Universidad Nacional Autónoma de México

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Sobre Diferenciabilidad y Teoremas de Optimización en Espacios de Banach

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PRESENTA:

ALFREDO REYES VAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ARMANDO GARCÍA MARTÍNEZ

2010

Facultad de Ciencias

1. Datos del alumno
   Reyes
   Vazquez
   Alfredo
   57118615
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   300284407
2. Datos del tutor
   Dr
   Armando
   García
   Martínez
3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Carlos
   Bosch
   Giral
4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Francisco Marcos
   López
   García
5. Datos del sinodal 3
   Dr
   Cesar Luis
   García
   García
6. Datos del Sinodal 4
   Dr
   Jesús Manuel
   Falconi
   Magaña
7. Datos del trabajo escrito
   Sobre Diferenciabilidad y Teoremas de Optimización en Espacios de Banach
   96 p
   2010

A mis padres.

Índice general

Introducción.

El estudio de las propiedades de la diferenciabilidad de las funciones convexas en espacios de dimensión infinita tiene como razón fundamental la investigación de las consecuencias generadas por la convexidad de las funciones, como la existencia de la derivada derecha en cada dirección.
En el presente trabajo vemos que varios temas matemáticos aparentemente desconectados están, de hecho, estrechamente relacionados. Por ejemplo, los operadores monótonos y la derivada; así como las rebanadas de un conjunto y la diferenciabilidad de funciones convexas y continuas.
En la primera sección de este trabajo, definimos las funciones convexas y establecemos la propiedad fundamental de la diferenciabilidad en el caso unidimensional. Además, verificamos el primer resultado para dimensión infinita (Teorema de Mazur) referente a la derivada de Gateaux.
Con el objeto de generalizar este resultado, estudiamos el subdiferencial de una función convexa, que resulta ser un operador de conjuntos valuados.
Dado que el subdiferencial es un caso particular de un operador monótono, en el capítulo dos, estudiamos este tipo de operadores.
Luego, analizamos detalladamente la extensión del Teorema de Mazur debida a E. Asplund para el caso de espacios más generales; en los cuales se sostiene la misma conclusión y la del estudio de los espacios de Asplund, donde se sigue una conclusión más fuerte a través de la derivada de Frechet.
Para lo anterior, aplicamos las mismas técnicas analíticas y geométricas usadas por Asplund, en el contexto de funciones convexas y continuas definidas en conjuntos convexos y abiertos.
Sin embargo, para muchas aplicaciones es más conveniente trabajar con funciones convexas y semicontinuas inferiormente definidas en los reales extendidos. Debido a esto, en el último capítulo, probamos el Teorema de Bishop-Phelps y una de sus principales consecuencias, a saber, el Principio Variacional de Ekeland.
Finalmente, concluimos este trabajo con una serie de Teoremas equivalentes al Principio Variacional de Ekeland.

Capítulo 1

Funciones Convexas en Espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$.

1.1. Derivada de Gâteaux.

Siempre trabajamos en un espacio de Banach $\mathbf{E}$ sobre $\mathbb{R}$, a menos que se diga lo contrario.
Sean $\mathbf{D}$ un subconjunto de $\mathbf{E}$ no vacío, abierto y convexo; consideremos $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ una función convexa, es decir, tal que:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad ; \quad \forall x, y \in \mathbf{D} \text{ y } \forall t \in [0, 1].$$

Si siempre se da la igualdad, decimos que f es una función afín; mientras que f es cóncava si -f es convexa.
Una funcional sublineal es una función $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} P(x+y) \leq P(x) + P(y), & \forall x, y \in \mathbf{E} \\ P(tx) = tP(x) & , \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{E}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Observación 1. *Una funcional sublineal $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si*

$$-P(-x) = P(x)$$

para toda $x \in \boldsymbol{E}$.

Prueba: Claramente, si P es una funcional lineal entonces es una funcional sublineal.
Por otro lado, si $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una funcional sublineal tal que $-P(-x) = P(x)$ para toda$x \in \mathbf{E}$.
Entonces por (1.1) tenemos

$$P(-(x+y)) \leq P(-x) + P(-y)$$

Así dadas $x, y \in \mathbf{E}$, se sigue que

$$P(x+y) = -P(-(x+y)) \geq -P(-x) - P(-y) = P(x) + P(y)$$

Por lo que

$$P(x+y) = P(x) + P(y)$$

para toda $x, y \in \mathbf{E}$.
Luego, si $x \in \mathbf{E}$, $t < 0$ entonces

$$P(tx) = P(-(-tx)) = -tP(-x)$$

pero

$$-tP(-x) = t[-P(-x)]$$

implica que

$$P(tx) \;=\; tP(x)$$

para toda $x \in \mathbf{E}$, $\;t \in \mathbb{R}$.
Por lo tanto, $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal. □

Lema 1.1. *(derivada por la derecha) Sea $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ convexo, abierto, no vacío y sean $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y $x_o \in \boldsymbol{D}$. Entonces para cada $x \in \boldsymbol{E}$ la derivada direccional "por la derecha"*

$$d^+ f(x_o)(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_o + tx) - f(x_o)}{t}$$

existe y define una funcional sublineal en $\boldsymbol{E}$.

Prueba: Primero notemos que $x_o + tx \in \mathbf{D}$ para toda $t > 0$ suficientemente pequeña por que $\mathbf{D}$ es abierto por hipótesis.
Luego, sin pérdida de generalidad sea $x_o = 0$ y $f(x_o) = 0$, (por traslación en el dominio y codominio de la función f) si $x \in \mathbf{D}$ con $0 < t < s$ entonces por la convexidad de la función f se tiene que

$$\begin{aligned} f(tx) \;&=\; f\left(\frac{t}{s} sx\right) \;=\; f\left(\frac{t}{s} sx \;+\; \left(1 - \frac{t}{s}\right) 0\right) \;=\; f\left(\frac{t}{s} sx \;+\; \left(\frac{s-t}{s}\right) 0\right) \\ &\leq\; \frac{t}{s} f(sx) \;+\; \frac{s-t}{s} f(0) \;=\; \frac{t}{s} f(sx) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{f(tx)}{t} \leq \frac{f(sx)}{s}$$

Por lo que trasladando tenemos que en general

$$\frac{f(x_o + tx) - f(x_o)}{t} \leq \frac{f(x_o + sx) - f(x_o)}{s} \tag{1.2}$$

para toda $x \in \mathbf{D}$ con $0 < t < s$. Es decir, el cociente es no decreciente.
Así, aplicando (1.2) a $-x$ se tiene que

$$\frac{-[f(x_o - tx) - f(x_o)]}{t} \tag{1.3}$$

es no creciente, sin embargo diremos que (1.3) es no decreciente conforme $t \to 0^+$.
Mientras que por la convexidad de la función f, para $t > 0$ se tiene que

$$2f(x_o) \leq f(x_o - 2tx) \;+\; f(x_o + 2tx) \tag{1.4}$$

Dado que

$$\begin{aligned} f(x_o) \;&=\; f\left(\frac{2x_o \;-2tx \;+\; 2tx}{2}\right) \;=\; f\left(\frac{1}{2}(x_o - 2tx) \;+\; \frac{1}{2}(x_o + 2tx)\right) \\ &\leq\; \frac{1}{2} f(x_o - 2tx) \;+\; \frac{1}{2} f(x_o + 2tx) \;=\; \frac{1}{2}\Big[f(x_o - 2tx) \;+\; f(x_o + 2tx)\Big] \end{aligned}$$

Por lo que de (1.4) se sigue que

$$-f(x_o - 2tx) + 2f(x_o) \;\leq\; f(x_o + 2tx)$$

Entonces

$$\frac{-[f(x_o - 2tx) - f(x_o)]}{2t} \;\leq\; \frac{f(x_o + 2tx) - f(x_o)}{2t} \tag{1.5}$$

Así, por los comentarios hechos sobre la monotonía de (1.2) y (1.3) tenemos que para $t \to 0^+$ el lado derecho de la desigualdad (1.5) esta acotado inferiormente mientras que el lado izquierdo esta acotado superiormente.
Por lo tanto si $t \to 0^+$ ambos límites existen y el límite por la izquierda es $-d^+ f(x_o)(-x)$.
De hecho, por (1.5) observamos que

$$-d^+ f(x_o)(-x) \leq d^+ f(x_o)(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{D}.$$

Y concluimos que $d^+ f(x_o)(x)$ es homogénea positiva y para ver que es una funcional subaditiva se usa nuevamente la convexidad de la función f para $t > 0$ pues:

$$\begin{aligned} f(x_o + t(u+v)) &= f\left(\frac{2x_o + 2t(u+v)}{2}\right) = f\left(\frac{x_o + 2tu}{2} + \frac{x_o + 2tv}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}(x_o + 2tu) + \frac{1}{2}(x_o + 2tv)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} f(x_o + 2tu) + \frac{1}{2}(x_o + 2tv) \end{aligned}$$

Luego,

$$2f(x_o + t(u+v)) \leq f(x_o + 2tu) + f(x_o + 2tv)$$

De aquí que

$$2f(x_o + t(u+v)) - 2f(x_o) \leq f(x_o + 2tu) - f(x_o) + f(x_o + 2tv) - f(x_o)$$

Finalmente,

$$\frac{2[f(x_o + t(u+v)) - f(x_o)]}{2t} \leq \frac{f(x_o + 2tu) - f(x_o)}{2t} + \frac{f(x_o + 2tv) - f(x_o)}{2t}$$

Por lo que tomando límite cuando $t \to 0^+$ se obtiene que $d^+ f(x_o)(u+v) \leq d^+ f(x_o)(u) + d^+ f(x_o)(v)$. □

Definición 1. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ convexo, abierto y no vacío. Una función $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa es* ***diferenciable de Gâteaux*** *en $x_o \in \mathbf{D}$ si el límite*

$$df(x_o)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + tx) - f(x_o)}{t}$$

existe para cada $x \in \mathbf{E}$. Y la función $df(x_o)$ se llama la derivada de Gâteaux o diferencial de Gâteaux de f en x_o.

Así, en virtud de la Observación 1, tenemos que f es diferenciable de Gâteaux en x_o si y sólo si $-d^+ f(x_o)(-x) = d^+ f(x_o)(x)$ para cada $x \in \mathbf{E}$.
Esto muestra que f es diferenciable de Gâteaux en x_o si y sólo si

$$x \to d^+ f(x_o)(x)$$

es lineal en x; en particular, si esto es cierto, entonces $df(x_o)$ es una funcional lineal definida en $\mathbf{E}$.

1.1.1. Ejemplos.

1. Si f es una funcional lineal en $\mathbf{E}$ (no necesariamente continua) entonces

$$df(x_o)(x) = f(x)$$

para toda $x_o \in \mathbf{E}$ y para toda $x \in \mathbf{E}$.
Ya que dada $x_o \in \mathbf{E}$ se tiene que:

$$df(x_o)(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o + tx) - f(x_o)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o) + tf(x) - f(x_o)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{tf(x)}{t} = \lim_{t\to 0} f(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{E}.$$

2. La norma

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|$$

en l^1 es diferenciable de Gâteaux precisamente en aquellos puntos $x = x_i$ para los cuales se satisface que $x_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$.
Prueba: Si $x \in l^1$ y $x_i = 0$ para alguna $i \in \mathbb{N}$ entonces, definimos

$$\delta_i = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, 0, \ldots)$$

lo cual implica que:

$$\| x + tx_o \|_1 - \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + t\delta_i| - \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| = |t|$$

Más aún,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\| x + tx_o \|_1 - \| x \|_1}{t}$$

no existe ya que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-t}{t} = -1$$

mientras que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1$$

Ahora supongamos que $x_i \neq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$ así dada $\varepsilon > 0$ con $y \in l^1$ podemos elegir una $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i>N} |y_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, dado que para toda $\delta > 0$ suficientemente pequeña tenemos que $sgn(x_i + ty_i) = sgn(x_i)$ con $1 \leq i \leq N$ y $|t| < \delta$ podemos concluir que

$$\left| t^{-1} (\|x + ty\|_1 - \|x\|_1) - \sum_{i=1}^{\infty} y_i sgn(x_i) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{N} t^{-1} (|x_i + ty_i| - |x_i| - ty_i sgn(x_i)) \right| + 2 \sum_{i>N} |y_i| < \varepsilon$$

con $|t| < \delta$. □

Proposición 1.1. *Sea $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ convexo, abierto, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa. Si f es continua en $x_o \in \boldsymbol{D}$ entonces f es localmente Lipschitz en x_o, es decir, existe $M > 0$ y existe $\delta > 0$ tales que*

$$\overline{\mathbf{B}_\delta(x_o)} \subset \mathbf{D} \;\; y \;\; |f(x) - f(y)| \leq M \parallel x - y \parallel$$

para cualesquiera $x, y \in \overline{\mathbf{B}_\delta(x_o)}$.

Prueba: Como f es continua en x_o, es localmente acotada ahí, es decir, existen $M_1 > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq M_1 \quad , \quad \forall x \in \overline{\mathbf{B}_{2\delta}(x_o)} \subset \mathbf{D}.$$

Por otro lado, si $x, y \in \overline{\mathbf{B}_\delta(x_o)}$, con $x \neq y$, entonces definimos

$$\alpha := \parallel x - y \parallel > 0 \quad \text{y} \quad z := y + \frac{\delta}{\alpha}(y - x).$$

Así $z \in \overline{\mathbf{B}_{2\delta}(x_o)}$ ya que:

$$\parallel z - x_o \parallel = \parallel y + \frac{\delta}{\alpha}(y - x) - x_o \parallel \leq \parallel y - x_o \parallel + \frac{\delta}{\alpha} \parallel y - x \parallel \leq \delta + \delta = 2\delta.$$

Entonces

$$y = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right) z + \left(\frac{\delta}{\alpha + \delta}\right) x$$

pues desarrollando tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha+\delta} z + \frac{\delta}{\alpha+\delta} x &= \frac{\alpha}{\alpha+\delta} y + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)(y - x) + \frac{\delta}{\alpha+\delta} x \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\delta} y + \frac{\delta}{\alpha+\delta}(y - x) + \frac{\delta}{\alpha+\delta} x \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\delta} y + \frac{\delta}{\alpha+\delta} y \\
&= y.
\end{aligned}$$

Así, por la convexidad de f tenemos que:

$$f(y) = f\left(\left[\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right] z + \left[\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right] x\right) \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) f(z) + \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) f(x)$$

Entonces

$$f(y) - f(x) \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) f(z) + \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) f(x) - f(x)$$

Pero

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) f(x) + \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) f(x)$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) &\leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) f(z) + \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) f(x) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) f(x) - \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) f(x) \\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right)[f(z) - f(x)] \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) 2M_1 \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{\delta}\right) 2M_1 = \left(\frac{2M_1}{\delta}\right) \parallel x - y \parallel .
\end{aligned}$$

Finalmente, intercambiando x por y nos da la otra desigualdad para poder concluir que:

$$|f(x) - f(y)| \leq M \parallel x - y \parallel \qquad \text{con} \quad M = \left(\frac{2M_1}{\delta}\right)$$ □

Cabe destacar que en la prueba anterior, más que la continuidad de f utilizamos el hecho de que f era localmente acotada en x_o.

Corolario 1.1. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua en $x_o \in \mathbf{D}$. Entonces $d^+f(x_o)$ es una funcional sublineal continua en $\mathbf{E}$. De hecho, $df(x_o)$ (cuando esta exista) es una funcional continua.*

Prueba: Como f es continua en $x_o \in \mathbf{D}$ entonces por la Proposición 1.1 se tiene que existe $\mathbf{B}$ vecindad de x_o y existe $M > 0$ tales que si $x \in \mathbf{E}$ entonces,

$$f(x_o + tx) - f(x_o) \leq Mt \parallel x \parallel$$

si $t > 0$ es tal que $x_o + tx \in \mathbf{B}$.
Como esto es válido para todo $x \in \mathbf{E}$, entonces

$$\frac{f(x_o + tx) - f(x_o)}{t} \leq M \parallel x \parallel .$$

Así tomando límite cuando $t \to 0^+$ obtenemos:

$$d^+f(x_o)(x) \leq M \parallel x \parallel .$$

Es decir, $d^+f(x_o)$ es una funcional sublineal continua en $\mathbf{E}$.
Por último, si existe $df(x_o)(x)$ en virtud de la Definición 1, tenemos que

$$df(x_o)(x) = d^+f(x_o)(x) \leq M \parallel x \parallel .$$

Por lo tanto, de ser f diferenciable de Gâteaux en x_o, concluimos que la derivada de Gâteaux es una funcional lineal continua. □

El siguiente resultado es de carácter técnico y lo utilizaremos para caracterizar la derivada de Gâteaux. Cabe mencionar que en general es difícil que se den sus hipótesis.

Lema 1.2. *Sea $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ una funcional sublineal continua mayor o igual a una única funcional lineal. Entonces P es una funcional lineal.*

Prueba: La prueba es por contradicción, por lo tanto, supongamos que P no es una funcional lineal, en virtud de la Observación 1, tenemos que para alguna $y \in \mathbf{E}$

$$-P(-y) \neq P(y).$$

Por lo que hay dos casos posibles.
Primero supongamos que $-P(-y) < P(y)$ entonces

$$\begin{cases} -tP(-y) < tP(y) = P(ty), & \forall t \geq 0 \\ tP(y) < -tP(-y) = P(ty), & \forall t < 0. \end{cases}$$

Debido a esto, definimos $g : <\mathbf{y}> \to \mathbb{R}$ tal que $g(ty) = -tP(-y)$. Así, resulta que g es lineal, ya que si $t, s \in \mathbb{R}$ entonces

$$g(ty + sy) = g((t+s)y) = -(t+s)P(-y) = -tP(-y) - sP(-y) = g(ty) + g(sy) \qquad \text{y}$$
$$g((st)y) = -(st)P(-y) = s(-t)P(-y) = sg(ty).$$

Más Aún, $g(ty) \leq P(ty)$ pues

$$g(ty) = -tP(-y) < P(ty), \qquad \forall t \geq 0 \quad \text{y} \quad g(ty) = -tP(-y) = P((-t)(-y)) = P(ty), \qquad \forall t < 0.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Hahn-Banach [2, p. 1] tenemos que existe $\widetilde{g} \in \mathbf{E'}$ tal que $g \equiv \widetilde{g}$ en $<\mathbf{y}>$, además $\widetilde{g}(x) \leq P(x)$ para toda $x \in \mathbf{E}$.
Ahora definimos, $h : <\mathbf{y}> \to \mathbb{R}$ tal que $h(ty) = tP(y)$, claramente, h es lineal y de hecho, $h(ty) \leq P(ty)$ pues

$$h(ty) = tP(y) = P(ty) \qquad \forall t \geq 0 \qquad \text{y}$$
$$h(ty) = tP(y) < -tP(-y) = P(ty), \qquad \forall t < 0.$$

Nuevamente, por el Teorema de Hahn-Banach, existe $\widetilde{h} \in \mathbf{E'}$ tal que $h \equiv \widetilde{h}$ en $<\mathbf{y}>$ y $\widetilde{h}(x) \leq P(x)$ para toda $x \in \mathbf{E}$.
Ahora, basta tomar $t = 1$ para tener que

$$\widetilde{g}(y) = g(y) = -P(-y) < P(y) = h(y) = \widetilde{h}(y)$$

es decir, $\widetilde{g} \not\equiv \widetilde{h}$ y esto contradice el hecho de que P es mayor o igual a una única funcional lineal.
El caso en que $-P(-y) > P(y)$ es análogo. □

Proposición 1.2. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ convexo, abierto, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua. Entonces f es Gâteaux diferenciable en $x_o \in \mathbf{D}$ si y sólo si existe una única funcional $x' \in \mathbf{E'}$ tal que satisface:*

1. $< x', x - x_o > \;\leq\; f(x) - f(x_o) \;;\quad \forall x \in \mathbf{D}$

   o equivalentemente,

2. $< x', y > \;\leq\; d^+ f(x_o)(y) \;;\quad \forall y \in \mathbf{E}.$

Prueba: Primero mostramos que las condiciones 1 y 2 son equivalentes:
Si $x' \in \mathbf{E'}$ satisface 1 entonces para toda $y \in \mathbf{E}$ se tiene que $x_o + ty \in \mathbf{D}$, para alguna $t > 0$.
Entonces dado que

$$t < x', y > \;=\; < x', ty > \;=\; < x', (x_o + ty) - x_o > \;\leq\; f(x_o + ty) - f(x_o)$$

Se cumple que

$$< x', y > \;\leq\; \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_o + ty) - f(x_o)}{t} =: d^+ f(x_o)(y).$$

Es decir, se satisface 2.
Por otro lado, si $x' \in \mathbf{E'}$ satisface 2 entonces dada $x \in \mathbf{E}$, definimos $y := x - x_o$.
Así $x_o + ty \in \mathbf{D}$ para toda $t \in (0, 1]$, por lo tanto,

$$< x', y > \;=\; < x', x - x_o > \;\leq\; d^+ f(x_o)(x - x_o)$$

Entonces

$$< x', x - x_o > \;\leq\; \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_o + t(x - x_o)) - f(x_o)}{t} \;\leq\; f(x_o + (x - x_o)) - f(x_o)$$

con $t = 1$, por la monotonía de la derivada derecha (ver Lema 1.1.)

Es decir, $< x', x - x_o > \leq f(x) - f(x_o)$ que es precisamente la condición 1.
Ahora bien, supongamos que f es Gâteaux diferenciable en $x_o \in \mathbf{D}$, es decir, existe $df(x_o)$ para toda $x \in \mathbf{E}$. Entonces por el procedimiento anterior, se tiene que:

$$df(x_o)(x - x_o) \leq f(x) - f(x_o).$$

Por lo tanto, $df(x_o)$ satisface 1 más aún, si $x' \in \mathbf{E}'$ es tal que satisface 1 entonces también satisface 2 así obtenemos

$$< x', y > \leq d^+ f(x_o)(y) = df(x_o)(y)$$

por que $df(x_o)$ es lineal.
Luego para toda $y \in \mathbf{E}$

$$< x' - df(x_o), y > \leq 0.$$

Por lo tanto,

$$< x' - df(x_o), y > = 0.$$

Pues si existe $y_o \in \mathbf{E}$ tal que $< x' - df(x_o), y_o > < 0$ entonces

$$< x' - df(x_o), sy_o > > 0$$

para toda $s < 0$. Esto contradice el hecho de que $< x' - df(x_o), y > \leq 0$, para toda $y \in \mathbf{E}$.
Es decir, $df(x_o)$ es la única funcional lineal que cumple 1.
Inversamente, si $x' \in \mathbf{E'}$ es la única funcional que cumple 1 entonces es la única que satisface 2.
Así la funcional sublineal $d^+ f(x_o)$ es tal que $d^+ f(x_o) = df(x_o)$ ya que de no serlo, por el Lema 1.2 aplicado a la funcional sublineal $d^+ f(x_o)$ obtendríamos una contradicción con respecto a la unicidad de x'.
Con lo cual concluimos que f es Gâteaux diferenciable en $x_o \in \mathbf{D}$. □

Definición 2. *Sea $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{E}$ convexo y sea $f : \mathbf{C} \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces definimos el **subdiferencial de f en** x como el conjunto*

$$\delta f(x) := \left\{ x' \in \boldsymbol{E'} \;\middle|\; < x', y - x > \leq f(y) - f(x), \ \forall y \in \mathbf{C} \right\}$$

Observación 2. *El conjunto $\delta f(x_o)$ es distinto del vacío si f es continua en x_o, pues $d^+ f(x_o)$ es una funcional sublineal continua (Corolario 1.1) y por el procedimiento del Lema 1.2, existe $x' \in \boldsymbol{E'}$ tal que*

$$< x', y > \leq d^+ f(x_o)(y)$$

para toda $y \in \boldsymbol{E}$.
Entonces por la Proposición 1.2, basta remplazar y por $y - x$ para obtener

$$< x', y - x_o > \leq d^+ f(x_o)(y - x_o) \leq f((y - x_o) + x_o) - f(x_o)$$

para toda $y \in \mathbf{D}$. □

Proposición 1.3. *El conjunto $\delta f(x_o)$ es convexo y $\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$-cerrado.*

Prueba: Primero hay que observar que el subdiferencial de f en x_o puede ser vacío, pero si $\delta f(x_o) = \emptyset$ entonces es convexo y $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-cerrado, por vacuidad.
Si $\delta f(x_o) \neq \emptyset$ entonces dados $x', z' \in \delta f(x_o)$ y dada $t \in [0, 1]$tenemos que

$$\begin{aligned}
< tx' + (1 - t)z', y - x_o > &= (tx' + (1 - t)z')(y - x_o) \\
&= t(x')(y - x_o) + (1 - t)z'(y - x_o) \\
&= t < x', y - x_o > + (1 - t) < z', y - x_o > \\
&\leq t[f(y) - f(x_o)] + (1 - t)[f(y) - f(x_o)] \\
&= f(y) - f(x_o).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $tx' + (1-t)z' \in \delta f(x_o)\ \ \forall x', y' \in \delta f(x_o), \ \ \forall t \in [0,1].$

Para ver que $\delta f(x_o)$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-cerrado, basta demostrar que su complemento es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierto, en efecto, como

$$\begin{aligned} \mathbf{E'}\backslash(\delta f(x_o)) &= \left\{ x' \in \mathbf{E'} \,\middle|\, < x', y - x_o > \ > \ f(y) + f(x_o) \ \text{ para alguna } \ y \in \mathbf{C} \right\} \\ &= \bigcup_{y \in \mathbf{C}} \left\{ x' \in \mathbf{E'} \,\middle|\, \widehat{y - x_o}(x') \ = \ < x', y - x_o > \ > \ f(y) - f(x_o) \right\} \end{aligned}$$

Por lo que $\mathbf{E'}\backslash(\delta f(x_o))$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierto, por ser la unión de conjuntos abiertos, los cuales son imágenes inversas de intervalos abiertos bajo la función evaluación, ver Definición 34. □

Proposición 1.4. *Sea $\mathbf{D}$ convexo, abierto, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ una función convexa y continua en $x_o \in \boldsymbol{E}$. Entonces $\delta f(x_o)$ es no vacío, convexo y $\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$-compacto, más aún, la función $x \to \delta f(x)$ es localmente acotada en x_o, es decir, existe $M > 0$ y existe $\mathbf{U}$ vecindad de x_o tales que*

$$\|x'\| \leq M \quad ; \quad \forall x \in U, \ \ \forall x' \in \delta f(x).$$

Prueba: El hecho de que $\delta f(x_o)$ es no vacío, convexo y $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-cerrado se sigue de la Definición 2 y de la Proposición 1.3.
Probemos la propiedad de ser localmente acotado: Como f es convexa y continua en x_o, se sigue de la Proposición 1.1 que existe $M > 0$ y existe $\mathbf{U}$ vecindad de x_o tales que

$$|f(y) - f(x)| \ \leq \ M\|x - y\| \quad \forall y \in \mathbf{U}.$$

Sí $x \in \mathbf{U}$ y $x' \in \delta f(x_o)$ entonces para toda $y \in \mathbf{U}$ se tiene que

$$< x', y - x > \ \leq \ f(y) - f(x) \ \leq \ M\|y - x\|.$$

Entonces con $y \neq x$ obtenemos

$$\frac{< x', y - x >}{\|y - x\|} \leq M.$$

Por otro lado, consideramos $\mathbf{V} = \mathbf{U}\backslash x_o$ y definimos $z := y - x_o$ entonces para toda $z \in \mathbf{V}$ se tiene que $| < x', z > | \ \leq \ M\|z\|$.
Así, tomando $w = \alpha z$ para alguna $\alpha > 0$ y para alguna $z \in \mathbf{V}$ entonces

$$\begin{aligned} | < x', z > | &= | < x', \alpha z > | \ = \ \alpha | < x', z > | \\ &\leq \alpha M\|z\| \ = \ M\|\alpha z\| \ = \ M\|w\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|x'\| \ \leq \ M$ para toda $x' \in \delta f(x_o)$, es decir,

$$\delta f(x_o) \subset \overline{B_M^{\mathbf{E'}}(x')}.$$

Y por el Teorema de Alaoglu (ver [5, p. 124]), $\delta f(x_o)$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacto, ya que la propiedad de ser compacto es hereditaria a subconjuntos cerrados. □

1.2. Derivada de Fréchet.

Definición 3. *Sean $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ espacios vectoriales normados y consideremos $\boldsymbol{U}$ un subconjunto no vacío, y abierto de $\boldsymbol{E}$ y sea $\phi : \mathbf{U} \to \boldsymbol{F}$ una función continua. Entonces podemos extender la Definición de ser Gâteaux diferenciable de la siguiente forma, ϕ es **Gâteaux diferenciable** en $x_o \in \boldsymbol{U}$ si existe un mapeo lineal continuo de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{F}$ (denotado por $d\phi(x_o)$) tal que*

$$d\phi(x_o)(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\phi(x_o + tx) - \phi(x_o)}{t} \quad ; \quad \forall x \in \boldsymbol{E}. \tag{1.6}$$

Es decir, ϕ tiene derivada direccional en x_o en toda dirección x y la función resultante de x es continua y lineal.
*Y decimos que ϕ es **Fréchet diferenciable** en $x_o \in \boldsymbol{U}$ si existe un mapeo lineal y continuo de $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{F}$ (denotado por $\phi'(x_o)$) tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\| \phi(x_o + x) - \phi(x_o) - \phi'(x_o)(x) \| \leq \varepsilon \| x \| \quad , \quad si \ \| x \| \leq \delta. \tag{1.7}$$

Y llamamos a $\phi'(x_o)$ diferencial de Fréchet o derivada de Fréchet de ϕ.

En adelante, tratamos con funciones definidas de un espacio de Banach $\mathbf{E}$ a $\mathbb{R}$.

Proposición 1.5. *Sea $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}$ abierto, no vacío y sea $\phi : \mathbf{U} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que es Fréchet diferenciable en x_o. Entonces ϕ es Gâteaux diferenciable en x_o y $\phi'(x_o) \equiv d\phi(x_o)$.*

Prueba: Como ϕ es Fréchet diferenciable en x_o entonces dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se cumple (1.7) para toda $x \in \mathbf{E}$, en particular, tomando $t > 0$ tal que $x_o + tx \in \mathbf{U}$ se tiene que

$$\left|\phi(x_o + tx) - \phi(x_o) - \phi'(x_o)(tx)\right| \leq \varepsilon \| tx \| \quad , \quad \text{si } \| tx \| \leq \delta.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left|\phi(x_o + tx) - \phi(x_o) - \phi'(x_o)(tx)\right|}{t} \leq \varepsilon \| x \| \quad , \quad \text{si } \| tx \| \leq \delta.$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\phi(x_o + tx) - \phi(x_o)}{t} - \phi'(x_o)(x)\right| \leq \varepsilon \| x \| \quad , \quad \text{si } \| tx \| \leq \delta.$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\phi(x_o + tx) - \phi(x_o)}{t} - \phi'(x_o)(x)\right| \leq \varepsilon \quad , \quad \text{si } \| x \| \leq 1.$$

Mientras que si $\| x \| > 1$ hay que considerar

$$\left|\phi(x_o + sx) - \phi(x_o) - \phi'(x_o)(sx)\right| \leq \varepsilon \| sx \| \qquad \text{con s } = \frac{t}{\| x \|}$$

ya que $\| sx \| = t \leq \delta$ así

$$\left|\phi\left(x_o + t\frac{x}{\|x\|}\right) - \phi(x_o) - \phi'(x_o)\left(t\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq \varepsilon t.$$

Y como esto es válido para toda $x \in \mathbf{E}$, se cumple (1.6) con $\phi'(x_o)$ y por la unicidad de los límites se tiene que $d\phi(x_o) \equiv \phi'(x_o)$. □

Proposición 1.6. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ abierto, convexo, no vacío y sea $\phi : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ Gâteaux diferenciable en x_o y el límite en (1.6) existe uniformemente para toda $x \in \mathbf{E}$ tal que $\| x \| \leq 1$ conforme $t \to 0^+$. Entonces ϕ es Fréchet diferenciable en x_o.*

Prueba: Si ϕ es Gâteaux diferenciable en x_o entonces de (1.6) se tiene, por Definición de convergencia, que dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{\phi(x_o + tx) - \phi(x_o)}{t} - d\phi(x_o)(x) \right| < \varepsilon \quad , \quad \text{si } 0 < t < \delta$$

para toda $x \in \mathbf{E}$.
Así, si $x = 0$ entonces claramente se cumple la condición (1.7), mientras que si $x \neq 0$ entonces hacemos $y = \| x \|^{-1} x$ con lo cual,

$$\left| \phi(x_o + ty) - \phi(x_o) - td\phi(x_o)(y) \right| < \varepsilon t \qquad \text{si } 0 < t < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \left| \phi(x_o + sx) - \phi(x_o) - d\phi(x_o)(sx) \right| < \varepsilon s \| x \| \quad \text{con } s = \frac{t}{\| x \|}$$

además, $s \| x \| = \dfrac{t}{\| x \|} \| x \| = t < \delta$.

