misma rama de la siguiente iteración. Ya que las ramas del mapeo son monótonos crecientes, si $a < b$, $f^{i+1}(a) < f^{i+1}(b)$, por lo tanto,

$$f^{i+1}(c_k^+) - f^{i+1}(c_k^-) > 0. \quad (3.44)$$

En particular, i puede valer como máximo $N + 2$ pero k vale a lo más N . Esto implica que el mapeo $f^{N+2}(x)$ no presenta discontinuidades negativas. Esto muestra que todas las singularidades de $f^{N+2}(x)$ dan únicamente $N + 1$ saltos positivos. Por lo tanto, $f^{N+2}(x)$ consta de $N + 2$ ramas siendo cada una monótona creciente.

Entonces, $f^{N+2}(x)$ es globalmente monótona creciente y su imagen es menor o igual a su dominio, esto implica que el mapeo $f^{N+2}(x)$ deja algún punto fijo, es decir, existe al menos una ξ_0 tal que,

$$f^{N+2}(\xi_0) = \xi_0, \quad (3.45)$$

que prueba la primera afirmación del teorema.

Ahora, se define ξ_1 como,

$$\xi_1 \equiv f(\xi_0), \quad (3.46)$$

y en general

$$\xi_{i+1} \equiv f(\xi_i) = f^{i+1}(\xi_0). \quad (3.47)$$

Entonces se cuenta con una colección de puntos ξ_i con $i \leq N + 1$ y para ξ_1 se tiene que

$$\xi_1 = f(\xi_0) = f \circ f^{N+2}(\xi_0) = f^{N+2} \circ f(\xi_0) = f^{N+2}(\xi_1). \quad (3.48)$$

Por lo tanto ξ_1 es también un punto fijo de $f^{N+2}(x)$ y es distinto de ξ_0 ya que $f(x)$ no cruza a la idéntica.

Aplicando otra vez el mapeo se puede ver que ξ_2 también es punto fijo. Y por inducción se sigue que

$$\xi_i = f^i(\xi_0) = f^i \circ f^{N+2}(\xi_0) = f^{N+2} \circ f^i(\xi_0) = f^{N+2}(\xi_i) \quad (3.49)$$

y por tanto en todas las ξ_i para $0 < i < N + 1$ se tiene un punto fijo. Es importante señalar que todas las ξ_i son distintas, de lo contrario, se tendría más de una órbita de f , de distinta periodicidad, que contendría al punto ξ_0 , lo que sería una contradicción con el hecho de que $f(x)$ es univaluada.

Visto de otra manera, todas las iteraciones de $f(x)$, excluyendo los múltiplos de $N + 2$, tienen un salto hacia abajo que evita la intersección con la idéntica, lo que muestra que $\xi_i \neq \xi_j$ con $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$.

En otras palabras se tienen $N + 2$ puntos fijos distintos en $f^{N+2}(x)$. Estos puntos conforman la órbita periódica del mapeo f . Esto demuestra el segundo punto del teorema.

Por último, la estabilidad de los puntos periódicos se obtiene al evaluar el valor absoluto de la derivada del mapeo en cualquiera de ellos (ec. 1.31). Dado que f^{N+2} es monótona creciente y que la imagen tiene medida menor a su dominio, f^{N+2} compacta al intervalo $[0, 1]$, y como todas las ramas del mapeo f^{N+2} tienen la misma pendiente, ésta será menor que uno, o sea, todos los puntos fijos son estables.

q.e.d.

Ahora, con ayuda de este teorema se puede encontrar la periodicidad de los puntos periódicos del mapeo f_{III} . Entonces, se pasará a calcular algunas de las preimágenes de c hasta encontrar una que caiga entre a y b , dando así la periodicidad de la órbita estable del mapeo.

Si se comienza por suponer que $a < c < b$, es decir, $c_N = c$ y por lo tanto, $N = 0$, esto implica que la órbita estable es de período dos. Esta condición define una región en el plano (b, a) delimitada por las rectas $a = c$ como límite superior y $b = c$ como el inferior.

Si c no cae dentro del intervalo (a, b) entonces tiene al menos una preimagen. Esta preimagen puede provenir de alguna de las dos ramas del mapeo. En caso de que sea la primera, es decir, $c < a < b$, entonces se tiene que

$$c_1 = f_{\text{III}}^{-1}(c) = \frac{1-c}{a}c + c. \quad (3.50)$$

En caso de que $a < c_1 < b$ se tendrá una órbita estable de período tres, esta desigualdad define a una región en el plano (b, a) limitada por las curvas:

$$a = c_1 = \frac{1-c}{a}c + c \quad (3.51)$$

y

$$b = c_1 = \frac{1-c}{a}c + c. \quad (3.52)$$

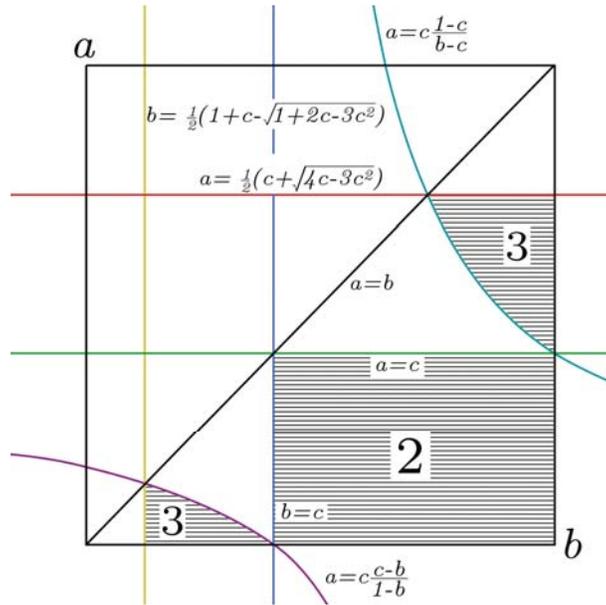


Figura 3.14: Construcción del espacio de bifurcación del mapeo $f_{II}(x)$ para $a < b$. Los números en las regiones sombreadas muestran la periodicidad de las órbitas estables cuando se tienen estos parámetros dada una c .

De eq. (3.51) surge una ecuación cuadrática a resolver para a y que solamente tendrá significado el valor que quede en el intervalo $[0, 1]$, esta es:

$$a = \frac{1}{2}(c + \sqrt{4c - 3c^2}). \tag{3.53}$$

Dado un valor para c esto forma una recta horizontal en el plano.

En el otro límite, al resolver eq. 3.52 para a se tiene que:

$$a = c\frac{1-c}{b-c}, \tag{3.54}$$

que define una hipérbola en el mismo espacio. Ambas curvas delimitan una región tal que dentro de ella los mapeos tendrán órbitas de período tres. Esta región está mostrada en la parte superior de la figura (3.14).

Si por el contrario, $a < b < c$, es decir, c pertenece a la rama de la derecha, entonces la preimagen está dada por:

$$c_1 = f_{III}^{-1}(c) = c\frac{c-b}{1-b}, \tag{3.55}$$

y si sucede que $a < c_1 < b$ se tendrá una órbita de período tres. De forma análoga se obtienen las fronteras de la región dadas por las siguientes curvas

$$a = c_1 = c \frac{c - b}{1 - b} \quad (3.56)$$

y

$$b = c_1 = c \frac{c - b}{1 - b}. \quad (3.57)$$

La primera es una hipérbola y la segunda es una recta vertical dada por la expresión

$$b = \frac{1}{2}(1 + c - \sqrt{1 + 2c - 3c^2}), \quad (3.58)$$

Estas dos curvas definen otra región de período tres en el plano (b, a) que se muestra en la parte inferior de la figura 3.14.

Es posible continuar con la búsqueda de regiones de mayor periodicidad. Por ejemplo, para la región de periodicidad cuatro se busca el conjunto de valores deben cumplir a y b para que c_2 sea la última preimagen. El cálculo de las fronteras de las regiones de mayor periodicidad se puede seguir, sin embargo, cada vez la complejidad aumenta, por ese motivo, no se continuará calculando las regiones por métodos analíticos. En la figura 3.15 se muestran algunas de ellas, las cuales fueron obtenidas por métodos numéricos.

Mapeo I

La estructura orbital del mapeo $f_I(x)$ se obtiene directamente de observar que el mapeo inverso de $f_{III}(x)$ es muy similar. La diferencia radica en que el intervalo en el que f_{III}^{-1} no está definido y es substituido por una rama que mapea al cero. Como es de esperarse, este mapeo heredará los mismos puntos periódicos que el mapeo III, a diferencia de que en este caso son inestables pues se trata de la función inversa. A cambio de eso, aparece un nuevo conjunto de puntos estables dado por las ramas constantes del mapeo, estas son las que sustituyen las discontinuidades del mapeo III.

En el mapeo I, ocurre algo muy semejante a lo mencionado anteriormente, f_I^{N+2} consta de $N+2$ ramas que intersectan a la idéntica y todas son de pendiente mayor a uno y, entre cada una de estas ramas, están $N+1$ ramas de pendiente cero que reemplazan a las discontinuidades del otro mapeo y por lo tanto intersectan a la idéntica y 2 ramas más de la misma pendiente en los extremos que también intersectan a la idéntica precisamente en cero y en uno. En resumen, f_I^{N+2} tiene $2N+5$ puntos fijos, de los cuales $N+2$ son inestables y $N+3$ son super-estables.

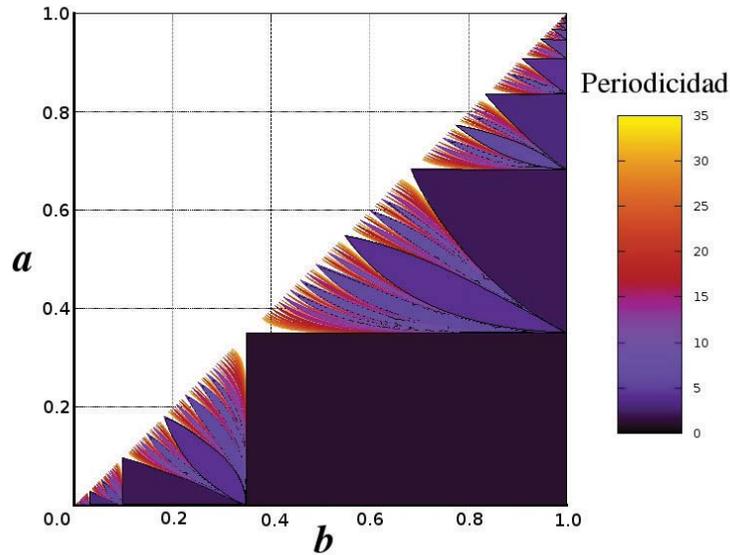


Figura 3.15: Espacio de bifurcaciones del mapeo $f_{\text{III}}(x)$ o de $f_{\text{I}}(x)$ con $a < b$ y $c = 0.35$. Los colores de cada región indican la periodicidad de la órbita periódica estable.

Si se identifica al punto fijo $\xi = 1$ con $\xi = 0$ restan $N + 2$ puntos fijos todos estables y distintos.

La órbita que pasa por el cero es estable debido a que para cualquier valor de $x_i \in (a, b)$, a la siguiente iteración, $x_{i+1} = 0$. Finalmente es posible concluir que toda órbita del mapeo I es, o en algún momento será, de período $N + 2$, con N tal que $f_{\text{I}}^N(c_N) \in (a, b)$ y, por lo tanto, se observará la misma división de regiones en el plano (b, a) que el obtenido en el mapeo III.

Por último, recuerdese que para este sistema se tiene un caso particular en el que el mapeo asociado era el mapeo I con la especificación $b = 1$. De la misma manera podemos buscar las regiones en un plano (c, a) en las cuales se forman distintos amarramientos de fase. Si $c > a$, se tiene una órbita de período dos. La frontera de esta región está dada por la recta

$$a = c. \quad (3.59)$$

En el caso de que $c < a$ se observará una periodicidad más alta. Si resulta que $f_{\text{I}}(c) > a$ la periodicidad del sistema es tres. Esta región, naturalmente, está

acotada por ec. 3.59 y por la relación que resulta de $a = f_{\text{I}}(c)$, esto es,

$$(1 - c)c = a(a - c). \quad (3.60)$$

Seguido de la región de periodicidad tres se encuentra la de periodicidad cuatro. La frontera superior está dada por la relación que se obtiene a partir de $a = f^2(c)$, esto es,

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{1 - c}{a}\right)^2 + \frac{1 - c}{a} + 1. \quad (3.61)$$

En general, la región de periodicidad $N + 2$ estará acotada por dos curvas: Por un lado, la curva que acota a la región $N + 1$ y por el otro por la curva que se genera de la igualdad $a = f_{\text{I}}^N(c)$, esto es,

$$\frac{a}{c} = \sum_{i=0}^N \left(\frac{1 - c}{a}\right)^i, \quad (3.62)$$

lo que es equivalente a la relación,

$$a^{N+1}(1 - a) = c(1 - c)^{N+1}. \quad (3.63)$$

Las distintas regiones del plano (c, a) se muestran en la figura 3.16.

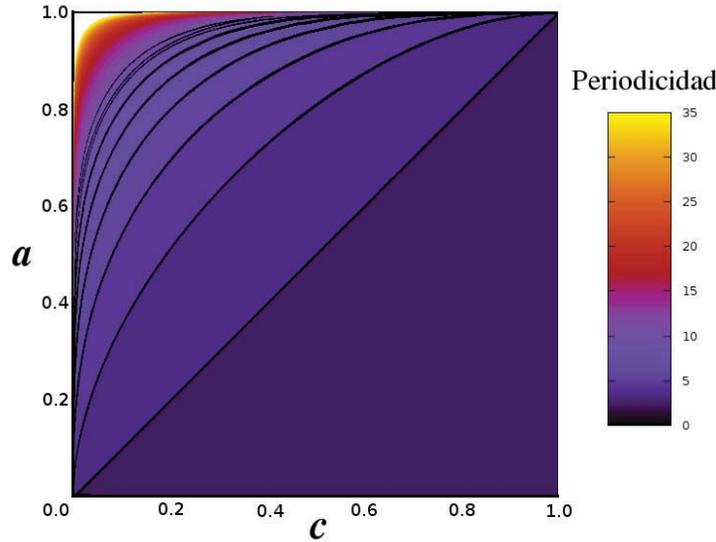


Figura 3.16: Espacio de bifurcaciones para el mapeo I cuando $b = 1$.

El plano (b, a) comentado en la sección anterior (fig. 3.15) muestra el período de las órbitas del mapeo I o III para distintos valores de a y b con una c dada. Para distintos valores de c , las curvas que conforman la frontera de las regiones de distintos periodos. Por esta razón, los planos (b, a) pueden ser interpretados como cortes de nivel, donde el nivel está dado por el valor que toma el parámetro c , esto es, del espacio tridimensional dado por a , b y c . Otro de los cortes de nivel que se le pueden dar a este espacio tridimensional es el de $b = 1$, este corte es el plano (c, a) mostrado en la figura 3.16. A este espacio tridimensional que incluye a todos los parámetros se le llamará el espacio de bifurcaciones del mapeo I o del mapeo III. En la figura 3.17 se muestra la forma de este espacio.

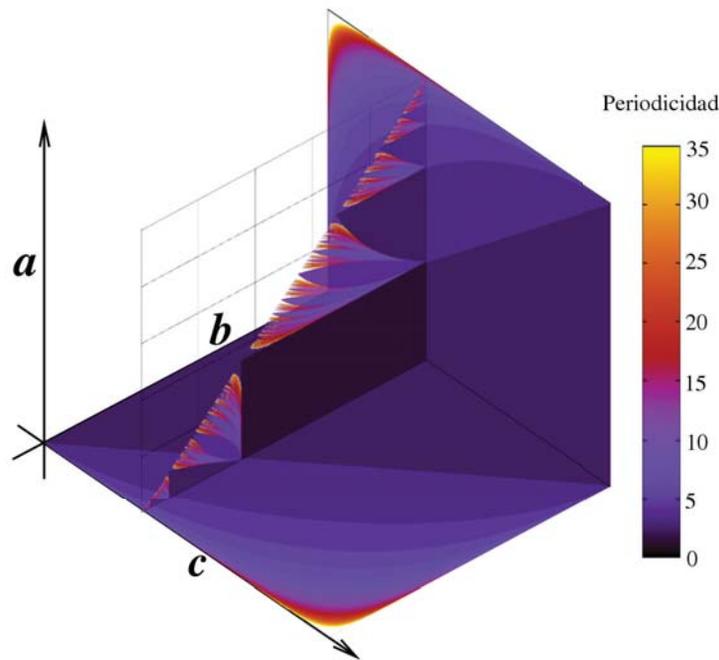


Figura 3.17: Espacio de bifurcaciones completo.