Por lo tanto, se cumple (1.7). □

1.2.1. Ejemplos.

1. La norma en l^1 no es Fréchet diferenciable en ningún punto.
   Prueba: Por el ejemplo 2 tenemos que considerar sólo el caso en que $x = (x_n)$ es tal que $x_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
   Así dada $x \in l^1$ con dicha condición, definimos para cada $m \geq 1$

   $$y^m = (0, 0, ..., 0, -2x_m, -2x_{m+1}, -2x_{m+2}, ...)$$

   entonces

   $$\|y^m\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n| = \sum_{n=m}^{+\infty} |-2x_n|$$

   y como $x \in l^1$ se tiene que $\| y^m \| \to 0$ si $m \to +\infty$.
   Y consideremos la sucesión $(sgnx_n)_n \in l^\infty$ la cual actua de la siguiente forma,

   $$(sgnx_n)_n(y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (sgnx_n)(y_n) \quad , \quad \forall y \in l^1.$$

   Pero

   $$\left| \| x + y^m \|_1 - \| x \|_1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (y^m)_n sgnx_n \right| =$$

   $$\left| \sum_{n=1}^{m-1} |x_n + 0| - |x_n| + \sum_{n=m}^{+\infty} |x_n - 2x_n| - |x_n| - \sum_{n=1}^{+\infty} (y^m)_n sgnx_n \right| =$$

   $$\left| 0 - \sum_{n=1}^{m-1} 0(sgnx_n) - \sum_{n=m}^{+\infty} (-2x_n)(sgnx_n) \right| = \left| - \sum_{n=m}^{+\infty} (-2x_n)(sgnx_n) \right| =$$

   $$\left| \sum_{n=m}^{+\infty} 2|x_n| \right| = \| y^m \|_1$$

   Por lo tanto, la función $\| \cdot \|_1$ no es Fréchet diferenciable, sin embargo es Gâteaux diferenciable en $x = (x_n) \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así el recíproco de la Proposición 1.5 no es válida. □

2. El cuadrado de la norma en un espacio de Hilbert $\mathbf{H}$ es Fréchet diferenciable en todo el espacio.
Prueba: Como $\mathbf{H}$ es un Espacio de Hilbert entonces para cualesquiera $x, y \in \mathbf{H}$ se cumple que

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2 < x, y > + \| y \|^2$$

con lo cual se obtiene que

$$\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - 2 < x, y > = \| y \|^2 \leq \delta \| y \| = \varepsilon \| y \|$$

con $\| y \| \leq \delta = \varepsilon$, por lo tanto $(\| \cdot \|^2)'(x)(y) = 2 < x, y >$. □

Cabe mencionar que en general no es cierto que la norma en un espacio de Hilbert es Fréchet diferenciable, y esto se puede deducir de la Proposición 1.7 ya que en $\mathbb{R}$ la norma esta dada por el valor absoluto, el cual no es (Gâteaux) diferenciable en el 0.

3. En un espacio de Hilbert $\mathbf{H}$ sea $\mathbf{C}$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo y denotamos por $P : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ al mapeo (función) de punto más cercano de $\mathbf{H}$ en $\mathbf{C}$, es decir, tal que

$$\| x - P(x) \| = \text{ínf} \{ \| x - y \| \ \ | y \in \mathbf{C} \}$$

el cual es Lipschitz y esta bien definido por el Teorema A.2, además definimos $f : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\| x \|^2 - \| x - P(x) \|^2 \right]$$

Entonces f es continua, convexa y Fréchet diferenciable en $\mathbf{H}$.
Prueba: Como

$$\begin{aligned} 2f(x) = & \ \| x \|^2 - \text{ínf} \{ \| x - y \|^2 \ | y \in \mathbf{C} \} \\ = & \ \| x \|^2 + \sup \{ - \| x - y \|^2 \ | y \in \mathbf{C} \} \\ = & \ \| x \|^2 + \sup \{ - \| x \|^2 + 2 < x, y > - \| y \|^2 \ | y \in \mathbf{C} \} \\ = & \ \sup \{ 2 < x, y > - \| y \|^2 \ | y \in \mathbf{C} \} \end{aligned}$$

se tiene que f es el supremo de funciones afines pues dados $u, v \in \mathbf{H}$ y $t \in [0, 1]$ implica que

$$\begin{aligned} 2 < tu + (1-t)v, y > - \| y \|^2 = & \ 2 < tu + (1-t)v, y > -t \| y \|^2 -(1-t) \| y \|^2 \\ = & \ 2 < tu, y > -t \| y \|^2 + 2(1-t) < v, y > \\ & -(1-t) \| y \|^2 \\ = & \ t\left[2 < u, y > - \| y \|^2\right] + (1-t)\left[2 < v, y > \right. \\ & \left. - \| y \|^2\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $2 < \cdot , y > - \| y \|^2$ es afín y por lo tanto convexa; dado que el supremo de funciones convexas es una función convexa, ver (A.1.1.2), tenemos que f es convexa.
La continuidad de f se sigue de que es composición de funciones continuas, por otra parte, dada $x \in \mathbf{H}$ se tiene que

$$\| (x + w) - P(x + w) \| \leq \| (x + w) - P(x) \| \quad , \quad \forall w \in \mathbf{H}.$$

Ya que $P(x + w)$ es el único elemento en $\mathbf{C}$ que minimiza la distancia entre x y $\mathbf{C}$ mientras que $P(x) \in \mathbf{C}$ así, obtenemos que

$$f(x + w) - f(x) - < P(x), w > \ \geq 0$$

pues desarrollando el lado izquierdo de esta expresión observamos que:

$$f(x+w) - f(x) - < P(x), w > \; =$$

$$(1/2)\left[\| x+w \|^2 - \| (x+w) - P(x+w) \|^2 - \| x \|^2 + \| x - P(x) \|^2\right] - < P(x), w > \; \geq$$

$$(1/2)\left[\| x+w \|^2 - \| (x+w) - P(x) \|^2 - \| x \|^2 + \| x - P(x) \|^2\right] - < P(x), w > \quad =$$

$$(1/2)\Big[\| x+w \|^2 - \| x+w \|^2 + 2 < x+w, P(x) > - \| P(x) \|^2 - \| x \|^2 + \| x \|^2$$

$$-2 < x, P(x) > + \| P(x) \|^2\Big] - < P(x), w > \; =$$

$$(1/2)\Big[2 < x, P(x) > + 2 < w, P(x) > - 2 < x, P(x) >\Big] - < P(x), w > \; = \; 0.$$

Por lo tanto,

$$|f(x+w) - f(x) - < P(x), w > | = f(x+w) - f(x) - < P(x), w >$$

Para acotar esta expresión tomamos en cuenta que

$$\| x - P(x) \| \leq \| x - P(x+w) \| \quad , \quad \forall w \in \mathbf{H}.$$

Debido a que $P(x)$ es el único elemento en $\mathbf{C}$ que minimiza la distancia entre x y $\mathbf{C}$ mientras que $P(x+w) \in \mathbf{C}$ lo cual implica que

$$f(x+w) - f(x) - < P(x), w > \; =$$

$$(1/2)\left[\| x+w \|^2 - \| (x+w) - P(x+w) \|^2 - \| x \|^2 + \| x - P(x) \|^2\right] - < P(x), w > \quad \leq$$

$$(1/2)\left[\| x+w \|^2 - \| (x+w) - P(x+w) \|^2 - \| x \|^2\right] + (1/2) \| x - P(x+w) \|^2 - < P(x), w > \; =$$

$$(1/2)\Big[\| x+w \|^2 - \| x+w \|^2 + 2 < x+w, P(x+w) > - \| P(x+w) \|^2 - \| x \|^2 + \| x \|^2$$

$$-2 < x, P(x+w) > + \| P(x+w) \|^2\Big] - < P(x), w > \; =$$

$$(1/2)\Big[2 < x, P(x+w) > + 2 < w, P(x+w) > - 2 < x, P(x+w) >\Big] - < P(x), w > \; =$$

$$< w, P(x+w) > - < P(x), w > \; = \; < w, P(x+w) - P(x) > \quad \leq$$

$$\| w \| \| P(x+w) - P(x) \| \; \leq \; \| w \| \| x + w - x \| \; = \; \| w \|^2 .$$

Así basta tomar $\delta = \varepsilon$ para tener

$$|f(x+w) - f(x) - < P(x), w > | \;\; \leq \;\; \varepsilon \| w \| \quad , \quad \text{con } \| w \| \leq \delta$$

de esta forma, tenemos que $f'(x)(w) \; = < P(x), w >$ para toda $w \in \mathbf{H}$. □

Proposición 1.7. *Sea $\mathbf{E}$ un espacio de Banach de dimensión finita y consideremos $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa, continua y Gâteaux diferenciable. Entonces f es Fréchet diferenciable.*

Prueba: Dado que f es Gâteaux diferenciable en $x \in \mathbf{D}$ se tiene que para toda $t > 0$ se cumple

$$df(x)(ty) \leq f(x + ty) - f(x).$$

Por lo que para toda $y \in \mathbf{E}$, con $\| y \| \leq 1$ se cumple que

$$\left| f(x + ty) - f(x) - df(x)(ty) \right| \ \leq\ 2\left| f(x + ty) - f(x) \right| \ \leq\ 2M \| ty \| \ \leq\ 2Mt.$$

Ya que f es localmente Lipschitz.
Por lo tanto, el límite dado en (1.6) converge uniformemente conforme $t \to 0^+$ con $\| y \| = 1$, es decir, f es Fréchet diferenciable en x. □

Así en un espacio de Banach de dimensión finita, como por ejemplo $\mathbb{R}^n$, la diferenciabilidad de Gâteaux y de Fréchet son equivalentes en virtud de las Proposiciones 1.5 y 1.7.

Proposición 1.8. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ continua y convexa. Entonces la diferenciabilidad de Gâteaux de f en x_o es equivalente a la existencia de las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)$$

para toda $i = 1, \ldots, n$.

Prueba: Dado que en $\mathbb{R}^n$ se cumple que

$$df(x_o)(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)$$

y el mapeo

$$x \to \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)$$

es lineal y continuo por las propiedades del producto interior, se tiene que f es diferenciable si y sólo si existen las derivadas parciales de f en cada dirección. □

Teorema 1.1. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces $f'(x)$ existe excepto a lo más en un conjunto numerable de puntos de $\mathbf{D}$.*

Prueba: Primero observamos que $d^+f(x)(1)$ es una función no decreciente de $x \in \mathbf{D}$, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $d^+f(x_1)(1) \leq d^+f(x_2)(1)$.
Sin pérdida de generalidad, sea $x_1 = 0$ y $f(0) = 0$ así

$$\begin{aligned} d^+f(x_1)(1) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_1 + t) - f(x_1)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(0 + t) - f(0)}{t} \\ &\leq \frac{f(0 + x_2) - f(0)}{x_2} \\ &= \frac{f(x_2)}{x_2} \end{aligned}$$

en virtud, de la prueba del Lema 1.1.

Por lo tanto, basta mostrar que

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_2+t)-f(x_2)}{t} \quad , \quad \forall t > 0.$$

Para esto definimos

$$\lambda := \frac{x_2}{x_2+t} \quad , \quad \text{con } t > 0.$$

Luego

$$x_2 = \lambda(x_2+t) = \lambda(x_2+t) + (1-\lambda)0 \quad ; \quad \forall t > 0.$$

Más aún, como $\lambda \in (0,1)$ se tiene por la convexidad de f que

$$f(x_2) \leq \lambda f(x_2+t) + (1-\lambda)f(0) = \lambda f(x_2+t).$$

De aquí que

$$\frac{f(x_2)}{\lambda} \leq f(x_2+t) \quad , \text{ es decir, } \quad \frac{f(x_2)(x_2+t)}{x_2} \leq f(x_2+t).$$

Entonces para toda $t > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2)(x_2+t)-f(x_2)x_2}{x_2} &\leq f(x_2+t)-f(x_2) \\
\Rightarrow \quad \frac{f(x_2)(x_2+t-x_2)}{x_2} &\leq f(x_2+t)-f(x_2) \\
\Rightarrow \quad \frac{f(x_2)t}{x_2} &\leq f(x_2+t)-f(x_2) \\
\Rightarrow \quad \frac{f(x_2)}{x_2} &\leq \frac{f(x_2+t)-f(x_2)}{t} \\
\Rightarrow \quad \frac{f(x_2)}{x_2} &\leq d^+f(x_2)(1).
\end{aligned}$$

Por otro lado, donde f no es diferenciable es en aquellos puntos donde el mapeo monótono $x \to d^+f(x)(1)$ tiene saltos y estos forman un conjunto a lo más numerable.
Es decir, $f'(x_o)$ no existe si y sólo si

$$-d^+f(x_o)(-1) < d^+f(x_o)(1)$$

si y sólo si $d^+f(x)(1)$ tiene un salto en $x = x_o$ por lo que hay que demostrar que

$$\lim_{x\to x_o^-} d^+f(x)(1) < \lim_{x\to x_o^+} d^+f(x)(1)$$

En efecto, como $d^+f(x)(1)$ es no decreciente se cumple que

$$d^+f(x_o)(1) \leq \lim_{x\to x_o^+} d^+f(x)(1)$$

Por lo que es suficiente verificar que si $x < x_o$ entonces $d^+f(x)(1) < -d^+f(x_o)(-1)$.

Y por la monotonía de los límites que definen estas cantidades sólo hay que mostrar que tomando

$$t_o = \frac{1}{2}(x_o - x)$$

obtenemos

$$\frac{f(x+t_o) - f(x)}{t_o} \leq \frac{-[f(x_o - t_o) - f(x_o)]}{t_o}. \tag{1.8}$$

Pero esto es equivalente a la desigualdad por convexidad

$$f\left(\frac{1}{2}(x + x_o)\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x_o)$$

ya que partiendo de esta desigualdad concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+t_o) - f(x)}{t_o} &= \frac{f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_o\right) - f(x)}{t_o} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x_o) - f(x)}{t_0} \\ &= \frac{\frac{1}{2}f(x_o) - \frac{1}{2}f(x)}{t_o}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \frac{f(x_o - t_o) - f(x_o)}{t_o} &= \frac{f(\frac{1}{2}x_o + \frac{1}{2}x) - f(x_o)}{t_o} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}f(x_o) + \frac{1}{2}f(x) - f(x_o)}{t_o} \\ &= \frac{\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(x_o)}{t_o}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{\frac{1}{2}f(x_o) - \frac{1}{2}f(x)}{t_o} \leq \frac{-[f(x_o - t_o) - f(x_o)]}{t_o}. \tag{1.10}$$

Así al combinar las desigualdades (1.9) y (1.10) obtenemos (1.8) y de esta manera tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_o^-} d^+ f(x)(1) &\leq -d^+ f(x_o)(-1) \\ &\leq d^+ f(x_o)(1) \\ &\leq \lim_{x \to x_o^+} d^+ f(x)(1). \end{aligned}$$

Y como f no es diferenciable en x_o si y sólo si $-d^+ f(x_o)(-1) < d^+ f(x_o)(1)$ si y sólo si

$$\lim_{x \to x_o^-} d^+ f(x)(1) < \lim_{x \to x_o^+} d^+ f(x)(1)$$

y esto ocurre en un conjunto a lo más numerable. □

Proposición 1.9. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua. Entonces f es diferenciable excepto en un conjunto a lo más numerable.*

Prueba: En virtud de la Observación 1.8 tomamos $k \in \{1, 2, ..., n\}$ fijo y así tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

no existe en un conjunto $\mathbf{B}_k$ a lo más numerable, ya que con k fijo tenemos una función definida en $\mathbb{R}$.
Por lo tanto $\nabla f(x)$ no existe en

$$\mathbf{B} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{B}_k$$

el cual es un conjunto a lo más numerable. □

Proposición 1.10. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces f es continua en cada punto de $\mathbf{D}$.*

Prueba: Sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \in \mathbf{D}$ y que la norma esta dada por

$$\| x \| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

y mostremos que f es localmente acotada en 0 para posteriormente proceder de manera similar a la prueba de la Proposición 1,1 para tener que f es continua en 0 y finalmente por traslación f será continua en $\mathbf{D}$.
En efecto, si $0 \in \mathbf{D}$ entonces por ser $\mathbf{D}$ abierto, existe $r > 0$ tal que $\overline{\mathbf{B}_r(0)} \subset \mathbf{D}$ así dada $x \in \overline{\mathbf{B}_r(0)}$ se tiene que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{r} r e_k$$

donde $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{r}\right| = \left\|\frac{x}{r}\right\| \leq \frac{r}{r} = 1$$

Por lo que podemos escribir

$$x = \lambda_o 0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k r e_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_k (-r e_k)$$

con $\lambda_k \geq 0$ con $k = 0, 1, ..., n$ y $\mu_k \geq 0$ con $k = 1, 2, ..., n$ tales que $\sum \lambda_k + \sum \mu_k = 1$.
Lo cual implica, por ser f convexa que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \lambda_o f(0) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(r e_k) + \sum_{k=1}^{n} f(-r e_k) \\ \Rightarrow |f(x)| &\leq \lambda_o M + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M + \sum_{k=1}^{n} \mu_k M \end{aligned}$$

con $M := \max\limits_{k=1,...,n} \left\{ |f(0)|, |f(r e_k)|, |f(-r e_k)| \right\}$
Entonces $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in \overline{\mathbf{B}_r(0)}$ es decir, f es localmente acotada en 0.

Por otro lado, tomemos $y, z \in \overline{\mathbf{B}_\delta(0)}$ con $\delta = (r/2)$ tales que $y \neq z$, de esta manera tenemos que

$$\alpha := \| y - z \| > 0 \quad \text{y} \quad w := y + \frac{\delta}{\alpha}(y - z) \in \overline{\mathbf{B}_r(0)}.$$

Ya que

$$\| w \| = \left\| y + \frac{r}{2\alpha}(y - z) \right\| \leq \| y \| + \frac{r}{2\alpha} \| y - z \| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Más aun, tenemos que

$$y = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} w + \frac{\delta}{\alpha + \delta} z$$

Pues

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha + \delta} w + \frac{\delta}{\delta + \alpha} z &= \frac{\alpha}{\alpha + \delta}\left[y + \frac{\delta}{\alpha}(y - z) \right] + \frac{\delta}{\alpha + \delta} z \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \delta} y + \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta} \right)\left(\frac{\delta}{\alpha} \right) y - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta} \right)\left(\frac{\delta}{\alpha} \right) z + \frac{\delta}{\alpha + \delta} z \\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta} + \frac{\delta}{\alpha + \delta} \right) y + \left(\frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{\delta}{\alpha + \delta} \right) z = y.
\end{aligned}$$

De esta manera, usando la convexidad de f obtenemos

$$\begin{aligned}
f(y) &\leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(w) + \frac{\delta}{\alpha + \delta} f(z) \\
\Rightarrow f(y) - f(z) &\leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(w) + \frac{\delta}{\alpha + \delta} f(z) - f(z) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(w) + \frac{\delta}{\alpha + \delta} f(z) - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta} + \frac{\delta}{\alpha + \delta} \right) f(z) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(w) - \frac{\alpha}{\alpha + \delta} f(z) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \delta} [f(w) - f(z)] \\
&\leq \frac{\alpha}{\delta} [f(w) - f(z)] \\
&\leq \frac{\alpha}{\delta} 2M = \frac{2M}{\delta} \| y - z \| \\
&= \frac{4M}{r} \| y - z \| .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que f es localmente Lipschitz continua en 0. □

Para el siguiente resultado requerimos de dos conceptos fundamentales, el de un conjunto G_δ y el de un conjunto F_σ, ver Definición 40.

Teorema 1.2. *(Mazur 1933.) Sean* $\mathbf{E}$ *un espacio de Banach separable y* $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ *abierto, convexo, no vacío y sea* $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ *convexa y continua. Entonces el conjunto*

$$G = \left\{ x \in \boldsymbol{D} \;\middle|\; df(x) \;\; existe \right\}$$

es un conjunto G_δ *denso de* $\boldsymbol{D}$.

Prueba: Mostremos que el conjunto de $x \in \mathbf{D}$ donde $df(x)$ no existe es un conjunto F_σ relativo a $\mathbf{D}$. En efecto, dado que $\mathbf{E}$ es separable existe una sucesión (x_n) densa en la esfera unitaria de $\mathbf{E}$, así para cada $n, m \geq 1$ definimos

$$\mathbf{A}_{n,m} := \left\{ x \in \mathbf{D} \;\middle|\; \text{existen } x', y' \in \delta f(x) \text{ tales que } < x' - y', x_n > \;\geq\; \frac{1}{m} \right\} \tag{1.11}$$

Ahora bien, como $df(x)$ no existe si y sólo si $\delta f(x)$ contiene más de un elemento, se tiene que $df(x)$ no existe si y sólo si $x \in \bigcup \mathbf{A}_{n,m}$.
Para ver que $\mathbf{A}_{n,m}$ es cerrado relativo, tomamos $\left(z_k\right) \subset \mathbf{A}_{n,m}$ tal que $z_k \to z$ para alguna $z \in \mathbf{D}$ por lo que tenemos que mostrar que $z \in \mathbf{A}_{n,m}$.
Para esto, dada $k \in \mathbb{N}$ fija, tenemos que existen $x'_k, y'_k \in \delta f(x)$ tales que

$$< x'_k - y'_k, x_n > \;\geq \frac{1}{m}.$$

Y como el mapeo $w \to \delta f(w)$ es localmente acotado en z (ver Proposición 1.4) tenemos que existen $M > 0$ y $K \in \mathbb{N}$ tales que

$$z_k \in \mathbf{B}_K(z) \quad , \quad \forall k \geq K \qquad \text{y} \qquad |x'_k|, |z'_k| \leq M \quad , \quad \forall k \geq K.$$

Por otro lado, dado que $\mathbf{E}$ es separable se tiene que $\overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_M(0)}$ es metrizable y $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacta (ver [16]). Así existen

$$\left(x'_{k_l}\right) \subset (x'_k) \quad \text{tal que} \quad x'_{k_l} \xrightarrow{\sigma(\mathbf{E'},\mathbf{E})} x' \;\; \text{para algún } x' \in \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_M(0)}$$

y

$$\left(y'_{k_l}\right) \subset (y'_k) \quad \text{tal que} \quad y'_{k_l} \xrightarrow{\sigma(\mathbf{E'},\mathbf{E})} y' \;\; \text{para algún } y' \in \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_M(0)}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\left(x'_{k_l}\right) = (x'_k) \quad \text{y} \quad \left(y'_{k_l}\right) = (y'_k).$$

Luego, para cualquier $w \in \mathbf{D}$ se cumple que

$$\begin{aligned} < x', w - z > \;&=\; \left\langle \lim_{l\to\infty} x'_{k_l} \,,\; w - \lim_{l\to\infty} z_{k_l} \right\rangle \;=\; \lim_{l\to\infty} \left\langle x'_{k_l} \,,\; w - z_{k_l} \right\rangle \\ &\leq\; \lim_{l\to\infty} f(w) - f\left(z_{k_l}\right) \;=\; f(w) - f(z). \end{aligned}$$

Es decir, $x' \in \delta f(z)$.
Análogamente $y' \in \delta f(z)$, más aún

$$< x' - y', x_n > \;=\; \left\langle \lim_{k\to\infty} (x'_k - y'_k) \;,\; x_n \right\rangle \;=\; \lim_{k\to\infty} \langle x'_k - y'_k \;,\; x_n \rangle \;\geq\; \frac{1}{m}$$

lo cual implica que $z \in \mathbf{A}_{n,m}$.

Para ver que $\mathbf{D}\backslash\mathbf{A}_{n,m}$ es denso, consideramos para cada $n \geq 1$ fija, un elemento $x_o \in \mathbf{D}$ de esta manera, nos podemos acercar a x_o mediante elementos $u_k = x_o + r_k x_n \in \mathbf{D}$ con $\left(r_k\right) \subset \mathbb{R}$ tal que $r_k \to 0$.
Así la función $f_1 : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ con $\mathbf{I}= \{r_k \in \mathbb{R} \mid u_k \in \mathbf{D}\}$ dada por $f_1(r_k) := f(u_k)$ es diferenciable excepto en un conjunto a lo más numerable (ver Teorema 1.1).
Por lo tanto, nos acercamos a x_o mediante puntos u_k donde $f_1'(r_k)$ existe.
Luego, si $u_k', v_k' \in \delta f(u_k)$ entonces $u_k'\Big|_{x_o+\mathbb{R}x_n}, v_k'\Big|_{x_o+\mathbb{R}x_n} \in \delta f_1(r_k)$.
Lo cual implica que

$$\begin{aligned} u_k'\Big|_{x_o+\mathbb{R}x_n} &\equiv v_k'\Big|_{x_o+\mathbb{R}x_n} \\ \Rightarrow \quad \langle u_k', x_n\rangle &= \langle v_k', x_n\rangle \\ \Rightarrow \quad \langle u_k' - v_k', x_n\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $u_k \in \mathbf{D}\backslash\mathbf{A}_{n,m}$ con $m \geq 1$ arbitraria, por lo tanto, para cada $n \geq 1$ existe $\left(u_k\right) \subset \mathbf{D}\backslash\mathbf{A}_{n,m}$ tal que $u_k \to x_o$ es decir, $\mathbf{D}\backslash\mathbf{A}_{n,m}$ es denso y concluimos por el Teorema de Categoría de Baire (ver Teorema B.2) que $G = \bigcap (\mathbf{D}\backslash\mathbf{A}_{n,m})$ es denso. □

Proposición 1.11. *Para $x = (x_n)$ en l^∞ consideramos la seminorma $P : l^\infty \to \mathbb{R}$ dada por*

$$P(x) = \overline{\lim}\,|x_n| = \lim_{k\to\infty}\left(\sup\left\{ |x_n| \mid n \geq k \right\}\right)$$

Entonces P es continua y convexa pero no es Gâteaux diferenciable en ningún punto.

Prueba: Por ser P una seminorma se tiene que es convexa y la continuidad se sigue de la definición de P ya que $|P(x)| \leq \| x \|_\infty$.
Por otro lado, si $P(x) = 0$ entonces $(x_n) \subset \mathbb{R}$ es tal que $x_n \to 0$ por lo que tomando $y = (y_n) \subset \mathbb{R}$ con $y_n = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $P(x + ty) - P(x) = P(x + ty)$.
Así

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \sup\{ |x_n + ty_n| \, |n \geq k \} = |t| \\ &\Rightarrow \quad \frac{P(x + ty) - P(x)}{t} = \frac{|t|}{t}. \end{aligned}$$

La cual diverge si $t \to 0$, es decir, no existe $dP(x)(y)$.
Ahora bien, si $P(x) \neq 0$ entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $P(x) = 1$, de esta manera existe $\left(x_{n_i}\right) \subset (x_n)$ tal que $|x_{n_i}| \to 1$.
También podemos suponer que x_{n_i} y x_{n_j} tienen el mismo signo para toda $i, j \in \mathbb{N}$, pues bastaría tomar una subsucesión de $\left(x_{n_i}\right)$, por lo cual sólo consideramos el caso en que $x_{n_i} > 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$.
Luego, si tomamos $y = (y_n) \subset \mathbb{R}$ con

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \neq n_i \text{ ó } n = n_i \text{ con } i \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n = n_i \text{ con } i \text{ par.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(x + ty) - P(x) &= P(x + ty) - 1 \\ \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sup\{ |x_n + ty_n| \, |n \geq k \} - 1 &= \lim_{k\to\infty} \sup\{ |x_{n_i} + t| \, |n_i \geq k, i \ impar \} - 1. \end{aligned}$$

Y dado que

$$\lim_{k\to\infty} \sup\{\, |x_{n_i} + t| \,|n_i \geq k, i \; impar \,\} - 1 = |\, 1 + t \,| - 1$$

consideramos dos casos, primero, si $t > 0$ entonces $|\, 1 + t \,| - 1 = t$ por lo que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{P(x + ty) - P(x)}{t} = 1$$

y si $t < 0$ entonces $|\, 1 + t \,| \to 1$ por lo que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{P(x + ty) - P(x)}{t} = 0.$$

Por lo tanto, no existe $dP(x)(y)$ para toda $x \in l^\infty$. □

Observamos que la Proposición 1.11 no contradice el Teorema 1.2 ya que l^∞ no es un espacio de Banach separable.
A pesar de esta Proposición, hay espacios de Banach no separables en los cuales el Teorema de Mazur es válido, esta clase es la de espacios de Banach débilmente compactos-generados.
Para las siguientes definiciones consideramos **E** un espacio de Banach y **D** ⊂ **E** abierto, convexo y no vacío.

Definición 4. *Decimos que* ***E*** *es un* ***Espacio de Asplund*** *si toda función $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua es Fréchet diferenciable en cada punto de algún subconjunto G_δ denso de* ***D****.*

Definición 5. *Decimos que* ***E*** *es un* ***Espacio débil de Asplund*** *si toda función $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua es Gâteaux diferenciable en cada punto de algún subconjunto G_δ denso de* ***D****.*

Nótese que el término *“débil”* no se refiere a la topología débil, esta terminología se usa por que la diferenciabilidad de Gâteaux es llamada a veces *diferenciabilidad débil* (dado que diferenciabilidad de Fréchet implica diferenciabilidad de Gâteaux.)
Así por la Proposición 1.11 se tiene que l^∞ no es un Espacio débil de Asplund y por el ejemplo dado en 1.2.1, el espacio l^1 no es un Espacio de Asplund. De hecho, más adelante veremos que si **E’** es separable entonces **E** es un espacio de Asplund.
Por otra parte, dado que para funciones convexas y continuas en general es difícil mostrar explícitamente $f'(x)$, cuando esta existe, es posible caracterizar la derivada de Fréchet en x sólo en términos de f y esto se puede hacer si el subdiferencial de f es no vacío. Aún que también el hecho de mostrar la existencia de la derivada es algo no trivial.

Proposición 1.12. *Sea* ***D*** ⊂ ***E*** *abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua. Entonces f es Fréchet diferenciable en x si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x + ty) + f(x - ty) - 2f(x) < t\varepsilon \tag{1.12}$$

para cualesquiera $y \in \boldsymbol{E}$ tal que $\| y \| = 1$ y $0 < t < \delta$.

Prueba: Primero mostremos la necesidad, es decir, supongamos que f es Fréchet diferenciable en x, entonces existe $f' \in$ **E’** tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x + ty) - f(x) - < f'(x), ty > < \frac{\varepsilon}{2} t \,\|\, y \,\|$$

para cualquier $y \in \mathbf{E}$ con $\|y\| = 1$ y $t \in (0, \delta)$.
De hecho esta desigualdad también es válida para $-y$ por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} f(x + ty) - f(x) - < f'(x), ty > &< \frac{\varepsilon}{2} t \qquad \text{y} \\ f(x - ty) - f(x) - < f'(x), -ty > &< \frac{\varepsilon}{2} t \end{aligned}$$

y al sumar estas desigualdades resulta

$$f(x+ty)+f(x-ty)-2f(x)<\varepsilon t$$

por lo que se cumple (1.12).
Suficiencia: Dado que $\delta f(x)\neq\emptyset$ por la Observación 2 tenemos que dada $x'\in$ **E'** y dada $y\in$ **E** tal que $x+ty, x-ty\in$ **D** con $t>0$ implica que

$$\begin{aligned} <x', ty> &= <x', x+ty-x> \leq f(x+ty)-f(x) \quad (1.13)\\ <x', -ty> &\leq f(x-ty)-f(x) \quad (1.14)\end{aligned}$$

y como por hipótesis tenemos que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que (1.12) para cualquier $t\in(0,\delta)$ y cualquier $y\in$ **E** tal que $||y||=1$ se cumple que

$$\begin{aligned} f(x+ty)-f(x) &< t\varepsilon+f(x)-f(x-ty)\\ \Rightarrow f(x+ty)-f(x)-<x', ty> &\leq t\varepsilon+f(x)-f(x-ty)-<x', ty>. \quad (1.15)\end{aligned}$$

Por otro lado, de (1.13) se tiene que

$$f(x+ty)-f(x)-<x', ty>\geq 0$$

y por (1.14) se tiene que

$$f(x)-f(x-ty)-<x', ty>\leq 0$$

por lo que de (1.15) concluimos que:

$$0\leq f(x+ty)-f(x)-<x', ty>\leq t\varepsilon.$$

Por lo tanto f es Gâteaux diferenciable en x y el límite (1.6) converge uniformemente para toda $y\in$ **E** tal que $||y||=1$.
Así f es Fréchet diferenciable en x en virtud de la Proposición 1.6. □

De manera similar tenemos una caracterización para la derivada de Gâteaux.

Proposición 1.13. *Sea* $\boldsymbol{D}\subset\boldsymbol{E}$ *abierto, convexo, no vacío y sea* $f:\mathbf{D}\to\mathbb{R}$ *convexa y continua. Entonces* f *es Gâteaux diferenciable en* x *si y sólo si*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+ty)+f(x-ty)-2f(x)}{t}=0 \quad , \quad \forall y\in\boldsymbol{E}. \quad (1.16)$$

Prueba: Para la necesidad, supongamos que f es Gâteaux diferenciable en x, entonces se tiene que para toda $y\in$ **E** se cumple que

$$\lim_{t\to o^+}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}=df(x)(y).$$

Y esto quiere decir por definición de límite que dada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<t<\delta$ entonces

$$|f(x+ty)-f(x)-df(x)(y)|<\frac{\varepsilon}{2}t.$$

Por lo que

$$-\frac{\varepsilon}{2}t<f(x+ty)-f(x)-df(x)(y)<\frac{\varepsilon}{2}t. \quad (1.17)$$

Pero también tenemos que existe $df(x)(-y)$ por lo que

$$|f(x-ty)-f(x)+df(x)(y)|<\frac{\varepsilon}{2}t$$

es decir,

$$-\frac{\varepsilon}{2}t < f(x-ty) - f(x) + df(x)(y) < \frac{\varepsilon}{2}t. \tag{1.18}$$

Así sumando (1.17) y (1.18) obtenemos

$$\varepsilon\, t < f(x+ty) + f(x-ty) - 2f(x) < \varepsilon\, t.$$

Por lo tanto se cumple (1.16).
Suficiencia: Por las observaciones hechas en la Definición 1 es suficiente mostrar que para toda $y \in \mathbf{E}$ se cumple que $-d^{+}f(x)(-y) = d^{+}f(x)(y)$.
En efecto, sea $y \in \mathbf{E}$ y mostremos que

$$-\lim_{t\to 0^{+}} \frac{f(x-ty)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0^{+}} \frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$$

es decir,

$$\lim_{t\to 0^{+}} \frac{f(x+ty)-f(x)+f(x-ty)-f(x)}{t} = 0$$

Pero esta condición se cumple ya que estamos suponiendo (1.16). □

Así obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.14. *Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua. Entonces el conjunto*

$$\mathbf{G} = \left\{ x \in \mathbf{D} \;\middle|\; f'(x) \;\text{ existe} \right\}$$

posiblemente vacío, es un conjunto G_δ de $\mathbf{D}$.