Un punto importante a considerar es que las regiones de distinta periodicidad del espacio de bifurcaciones son conjuntos estrictamente abiertos pues las fronteras no pertenecen a dichos conjuntos. Por lo tanto, si los parámetros del sistema son tales que los parámetros a , b y c pertenecen a una de las fronteras de una región de alguna periodicidad, el sistema no es periódico, para ser más precisos, lo que se observa es un comportamiento cuasiperiódico similar al de las regiones vecinas.[Pérez, Lomnitz-Adler, 1988]

En este espacio de bifurcaciones se presentan varios fenómenos interesantes.

Uno de ellos está relacionado con la forma de las regiones de distinta periodicidad, nótese que todas ellas concluyen con un pico sobre el plano $a = b$. Por ejemplo, para el mapeo I, según ecs. A.7 del apéndice, $a = b$ implica

$$1 - \frac{1 + \alpha_2}{m} = 1 + \alpha_1 - \frac{1}{m}, \quad (3.64)$$

o lo que es lo mismo,

$$m\alpha_1 = -\alpha_2. \quad (3.65)$$

Tomando en consideración que los parámetros de acoplamiento y la pendiente m sólo pueden tomar valores mayores o iguales a cero, esta relación se cumple sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, es decir, cuando en realidad no hay acoplamiento. Para el mapeo III sucede lo mismo, si uno sustituye $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ en ecs. A.14 y A.17 se ve de inmediato que $a = b$ (o $a' = b'$, según la simbología empleada). Es decir, el plano $a = b$ representa al sistema desacoplado en ambos mapeos. Naturalmente, en caso de no haber acoplamiento, cada uno de los osciladores en el sistema operará autónomamente, la periodicidad, por lo tanto, dependerá de la conmensurabilidad de las razones de crecimiento de los osciladores. Se puede afirmar que a la recta $a = b$ llegan tantas lenguas como números racionales en el intervalo $[0, 1]$. Esto implica que existe una relación biunívoca entre las lenguas y los racionales.

Otra característica que se hace evidente en el espacio de bifurcaciones es que existen valores de a , b y c para los cuales sobre una vecindad de esos puntos se pueden encontrar todas las periodicidades en los mapeos. Estos puntos los se pueden encontrar sobre los planos $a = 0$ y $b = 1$ entre cada una de las lenguas.

Nótese que para diferentes cortes de c cte. del espacio de bifurcaciones las formas y distribuciones de las lenguas de distinta periodicidad no cambian cualitativamente. Es decir, existe un homeomorfismo que deforma la forma de tales cortes dejando a todos iguales. Es posible afirmar entonces que existe un homeomorfismo de los parámetros que caracterizan al sistema de tal suerte que elimina la dependencia de c , es decir, existe un mapeo $g_{a',b'}$, $(a', b') = h(a, b, c)$, con la misma dinámica que el mapeo I o III. Esto implica que el parámetro c no es esencial para la dinámica del sistema.

El espacio de bifurcaciones mostrado en la figura 3.17 tiene el inconveniente de que se muestra la periodicidad de los mapeos para a , b y c , y no con los parámetros que caracterizan el sistema, α_1 , α_2 y $m = A_2/A_1$. Sin embargo, debido a que a , b y c son un homeomorfismo de α_1 , α_2 y m , se puede transformar este espacio en uno donde las coordenadas estén dadas por la última terna. Esto lo se puede hacer para el mapeo I con ayuda de ecs. A.7 del apéndice, lo que nos lleva a formar el espacio mostrado en la figura 3.18.

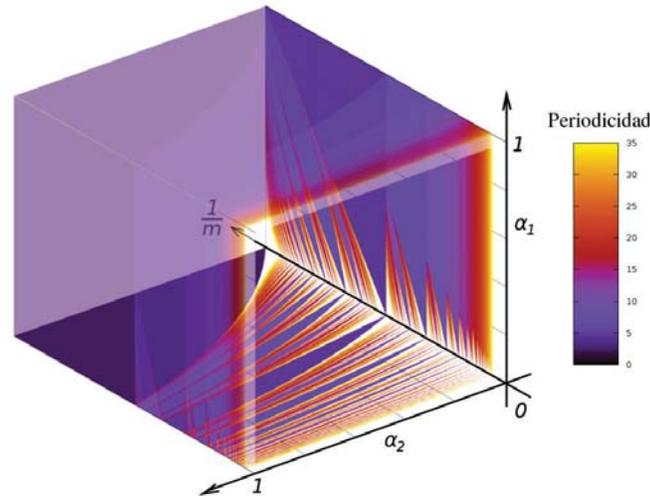


Figura 3.18: Espacio de bifurcaciones para los parámetros originales.

Dado que el comportamiento de los mapeos I y II es el mismo que el de los mapeos III y IV respectivamente es posible concluir que la dinámica de los sistemas $(T+, T+)$ y $(T-, T-)$ es prácticamente la misma.

Cuando el sistema $(T+, T+)$ presenta las características que forman el mapeo II se puede decir que los subsistemas encuentran rápidamente la sincronización. La relación de sincronización está dada por la relación del número de disparos de un oscilador con respecto a los del otro. En este caso, el número de oscilaciones que da el subsistema y por ejemplo está determinado por el período de la órbita de $f_{\mathbb{I}}$, por ejemplo q . El número de oscilaciones que da x en ese mismo ciclo se puede determinar con el mapeo de la otra variable o, más fácil, al contar el número de veces que $x_{n+1} < x_n$ en un ciclo, por ejemplo p . Por lo tanto, la sincronización será $p : q$. Nótese que por el área que cubre cada región del espacio de bifurcaciones cada vez es menor conforme crece q , esto implica que el estado de sincronización con q grande es muy raro de observar comparado con los de q pequeña.

En cuanto al sistema $(T-, T-)$ se observa un comportamiento similar, la diferencia radica en que la sincronización en este sistema se alcanza asintóticamente mientras que en el sistema mencionado anteriormente se consigue en un tiempo finito.

Se ha visto en este capítulo la multitud de fenómenos que ocurren al forzar o acoplar dos osciladores de integración y disparo. Sin embargo, el análisis de un oscilador forzado o el de dos acoplados es insuficiente para conocer la dinámica de una red neuronal o, en general, de sistemas más complejos.

Capítulo 4

Tres OIDs acoplados

Se ha visto la riqueza del comportamiento que presenta el caso de dos osciladores acoplados, pero es evidente que en los sistemas físicos, tecnológicos, biológicos o neurales hay redes en las que participan muchos osciladores. Muchas de las más interesantes propiedades de esos sistemas resultan ser fenómenos colectivos generados en esas redes y dependen en gran medida de la topología de las conexiones que conforman la red. El sistema de dos osciladores acoplados no tiene más que una topología de acoplamiento, en este sentido es sumamente limitado.

Desde luego el estudio de redes de osciladores nos permitiría explorar con más profundidad esos sistemas reales. En esta tesis se presenta un primer paso en la dirección de ese tipo de estudios, el caso de tres osciladores de integración y disparo. Consideramos esto como un avance importante ya que con tres osciladores se pueden presentar distintas topologías en el acoplamiento, lo que nos permite acercarnos más al estudio de los sistemas reales.

Se tratará, al estilo que se usó para dos osciladores, algunas de las formas de conexión entre los subsistemas para el caso de tres osciladores. No se pretende aquí hacer un estudio exhaustivo del caso de tres osciladores, llevaría a una extensión muy grande, únicamente se desea avanzar lo suficiente como para mostrar las diferencias de comportamiento inducidas por diferencias topológicas en la conectividad de la red.

Desde luego no son los estudios exhaustivos o totalmente detallados los que pueden conducir a un mejor entendimiento de redes complejas como las conformadas por las neuronas en la corteza cerebral, sin embargo, pensamos que extender el caso de dos a tres debe darse para tener una guía que permita generalizar algunas técnicas o conceptos al caso general. Por otro lado encontramos que el caso de tres osciladores resulta, por si mismo, interesante.

4.1. Los sistemas de tres OIDs acoplados

Considérese ahora tres osciladores de integración y disparo. Estos osciladores están acoplados por medio de una variación del umbral o de la base de cada uno de ellos en función del valor de la variable de estado de los otros dos. Como en el caso de dos osciladores se supondrá que la influencia de uno sobre otro es lineal.

El espacio fase del sistema es ahora de tres dimensiones, se usará (x_1, x_2, x_3) o (x, y, z) para denotar las tres variables de estado de los osciladores y como coordenadas para el espacio. Las expresiones para el acoplamiento serán

$$h_i = 1 + \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j,$$

$$b_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} x_j.$$

donde h_i representa el valor del umbral y b_i el de la base para el i -ésimo oscilador, α_{ij} y β_{ij} son los parámetros de acoplamiento entre el oscilador i y el oscilador j , desde luego, si $i = j$ los parámetros de acoplamiento valen cero.

Dados los diferentes posibles valores de los parámetros de acoplamiento se presentan sistemas con diferentes características. En particular, aquí se destacan los casos en que alguno de dichos parámetros vale cero ya que originan diferentes formas de conexión que se llamarán aquí **topologías de acoplamiento**.

Recuérdese el caso de dos osciladores acoplados, presentan los siguientes casos:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, los osciladores se encuentran desacoplados y cada uno opera independiente del otro. En este caso, cada oscilador es periódico por sí. En conjunto se tendrá periodicidad o cuasiperiodicidad dependiendo de la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de las frecuencias de los dos osciladores.
2. Sólo un parámetro de acoplamiento es cero, se dice que un oscilador fuerza al otro. El primer oscilador opera autónomamente mientras el otro depende de la actividad del primero.
3. $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_2 \neq 0$, se tiene un verdadero acoplamiento pues cada uno queda perturbado por el otro. En este sentido se presenta una sola topología.

En el caso de tres osciladores se tienen una mayor variedad. Esto surge por la cantidad de parámetros de acoplamiento y las diferentes combinaciones en que

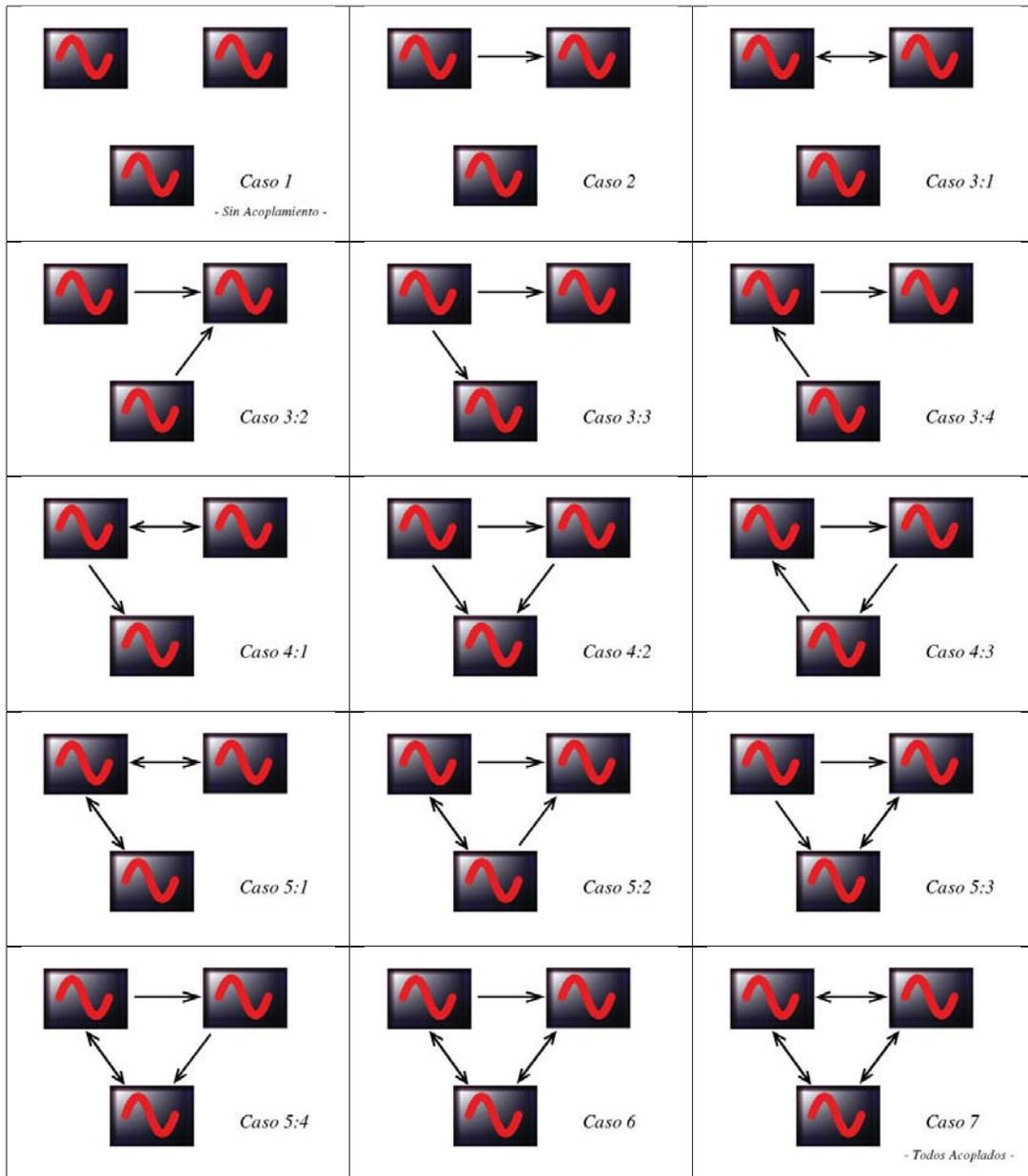


Figura 4.1: Topologías de conexión de tres osciladores acoplados.

algunos pueden valer cero, éstas se muestran en forma esquemática en figura 4.1. Por ejemplo, el sistema denotado como caso 4:3 muestra a un oscilador que fuerza a un segundo, éste fuerza a un tercero y él que a su vez fuerza al primero. En este caso se dirá que los tres están acoplados, aunque no hay interacción mutua entre todas las parejas de osciladores, la actividad de cada uno de ellos depende de la de los otros dos.

Otro ejemplo de acoplamiento se muestra en el caso 5:1. En donde dos osciladores no interactúan entre sí, sin embargo, su actividad sí depende de la del otro.

Para el caso de tres osciladores se requiere generalizar la notación que se utilizó en el caso de dos. Se denotará a un sistema por:

$$\begin{bmatrix} & P_{12}S_{12} & P_{13}S_{13} \\ P_{21}S_{21} & & P_{23}S_{23} \\ P_{31}S_{31} & P_{32}S_{32} & \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

donde P_{ij} denota la vía de acoplamiento entre el oscilador i y el j , el que puede tomar dos valores, T o B para umbral o base respectivamente. El símbolo de S_{ij} denota el signo de dicho acoplamiento que puede tomar dos valores $+$ ó $-$.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} & T+ & T- \\ T- & & B+ \\ B- & B+ & \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

denota al sistema cuyos umbrales y bases tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3, \\ h_2 &= 1 - \alpha_{21}x_1, \\ h_3 &= 1, \\ b_1 &= 0, \\ b_2 &= \beta_{23}x_3, \\ b_3 &= -\beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2; \end{aligned}$$

con las α 's y las β 's positivas.