Prueba: Claramente, si $\mathbf{G} = \emptyset$ entonces $\mathbf{G}$ es un subconjunto G_δ de $\mathbf{D}$.
Si $\mathbf{G} \neq \emptyset$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{G}_n = \left\{ x \in \mathbf{D} \;\middle|\; \exists \delta > 0 \text{ tal que } \sup_{\substack{y\in\mathbf{E}\\ \|y\|=1}} \left\{ \frac{f(x+\delta y)+f(x-\delta y)-2f(x)}{\delta} < \frac{1}{n} \right\} \right\} \tag{1.19}$$

y por el Lema 1.1 tenemos que las funciones

$$\phi(t) = \frac{f(x+ty)-f(x)}{t} \quad \text{y} \quad \psi(t) = \frac{f(x-ty)-f(x)}{t}$$

son no decrecientes conforme $t \to 0^{+}$.
Luego por la Proposición 1.12 tenemos que $\mathbf{G} = \bigcap \mathbf{G}_n$ por lo que sólo necesitamos probar que $\mathbf{G}_n$ es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$.
Para esto, usamos el hecho de que f es localmente Lipschitz, es decir, existen $\delta_1 > 0$ y $M > 0$ tales que si $u, v \in \overline{\mathbf{B}_{\delta_1}(x)}$ entonces $|f(u) - f(v)| \leq M \| u - v \|$ (Ver Prop. 1.1).
Así para cada $x \in \mathbf{G}_n$ existen $\delta > 0$ y $r > 0$ tales que para toda $y \in \mathbf{E}$ con $\| y \| = 1$ se tiene que $x \pm \delta y \in \mathbf{D}$ y

$$\frac{f(x+\delta y)+f(x-\delta y)-2f(x)}{\delta} \leq r < \frac{1}{n}\;.$$

Por lo que dada $z \in \overline{\mathbf{B}_{\delta_2}(x)} \subset \mathbf{D}$ para algún δ_2 tal que $0 < \delta_2 < (\delta_1/2)$ tenemos que $z \pm \delta_2 y \in \mathbf{D}$ con $\| y \| = 1$.

Más aún, si $0 < \delta < \delta_2$ y $\| y \| = 1$ entonces

$$\frac{f(z+\delta y) + f(z-\delta y) - 2f(z)}{\delta} < \frac{1}{n} \ . \tag{1.20}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
&\delta^{-1}\Big[f(z+\delta y) + f(z-\delta y) - 2f(z)\Big] \ = \\
&\delta^{-1}\Big[f(z+\delta y) - f(x+\delta y) + f(x+\delta y) + f(x-\delta y) \ - \\
&f(x-\delta y) + f(z-\delta y) - 2f(z) + 2f(x) - 2f(x)\Big] \ \leq \\
&\delta^{-1}\Big|f(z+\delta y) - f(x+\delta y)\Big| \ + \ \delta^{-1}\Big|f(z-\delta y) - f(x-\delta y)\Big| \ + \\
&\delta^{-1}\Big[f(x+\delta y) + f(x-\delta y) - 2f(x)\Big] \ + \ \delta^{-1}\Big|2f(x) - 2f(z)\Big| \ \leq \\
&M\delta^{-1}\|z+\delta y - x - \delta y\| \ + \ M\delta^{-1}\|z-\delta y - x + \delta y\| \ + \\
&2M\delta^{-1}\|x-z\| \ + r \ = \\
&4M\delta^{-1}\|z-x\| \ + r \ \leq \\
&4M\delta^{-1}\delta_2 \ + \ r \ < 1/n \ , \quad \text{si} \ \ \delta_2 < 4M\delta^{-1}\big((1/n) - r\big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, z satisface (1.20), lo cual implica que $\overline{\mathbf{B}_{\delta_2}(x)} \subset \mathbf{G}_n$, es decir, $\mathbf{G}_n$ es abierto. □

Por último damos una caracterización del mínimo global de una función convexa y continua.

Proposición 1.15. *Sea $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua. Entonces f tiene un mínimo global en $x \in \boldsymbol{D}$ si y sólo la función constante cero es un elemento del subdiferencial de f en x.*

Prueba: $0 \in \delta f(x) \Leftrightarrow \ < 0, y - x > \ \leq f(y) - f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in \mathbf{D}$. □

Capítulo 2

Espacios de Asplund.

En este capítulo, estudiamos los espacios de Asplund y damos condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un espacio de Banach **E** es un espacio de Asplund.
Para esto requerimos del estudio de los operadores monótonos y de los subdiferenciales pero primero denotamos por un mapeo valuado en subconjuntos de un espacio a una función con dominio el espacio dado y contradominio el conjunto potencia de dicho espacio, es decir, la imagen de un elemento es un subconjunto del espacio.

2.1. Operadores Monótonos y Subdiferenciales.

Definición 6. *Un mapeo valuado en subconjuntos de* ***E'****,* $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *es un operador monótono si*

$$< x' - y', x - y > \;\geq\; 0 \tag{2.1}$$

para cualesquiera $x, y \in \boldsymbol{E}$ *y* $x' \in T(x)$; $y' \in T(y)$*; no es necesario que* $T(x)$ *sea no vacío.*
El dominio del operador T es el conjunto

$$D(T) := \left\{ x \in \boldsymbol{E} \;\middle|\; T(x) \neq \emptyset \right\} \tag{2.2}$$

2.1.1. Ejemplos.

1. Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ abierto, convexo y no vacío y consideremos $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ continua y convexa. Entonces el operador $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ dado por

$$T(x) = \begin{cases} \delta f(x) & x \in \mathbf{D} \\ \emptyset & x \notin \mathbf{D} \end{cases}$$

es un operador monótono con $D(T) = \mathbf{D}$.
Prueba: Si $x' \in T(x) = \delta f(x)$ y $y' \in T(y) = \delta f(y)$ entonces

$$\begin{aligned} < x', y - x > \;&\leq\; f(y) - f(x) \quad , \quad \forall y \in \mathbf{D} \\ < y', x - y > \;&\leq\; f(x) - f(y) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$< y', x - y > \;=\; < y', -(y - x) > \;=\; - < y', y - x >$$

entonces se sigue para cualesquiera $x, y \in \mathbf{D}$ que

$$\begin{array}{rcl} < x', y - x > - < y', y - x > & \leq & f(y) - f(x) + f(x) - f(y) \\ \Rightarrow \qquad < x' - y', y - x > & \leq & 0 \\ \Rightarrow \qquad - < x' - y', y - x > & \geq & 0 \\ \Rightarrow \qquad < x' - y', x - y > & \geq & 0. \end{array}$$

El hecho de que $D(T) = \mathbf{D}$ se sigue de la definición de subdiferencial de f en x. □

2. Sean $\mathbf{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $T : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ lineal. Entonces T es monótono si y sólo si $< Tx, x > \geq 0$ para toda $x \in \mathbf{H}$.
   Prueba: Primero mostramos la necesidad. Supongamos que T es monótono, entonces se cumple la condición (2.1), en particular si tomamos $y = 0$.
   Por lo tanto
   $$0 \leq < Tx - T0, x - 0 > = < Tx, x > , \quad \forall x \in \mathbf{H}$$
   dado que T es lineal.
   Suficiencia: Dado que T es lineal se tiene que $Tx - Ty = T(x - y)$ mientras que por hipótesis, $< T(x - y), x - y > \geq 0$. □

3. Una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona no decreciente (en el sentido usual) si y sólo si es monótona en el sentido de la Definición 6, es decir,
   $$t_1 < t_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2) \text{ si y sólo si } \left[\phi(t_2) - \phi(t_1)\right]\left(t_2 - t_1\right) \geq 0 \quad , \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$
   Prueba: Es inmediata de 2 ya que el producto interior en $\mathbb{R}$ es el producto usual entre numeros reales.

4. Sean $\mathbf{H}$ espacio de Hilbert, $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ acotado, cerrado, no vacío y $U : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ un mapeo no expansivo, es decir,
   $$\| U(x) - U(y) \| \leq \| x - y \| \quad , \quad \forall x, y \in \mathbf{C} \tag{2.3}$$
   y sea $I : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ el mapeo identidad. Entonces $T : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ dado por
   $$T(x) = \begin{cases} (I - U)(x) & x \in \mathbf{C} \\ \emptyset & x \notin \mathbf{C} \end{cases} \tag{2.4}$$
   es un operador monótono con $D(T) = \mathbf{C}$.
   Prueba: Si $x, y \in \mathbf{C}$ entonces
   $$\begin{array}{rcl} < T(x) - T(y), x - y > & = & < x - U(x) + y + U(y), x - y > \\ & = & < x - y - [U(x) - U(y)], x - y > \\ & = & \| x - y \|^2 - < U(x) - U(y), x - y > \\ & \geq & \| x - y \|^2 - \| U(x) - U(Y) \| \ \| x - y \| \\ & \geq & \| x - y \|^2 - \| x - y \|^2 = 0. \end{array}$$

Donde la penúltima desigualdad se da por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la última desigualdad se debe a que U es un mapeo no expansivo. □

Definición 7. *Sean X, Y espacios Hausdorff y sea* $T : \mathbf{X} \to 2^Y$ *un mapeo valuado en subconjuntos de Y. Decimos que T es semicontinua superiormente en* $x \in X$ *si para cada* $\mathbf{V} \subset Y$ *abierto tal que* $T(x) \subset \mathbf{V}$ *existe U vecindad de x abierta tal que* $T(U) \subset \mathbf{V}$*.*
Además si $A \subset \boldsymbol{E}$ *entonces definimos*

$$T(A) := \bigcup \left\{ T(x) \middle| \; x \in A \right\}$$

Y decimos que T es semicontinua superiormente en un conjunto A si T es semicontinua superiormente en todo elemento del conjunto A.

Nota: La semicontinuidad superiormente es más general que la continuidad de funciones ya que estamos trabajando con subconjuntos arbitrarios, sin embargo, si el mapeo es univaluado (es decir, la imagen es un singulete o conjunto unitario para todo elemento del dominio) entonces la semicontinuidad superior coincide con nuestra definición usual de continuidad.

Proposición 2.1. *Sea* $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *un mapeo valuado en subconjuntos de* ***E'****. Entonces T es norma-*$\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$ $\left[\textit{respectivamente norma - norma}\right]$ *semicontinua superiormente en* $x \in D(T)$ *si y sólo si para cada* $V \subset \boldsymbol{E'}$ $\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$ $\left[\textit{respectivamente norma}\right]$*-abierto tal que* $T(x) \subset V$ *y cada* $(x_n) \subset D(T)$ *tal que* $\| x_n - x \| \to 0$ *implica que* $T(x_n) \subset V$ *para toda n suficientemente grande.* $\left[\textit{Equivalentemente, } T\left(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}_{\delta}(x)\right) \subset V \textit{ para toda } \delta > 0 \textit{ suficientemente pequeña.}\right]$

Prueba: Para la necesidad supongamos que $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ es norma-$\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ $\left[norma - norma\right]$ semicontinua superiormente en $x \in D(T)$.
Si $V \subset \mathbf{E'}$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ $\left[norma\right]$-abierto tal que $T(x) \subset V$ entonces existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $T\left(\mathbf{B}_{\varepsilon_x}(x)\right) \subset V$.
Por lo que dada $(x_n) \subset D(T)$ con $\| x_n - x \| \to 0$ se cumple que para ε_x existe $N(\varepsilon_x) \in \mathbb{N}$ tal que $\| x_n - x \| < \varepsilon_x$ si $n > N(\varepsilon_x)$ por lo tanto

$$T(x_n) \subset \bigcup \left\{ T(x_n) \middle| \; x_n \in \mathbf{B}_{\varepsilon_x}(x) \right\} \subset T\left(\mathbf{B}_{\varepsilon_x}(x)\right) \subset V.$$

Suficiencia: Supongamos que $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ no es norma-$\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ $\left[norma - norma\right]$ semicontinua superiormente en $x \in D(T)$.
Así existe $V_o \subset \mathbf{E'}$, $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ $\left[norma\right]$-abierto tal que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $T\left(\mathbf{B}_{\varepsilon}(x)\right) \not\subset V_o$ por lo tanto, existe $x'_n \in T\left(\mathbf{B}_{\varepsilon}(x)\right) \setminus V_o$.
De aquí que existe $x_n \in \mathbf{B}_{\varepsilon}(x)$ tal que

$$x'_n \in T(x_n) \subset \bigcup \left\{ T(x_n) \middle| \; x_n \in \mathbf{B}_{\varepsilon}(x) \right\} \subset T\left(\mathbf{B}_{\varepsilon}(x)\right)$$

pero $x'_n \notin V_o \Rightarrow T(x_n) \not\subset V_o$ □

Proposición 2.2. *Sea* $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *un mapeo valuado en subconjuntos de* ***E'*** *tal que* $T(x)$ *es unitario. Entonces*

$$T \textit{ es norma-norma semicontinua superiormente en } x \Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0^+} \textit{diam } T\left(\boldsymbol{B}_{\delta}(x)\right) = 0.$$

Prueba: Para la necesidad supongamos que T es norma-norma semicontinua superiormente en $x \in D(T)$.
Entonces $T(x) = \{x'\}$ y por la Proposición anterior, para todo $\varepsilon > 0$ tal que $x' \in \mathbf{B}_{\varepsilon}(w')$ para algún $w' \in \mathbf{E'}$ y cada $(x_n) \subset D(T)$ con $\| x_n - x \| \to 0$ se tiene que

$$T\left(\mathbf{B}_{\delta}(x)\right) \subset \mathbf{B}_{\varepsilon}(w') \quad \forall \delta > 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{diam} T\Big(\mathbf{B}_\delta(x)\Big) = 0.$$

Suficiencia: Supongamos que

$$\lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{diam} T\Big(\mathbf{B}_\delta(x)\Big) = 0.$$

Entonces

$$\operatorname{diam} T\Big(\mathbf{B}_\delta(x)\Big) < \varepsilon \quad \text{si} \ \| x \| < \delta$$

$$\Rightarrow \sup\Big\{\| w' - y' \| \ \Big| \ y', w' \in T\Big(\mathbf{B}_\delta(x)\Big)\Big\} < \varepsilon \quad , \quad \text{si} \ \| x \| < \delta.$$

Por otro lado, sea $(x_n) \subset D(T)$ tal que $\| x_n - x \| \to 0$ y si $V \subset \mathbf{E'}$ es norma abierto tal que $T(x) = \{x'\} \subset V$ entonces $x' \in V$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_\varepsilon(x') \subset V$.
Ahora bien, como

$$\| x_n - x \| < \delta \ \Rightarrow \ \| x'_n - x' \| < \varepsilon$$

entonces

$$x'_n \in V \ \Rightarrow T\Big(\mathbf{B}_\delta(x)\Big) \subset \bigcup\Big\{T(x_n) \ \Big| \ x_n \in \mathbf{B}_\varepsilon(x)\Big\} \subset V.$$

Es decir, T es norma-norma semicontinua superiormente en x en virtud de la Proposición 2.1. □

Proposición 2.3. *Sea $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ abierto, convexo y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ continua y convexa. Entonces el mapeo subdiferencial $x \mapsto \delta f(x)$ es norma-$\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$ semicontinuo superiormente en $\boldsymbol{D}$.*

Prueba: Por la Proposición 2.1 basta mostrar que si $x_o \in \mathbf{D}$ y $W \subset \mathbf{E'}$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierto y $\delta f(x_o) \subset W$ entonces para cualquier $(x_n) \subset D$ tal que $\| x_n - x_o \| \to 0$ implica que $\delta f(x_n) \subset W$ para toda n suficientemente grande.
Si esto no ocurre entonces existe una subsucesión $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $\delta f(x_{n_k}) \not\subset W$. Es decir, para toda $k \in \mathbb{N}$ existe $x'_{n_k} \in \delta f(x_{n_k}) \backslash W$.

Por otro lado, por la Proposición 1.4, el mapeo subdiferencial es localmente acotado en x_o y existe $\overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_M(x_o)}$ $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacta con $x'_o \in \delta f(x_o)$ y existen $\Big(x'_{n_{k_l}}\Big) \subset \Big(x'_{n_k}\Big)$ y $x' \in \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_M(x'_o)}$ tales que $x_{n_{k_l}} \xrightarrow{\sigma(\mathbf{E'},\mathbf{E})} x'$.
Afirmación: $x' \in \delta f(x_o) \backslash W$.
Sea $y \in \mathbf{D}$ entonces

$$\begin{aligned}
< x', y - x_o > &= \Big\langle \lim_{l\to\infty} x'_{n_{k_l}}, y - \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} \Big\rangle \\
&= \lim_{l\to\infty} \Big\langle x'_{n_{k_l}}, y - x_{n_{k_l}} \Big\rangle \\
&\leq \lim_{l\to\infty} f(y) - f\Big(x_{n_{k_l}}\Big) \\
&= f(y) - f(x_o).
\end{aligned}$$

Así, $x' \in \delta f(x_o)$ sin embargo, dado que $x'_{n_{k_l}} \notin W$ para toda $l \in \mathbb{N}$, ya que:

$$\Big(x'_{n_{k_l}}\Big) \subset \Big(x'_{n_k}\Big) \subset \delta f\Big(x_{n_k}\Big) \backslash W.$$

Entonces, como $x_{n'_{k_l}} \xrightarrow{\sigma(\mathbf{E'},\mathbf{E})} x'$ se tiene que $x' \notin W$, es decir, $x' \in \delta f(x_o) \backslash W$.
Pero $\delta f(x_o) \subset W$ implica que $x' \in W$ y esto es una contradicción. □

Lema 2.1. *Sea* $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ *abierto, convexo, no vacío y sea* $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ *continua, convexa y Fréchet diferenciable en x. Entonces el mapeo subdiferencial* $x \mapsto \delta f(x)$ *es norma-norma semicontinua superiormente en x.*

Prueba: Como f es Fréchet diferenciable entonces $\delta f(x)$ es un conjunto unitario, de hecho, $\delta f(x) = \left\{f'(x)\right\}$. Ahora bien, denotando por x' a $f'(x)$ debemos mostrar que para cualquier V$\subset$ **E'** abierto, según la norma, existe una vecindad U de x tal que $\delta f(U) \subset$ V.
Si esto no ocurre entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para alguna sucesión $\left(x_n\right) \subset \mathbf{D}$ y algún $x'_n \in \delta f(x_n)$ para cada n, tal que $\| x_n - x \| \to 0$ pero $\delta f(x_n) \not\subset$V, es decir, $\| x'_n - x' \| > 2\varepsilon$.
Por lo que existe $z_n \in \mathbf{E}$ tal que $< x'_n - x', z_n > \ > 2\varepsilon$ con $\| z_n \| \ = 1$.
Por otro lado, ya que f es Fréchet diferenciable en x existe $\delta > 0$ tal que $x + y \in \mathbf{D}$ y

$$f(x+y) - f(x) - < x', y > \ \leq \ \in \| y \|$$

con $\| y \| \ \leq \delta$.
Así, dada $x'_n \in \delta f(x_n)$ obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} < x'_n, (x+y) - x_n > & \leq & f(x+y) - f(x_n) \\ \Rightarrow \qquad < x'_n, y > & \leq & f(x+y) - f(x_n) - < x'_n, x - x_n > \\ & = & f(x+y) - f(x) + < x'_n, x_n - x > + f(x) - f(x_n). \end{array}$$

Ahora bien, haciendo $y_n = \delta z_n$ se cumple que $< x'_n - x', y_n > \ = \ < x'_n - x', \delta z_n > \ > 2\varepsilon\delta$.
Luego,

$$\begin{array}{rcl} 2\varepsilon\delta & < & < x'_n - x', y_n > \ = \ < x'_n, y_n > - < x', y_n > \\ & \leq & f(x+y_n) - f(x) + < x'_n, x_n - x > + f(x) - f(x_n) - < x', y_n > \\ & = & \left[f(x+y_n) - f(x) - < x', y_n >\right] + < x'_n, x_n - x > + f(x) - f(x_n) \\ & \leq & \varepsilon \| y_n \| + < x'_n, x_n - x > + f(x) - f(x_n) \\ & = & \varepsilon\delta + < x'_n, x_n - x > + f(x) - f(x_n). \end{array} \tag{2.5}$$

Y gracias a la Proposición 1.4 sabemos que

$$\left| < x', x_n - x > \right| \ \leq \ \| x'_n \| \ \| x_n - x \| \ < \infty. \tag{2.6}$$

Por lo que al combinar (2.5) con (2.6) se deduce que

$$2\varepsilon\delta \ \leq \ \varepsilon\delta + \| x'_n \| \ \| x_n - x \| + \left| f(x) - f(x_n) \right|.$$

Finalmente, dado que por hipótesis suponemos que $\| x_n - x \| \to 0$ y además f es continua, por lo tanto, $\left| f(x) - f(x_n) \right| \to 0$ así podemos concluir que

$$2\varepsilon\delta \ \leq \ \varepsilon\delta$$

lo cual es imposible. □

Definición 8. *Sean* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ *espacios de Banach y sea* $T : \mathbf{E} \to 2^{\boldsymbol{F}}$. *Una selección* $\phi : \mathbf{E} \to \boldsymbol{F}$ *para T es una función univaluada tal que* $\phi(x) \in T(x)$ *para toda* $x \in \boldsymbol{E}$.

Proposición 2.4. *Sea* $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ *abierto, convexo, no vacío y sea* $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ *continua y convexa. Entonces f es Gâteaux diferenciable* $\left[\textit{Fréchet diferenciable}\right]$ *en* $x_o \in \mathbf{D}$ *si y sólo si existe una selección* ϕ *para el mapeo subdiferencial* δf *tal que* ϕ *es norma* $- \sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$ $\left[\textit{norma-norma}\right]$ *continua en* $x_o \in \mathbf{D}$.

Prueba: Para la suficiencia supongamos que existe ϕ selección para $x \mapsto \delta f(x)$ y sea $x_o \in \mathbf{D}$ entonces $\phi(x_o) \in \delta f(x_o)$ es decir,

$$\begin{array}{rcl} < \phi(x_o), y - x_o > & \leq & f(y) - f(x_o) \qquad \forall y \in \mathbf{D} \\ \Rightarrow 0 & \leq & f(y) - f(x_o) - < \phi(x_o), y - x_o > \qquad \forall y \in \mathbf{D}. \end{array} \tag{2.7}$$

Por otro lado, dada $y \in \mathbf{D}$ también se cumple que $\phi(y) \in \delta f(y)$ por definición de selección, así

$$< \phi(y), x_o - y > \ \leq \ f(x_o) - f(y)$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x_o) \ \leq \ - < \phi(y), x_o - y > \ = \ < \phi(y), y - x_o > . \tag{2.8}$$

Por lo que combinando las desigualdades (2.7) y (2.8) obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(y) - f(x_o) - < \phi(x_o), y - x_o > \\ &\leq < \phi(y), y - x_o > - < \phi(x_o), y - x_o > \\ &= < \phi(y) - \phi(x_o), y - x_o > \quad , \quad \forall y \in \mathbf{D}. \end{aligned}$$

De aquí que tomando $y = x_o + tv$ con $t > 0$ tal que $y \in \mathbf{D}$ (pues $\mathbf{D}$ es abierto) se sigue la desigualdad

$$0 \ \leq \ \frac{f(x_o + tv) - f(x_o)}{t} - < \phi(x_o), v > \ \leq \ < \phi(x_o + tv) - \phi(x_o), v > . \tag{2.9}$$

Ahora bien, utilizando la hipótesis de que ϕ es σ(**E'**,**E**)-norma continua en x_o se tiene que dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| < \phi(x_o + tv) - \phi(x_o), v > \right| < \varepsilon \quad , \quad \text{si } 0 < t < \delta.$$

Por lo tanto, al tomar límite cuando $t \to 0^+$ en (2.9) se sigue que $d^+ f(x_o) \equiv \phi(x_o)$ es decir, f es Gâteaux diferenciable en x_o.
Y si ϕ es norma-norma continua en x_o entonces al tomar $y = x_o + v \in \mathbf{D}$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(y) - f(x_o) - < \phi(x_o), v > \\ &\leq < \phi(y) - \phi(x_o), v > \\ &\leq \| \phi(y) - \phi(x_o) \| \ \| v \| \\ &< \varepsilon \| v \| \end{aligned}$$

si $\| v \| < \delta$.
Esto implica que,

$$\left| f(x_o + v) - f(x_o) - < \phi(x_o), v > \right| \ < \ \epsilon \| v \| \quad \text{si } \| v \| < \delta$$

es decir, f es Fréchet diferenciable en x_o con $f'(x_o) \equiv \phi(x_o)$.
Necesidad: Supongamos que f es Gâteaux diferenciable en x_o, entonces por la Proposición 1.2 se tiene que $\delta f(x_o)$ es un conjunto unitario.
Dado que $x \mapsto \delta f(x)$ es σ(**E'**,**E**)-norma semicontinuo superiormente en x_o, por la Proposición 2.3 se cumple que cualquier selección para el mapeo subdiferencial es σ(**E'**,**E**)-norma continua superiormente en x_o.
Por último, si suponemos que f es Fréchet diferenciable en x_o entonces $\delta f(x_o)$ es un conjunto unitario y por el Lema 2.1, $x \mapsto \delta f(x)$ es norma-norma semicontinuo superiormente en x_o por lo tanto, cualquier selección para el mapeo subdiferencial es norma-norma continua en x_o. □

Corolario 2.1. *Sea $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ continua, convexa y Fréchet diferenciable en $\boldsymbol{D}$. Entonces $x \mapsto f'(x)$ es norma-norma continuo en $\boldsymbol{D}$.*

Definición 9. *Para $x' \in \boldsymbol{E'} \backslash \{0\}$ y $\alpha \in (0,1)$ definimos el α-cono como el conjunto*

$$k(x'; \alpha) := \left\{ x \in \boldsymbol{E} \ \middle| \ \alpha \| x \| \ \| x' \| \ \leq \ < x', x > \right\}$$

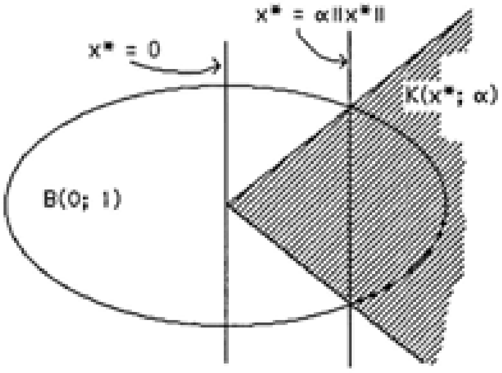

Figura 2.1: α-cono

La figura 2.1 muestra la idea geométrica de los α-conos, cabe mencionar que si $\alpha \to 0$ entonces el α-cono, $k(x';\alpha)$ se hace más ancho.

Proposición 2.5. *Los α-conos satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $k(x';\alpha) + k(x';\alpha) \subset k(x';\alpha)$.
2. $\beta k(x';\alpha) \subset k(x';\alpha) \quad , \quad \forall \beta \in (0,1)$.
3. $k(x';\alpha)$ *es convexo.*
4. $k(x';\alpha)$ *es cerrado.*
5. $int\, k(x';\alpha) = \Big\{ x \in \boldsymbol{E} \;\Big|\; \alpha \parallel x \parallel \; \parallel x' \parallel \; < \; < x', x > \Big\}$.

Prueba: 1) si $u, v \in k(x';\alpha)$ entonces

$$\begin{aligned}
\alpha \parallel u + v \parallel \; \parallel x' \parallel &\leq \alpha\Big[\parallel u \parallel + \parallel v \parallel\Big] \; \parallel x' \parallel \\
&= \alpha \parallel u \parallel \; \parallel x' \parallel + \; \alpha \parallel v \parallel \; \parallel x' \parallel \\
&\leq \; < x', u > + < x', v > \\
&= \; < x', u + v >
\end{aligned}$$

es decir, $u + v \in k(x';\alpha)$.
2) Si $\beta \in (0,1)$ y $u \in k(x';\alpha)$ entonces

$$\alpha \parallel \beta u \parallel \; \parallel x' \parallel \; = \; \alpha\beta \parallel u \parallel \; \parallel x' \parallel \; \leq \; \beta < x', u > \; \leq \; < x', u >$$

es decir, $\beta u \in k(x';\alpha)$.
3) si $t \in (0,1)$ y $u, v \in k(x';\alpha)$ entonces $tu + (1-t)v \in k(x';\alpha)$ en virtud de las propiedades 1 y 2.
4) $k(x',\alpha)$ es cerrado ya que

$$k(x',\alpha) = \Big\{ x \in \mathbf{E} \backslash \{0\} \;\Big|\; \alpha \parallel x' \parallel \; \leq \; \Big\langle x', \frac{x}{\parallel x \parallel} \Big\rangle \Big\} \cup \Big\{ 0 \Big\}$$

el cual es un conjunto cerrado por ser la imagen inversa bajo

$$\widehat{\frac{x}{||x||}}(x') := \Big\langle x', \frac{x}{||x||} \Big\rangle$$

de $[\alpha \parallel x' \parallel, \infty)$ unión el cero.

5) Sea $B := \left\{x \in \mathbf{E} \;\middle|\; \alpha \parallel x \parallel \parallel x' \parallel \,<\, < x', x > \right\}$ el cual claramente es un subconjunto de $k(x';\alpha)$ y además B es abierto dado que

$$B = \left\{ x \in \mathbf{E} \;\middle|\; \alpha \parallel x' \parallel \,<\, \left\langle x', \frac{x}{\parallel x \parallel} \right\rangle \right\}$$

el cual es la imagen inversa bajo

$$\widehat{\frac{x}{\|x\|}}(x') := \left\langle x', \frac{x}{\|x\|} \right\rangle$$

de $(\alpha \parallel x' \parallel, \infty)$.
Luego, int $k(x';\alpha)$ $\subset$B pues en B faltan los elementos donde se da la igualdad, y estos puntos, no son puntos interiores.
Por lo tanto, de la de Definición de interior se sigue que int $k(x';\alpha) = B$. □

Definición 10. *Un subconjunto M de **E** es magro con respecto a un α-cono para algún* $\alpha \in (0,1)$ *si para toda x ∈M, y para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $z \in \overline{\boldsymbol{B}^{E}_{\varepsilon}(x)}$ *y existe* $x' \in$ ***E'***$\setminus\{0\}$ *tales que*

$$M \cap \left[z + intk(x';\alpha)\right] = \emptyset.$$

Es decir, M es magro con respecto a un α-cono si cualquier punto de M puede ser aproximado arbitrariamente cerca por vértices de conos cuyos interiores están en el complemento de M.
Nota: $z + int\big(k(x';\alpha)\big) = \left\{y \in \mathbf{E} \;\middle|\; \alpha \parallel x' \parallel \parallel y - z \parallel \,<\, < x', y - z > \right\}$
En la figura 2.2 mostramos un ejemplo de un conjunto que no es magro con respecto a un α cono.

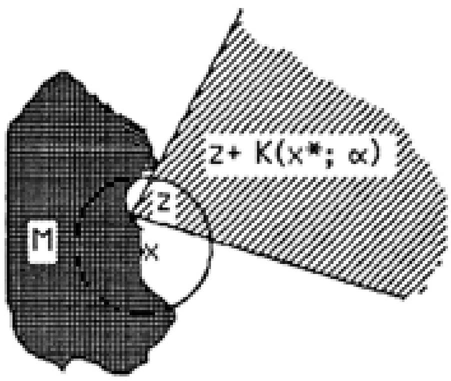

Figura 2.2: Conjunto no Magro

Definición 11. *Un subconjunto M de **E** es angularmente pequeño si para todo* $\alpha \in (0,1)$ *M es la unión numerable de conjuntos magros con respecto a los α-conos.*

Observación 3. *Sea M magro con respecto a los α-conos. Entonces la cerradura de M tiene interior vacío, ya que de lo contrario existiría un* $x_o \in M$ *tal que* $x_o \in M \cap \big[z + int\big(k(x';\alpha)\big)\big]$.
De aquí que, todo conjunto angularmente pequeño es de primer categoría de Baire, ver Definición 38.

Teorema 2.1. ***(Preiss-Zajicek.*** *)Sea* $\mathbf{E}$ *espacio de Banach con dual separable y sea* $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *monótono. Entonces existe un conjunto* $A \subset D(T)$ *angularmente pequeño tal que* T *es univaluado y norma-norma semicontinua superiormente en* $D(T)\backslash A$.

Prueba: En virtud de la Proposición 2.2 basta mostrar que

$$A := \left\{ x \in D(T) \;\middle|\; \lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} T\Big(\mathbf{B}_\delta(x)\Big) > 0 \right\}$$

es un conjunto angularmente pequeño.
Por otro lado, definiendo

$$A_n := \left\{ x \in D(T) \;\middle|\; \lim_{\delta \to 0^+} \operatorname{diam} T\Big(\mathbf{B}_\delta(x)\Big) > \frac{1}{n} \right\}$$

tenemos que $A = \bigcup A_n$.
Luego, como **E'** es separable, existe $\left(x'_k\right) \subset$ **E'** sucesión densa y si $\alpha \in (0,1)$ entonces definimos

$$A_{n,k} := \left\{ x \in A_n \;\middle|\; \operatorname{dist}\left(x'_k, T(x)\right) < \frac{\alpha}{4n} \right\}$$

con lo que $A_n = \bigcup A_{n,k}$.
Ahora bien, para mostrar que cada $A_{n,k}$ es magro con respecto a los α-conos, tomamos $x_o \in A_{n,k}$ y sea $\varepsilon > 0$ así, $x_o \in A_n$ y existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$ y existen $z_1, z_2 \in \mathbf{B}_\delta(x_o)$ tales que $z'_i \in T(z_i)$ con $i = 1, 2$ y $\| z'_1 - z'_2 \| > (1/n)$.