En los casos en donde todas las formas de acoplamiento se den por la misma vía y con el mismo signo, se puede resumir la notación a la siguiente

$$(PS)^6, \quad (4.3)$$

donde P y S tienen la misma función que antes y el superíndice se utiliza para resumir los seis acoplamientos.

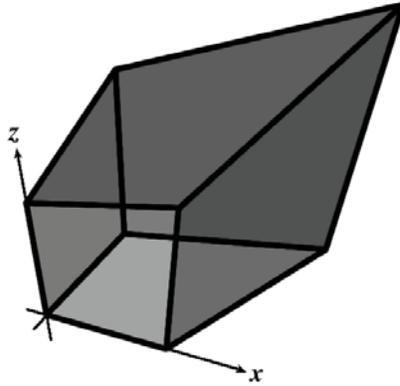


Figura 4.2: Espacio fase de un sistema de tres OIDs acoplados.

Por ejemplo, el sistema

$$(B-)^6 \quad (4.4)$$

es un sistema en donde los umbrales son unitarios y las bases están dadas por

$$\begin{aligned} b_1 &= -\beta_{12}x_2 - \beta_{13}x_3, \\ b_2 &= -\beta_{21}x_1 - \beta_{23}x_3, \\ b_3 &= -\beta_{31}x_1 - \beta_{32}x_2. \end{aligned}$$

4.2. El Espacio Fase y las Trayectorias

El espacio fase es una región de \mathbb{R}^3 que está acotada por los umbrales y las bases de los osciladores. Esto es, el valor x_i está acotado por el plano:

$$x_i = 1 + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}x_j \quad (4.5)$$

y por el plano:

$$x_i = \sum_{j \neq i} \beta_{ij}x_j. \quad (4.6)$$

Esto conforma un polígono irregular sólido de seis caras embebido en \mathbb{R}^3 , véase figura 4.2. Nótese que en caso de no haber acoplamiento, el espacio fase se reduce al cubo unitario.

Para el i -ésimo oscilador, en ausencia de relajación, la evolución en el tiempo está dada por:

$$x_i(t) = A_i t + x_{i0}, \quad (4.7)$$

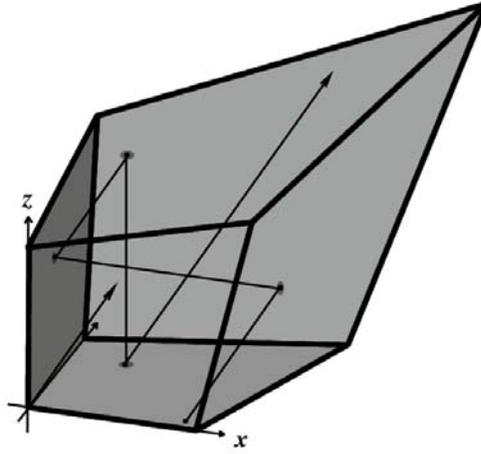


Figura 4.3: Ejemplos de trayectorias del espacio fase.

donde A_i es la razón de crecimiento, t es el tiempo y x_{i0} es el estado inicial (o el estado a $t = 0$). Es decir, la trayectoria es una recta en el espacio fase cuyos ángulos directores están determinados por las razones de crecimiento.

En caso de que x_i llegue a su valor umbral se relajará al valor que su base tenga en ese instante del tiempo, la trayectoria dará un brinco discontinuo y continuará su recorrido, esto se muestra en la figura 4.3. A este tipo de relajamiento se le llamará **relajamiento simple**.

En los sistemas en que se presenta acoplamiento por medio del umbral con las constantes de acoplamiento positivas, el estado de los OIDs puede tomar valores superiores a su umbral natural. En estos casos, si una de las variables alcanza su umbral, se relajará a su base, en consecuencia el umbral de otros osciladores puede variar y resultar menor que el valor del estado del sistema en ese instante, por lo que más de un oscilador se relajará. Cuando esto ocurra se dirá que se ha presentado un **relajamiento múltiple**.

Con el propósito de simplificar la exposición y sin pérdida de generalidad, se tomará al oscilador x_3 (que de ahora en adelante será llamado z) como el de mayor tasa de crecimiento, así mismo, se hace una reparametrización para que esa tasa máxima sea unitaria.

4.3. La Técnica de los Mapeos

Para estudiar el comportamiento del sistema, al igual que el caso de dos osciladores, se puede utilizar una técnica análoga a la de los mapeos de Poincaré. Se hace un corte, por medio de un plano, en el espacio fase y se estudia la dinámica inducida en dicho plano al considerar los puntos en el que la trayectoria lo interseca al transcurrir el tiempo. En particular, el corte se dará con uno de los planos definidos por el valor base de alguna de las variables.

Esto es, tómesese un corte, por ejemplo, en la base de z , y una trayectoria que a $t = 0$ esté en ese plano, el estado del sistema será (x_1, y_1, b_3) . La trayectoria continuará su recorrido, en el momento en que z alcance su umbral se relajará al valor base, esto es, regresa al plano base, por lo que se ha establecido un mapeo de dicho plano en si mismo

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n). \quad (4.8)$$

Como esto se repite y se repite, la sucesión de esos puntos en el plano será una órbita del sistema dinámico generado por dicho mapeo. Los puntos de una órbita

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots \quad (4.9)$$

corresponden a los valores de x y y cuando ocurren los relajamientos de z .

Lo mismo se puede hacer utilizando los relajamientos de x o y y los planos correspondientes para obtener otros dos mapeos similares. Estos tres mapeos, como ocurre en el caso de dos osciladores, contienen toda la información del sistema, se puede entonces decir que se ha “desacoplado” el sistema dinámico continuo tridimensional, en tres sistemas bidimensionales discretos, los generados por esos tres mapeos. Dado que el acoplamiento entre osciladores es lineal al igual que la evolución temporal de su estado, estos mapeos serán lineales al menos por pedazos. Las órbitas que se obtienen mediante la iteración muestran la dinámica del sistema, es decir, si hay periodicidad, cuasiperiodicidad, caos, multiestabilidad, etc. A continuación se hará uso de esto con el fin de ejemplificar dos casos: el sistema denotado por $(T+)^6$ y el $(T-)^6$.

4.4. El sistema $(T+)^6$

En el sistema $(T+)^6$ todos los acoplamientos tienen el efecto de incrementar los umbrales, esto es:

$$\begin{aligned} h_i &= 1 + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j, \\ b_i &= 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha_{ij} > 0$.

En general este sistema resulta muy complejo, razón por la que se limitará a un caso particular: aquel en el que el mapeo del plano (x, y) es suficiente para determinar la dinámica completa del sistema, esto permite prescindir de los otros dos mapeos. Para que esto ocurra es necesario que no haya incertidumbre en lo que ocurre entre cada relajación de z , o sea, se debe poder conocer el número de relajamientos de las variables x y y en cada iteración del mapeo. El oscilador z debe ser muy rápido, tan rápido que entre cada una de las relajaciones de x y de y se presente al menos una de z . En términos de los parámetros del sistema se debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} A_1 \tau_z &< 1 + \alpha_{12} A_2 \tau_z, \\ A_2 \tau_z &< 1 + \alpha_{21} A_1 \tau_z, \end{aligned}$$

donde,

$$\tau_z = \frac{1}{1 - \alpha_{31} A^1 - \alpha_{32} A^2}, \quad (4.10)$$

es el tiempo que tarda z en llegar a su umbral a partir del origen. Equivalentemente estas condiciones se puede expresar como

$$A_1 < \frac{1 + \alpha_{12}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{32}\alpha_{21} + \alpha_{31}}, \quad (4.11)$$

$$A_2 < \frac{1 + \alpha_{21}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{32}\alpha_{21} + \alpha_{31}}. \quad (4.12)$$

Por conveniencia y simplicidad se pedirá además que cualquier variable pueda presentar un relajamiento sencillo para alguna condición inicial, para que esto se cumpla, la razón de crecimiento del umbral de cada oscilador debe ser menor que la del oscilador mismo, es decir,

$$\begin{aligned} A_1 &> \alpha_{12} A_2 + \alpha_{13}, \\ A_2 &> \alpha_{21} A_1 + \alpha_{23}, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$A_1 > \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad (4.13)$$

$$A_2 > \frac{\alpha_{21}\alpha_{13} + \alpha_{23}}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}. \quad (4.14)$$

El dominio del mapeo es la base de z :

$$D = \{(x, y) | x \in [0, 1 + \alpha_{12}y), y \in [0, 1 + \alpha_{21}y)\}. \quad (4.15)$$

Como el mapeo es lineal por partes D queda dividido en regiones definidas por las diferentes secuencias de relajamiento que presentan las trayectorias.

Una trayectoria que parte de un punto en D tiene tres posibilidades de relajamiento: que la primera relajación ocurra en x , en y o en z ; esto divide al dominio en tres regiones (figura 4.4 izquierda). La relajación puede ser simple o múltiple, lo que fragmenta en dos partes a cada una de las regiones anteriores (figura 4.4 centro). Se puede continuar de esta manera rastreando todas las posibilidades en que se puede dar la secuencia de relajamientos en x o en y hasta que ocurra una relajación en z , momento en que quedará definido el mapeo.

Al hacer el cálculo correspondiente se encuentra con que las secuencias de relajamiento se presentan en veintidós combinaciones distintas, que se pueden ver en la tabla A.1 del apéndice.

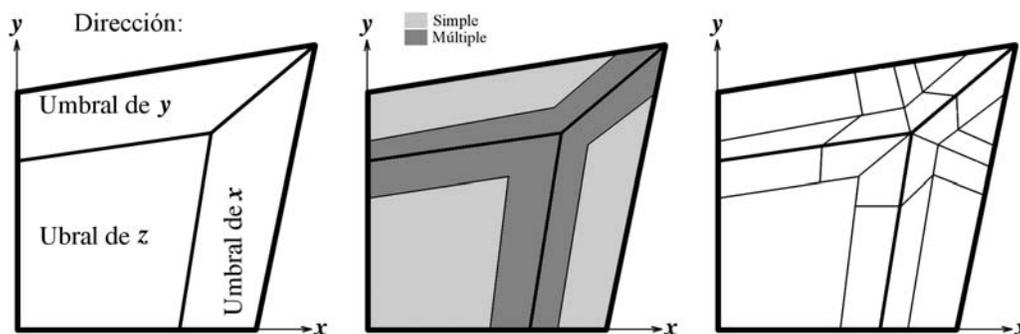


Figura 4.4: División del dominio D según el destino de las trayectorias. *Izquierda:* Primera división del dominio según ocurra la primera relajación en x , y o z . *Centro:* Segunda división del dominio según el tipo de relajamiento, simple o múltiple. *Derecha:* División del dominio para los 21 tipos de relajamientos.

Cuando hay un relajamiento triple la trayectoria llega al origen. Estos relajamientos triples se producen en seis de las veintidós divisiones del dominio. Por este motivo no vale la pena diferenciar estas seis regiones por lo que serán integradas en una sola.

En resumen el dominio está dividido en dieciséis regiones y cada una de ellas tiene, ante el mapeo, su imagen, la que se puede obtener al seguir la trayectoria. En la figura 4.5 se muestran las dieciséis regiones del dominio y sus respectivas

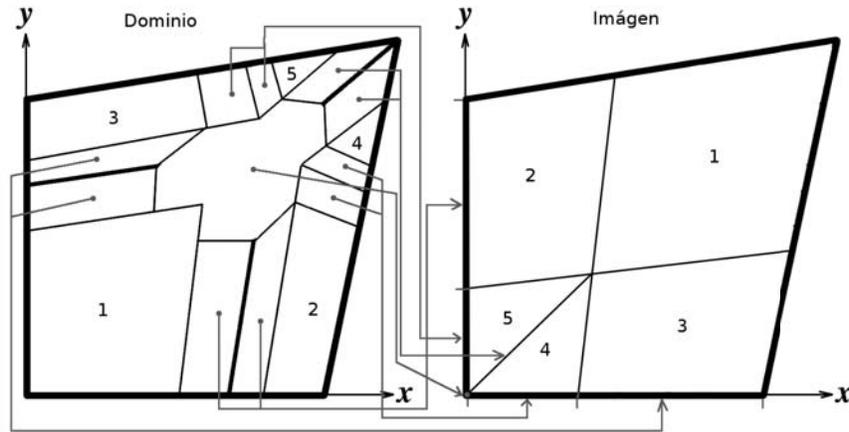


Figura 4.5: Dominio (*izquierda*) e imagen (*derecha*) de un mapeo de Poincaré para el sistema $(T+)^6$. Las regiones son mapeadas de la siguiente manera: las regiones numeradas de la izquierda son mapeadas a las regiones numeradas de la derecha, las regiones señaladas son mapeadas a diferentes rectas siguiendo las flechas salvo la región central que es mapeada al origen.

imágenes. Para las expresiones algebraicas de estas regiones y del mapeo, el lector puede consultar el apéndice.

En caso de que un sistema no cumpla con las condiciones dadas en ecs. 4.13 y 4.14 se puede estudiar al sistema con un mapeo muy similar. En este caso, dado que no hay relajamiento simplemente para x o y dependiendo de que condición no se cumple, las secuencias de relajamiento que el sistema puede sufrir están limitadas. Esto elimina algunas de las divisiones del dominio, por ejemplo, en la figura 4.6 se muestra el dominio y la imagen del mapeo cuando no se cumple la condición señalada en la expresión 4.13.

A continuación se pasará al estudio del comportamiento y las propiedades del mapeo.

De la figura 4.5 se puede apreciar que las regiones de relajamiento simple tienen imágenes que cubren todo el conjunto D , por otra parte, las regiones con relajamiento múltiple tienen por imágenes a rectas o puntos, es decir, conjuntos de medida cero. Se puede asegurar entonces, que el mapeo es expansivo en las regiones donde hay relajamiento simple pues cubren toda el área del dominio. Por lo tanto, es posible decir que, al igual que en el caso del mapeo I del sistema $(T+, T+)$ del capítulo anterior, sólo hay dos órbitas periódicas, una estable que pasa por el origen y una inestable. En el caso de tres osciladores, la órbita periódica estable necesariamente pasa por el punto $(0, 0)$. Por lo tanto, se puede conocer el

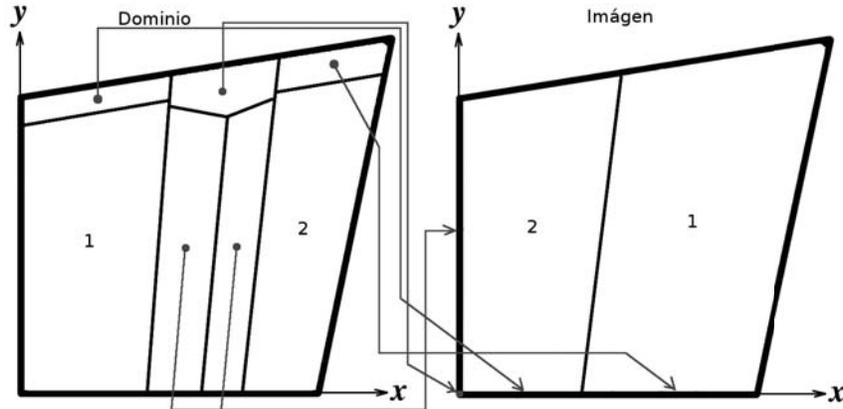


Figura 4.6: Dominio (*izquierda*) e imagen (*derecha*) del mapeo de Poincaré para el sistema $(T+)^6$ para el caso en que las razones de crecimiento no cumplen con la condición dada en la ec. 4.13.

período del sistema de la misma manera que se encontró para su hermano menor. Esto es, se cuenta el número de iteraciones necesarias para que el origen caiga en la región de triple relajamiento, a esa cantidad se le añade uno para obtener el período del sistema.

Para este mapeo no se buscará analíticamente las regiones de periodicidad puesto que resulta muy engorroso, en cambio se utilizarán métodos numéricos. Dado que estos sistemas están caracterizados por de ocho parámetros: las dos razones de crecimiento A^1 y A^2 , y las seis constantes de acoplamiento, α_{12} , α_{13} , α_{21} , α_{23} , α_{31} , α_{32} , el espacio de bifurcaciones es de 8 dimensiones. Por lo que, por cuestiones de visualización, se presentarán distintos cortes bidimensionales de este espacio. Los resultados se muestran a continuación.

Tómese, para comenzar, a un sistema en el cual, uno de los osciladores está en reposo, por ejemplo el oscilador y , esto es, $A_2 = 0$. El sistema se reduce a uno de dos osciladores. Los resultados obtenidos para este sistema son los mismos que los obtenidos en el capítulo anterior. Estos se pueden ver en la figura 4.7 izquierda, el cual se trata de un corte del espacio de bifurcaciones.

Ahora bien, si el valor de A_2 es ligeramente mayor, el corte cambia a un plano paralelo al anterior. En la figura 4.7 derecha se aprecia cómo cambian las lenguas de Arnold al aumentar ligeramente el parámetro. Nótese que en particular las lenguas se fragmentan y dan lugar a nuevas regiones de distinta periodicidad. Esto ocurre por que a pesar de modificar muy ligeramente la dinámica de las otras dos variables, la dinámica del sistema completo cambia significativamente. Es decir,

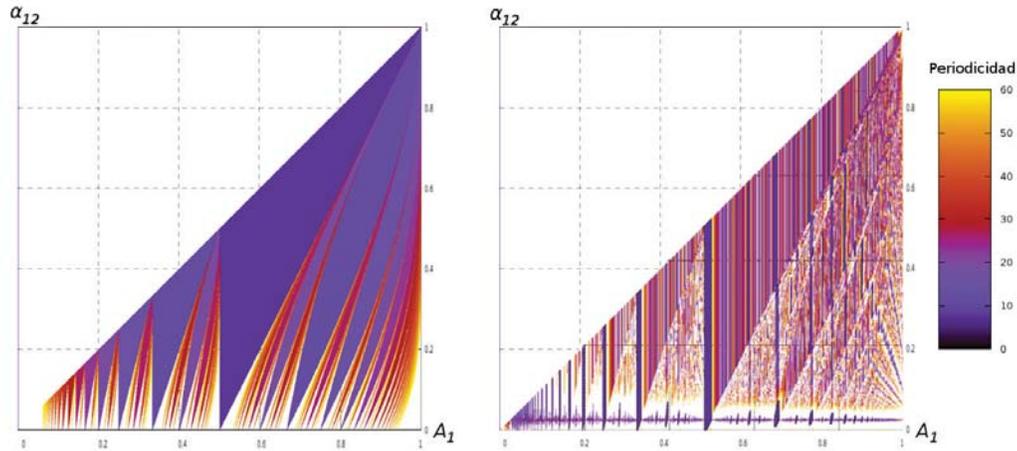


Figura 4.7: Corte del espacio de bifurcaciones en el que se anula el oscilador y , i.e., $A_2 = 0$ (*izquierda*) y cuando su tasa de crecimiento es muy pequeña, i.e., $A_2 = 0.06$ (*derecha*).

si la variable y tiene razón de crecimiento $A_2 = 0$ no es periódica, es constante, por consiguiente, la periodicidad del sistema simplemente es la de las variables x y z . En el momento en que A_2 es ligeramente mayor a 0, el oscilador y es de período muy grande, por lo tanto, la periodicidad del sistema varía mucho. Es por eso que en el corte del diagrama de bifurcaciones se aprecian nuevas regiones proyectadas en tonos claros dentro de las regiones de período bajo o simplemente una región de período bajo se fragmenta en varias regiones de período alto.

En figura 4.8 derecha se muestra un corte en el cual se deja a $\alpha_{ij} = 0.05$ y los parámetros A_1 y A_2 se dejan variables. Cuando $A_1 = A_2 = 1$ la trayectoria que comienza en el origen cae en la esquina del espacio fase que lleva al relajamiento triple. Por esta razón, se tiene una región de periodo 1 en la esquina superior derecha del espacio de bifurcaciones que contiene al punto $(1, 1)$. Nótese que esta región es relativamente pequeña, esto se debe a que el acoplamiento es débil, los tres osciladores deben tener razones de crecimiento muy parecidas para acceder de primera intención a la región de relajamiento triple.

En torno del punto $A_1 = A_2 = 1/2$, es decir, en el centro de la figura se encuentra una región de período 2 y entorno de los puntos $(1/3, 1/3)$ y $(2/3, 2/3)$ hay dos regiones de período 3. Se puede ver que en las vecindades de los puntos $A_1 = A_2 = k/P$, donde k/P es una fracción irreducible y $k < P$, hay regiones de período P . Cabe resaltar que el número de regiones de período P está dado por la cardinalidad de fracciones irreducibles con denominador P .

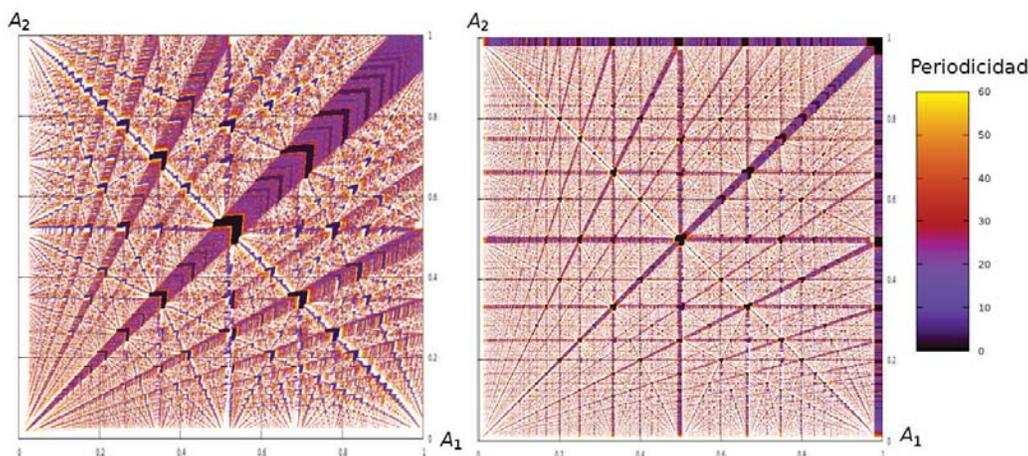


Figura 4.8: Corte del espacio de bifurcaciones sobre el plano (A_1, A_2) con $\alpha_{ij} = 0.1$ (izquierda) y $\alpha_{ij} = 0.05$ (derecha).

Por otro lado, se observa en la figura 4.8 derecha que, conforme el acoplamiento es más débil, el área de las regiones marcadas se hace de menor tamaño. Esto apunta a que las lenguas de Arnold en el espacio de bifurcaciones convergen a un racional conforme $\alpha_{ij} \rightarrow 0$.

Con motivo de mostrar la forma y dirección de crecimiento de las lenguas de Arnold, el siguiente corte será sobre el plano

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ \alpha_{31} = \alpha_{32} \\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0.01 \end{cases} . \quad (4.16)$$

Esto es, un sistema donde los dos osciladores x y y tienen las mismas condiciones y simplemente se varía el término de forzamiento que producen ambos para el oscilador z . La figura 4.9 izquierda muestra este corte y observa cómo las lenguas aumentan su tamaño a medida que los parámetros α_{31} y α_{32} aumentan (eje vertical).

En otra proyección dada por el plano

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} \\ \alpha_{32} = \alpha_{21} = \alpha_{13} = 0 \end{cases} , \quad (4.17)$$

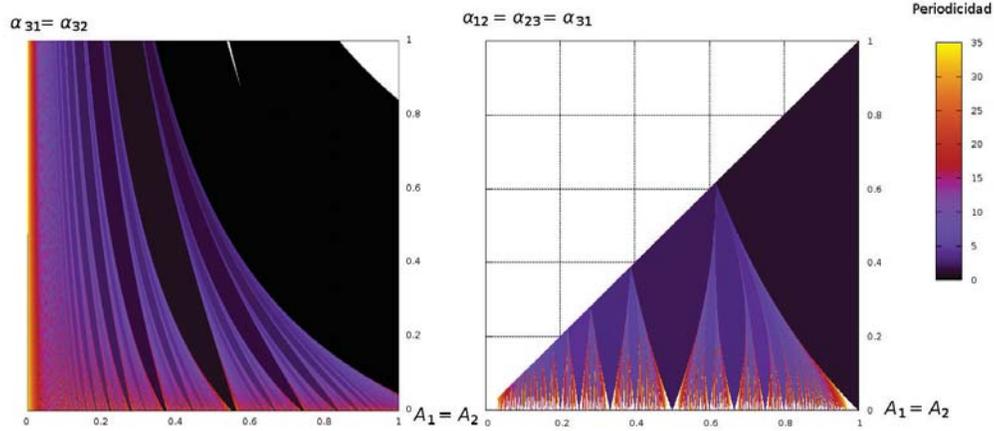


Figura 4.9: Distintos cortes del espacio de bifurcación en los que se muestra la dirección de crecimiento de las lenguas de Arnold.

se observa otra dirección de crecimiento de las lenguas de Arnold (figura 4.9 derecha). Un sistema descrito por este tipo de acoplamiento tiene la topología de conexión descrita en la tabla 4.1 como el caso 4:3. En este sistema en particular, los parámetros de acoplamiento tienen el mismo valor, sin embargo, sólo dos de los osciladores tienen la misma razón de crecimiento. En la figura se aprecia cómo efectivamente las lenguas convergen a un número racional a medida que el acoplamiento disminuye. Por ejemplo, la lengua de período 1 converge al 1 del eje horizontal. La lengua de período 2 converge al punto $(0, 1/2)$, las dos lenguas de período 3 convergen, una al racional $(0, 1/3)$ y la otra al $(0, 2/3)$. Y así sucesivamente.

Por último se mostrará el corte del espacio de bifurcación dado por

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = 1/2 \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{23} = \alpha_{32} \\ \alpha_{13} = \alpha_{31} \end{cases} \quad (4.18)$$

El tipo de sistema descrito por este acoplamiento corresponde a uno con una topología de acoplamiento del tipo 5:1 donde, los dos osciladores x y y interactúan indirectamente. El corte del espacio de bifurcación se muestra en la figura 4.10. Como se puede apreciar, la figura es simétrica en cuanto a una reflexión sobre la diagonal de 45° . Esto no debe sorprendernos puesto que hay simetría con los osciladores x y y pues su tasa de crecimiento que es igual y los acoplamientos entre

ellos son nulos. Esta proyección muestra otra cara de la lengua de período 2 la cual apenas se logra apreciar, se trata de la región en la figura que converge como una aguja al origen del plano de proyección. Nótese que en la vecindad del origen también se encuentran las regiones de período alto mostradas en tonos claros.

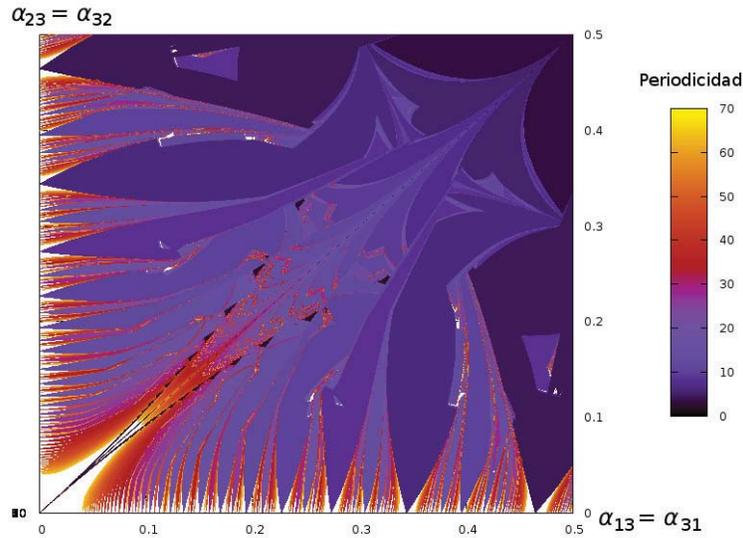


Figura 4.10: Corte del espacio de bifurcación donde se fija los valores de $A_1 = A_2 = 1/2$ y $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$.

Dado que en este mapeo, las órbitas, salvo por un conjunto de ellas de medida cero, son eventualmente periódicas y pasan por el origen, se puede concluir que en el sistema $(T+)^6$ si cumple con las condiciones ecs. 4.11 y 4.12, los osciladores llegan a la sincronización en fase.

4.5. El sistema $(T-)^6$

Los osciladores del sistema $(T-)^6$ están acoplados por medio del umbral con parámetros negativos, es decir, $\alpha_{ij} < 0$ y $\beta_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Este tipo de sistemas son complicados y por lo general son necesarios los tres mapeos para conocer la dinámica del sistema completo. Por tal razón se restringirá el estudio a aquellos casos en los que, con un sólo mapeo, se pueda conocer la dinámica del sistema.

Por las mismas razones que se han expuesto anteriormente, se pedirá que el subsistema z pueda llegar a su umbral directamente para algún punto de partida

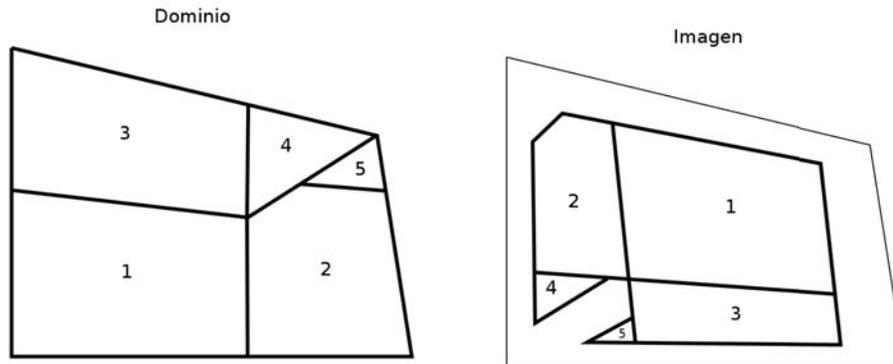


Figura 4.11: Dominio (*izquierda*) e imagen (*derecha*) del mapeo de Poincaré del sistema $(T-)^6$.

dentro de la base del oscilador z . Esto implica que los parámetros deben cumplir con las restricciones dadas por ecs. 4.11 y 4.12 del caso $(T+)^6$.

Como los parámetros de acoplamiento son todos negativos en este caso no se presentan relajamientos múltiples. Por analogía al caso anterior, esto implica que la base de z queda dividida en cinco regiones correspondientes a las cinco posibilidades de relajamiento que una trayectoria puede sufrir en cada ciclo del subsistema z .

El mapeo de las regiones de relajamiento simple del sistema $(T+)^6$ es el mismo que el mapeo de las regiones respectivas del sistema $(T-)^6$. En la figura 4.11 se muestra el dominio dividido en las distintas regiones que inducen las diferentes secuencias de relajamiento y sus imágenes correspondientes. En el caso del sistema $(T-)^6$, debido a que las constantes de acoplamiento son negativas, el mapeo será una contracción, por tanto, al igual que en el sistema $(T-, T-)$ del capítulo anterior, se espera que llegue a la sincronización asintóticamente.

A continuación se describirá cualitativamente el comportamiento de este sistema utilizando su espacio de bifurcaciones. Al igual que el caso anterior, se presentarán cortes de dos dimensiones.

La figura 4.12 es un corte del plano A_1 vs A_2 cuando todos los parámetros de acoplamiento α valen -0.01 . Esta figura muestra la convergencia de las lenguas de Arnold de distinta periodicidad a un número racional; esto es similar a lo que se observó en el sistema $(T+)^6$.