Por lo que para cualquier $x' \in T(x_o)$ se tiene que $\| z'_i - x' \| > (1/2n)$ para alguna $i = 1, 2$ por la desigualdad del triángulo.
Mientras que $\operatorname{dist}\Big(x'_k, T(x_o)\Big) < (\alpha/4n)$ implica que existe $x' \in T(x_o)$ tal que
$\| x'_k - x' \| < (\alpha/4n)$.
Por lo tanto, existe $z \in \mathbf{B}_\varepsilon(x_o)$ tal que $z' \in T(z)$ y

$$\begin{aligned} \| z' - x'_k \| &= \| z' - x' - (-x' + x'_k) \| \\ &\geq \| z' - x' \| - \| -x'_k + x'_k \| \\ &> \frac{1}{2n} - \frac{\alpha}{4n} \\ &> \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n} \qquad \text{pues } \alpha \in (0,1) \\ &= \frac{1}{4n} \end{aligned} \tag{2.10}$$

tomando z' como la correspondiente z'_i tal que $\| z'_i - x' \| > (1/2n)$.
Y por último, para mostrar que

$$A_{n,k} \cap \Big\{ y \in \mathbf{E} \;\Big|\; < z' - x'_k, y - z > \; > \alpha \| z' - x'_k \| \; \| y - z \| \Big\} = \emptyset$$

tomamos $y \in D(T)$ tal que $< z' - x'_k, y - z > \; > \alpha \| z' - x'_k \| \; \| y - z \|$ y si $y' \in T(y)$ entonces $y' \notin A_{n,k}$.
En efecto, como T es monótono entonces $< y' - z', y - z > \; \geq 0$ y

$$\begin{aligned} < y' - x'_k, y - z > &= < y' - z' + z' - x'_k, y - z > \\ &= < y' - z', y - z > + < z' - x'_k, y - z > \\ &\geq < z' - x'_k, y - z > \\ &> \alpha \| z' - x'_k \| \; \| y - z \| \\ &\geq \frac{\alpha}{4n} \| y - z \| \qquad \text{por (2.10).} \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\left\langle y' - x'_k, \dfrac{y-z}{\| y-z \|} \right\rangle > \dfrac{\alpha}{4n}$ de aquí que

$$\| y' - x'_k \| > \frac{\alpha}{4n}$$

es decir, $y \notin A_{n,k}$. □

Teorema 2.2. *Sea **E** un espacio de Banach tal que **E'** es separable. Entonces **E** es un espacio de Asplund.*

Prueba: Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ convexo, abierto y no vacío y consideremos $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ cualquier función convexa y continua.
Dado que $x \mapsto \delta f(x)$ es un operador monótono entonces por el Teorema 2.1 existe A$\subset D(T)$ angularmente pequeño tal que $x \mapsto \delta f(x)$ es univaluado y norma-norma semicontinuo superiormente en $D(T)\backslash A$ el cual es un conjunto G_δ denso ya que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

con cada A_n subconjunto magro con respecto a los α-conos, es decir, $\operatorname{int}\left(\overline{A_n}\right) = \emptyset$.
Así en virtud de la Proposición 2.4 basta tomar la selección trivial en cada $x \in D(T)\backslash A$ para que $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ sea Fréchet diferenciable en $D(T)\backslash A$. □

Como ejemplo de espacio de Banach con dual separable, tenemos al espacio de sucesiones $\mathbf{C}_o$; pero no l^1, pues su dual l^∞ no es separable. Además, los espacios l^p y L^p con $1 < p < \infty$ si tienen espacio dual separable.
De manera más general, todo espacio de Banach reflexivo y separable tiene dual separable.

Teorema 2.3. *Supongamos que todo subespacio cerrado separable **F** de **E** es espacio de Asplund. Entonces **E** es un espacio de Asplund.*

Prueba: La demostración será por contrapositiva.
Si **E** no es espacio de Asplund entonces existe $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ continua y convexa con $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ convexo, abierto y no vacío tal que

$$G = \left\{ x \in \mathbf{D} \;\middle|\; f \text{ es Fréchet diferenciable en } x \right\}$$

no es denso en **D**.
Ahora bien, construiremos un subespacio cerrado y separable **F** de **E** tal que $\mathbf{F} \cap \mathbf{D} \neq \emptyset$ y el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbf{D} \;\middle|\; f\big|_F \text{ es Fréchet diferenciable en } x \right\}$$

no es denso en $\mathbf{F} \cap \mathbf{D}$.
Para esto, utilizamos los conjuntos $\mathbf{G}_n$ dados en (1.19) es decir, dada f definimos

$$\mathbf{G}_n(f) := \left\{ x \in \mathbf{D} \;\middle|\; \exists \delta > 0 \text{ tal que } \sup_{\substack{y\in\mathbf{E} \\ \|y\|=1}} \left\{ \frac{f(x+\delta y) + f(x-\delta y) - 2f(x)}{\delta} < \frac{1}{n} \right\} \right\} \tag{2.11}$$

con los cuales se tiene que $G(f) = \bigcap G_n(f)$.
Y dado que **D** es un espacio de Baire (ver Definición 39) podemos concluir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $G_m(f)$ no es denso en **D**, es decir, existe $U \subset \mathbf{D}\backslash G_m(f)$ abierto y no vacío.
Para construir el subespacio cerrado y separable definimos por inducción una sucesión creciente (F_k) tal que F_k será un subespacio separable y cerrado de **E** para toda k y tomaremos $F = \overline{\bigcup F_k}$.

Primero, como U es no vacío, dado $x_1 \in U$ existe $\left(y_{1,j}\right) \subset U$ con $\left\|y_{1,j}\right\| = 1$ tal que para toda $\delta > 0$ se satisface que

$$\sup_j \frac{f\left(x_1 + \delta y_{1,j}\right) + f\left(x_1 - \delta y_{1,j}\right) - 2f\left(x_1\right)}{\delta} \geq \frac{1}{2m}$$

pues $x_1 \notin G_m(f)$.

Así definimos $F_1 := \overline{span\left(x_1, \left\{y_{1,j}\right\}\right)}_{j\in\mathbb{N}}$ de esta manera, F_1 es separable y $F_1 \cap U \neq \emptyset$ ya que $x_1 \in F_1 \cap U$.

Luego, tomamos el conjunto $\left\{x_{1,p}\right\}_{p\in\mathbb{N}} \subset F_1 \cap U$ denso numerable y para cada $p \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ existe $\left(y_{p,j}\right) \subset F_1 \cap U$ con $\left\|y_{p,j}\right\| = 1$ tales que

$$\sup_j \frac{f\left(x_{1,p} + \delta y_{p,j}\right) + f\left(x_{1,p} - \delta y_{p,j}\right) - 2f\left(x_{1,p}\right)}{\delta} \geq \frac{1}{2m} \quad .$$

Entonces definimos $F_2 := \overline{span\left(F_1, \left\{x_{1,p}\right\} \cup \left\{y_{p,j}\right\}\right)}_{p,j\in\mathbb{N}}$.

Por lo tanto, de manera recursiva construimos una sucesión de espacios densos numerables cerrados F_k tales que $F_k \subset F_{k+1}$ y $F_k \cap U \neq \emptyset$ y hacemos $F := \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k}$.

Observamos que F es separable con $\left\{x_{n,p}\right\}_{n,p\in\mathbb{N}}$subconjunto denso numerable en $F \cap U$ y por construcción se tiene que $x_{k,p} \notin G_{2m}\left(f\big|_F\right)$ con $G_{2m}\left(f\big|_F\right)$ definido como en (2.11), entonces $\left\{x_{k,p}\right\} \subset \left(D \cap U\right) \backslash G_{2m}\left(f\big|_F\right)$ ya que $U \subset D$.

Por último, $G_{2m}\left(f\big|_F\right)$ es abierto en F con lo cual $F \cap U \subset \left(D \cap U\right) \backslash G_{2m}\left(f\big|_F\right)$ pues de lo contrario, existiría $x_o \in F \cap U$ tal que

$$\begin{aligned} & x_o \notin \left(D \cap U\right) \backslash G_{2m}\left(f\big|_F\right) \\ \Rightarrow \quad & x_o \in \mathbf{E} \backslash \left[\left(D \cap U\right) \cap \left(\mathbf{E} \backslash G_{2m}\left(f\big|_F\right)\right)\right] \\ \Rightarrow \quad & x_o \in \left[\left(\mathbf{E} \backslash \left(D \cap U\right)\right) \cup G_{2m}\left(f\big|_F\right)\right] \end{aligned}$$

y dado que $x_o \in U$ y como $D \cap U = U$ se tiene que $x_o \notin \mathbf{E} \backslash \left(D \cap U\right)$ con lo cual $x_o \in G_{2m}\left(f\big|_F\right)$ y esto implica que existe $x_{k,p} \in G_{2m}\left(f\big|_F\right)$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $f\big|_F$ no es Fréchet diferenciable en todo $F \cap U$. □

Corolario 2.2. *Supongamos que todo subespacio separable de un espacio de Banach* $\mathbf{E}$ *tiene dual separable. Entonces* $\mathbf{E}$ *es un espacio de Asplund.*

La prueba es inmediata del Teorema 2.2 y del Teorema 2.3.

Definición 12. *Una rebanada de un subconjunto no vacío* A *de* $\mathbf{E}$ *es un subconjunto no vacío de* A *dado por*

$$S(x', A, \alpha) := \left\{x \in A \;\middle|\; < x', x > \; > \sigma_A(x') - \alpha\right\}$$

donde $x' \in \boldsymbol{E'}, \alpha > 0$ *y* $\sigma_A(x') := \sup\{< x', x > \mid \; x \in A\}$ *es la función soporte de* A.

En la figura 2.3 mostramos la idea geométrica de una Rebanada para un conjunto.

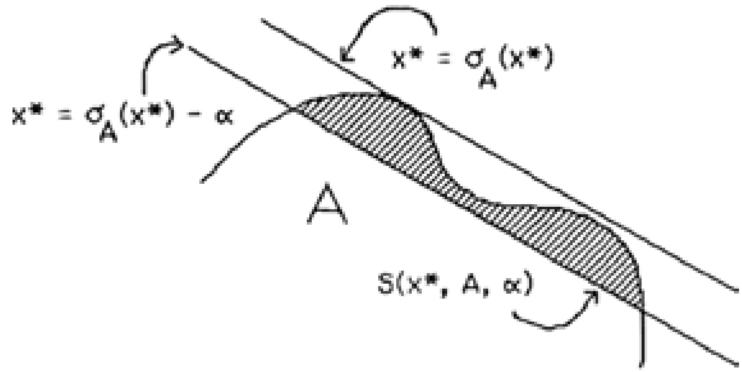

Figura 2.3: Rebanada

Definición 13. *Sea $A \subset$ **E'**. Definimos la $\sigma($**E'**$,$**E**$)$-rebanada de A como:*

$$S(x, A, \alpha) := \left\{x' \in A \;\middle|\; < x', x > \; > \sigma_A(x) - \alpha\right\}$$

donde $x \in \boldsymbol{E}, \alpha > 0$ y $\sigma_A(x) := \sup\{< x', x > \mid x' \in A\}$.

Por otro lado, decimos que un subconjunto no vacío A de **E** admite rebanadas $\left[\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})\text{-rebanadas}\right]$ de diámetro arbitrariamente pequeño si para todo $\varepsilon > 0$ existe una rebanada $\left[\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})\text{-rebanada}\right]$ de A de diámetro menor que ε.

Lema 2.2. *Sea **E** un espacio de Asplund. Entonces todo subconjunto acotado y no vacío A de **E'** admite $\sigma($**E'**$,$**E**$)$-rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño.*

Prueba: Sea $A \subset$ **E'** no vacío y acotado, así considerando la función:

$$P : \mathbf{E} \to \mathbb{R};\; P(x) = \sigma_A(x) = \sup\left\{< x', x > \;\middle|\; x' \in A\right\}.$$

Se tiene que P es una función sublineal y continua ya que por ser A acotado existe $M > 0$ tal que $\| x' \| \leq M$ para todo $x' \in A$ por lo cual

$$\sup_{x' \in A} < x', x > \; \leq M \| x \| \quad , \quad \forall x \in \mathbf{E}.$$

Por otro lado, si existe $\varepsilon > 0$ tal que toda $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanada de A tiene diámetro mayor o igual que ε entonces la función P no es Fréchet diferenciable en **E**:
En efecto, dada $x \in \mathbf{E}$ se cumple que para cada $n \geq 1$ la $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanada dada por $S\left(x, A, (\in /3n)\right)$ es tal que el diám$\left(S\left(x, A, (\in /3n)\right)\right) \geq \varepsilon$ por lo que existen elementos $x'_n, y'_n \in S\left(x, A, (\varepsilon/3n)\right)$ tales que $\| x'_n - y'_n \| > \varepsilon$.
Entonces tenemos que

$$< x'_n, x > \; > \; P(x) - \frac{\varepsilon}{3n} \quad , \quad \forall x \in \mathbf{E}$$

$$< y'_n, x > \; > \; P(x) - \frac{\varepsilon}{3n} \quad , \quad \forall x \in \mathbf{E}$$

$$< x'_n - y'_n, x_n > \; > \; \varepsilon$$

para algún $x_n \in \mathbf{E}$ tal que $\| x_n \|= 1$. Entonces

$$-< x_n', x > -\frac{\varepsilon}{3n} \quad < \quad -P(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{E}$$

$$-< y_n', x > -\frac{\varepsilon}{3n} \quad < \quad -P(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow - < x_n', x > - < y_n', x > -\frac{2\varepsilon}{3n} \quad < \quad -2P(x) \quad , \quad \forall x \in A.$$

Ahora bien, dado que

$$\begin{aligned}
& P[x + (1/n)x_n] + P[x - (1/n)x_n] - 2P[x] \quad \geq \\
& < x_n', x + (1/n)x_n > + < y_n', x - (1/n)x_n > - < x_n', x > - < y_n', x > -(2\varepsilon)/(3n) \quad = \\
& < x_n', x + (1/n)x_n > + < y_n', x - (1/n)x_n > - < x_n' + y_n', x > -(2\varepsilon)/(3n) \quad = \\
& < x_n', x > +(1/n) < x_n', x_n > + < y_n', x > -(1/n) < y_n', x_n > \\
& \quad - < x_n' + y_n', x > -(2\varepsilon)/(3n) \quad = \\
& < x_n' + y_n', x > +(1/n) < x_n' - y_n', x_n > - < x_n' + y_n', x > -(2\varepsilon)/(3n) \quad = \\
& (1/n) < x_n' - y_n', x_n > -(2\varepsilon)/(3n) \quad > \frac{\varepsilon}{n} - \frac{2\varepsilon}{3n} \quad = \frac{\varepsilon}{3n} \quad .
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{P[x + (1/n)x_n] + P[x - (1/n)x_n] - 2P[x]}{(1/n)} \quad > \frac{\varepsilon}{3} \quad .$$

Por lo que de acuerdo a la caracterización de diferenciabilidad de Gâteaux dada por (1.16) tenemos que P no es Gâteaux diferenciable en $x \in \mathbf{E}$ y esto implica que P no es Fréchet diferenciable, por lo tanto, $\mathbf{E}$ no es espacio de Asplund. □

Teorema 2.4. *Sea* $\mathbf{E}$ *es un espacio de Banach separable. Entonces* $\mathbf{E}$ *es espacio de Asplund si y sólo si* **E'** *es separable.*

Prueba: Para la suficiencia, el Teorema 2.2 muestra que si **E'** es separable entonces **E** es espacio de Asplund.
Necesidad: Sea **E** un espacio de Asplund separable y supongamos que **E'** no es separable, por lo tanto, $\mathbf{B}_1^{\mathbf{E'}}(0)$ no es separable. Entonces existe $A \subset \mathbf{B}_1^{\mathbf{E'}}(0)$ no numerable y existe $n_o \geq 1$ tales que
$\| x' - y' \| \geq (1/n_o)$ para todo $x', y' \in A$ con $x' \neq y'$.

Por otro lado, como **E** es separable y $\overline{\mathbf{B}_1^{\mathbf{E'}}(0)}$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ compacta entonces $\overline{\mathbf{B}_1^{\mathbf{E'}}(0)}$ es metrizable (ver [16]) y por lo tanto satisface el segundo axioma de numerabilidad, es decir, existe β base numerable de vecindades de $\left(\overline{\mathbf{B}_1^{\mathbf{E'}}(0)}, \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})\right)$.
Así A tiene a lo más un conjunto numerable de puntos que no son $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ de acumulación.
Ahora bien, definimos

$$\widetilde{A} := A \backslash \left\{ x_n' \;\middle|\; x_n' \text{ no es } \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E}) \text{ de acumulación de } A \right\}$$

y si tomamos una $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanada de $\widetilde{A}$ entonces es un conjunto no vacío de la forma $S(x, \widetilde{A}, \alpha)$ y además es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierto por ser la imagen inversa de $(\sigma_{\widetilde{A}}(x) - \alpha, \infty)$ bajo la función evaluación.
Por lo que dado $x_o' \in S(x, \widetilde{A}, \alpha) \subset \widetilde{A}$ existe $y' \in S(x, \widetilde{A}, \alpha)$ con $y' \neq x_o'$ tal que $\| y' - x_o' \| > (1/n_o)$.
Así el diám$\left(S(x, \widetilde{A}, \alpha)\right) > (1/n_0)$ y esto para cualquier $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanada de $\widetilde{A}$, por lo tanto, **E** no es espacio de Asplund por el Lema 2.2. □

Definición 14. *Un mapeo valuado en subconjuntos de* $\mathbf{E'}$, $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *es n-cíclico monótono si*

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \langle x'_k, x_k - x_{k-1} \rangle \geq 0$$

para cualquier $n \geq 2$ *y* $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{E}$ *tales que* $x_n = x_o$ *y* $x'_k \in T(x_k)$ *con* $k = 1, 2, \ldots, n$.
Y decimos que T *es cíclico monótono si* T *es n-cíclico monótono para toda n.*

Observación 4. *Sea* $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *2-cíclico monótono. Entonces* T *es un operador monótono.*

Prueba: Sean $x, y \in \mathbf{E}$ y consideremos $x' \in T(x)$ y $y' \in T(y)$ entonces por ser T un operador 2-cíclico se cumple que

$$< x' - y', x - y > \; = \; < x', x - y > - < y', x - y > \; = \; < x', x - y > + < y', y - x > \; \geq 0.$$

Es decir, se satisface la condición (2.1) de ser operador monótono. □

Proposición 2.6. *El mapeo lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ *es monótono pero no es 3-cíclico monótono.*

Prueba: Dado que

$$\langle (x_1, x_2), (x_2, -x_1) \rangle = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

se tiene que T es positivo y por el ejemplo 2 se tiene que T es monótono.
Por otro lado, si tomamos $x_1 = (1, 1), x_2 = (0, 1)$ y $x_3 = x_o = (1, 0)$ se tiene que $x'_1 = (1, -1), x'_2 = (1, 0)$ y $x'_3 = (0, -1)$ por lo que

$$\begin{gathered}\left\langle x'_1, x_1 - x_o \right\rangle + \left\langle x'_2, x_2 - x_1 \right\rangle + \left\langle x'_3, x_3 - x_2 \right\rangle = \\ \left\langle (1, -1), (0, 1) \right\rangle + \left\langle (1, 0), (-1, 0) \right\rangle + \left\langle (0, -1), (1, -1) \right\rangle = \\ -1 - 1 + 1 = -1 < 0.\end{gathered}$$

Es decir, T no es 3-cíclico monótono. □

Proposición 2.7. *Sea* $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ *abierto, convexo, no vacío y sea* $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ *continua y convexa. Entonces el mapeo subdiferencial* $x \mapsto \delta f(x)$ *es cíclico monótono.*

La prueba será por inducción. Para el caso $n = 1$ tomamos $x_o, x_1, x_2 \in \mathbf{D}$ tales que $x_o = x_2$ y $x'_k \in \delta f(x_k)$ con $k = 1, 2$ de esta manera, por ser el mapeo subdiferencial un operador monótono (ver ejemplo 1) se cumple que

$$\begin{aligned} 0 \;\; &\leq \; < x'_1 - x'_2, x_1 - x_o > \; = \; < x'_1, x_1 - x_o > - < x'_2, x_1 - x_o > \; = \\ < x'_1, x_1 - x_o > - < x'_2, x_1 - x_2 > \; &= \; < x'_1, x_1 - x_o > + < x'_2, x_2 - x_1 > . \end{aligned}$$

Por lo tanto, el mapeo subdiferencial es un operador 2-cíclico monótono.
Ahora supongamos que el mapeo subdiferencial es k-cíclico monótono para toda $k < n$.

Entonces tomando $x_o, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{D}$ tales que $x_o = x_n$ y $x'_k \in \delta f(x_k)$ con $k = 1, \ldots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \le k \le n} \langle x'_k, x_k - x_{k-1} \rangle \;= \\
&\left\langle x'_1, x_1 - x_o \right\rangle + \sum_{2 \le k \le n-2} \langle x'_k, x_k - x_{k-1} \rangle + \langle x'_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2} \rangle + \langle x'_n, x_n - x_{n-1} \rangle \;= \\
&\left\langle x'_1, x_1 - x_o \right\rangle + \sum_{2 \le k \le n-2} \langle x'_k, x_k - x_{k-1} \rangle + \langle x'_{n-1}, x_o - x_{n-2} \rangle + \langle x'_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2} \rangle \\
&\quad - \left\langle x'_{n-1}, x_o - x_{n-2} \right\rangle + \left\langle x'_n, x_n - x_{n-1} \right\rangle \;= \\
&\left\langle x'_1, x_1 - x_o \right\rangle + \sum_{2 \le k \le n-2} \langle x'_k, x_k - x_{k-1} \rangle + \langle x'_{n-1}, x_o - x_{n-2} \rangle \;+ \\
&\left\langle x'_{n-1}, x_{n-1} - x_{n-2} - x_o + x_{n-2} \right\rangle + \left\langle x'_n, x_n - x_{n-1} \right\rangle \;= \\
&\left\langle x'_1, x_1 - x_o \right\rangle + \sum_{2 \le k \le n-2} \langle x'_k, x_k - x_{k-1} \rangle + \langle x'_{n-1}, x_o - x_{n-2} \rangle \;+ \\
&\left\langle x'_{n-1}, x_{n-1} - x_o \right\rangle + \left\langle x'_n, x_n - x_{n-1} \right\rangle \;= \\
&\left\langle x'_1, x_1 - x_o \right\rangle + \sum_{2 \le k \le n-2} \langle x'_k, x_k - x_{k-1} \rangle + \langle x'_{n-1}, x_o - x_{n-2} \rangle \;+ \\
&\left\langle x'_{n-1}, x_{n-1} - x_o \right\rangle + \left\langle x'_n, x_o - x_{n-1} \right\rangle \;\ge 0
\end{aligned}$$

por hipótesis de inducción y por ser δf un operador 2-cíclico monótono.
Así $x \mapsto \delta f(x)$ es un operador cíclico monótono. □

Cabe destacar que del procedimiento anterior se deduce que todo operador monótono es un operador 2-cíclico monótono.

Definición 15. *Un subconjunto G de* $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E'}$ *es monótono si* $< x' - y', x - y > \ \ge 0$ *para cualesquiera* $(x, x'), (y, y') \in G$.

Observación 5. *Sea* $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *un operador monótono. Entonces su ``gráfica´´ dada por*

$$G(T) = \left\{ (x, x') \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E'} \;\middle|\; x' \in T(x) \right\}$$

es un conjunto monótono.

Definición 16. *Un conjunto monótono es monótono máximo si es máximo en la familia de subconjuntos monótonos de* $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E'}$ *con el orden dado por la inclusión.*

Definición 17. *Un operador monótono T es monótono máximo si su ``gráfica´´es un conjunto monótono máximo.*

Obsérvese que todo operador monótono $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ puede ser extendido a un operador monótono máximo $\bar{T} : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ en el sentido de que G(T) $\subset G(\bar{T})$ ya que en cada familia de conjuntos monótonos basta tomar la unión y de esta manera, por el Lema de Zorn, existe un conjunto monótono máximo.

Proposición 2.8. *El mapeo $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ es monótono máximo si y sólo si se cumple la siguiente condición: Para cualesquiera $y \in \boldsymbol{E}, y' \in$ **E'** tales que*

$$< y' - x', y - x > \ \geq 0 \quad , \quad \forall x \in D(T), \forall x' \in T(x) \tag{2.12}$$

se tiene que $y' \in T(y)$.

Prueba: Para la suficiencia, sea $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ monótono y supongamos que existe $A \subset \mathbf{E} \times \mathbf{E'}$ monótono tal que $G(T) \subset A$ y sean $x \in D(T), x' \in T(x), y \in \mathbf{E}, y' \in \mathbf{E'}$ tales que $(x, x'), (y, y') \in A$ entonces

$$< y' - x', y - x > \ \geq 0$$

y por lo tanto, $y' \in T(y)$.
De aquí que $(y, y') \in G(T)$ es decir,

$$G(T) = A$$

con lo que $G(T)$ es un conjunto máximo.
Necesidad: Supongamos que $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ es monótono máximo y sean $y \in \mathbf{E}$, $y' \in \mathbf{E'}$ tales que se cumple (2.12) y si $(y, y') \notin G(T)$ entonces $A := G(T) \cup \{(y, y')\}$ es un conjunto monótono tal que $G(T) \subsetneq A$ y esto es una contradicción ya que $G(T)$ es monótono máximo. □

Proposición 2.9. *Sea T monótono máximo. Entonces $T(x)$ es un conjunto convexo para toda $x \in \boldsymbol{E}$.*

Prueba: Si $y \in \mathbf{E}, u', v' \in T(y), x \in D(T), x' \in T(x)$ y $\lambda \in (0, 1)$ entonces

$$\begin{aligned} < \lambda u' + (1-\lambda)v' - x', y - x > \ &= \ < \lambda u' + (1-\lambda)v' - \lambda x' - (1-\lambda)x', y - x > \\ &= \ \lambda < u' - x', y - x > + (1-\lambda) < v' - x', y - x > \ \geq \ 0. \end{aligned}$$

Así, por la Proposición 2.8, $\lambda u' + (1-\lambda)v' \in T(y)$ para toda $\lambda \in (0, 1)$. □

Proposición 2.10. *Sea $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ abierto, convexo, no vacío y sea $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ convexa y continua en $x \in \boldsymbol{D}$. Entonces para toda $y \in \boldsymbol{E}$*

$$d^+ f(x)(y) = \sup \left\{ < x', y > \ \middle| \ x' \in \delta f(x) \right\}$$

y este supremo se alcanza en alguna $x' \in \delta f(x)$.

Prueba: Sea $x' \in \delta f(x)$ entonces

$$< x', y > \ \leq \ d^+ f(x)(y) \quad , \quad \forall y \in \mathbf{E}.$$

Y dado que $d^+ f(x)$ es una funcional sublineal continua ya que f es continua en x (ver corolario 1.1) se tiene que para $w \neq 0$ y $\mathbf{W} := span(w)$ definiendo

$$\begin{aligned} z' : \quad & \mathbf{W} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \lambda w \longmapsto \lambda d^+ f(x)(w) \end{aligned}$$

se cumple que $< z', \lambda w > \ \leq \ d^+ f(x)(\lambda w)$.
Así por el Teorema de Hahn-Banach (ver [2]) se tiene que existe $\bar{z}' : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ extensión lineal y continua de z' tal que

$$< \bar{z}', w > \ = \ < z', w > \ = d^+ f(x)(w) \quad \text{y} \quad < \bar{z}', y > \leq d^+ f(x)(y) \quad , \quad \forall y \in \mathbf{E}.$$

Es decir, $\bar{z}' \in \delta f(x)$ y

$$d^+ f(x)(y) = \sup \left\{ < x', y > \ \middle| \ x' \in \delta f(x) \right\}$$

que es lo que se quería demostrar. □

El siguiente resultado que es una reformulación del Teorema de Valor medio, el cual es necesario para probar que el mapeo subdiferencial es un operador monótono máximo.

Proposición 2.11. *Sean* $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subset \mathbb{R}$ *y* $\phi : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *continua. Si* $d^{+}\phi(t)(1) \geq 0$ *para toda* $t \in (0,1)$ *entonces* ϕ *es creciente.*

Prueba: Ver [8].

Teorema 2.5. *Sea* $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *continua y convexa. Entonces el mapeo subdiferencial* δf *es monótono máximo.*

Prueba: Por la Proposición 2.8 basta mostrar que para cualesquiera $y \in \mathbf{E}, y' \in \mathbf{E'}$ tales que $y' \notin \delta f(x)$ implica que existen $x_o \in \mathbf{E}$ y $x'_o \in \delta f(x_o)$ tales que

$$< y' - x'_o, y - x_o > \; < 0.$$

Para esto definimos $g : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x+y) - < y', x >$ la cual es una función continua y convexa además, se satisface que

$$x' \in \delta g(x) \Leftrightarrow x' + y' \in \delta f(x).$$

En efecto, si tomamos $x' \in \delta g(x)$ entonces

$$< x', u - x > \;\leq\; g(u) - g(x) \quad , \quad \forall u \in \mathbf{E}.$$

Por lo que eligiendo $u = v - y$ con $v \in \mathbf{E}$ se tiene que

$$\begin{aligned} & < x', u - x > \;=\; < x', v - y - x > \;\leq\; g(v-y) - g(x) \\ & \Rightarrow \quad < x', v - (x+y) > + < y', v - (x+y) > \;\leq\; g(v-y) - g(x) + < y', v - (x+y) > . \end{aligned}$$

Así dada $v \in \mathbf{E}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; < x' + y', v - (x+y) > \; & \leq \; f(v) - < y', v - y > - f(x+y) \\ & + \; < y', x > + < y', v - (x+y) > \\ & = \; f(v) - f(x+y) - < y', v - y > \\ & + \; < y', v - y > + < y', x > + < y', -x > \\ & = \; f(v) - f(x+y) \\ \Rightarrow \quad x' + y' \in \delta f(x+y). & \end{aligned}$$

Por otro lado, si tomamos $x' + y' \in \delta f(x+y)$ entonces

$$< x' + y', v - (x+y) > \;\leq\; f(v) - f(x+y) \quad , \quad \forall v \in \mathbf{E}.$$

Por lo que

$$< x' + y', v - (x+y) > \;\leq\; f(v) - g(x) - < y', x > \quad , \quad \forall v \in \mathbf{E}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} < x', v - (x+y) > \; & \leq \; f(v) - < y', x > - < y', v - (x+y) > - g(x) \\ & = \; f(v) - < y', v - (x+y) + x > - g(x) \\ & = \; f(v) - < y', v - y > - g(x). \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando $v = u + y$ con $u \in \mathbf{E}$ se cumple que

$$\begin{aligned} < x', u - x > &= < x', u + y - (x + y) > \\ &\leq f(u + y) - < y', u + y - y > -g(x) \\ &= f(u + y) - < y', u > -g(x) \\ &= g(u) - g(x). \end{aligned}$$

Es decir, $x' \in \delta g(x)$. Con lo que queda demostrado que $x' \in \delta g(x) \Leftrightarrow x' + y' \in \delta f(x)$.
Luego, si $y' \notin \delta f(y)$ entonces $0 \notin \delta g(0)$ ya que $0 \notin \delta g(0) \Leftrightarrow 0 + y' \notin \delta f(0 + y)$ y si existen $x_o \in \mathbf{E}$ y $x'_o \in \delta g(x_o)$ tales que $< x'_o, x_o > \ < 0$ entonces tomando $z = x_o + y$ y $z' = x'_o + y'$ se satisface que $z' \in \delta f(z)$ y

$$< y' - z', y - z > \ = \ < y' - x'_o - y', y - x_o - y > \ = \ < -x'_o, -x_o > \ = \ < x'_o, x_o > \ < \ 0.$$

Por lo que basta mostrar que existen $x_o \in \mathbf{E}$ y $x'_o \in \delta g(x_o)$ tales que $< x'_o, x_o > \ < 0$.
Supongamos entonces que $y = 0$ y $y' = 0$ así $g(x) = f(x + 0) - < 0, x >= f(x)$ y como $0 \notin \delta g(0)$ entonces 0 no es mínimo global para f (Ver Proposición 1.15) por lo cual existe $x_1 \in \mathbf{E}$ tal que $f(x_1) < f(0)$.
Consideramos ahora la función convexa $h : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f(tx_1)$ cuya derivada derecha en cualquier $t_o \in (0, 1)$ es tal que

$$d^+h(t_o)(1) = \lim_{t \to 0^+} \frac{h(t_o + t) - h(t_o)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t_o x_1 + t x_1) - f(t_o x_1)}{t} = d^+ f(t_o x_1)(x_1).$$

De aquí que si $d^+ f(t_o x_1)(x_1) \geq 0$ entonces $d^+h(t_o)(1) \geq 0$.
Y por la Proposición 2.11 se tiene que $h(0) \leq h(1)$, es decir, $f(0) \leq f(x_1)$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, $d^+ f(t_o x_1)(x_1) < 0$ para algún $t_o \in (0, 1)$ así definiendo $x_o = t_o x_1$ se tiene que $d^+ f(x_o)(x_1) < 0$ y por la Proposición 2.10 existe $x'_o \in \delta f(x_o)$ tal que

$$< x'_o, x_o > = d^+ f(x_o)(x_1) < 0.$$

Con lo cual se completa la prueba. □

A manera de ejemplo tenemos la siguiente Proposición referente al mapeo dualidad.