En la figura 4.13 se muestra el corte por el plano A_1 vs. α_{13} (con $A_2 = 1/2$, $\alpha_{ij} = -0.05$) y se puede apreciar con claridad la dirección de crecimiento de las

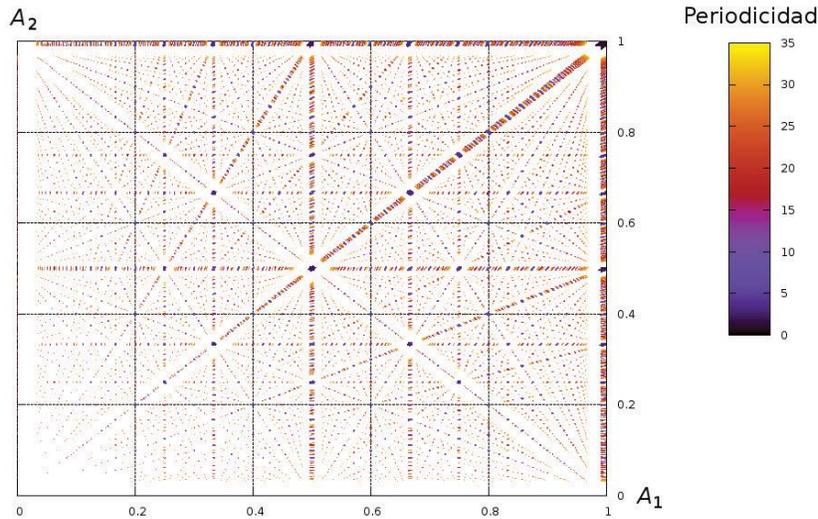


Figura 4.12: Corte del espacio de bifurcaciones en el plano A_1 - A_2 con parámetros de acoplamiento $\alpha_{ij} = -0.01$.

lenguas de Arnold. Otro corte donde se aprecia esto es el dado por los parámetros:

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} \\ \alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{31} = 0 \end{cases}, \quad (4.19)$$

(ver figura 4.14). El acoplamiento que se muestra en este corte corresponde a la topología de acoplamiento mostrada como el caso 4:3 y en la figura se destaca la presencia de intersecciones entre dos o más lenguas. Esto implica la existencia de multiestabilidad en los sistemas correspondientes a valores de los parámetro en las intersecciones. Para estos sistemas se presentan dos o más periodicidades y en función de las condiciones iniciales la trayectoria tenderá asintóticamente a una u otra periodicidad.

Por último se muestra, en la figura 4.15, el corte dado por

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = -0.05 \\ \alpha_{13} = \alpha_{31} \\ \alpha_{23} = \alpha_{32} \end{cases}, \quad (4.20)$$

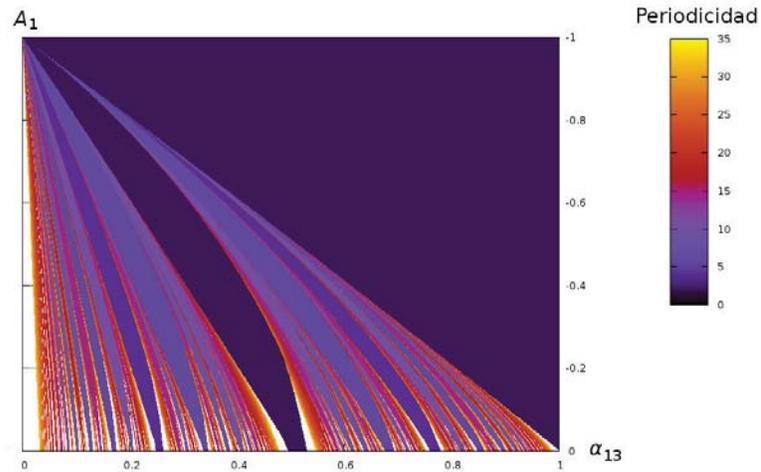


Figura 4.13: Corte del espacio de bifurcación para (A_1, α_{13}) con $A_2 = 1/2$ y $\alpha_{ij} = -0.05$.

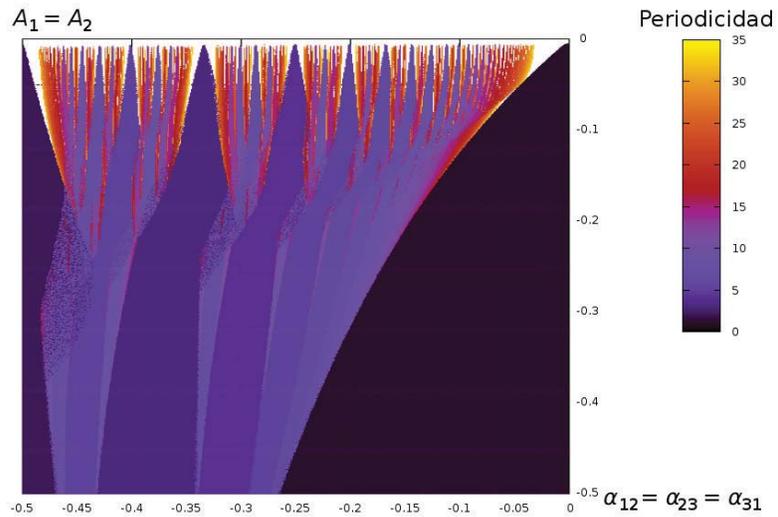


Figura 4.14: Corte del espacio de bifurcación, nótese cómo crecen las lenguas de Arnold.

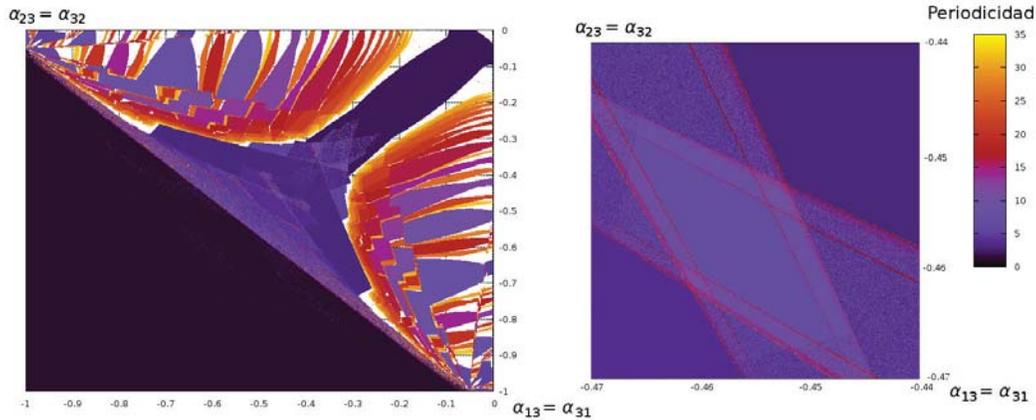


Figura 4.15: Corte del espacio de bifurcaciones en donde se muestra el traslape de las lenguas de Arnold (izquierda) y un acercamiento (derecha).

que corresponde al caso en que hay acoplamiento de todos los osciladores. En un acercamiento (ver figura 4.15 derecha) se puede apreciar el traslape de varias de las lenguas lo que indica multiestabilidad. Tómese, por ejemplo, el caso en que los parámetros de acoplamiento son $\alpha_{13} = -0.306$ y $\alpha_{23} = -0.311$; en una vecindad de estos valores se encuentran tres tonos distintos, lo que señala la intersección de tres lenguas en esta región: las de periodo 2, 9 y 16, es decir, se observa triestabilidad. Las cuencas de atracción, es decir, los puntos del dominio que llevan a cada uno de los tres comportamientos se muestran en la figura 4.16.

Se puede concluir que, cuando los parámetros cumplen con ecs. 4.11 y 4.12, el sistema $(T-)^6$ alcanza la sincronización salvo para un conjunto de medida cero de sus condiciones iniciales. Esta siempre se dá fuera de fase, ya que el origen del espacio fase es inaccesible después del primer relajamiento de z . Es sumamente relevante destacar la presencia de multiestabilidad para este caso de acoplamiento, pues forma estructuras en el espacio fase.

Naturalmente se espera que la riqueza aumente para sistemas más extensos en cuanto al número de elementos pues conforme se incluyen más osciladores en los sistemas las topologías de acoplamiento, los parámetros, entre otros, incrementa a su vez.

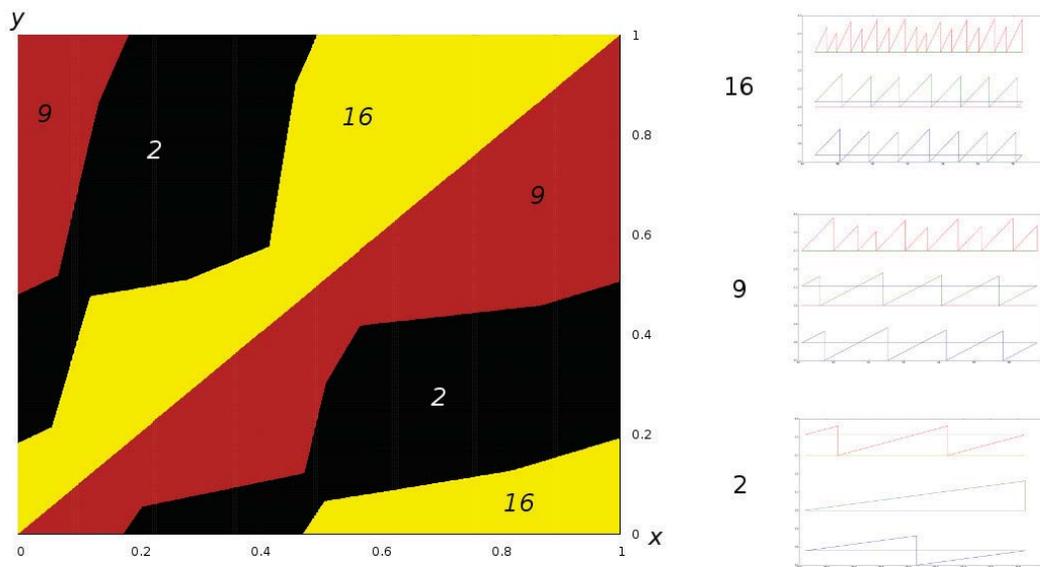


Figura 4.16: Cuencas de atracción en el dominio del mapeo de Poincaré (*izquierda*) con los parámetros siguientes: $A_1 = A_2 = 1/2$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = -0.05$, $\alpha_{13} = \alpha_{31} = -0.306$ y $\alpha_{23} = \alpha_{32} = -0.311$. La serie de tiempo de los osciladores durante un período del sistema se muestra a la derecha.

Conclusiones Generales

En este trabajo se mostró esencialmente cómo, mediante un sistema muy simple se puede analizar el comportamiento de sistemas con alta complejidad.

Después de los capítulos introductorios, en el capítulo 2, bajo el contexto de las neurociencias, se vio que a cualquier punto en la cuenca de atracción de un ciclo límite se le puede asociar una fase de oscilación. La evolución temporal de ésta es un oscilador de integración y disparo. En el momento de introducir forzamiento o acoplamiento al sistema, se vio también que se puede tratar como un sistema de OIDs en los que el forzamiento o acoplamiento se presenta por medio de variaciones en el umbral de los osciladores. Es decir, se tiene un modelo muy sencillo de oscilaciones que es muy cercano a muchos sistemas naturales y que nos permite observar fenómenos muy complejos. Esto nos indica que la generalización a un número grande de osciladores puede resultar interesante y sobre todo permite explorar o emular un sinnúmero de fenómenos.

En el caso de tres osciladores se mostró que la riqueza crece enormemente en contraste con el sistema de dos osciladores acoplados, entre esto cabe mencionar que se encontraron nuevas topologías en el acoplamiento. Además, es muy importante recalcar el hecho de que con tres osciladores acoplados y, específicamente en el sistema $(T-)^6$, se encontró multiestabilidad. Conceptualmente esto introduce cambios significativos, por ejemplo, en el espacio fase los atractores de los puntos periódicos conviven. Esto implica que pequeñas perturbaciones no inducen cambios significativos en el comportamiento del sistema, sin embargo, perturbaciones de mayor magnitud pueden llevar al sistema a distintas periodicidades (lo que se conoce como histéresis).

En este trabajo, se desarrolló una nueva técnica para la construcción de los mapeos de Poincaré para un sistemas de N osciladores. El mapeo se construye de la siguiente manera:

1. Se determina el plano de corte en el espacio fase del sistema, puede ser la base de algún oscilador, como se ha hecho hasta ahora, o bien, se puede generalizar a cualquier otra superficie. Este plano será el dominio y la imagen

del mapeo.

2. Se determinan todas las posibles secuencias de relajamiento que una trayectoria puede tener tomando como punto de partida algún punto en el plano de corte. Esto divide al dominio en varias regiones.
3. La imágen de cada una de las regiones se consigue al seguir la trayectoria en el espacio fase desde que parte del plano de corte hasta que regresa.

El mapeo de Poincaré puede llevar a simplificaciones sustanciales en el estudio sistemas compuestos de varios osciladores, esto se dá puesto que se puede desacoplar un sistema complejo en mapeos discretos.

El acoplamiento lineal ha sido una muy buena aproximación para los fines de este trabajo. Sin embargo, para un estudio más detallado, posiblemente se deben considerar acoplamientos que modelen con mayor precisión a los sistemas en cuestión.

Por otro lado, en el tratamiento de un número muy grande osciladores acoplados posiblemente habrá que utilizar técnicas que no son la consecución directa de este análisis puesto que las dificultades algebraicas para la solución exacta son muy grandes y el conocimiento del estado de cada subsistema puede ser poco significativo. Esto invita a desarrollar nuevos métodos y técnicas para el tratamiento de estos sistemas, entre ellos puede ser el análisis estadístico.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Parámetros del Mapeo I.

Los valores de las constantes a , b y c en términos de los parámetros del sistema $(T+, T+)$ están dados de la siguiente manera si $1 + \alpha_2 < m < 1/\alpha_1$.

El valor c se obtiene al intersectar la recta de pendiente m que parte del origen con el umbral de y , es decir la recta $y = 1 + \alpha_2 x$, por lo tanto resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = mc, \\ y = 1 + \alpha_2 c, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

para c . Entonces,

$$c = \frac{1}{m - \alpha_2}. \quad (\text{A.2})$$

a se obtiene de la recta $y = m(x - a)$, que es la trayectoria deseada, cuando $x = 1$ y $y = 1 + \alpha_2$. Entonces se resuelve el sistema

$$\begin{cases} y = m(1 - a), \\ y = 1 + \alpha_2, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

para a . Por lo tanto,

$$a = 1 - \frac{1 + \alpha_2}{m}. \quad (\text{A.4})$$

Para b el procedimiento es similar. Al partir de la recta $y = m(x - b)$ y se busca el valor de b vía el cumplimiento de las condiciones: $y = 1$ y $x = 1 + \alpha_1$. Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = m(x - b), \\ x = 1 + \alpha_1, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

para obtener

$$b = 1 + \alpha_1 - \frac{1}{m}. \quad (\text{A.6})$$

Existe manera de recuperar las constantes m , α_1 y α_2 a partir de a , b y c .

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{1+\alpha_2}{m} & m &= \frac{1-c}{ac} \\ b &= 1 + \alpha_1 - \frac{1}{m} & \Leftrightarrow \alpha_1 &= b + \frac{c(1+a)-1}{1-c} \\ c &= \frac{1}{m-\alpha_2} & \alpha_2 &= \frac{1-a-c}{ac} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.2. Parámetros del Mapeo II.

La constante a del mapeo II es el valor mínimo que puede tener el oscilador x cuando y se encuentra en la base para que la trayectoria no caiga en la esquina de relajamiento doble. El valor de éste parámetro se puede obtener al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = m(x - a), \\ x = 1 + \alpha_1. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

esto es,

$$a = 1 + \alpha_1 - \frac{1}{m}. \quad (\text{A.9})$$

La constante b es el valor mínimo de x , si $y = 0$, para el cual se presenta doble relajamiento. El valor de esta constante se obtiene al observar la trayectoria que llega al punto $x = 1$, $y = 1 + \alpha_2$. El estado posterior a la relajación de x que lleva a este punto en el espacio fase es $x = 0$, $y = 1 + \alpha_2 - m$, esto implica que el estado anterior a dicha relajación es $x = 1 + \alpha_1(1 + \alpha_2 - m)$, $y = 1 + \alpha_2 - m$. Finalmente, el valor del parámetro b se puede obtener al resolver la ecuación

$$y = m(x - b). \quad (\text{A.10})$$

Lo que lleva a que

$$b = \alpha_1(1 + \alpha_2 - m) - \frac{1 + \alpha_2 - 2m}{m}. \quad (\text{A.11})$$

A.3. Parámetros del Mapeo III.

El valor del parámetro a se puede obtener del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = ma + Y_0, \\ y = 1 - \alpha_2 a. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Este sistema de ecuaciones se refiere a la intersección de una recta con pendiente m que parte de $(0, Y_0)$ y llega al umbral de y .

$$a = \frac{1 - Y_0}{m + \alpha_2}, \quad (\text{A.13})$$

y se puede obtener también a' a partir de a sustituyendo Y_0 y transformando con ec. 3.27.

$$a' = \frac{1 - \alpha_2}{m(1 - \alpha_1)(1 + \alpha_1 m)}. \quad (\text{A.14})$$

El valor de b se obtiene al intersectar la recta que parte de $(x_0, 0)$ y llega al umbral de y , entonces se resuelve el sistema de ecuaciones para b planteado a continuación.

$$\begin{cases} y = m(b - X_0), \\ y = 1 - \alpha_2 b, \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

donde b adquiere la forma

$$b = \frac{1 + mX_0}{m + \alpha_2}, \quad (\text{A.16})$$

sustituyendo el valor de X_0 y transformando se tiene que

$$b' = \frac{\alpha_2(1 - \alpha_1 m) - \alpha_2^2 + m}{m(1 - \alpha_1)(\alpha_2 + m)}. \quad (\text{A.17})$$

El valor de c se obtiene de la recta que llega a la intersección de los umbrales, $Y_1 = m(X_1 - c)$. Entonces

$$c = X_1 - \frac{Y_1}{m}, \quad (\text{A.18})$$

y la primada

$$c' = \frac{\alpha_2(1 - \alpha_2 - m) + m(1 + \alpha_1 m - m)}{m(1 - \alpha_1)^2}. \quad (\text{A.19})$$

A.4. Parámetros del Mapeo IV.

El valor del parámetro a está dado por el valor del oscilador x en el momento de la relajación de y si parte del punto $(X_0, 0)$. Por las condiciones del sistema que generan este mapeo, la trayectoria primero tiene un relajamiento por el subsistema x para concluir en el umbral de y . Por lo tanto, el estado del sistema en el momento

en que la trayectoria llega al umbral de x está dado por el sistema de ecuaciones siguiente,

$$\begin{cases} y = m(x - X_0), \\ x = 1 - \alpha_1 y. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Es decir,

$$x = \frac{1 + \alpha_1 m X_0}{1 + \alpha_1 m}, \quad y = \frac{m(1 - X_0)}{1 + \alpha_1 m}. \quad (\text{A.21})$$

Después de este relajamiento, $x = 0$ y y continúa con su valor. Después de esto, la trayectoria continúa e intersecta finalmente el umbral de y . El estado del sistema en este momento está dado por el valor de $x = a$ y y en sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} y = m(a + \frac{1 - X_0}{1 + \alpha_1 m}), \\ y = 1 - \alpha_2 a. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

La solución del sistema es:

$$a = \frac{1 + m(\alpha_1 + X_0 - 1)}{(1 + \alpha_1 m)(\alpha_1 + m)}, \quad y = \frac{m(1 + \alpha_1(1 + m - X_0))}{(1 + \alpha_1 m)(\alpha_1 + m)}. \quad (\text{A.23})$$

El valor de a' se obtiene al hacer la transformación del intervalo, haciendo las sustituciones:

$$a' = \frac{m(1 + \alpha_1 m - m) + \alpha_2(1 - m - \alpha_1(1 - \alpha_1)(1 + \alpha_1 m)) - \alpha_1 \alpha_2^2(1 - m(1 - \alpha_1))}{m(1 - \alpha_1)(1 + \alpha_1 m)(\alpha_1 + m)}. \quad (\text{A.24})$$

El valor de b está dado por el estado del oscilador x en el momento de la relajación de y si la trayectoria comienza en el punto $(X_1, 0)$. Por analogía al caso anterior, la primera relajación la presenta el oscilador x dejando al sistema en el punto $(0, Y_0)$ del espacio fase. Después de esto, la trayectoria llega finalmente al umbral de y con $x = b$. El estado del sistema está dado por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = mb + Y_0, \\ y = 1 - \alpha_2 b. \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Por lo tanto, resolviendo para b se obtiene,

$$b = \frac{1 - Y_0}{m + \alpha_2}. \quad (\text{A.26})$$

Después de hacer la transformación del intervalo,

$$b' = \frac{1 - \alpha_2}{m(1 - \alpha_1)(1 + \alpha_1 m)}. \quad (\text{A.27})$$

A.5. Secuencia de relajamientos del sistema $(T+)^6$.

Para la trayectoria en el espacio fase del sistema $(T+)^6$ que comienza en la base de z , hay tres posibles destinos, es decir, que la trayectoria llegue al umbral de x , de y o de z . Esto producirá los relajamientos correspondientes que serán simples o múltiples.

Si la trayectoria llega al umbral de z , posteriormente continuará desde algún punto del plano de corte. En cambio, la trayectoria puede sufrir cualquiera de los otros dos relajamientos, ya sea en x o en y . A su vez, estos pueden ser simples o múltiples y es necesario, para los fines de construir el mapeo, conocer todos los relajamientos de la trayectoria hasta regresar a la base del subsistema z .

En la tabla A.1 se muestran todos los posibles relajamientos que el sistema $(T+)^6$ puede sufrir desde que la trayectoria parte del plano XY hasta que regresa con la restricción que se expresa en las inecuaciones 4.11 a 4.14.

Estos son los 21 posibles destinos que una trayectoria puede transitar hasta llegar a la base de z . Las condiciones iniciales que propician las distintas secuencias por las que una trayectoria atraviesa distinguen regiones en el dominio de el mapeo.

A.6. El mapeo del sistema $(T+)^6$.

El el dominio del mapeo del sistema $(T+)^6$ con las condiciones dadas en las inecuaciones 4.11 a 4.14 está dividido en dieciséis regiones (figura A.1). Cada una de las regiones está delimitadas por un conjunto de rectas. Estas rectas se mostrarán en forma de ecuaciones, ya sea como

$$y = m_y x + b_y, \quad (\text{A.28})$$

o bien,

$$x = m_x y + b_x. \quad (\text{A.29})$$

Dicha región es mapeada con una transformación lineal de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

La región **1** se encuentra delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ x &= m_{ax}y + b_{ax}, \\ y &= m_{ay}x + b_{ay}; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\text{Desde la base de } z \text{ al umbral de } x \\
\hline\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
\begin{array}{cc}
y & z \\
\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
z & z \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc}
y & z \\
\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
z & z \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{Desde la base de } z \text{ al umbral de } y \\
\hline\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
\begin{array}{cc}
x & z \\
\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
z & z \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc}
x & z \\
\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
z & z \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{Desde la base de } z \text{ al umbral de } z \\
\hline\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
\begin{array}{cc}
x & y \\
\hline
\begin{array}{cc}
S & M \\
\hline
y & x \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Cuadro A.1: Las posibles secuencias de relajamientos para el sistema $(T+)^6$. S y M denotan relajamiento simple y múltiple respectivamente.

donde

$$\begin{aligned}
m_{ax} &= \frac{\alpha_{12} - A_1(\alpha_{12}\alpha_{31} + \alpha_{32})}{1 - A_2(\alpha_{12}\alpha_{31} + \alpha_{32})}, \\
b_{ax} &= \frac{1 - A_1(1 + \alpha_{31}) - A_2(\alpha_{32} - \alpha_{12})}{1 - A_2(\alpha_{12}\alpha_{31} + \alpha_{32})}, \\
m_{ay} &= \frac{\alpha_{21} - A_2(\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32})}{1 - A_1(\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32})}, \\
b_{ay} &= \frac{1 - A_2(1 + \alpha_{32}) - A_1(\alpha_{31} - \alpha_{21})}{1 - A_1(\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32})};
\end{aligned}$$

y los parámetros de la transformación lineal son:

$$\begin{aligned}
\mu_{11} &= \frac{(A_y\alpha_{32} - 1)}{(A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32} - 1)}, \\
\mu_{12} &= \frac{(-A_x\alpha_{32})}{(A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32} - 1)}, \\
\mu_{21} &= \frac{(-A_y\alpha_{31})}{(A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32} - 1)}, \\
\mu_{22} &= \frac{(A_x\alpha_{31} - 1)}{(A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32} - 1)}, \\
\eta_1 &= \frac{-A_x}{(A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32} - 1)},
\end{aligned}$$

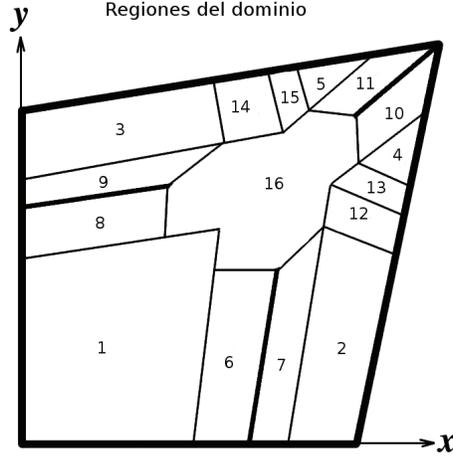


Figura A.1: División del dominio en las dieciséis regiones.

$$\eta_2 = \frac{-A_y}{(A_x \alpha_{31} + A_y \alpha_{32} - 1)}.$$

La región **2** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \alpha_{12}, \\ y &= 0, \\ x &= m_{bx}y + b_{bx}, \\ y &= m'_{ay}x + b'_{ay}; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} m_{bx} &= \frac{\alpha_{12} - A_1 \alpha_{32} + \alpha_{13} \alpha_{32}}{1 - A_2 \alpha_{32}}, \\ b_{bx} &= \frac{1 - A_1 + \alpha_{13} + A_2(\alpha_{12} - \alpha_{32})}{1 - A_2 \alpha_{32}}, \\ m'_{ax} &= \frac{\xi_{2x} - b_{ax}}{\xi_{2y} - (1 + \alpha_{21} b_{ax})}, \\ b'_{ax} &= \xi_{2x} - m'_{ax} \xi_{2y}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \xi_{2x} &= 1 - A_1(1 + \alpha_{31}), \\ \xi_{2y} &= 1 + \alpha_{21} + (\alpha_{23} - A_2)(1 + \alpha_{31}). \end{aligned}$$

Los parámetros de las transformaciones están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{(A_x(-1 + A_y \alpha_{32}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12} A_y)(-1 + A_x \alpha_{31} + A_y \alpha_{32}))}, \\ \mu_{12} &= \frac{(A_x(\alpha_{12} + (-A_x + \alpha_{13}) \alpha_{32}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12} A_y)(-1 + A_x \alpha_{31} + A_y \alpha_{32}))}, \\ \mu_{21} &= \frac{-(A_x A_y \alpha_{31})}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12} A_y)(-1 + A_x \alpha_{31} + A_y \alpha_{32}))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{22} &= \frac{(\alpha_{13} + \alpha_{12}A_y + A_x^2\alpha_{31} - A_x(1 + \alpha_{13}\alpha_{31}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_1 &= \frac{-(A_x(-1 + A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y + A_y\alpha_{32}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_2 &= \frac{(A_y(\alpha_{13} + \alpha_{12}A_y + A_x(-1 + \alpha_{31})))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}.\end{aligned}$$

La región **3** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned}x &= 0, \\ y &= 1 + \alpha_{21}x, \\ x &= m'_{ax}y + b'_{ax}, \\ y &= m_{by}x + b_{by};\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}m_{by} &= \frac{\alpha_{21} - A_2\alpha_{31} + \alpha_{23}\alpha_{31}}{1 - A_1\alpha_{31}}, \\ b_{by} &= \frac{1 - A_2 + \alpha_{23} + A_1(\alpha_{21} - \alpha_{31})}{1 - A_1\alpha_{31}}, \\ m'_{ay} &= \frac{\xi_{1y} - b_{ay}}{\xi_{1x} - (1 + \alpha_{12}b_{ay})}, \\ b'_{ay} &= \xi_{1y} - m'_{ay}\xi_{1x},\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\xi_{1x} &= 1 + \alpha_{12} + (\alpha_{13} - A_1)(1 + \alpha_{32}), \\ \xi_{1y} &= 1 - A_2(1 + \alpha_{32}).\end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \frac{(A_x\alpha_{21} + \alpha_{23} + A_y^2\alpha_{32} - A_y(1 + \alpha_{23}\alpha_{32}))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{12} &= \frac{-(A_xA_y\alpha_{32})}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{21} &= \frac{(A_y(\alpha_{21} + (-A_y + \alpha_{23})\alpha_{31}))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{22} &= \frac{(A_y - A_xA_y\alpha_{31})}{((-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_1 &= \frac{(A_x(A_x\alpha_{21} + \alpha_{23} + A_y(-1 + \alpha_{32})))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_2 &= \frac{(A_y(1 - A_y + \alpha_{23} + A_x(\alpha_{21} - \alpha_{31})))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}.\end{aligned}$$

La región **4** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned}y &= m_{dy}x + b_{dy}, \\ x &= 1 + \alpha_{12}y, \\ y &= m'_{by}x + b'_{by},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}m_{dy} &= \frac{A_2 - \alpha_{23}}{A_1 - \alpha_{13} - \alpha_{12}\alpha_{23}}, \\ b_{dy} &= \frac{A_1 - \alpha_{13} - A_2 - \alpha_{12}A_2 + \alpha_{23}}{A_1 - \alpha_{13} - \alpha_{12}\alpha_{23}},\end{aligned}$$

$$m'_{by} = \frac{\zeta_{1y} - b_{by}}{\zeta_{1x} - (1 + \alpha_{12} b_{by})},$$

$$b'_{by} = \zeta_{1y} - m'_{by} \zeta_{1x}.$$

con

$$\zeta_{1x} = \alpha_{12}(1 + \alpha_{23}) + \alpha_{13} + 1 - A_1,$$

$$\zeta_{1y} = 1 + \alpha_{23} - A_2.$$

Los parámetros de la transformación son:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{-(A_x(A_x\alpha_{21} + \alpha_{23} + A_y^2\alpha_{32} - A_y(1 + \alpha_{23}\alpha_{32})))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{12} &= \frac{(A_x((A_x - \alpha_{13})A_y\alpha_{32} + \alpha_{12}(A_x\alpha_{21} + \alpha_{23} - A_y(1 + \alpha_{23}\alpha_{32}))))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{21} &= \frac{-(A_xA_y(\alpha_{21} + (-A_y + \alpha_{23})\alpha_{31}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{22} &= \frac{-(A_y(\alpha_{13} + \alpha_{12}A_y + A_x^2\alpha_{31} - A_x(1 + \alpha_{13}\alpha_{31} + \alpha_{12}(\alpha_{21} + \alpha_{23}\alpha_{31}))))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_1 &= \frac{A_x(-(-1 + A_x - \alpha_{13})(A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}) + A_y^2(\alpha_{12}(-1 + \alpha_{32}) + \alpha_{32}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))} \\ &+ \frac{A_y(-1 + A_x - \alpha_{13} + A_x\alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{23} - A_x\alpha_{32} + \alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{23}\alpha_{32})}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_2 &= \frac{-(A_y((\alpha_{13} + \alpha_{12}A_y)(-1 + A_y - \alpha_{23}) + A_x^2(\alpha_{21} - \alpha_{31})))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))} \\ &- \frac{A_x(-1 + \alpha_{21} + \alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{31} + \alpha_{23}\alpha_{31} + A_y(1 + \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{31}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}. \end{aligned}$$