Proposición 2.12. *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1/2) \parallel x \parallel^2$ y $J = \delta f$. Entonces el mapeo monótono máximo J es el mapeo dualidad para $\mathbf{E}$, es decir,*

$$J(x) = \left\{ x' \in \boldsymbol{E'} \;\middle|\; < x', x > = \parallel x' \parallel \ \parallel x \parallel \ \text{ y } \ \parallel x' \parallel = \parallel x \parallel \right\} =: A. \tag{2.13}$$

Prueba: Primero observamos que por ser f una composición de funciones convexas y una creciente se cumple que f es convexa además resulta ser continua por ser composición de funciones continuas y por lo tanto se tiene que $d^+ f(x)(y) =\parallel x \parallel d^+ \parallel x \parallel (y)$.
Por lo que si $x = 0$ entonces $d^+ f(0)(y) = 0$ para toda $y \in \mathbf{E}$ de aquí que $d^+ f(0)$ es una funcional lineal y por lo tanto

$$J(0) = \delta f(0) = \left\{ d^+ f(0) \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

Ahora supongamos que $x \neq 0$ y mostremos la igualdad mediante contenciones.
$\subset\big)$ Por la Proposición 1.2 se cumple para toda $y \in \mathbf{E}$ que

$$\begin{aligned} x' \in \delta f(x) &\Leftrightarrow \ < x', y > \ \leq \ d^+ f(x)(y) \\ &\Leftrightarrow \ < x', y > \ \leq \parallel x \parallel d^+ \parallel x \parallel (y) \\ &\Leftrightarrow \ \left\langle \parallel x \parallel^{-1} x', y \right\rangle \ \leq \ d^+ \parallel x \parallel (y) \\ &\Leftrightarrow \ y' := \parallel x \parallel^{-1} x' \ \in \delta \parallel x \parallel \\ &\Leftrightarrow \ < y', y - x > \ \leq \parallel y \parallel - \parallel x \parallel \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por lo que tomando $y = x + z$ con $\| z \| \leq 1$ se cumple que

$$< y', z > \ = \ < y', y - x > \ = \ < y', x + z - x > \ \leq \ \| x + z \| - \| x \| \ \leq \ \| z \| \ \leq 1$$

de aquí que $\| y' \| \ \leq 1$.
Por otro lado, al tomar $y = 0$ tenemos que

$$< y', -x > \ \leq \ - \| x \| \ \Rightarrow \ \| x \| \ \leq \ < y', x > .$$

Pero $< y', x > \ \leq \ \| y' \| \ \| x \|$ por lo que

$$\| x \| \ \leq \ < y', x > \ \leq \ \| y' \| \ \| x \| . \tag{2.15}$$

Y esto implica que $1 \leq \ \| y' \|$ es decir, $\| y' \| \ = 1$.
Por lo tanto, dado que $\| y' \| = \| x \|^{-1} \| x' \|$ se sigue de (2.15) que

$$\begin{aligned} \| x' \| \ = \ \| x \| \quad \text{y} \quad \left\langle \| x \|^{-1} \ x', x \right\rangle \ = \ \| x \| \\ \Rightarrow \quad < x', x > \ = \ \| x \| \ \| x \| \ = \ \| x' \| \ \| x \| . \end{aligned}$$

Con lo cual $x' \in A$.
$\supset)$ Si $x' \in A$ entonces definimos $y' := \| x \|^{-1} \ x' = \| x' \|^{-1} \ x'$ de esta manera,

$$\begin{aligned} & \| y' \| \ = 1 \quad \text{y} \quad < y', x > \ = \ \| x \| \\ \Rightarrow \quad & < y', x - y > \ = \ \| x - y \| \ \geq \ \| x \| - \| y \| \\ \Rightarrow \quad & < y', y - x > \ \leq \ \| y \| - \| x \| \end{aligned}$$

y esto para toda $y \in \mathbf{E}$. Así por (2.14) se tiene que $x' \in \delta f(x)$ es decir, $x' \in J(x)$. □

Cabe destacar que si la norma en $\mathbf{E}$ es Gâteaux diferenciable entonces $J(x)$ es unitario para toda x y por abuso de notación, la derivada de f será denotada también por $J(x)$.

Definición 18. *Un operador monótono $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ es localmente acotado en $x \in D(T)$ si existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que $\| y' \| \ \leq M$ para cualesquiera $y \in \overline{\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{E}}_{\delta}(x)} \cap D(T)$ y $y' \in T(y)$*

Definición 19. *Un subconjunto (no necesariamente convexo) $A \subset \boldsymbol{E}$ tal que $0 \in A$ es absorbente si*

$$\boldsymbol{E} = \bigcup \left\{ \lambda A \ \middle| \ \lambda > 0 \right\}$$

Equivalentemente, A es absorbente si para cada $x \in \boldsymbol{E}$ existe $t > 0$ tal que $tx \in A$.
Y decimos que un punto $x \in A$ es punto absorbente de A si el conjunto trasladado $A - x$ es un conjunto absorbente.

Claramente todo punto interior de un conjunto es un punto absorbente pero si definimos A_1 como la unión de la esfera unitaria, S^1, del espacio y el $\{0\}$ entonces el conjunto A_1 es absorbente a pesar de que su interior es vacío.

Teorema 2.6. *Sea $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ monótono y sea $x \in intD(T)$, o de manera más general, sea x punto absorbente de $D(T)$. Entonces T es localmente acotado en x.*

Prueba: Sea $x' \in T(x)$ para $x \in D(T)$. Definimos el operador $\widehat{T} : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ mediante $\widehat{T}(y) = T(y+x) - x'$.

El cual resulta ser un operador monótono ya que si $u, v \in \mathbf{E}$ y $\widehat{u'}, \widehat{v'} \in \widehat{T}(y)$ entonces

$$< \widehat{u'} - \widehat{v'}, v - u > \; = \; < u' - x' - v' + x', u - v > \; = \; < u' - v', u - v > \; \geq 0$$

dado que T es monótono.
Ahora bien, supongamos sin pérdida de generalidad que $x = 0$ y que $0 \in T(0)$ (bajo traslación) y mostremos que T es localmente acotado en 0.
Para esto tomamos $x \in \mathbf{E}$ y consideramos la función

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \sup\left\{< y', x - y > \;\middle|\; y \in D(T), \;\; \| y \| \leq 1 \;\text{ y }\; y' \in T(y)\right\}$$

y también definimos $C := \left\{x \in \mathbf{E} \;\middle|\; f(x) \leq 1\right\}$.
Primero observamos que f es convexa por ser el supremo de funciones afines (y por lo tanto convexas), más aún como el supremo de funciones continuas es semicontinuo inferiormente se tiene que $C = f^{-1}(-\infty, 1]$ con lo que C resulta ser cerrado.
También notamos que C es convexo, en efecto si $u, v \in C$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$f(tu + (1 - t)v) \;\; \leq \;\; tf(u) + (1 - t)f(v) \;\; \leq \;\; t + (1 - t) = t \leq 1 \Rightarrow tu + (1 - t)v \in C.$$

Luego, como $0 \in T(0)$ entonces $f(x) \geq \, < 0, x - y > \, = 0$ para toda $x \in \mathbf{E}$ y por monotonía, para cualesquiera $y \in D(T)$ y $y' \in T(y)$ se cumple que

$$0 \leq \; < y' - 0, y - 0 > \; = \; < y', y > \; \Rightarrow \; < y', -y > \; \leq 0.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} f(0) &= \sup\left\{< y', 0 - y > \;\middle|\; y \in D(T), \;\; \| y \| \leq 1 \;\text{ y }\; y' \in T(y)\right\} \\ &= \sup\left\{< y', -y > \;\middle|\; y \in D(T), \;\; \| y \| \leq 1 \;\text{ y }\; y' \in T(y)\right\} \\ &\leq 0 \\ \Rightarrow f(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Es decir, $0 \in C$.
Por otra parte, denotando por A al conjunto $C \cap \left(-C\right)$ tenemos que A es absorbente, para esto notemos que C lo es:
Sea $x \in \mathbf{E}$ como $D(T)$ es absorbente existe $t > 0$ tal que $tx \in D(T)$ por lo que existe $u' \in T(tx)$ y si $y \in D(T), y' \in T(y)$ entonces

$$0 \;\; \leq \; < u' - y', tx - y > \; \Rightarrow \; < y', tx - y > \; \leq \; < u', tx - y > .$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} f(tx) &\leq \sup\left\{< u', tx - y > \;\middle|\; y \in D(T), \;\; \| y \| \leq 1 \;\text{ y }\; y' \in T(y)\right\} \\ &= \sup\left\{< u', tx > + < u', -y > \;\middle|\; y \in D(T), \;\; \| y \| \leq 1 \;\text{ y }\; y' \in T(y)\right\} \\ &\leq \; < u', tx > + \sup\left\{< u', -y > \;\middle|\; y \in D(T), \;\; \| y \| \leq 1 \;\text{ y }\; y' \in T(y)\right\} \\ &\leq \; < u', tx > + \| u' \| \; < \infty. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por otra lado, si $\lambda \in (0,1)$ es tal que $\lambda f(tx) < 1$ entonces por la convexidad de f y por (2.16) se cumple que

$$f(\lambda tx) = f\Big(\lambda tx + (1-\lambda)0\Big) \leq \lambda f(tx) + (1-\lambda)f(0) = \lambda f(tx) < 1.$$

Y por lo tanto $\lambda tx \in C$, es decir, C es absorbente.
Así el conjunto A es absorbente, cerrado, convexo y simétrico, entonces

$$\mathbf{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA$$

de donde int$A \neq \emptyset$ por el Teorema de Categoría de Baire (ver Teorema B.2).
Ahora tomamos $\rho_A : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la funcional de Minkowski asociado a A (ver A.1.1.4) entonces

$$\text{int}A = \Big\{x \in A \;\Big|\; \rho_A(x) < 1\Big\}$$

y esto implica que $0 \in \text{int}A$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq 1$ cuando $\| x \| \leq 2\delta$.
Entonces

$$\begin{aligned} 1 \geq f(x) &= \sup\Big\{< y', x-y > \;\Big|\; y \in D(T),\ \| y \| \leq 1 \text{ y } y' \in T(y)\Big\} \\ &\geq < y', x-y > \quad , \quad \forall y \in D(T), \forall y' \in T(y) \text{ con } \| y \| \leq 1 \\ \Rightarrow < y', x > &\leq < y', y > +1 \quad , \quad \forall y \in D(T), \forall y' \in T(y) \text{ con } \| y \| \leq 1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por lo que $y \in \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E}}_{\delta}(0)} \cap D(T), y' \in T(y)$ y la desigualdad (2.18) implican que

$$\begin{aligned} 2\delta \| y' \| &= \sup\Big\{< y', x > \;\Big|\; \| x \| \leq 2\delta\Big\} \\ &\leq \sup\Big\{< y', y > +1 \;\Big|\; y \in D(T),\ \| y \| \leq 1 \text{ y } y' \in T(y)\Big\} \\ &\leq \| y' \| \| y \| +1 \\ &\leq \| y' \| \delta + 1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Y de la desigualdad (2.19) se sigue que

$$2\delta \| y' \| - \delta \| y' \| \leq 1 \;\Rightarrow\; \delta \| y' \| \leq 1 \;\Rightarrow\; \| y' \| \leq \frac{1}{\delta}\ .$$

Por lo que basta hacer $M = \dfrac{1}{\delta}$. □

A continuación mostramos un operador monótono máximo con dominio convexo el cual no tiene puntos interiores.

Proposición 2.13. *En el espacio de Hilbert*

$$l^2 = \left\{ (x_n) \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

consideramos el conjunto $D = \Big\{x = (x_n) \in l^2 \;\Big|\; (2^n x_n) \in l^2\Big\}$ *y definimos el operador* $Tx = (2^n x_n)$ *con* $x \in D$. *Entonces* $D(T) = D$ *y* T *es un operador monótono máximo el cual no es localmente acotado.*

Prueba: Primero notamos que D es un subespacio lineal denso propio de l^2 ya que si $(y_n) \in l^2$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe n_o tal que

$$\sum_{n \geq n_o} y_n^2 < \varepsilon$$

de esta manera para cada $n \geq n_o$ definimos

$$z_n = \frac{1}{2^n} y_n$$

con lo cual $z = (z_n) \in D$ y $y_n = 2^n z_n$ para toda n.
Por otra parte, para ver que T es monótono basta observar que T es positivo (ver ejemplo 2, sección 2.1.1). En efecto, si $x \in D$ entonces

$$< Tx, x > \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (2^n x_n)(x_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n x_n^2\right) \;\geq 0.$$

Por último, para ver que T es monótono máximo tomamos $y, y' \in l^2$ tales que satisfacen (2.12) es decir,

$$\begin{aligned} 0 &\leq < y' - Tx, y - x > \\ \Rightarrow\quad 0 &\leq < y', y > - < Tx, y > - < y', y > + < Tx, x > . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por lo que necesitamos demostrar que $y \in D(T)$ y $Ty = y'$.

Para esto fijamos $n \geq 1, m \geq 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ y definimos

$$x = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \alpha, y_{n+1}, \ldots, y_{n+m}, 0, 0, \ldots)$$

De aquí que $x \in D(T)$ por Definición de $D(T)$. Entonces podemos expandir el lado derecho de (2.20) y cancelar una cantidad de términos para obtener

$$\begin{aligned} 0 &\leq < y', y > -\alpha 2^n y_n - \sum_{k=1}^{n+m} y'_k y_k - \alpha y'_n + y'_n y_n + 2^n \alpha^2 \\ \Rightarrow\quad \alpha 2^n y_n - 2^n \alpha^2 &\leq < y', y > - \sum_{k=1}^{n+m} y'_k y_k - \alpha y'_n + y'_n y_n \\ \Rightarrow\quad \alpha 2^n (y_n - \alpha) &\leq y'_n (y_n - \alpha) \qquad , \qquad \text{si } m \to \infty. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ya que $< y', y > - \sum_{k=1}^{n+m} y'_k y_k \xrightarrow{m\to\infty} 0$, lo cual es valido para toda $n \geq 1$.
Luego, de (2.21) surgen tres consideraciones, primero si $y_n - \alpha > 0$ es decir, si $y_n > \alpha$ entonces $\alpha 2^n \leq y'_n$. La segunda consideración es cuando $y_n - \alpha < 0$ es decir, cuando $y_n < \alpha$ en esta caso se deduce que $\alpha 2^n \geq y'_n$.
Finalmente la tercera consideración es cuando $y_n - \alpha = 0$ es decir, cuando $y_n = \alpha$ y esto implica que

$$y'_n \;=\; \alpha 2^n.$$

Por lo tanto, $y' \in l^2$ con $y' = (2^n y_n)$ y esto quiere decir que $y \in l^2$ y que $Ty = y'$ con lo cual concluimos que T es monótono máximo (mediante la Proposición 2.8) □

Las siguientes dos proposiciones son generalizaciones de las propiedades del subdiferencial de una función convexa y continua dadas en la Proposición 1.4 y 2.3

Proposición 2.14. . *Sea $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ un operador monótono máximo. Entonces $T(x)$ es $\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$-compacto para toda $x \in intD(T)$.*

Prueba: Sea $x_o \in \text{int}D(T)$ por lo tanto, T es localmente acotado en x_o (ver el Teorema 2.6), es decir, existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que $\| y' \| \leq M$ para cualesquiera $y \in \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E}}_{\delta}(x_o)} \cap D(T)$, $\;y' \in T(y)$.
Ahora bien, usando el hecho de que $\overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_{M}(y')}$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})-$compacta basta mostrar que $T(y)$ es cerrado.
En efecto lo es, ya que dada $y' \in \mathbf{E'}\backslash T(y)$, se satisface que existen $x_o \in D(T), x'_o \in T(x_o)$ tales que

$$0 > \; < y' - x'_o, y - x_o > \; \Rightarrow \; < x'_o, y - x_o > \; > \; < y', y - x_o >$$

$$\Rightarrow \;\; \mathbf{E}\backslash T(y) = \left\{ y' \in \mathbf{E'} \;\middle|\; < y', y - x_o > \; < \; < x'_o, y - x_o > \text{ p. a. } x_o \in D(T), x'_o \in T(x_o) \right\}$$

$$= \bigcup_{x_o \in D(T)} \left\{ y' \in \mathbf{E'} \;\middle|\; \widehat{y - x_o}(y') = \; < y', y - x_o > \; < \; < x'_o, y - x_o > \right\}.$$

Los cuales son conjuntos $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})-$Abiertos para cada $x_o \in D(T), x'_o \in T(x_o)$. □

Proposición 2.15. *Sea $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ un operador monótono máximo. Entonces T es norma-$\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$ semicontinuo superiormente en $intD(T)$.*

Prueba: Sea $x_o \in \text{int}D(T)$ y supongamos que T no es un operador norma-$\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ semicontinuo superiormente en x_o.
Entonces por la Proposición 2.1 se tiene que existe $W \subset \mathbf{E'}$ $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})-$abierto con $T(x_o) \subset W$ y existe $(x_n) \subset \text{int}D(T)$ tal que $\| x_n - x_o \| \to 0$ y además existe $\left(x_{n_k}\right) \subset \left(x_n\right)$ tal que $T\left(x_{n_k}\right) \not\subseteq W$ es decir, para toda $k \in \mathbb{N}$ existe $x'_{n_k} \in T\left(x_{n_k}\right)\backslash W$.
Por otro lado, por ser T monótono se tiene que T es localmente acotado en x_o (ver Proposición 2.6) y como $\overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_{M}(x'_o)}$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacta se tiene que existen

$$\left(x'_{n_{k_l}}\right) \subset \left(x'_{n_k}\right) \;\text{ y }\; x' \in \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E'}}_{M}(x'_o)} \;\text{ tales que }\; x'_{n_{k_l}} \xrightarrow{\sigma(\mathbf{E'},\mathbf{E})} x'.$$

Afirmación: $x' \in T(x_o)\backslash W$.
Para esto tomamos $y \in D(T), y' \in T(y)$ y de esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} \langle x' - y', x_o - y \rangle &= \left\langle \lim_{l\to\infty} x'_{n_{k_l}} - y', \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} - y \right\rangle \\ &= \lim_{l\to\infty} \left\langle x'_{n_{k_l}} - y', x_{n_{k_l}} - y \right\rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Pues T es monótono máximo, por lo que de la última desigualdad se sigue que $x' \in T(x_o)$ pero como $x'_{n_{k_l}} \notin W$ para toda $l \in \mathbb{N}$ y por

$$x'_{n_{k_l}} \xrightarrow{\sigma(\mathbf{E'},\mathbf{E})} x'$$

se cumple que $x' \notin W$ es decir, $x' \in T(x_o)\backslash W$.
Por último notemos que el hecho de que $T(x_o) \subset W$ implica que $x' \in W$ lo cual es una contradicción. □

Teorema 2.7. *Supongamos que todo subconjunto acotado no vacío del dual de un espacio de Banach* $\boldsymbol{E}$ *admite* $\sigma(\boldsymbol{E'},\boldsymbol{E})$*-rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño. Entonces para todo operador monótono máximo* $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ *con* $intD(T) \neq \emptyset$ *existe un conjunto* $G \subset intD(T)$ *que es* G_δ *denso y tal que* T *es univaluado y norma-norma semicontinuo superiormente en cada punto de* G.

Prueba: Para cada $n \geq 1$ definimos los conjuntos

$$G_n = \left\{ x \in intD(T) \;\middle|\; \text{existe } V \text{ vecindad de } x \text{ tal que } V \subset W \text{ y diam} T(V) < \frac{1}{n} \right\}. \tag{2.22}$$

De esta manera, T es univaluado y norma-norma semicontinuo superiormente en

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

ya que dado $U \subset \mathbf{E'}$ abierto tal que $T(x) \in U$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{B}_{(2/n_o)}(T(x_o)) \subset U$.
Y como $x \in G_n$ para toda n existe V vecindad de x tal que $V \subset W$ y diam$T(V) < (1/n)$ por lo que $T(V) \subset U$.
Como int$D(T) \neq \emptyset$ basta mostrar que G_n es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$ debido al Teorema de Categoría de Baire (ver Teorema B.2).
Primero observemos que G_n es abierto por Definición para cada n. Luego para ver que G_n es denso en int$D(T)$ tomamos $x \in$ int$D(T)$ y U vecindad de x tal que $U \subset$ int$D(T)$ de aquí que x es punto absorbente por lo cual T es localmente acotado en x (ver el Teorema 2.6.)
Así podemos suponer que $T(U)$ es acotado y por hipótesis existen $z \in \mathbf{E}$ y $\alpha > 0$ tales que si

$$S \equiv S(z, T(U), \alpha) = \left\{ x' \in T(U) \;\middle|\; < x', z > \; > \sigma_{T(U)}(z) - \alpha \right\} \tag{2.23}$$

entonces diam$S < (1/n)$.
Por lo tanto, dada $x' \in S$ tenemos que $x' \in T(x_1)$ para algún $x_1 \in U$ lo cual implica que existe $r > 0$ tal que $x_o = x_1 + rz \in U$ por lo que tenemos que $T(x_o) \subset W$ ya que si $y' \in T(x_o)$ entonces por ser T monótono máximo se satisface que

$$\begin{aligned} 0 \leq \; < y' - x', x_o - x_1 > \; = \; < y' - x', rz > \; \Leftrightarrow \; 0 \leq \frac{1}{r} < y' - x', rz > \\ \Rightarrow \; 0 < \; < y', z > - < x', z > \; \Rightarrow \; \sigma_{T(U)}(z) - \alpha < \; < x', z > \; < \; < y', z > \end{aligned}$$

Y esto implica que $y' \in S$.
Finalmente como $\left\{ x' \in \mathbf{E'} \;\middle|\; < x', z > \; > \sigma_{T(U)}(z) - \alpha \right\}$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierto y T es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-semicontinuo superiormente entonces existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{B}_\delta(x_o) \subset U$ y $T(\mathbf{B}_\delta(x_o)) \subset S$ de aquí que

$$\text{diam} T\big(\mathbf{B}_\delta(x_o)\big) < (1/n).$$

Por lo tanto, $x_o \in G_n \cap U$ es decir, G_n es denso para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Nota: La hipótesis del Teorema 2.7 se satisface si $\mathbf{E}$ es un espacio de Asplund en virtud del Lema 2.2.

Lema 2.3. *Sea* $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ *convexo, abierto y sea* $x_o \in \boldsymbol{D}$ *y sea* $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ *continua y convexa. Entonces existe* U *vecindad de* x_o *en* $\boldsymbol{D}$ *y existe* $\widetilde{f} : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *Lipschitz y convexa tal que* $\widetilde{f} \equiv f$ *en* U.

Prueba: Dada $n \geq 1$ definimos la función "ínf-convolución" de f y de $n \| \cdot \|$, es decir,

$$\begin{aligned} \widetilde{f_n} : \; & \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \inf\left\{ f(y) + n \| x - y \| \;\middle|\; y \in \mathbf{D} \right\}. \end{aligned}$$

Primero vemos que $\widetilde{f_n}$ es convexa:
Si $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ y $t \in [0,1]$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ se satisface que

$$\begin{aligned} t\widetilde{f_n}(x_1) + (1-t)\widetilde{f_n}(x_2) &= \inf_{y\in\mathbf{D}}\Big\{tf(y) + nt \parallel y - x_1 \parallel\Big\} + \inf_{y\in\mathbf{D}}\Big\{(1-t)f(y) + (1-t)n \parallel y - x_2 \parallel\Big\} \\ &\geq f(y) + nt \parallel y - x_1 \parallel + n(1-t) \parallel y - x_2 \parallel - \varepsilon \quad , \quad \text{para alguna } y \in \mathbf{D}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \inf_{y\in\mathbf{D}}\Big\{tf(y) + nt \parallel y - x_1 \parallel\Big\} + \inf_{y\in\mathbf{D}}\Big\{(1-t)f(y) + (1-t)n \parallel y - x_2 \parallel\Big\} \geq \\ & \inf_{y\in\mathbf{D}}\Big\{f(y) + nt \parallel y - x_1 \parallel + n(1-t) \parallel y - x_2 \parallel\Big\} - \varepsilon \geq \\ & \inf_{y\in\mathbf{D}}\Big\{f(y) + n \parallel tx_1 + (1-t)x_2 - ty - (1-t)y \parallel\Big\} - \varepsilon = \\ & \widetilde{f_n}(tx_1 + (1-t)x_2) - \varepsilon. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \widetilde{f_n}(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq t\widetilde{f_n}(x_1) + (1-t)\widetilde{f_n}(x_2) + \varepsilon \quad ; \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \widetilde{f_n}(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq t\widetilde{f_n}(x_1) + (1-t)\widetilde{f_n}(x_2). \end{aligned}$$

Ahora notemos que $\widetilde{f_n}(x) \leq f(x)$ para toda $x \in \mathbf{D}$ pues si tomamos $y = x$ tenemos que

$$\widetilde{f_n}(x) = \inf\Big\{f(y) + n \parallel x - y \parallel \;\Big|\; y \in \mathbf{D}\Big\} \leq f(x) + n \parallel x - x \parallel = f(x). \tag{2.24}$$

Por otro lado, dadas $u, v \in \mathbf{E}$ y $\varepsilon > 0$ existe $y \in D$ tal que

$$\begin{aligned} \widetilde{f_n}(u) > f(y) + n \parallel u - y \parallel - \varepsilon \quad & \text{y} \quad \widetilde{f_n}(v) \leq f(y) + n \parallel v - y \parallel \\ \Rightarrow \widetilde{f_n}(v) - \widetilde{f_n}(u) &\leq f(y) + n \parallel v - y \parallel - f(y) - n \parallel u - y \parallel + \varepsilon \\ &= n\Big[\parallel v - y \parallel - \parallel u - y \parallel\Big] + \varepsilon \\ &\leq n \parallel v - y - u + y \parallel + \varepsilon \\ &= n \parallel v - u \parallel + \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Como (2.25) se satisface para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\widetilde{f_n}(v) - \widetilde{f_n}(u) \leq n \parallel v - u \parallel . \tag{2.26}$$

Por lo tanto, intercambiando u por v en (2.26) podemos concluir que

$$\Big|\widetilde{f_n}(v) - \widetilde{f_n}(u)\Big| \leq n \parallel v - u \parallel \quad , \quad \forall u, v \in \mathbf{E}.$$

Es decir, $\widetilde{f_n}$ es Lipschitz continua con constante n.
Por último hay que ver que $\widetilde{f_n} \equiv f$ para lo cual utilizamos el hecho de que el mapeo subdiferencial es localmente acotado en virtud de la Proposición 1.4.
Así dada $x_o \in \mathbf{D}$ se tiene que existe U vecindad de x_o en $\mathbf{D}$ y existe $n > 0$ tal que $\delta f(U) \subset n\overline{\mathbf{B}_1(0)}$ por lo que para cualquier $y \in \mathbf{D}$ se cumple que

$$\begin{aligned} < x', y - x > &\leq f(y) - f(x) \\ \Rightarrow < x', x - y > &\geq f(x) - f(y) \\ \Rightarrow f(x) &\leq f(y) + < x', x - y > \\ &\leq f(y) + n \parallel x - y \parallel \quad , \quad \forall y \in \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) \leq \inf\left\{f(y) + n \parallel x - y \parallel \;\middle|\; y \in \mathbf{D}\right\}$, es decir,

$$f(x) \leq \widetilde{f_n}(x) \quad \forall x \in U. \tag{2.27}$$

Por lo tanto, al combinar (2.24) con (2.27) concluimos que $f(x) = \widetilde{f_n}(x)$ para todo $x \in U$, es decir, $f \equiv \widetilde{f_n}$.□

Teorema 2.8. *E es un espacio de Asplund si y sólo si todo subconjunto acotado no vacío de E' admite $\sigma(E', E)$-rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño.*

Prueba: La necesidad es inmediata del Lema 2.2
Suficiencia: Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ convexo, abierto y no vacío y consideremos $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ continua y convexa, entonces por el Lema 2.3, dada $x_o \in \mathbf{D}$ existen U vecindad de x_o en $\mathbf{D}$ y $\widetilde{f} : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ convexa y Lipschitz continua tal que $f \equiv \widetilde{f}$ en U.
Además $\delta\widetilde{f}$ es monótono máximo por el Teorema 2.5 y por el Teorema 2.7 existe un subconjunto G_δ denso G tal que $\delta\widetilde{f}$ es univaluado y norma-norma semicontinuo superiormente en G.
Por lo que cualquier selección para $\delta\widetilde{f}$ es norma-norma continua y por la Proposición 2.4, $\widetilde{f}$ es Fréchet diferenciable en cada punto de G pero esto implica que f tiene puntos de Fréchet diferenciabilidad en U. □

Proposición 2.16. *Sea $\mathbf{E}$ un espacio de Asplund y M es un subespacio cerrado de $\mathbf{E}$. Entonces M es un espacio de Asplund.*

Prueba: Por el Teorema 2.8 basta mostrar que todo subconjunto acotado no vacío A de $\mathbf{M'}$ admite $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño.
Para esto tomemos $A \subset \mathbf{M'}$ acotado, entonces como

$$\mathbf{M'} = \mathbf{E'}\big/M^\perp \quad \text{con} \quad M^\perp = \left\{x' \in \mathbf{E'} \;\middle|\; < x', m >= 0 \;\; \forall m \in M\right\}.$$

Y dado que sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ compacto y convexo, consideramos

$$\begin{aligned} Q : \quad \mathbf{E'} &\longrightarrow \mathbf{E'}\big/M^\perp \\ x' &\longmapsto x' + M^\perp. \end{aligned}$$

Por lo que dotando a $\mathbf{E'}$ y a $\mathbf{M'}$ con sus topologías débiles o con las topologías de la norma según nos convenga, notamos las siguientes propiedades de Q.

1. Q es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-$\sigma(\mathbf{M'}, \mathbf{M})$ continuo.

2. $\parallel Q \parallel= 1$.

3. Q es norma-norma abierta, por lo cual $Q\Big(\mathbf{B}_1(0)\Big)$ contiene una vecindad del cero en $\Big(\mathbf{M'}, \parallel \cdot \parallel_{\mathbf{M'}}\Big)$.

4. Existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset Q\Big(\lambda\mathbf{B}_1(0)\Big) = \lambda Q\Big(\lambda\mathbf{B}_1(0)\Big)$.

Ahora bien, sea

$$C := \lambda\overline{\mathbf{B}_1(0)} \cap Q^{-1}(A) \subset \mathbf{E'}.$$

Como $Q^{-1}(A)$ es convexo y cerrado en ambas topologías de $\mathbf{E'}$ tenemos que C es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacto y convexo, más aún $Q(C) = A$ por la suprayectividad de Q.

Por otro lado, sea

$$\mathcal{F} := \left\{ C \subset \mathbf{E'} \;\middle|\; C \text{ es convexo,} \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E}) - \text{compacto y } Q(C) = A \right\}.$$

Así ordenando a $\mathcal{F}$ mediante la inclusión, por el Lema de Zorn, existe $C_1 \subset \mathbf{E'}$ mínimo en $\mathcal{F}$, como $\mathbf{E}$ es espacio de Asplund y C_1 es acotado entonces dada $\varepsilon > 0$ existe $S \equiv S\left(x, C_1, \alpha\right)$ $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanada tal que diam$S < \varepsilon$.
Luego, dado que S es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierto relativo a C_1 ya que

$$S\left(x, C_1, \alpha\right) = \left\{ x' \in C_1 \;\middle|\; < x', x > \; > \sup_{x' \in C_1} < x', x > -\alpha \right\}.$$

Se sigue que $C_1 \backslash S$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-cerrado y $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacto y convexo, entonces el conjunto $A_1 := Q(C_1 \backslash S)$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacto y convexo.
Entonces, por ser C_1 mínimo en $\mathcal{F}$ se tiene que $A_1 \subsetneq A$ y si $x'_1, x'_2 \in A \backslash A_1$ entonces existen $y_1, y_2 \in S$ tales que $Q(y_i) = x'_i$ con $i = 1, 2$ por lo tanto,

$$\| x'_1 - x'_2 \| = \| Q(y_1) - Q(y_2) \| \leq \| Q \| \; \| y_1 - y_2 \| = \| y_1 - y_2 \| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que diam$(A \backslash A_1) \leq \varepsilon$.
Finalmente, por el Teorema de Hahn-Banach (ver [2]) existe una $S_o \equiv S_o\left(x, A, \alpha\right)$-rebanada de A tal que $S_o \cap A_1 = \emptyset$, es decir, $S_o \subset A \backslash A_1$ por lo tanto, diam$(S_o) \leq \varepsilon$, es decir, $\mathbf{M'}$ es de Asplund. □

Teorema 2.9. *Un espacio de Banach* $\mathbf{E}$ *es un espacio de Asplund si y sólo si todo subespacio cerrado separable de* $\mathbf{E}$ *tiene dual separable.*

Prueba: Para la necesidad, sea $\mathbf{E}$ espacio de Asplund y $\mathbf{M}$ un subespacio cerrado y separable de $\mathbf{E}$, se sigue de la Proposición 2.16 que $\mathbf{M}$ es un espacio de Asplund y por el Teorema 2.4 tenemos que $\mathbf{M'}$ es separable.
Suficiencia: Es inmediata del corolario 2.2. □

Corolario 2.3. *Sea* $\mathbf{E}$ *un espacio de Banach que no es espacio de Asplund. Entonces existe una norma equivalente en* $\mathbf{E}$ *la cual no es Fréchet diferenciable en ningún punto de* $\mathbf{E}$.

Prueba: Si $\mathbf{E}$ no es espacio de Asplund entonces por el Teorema 2.8 existe $A \subset \mathbf{E'}$ acotado, no vacío y existe $\varepsilon > 0$ tales que para toda $S \equiv S(x, A, \alpha)$ $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanada de A, el diam$A > \varepsilon$.
Luego, sea C la envolvente convexa de $A \cup (-A)$ y sea $U' = C + \mathbf{B}_1(0)$, dado que C y $\mathbf{B}_1(0) \subset \mathbf{E'}$ son acotados, simétricos y cualquier $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-rebanada de U' tiene diámetro mayor que ε ya que

$$\begin{aligned}
\sigma_{A_1 + A_2}(x) &= \sup\left\{ < x', x > \;\middle|\; x' \in A_1 + A_2 \right\} = \sup\left\{ < x'_1 + x'_2, x > \;\middle|\; x'_1 \in A_1, x'_2 \in A_2 \right\} \\
&= \sup\left\{ < x'_1, x > \;\middle|\; x'_1 \in A_1 \right\} + \sup\left\{ < x'_2, x > \;\middle|\; x'_2 \in A_2 \right\} = \sigma_{A_1}(x) + \sigma_{A_2}(x).
\end{aligned}$$

Por lo que tomando

$$\begin{aligned}
P : \mathbf{E} &\to \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \sigma_{U'}(x)
\end{aligned}$$

se tiene que P no es Fréchet diferenciable en todo $\mathbf{E}$ debido al procedimiento realizado en el Lema 2.2.
Además el int$U' \neq \emptyset$ debido a que el int$\mathbf{B}_1(0) \neq \emptyset$, por lo tanto, P define una norma equivalente en $\mathbf{E}$. □

Definición 20. *La norma en un espacio de Banach es estrictamente convexa si no hay segmentos lineales en la esfera unitaria, es decir, si* $x, y \in S^1$ *tales que* $x \neq y$ *entonces*

$$\| \lambda x + (1 - \lambda) y \| < \lambda \| x \| + (1 - \lambda) \| y \| = 1 \quad , \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Definición 21. *La norma en **E** es suave si para toda $x \in \mathbf{E}$ tal que $\| x \| = 1$ existe un único $x' \in$ **E'** tal que*

$$< x', x > = 1 \ y \ \| x' \| = 1.$$

Es decir, el conjunto $J(x)$ es unitario para toda $x \neq 0$, lo cual significa que la norma es Gâteaux diferenciable en $\mathbf{E} \backslash \{0\}$.