La región 5 está delimitada por las rectas:

$$x = m_{dx}y + b_{dx},$$

$$y = 1 + \alpha_{21}x,$$

$$x = m'_{bx}y + b'_{bx},$$

donde

$$m_{dx} = \frac{\alpha_{13} - A_1}{\alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{23} - A_2},$$

$$b_{dx} = \frac{A_1(1 + \alpha_{21}) - \alpha_{13} - A_2 + \alpha_{23}}{\alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{23} - A_2},$$

$$m'_{bx} = \frac{\zeta_{2x} - b_{bx}}{\zeta_{2y} - (1 + \alpha_{21}b_{bx})},$$

$$b'_{bx} = \zeta_{2x} - m'_{bx}\zeta_{2y},$$

con

$$\zeta_{2x} = 1 + \alpha_{13} - A_1,$$

$$\zeta_{2y} = \alpha_{23} + (1 + \alpha_{13})\alpha_{21} + 1 - A_2.$$

Los parámetros de las transformaciones están dados por:

$$\mu_{11} = \frac{A_x(A_x\alpha_{21} + \alpha_{23} + A_y^2\alpha_{32} - A_y(1 + \alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{32}))}{(A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(1 - A_x\alpha_{31} - A_y\alpha_{32})},$$

$$\mu_{12} = \frac{A_xA_y(\alpha_{12} + (-A_x + \alpha_{13})\alpha_{32})}{(A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(1 - A_x\alpha_{31} - A_y\alpha_{32})},$$

$$\mu_{21} = \frac{(A_y((\alpha_{13} + \alpha_{12}A_y)\alpha_{21} - A_x(\alpha_{21} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{31} + (-A_y + \alpha_{23})\alpha_{31})))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))},$$

$$\mu_{22} = \frac{-(A_y(\alpha_{13} + \alpha_{12}A_y + A_x^2\alpha_{31} - A_x(1 + \alpha_{13}\alpha_{31})))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))},$$

$$\eta_1 = \frac{-A_x((-1+A_x-\alpha_{13})(A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})+A_y^2(\alpha_{12}-\alpha_{32}))}{((A_x-\alpha_{13}-\alpha_{12}A_y)(-A_y+A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})(-1+A_x\alpha_{31}+A_y\alpha_{32}))} - \frac{A_y(-1+\alpha_{12}-\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{23}\alpha_{32}+A_x(1+\alpha_{12}\alpha_{21}-\alpha_{32}-\alpha_{21}\alpha_{32}))}{((A_x-\alpha_{13}-\alpha_{12}A_y)(-A_y+A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})(-1+A_x\alpha_{31}+A_y\alpha_{32}))},$$

$$\eta_2 = \frac{A_y(-(\alpha_{13}+\alpha_{12}A_y)(-1+A_y-\alpha_{23})+A_x^2(\alpha_{21}(-1+\alpha_{31})+\alpha_{31}))}{((A_x-\alpha_{13}-\alpha_{12}A_y)(-A_y+A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})(-1+A_x\alpha_{31}+A_y\alpha_{32}))} + \frac{A_x(-1+A_y+\alpha_{13}\alpha_{21}+\alpha_{12}A_y\alpha_{21}-\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{31}-A_y\alpha_{31}+\alpha_{23}\alpha_{31})}{((A_x-\alpha_{13}-\alpha_{12}A_y)(-A_y+A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})(-1+A_x\alpha_{31}+A_y\alpha_{32}))}.$$

La región **6** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= m_{ax}y + b_{ax}, \\ y &= 0, \\ x &= m_{ex}y + b_{ex}, \\ y &= 1 + \frac{A_2(1 + \alpha_{32} + \alpha_{31}x)}{A_1\alpha_{31} - 1}, \end{aligned}$$

donde

$$m_{ex} = \frac{\alpha_{12}(A_1\alpha_{31}-1)+(A_1-\alpha_{13})\alpha_{32}}{\alpha_{31}(\alpha_{13}+A_2\alpha_{12})+A_2\alpha_{32}-1},$$

$$b_{ex} = \frac{A_1(1+\alpha_{31})+A_2(\alpha_{32}-\alpha_{12})-\alpha_{13}-1}{\alpha_{31}(\alpha_{13}+A_2\alpha_{12})+A_2\alpha_{32}-1}.$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= 0, \\ \mu_{12} &= 0, \\ \mu_{21} &= \frac{1-A_y\alpha_{31}}{1-A_x\alpha_{31}-A_y\alpha_{32}}, \\ \mu_{22} &= \frac{1-A_x\alpha_{31}}{1-A_x\alpha_{31}-A_y\alpha_{32}}, \\ \eta_1 &= 0, \\ \eta_2 &= \frac{A_y}{1-A_x\alpha_{31}-A_y\alpha_{32}}. \end{aligned}$$

La región **7** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= m_{ex}y + b_{ex}, \\ y &= 0, \\ x &= m_{bx}y + b_{bx}, \\ y &= \frac{A_2(1 + \alpha_{21} - x) - A_1 + \alpha_{13}}{\alpha_{13} - A_1}. \end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= 0, \\ \mu_{12} &= 0, \\ \mu_{21} &= \frac{A_y}{(-A_x+\alpha_{13}+\alpha_{12}A_y)}, \\ \mu_{22} &= \frac{(A_x-\alpha_{13})}{(A_x-\alpha_{13}-\alpha_{12}A_y)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 0, \\ \eta_2 &= \frac{A_y}{(A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)}.\end{aligned}$$

La región **8** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned}x &= 0, \\ y &= m_{ey}x + b_{ey}, \\ x &= 1 + \frac{A_1(1 + \alpha_{31} + \alpha_{32}y)}{A_2\alpha_{32} - 1}, \\ y &= m_{ay}x + b_{ay},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}m_{ey} &= \frac{\alpha_{21}(A_2\alpha_{32}-1)+(A_2-\alpha_{23})\alpha_{31}}{\alpha_{32}(\alpha_{23}+A_1\alpha_{21})+A_1\alpha_{31}-1}, \\ b_{ey} &= \frac{A_2(1+\alpha_{32})+A_1(\alpha_{31}-\alpha_{21})-\alpha_{23}-1}{\alpha_{32}(\alpha_{23}+A_1\alpha_{21})+A_1\alpha_{31}-1}.\end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \frac{(A_y\alpha_{32}-1)}{(A_x\alpha_{31}+A_y\alpha_{32}-1)}, \\ \mu_{12} &= \frac{(-A_x\alpha_{32})}{(A_x\alpha_{31}+A_y\alpha_{32}-1)}, \\ \mu_{21} &= 0, \\ \mu_{22} &= 0, \\ \eta_1 &= \frac{-A_x}{(A_x\alpha_{31}+A_y\alpha_{32}-1)}, \\ \eta_2 &= 0.\end{aligned}$$

La región **9** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned}x &= 0, \\ y &= m_{by}x + b_{by}, \\ x &= 1 + \frac{A_1(1 + \alpha_{31} + \alpha_{32}y)}{A_2\alpha_{32} - 1}, \\ y &= m_{ey}x + b_{ey}.\end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \frac{(-A_y+\alpha_{23})}{(-A_y+A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})}, \\ \mu_{12} &= \frac{A_x}{(-A_y+A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})}, \\ \mu_{21} &= 0, \\ \mu_{22} &= 0, \\ \eta_1 &= \frac{-A_x}{(-A_y+A_x\alpha_{21}+\alpha_{23})}, \\ \eta_2 &= 0.\end{aligned}$$

La región **10** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= 1 - A_1 + \alpha_{13} + \alpha_{12}(A_2 + y), \\ y &= m_{fy}x + b_{fy}, \\ x &= 1 + \alpha_{12}y, \\ y &= m_{dy}x + b_{dy}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} m_{fy} &= \frac{\alpha_{13}\alpha_{21} + A_2(\alpha_{12}\alpha_{21} - 1) + \alpha_{23}}{\alpha_{13} + A_1(\alpha_{12}\alpha_{21} - 1) + \alpha_{12}\alpha_{23}}, \\ b_{fy} &= \frac{\alpha_{13} + A_2(1 + \alpha_{12}) - A_1(1 + \alpha_{21}) - \alpha_{23}}{\alpha_{13} + A_1(\alpha_{12}\alpha_{21} - 1) + \alpha_{12}\alpha_{23}}. \end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{-A_x}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{12} &= \frac{(A_x\alpha_{12})}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{21} &= \frac{-A_y}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{22} &= \frac{(\alpha_{12}A_y)}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_1 &= \frac{(A_x(1 - A_x + \alpha_{13} + \alpha_{12}A_y))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_2 &= \frac{(A_y(1 - A_x + \alpha_{13} + \alpha_{12}A_y))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}. \end{aligned}$$

La región **11** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= m_{dx}y + b_{dx}, \\ y &= 1 + \alpha_{12}x, \\ y &= m_{fy}x + b_{fy}, \\ y &= 1 - A_2 + \alpha_{23} + \alpha_{21}(A_1 + x). \end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{(A_x\alpha_{21})}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{12} &= \frac{A_x}{((-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{21} &= \frac{(A_y\alpha_{21})}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{22} &= \frac{-A_y}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_1 &= \frac{(A_x(1 - A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_2 &= \frac{(A_y(1 - A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}. \end{aligned}$$

La región **12** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\chi_{1x} - \xi_{1x}}{\chi_{1y} - \xi_{1y}}(y - \chi_{1y}) + \chi_{1x}, \\ y &= m'_{ey}x + b'_{ey}, \\ x &= 1 + \alpha_{12}y, \\ y &= m'_{by}x + b'_{by}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} m'_{ey} &= \frac{\chi_{1y} - b_{ey}}{\chi_{1x} - (1 + \alpha_{12}b_{ey})}, \\ b'_{ey} &= \chi_{1y} - m_{ey}\chi_{1x}, \\ \chi_{1x} &= \frac{\alpha_{32}(\alpha_{13} - \alpha_{23}) + \alpha_{13} + \alpha_{12}(1 + \alpha_{23}) + 1 - A_1(1 + \alpha_{32})}{1 - \alpha_{23}\alpha_{32}}, \\ \chi_{1y} &= \frac{1 + \alpha_{23} - A_2(1 + \alpha_{32})}{1 - \alpha_{23}\alpha_{32}}. \end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{(A_x(-1 + A_y\alpha_{32}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{12} &= \frac{(A_x(\alpha_{12} + (-A_x + \alpha_{13})\alpha_{32}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{21} &= 0, \\ \mu_{22} &= 0, \\ \eta_1 &= \frac{-(A_x(-1 + A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y + A_y\alpha_{32}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

La región **13** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\chi_{1x} - \zeta_{1x}}{\chi_{1y} - \zeta_{1y}}(y - \chi_{1y}) + \chi_{1x}, \\ y &= m'_{by}x + b'_{by}, \\ x &= 1 + \alpha_{12}y, \\ y &= m'_{ey}x + b'_{ey}. \end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{(A_x(-A_y + \alpha_{23}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))}, \\ \mu_{12} &= \frac{(A_x(A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}\alpha_{23}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))}, \\ \mu_{21} &= 0, \\ \mu_{22} &= 0, \\ \eta_1 &= \frac{(A_x(-A_x + \alpha_{13} + A_y + \alpha_{12}A_y - \alpha_{23}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))}, \\ \eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

La región **14** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= m'_{ax}y + b'_{ax}, \\ y &= 1 + \alpha_{21}x, \\ x &= m'_{ex}y + b'_{ex}, \\ y &= \frac{\chi_{2y} - \xi_{2y}}{\chi_{2x} - \xi_{2x}}(x - \chi_{2x}) + \chi_{2y}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} m'_{ex} &= \frac{\chi_{2x} - b_{ex}}{\chi_{2y} - (1 + \alpha_{21}b_{ex})}, \\ b'_{ex} &= \chi_{2x} - m_{ex}\chi_{2y}, \\ \chi_{2x} &= \frac{1 + \alpha_{13} - A_1(1 + \alpha_{31})}{1 - \alpha_{13}\alpha_{31}}, \\ \chi_{2y} &= \frac{\alpha_{31}(\alpha_{23} - \alpha_{13}) + \alpha_{23} + \alpha_{21}(1 + \alpha_{13}) + 1 - A_2(1 + \alpha_{31})}{1 - \alpha_{13}\alpha_{31}}. \end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= 0, \\ \mu_{12} &= 0, \\ \mu_{21} &= \frac{(A_y(\alpha_{21} + (-A_y + \alpha_{23})\alpha_{31}))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \mu_{22} &= \frac{(A_y - A_xA_y\alpha_{31})}{((-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}, \\ \eta_1 &= 0, \\ \eta_2 &= \frac{(A_y(1 - A_y + \alpha_{23} + A_x(\alpha_{21} - \alpha_{31})))}{((A_y - A_x\alpha_{21} - \alpha_{23})(-1 + A_x\alpha_{31} + A_y\alpha_{32}))}. \end{aligned}$$

La región **15** está delimitada por las rectas:

$$\begin{aligned} x &= m'_{ex}y + b'_{ex}, \\ y &= 1 + \alpha_{21}x, \\ x &= m'_{bx}y + b'_{bx}, \\ y &= \frac{\chi_{2y} - \zeta_{2y}}{\chi_{2x} - \zeta_{2x}}(x - \chi_{2x}) + \chi_{2y}. \end{aligned}$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= 0 \\ \mu_{12} &= 0 \\ \mu_{21} &= \frac{(A_y(A_y - \alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))} \\ \mu_{22} &= \frac{((-A_x + \alpha_{13})A_y)}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))} \\ \eta_1 &= 0 \\ \eta_2 &= \frac{(A_y(A_x - \alpha_{13} - A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))}{((A_x - \alpha_{13} - \alpha_{12}A_y)(-A_y + A_x\alpha_{21} + \alpha_{23}))} \end{aligned}$$

La región **16** es lo que resta del dominio, es decir,

$$R_{16} = D - \cup_{i=1}^{16} R_i. \quad (\text{A.31})$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= 0, \\ \mu_{12} &= 0, \\ \mu_{21} &= 0, \\ \mu_{22} &= 0, \\ \eta_1 &= 0, \\ \eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

A.7. Códigos de los programas de computadora.