Para ver ejemplos de espacios que cumplen las Definiciones 20 y 21, se puede consultar el apéndice C.

Proposición 2.17. *Supongamos que la norma en **E** es tal que la norma en **E'** es estrictamente convexa. Entonces la norma en **E** es suave.*

Prueba: Sea $x \in \mathbf{E}$ tal que $\| x \| = 1$ entonces por una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach[2] existe $x' \in \mathbf{E}$ tal que

$$\| x' \| = \| x \| \quad \text{y} \quad < x', x > = \| x \|^2 .$$

Pero por hipótesis, se satisface que

$$\| x' \| = 1 \quad \text{y} \quad < x', x > = 1.$$

Finalmente, basta mostrar que x' es único con esta propiedad, para esto utilizamos que la norma en **E'** es estrictamente convexa.
Sea $y' \in$ **E'** tal que $y' \neq x'$, $\| y' \| = 1$ y $< y', x >= 1$, de esta manera,

$$\| \lambda x' + (1 - \lambda) y' \| < \lambda \| x \| + (1 - \lambda) \| y \| = 1.$$

Mientras que

$$\begin{aligned} < \lambda x' + (1 - \lambda) y', x > &= \lambda < x', x > + (1 - \lambda) < y', x > \\ &= \lambda + (1 - \lambda) = 1 \\ \Rightarrow \| \lambda x' + (1 - \lambda) y' \| &\geq 1. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto, x' es único. □

El siguiente resultado requiere de dos hechos generales, el primero es que la norma en **E** es estrictamente convexa si y sólo si todo subconjunto convexo de **E** tiene a lo más un punto de norma mínima (ver Proposición C.2) y el segundo hecho es referente a que cualquier función semicontinua inferiormente en un espacio métrico completo tiene la propiedad de que existe un conjunto G_δ denso donde la función es continua, ver [3].

Teorema 2.10. *Supongamos que **E** es un espacio de Banach tal que admite una norma equivalente cuya norma dual es estrictamente convexa y sea $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ monótono máximo con $intD(T)$ no vacío. Entonces existe $G \subset intD(T)$ el cual es G_δ denso y T es univaluado en cada punto de G.*

Prueba: Supongamos que la norma en **E'** es estrictamente convexa y consideremos $T : \mathbf{E} \to 2^{E'}$ monótono máximo, entonces $T(x)$ es convexo y $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacto para toda $x \in \mathrm{int} D(T)$ debido a la Proposición 2.9 y 2.14.
Por otro lado, notemos que $T(x)$ tiene un (único) punto de norma mínima. En efecto, si tomamos una red

$$\left(x'_\alpha \right)_{\alpha \in I} \subset T(x) \ \text{ tal que } \ \| x'_\alpha \| \longrightarrow l_x := \inf \left\{ \| x' \| \ \middle| \ x' \in T(x) \right\}.$$

Entonces por compacidad se tiene que existe

$$\left(x'_{\alpha_\beta}\right)_\alpha \subset \left(x'_\alpha\right)_\alpha$$

subred convergente a $x' \in T(x)$.
Y como $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$, es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-semicontinua inferiormente implica que

$$\| x' \| \leq \underline{\lim} \| x'_\alpha \| = l_x$$

y por lo tanto, $\| x' \| = l_x$.
Ahora bien, sea g :int$D(T) \longrightarrow \mathbb{R}$; dada por $g(x) = l_x$ la cual es una función semicontinua inferiormente en int$D(T)$, es decir,

$$V := \{\, x \in \mathrm{int}D(T) \;\big|\; g(x) > \lambda \,\}$$

es abierto para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, como vemos a continuación:
En efecto lo es, ya que al ser la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$, una función $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-semicontinua inferiormente se tiene que el conjunto

$$\left\{x \in \mathbf{E'} \;\Big|\; \| x' \| > \lambda\right\}$$

es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierto.
Como T es norma-$\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ semicontinuo superiormente (ver Proposición 2.15) podemos concluir que si $g(x) > \lambda$ entonces $T(x) \subset V$ por lo que existe U vecindad de x tal que $U \subset$int$D(T)$ y $T(U) \subset V$, es decir, $g(y) > \lambda$ para toda $y \in U$.
Finalmente, por [3], se tiene que existe $G \subset$ int$D(T)$ tal que G es un conjunto G_δ denso donde g es continua, por lo que basta mostrar que donde g es continua, el conjunto $T(x)$ es unitario.
Supongamos pues que $g(x) = \| x' \|$ con $x' \in T(x)$ y que existe $y' \in T(x)$ tal que $y' \neq x'$ entonces por Definición de g se tiene que $\| y' \| > \| x' \|$ y esto implica que

$$\sup_{\|y\|=1} |< y', y >| \; > \| x' \| \, .$$

Por lo que podemos elegir $y \in \mathbf{E}$ con $\| y \| = 1$ tal que $< y', y > \, > \| x' \| =: g(x)$ y por ser g continua entonces existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{B}^{\mathbf{E}}_\delta(x) \subset$ int$D(T)$ con la propiedad de que

$$g(z) \;\; < \;< y', y > \quad , \quad \forall z \in \mathbf{B}^{\mathbf{E}}_\delta(x)$$

Por lo tanto, si definimos $z_o := x + \delta y \in \mathbf{B}_\delta(x)$ y escogemos $z' \in T(z_o)$ tal que $g(z_o) = \| z' \|$ entonces por monotonía de T se cumple que

$$\begin{aligned} 0 \leq \; < z' - y', z_o - x > \;\; &= \;\; < z' - y', \delta y > \\ \Rightarrow \quad \delta < z', y > \;\; &\geq \;\; < y', y > \quad , \quad \forall \delta > 0 \\ \Rightarrow \quad < z', y > \;\; &> \;\; \| z' \| \, . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Pero sabemos que $< z', y > \leq \| z' \| \| y \| = \| z' \|$ lo cual es una contradicción con (2.28). $\square$

Corolario 2.4. *Supongamos que* **E** *admite una norma equivalente cuya norma dual es estrictamente convexa. Entonces* **E** *es un espacio débil de Asplund.*

Prueba: Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ abierto, convexo y no vacío, si $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ es convexa y continua entonces dada $x \in \mathbf{D}$ se tiene por el Lema 2.3 existen U vecindad de x en $\mathbf{D}$ y $\widetilde{f} : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ convexa y Lipschitz continua tal que $\widetilde{f} \equiv f$ en U.
Ahora bien, dado que $\delta\widetilde{f}$ es monótono máximo en virtud del Teorema 2.5 podemos concluir que $\delta\widetilde{f}(x)$ es univaluado en G subconjunto G_δ denso de U por el Teorema 2.10 y además por la Proposición 2.3, tenemos que $\delta\widetilde{f}$ es norma-$\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ semicontinua superiormente en $\mathbf{D}$.
Así se tiene que cualquier selección para $\delta\widetilde{f}(x)$ es norma-$\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ continua en x.
Por lo tanto $\widetilde{f}$ es Gâteaux diferenciable en $G \subset U$ por la Proposición 2.4 entonces f es Gâteaux diferenciable en G. □

2.2. Espacios Débilmente Compactos-Generados.

Definición 22. *Un espacio de Banach* **E** *es débilmente compacto-generado (DCG) si existe* $K \subset \mathbf{E}$ $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$-*compacto cuya expansión lineal es densa con respecto a la norma en* **E**.

Nota: Dado que la envolvente convexa cerrada de un subconjunto $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$-compacto de **E** es $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$-compacto se puede suponer que K es convexo.

2.2.1. Ejemplos.

1. Sea **E** separable. Entonces **E** es DCG ya que en **E** existe una sucesión (x_n) densa, por lo que basta tomar
$$K = \left\{\frac{1}{n}\frac{x_n}{\| x_n \|}\right\} \cup \left\{0\right\}$$
el cual es compacto y por lo tanto $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$-compacto.

2. Supongamos que **E** es reflexivo. Entonces **E** es DCG ya que **E** es reflexivo si y sólo si $\overline{\mathbf{B}_1(0)}$ es $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$-compacta.

3. El espacio $C_o(\Gamma)$ que es el espacio con la norma del supremo de todas las funciones $x = \left(x_\gamma\right)$ sobre Γ tales que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $\Gamma_\varepsilon \subset \Gamma$ tal que $\left|x_\gamma\right| < \varepsilon$ para toda $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_\varepsilon$ es DCG.
Prueba: Sea
$$K = \left\{e_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\right\} \cup \left\{0\right\} \text{ donde } e_\gamma(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha = \gamma \\ 0 & \alpha \neq \gamma. \end{cases}$$
Para ver que K es $\sigma(C_o, C_o')$-compacto basta tomar $\left(a_\gamma\right) \in l^1$ ya que $C_o' \approx l^1$, así $a_\gamma = 0$ excepto en un conjunto numerable.
Por otro lado, sea $\left(x_\gamma^\alpha\right) \subset K$ red entonces
$$a_\gamma\left(x_\gamma^\alpha\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma^\alpha a_\gamma = a_{\gamma\alpha}.$$
Y consideramos una subred
$$\left(x_\gamma^{\alpha'}\right) \subset \left(x_\gamma^\alpha\right)$$
tal que $\alpha_1' < \alpha_2'$ entonces $x_\gamma^{\alpha_1'}$ tiene su coordenada igual a 1 en un índice anterior del que lo tiene $x_\gamma^{\alpha_2'}$, por lo tanto, $a_\gamma\left(x_\gamma^{\alpha'}\right)$ es una subred convergente a cero de $a_\gamma\left(x_\gamma^\alpha\right)$ □

4. El espacio $L^1(\mu)$ es DCG si μ es σ-finita ya que basta tomar los subconjuntos $\sigma(L^1, L^\infty)$-compactos de funciones de la forma χ_A donde $\mu(A) < \infty$.

5. Sean **E**, **F** espacios de Banach y supongamos que **E** es DCG y existe $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ un operador lineal acotado tal que su imagen es densa. Entonces **F** es DCG.
   Prueba: Como **E** es DCG existe $K \subset \mathbf{E}$ $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$-compacto tal que span$(K)$ es denso en **E**. Así $T(K) \subset \mathbf{F}$ es acotado, denso y $\sigma(\mathbf{F}, \mathbf{F'})$-compacto pues T es continua. □

Lema 2.4. *Sea **E** espacio de Banach Separable y sea $K \subset$ **E'** $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})$-compacto. Entonces K es separable según la norma en **E'***

Prueba: Si $K \subset \mathbf{E'}$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})$-compacto entonces K es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacto ya que

$$\mathbf{E} \hookrightarrow \mathbf{E''} \;\; \Rightarrow \;\; \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E}) < \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''}).$$

Por lo que dada una cubierta $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-abierta de K es una cubierta $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})$-abierta de K la cual tiene una subcubierta $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})$-abierta finita de K con los abiertos originales en $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$.
Más aún, como

$$\Big(K, \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})\Big) \xrightarrow{Id} \Big(K, \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})\Big)$$

es homeomorfismo, por ser una función biyectiva y cerrada, y dado que **E** es separable se satisface que $\Big(K, \sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})\Big)$ es metrizable pues $\mathbf{B}_1(0)$ es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-compacta (ver [16]).
Y por lo tanto, K es compacto con respecto a la métrica, lo cual implica que K es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-separable y por ser la Id un homeomorfismo se sigue que K es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})$-separable.
Por otro lado, dado $A \subset K$ $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})-$denso numerable definimos

$$L := \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i a_i \;\middle|\; q_i \in \mathbb{Q}, a_i \in A \right\}$$

el cual es numerable y $\overline{L}^{\|\cdot\|_{\mathbf{E'}}}$ es norma separable, en efecto, ya que $\overline{L}^{\|\cdot\|_{\mathbf{E'}}}$ contiene a todas las combinaciones lineales de elementos de A y por consiguiente $\overline{L}^{\|\cdot\|_{\mathbf{E'}}}$ es el menor subespacio lineal cerrado según la norma que contiene a A entonces

$$\overline{A}^{\|\cdot\|_{\mathbf{E'}}} \subset \overline{A}^{\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})} = K \subset \overline{L}^{\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})} = \overline{L}^{\|\cdot\|_{\mathbf{E'}}}$$

Es decir, A es $\|\cdot\|_{\mathbf{E'}}$ denso. □

Teorema 2.11. *Supongamos que **E'** es DCG. Entonces **E** es espacio de Asplund.*

Prueba: Por el corolario 2.2 basta mostrar que todo subespacio separable F de **E** tiene dual F' separable. Para esto consideremos el epimorfismo natural

$$\Pi : \mathbf{E} \to \mathbf{E'} \big/ F^{\perp}$$

Como la imagen lineal continua de un espacio DCG es DCG y $\mathbf{E'}\big/F^{\perp}$ es isométricamente isomorfo a F' entonces podemos suponer que F' es DCG.
Así existe $K \subset F'$ $\sigma(\mathbf{F'}, \mathbf{F''})$-compacto con span$K$ densa en $(F', \|\cdot\|_{\mathbf{F'}})$ y por el Lema 2.4 se tiene que K es separable según $\|\cdot\|_{\mathbf{F'}}$
Por lo tanto, $(F', \|\cdot\|_{\mathbf{F'}})$ es separable. □

Capítulo 3

Principio Variacional de Ekeland.

En este capítulo probamos el Principio Variacional de Ekeland en espacios de Banach denotados por $\mathbf{E}$. Además damos una serie de Teoremas equivalentes a este principio.

3.1. Funciones Semicontinuas Inferiormente

En los capítulos anteriores la continuidad de las funciones convexas fue muy importante para la diferenciabilidad pero en ocasiones la continuidad no se satisface, sin embargo podemos utilizar una noción más débil de continuidad, a saber, la semicontinuidad inferior. Ahora trabajamos con funciones en los reales extendidos, es decir, con funciones de la forma $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$.
Para esto, adoptamos las siguientes convenciones:

$$r\infty = \infty, \qquad (-r)\infty = -\infty, \qquad \text{si } r > 0 \qquad \text{y} \qquad r \pm \infty = \pm\infty, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Definición 23. *Sea X un espacio Hausdorff y consideremos $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$. El dominio efectivo de f es el conjunto*

$$dom(f) = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) < \infty\right\}.$$

Y decimos que f es semicontinua inferiormente si el conjunto

$$\left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \leq r\right\}$$

es cerrado en X para toda $r \in \mathbb{R}$.

Dado que para una función $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ su dominio efectivo puede ser vacío, decimos que la función f es propia si $dom(f) \neq \emptyset$.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio Hausdorff y consideremos $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$. Entonces son equivalentes*

1. *f es semicontinua inferiormente en $x \in X$.*

2. *$f(x) \leq \liminf\limits_{x_\alpha \longrightarrow x} f(x_\alpha)$ con $(x_\alpha) \subset X$ red tal que $x_\alpha \to x$.*

3. *La epigráfica de f dada por*

   $$epi(f) = \left\{(x, r) \;\middle|\; r \geq f(x)\right\}$$

   es cerrada en $X \times \mathbb{R}$.

Prueba: 1) $\Rightarrow$ 2) Si f es semicontinua inferiormente en x y $\lambda < f(x)$ entonces existe una vecindad V de x tal que $\lambda \leq f(y)$ para toda $y \in V$.
De aquí que, tomando $(x_\alpha) \subset X$ red tal que $x_\alpha \to x$ se deduce que

$$f(x) \leq \liminf_{x_\alpha \to x} f(x_\alpha).$$

Ya que si $\lambda_\alpha \to f(x)$ con $\lambda_\alpha < f(x)$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &\leq \liminf_{x_\alpha \longrightarrow x} f(x_\alpha) \\ \Rightarrow f(x) &= \lim \lambda_\alpha \leq \liminf_{x_\alpha \longrightarrow x} f(x_\alpha). \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $(x_\alpha, \lambda_\alpha) \subset epi(f)$ tal que $x_\alpha \to x$ y $\lambda_\alpha \to \lambda$, entonces $(x, \lambda) \in epi(f)$ dado que

$$f(x) \leq \liminf_{x_\alpha \longrightarrow x} f(x_\alpha) \leq \liminf_{\lambda_\alpha \longrightarrow \lambda} (\lambda_\alpha) = \lambda$$

pues $f(x_\alpha) \leq \lambda_\alpha$ para toda α.
3) $\Rightarrow$ 1) Si $epi(f)$ es cerrada entonces $W = \left\{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) > r\right\}$ es abierto.
Así considerando el mapeo abierto

$$\begin{aligned} \Pi : X \times \mathbb{R} &\to X \\ (x, r) &\longmapsto x \end{aligned}$$

tenemos que $\Pi(W) = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) > r\right\}$ es abierto y por lo tanto su complemento es cerrado. $\square$

Proposición 3.2. *Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ convexa. Entonces el $dom(f)$ es convexo.*

Prueba: Sean $x, y \in dom(f)$ y sea $t \in [0, 1]$ entonces por las convenciones hechas al principio de este capítulo se tiene que

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) < t\infty + (1 - t)\infty = \infty.$$

Es decir, $tx + (1 - t)y \in dom(f)$. $\square$

Proposición 3.3. *Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$. Entonces f es convexa si y sólo si $epi(f)$ es convexo.*

Prueba: Para la necesidad supongamos que $(x, r), (y, s) \in epi(f)$ y $t \in [0, 1]$ entonces $f(x) \leq r$, $f(y) \leq s$ y

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \leq tr + (1 - t)s.$$

Por lo tanto, $(tx + (1 - t)y, tr + (1 - t)s) \in epi(f)$.
Suficiencia: Si $x, y \in dom(f)$ y $t \in [0, 1]$ entonces para $r = f(x), s = f(y) \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\big(x, f(x)), (y, f(y)\big) \in epi(f).$$

Y por lo tanto, $\big(tx + (1 - t)y, tf(x) + (1 - t)f(y)\big) \in epi(f)$, es decir,

$$\infty > tf(x) + (1 - t)f(y) \geq f(tx + (1 - t)y)$$

Es decir, f es convexa. $\square$

3.1.1. Ejemplos

1. Sea $C \subset \mathbf{E}$ convexo, no vacío y consideremos la función indicadora

$$\delta_C : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}; \ \delta_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ \infty & x \notin C. \end{cases}$$

La cual es propia y convexa. Entonces δ_C es semicontinua inferiormente si y sólo si C es cerrado.
Prueba: La función δ_C es propia ya que $dom(f) = C \neq \emptyset$, más aún, sea $t \in [0,1]$ con $x, y \in C$ entonces $tx + (1-t)y \in C$ y

$$\delta_C(tx + (1-t)y) = 0 = t\delta_C(x) + (1-t)\delta_C(y).$$

Por otro lado, si $x, y \notin C$ entonces

$$t\delta_C(x) + (1-t)\delta_C(y) = \infty \geq \ \delta_C(tx + (1-t)y).$$

Luego, si $x \in C$ pero $y \notin C$ entonces

$$t\delta_C(x) + (1-t)\delta_C(y) = \infty \geq \ \delta_C(tx + (1-t)y).$$

Por lo que cualquiera que sea el caso, la función indicadora es convexa.
Finalmente, hay que ver que δ_C es semicontinua inferiormente si y sólo si C es cerrado.
Necesidad: Si δ_C es semicontinua inferiormente entonces $\left\{x \in \mathbf{E} \ \middle|\ \delta_C(x) \leq r\right\}$ es cerrado para toda $r \in \mathbb{R}$. En particular, con $r = 0$ y como

$$\left\{x \in \mathbf{E} \ \middle|\ \delta_C(x) = 0\right\} = C.$$

Se tiene que C es cerrado.
Suficiencia: Si C es cerrado y $r \geq 0$ entonces

$$\left\{x \in \mathbf{E} \ \middle|\ \delta_C(x) \leq r\right\} = C.$$

El cual es cerrado.
Y si $r < 0$ entonces

$$\left\{x \in \mathbf{E} \ \middle|\ \delta_C(x) \leq r\right\} = \emptyset.$$

Y por lo tanto es cerrado. Así, δ_C es semicontinua inferiormente. □

2. Sea $A \subset$ **E'** no vacío tal que la envolvente convexa de A no es todo **E'** y A es $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-cerrado o de manera más simple, A es convexo, $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$-cerrado y un subconjunto propio de **E'**. Entonces la función soporte

$$\begin{aligned} \sigma_A &: \mathbf{E} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sup\left\{< x', x > \ \middle|\ x' \in A\right\} \end{aligned}$$

es propia, convexa y semicontinua inferiormente. (En la sección 2 supusimos que A era acotado.)
Prueba: Primero vemos que σ_A es convexa, para esto, sean $x, y \in \mathbf{E}$ y $t \in [0,1]$ entonces

$$\begin{aligned} \sigma_A(tx + (1-t)y) &= \sup\left\{< x', tx + (1-t)y > \ \middle|\ x' \in A\right\} \\ &= \sup\left\{t < x', x > +(1-t) < x', y > \ \middle|\ x' \in A\right\} \\ &\leq \sup\left\{t < x', x > \ \middle|\ x' \in A\right\} + \sup\left\{(1-t) < x', y > \ \middle|\ x' \in A\right\} \\ &= t\sigma_A(x) + (1-t)\sigma_A(y). \end{aligned}$$

Luego, para la semicontinuidad inferior, tomamos $r \in \mathbb{R}$ y sea

$$B := \left\{ x \in \mathbf{E} \;\middle|\; \sigma_A(x) \leq r \right\}.$$

Así dada $(x_n) \subset B$ tal que $x_n \to x$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_A(x_n) \leq r &\Rightarrow \langle x', x_n \rangle \leq r \qquad \forall x' \in A \\ &\Rightarrow < x', x > \leq r \qquad \forall x' \in A \\ &\Rightarrow \sup\left\{ < x', x > \;\middle|\; x' \in A \right\} \leq r \\ &\Rightarrow \sigma_A(x) \leq r. \end{aligned}$$

Es decir, $x \in B$, por lo tanto, B es cerrado. $\square$

3. Sea $C \subset \mathbf{E}$ cerrado y no vacío y consideremos $f : \mathbf{C} \to \mathbb{R}$ convexa y continua. Entonces la extensión de f dada por

$$\widetilde{f} : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}; \;\; f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ \infty & x \notin C \end{cases}$$

es una función convexa y semicontinua inferiormente.
Prueba: La función $\widetilde{f}$ es semicontinua inferiormente ya que por la continuidad de f se tiene que es cerrado el conjunto

$$f^{-1}\big((-\infty, r]\big) = \left\{ x \in C \;\middle|\; \widetilde{f}(x) \leq r \right\}.$$

Por último, la convexidad de $\widetilde{f}$ se sigue del hecho de que f es convexa y de las convenciones hechas al principio de este capítulo, procediendo de manera similar a la prueba del ejemplo 1. $\square$

Proposición 3.4. *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semicontinua inferiormente, convexa y propia con D =int dom(f) no vacío. Entonces f es continua en D.*

Prueba: En virtud de la prueba de la Proposición 1.1 basta mostrar que f es localmente acotada en cada punto de D ya que esto implica que f es localmente Lipschitz continua en cada punto de D.
Primero notemos que si f es acotada, digamos por M, en $\mathbf{B}_\delta(x)$ para algún $\delta > 0$ se tiene que f es acotada inferiormente en $\mathbf{B}_\delta(x)$.
Dado que si $y \in \mathbf{B}_\delta(x)$ entonces $2x - y \in \mathbf{B}_\delta(x)$ y además

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2}y + x - \frac{1}{2}y\right) = f\left(\frac{1}{2}y + \frac{2x - y}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(2x - y) \;\; \leq \;\; \frac{1}{2}\big[f(y) + M\big] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(y) \;\geq\; 2f(x) - M \quad , \quad \forall y \in \mathbf{B}_\delta(x).$$

Por lo tanto, basta mostrar que f es localmente acotada superiormente en D, en efecto lo es ya que para cada $n \geq 1$ definimos

$$D_n := \left\{ x \in D \;\middle|\; f(x) \leq n \right\}.$$

El cual es cerrado relativo a D por ser f semicontinua inferiormente y como $D = \cup D_n$ entonces por el Teorema de Categoría de Baire (ver Teorema B.2) existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que U :=int$D_{n_o} \neq \emptyset$ y como f es acotada superiormente por n_o en U, supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{B}_\delta(0) \subset U$ (por traslación) para algún $\delta > 0$.

Entonces si $y \in D\backslash\{0\}$ se sigue que existe $\mu > 1$ tal que $z = \mu y \in D$ y con $0 < \lambda = \mu^{-1} < 1$ el conjunto

$$V = \lambda z + (1-\lambda)\mathbf{B}_\delta(0) = y + (1-\lambda)\mathbf{B}_\delta(0)$$

es una vecindad de y en D.
Así para cualquier punto $v = (1-\lambda)x + \lambda z \in V$ con $x \in \mathbf{B}_\delta(0)$ tenemos que

$$f(v) \quad \leq \quad (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z) \quad \leq \quad (1-\lambda)n_o + \lambda f(z).$$

Por lo tanto, f es acotada superiormente en V. □

A manera de ejemplo, sea

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\};\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ \infty & x \leq 0 \end{cases}$$

la cual es una función continua en $x = 0$ ya que x es un punto frontera de $dom(f)$ pues las vecindades de ∞ en $(-\infty, \infty]$ son los conjuntos $(a, \infty]$ con $a \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.5. *Sea $C \subset \mathbf{E}$ convexo, cerrado y no vacío. La función indicadora δ_C es continua en $x \in C$ si y sólo si $x \in intC$.*

Prueba: Para la necesidad, supongamos que δ_C es continua en $x \in C$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||x - y|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||\delta_C(x) - \delta_C(y)|| < \varepsilon$$

Es decir,

$$||x - y|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||\delta_C(y)|| < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

Así $\delta_C(y) = 0$, por lo tanto, $y \in C$ y esto significa que $\mathbf{B}_\delta(x) \subset C$, es decir, $x \in \mathrm{int}C$.
Suficiencia: Se sigue de la Proposición 3.4 y por el ejemplo 1. □

En adelante, usaremos el hecho de que si $\mathbf{E}$ es espacio de Banach entonces $\mathbf{E}\times\mathbb{R}$ es un espacio de Banach con $||(x,r)||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} = ||x||_{\mathbf{E}} + |r|$ y que el espacio dual $(\mathbf{E}\times\mathbb{R})$' puede ser identificado con $\mathbf{E'}\times\mathbb{R}$.

Definición 24. *Definimos el subdiferencial de una función $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$ convexa y semicontinua inferiormente como*

$$\delta f(x) = \begin{cases} \left\{x' \in \mathbf{E'} \;\middle|\; < x', y - x > \; \leq f(y) - f(x) \quad \forall y \in \mathbf{E}\right\} & , \quad si\ x \in dom(f) \\ \\ \emptyset & , \quad si\ x \notin dom(f). \end{cases}$$

Además notamos que la condición $< x', y - x > \; \leq \; f(y) - f(x)$ para toda $y \in \mathbf{E}$ es equivalente a la desigualdad $< x', y > \; \leq f(x + y) - f(x)$ para toda $y \in \mathbf{E}$.
Y que el subdiferencial también puede ser vacío para algunos elementos del $dom(f)$.

Definición 25. *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexa y semicontinua inferiormente. Entonces definimos la derivada derecha de f como*

$$d^+ f(x)(y) := \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} \quad , \quad \forall y \in \mathbf{E}. \tag{3.1}$$

Reconociendo que $d^+ f(x)(y) = \infty$, si $x + ty \notin dom(f)$ para toda $t > 0$.

Cabe destacar que puede darse el caso de que $d^+f(x)(y) = -\infty$ pues basta tomar como ejemplo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

para tener que $d^+f(0)(1) = -\infty$.

Proposición 3.6. *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexa y semicontinua inferiormente. Entonces para toda $x \in dom(f)$ se cumple que:*

$$x' \in \delta f(x) \quad \Leftrightarrow \quad < x', y > \;\leq\; d^+f(x)(y) \quad ; \quad \forall y \in \boldsymbol{E}.$$

Prueba: Para la necesidad, tomamos $x \in dom(f)$, $y \in \mathbf{E}$ y $t > 0$ suficientemente pequeña tal que $x + ty \in dom(f)$ y $x' \in \delta f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} t < x', y > \;&=\; < x', x + ty - x > \;\leq f(x + ty) - f(x) \\ \Rightarrow \; < x', y > \;&\leq\; \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} \quad ; \quad \text{para } t > 0 \text{ suficientemente pequeña} \\ \Rightarrow \; < x', y > \;&\leq\; d^+f(x)(y). \end{aligned}$$

Suficiencia: Por monotonía del límite que define a $d^+f(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} < x', y - x > \;&\leq\; d^+f(x)(y - x) \leq \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \\ &< \; f(x + y - x) - f(x) = f(y) - f(x) \end{aligned}$$

con $t = 1$. □

A continuación mostramos una función convexa y semicontinua inferiormente con subdiferencial vacío en un subconjunto denso de su dominio.

Proposición 3.7. *Sea*

$$C = \left\{ x \in l^2 \;\middle|\; \left| x_n \right| \leq 2^{-n} \text{ con } n = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

Entonces C es cerrado, convexo y $f : \mathbf{C} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(2^{-n} + x_n\right)^{(1/2)}$ es continua y convexa.

Prueba: La convexidad de f se sigue del hecho de que en cada sumando se tiene una traslación de la reflexión de la raíz cuadrada, ya que la función raíz cuadrada es cóncava y por lo tanto, su reflexión es convexa.
Además, en cada sumando, $f_n' \leq 0$ y $f_n'' \geq 0$ por lo que f_n es decreciente y tiene un máximo en $-(1/2^n)$ para cada n.
Por otro lado, dado que cada sumando es continuo y acotado en valor absoluto por

$$\left| \frac{1}{2^n} + x_n \right|^{(1/2)} \leq \left| \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right|^{(1/2)} = \left| \frac{2}{2^n} \right|^{(1/2)} = \left| \frac{1}{2^{n-1}} \right|^{(1/2)} = 2^{(-n+1)/2}.$$

Se tiene que la serie f converge absolutamente y por lo tanto f es continua.

Veamos que $\delta f(x) = \emptyset$ para todo $x \in C$ tal que $x_n > -2^{-n}$ para una infinidad de n's:
Sea $x \in C$ tal que $x_n > -2^{-n}$ para una infinidad de n's y sea e_n el n-ésimo vector canónico de l^2 entonces si $x' \in \delta f(x)$ se cumple por la Proposición 3.6 que $< x', y > \leq d^+ f(x)(y)$ para toda $y \in \mathbf{E}$.
Por lo que para toda n tal que $x_n > -2^{-n}$ se satisface que

$$\begin{aligned} -\parallel x' \parallel &\leq \; < x', e_n > \; \leq \; d^+ f(x)(e_n) = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2^n} + x_n\right)^{(-1/2)} \\ \Rightarrow \parallel x' \parallel &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} + x_n\right)^{(-1/2)} \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

Lo cual es una imposibilidad y de aquí que $\delta f(x) = \emptyset$. □

Proposición 3.8. *Sea $C \subset \boldsymbol{E}$ convexo, cerrado y no vacío. Entonces para cualquier $x \in C$ el subdiferencial de la función indicadora, $\delta_C(x)$, es el cono con vértice en 0 de todas las $x' \in$ **E'** tales que soportan a C en x, es decir,*

$$< x', x > \; = \; \sup\Big\{ < x', y > \; \Big| \; y \in C \Big\} \equiv \sigma_C(x').$$

Prueba: Como

$$\begin{aligned} x' \in \delta\delta_C(x) &\Leftrightarrow \; < x', y - x > \; \leq \delta_C(y) - \delta_C(x) \quad , \quad \forall y \in C. \\ &\Leftrightarrow \; < x', y - x > \; \leq 0 \quad , \quad \forall y \in C. \\ &\Leftrightarrow \; < x', y > \; \leq \; < x', x > \quad , \quad \forall y \in C. \\ &\Leftrightarrow \; \sup_{y\in C} < x', y > \; \leq \; < x', x > . \end{aligned}$$

Y por otro lado, dado que $x \in C$ entonces $< x', x > \; \leq \; \sup_{y \in C} < x', y >$.
Entonces, $< x', x >= \; \sup\Big\{ < x', y > \; \Big| \; y \in C \Big\}$. □

Ahora mostramos condiciones necesarias y suficientes para que una función semicontinua inferiormente tenga un mínimo.

Proposición 3.9. *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexa y semicontinua inferiormente. Entonces f tiene un mínimo global en x si y sólo si $0 \in \delta f(x)$.*

Prueba: $0 \in \delta f(x) \Leftrightarrow < 0, y - x > \; \leq f(y) - f(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(y) - f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \quad , \quad \forall y \in \mathbf{E}$. □

Proposición 3.10. *Sea $C \subset \boldsymbol{E}$ convexo, no vacío y consideremos $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexa, propia y semicontinua inferiormente tal que $dom(f) \cap C \neq \emptyset$.*
Entonces $f\Big|_C$ tiene un mínimo en $x \in dom(f) \cap C$ si y sólo si $0 \in \delta(f + \delta_C)(x)$.