Los códigos de programación empleados para la solución numérica de los sistemas fueron elaborados en en **Fortran 90**. El siguiente programa resuelve los mapeos del capítulo 3, específicamente el mapeo del oscilador forzado sinusoidalmente y los mapeos f_I y f_{III} .

```

1  INTEGER, PARAMETER :: N = 1400, M = 16, NI = 10000
2  INTEGER :: i, j, IA, IB
3  REAL (KIND=8) :: A, B, pi, t, eps, DA, DB, y
4  REAL (KIND=8), DIMENSION(0:NI) :: X
5
6  !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
7  !                                                                 !
8  !  Este programa encuentra la periodicidad de                    !
9  !  la orbita de algun mapeo para dos parametros A y B          !
10 !  Posteriormente imprime los datos.                             !
11 !                                                                 !
12 !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
13
14 pi = 3.141592653589793
15 DA = (1.0-0.0)/N
16 DB = DA
17 eps = 1.E-7
18 G = 0.5
19
20 ! Se hace un barrido para el espacio de bifurcaciones
21 ! para los parámetros a y b.
22 DO IB = 1, N-1
23   B = IB*DB
24   DO IA = 1, N-1
25     A = IA*DA
26     IF (A.GT.B) EXIT
27
28     X(0) = 0 + RAND(0) ! Se determina la condicion inicial.
29
30 ! Se itera el mapeo
31   DO I = 0, NI-1
```

```

32
33 ! Oscilador Forzado sinusoidalmente:
34 !     X(I+1) = MODULO(x(I) + A + B*SIN(2*pi*X(I)),1.0)
35
36 !Mapeo I :
37     IF (X(I).LT.A) THEN
38         X(I+1) = (1.0-G)*X(I)/A + G
39     ELSEIF (X(I).LT.B) THEN
40         X(I+1) = 0.0
41     ELSE
42         X(I+1) = G*(X(I)-B)/(1.0-B)
43     END IF
44
45 !Mapeo III :
46 !     IF (X(I).LT.G) THEN
47 !         X(I+1) = (1-B)*X(I)/G + B
48 !     ELSE
49 !         X(I+1) = A*(X(I)-G)/(1-G)
50 !     END IF
51
52     END DO
53
54
55 ! La siguiente serie de comandos es para obtener la
56 ! periodicidad del mapeo.
57     DO j = 1, M
58         IF (ABS(X(NI)-X(NI-j)).lt.eps) THEN
59             !PRINT *, REAL(A), REAL(B), j
60             PRINT *, REAL(B), REAL(A), j
61             !PRINT *, REAL((1.0-G)/(A*G)), REAL((1.0-A-G)/(A*G)), j
62             !PRINT *, REAL((1.0-G)/(A*G)), REAL(B+(G*(1.0+A)-1.0)/(10-G)), j
63             EXIT
64         END IF
65
66     END DO
67 END DO
68 END DO
69 END

```

El siguiente programa resuelve los mapeos del capítulo 4 por cortes del espacio de bifurcación.

```

1
2 IMPLICIT NONE
3 INTEGER, PARAMETER :: N = 1800, NN = 1024, IP = 32
4 REAL (KIND=10), PARAMETER :: eps = 1.E-7
5 INTEGER :: i, j, k, ix, iy, ia, ja
6 REAL (KIND=10) :: dom, dx, x, y, z, x_, y_, x1, y1, z1, rad, t
7 REAL (KIND=10) :: x2, y2, z2, tx, ty, tz, tx1, ty1, tz1, tz2
8 REAL (KIND=10) :: A1, A2, A3
9 REAL (KIND=10) :: a12, a13, a21, a23, a31, a32
10 REAL (KIND=10), DIMENSION(0:N) :: q
11 REAL (KIND=10), DIMENSION(0:NN) :: q_, r_
12 REAL (KIND=4) :: u, v
13
14 !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
15 !
16 ! Este programa encuentra la periodicidad de
17 ! la orbita de un mapeo para ciertos valores de los

```

```

18 ! parametros en un corte del espacio de bifurcacion. !
19 ! Nota: No toma el mapeo como una funcion como en el !
20 ! programa anterior sino que sigue la trayectoria. !
21 ! !
22 !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
23
24 ! Se define el tamanyo del intervalo en el que se van a correr los paramtros
25 ! a graficar.
26 dom = 1.0
27 dx = dom/N
28
29 ! Se declaran los valores de las pendientes de los osciladores, el 1, 2, 3
30 ! se refieren a x, y, z, respectivamente.
31 A1 = 0.5
32 A2 = 0.5
33 A3 = 1.0
34
35 ! Se declaran los parametros de acoplamiento de los osciladores, el segundo
36 ! indice en el elemento de matriz se refiere al acoplamiento que ejerce el
37 ! oscilador sobre el primer indice.
38
39 ! Constantes de acoplamineto de x con y.
40
41 a12 = 0 !Solo cero!
42 a21 = 0.1
43
44 ! Constantes de acoplamineto de y con z.
45
46 a23 = 0.1
47 a32 = 0 !Solo cero!
48
49 ! Constantes de acoplamiento de x con z.
50
51 a31 = 0.0
52 a13 = 0
53
54 ! Se define un arreglo que barre todo el rango definido anteriormente.
55 DO i = 0, N
56 q(i) = i*dx
57 END DO
58
59
60 ! Con este par de bucles se hace un barrido del corte del esapcio de bifurcacion.
61 DO ix = 0, N
62 DO iy = 0, N
63
64 ! A1 = q(ix)
65 ! A2 = A1
66 a31 = 2.0*q(ix)-1.0
67 a12 = 2.0*q(iy)-1.0
68 a32 = a12
69 ! a32 = a12
70 ! a23 = a12
71 ! a31 = a12
72 ! a21 = q(iy) - 0.5
73 ! a32 = a21
74 ! a13 = a21
75 !a31 = q(ix)
76 !a13 = q(iy)

```

```

77      !q_(0) = q(ix)
78      !r_(0) = q(iy)
79
80      IF (A1/A3 .LT. a13) EXIT; IF (A3/A1 .LT. a31) EXIT
81      IF (A2/A3 .LT. a23) EXIT; IF (A3/A2 .LT. a32) EXIT
82      IF (A1/A2 .LT. a12) EXIT; IF (A2/A1 .LT. a21) EXIT
83
84      q_(0) = 0.5
85      r_(0) = 0.5
86
87      ! Itera j veces el mapeo del sistema (T+)6.
88      DO j = 0, NN
89          x = q_(j)
90          y = r_(j)
91          z = 0
92
93      ! Se Determina el tiempo en el que cada oscilador le tomara para llegar a su
94      ! umbral correspondiente.
95      tx = (1.0 - x + a12*y + a13*z)/(A1 - a12*A2 - a13*A3)
96      ty = (1.0 + a21*x - y + a23*z)/(A2 - a21*A1 - a23*A3)
97      tz = (1.0 + a31*x + a32*y - z)/(A3 - a31*A1 - a32*A2)
98
99      ! Se filtran los puntos que caen dentro del dominio.
100     IF ((x .LE. (1.0+a12*y)) .AND. (y .LE. (1.0+a21*x))) THEN
101
102         ! Se comparan los tiempos que tardan los osciladores en llegar a su umbral
103         ! con la intencion de saber que oscilador sera el primero en ser relajado.
104
105         ! Si el tiempo que tarda en llegar x a su umbral es el menor de los tres.
106         IF ((tx .LT. ty) .AND. (tx .LT. tz)) THEN
107             ! Se determina el estado del sistema.
108             x1 = 0
109             y1 = A2*tx + y
110             z1 = A3*tx + z
111             ty1 = (1.0 + a21*x1 - y1 + a23*z1)/(A2 - a21*A1 - a23*A3)
112             tz1 = (1.0 + a31*x1 + a32*y1 - z1)/(A3 - a31*A1 - a32*A2)
113
114             ! Aquí discrimina si el punto para sobre la cara contraria del espacio
115             ! fase o se colapsa a otro eje.
116             ! Verifica que caiga sobre la cara x = 0.
117             IF ((y1.LT.(1.0+a21*x1+a23*z1)).AND.(z1.LT.(1.0+a31*x1+a32*y1))) THEN
118
119
120             ! Discrimina en que cara se relajara despues.
121             ! Si es sobre la cara del umbral de y.
122             IF (ty1 .LT. tz1) THEN
123                 x2 = A1*ty1 + x1
124                 y2 = 0
125                 z2 = A3*ty1 + z1
126
127             ! Si cae dentro de la cara de y = 0.
128             IF (z2.LT.(1.0+a31*x2+a32*y2)) THEN
129                 tz2 = (1.0 + a31*x2 + a32*y2 - z2)/(A3 - a31*A1 - a32*A2)
130                 x_ = A1*tz2 + x2
131                 y_ = A2*tz2 + y2
132                 k = 4
133
134             ! Si no cae dentro de la cara de y = 0.
135             ELSE

```

```

136         x_ = x2
137         y_ = y2
138         k = 13
139     END IF
140
141     ! Si es sobre la cara de z.
142 ELSE
143     x2 = A1*tz1 + x1
144     y2 = A2*tz1 + y1
145     z2 = 0
146
147     ! Si cae dentro del dominio.
148     IF (y2 .LT. (1.0+a21*x2+a23*z2)) THEN
149         x_ = x2
150         y_ = y2
151         k = 2
152
153     ! Si no cae dentro del dominio.
154 ELSE
155         x_ = x2
156         y_ = 0
157         k = 12
158
159     END IF
160
161 END IF
162
163 ! Si no cae en la cara y es relajado otro oscilador.
164 ELSE
165
166     ! Si es por y que no cae en la cara.
167     IF (y1.GE.(1.0+a21*x1+a23*z1)) THEN
168         x2 = x1
169         y2 = 0
170         z2 = z1
171         tz2 = (1.0 + a31*x2 + a32*y2 - z2)/(A3 - a31*A1 - a32*A2)
172         x_ = A1*tz2 + x2
173         y_ = A2*tz2 + y2
174         k = 10
175     ! Si ademas no cae por z.
176     IF (z2.GE.(1.0+a31*x2+a32*y2)) THEN
177         x_ = 0
178         y_ = 0
179         k = 16
180     END IF
181
182     ! Si es por z que no cae en la cara.
183 ELSE
184     x2 = x1
185     y2 = y1
186     z2 = 0
187     x_ = x2
188     y_ = y2
189     k = 7
190     ! Si ademas no cae por y.
191     IF (y2.GE.(1.0+a21*x2+a23*z2)) THEN
192         x_ = 0
193         y_ = 0
194         k = 16

```

```

195         END IF
196     END IF
197
198 END IF
199
200
201     ! Si el tiempo que tarda y para llegar a su umbral es el menor.
202 ELSE IF (ty .LT. tz) THEN
203     ! Se determina el estado del sistema.
204     x1 = A1*ty + x
205     y1 = 0
206     z1 = A3*ty + z
207     tx1 = (1.0 - x1 + a12*y1 + a13*z1)/(A1 - a12*A2 - a13*A3)
208     tz1 = (1.0 + a31*x1 + a32*y1 - z1)/(A3 - a31*A1 - a32*A2)
209
210     ! Aqui discrimina si el punto para sobre la cara contraria del espacio
211     ! fase o se colapsa a otro eje.
212     ! Verifica que caiga sobre la cara y = 0.
213     IF ((x1.LT.(1.0+a12*y1+a13*z1)).AND.(z1.LT.(1.0+a31*x1+a32*y1))) THEN
214
215         ! Discrimina en que cara se relajara despues.
216         ! Si es sobre la cara del umbral de y.
217         IF (tx1 .LT. tz1) THEN
218             x2 = 0
219             y2 = A2*tx1 + y1
220             z2 = A3*tx1 + z1
221             ! Si cabe dentro de la base de x.
222             IF (z2 .LT. (1.0+a31*x2+a32*y2)) THEN
223                 tz2 = (1.0 + a31*x2 + a32*y2 - z2)/(A3 - a31*A1 - a32*A2)
224                 x_ = A1*tz2 + x2
225                 y_ = A2*tz2 + y2
226                 k = 5
227                 ! Si no cabe.
228                 ELSE
229                     x_ = x2
230                     y_ = y2
231                     k = 15
232
233             END IF
234
235         ! Si es sobre la cara de z.
236         ELSE
237             x2 = A1*tz1 + x1
238             y2 = A2*tz1 + y1
239             Z2 = 0
240             ! Si x no se relaja tambien.
241             IF (x2 .LT. (1.0+a12*y2+a13*z2)) THEN
242                 x_ = x2
243                 y_ = y2
244                 k = 3
245
246             ! Si x se relaja tmbn.
247             ELSE
248                 x_ = 0
249                 y_ = y2
250                 k = 14
251
252             END IF
253

```

```

254         END IF
255
256
257         ! Si no cae en la cara y otro oscilador es relajado.
258     ELSE
259
260         ! Si es el oscilador x el que esta pasado.
261         IF (x1.GE.(1.0+a12*y1+a13*z1)) THEN
262             x2 = 0
263             y2 = y1
264             z2 = z1
265             tz2 = (1.0 + a31*x2 + a32*y2 - z2)/(A3 - a31*A1 - a32*A2)
266             x_ = A1*tz2 + x2
267             y_ = A2*tz2 + y2
268             k = 11
269             ! Si ademas no cabe por z.
270             IF (z2.GE.(1.0+a31*x2+a32*y2)) THEN
271                 x_ = 0
272                 y_ = 0
273                 k = 16
274             END IF
275
276         ! Si es el oscilador z el que esta pasado.
277     ELSE
278         x2 = x1
279         y2 = y1
280         z2 = 0
281         x_ = x2
282         y_ = y2
283         k = 9
284         ! Si ademas el oscilador x esta pasado.
285         IF (x2.GE.(1.0+a12*y2+a13*z2)) THEN
286             x_ = 0
287             y_ = 0
288             k = 16
289         END IF
290     END IF
291 END IF
292
293 ! Si el tiempo que tarda z en llegar a su umbral es menor.
294 ELSE
295     ! Se determina el estado del sistema.
296     x1 = A1*tz + x
297     y1 = A2*tz + y
298     z1 = 0
299
300     ! Aquí discrimina si el punto para sobre la cara contraria del espacio
301     ! fase o se colapsa a otro eje.
302     ! Verifica que caiga sobre la cara z = 0.
303     IF ((x1.LT.(1.0+a12*y1+a13*z1)).AND.(y1.LT.(1.0+a21*x1+a23*z1))) THEN
304         x_ = x1
305         y_ = y1
306         k = 1
307
308     ! Si no cae y otro oscilador es relajado.
309     ELSE
310
311         ! Si es por x que no cae dentro de la cara.
312         IF (x1.GE.(1.0+a12*y1+a13*z1)) THEN

```

```

313         x2 = 0
314         y2 = y1
315         z2 = z1
316         x_ = x2
317         y_ = y2
318         k = 6
319         ! Si aun no cae y despues de relajado x.
320         IF (y2.GE.(1.0+a21*x2+a23*z2)) THEN
321             x_ = 0
322             y_ = 0
323             k = 16
324         END IF
325
326         ! Si es de parte de y que no cae en la cara.
327         ELSE
328             x2 = x1
329             y2 = 0
330             z2 = z1
331             x_ = x2
332             y_ = y2
333             k = 8
334             ! Si aun no cae dentro de la cara.
335             IF (x2.GE.(1.0+a12*y2+a13*z2)) THEN
336                 x_ = 0
337                 y_ = 0
338                 k = 16
339             END IF
340         END IF
341
342         END IF
343
344         END IF
345
346         q_(j+1) = x_
347         r_(j+1) = y_
348
349         ! IF (k .EQ. 16) THEN
350         !     PRINT *, q(ix), q(iy), j
351         !     EXIT
352         !     END IF
353
354         END IF
355
356         END DO
357
358         DO j = 1, IP
359         ! Con este bucle se determina la periodicidad del mapeo. Se compara
360         ! la distancia entre dos puntos, el de la ultima iteración y el de
361         ! la ultima menos j, si el valor es muy cercano a cero entonces j
362         ! es la periodicidad.
363         rad = sqrt((r_(NN-j) - r_(NN))**2 + (q_(NN-j) - q_(NN))**2)
364         !rad = abs(r_(NN-j) - r_(NN))
365         !rad = abs(q_(NN-j) - q_(NN))
366         IF (rad .LE. eps) THEN
367             u = 2.0*q(ix)-1.0
368             v = 2.0*q(iy)-1.0
369             PRINT *, u, v, j
370             EXIT
371         END IF

```

```
372     END DO
373
374     !     DO j = 1, IP
375     !         u = q(ix)
376     !         v = q_(NN-IP)
377     !         PRINT *, u, v
378     !     END DO
379
380
381     END DO
382 END DO
383
384 END
```


Bibliografía

- [Glass, Mackey, 1988] Glass, L; Mackey, M. C. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. Princeton Univ. New Jersey Press. 1988.
- [Picovsky, et. al., 2001] Picovsky, A.S; Rosenblum, M.G; Kurths, J. *Synchronization: A universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press. A 44: 2374. 2001.
- [Teschl, 2003] Teschl, Gerald. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Wien, Austria 2003.
- [Strogatz, 1994] Strogatz, Steven H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press 1994.
- [Pérez] Pérez Pascual, Rafael. *Notas del curso de Mecánica Clásica del curso de Maestría*.
- [Izhikevich, 2007] Izhikevich, Eugene M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of excitability and Bursting*. MIT Press. 2007.
- [Devaney, 1948] Devaney, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Boston Univ. Addison-Wesley Publishing Company. 1948.
- [Glass, Pérez, 1948] Glass, L. Pérez, R. *Bistability, Period Doubling Bifurcations and Chaos In a Periodically Forced Oscillator*. Physics Letters. Vol 90 A, No. 9. 1982.
- [Pérez, Lomnitz-Adler, 1988] Pérez Pascual, R; Lomnitz-Adler, J. *Coupled Relaxation Oscillators and Circle Maps*. Elsevier Science Publishers B.V. Physica D 30. 1988.