Prueba:

$$\begin{aligned} 0 \in \delta(f + \delta_C)(x) &\Leftrightarrow \; < 0, y - x > \; \leq (f + \delta_C)(y) - (f + \delta_C)(x) \; , \; \forall y \in C \cap dom(f) \\ &\Leftrightarrow \; 0 \leq f(y) + \delta_C(y) - f(x) - \delta_C(x) \quad , \quad \forall y \in C \cap dom(f) \\ &\Leftrightarrow \; 0 \leq f(y) - f(x) \quad , \quad \forall y \in C \cap dom(f) \\ &\Leftrightarrow \; f(x) \leq f(y) \quad , \quad \forall y \in C \cap dom(f) \\ &\Leftrightarrow \; x \text{ es mínimo de } f\Big|_C . \end{aligned}$$

□

Definición 26. *Sean $X \subset \boldsymbol{E}$ y $x \in X$. Entonces decimos que x es punto soporte de X, si existe $x' \in$ **E'** tal que $x' \neq 0$ y x' alcanza su supremo sobre X en x. Y a tal x' le llamamos una funcional soporte de X.*

Observamos que x' soporta a X en x si y sólo si $\sigma_X(x') =< x', x >$ y cabe destacar que la terminología geométrica viene del hecho de que los hiperplanos cerrados soportan a X si alguno de los semiespacios cerrados contiene a X y el hiperplano mismo intersecta a X.
De hecho, si x' soporta a X en x entonces

$$H = \left\{ y \in \mathbf{E} \;\middle|\; < x', y >= \sigma_X(x') \right\}.$$

contiene a x y es justo el hiperplano buscado.
Por otro lado, como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach (o Teorema de Separación) si C es convexo, cerrado y con int$C \neq \emptyset$ entonces todo punto frontera de C es un punto soporte de C.

Definición 27. *Sea $0 < \lambda < 1$. Entonces definimos el cono con respecto a λ como*

$$K_\lambda := \left\{ (x, r) \in \boldsymbol{E} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \lambda \| x \| \leq -r \right\}.$$

Proposición 3.11. *Sea $0 < \lambda < 1$. Entonces K_λ es convexo y cerrado.*

Prueba: Si $t \in [0, 1], (x, r), (y, s) \in K_\lambda$ entonces

$$\lambda \| tx + (1 - t)y \| \leq \lambda t \| x \| + \lambda(1 - t) \| y \| \leq -tr - (1 - t)s = -\Big(tr + (1 - t)s\Big).$$

Es decir, $\Big(tx + (1 - t)y, tr + (1 - t)s\Big) \in K_\lambda$.
Luego, K_λ es cerrado ya que $K_\lambda = \left\{ (x, r) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \lambda \| x \| + r \leq 0 \right\}$. □

El siguiente Lema es un importante resultado debido a Bishop y Phelps

Lema 3.1. *(**Bishop-Phelps.**) Sean $A \subset \boldsymbol{E} \times \mathbb{R}$ cerrado, no vacío y $\lambda \in (0, 1)$ tales que* $\inf\left\{ r \;\middle|\; (x, r) \in A \right\} = 0$. *Entonces para cualquier $(x_o, r_o) \in A$ existe $(x, r) \in A$ tal que*

1. $(x, r) \in A \cap \Big[K_\lambda + (x_o, r_o)\Big]$.
2. $\Big\{(x, r)\Big\} = A \cap \Big[K_\lambda + (x, r)\Big]$.

Prueba: Sea $R : \mathbf{E} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $R(x, r) = r$. Si definimos $A_o := A \cap \Big[K_\lambda + (x_o, r_o)\Big]$ y escogemos $(x_1, r_1) \in A_o$ tal que $r_1 < \inf R(A_o) + 1$.
Y además consideramos $A_1 := A \cap \Big[K_\lambda + (x_1, r_1)\Big]$ y tomamos $(x_2, r_2) \in A_1$ tal que

$$r_2 < \inf R(A_1) + (1/2).$$

Tenemos que si $(y, s) \in K_\lambda + (x_1, r_1)$ entonces

$$(y - x_1, s - r_1) \in K_\lambda \Rightarrow \lambda \| y - x_1 \| \leq -(s - r_1) = r_1 - s.$$

Más aún, como $(x_1, r_1) \in K_\lambda + (x_o, r_o)$ se tiene que

$$(y, s) \in K_\lambda + \Big(K_\lambda + (x_o, r_o)\Big) = K_\lambda + (x_o, r_o) \,. \tag{3.2}$$

Ya que si $(u_1, t_1), (u_2, t_2) \in K_\lambda$ entonces $\lambda \| u_1 + u_2 \| \leq \lambda \| u_1 \| + \lambda \| u_2 \| \leq -(t_1 + t_2)$, es decir, $K_\lambda + K_\lambda \subset K_\lambda$.
Por lo que de (3.2) se sigue que

$$A_1 = A \cap \Big[K_\lambda + (x_1, r_1)\Big] \subset A \cap \Big[K_\lambda + (x_o, r_o)\Big] = A_o.$$

Por otro lado, se tiene que diam$A_1 \leq (2/1\lambda)$ dado que si $(y,s) \in A_1$ entonces

$$\lambda \parallel y - x_1 \parallel \ \leq -(s - r_1)$$

con $s \geq \text{ínf}\, R(A_1)$ y esto implica que

$$\lambda \parallel y - x_1 \parallel \ \leq \ r_1 - s \ < \ \text{ínf}\, R(A_o) + 1 - s \ \leq \ \text{ínf}\, R(A_1) + 1 - s \ \leq \ s + 1 - s = 1.$$

Es decir, $\parallel y - x_1 \parallel \ \leq (1/1\lambda)$.
Y como tenemos que $\lambda \parallel y - x_1 \parallel \ \leq r_1 - s$ entonces $|s - r_1| = r_1 - s < 1$.
Con lo cual tenemos que

$$\|(y - x_1, s - r_1)\| = \|y - x_1\| + |s - r_1| < (1/1\lambda) + 1 = (1/1\lambda) + (\lambda/\lambda) = (1+\lambda)/(1\lambda) < 2/(1\lambda).$$

Por lo tanto, diam$A_1 \leq (2/1\lambda)$.
Así construimos recursivamente $A_n := A \cap \big[K_\lambda + (x_n, r_n)\big]$ y escogemos $(x_{n+1}, r_{n+1}) \in A_n$ tal que $r_{n+1} < \text{ínf}\, R(A_n) + \big(1/(n+1)\big)$.
Así $A_{n+1} \subset A_n$ y diam$A_n \leq (2/n\lambda)$ ya que en general, si $(y,s) \in A_n$ entonces $s \geq \text{ínf}\, R(A_n)$ y

$$\lambda\|y - x_n\| \leq r_n - s < \text{ínf}\, R(A_{n-1}) + (1/n) - s \leq \text{ínf}\, R(A_n) + (1/n) - s \leq s + (1/n) - s = (1/n).$$

Por lo que

$$\|(y - x_n, s - r_n)\| = \|y - x_n\| + |s - r_n| < (1/n\lambda) + (1/n) = (1/n\lambda) + (\lambda/n\lambda) = (1+\lambda)/(n\lambda) < 2/(n\lambda).$$

Finalmente, hemos construido una sucesión $\big((x_n, r_n)\big) \subset A_n$ tal que

$$\Big\|(x_n, r_n) - (x_{n+1}, r_{n+1})\Big\| \ \leq \frac{2}{n\lambda} \ .$$

Es decir, $\big((x_n, r_n)\big)$ es de Cauchy, por lo tanto, existe un único $(x,r) \in \mathbf{E}\times\mathbb{R}$ tal que

$$(x_n, r_n) \longrightarrow (x, r).$$

Pero como A y K_λ son cerrados se tiene que $\big\{(x,r)\big\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, de aquí que $(x,r) \in A_o$ por lo que se satisface la condición 1.
Mientras que la condición 2 se sigue del hecho de que para toda n se satisface que

$$K_\lambda + (x,r) \subset K_\lambda + \big[K_\lambda + (x_n, r_n)\big] = K_\lambda + (x_n, r_n)$$

ya que $(x,r) \in K_\lambda + (x_n, r_n)$ para toda n y por que $K_\lambda + K_\lambda \subset K_\lambda$.
Y esto implica que si $(y,s) \in A \cap \big[K_\lambda + (x,r)\big]$ entonces $(y,s) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Por lo tanto, $0 \leq \ \parallel (y,s) - (x,r) \parallel \ \leq \big(2/(n\lambda)\big)$ para toda n pero esto es equivalente a que

$$0 \leq \ \parallel (y,s) - (x,r) \parallel \ \leq \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Con lo cual se tiene que $(y,s) = (x,r)$, es decir, $\big\{(x,r)\big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, es decir, se satisface 2. □

Como una consecuencia del Lema 3.1 tenemos el Principio Variacional de Ekeland que dice: Si $f(x_o)$ es cercano al ínfimo de una función semicontinua inferiormente f entonces una pequeña perturbación del tipo Lipschitz a f alcanza un mínimo estricto en un punto z relativamente cercano a x_o.

Teorema 3.1. ***Principio Variacional de Ekeland.*** *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ propia, semicontinua inferiormente, acotada inferiormente y sean $\varepsilon > 0$ y $x_o \in \boldsymbol{E}$ tal que*

$$f(x_o) < \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in \boldsymbol{E}\Big\} + \varepsilon.$$

Entonces para cualquier $\lambda \in (0, 1)$ existe $z \in dom(f)$ tal que

1. $\lambda \parallel z - x_o \parallel \; \leq f(x_o) - f(z)$.
2. $\parallel z - x_o \parallel \; < (\varepsilon/\lambda)$.
3. $\lambda \parallel x - z \parallel + f(x) > f(z) \quad , \quad$ *para cualquier $x \neq z$.*

Prueba: Supongamos sin pérdida de generalidad que el $\inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in \mathbf{E}\Big\} = 0$ (bajo traslación.) Luego como f es semicontinua inferiormente, la $epi(f) \subset \mathbf{E}\times\mathbb{R}$ es cerrada (ver Proposición 3.1.) Entonces tenemos que para $(x_o, f(x_o)) \in epi(f)$ existe $(z, r) \in epi(f)$ tal que

$$(z, r) \in epi(f) \cap \Big[K_\lambda + (x_o, f(x_o))\Big] \tag{3.3}$$

$$\text{y} \quad \Big\{(z, r)\Big\} = epi(f) \cap \Big[K_\lambda + (z, r)\Big] \tag{3.4}$$

por el Lema 3.1.
Así de (3.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
0 \leq f(z) \leq r < \infty \quad & \text{y} \quad (z - x_o, r - f(x_o)) \in K_\lambda. \\
\Rightarrow \quad z \in dom(f) \quad & \text{y} \quad \lambda \parallel z - x_o \parallel \; \leq f(x_o) - r. \\
\Rightarrow \quad \lambda \parallel z - x_o \parallel \; & \leq \; f(x_o) - r \; \leq \; f(x_o) - f(z). \qquad (3.5) \\
& \leq \; f(x_o) < \varepsilon. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Y la desigualdad (3.5) es precisamente la condición 1 mientras que la desigualdad (3.6) implica que

$$\parallel z - x_o \parallel \; < (\varepsilon/\lambda)$$

por lo que se cumple la condición 2.
Por otro lado, si $f(x) = \infty$ entonces $\lambda \parallel x - z \parallel + \infty > f(z)$, es decir, se satisface la condición 3.
Ahora bien, si $f(z) < r$ entonces $(z, r) \neq (z, f(z))$ y por (3.4) se sigue que

$$(z, f(z)) \notin epi(f) \cap \Big[K_\lambda + (z, r)\Big] \quad \Rightarrow \quad (z, f(z)) \notin K_\lambda + (z, r).$$

Es decir, $0 = \lambda \parallel z - z \parallel \; > r - f(z)$, por lo tanto, $f(z) > r$; lo cual es una contradicción.
Debido a esto, se tiene que $f(z) = r$ por lo que si $f(x) < \infty$ con $x \neq z$ entonces

$$\begin{aligned}
(x, f(x)) \notin K_\lambda + (z, r) &= K_\lambda + (z, f(z)) \\
\Rightarrow \quad \lambda \parallel x - z \parallel \; &> f(z) - f(x) \\
\Rightarrow \quad \lambda \parallel x - z \parallel + f(x) &> f(z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la condición 3. □

Gracias al Principio Variacional de Ekeland nos podemos acercar tanto como queramos al mínimo de la función f ya que basta definir

$$\begin{aligned}
\phi_\lambda : \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) + \lambda \parallel x - z \parallel .
\end{aligned}$$

Pues con esta función tenemos que $\phi_\lambda(x) \geq \phi_\lambda(z)$ para toda $x \in \mathbf{E}$, es decir, z es punto mínimo de ϕ_λ ya que si $x \neq z$ entonces

$$\phi_\lambda(x) = f(x) + \lambda \parallel x - z \parallel > f(z) = f(z) + \lambda \parallel z - z \parallel = \phi_\lambda(z).$$

en virtud de la conclusión 3 del Teorema 3.1.
Y tomando $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ en la conclusión 2 del Teorema 3.1 obtenemos que $\|z - x_o\| < \sqrt{\varepsilon}$.
Cabe mencionar, que para ver un estudio más profundo sobre estos temas se puede consultar [14].
A continuación, vemos el principio de Ekeland para problemas de equilibrio y para esto definimos que es un problema de equilibrio.

Definición 28. *Sea $f : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ una función dada. Entonces un problema de equilibrio es buscar $\bar{x} \in \boldsymbol{D}$ tal que $f(\bar{x}, y) \geq 0$ para toda $y \in \boldsymbol{D}$.*

Teorema 3.2. ***Principio de Ekeland para Problemas de Equilibrio.*** *Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio de Banach y consideremos $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{E}$ cerrado y $f : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ que satisface:*

1. *$f(x, \cdot)$ es acotada inferiormente y semicontinua inferiormente para toda $x \in \boldsymbol{D}$.*

2. *$f(t, t) = 0$ para toda $t \in \boldsymbol{D}$.*

3. *$f(z, x) \leq f(z, y) + f(y, x)$ para toda $x, y, z \in \boldsymbol{D}$.*

Entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para cada $x_o \in \boldsymbol{D}$ existe $\bar{x} \in \boldsymbol{D}$ tal que

$$f(x_o, \bar{x}) \ + \ \varepsilon \ \parallel x_o - \bar{x} \parallel \ \leq 0 \qquad y \tag{3.7}$$
$$f(\bar{x}, x) \ + \ \varepsilon \ \parallel \bar{x} - x \parallel \ > 0 \quad , \quad \forall x \in \boldsymbol{D} \quad \textit{tal que} \quad x \neq \bar{x} \tag{3.8}$$

Prueba: Sin pérdida de generalidad supongamos que $\varepsilon = 1$ y consideremos el conjunto

$$F(x) := \left\{ y \in \mathbf{D} \ \middle| \ f(x, y) \ + \ \varepsilon \parallel y - x \parallel \ \leq 0 \right\}. \tag{3.9}$$

El cual es cerrado para toda $x \in \mathbf{D}$ en virtud de 1.
Más aún, $F(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in \mathbf{D}$ ya que por 2 se cumple que $f(x, x) + \parallel x - x \parallel = 0$, es decir, $x \in F(x)$.
Luego, si $y \in F(x)$ y $z \in F(y)$ entonces por la desigualdad del triángulo y por 3 se cumple que

$$0 \ \geq f(x, y) + \ \parallel y - x \parallel \ + f(y, z) + \ \parallel z - y \parallel \ \geq \ f(x, z) + \ \parallel z - x \parallel .$$

Es decir, $z \in F(x)$. Por lo tanto se tiene que si $y \in F(x)$ entonces $F(y) \subset F(x)$.
Ahora bien, usando el hecho de que $f(x, \cdot)$ es acotada inferiormente para toda $x \in \mathbf{D}$ podemos definir el mapeo

$$\begin{aligned} v : \mathbf{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf_{z \in F(x)} f(x, z). \end{aligned}$$

Por lo que para toda $z \in F(x)$ se tiene que

$$\parallel z - x \parallel \ \leq -f(x, z) \ \leq \ \sup_{z \in F(x)} \left[-f(x, z) \right] \ = \ - \inf_{z \in F(x)} f(x, z) \ = \ -v(x).$$

Y esto implica que si $x_1, x_2 \in F(x)$ entonces

$$\parallel x_1 - x_2 \parallel \ \leq \ \parallel x - x_1 \parallel \ + \ \parallel x - x_2 \parallel \ \leq \ -v(x) - v(x) = -2v(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{D}.$$

Es decir,

$$\operatorname{diam} F(x) \leq -2v(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{D} \tag{3.10}$$

Por otro lado, fijando $x_o \in \mathbf{D}$ existe $x_1 \in F(x_o)$ tal que $f(x_o, x_1) \leq v(x_o) + 2^{-1}$ (por propiedades de ínfimo.)

Como $x_1 \in F(x_o)$, existe $x_2 \in F(x_1)$ tal que $f(x_1, x_2) \leq v(x_1) + 2^{-2}$.
Por lo que procediendo de manera recursiva construimos $(x_n) \subset \mathbf{D}$ tal que $x_{n+1} \in F(x_n)$ y

$$f(x_n, x_{n+1}) \leq v(x_n) + 2^{-(n+1)}. \tag{3.11}$$

Ahora, usando el hecho de que $F(x_{n+1}) \subset F(x_n)$ se tiene que

$$v(x_{n+1}) = \inf_{y \in F(x_{n+1})} f(x_{n+1}, y) \geq \inf_{y \in F(x_n)} f(x_{n+1}, y) \geq \inf_{y \in F(x_n)} \Big[f(x_n, y) - f(x_n, x_{n+1}) \Big]. \tag{3.12}$$

Ya que

$$f(x_n, y) \leq f(x_n, x_{n+1}) + f(x_{n+1}, y) \Rightarrow f(x_n, y) - f(x_n, x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}, y)$$

para toda $y \in F(x_n)$.
Pero además se cumple que

$$\inf_{y \in F(x_n)} \Big[f(x_n, y) - f(x_n, x_{n+1}) \Big] = \Big[\inf_{y \in F(x_n)} f(x_n, y) \Big] - f(x_n, x_{n+1}) = v(x_n) - f(x_n, x_{n+1}). \tag{3.13}$$

Así combinando (3.12) con (3.13) tenemos que $v(x_{n+1}) \geq v(x_n) - f(x_n, x_{n+1})$ y esto es equivalente a

$$- f(x_n, x_{n+1}) \leq v(x_{n+1}) - v(x_n). \tag{3.14}$$

Luego de (3.11), (3.14) y (3.10) se sigue para toda n que

$$\begin{array}{rrcl} & - v(x_n) & \leq & -f(x_n, x_{n+1}) + 2^{-(n+1)} \leq v(x_{n+1}) - v(x_n) + 2^{-(n+1)} \\ \Rightarrow & 0 & \leq & v(x_{n+1}) + 2^{-(n+1)} \\ \Rightarrow & 0 & \leq & v(x_n) + 2^{-n} \\ \Rightarrow & -v(x_n) & \leq & 2^{-n} \\ \Rightarrow & \operatorname{diam} F(x_n) & \leq & -2v(x_n) \leq 2 \cdot 2^{-n} \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{array} \tag{3.15}$$

Por lo tanto, de (3.15) tenemos que (x_n) es una sucesión de Cauchy y por ser $\mathbf{E}$ un espacio de Banach, se tiene que existe $\bar{x} \in \mathbf{D}$ tal que $x_n \to \bar{x}$.
Como el hecho de que $F(x_n)$ es cerrado para toda n implica que $\bar{x} \in F(x_n)$ para todo n, de aquí que $\{\bar{x}\} \subset \cap F(x_n)$ de hecho,

$$\{\bar{x}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F(x_n)$$

ya que $\operatorname{diam} F(x_n) \to 0$.
Finalmente, del hecho de que $\bar{x} \in F(x_o)$ concluimos la condición (3.7).
Más aún, como $\bar{x} \in F(x_n)$ para toda n se sigue que $F(\bar{x}) \subset F(x_n)$ para toda n y así

$$F(\bar{x}) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F(x_n) = \{\bar{x}\}.$$

Por lo tanto, si $x \in D \backslash \{\bar{x}\}$ entonces $x \notin F(\bar{x})$ es decir, se satisface (3.8). □

Para un estudio más detallado del Principio de Ekeland para problemas de equilibrio, se puede consultar el artículo [15].

Vemos a continuación que el principio de Ekeland para problemas de Equilibrio implica una versión más débil del principio variacional de Ekeland dado en el Teorema 3.1.

Teorema 3.3. *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ una función propia, semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Entonces para toda $\lambda > 0$ y cualquier $x_o \in dom(f)$ existe $z \in dom(f)$ tal que*

1. $\lambda \|z - x_o\| \; \leq f(x_o) - f(z)$.

2. $\lambda \|x - z\| + f(x) > f(z) \quad , \quad$ *para cualquier* $x \neq z$.

Prueba: Sea $\mathbf{D} = dom(f)$ y consideremos $g : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathbb{R}$; $g(x, y) = f(y) - f(x)$.
Como f es semicontinua inferiormente entonces $g(x, \cdot)$ es semicontinua inferiormente, luego, $g(t, t) = 0$ para toda $t \in \mathbf{D}$.
Más aún,

$$g(z, y) + g(y, x) = f(y) - f(z) + f(x) - f(y) = f(x) - f(z) = g(z, x) \quad , \quad \forall x, y, z \in \mathbf{D}.$$

Entonces por el Teorema 3.2, se cumple que para $\varepsilon = \lambda > 0$ y para cada $x_o \in \mathbf{D}$ existe $z \in \mathbf{D} = dom(f)$ tal que

$$\begin{cases} g(x_o, z) + \lambda \parallel x_o - z \parallel \; \leq 0 \quad \text{y} \\ g(z, x) + \lambda \parallel z - x \parallel \; > 0 \;\; , \quad \forall x \neq z. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(z) - f(x_o) + \lambda \parallel x_o - z \parallel \; \leq 0 \quad \text{y} \\ f(x) - f(z) + \lambda \parallel z - x \parallel \; > 0 \;\; , \quad \forall x \neq z. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda \parallel z - x_o \parallel \; \leq f(x_o) - f(z) \quad \text{y} \\ \lambda \parallel z - x \parallel + f(x) > f(z) \;\; , \quad \forall x \neq z. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda \parallel z - x_o \parallel \; \leq f(x_o) - f(z) \quad \text{y} \\ \lambda \parallel x - z \parallel + f(x) > f(z) \;\; , \quad \forall x \neq z. \end{cases}$$

Y estas últimas son precisamente las conclusiones 1 y 2 que coinciden con 1 y 3 del Teorema 3.1. □

3.2. Equivalencias del Principio Variacional de Ekeland.

En esta sección enunciamos una serie de resultados y probamos que son equivalentes a la versión débil del principio variacional de Ekeland (Teorema 3.3.)

Teorema 3.4. ***(Teorema de Punto Fijo de Caristi.)*** *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^+$ semicontinua inferiormente. Supongamos que el operador multivaluado $T : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ satisface que*

$$\parallel x - y \parallel \; \leq k\Big[f(x) - f(y)\Big] \quad , \quad \forall y \in T(x); \; \textit{para alguna } k > 0. \tag{3.16}$$

Entonces T tiene un punto estacionario en $\boldsymbol{E}$, es decir, existe $x^* \in \boldsymbol{E}$ tal que $\{x^*\} = T(x^*)$.

Definición 29. *El Pétalo de la Flor conectado con $a, b \in \boldsymbol{E}$ y $\gamma > 0$ es el conjunto*

$$P_\gamma(a, b) := \Big\{x \in \boldsymbol{E} \;\Big|\; \parallel x - b \parallel + \gamma \parallel x - a \parallel \; \leq \; \parallel a - b \parallel\Big\}.$$

Teorema 3.5. ***(Teorema del Pétalo de la Flor de Penot.)*** *Sea $M \subset \mathbf{E}$ con $a \in M$ y $b \in \mathbf{E} \backslash M$. Entonces para cada $\gamma > 0$ existe $x^* \in \mathbf{E}$ tal que*

$$x^* \in M \cap P_\gamma(a, b) \quad y \quad \{x^*\} = M \cap P_\gamma(x^*, b).$$

Teorema 3.6. ***(Principio de Minimización de Takahashi.)*** *Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semicontinua inferiormente, propia y acotada inferiormente. Supongamos que para cada $x \in \mathbf{E}$ con $\inf_{u \in \mathbf{E}} f(u) < f(x)$ existe $y \in \mathbf{E}$ tal que*

$$y \neq x \quad y \quad f(y) + \| y - x \| \leq f(x). \tag{3.17}$$

Entonces existe $x^* \in \mathbf{E}$ tal que $f(x^*) = \inf_{u \in \mathbf{E}} f(u)$.

En lo siguiente consideraremos el conjunto

$$F(x) := \Big\{ y \in \mathbf{E} \;\Big|\; f(x, y) \;+\; \varepsilon \| y - x \| \;\leq 0 \Big\}.$$

que es similar al dado en (3.9).

Teorema 3.7. ***(Teorema de Oettli-Théra.)*** *Sean $A \subset \mathbf{E}$ y $x_o \in \mathbf{E}$ tales que para cada $x \in F(x_o) \backslash A$ existe $y \in F(x) \backslash \{x\}$. Entonces existe $x^* \in F(x_o) \cap A$.*

Teorema 3.8. *Los Teoremas 3.2 a 3.7 son equivalentes.*

Prueba: Primero mostraremos que: Teorema 3.3 si y sólo si Teorema 3.4.
Necesidad: Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^+$ semicontinua inferiormente. Así $f(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbf{E}$, es decir, f es acotada inferiormente y propia.
Entonces existe $x^* \in \mathbf{E}$ tal que se satisface 2 del Teorema 3.3 con $\lambda = k^{-1}$ para todo $x \neq x^*$, es decir,

$$\begin{aligned} & f(x^*) < f(x) + k^{-1} \| x - x^* \| \\ \Rightarrow \quad & f(x^*) - f(x) < k^{-1} \| x - x^* \| . \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{x^*\} = T(x^*)$ ya que de lo contrario, si $x \in T(x^*)$ se contradice la hipótesis (3.16) pues tendríamos que

$$\| x^* - x \| \leq k\Big[f(x^*) - f(x)\Big] \;<\; k \cdot k^{-1} \| x - x^* \| \;=\; \| x^* - x \| .$$

Suficiencia: Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semicontinua inferiormente, acotada inferiormente, propia y supongamos que la conclusión del Teorema 3.3 no se cumple, esto genera dos casos.
Caso 1. Para cada $x \in \mathbf{E}$ existe $y_o \in \mathbf{E}$ tal que $y_o \neq x$ y

$$\begin{aligned} & f(x) \geq f(y_o) + \lambda \| y_o - x \| \\ \Rightarrow \quad & f(x) - f(y_o) \geq \lambda \| y_o - x \| . \end{aligned}$$

Por lo que se satisface (3.16) con $\lambda = k^{-1}$.
Así basta definir $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ mediante $T(x) = \{x, y_o\}$ y de esta forma T no tiene puntos estacionarios.
Caso 2. Para cada $x \in \mathbf{E}$ existe $y_o \in \mathbf{E}$ tal que

$$\begin{aligned} & f(y_o) + k^{-1} \| y_o - x \| > f(x) \\ \Rightarrow \quad & k^{-1} \| y_o - x \| > f(x) - f(y_o) \\ \Rightarrow \quad & \| y_o - x \| > k\Big[f(x) - f(y_o)\Big]. \end{aligned}$$

Pero por la hipótesis (3.16) tenemos que $\| x - y_o \| \leq k\Big[f(x) - f(y_o)\Big]$ lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 3.3 si y sólo si Teorema 3.5.
Prueba: Para la necesidad, sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por $f(x) = \| x - b \|$ la cual es continua, acotada inferiormente y propia.
Por lo tanto, f es semicontinua inferiormente, así si $M \subset \mathbf{E}$ completo con $a \in M$ y $b \in \mathbf{E} \backslash M$ entonces para cada $\gamma > 0$ existe $x^* \in M$ tal que se cumple 1 del Teorema 3.3, es decir,

$$f(x^*) + \gamma \| x^* - a \| \leq f(a) \quad \Rightarrow \quad \| x^* - b \| + \gamma \| x^* - a \| \leq \| a - b \| .$$

Y esto implica que $x^* \in P_\gamma(a, b)$ por lo tanto, $x^* \in M \cap P_\gamma(a, b)$.
Por otro lado, como $\| x^* - b \| + \gamma \| x^* - x^* \| = \| x^* - b \|$ se tiene que

$$\{x^*\} \subset M \cap P_\gamma(x^*, b).$$

Ahora bien, si $y \in M \cap P_\gamma(x^*, b)$ entonces $y \in M$ y además

$$\| y - b \| + \gamma \| y - x^* \| \leq \| x^* - b \| .$$

Entonces si suponemos que $y \neq x$ entonces

$$f(x^*) < f(y) + \gamma \| y - x^* \| \quad \Rightarrow \quad \| x^* - b \| < \| y - b \| + \gamma \| y - x^* \| \leq \| x^* - b \| .$$

lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, $y = x^*$ es decir, $\{x^*\} = M \cap P_\gamma(x^*, b)$.
Suficiencia: Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ acotada inferiormente, semicontinua inferiormente, propia y supongamos sin pérdida de generalidad que $\inf\limits_{x \in \mathbf{E}} f(x) = 0$ (bajo traslación.)
Si $\gamma > 0$ y $x_o \in dom(f)$ entonces $f(x_o) < \infty$ así existe $k > 0$ tal que

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) f(x_o) \leq k. \tag{3.18}$$

De aquí que en el espacio de Banach $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ con la norma

$$\left\|(x_1, r_1) - (x_2, r_2)\right\| := \text{máx}\left\{\|x_1 - x_2\|_{\mathbf{E}}, |r_1 - r_2|\right\}.$$

Se tiene que tomando $M = epi(f)$ y $a = (x_o, f(x_o))$ se sigue que

$$b = (x_o, f(x_o) - k) \in (\mathbf{E} \times \mathbb{R}) \backslash M.$$

Ya que si $b \in M$ entonces $f(x_o) \leq f(x_o) - k$ es decir, $k \leq 0$ lo cual es una contradicción.
Por otro lado, si $r \geq \inf\limits_{x \in \mathbf{X}} f(x) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} r - f(x_0) + k &= r - f(x_o) - (1/\gamma) f(x_o) + (1/\gamma) f(x_o) + k \\ &= r - \left(1 + (1/\gamma)\right) f(x_o) + (1/\gamma) f(x_o) + k \\ &\geq r - k + (1/\gamma) f(x_o) + k \\ &= r + (1/\gamma) f(x_o) \\ &\geq r + (1/\gamma) 0 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Así, existe $w^* = (x^*, r^*) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}$ tal que

$$w^* \in M \cap P_\gamma(a, b) \quad \text{y} \quad \{w^*\} = M \cap P_\gamma(w^*, b).$$

Entonces $w^* = (x^*, r^*) \in epi(f)$ es decir, $f(x^*) \leq r^*$ y esto implica que $r^* \geq \inf_{x \in \mathbf{E}} f(x) = 0$.
Luego,

$$||w^* - b||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} + \gamma||w^* - a||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} \leq ||a - b||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}}. \tag{3.20}$$

Y si $w = (x, r) \in M = epi(f)$ es tal que $w \neq w^*$ entonces

$$||w^* - b||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} < ||w - b||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} + \gamma||w - w^*||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}}. \tag{3.21}$$

Y como $w^* \in M = epi(f)$ se sigue que

$$\begin{aligned} f(x^*) + \gamma||x^* - x_o|| &\leq r^* + \gamma||x^* - x_o|| \\ &\leq r^* + \gamma||w^* - a||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} \\ &\leq r^* + ||a - b||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} - ||w^* - b||_{\mathbf{E}\times\mathbb{R}} \quad , \quad \text{por (3.20)} \\ &= r^* + \text{máx}\Big\{||x_o - x_o||, |f(x_o) - f(x_o) + k|\Big\} \\ &\quad - \text{máx}\Big\{||x^* - x_o||, |r^* - f(x_o) + k|\Big\} \\ &\leq r^* + k - r^* + f(x_o) - k = f(x_o). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ya que $k > 0$ y $|r^* - f(x_o) + k| \leq \text{máx}\Big\{||x^* - x_o||, |r^* - f(x_o) + k|\Big\}$.
Además como $r^* \geq 0$ entonces $r^* - f(x_o) + k \geq 0$ por (3.19).
Por lo tanto de (3.22) tenemos que

$$f(x^*) + \gamma||x^* - x_o|| \leq f(x_o).$$

Por lo que se satisface la conclusión 1 del Teorema 3.3.
Para ver la condición 2 del Teorema 3.3 usamos nuevamente el hecho de que

$$r^* - f(x_o) + k \leq \text{máx}\Big\{||x^* - x_o||, |r^* - f(x_o) + k|\Big\}.$$

Y por (3.21) tenemos que

$$r^* - f(x_o) + k < \text{máx}\Big\{||x - x_o||, |r - f(x_o) + k|\Big\} + \gamma\, \text{máx}\Big\{||x - x^*||, |r - r^*|\Big\}. \tag{3.23}$$

Por lo que tenemos que considerar dos casos:
Caso 1) $||x - x_o|| \leq |r - f(x_o) + k|$:
Como $|r - f(x_o) + k| = r - f(x_o) + k$ ya que $0 \leq f(x) \leq r$ pues $w \in M$ entonces tenemos que

$$||x - x_o|| \leq r - f(x_o) + k.$$

Además si $|r - r^*| \leq ||x - x^*||$ entonces de (3.23) tenemos que

$$\begin{aligned} r^* - f(x_o) + k &< r - f(x_o) + k + \gamma||x - x^*|| \\ \Rightarrow \quad r^* &< r + \gamma||x - x^*|| \\ \Rightarrow \quad f(x^*) &< r + \gamma||x - x^*||. \end{aligned}$$

Pues $(x^*, r^*) \in M$, por lo que para cada $x \neq x^*$ con $r = f(x)$ tenemos que

$$f(x^*) < f(x) + \gamma||x - x^*||.$$

Ahora bien, si $|r - r^*| > ||x - x^*||$ entonces $r - r^* \neq 0$ y ahora de (3.23) deducimos que

$$\begin{aligned} r^* - f(x_o) + k &< r - f(x_o) + k + \gamma|r - r^*| \\ \Rightarrow \quad r^* &< r + \gamma|r - r^*|. \end{aligned}$$

Por lo que suponiendo sin pérdida de generalidad que $r - r^* < 0$ y $0 < \gamma \leq 1$ tenemos que

$$r^* < r + \gamma(r^* - r) \quad \Rightarrow \quad (1-\gamma)r^* < (1-\gamma)r.$$

Lo cual es una contradicción.
Caso 2) $\| x - x_o \| > |r - f(x_o) + k|$:
Se sigue de (3.18) que

$$\begin{array}{rcl} \|x - x_o\| & > & r - f(x_o) + \left(1 + \gamma^{-1}\right) f(x_o) \\ & = & r + \gamma^{-1} f(x_o) \\ \Rightarrow \quad \gamma\|x - x_o\| & > & \gamma\left(r + \gamma^{-1} f(x_o)\right). \end{array}$$

Es decir,

$$\gamma\Big(\|x - x_o\| - r\Big) > f(x_o).$$

Entonces, gracias a (3.22) tenemos que

$$r^* + \gamma\|x^* - x_o\| \leq f(x_o) < \gamma\Big(\|x - x_o\| - r\Big). \tag{3.24}$$

Y si además se cumple que

$$r^* \geq r + \gamma\|x - x^*\|. \tag{3.25}$$

Podemos deducir que

$$\begin{array}{rcll} r + \gamma\|x - x_o\| & \leq & r + \gamma\Big[\|x - x^*\| + \|x^* - x_o\|\Big] & \\ & \leq & r^* + \gamma\|x^* - x_o\| & , \quad \text{por } (3.25) \\ & < & r^* + \gamma\Big(\|x - x_o\| - r\Big) - r^* & , \quad \text{por } (3.24) \\ & = & \gamma\Big(\|x - x_o\| - r\Big). & \end{array} \tag{3.26}$$

Así de (3.26) tenemos que $r < -\gamma r$ lo cual es imposible ya que $r \geq 0$.
Por lo tanto, no es valida la desigualdad (3.25), es decir, $r^* < r + \gamma\|x - x^*\|$ y de aquí que tomando $r = f(x)$ para cada $x \neq x^*$ se cumple que

$$f(x^*) \leq r^* < f(x) + \gamma\|x - x^*\|.$$

Por lo tanto en ambos casos se satisface 2 del Teorema 3.3. □

Teorema 3.3 si y sólo si Teorema 3.6.
Prueba: Para la necesidad, sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente, propia y acotada inferiormente tal que para cada $x \in \mathbf{E}$ con $\inf\limits_{u \in \mathbf{E}} f(u) < f(x)$ existe $y \in \mathbf{E} \backslash \{x\}$ con

$$f(y) + \|y - x\| \leq f(x).$$

Entonces por el Teorema 3.3 existe $x^* \in \mathbf{E}$ tal que 2 con $\gamma = 1$, es decir,

$$f(x^*) < f(x) + \|x - x^*\| \quad , \quad \forall x \neq x^*. \tag{3.27}$$

Si $f(x^*) \neq \inf\limits_{u \in \mathbf{E}} f(u)$ entonces por hipótesis existe $\bar{x} \in \mathbf{E} \backslash \{x^*\}$ tal que

$$f(\bar{x}) + \|\bar{x} - x^*\| \leq f(x^*). \tag{3.28}$$

Luego de (3.28) y (3.27) concluimos que

$$f(\bar{x}) + \|\bar{x} - x^*\| \ < f(x) + \|x - x^*\| \quad , \quad \forall x \neq x^*.$$

en particular, para $\bar{x}$.
Así tenemos una contradicción y por lo tanto $f(x^*) = \inf_{u \in \mathbf{E}} f(u)$.
Suficiencia: Sea $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente, propia y acotada inferiormente entonces para $x_o \in \mathbf{E}$ y $\gamma > 0$ definimos

$$X_o := \left\{ x \in \mathbf{E} \ \middle| \ f(x) + \gamma \|x - x_o\| \ \leq f(x_o) \right\}.$$

El cual es cerrado por ser f semicontinua inferiormente, más aún, $x_o \in X_o$.
Por otro lado, supongamos que para toda $x \in X_o$ existe $\bar{x} \in \mathbf{E}$ tal que

$$\bar{x} \neq x \quad \text{y} \quad f(\bar{x}) + \gamma \|\bar{x} - x\| \ \leq f(x). \tag{3.29}$$

Entonces de (3.29) y por definición de X_o se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma \|\bar{x} - x\| \ \leq f(x) - f(\bar{x}) \ &\leq \ f(x_o) - \gamma \|x - x_o\| - f(\bar{x}). \\
\Rightarrow \qquad f(\bar{x}) + \gamma \|\bar{x} - x_o\| \ &\leq \ f(\bar{x}) + \gamma \|\bar{x} - x\| + \gamma \|x - x_o\| \\
&\leq \ f(\bar{x}) + f(x_o) - \gamma \|x - x_o\| - f(\bar{x}) + \gamma \|x - x_o\| \\
&= \ f(x_o).
\end{aligned}$$

Es decir, $\bar{x} \in X_o$.
Ahora bien, como estamos suponiendo que es valido el Teorema 3.6 se tiene que existe $x^* \in X_o$ tal que

$$f(x^*) = \inf_{u \in \mathbf{E}} f(u).$$

Pero por nuestra suposición, existe $y^* \in \mathbf{E}$ tal que $y^* \neq x^*$ y

$$\begin{aligned}
f(y^*) \ + \ \gamma \|y^* - x^*\| \ &\leq \ f(x^*) \\
\Rightarrow \quad f(y^*) < f(y^*) + \gamma \|y^* - x^*\| \ &\leq f(x^*).
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción al hecho de que f alcanza su mínimo en x^*.
Por lo tanto (3.29) no es valida y negando (3.29) nos queda que existe $x^* \in X_o$ tal que para toda $x \in \mathbf{E}$ con $x \neq x^*$ implica que

$$f(x) + \gamma \|x - x^*\| > f(x^*).$$

Es decir, para cada $x_o \in \mathbf{E}, \gamma > 0$ existe $x^* \in \mathbf{E}$ tal que

$$\begin{aligned}
f(x^*) + \gamma \|x^* - x_o\| \ \leq f(x_o) \qquad &\text{y} \\
\forall x \neq x^* \ , \ \ f(x) + \gamma \|x - x^*\| > f(x^*).&
\end{aligned}$$

Que son precisamente las conclusiones 1 y 2 del Teorema 3.3. □

Teorema 3.3 si y sólo si Teorema 3.2.
Prueba: Para la necesidad, sea $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ propia tal que satisface 1, 2 y 3 del Teorema 3.2.
Si $x_o \in \mathbf{E}$ entonces definiendo $g : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; $g(x) = f(x_o, x)$ tenemos que g es propia, semicontinua inferiormente y acotada inferiormente.
Por lo tanto, para cada $y \in \mathbf{E}, \gamma > 0$ existe $x^* \in \mathbf{E}$ tal que se satisfacen 1 y 2 del Teorema 3.3, es decir,

$$\begin{aligned}
g(x^*) + \gamma \parallel x^* - y \parallel \ \leq g(y) \qquad &\text{y} \\
\forall x \neq x^* \ , \ \ g(x^*) < g(x) + \gamma \parallel x - x^* \parallel .&
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $y \in G(x_o) := \left\{ y \in \mathbf{E} \;\middle|\; g(y) + \gamma \|x_o - y\| \;\; \leq 0 \right\}$.
Entonces por 1 del Teorema 3.3 se sigue que

$$g(x^*) + \gamma \|x_o - x^*\| \;\; \leq g(x^*) + \gamma \|x_o - y\| + \gamma \|y - x^*\| \;\; \leq g(y) + \gamma \|x_o - y\| \;\; \leq 0.$$

Es decir, $x^* \in G(x_o)$ que es la condición (3.7) del Teorema 3.2.
Y de 2 del Teorema 3.3 obtenemos que para todo $x \neq x^*$

$$f(x_o, x^*) < f(x_o, x) + \gamma \|x - x^*\| \;\;\Rightarrow\;\; f(x_o, x^*) + f(x^*, x) < f(x_o, x) + f(x^*, x) + \gamma \|x - x^*\|.$$

Luego, por la condición 3 de f,

$$f(x_o, x) < f(x_o, x) + f(x^*, x) + \gamma \|x - x^*\| \;\;\Rightarrow\;\; 0 < f(x^*, x) + \gamma \|x - x^*\|.$$

Por lo tanto, se satisface (3.8) del Teorema 3.2.
Suficiencia: Es la prueba del Teorema 3.3. □

Teorema 3.2 si y sólo si Teorema 3.7.
Prueba: Para la necesidad, sea $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ propia tal que satisface 1, 2 y 3 del Teorema 3.2.
Si $x_o \in \mathbf{E}$ entonces existe $x^* \in F(x_o)$ tal que se cumple (3.8) del Teorema 3.2.
Por otro lado, sea $A \subset \mathbf{E}$ tal que para cada $x \in F(x_o) \backslash A$ existe $y \in F(x) \backslash \{x\}$.
De aquí que $x^* \notin F(x_o) \backslash A$ por que de lo contrario, existiría $y \in F(x^*)$ con $y \neq x^*$ tal que

$$f(x^*, y) + \gamma \|x^* - y\| \;\; \leq 0.$$

Mientras que por (3.8) del Teorema 3.2 se tendría que

$$f(x^*, y) + \gamma \|y - x^*\| \;\; > 0.$$

Lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, $x^* \notin F(x_o) \backslash A$ y $x^* \in F(x_o)$ entonces $x^* \in A$ es decir, $x^* \in F(x_o) \cap A$.
Suficiencia: Sea $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ propia tal que satisface 1, 2 y 3 del Teorema 3.2.
Luego, para $x \in \mathbf{E}$ definimos

$$A(x) := \left\{ y \in \mathbf{E} \;\middle|\; y \neq x,\; f(x, y) + \gamma \|x - y\| \;\; \leq 0 \right\} = F(x) \backslash \{x\}.$$

Y tomando $A = \left\{ x \in \mathbf{E} \;\middle|\; A(x) = \emptyset \right\}$ podemos concluir que si $x \in F(x_o) \backslash A$ entonces por un lado, $x \in F(x_o)$.
Y por otro lado, $x \notin A$ lo cual implica que $A(x) \neq \emptyset$ por lo que existe $z \in A(x) = F(x) \backslash \{x\}$.
De esta forma, existe $x^* \in F(x_o) \cap A$, así $A(x^*) = \emptyset$, es decir, se satisface (3.8) del Teorema 3.2. □

Por lo tanto queda demostrado el Teorema 3.8.
Para ver otra prueba de la versión débil del Principio Variacional de Ekeland, así como de sus equivalencias, se pueden consultar los artículos: [1], [7] [10], [9] y [17]; haciendo su lectura en el contexto de espacios de Banach.

Apéndice A

Espacios de Banach.

Definición 30. *Sea $\mathbf{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Entonces $\mathbf{X}$ es un espacio normado si para todo $x \in \mathbf{X}$ existe un número real no negativo $\|x\|$, llamado norma de x, tal que*

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para toda* $x, y \in \mathbf{X}$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *si* $x \in \mathbf{X}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\|x\| > 0$ *si* $x \neq 0$.

Todo espacio normado puede ser visto como espacio métrico, en el cual la métrica o distancia de x a y denotada por $d(x, y)$, esta definida mediante $\|x - y\|$.
Las propiedades fundamentales de d son:

- $0 \leq d(x, y) < \infty$ para toda $x, y \in \mathbf{X}$,
- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ para toda $x, y \in \mathbf{X}$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para toda $x, y, z \in \mathbf{X}$.

Definición 31. *Un espacio de Banach $\mathbf{E}$ es un espacio normado el cual es completo con la métrica definida por su norma, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Como ejemplos de espacios de Banach, tenemos a $\mathbb{R}^n$, l^p y L^p con $1 \leq p \leq \infty$. Además de los espacios de funciones continuas definidas en espacios compactos.
Dado un espacio de Banach $\mathbf{E}$ consideramos los siguientes conjuntos:

$$\mathbf{B}^{\mathbf{E}}_{\varepsilon}(x) := \left\{ y \in \mathbf{E} \;\middle|\; d(x, y) < \varepsilon \right\} \quad \text{y} \quad \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{E}}_{\varepsilon}(x)} := \left\{ y \in \mathbf{E} \;\middle|\; d(x, y) \leq \varepsilon \right\}$$

A dichos conjuntos les llamamos bola abierta y bola cerrada con centro en x y radio ε en $\mathbf{E}$ respectivamente.
Así definimos una topología para $\mathbf{E}$ mediante $\tau := \left\{ U \subset \mathbf{E} \;\middle|\; \text{para todo } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } \mathbf{B}^{\mathbf{E}}_{\varepsilon}(x) \subset U \right\}$

Definición 32. *Dado un espacio de Banach $\mathbf{E}$ definimos su espacio dual como el conjunto*

$$\boldsymbol{E'} := \left\{ x' : \mathbf{E} \to \mathbb{R} \;\middle|\; x' \textit{ es lineal y continua.} \right\}$$

y denotamos por $< x', x >$ a $x'(x)$.

Además el espacio dual **E'** es un espacio de Banach con la norma

$$||x'||_{\mathbf{E'}} := \sup\left\{| < x', x > | \;\Big|\; ||x||_{\mathbf{E}} \leq 1\right\}$$

Por otro lado, dado que $\overline{\mathbf{B}_1^{\mathbf{E}}(0)}$ es compacta (según la norma) si y sólo si la dimensión de **E** es finita consideramos una nueva topología para **E** mediante su espacio dual **E'**.

Definición 33. *Sean **E** un espacio de Banach, $x' \in$ **E'** y consideramos $\widehat{x'} : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ dada por $\widehat{x'}(x) =< x', x >$, así al variar x' en **E'** obtenemos una familia $\left(\widehat{x'}\right)_{x' \in \boldsymbol{E'}}$. Entonces definimos la **topología débil** $\sigma(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$ como la topología menos fina sobre **E** que hace continuas a todas las funciones de la familia $\left(\widehat{x'}\right)_{x' \in \boldsymbol{E'}}$.*

Así con la $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$ topología tenemos menos abiertos y por lo tanto mas conjuntos compactos, en particular, resulta ser $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E'})$-compacto la bola cerrada unitaria sin importar la dimensión de **E**.
En este punto tenemos que dado un espacio de Banach **E** también tememos un espacio banach **E'** por lo cual podemos definir los conceptos de espacio dual de **E'** y de su topología débil.

Definición 34. *Dado un espacio de Banach **E** definimos su espacio doble dual como el conjunto*

$$\boldsymbol{E''} := \left\{x'' : \mathbf{E}' \to \mathbb{R} \;\Big|\; x'' \textit{ es lineal y continua.}\right\}$$

El cual resulta ser un espacio de Banach con la norma

$$||x''||_{\mathbf{E''}} := \sup\left\{| < x'', x' > | \;\Big|\; ||x'||_{\mathbf{E'}} \leq 1\right\}$$

Y observamos que tenemos una inyección canónica, llamada función evaluación, $\widehat{\ }$: $\mathbf{E} \to \mathbf{E''}$ dada por $\widehat{\ }(x)_{x'} = \widehat{x}(x') =< x', x >$ para $x \in \mathbf{E}$ fijo. Dicha inyección canónica es lineal e isométrica, por lo que podemos identificar a **E** con un subespacio (generalmente propio) de **E''**
Por otro lado, en el espacio de Banach **E'** tenemos dos topologías, a saber, la topología inducida por la norma dual y la $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})$ topología definida como en la Definición 33.
Sin embargo definimos a continuación una tercer topología sobre **E'** mediante la aplicación $\varphi_x : \mathbf{E}' \to \mathbb{R}$ definida por $x' \mapsto \varphi_x(x') =< x', x >$, así cuando x recorre **E** obtenemos una familia de aplicaciones $(\varphi_x)_{x \in \mathbf{E}}$ de **E'** en $\mathbb{R}$.

Definición 35. *Definimos la **topología débil (estrella)** $\sigma(\boldsymbol{E'}, \boldsymbol{E})$ como la topología menos fina sobre **E'** que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_x)_{x \in \boldsymbol{E}}$.*

Es decir, la topología $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E})$ contiene menos abiertos que la topología $\sigma(\mathbf{E'}, \mathbf{E''})$ que a su vez tiene menos abiertos que la topología inducida por la norma dual.
A continuación definimos otro tipo de espacios muy útiles en el análisis funcional.

Definición 36. *Un espacio de Hilbert **H** es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de un producto interior $< u, v >$ y que es completo con la norma dada por $< u, u >^{1/2}$.*

Como ejemplo de espacio de Hilbert tenemos a L^2 con el producto interior dado por

$$< u, v > := \int uv$$

y también el espacio de Sobolev $\mathbf{H}^1$ es un espacio de Hilbert.
Es importante notar que todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.
A continuación mostramos características importantes de los espacios de Hilbert.

Teorema A.1. *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces para toda $x, y \in \boldsymbol{H}$ se cumple la ley del paralelogramo, es decir, se satisface:*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \tag{A.1}$$

La prueba es inmediata de la definición de $||x||^2 =< x, x >$.

Teorema A.2. *Sean $\boldsymbol{H}$ espacio de Hilbert y $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{H}$ convexo, cerrado y no vacío. Entonces existe un único $x \in \boldsymbol{C}$ tal que minimiza la norma.*

A.1. Funciones Convexas.

En esta sección, siempre trabajamos en un Espacio de Banach $\mathbf{E}$ sobre $\mathbb{R}$.
Sean $\mathbf{D}$ un subconjunto de $\mathbf{E}$ no vacío, abierto y convexo y $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ una función convexa, es decir, tal que:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad ; \quad \forall x, y \in \mathbf{D} \text{ y } \forall t \in [0,1].$$

Si siempre se da la igualdad, decimos que f es una función afín; mientras que f es cóncava si -f es convexa.
Una funcional sublineal es una función $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} P(x+y) \leq P(x) + P(y), & \forall x, y \in \mathbf{E} \\ P(tx) = tP(x) & , \ \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{E}. \end{cases} \tag{A.2}$$

A.1.1. Ejemplos de Funciones Convexas.

1. La función $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ||x||$ es un ejemplo obvio. De manera más general, si $\mathbf{C} \subset \mathbf{E}$ es convexo y no vacío entonces la función distancia

$$\begin{aligned} d_C &: \mathbf{E} \to \mathbb{R} \\ x &\to d_C(x) = \text{ínf}\Big\{||x-y|| \ \Big| \ y \in \mathbf{C}\Big\} \end{aligned}$$

es continua y convexa en $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

2. El supremo de una familia de funciones convexas es una función convexa en el conjunto donde esta es finita. De hecho, si $A \subset \mathbf{E}$ es no vacío y acotado entonces la función

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{E} \to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \sup\Big\{||x-y|| \ \Big| \ y \in A\Big\} \end{aligned}$$

es continua y convexa en $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

3. La función norma también se puede generalizar por funcionales sublineales. Además el supremo de una familia finita de funcionales lineales es una funcional sublineal.

4. La funcional de Minkowski es otra generalización de la norma ya que si $\mathbf{C} \subset \mathbf{E}$ es convexo con $0 \in \text{int}\mathbf{C}$ entonces definiendo

$$\begin{aligned} P_C &: \mathbf{E} \to \mathbb{R} \\ x &\to P_C(x) = \text{ínf}\Big\{\lambda > 0 \ \Big| \ x \in \lambda\mathbf{C}\Big\}. \end{aligned}$$

Tenemos que P_C es una funcional sublineal no negativa. Más aún, $P_C(x) = 0$ si y sólo si $\mathbb{R}^+ x \subset \mathbf{C}$ y la frontera de $\mathbf{C}$ esta dada por $\Big\{x \in \mathbf{E} \ \Big| \ P_C(x) = 1\Big\}$. De hecho,

$$\text{int}\mathbf{C} = \Big\{x \in \mathbf{E} \ \Big| \ P_C(x) < 1\Big\} \subset \mathbf{C} \subset \Big\{x \in \mathbf{E} \ \Big| \ P_C(x) \leq 1\Big\} = \overline{\mathbf{C}}.$$

Por último, usando el hecho de que una funcional sublineal $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si existe $M > 0$ tal que $P(x) \leq M\|x\|$ para toda $x \in \mathbf{E}$. Deducimos que al funcional de Minkowski, P_C, es continua ya que basta tomar $M = (1/r)$ con r tal que $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}_r^{\mathbf{E}}(0)$.
Inversamente, cualquier funcional $P : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ continua, no negativa, subaditiva y positiva homogénea es de la forma P_C pues basta tomar $\mathbf{C} = \left\{x \in \mathbf{E} \;\middle|\; P(x) \leq 1\right\}$.
Cabe destacar que estas funcionales fallan en ser seminormas si y sólo si $\mathbf{C}$ no es simétrico con respecto al origen, es decir, si y sólo si existe $x_o \in \mathbf{E}$ tal que $P_C(x_o) \neq P_C(-x_o)$.
Para ver a detalle el desarrollo de lo anterior se pueden consultar [14] y [11].

Apéndice B

Categoría de Baire.

Para esta sección, requerimos de la teoría de los espacios vectoriales topológicos.

Definición 37. *Un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *es un espacio vectorial topológico si existe una topológia Hausdorff* τ *en* $\mathbf{V}$ *tal que la suma y la multiplicación por escalares son mapeos continuos.*

Teorema B.1. *Todo espacio de Banach sobre* $\mathbb{R}$ *es un espacio vectorial topológico sobre* $\mathbb{R}$*.*

Definición 38. *Sea* $\mathbf{S}$ *un espacio vectorial topológico sobre* $\mathbb{R}$*. Decimos que* $E \subset \mathbf{S}$ *es en ningún lado denso si* $\overline{E}$ *tiene interior vacío. Así los conjuntos de primer categoría de Baire en* $\mathbf{S}$ *son aquellos que son uniones numerables de conjuntos en ningún lado denso.*
Consecuentemente, a todo subconjunto de $\mathbf{S}$ *que no es de primer categoría (de Baire) lo llamamos conjunto de segunda categoría (en* $\mathbf{S}$*).*

A continuación enunciamos una serie de propiedades básicas sobre la categoría de Baire .

1. Si $A \subset B$ y B es de primer categoría en $\mathbf{S}$ entonces también lo es A.

2. Cualquier unión numerable de conjuntos de primer categoría es de primer categoría.

3. Cualquier subconjunto E de $\mathbf{S}$ cerrado con interior vacío es de primer categoría en $\mathbf{S}$.

4. Sean $h : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ un homeomorfismo y $E \subset, \mathbf{S}$. Entonces E y $h(E)$ tienen la misma categoría en $\mathbf{S}$.

Definición 39. *Un espacio topológico es llamado un espacio de Baire si la unión numerable de cualquier colección de conjuntos cerrados con interior vacío tiene un interior vacío. Esto es equivalente a que toda intersección numerable de conjuntos abiertos densos es densa.*

B.1. Ejemplos de Espacios de Baire.

1. Dado $\mathbb{R}$ con la topología usual, los racionales son de primera categoría y los irracionales son de segunda categoría en $\mathbb{R}$.

2. Los reales con la métrica usual son un espacio de Baire (ver el Teorema de categoría de Baire más adelante.)

3. Todo espacio homeomorfo a un subconjunto abierto de un espacio pseudométrico es un espacio de Baire (esto incluye los irracionales con su topología estándar así como el conjunto de Cantor).

4. Los espacios de Hausdorff localmente compactos son espacios de Baire (esto incluye todas las variedades).

5. Los espacios topológicamente completos son espacios de Baire.

6. Todo espacio topológico homeomorfo un espacio de Baire es un espacio de Baire.

7. El conjunto de Cantor es un espacio de Baire, pero pertenece a la primera categoría en el intervalo [0,1] con la topología usual.

A continuación mencionamos algunas propiedades de los espacios de Baire:

- Cada espacio no vacío de Baire es de segunda categoría en sí mismo; toda intersección de un número numerable de subconjuntos de abiertos densos de X es no vacío, pero los contrarios de ambas afirmaciones son falsos, como se muestra con la suma disjunta topológica de los racionales y el intervalo unitario [0,1].

- Todo subespacio abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire.

- Dada una familia de funciones continuas $f_n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ con límite $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, donde X es un espacio de Baire entonces los puntos donde f no es continua es de primer categoría en **X** y el conjunto de puntos donde f es continua es denso en **X**.

Teorema B.2. ***Teorema de Categoría de Baire.*** *Sea **S** un espacio métrico completo o un espacio localmente compacto Hausdorff. Entonces la intersección de toda colección numerable de subconjuntos densos y abiertos de **S** es densa en **S**.*

Es decir, si $\left\{E_i\right\}$ es una colección numerable de subconjuntos en ningún lado densos de **S** y además V_i es el complemento de $\overline{E_i}$ entonces cada V_i es denso y la conclusión del Teorema de Categoría de Baire nos dice que $\bigcap V_i \neq \emptyset$, por lo tanto, $\mathbf{S} \neq \bigcup E_i$.
Además, concluimos que los espacios métricos completos y los espacios localmente compactos y Hausdorff son de segunda categoría en ellos mismos.
Por último definimos un par de conjuntos esenciales para el desarrollo de este trabajo, a los que les aplicamos el Teorema de Categoría de Baire.

Definición 40. *Sea **E** un espacio de Banach. Entonces decimos que la intersección numerable de subconjuntos abiertos de **E** es un subconjunto G_δ.*
*Mientras que a la unión numerable de subconjuntos cerrados de **E** le llamamos un subconjunto F_σ.*

Para ver a detalle el desarrollo de lo anterior se puede consultar [16].

Apéndice C

Espacios Estrictamente y Uniformemente Convexos.

En esta sección damos dos conceptos fundamentales motivados por la geometría de un espacio vectorial normado **E**, a saber, que la bola cerrada unitaria en **E** es un conjunto convexo en virtud de la desigualdad del triángulo.

C.1. Espacios Estrictamente Convexos.

Definición 41. *Sea **E** un espacio vectorial normado. Decimos que **E** es **estrictamente convexo** si su norma es estrictamente convexa, es decir, si $x, y \in S^1$ tales que $x \neq y$ entonces*

$$\| \lambda x + (1-\lambda) y \| < \lambda \| x \| + (1-\lambda) \| y \| = 1 \quad , \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Una forma de caracterizar esta definición es que dados $x, y \in S^1$ tales que $x \neq y$ entonces su punto medio satisface que $\|(1/2)(x-y)\| < 1$ ya que basta visualizar que si **E** no es estrictamente convexo entonces S^1 debe contener a todo un segmento lineal y por lo tanto al menos a dos puntos, y por ende a su punto medio. A continuación enunciamos una serie de propiedades de los espacios estrictamente convexos.

Proposición C.1. *Sea **E** un espacio de Banach. Entonces **E** es estrictamente convexo si y sólo si dados $x, y \in \boldsymbol{E}$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ con $y \neq 0$ tenemos que $x = \lambda y$ para algún $\lambda \geq 0$.*

Proposición C.2. *Sean **E** un espacio de Banach, $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{E}$ convexo. Entonces dado $x_o \in \boldsymbol{E}$ existe a lo más un ``punto más cercano´´, es decir, existe a lo más un $x \in \boldsymbol{K}$ tal que*

$$\|x_o - x\| = \inf \left\{ \|x_o - k\| \;\middle|\; k \in \boldsymbol{K} \right\}.$$

Definición 42. *Sea **E** un espacio vectorial normado. Decimos que **E** es suave si su norma lo es, es decir, si para toda $x \in \boldsymbol{E}$ tal que $\| x \| = 1$ existe un único $x' \in$ **E'** tal que*

$$< x', x > = 1 \text{ y } \| x' \| = 1.$$

Proposición C.3. *Sea **E** un espacio de Banach. Entonces*

1. *Si **E'** es estrictamente convexo entonces **E** es suave.*

2. *Si **E'** es suave entonces **E** es estrictamente convexo.*

Corolario C.1. *Sea **E** un espacio de Banach reflexivo. Entonces **E** es estrictamente convexo si y sólo si **E'** es suave y además **E** es suave si y sólo si **E'** es estrictamente convexo.*

Proposición C.4. *Sea $\boldsymbol{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces $\boldsymbol{H}$ es suave y estrictamente convexo.*

Así tenemos que los espacios $\mathbb{R}^n, l^2$ y $L^2([a,b])$ con sus normas usuales son estrictamente convexos y suaves pero los espacios $l^1, c, l^\infty, L^1([a,b]), C([a,b])$ y $L^\infty([a,b])$ no son estrictamente convexos.

C.2. Espacios Uniformemente Convexos.

Definición 43. *Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio vectorial normado. Decimos que $\boldsymbol{E}$ es **uniformemente convexo** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x, y \in \overline{\boldsymbol{B}_1^E}(0)$ y $\|x-y\| \geq \varepsilon$ entonces $\|x+y\| \leq 2(1-\delta)$.*

Geométricamente esta definición quiere decir que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si x, y son cercanos en la bola cerrada unitaria con la distancia entre ellos de al menos ε entonces su punto medio dista al menos δ de la esfera unitaria S^1.
Así todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo mientras que el recíproco es cierto si el espacio es de dimensión finita.
Ahora bien, como ejemplo de un espacio que **no** es uniformemente convexo tenemos al espacio C_∞ que consta de todas las sucesiones escalares, las cuales tienen solo una cantidad finita de miembros distintos de cero y cuya norma se define de manera inductiva como sigue:
Para toda $n = 1, 2, \ldots$, sea

$$X_n := \left\{ x \in C_\infty \,\middle|\, x(j) = 0 \text{ para toda } j > n \right\}$$

Así, para $x \in X_1$, consideramos

$$\|x\| := |x(1)|.$$

Luego, supongamos que $\|x\|$ esta definida para toda $x \in X_{n-1}$. Si $x \in X_n$, entonces $x = y_{n-1} + x(n)e_n$ para algún $y_{n-1} \in X_{n-1}$. Por lo tanto definimos

$$\|x\| := \left(\|y_{n-1}\|^n + |x(n)|^n\right)^{1/n}.$$

Y de esta manera el espacio $(C_\infty, \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo pero no es uniformemente convexo.
Por otro lado, tenemos que los espacios l^p y $L^p([a,b])$ con $1 < p < \infty$ son uniformemente convexos y por lo tanto son estrictamente convexos.
Un resultado importante sobre los espacios uniformemente convexos es enunciado a continuación.

Teorema C.1. ***(Milman, 1938.)*** *Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio de Banach uniformemente convexo (en alguna norma equivalente). Entonces $\boldsymbol{E}$ es reflexivo.*

Para finalizar esta sección basta remarcar que el recíproco del Teorema C.1 es falso, para ver un contraejemplo y hacer un estudio más detallado de los espacios uniformes y estrictamente convexos se puede consultar: [6], [12], [13] y [4].

Bibliografía

[1] Brezis and Browder. A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis. *Advances in Mathematics*, 21(3):355 – 364, September 1976. [citado en p. 77]

[2] Haïm Brezis. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1983. Pags. 1-7. [citado en p. 9, 42, 53, 54]

[3] G. Choquett. *Lectures on Analysis*, volume I. W. A. Benjamin, Nueva York 1969. Pags. 105-119. [citado en p. 54, 55]

[4] James A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(3):396 – 414, Dec. 1936. [citado en p. 88]

[5] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2^{nd} edition, 1990. Pags. 124 - 131. [citado en p. 11]

[6] Mahlon M. Day. Reflexive banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. *Bull. American Mathematical Society*, (47):313 – 317. [citado en p. 88]

[7] J. X. Fang. The variational principle and fixed point theorems in certain topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202(2):398 – 412, September 1996. [citado en p. 77]

[8] T. M. Flett. *Differential Analysis*. Cambridge University Press, 1980. Pags. 21-22. [citado en p. 43]

[9] A. Hamel. Remarks to an equivalent formulation for ekeland's variational principle. *Optimization*, 31:233 – 238, 1994. [citado en p. 77]

[10] Andreas H. Hamel. Equivalents to ekeland's variational principle in f-type topological spaces. *Reports on Optimization*, 2001. [citado en p. 77]

[11] Ronald Larsen. *Functional Analysis*. Pure and Applied Mathemathics. Marcel Dekker, Inc. New York, 270 Madison Avenue, New York, New York 10016, 1973. Capítulo 1. [citado en p. 84]

[12] Balmohan Vishnu Limaye. *Functional Analysis.* New Age International (P) Limited, Publishers, 4835/24, Ansari Road, Daryaganj, New Dehli, 2 edition, 2004. Pags. 294 - 297. [citado en p. 88]

[13] Terry J. Morrison. *Functional Analysis An Introduction to Banach Space Theory.* Pure and Applied Mathematics, USA, 2000. Pags. 325 - 327. [citado en p. 88]

[14] Robert R. Phelps. *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*. Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlarg, 1^{st} edition, 1989. [citado en p. 69, 84]

[15] Monica Bianchi. Gábor Kassay. Rita Pini. Existence of equilibria via ekeland's principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 305(2):502 – 512, May 2005. [citado en p. 70]

[16] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Company, 1973. Capítulos 2, 3 y 12. [citado en p. 21, 39, 57, 86]

[17] W. Takahashi. Existence theorems generalizing fixed points theorems for multivalued mappings, in j.-b. baillon/m. thera, fixed point theory and applications. *Longman S T*, pages 397 – 406, 1991. [citado en p. 77]