



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Propagación de Ondas Electromagnéticas en una  
Interfase con Tres Medios**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**F Í S I C O**

**P R E S E N T A :**

**RICARDO PÉREZ PEÑA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES  
2010**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

<p>1. Datos del alumno  Apellido paterno  Apellido materno  Nombre  Teléfono  Universidad Nacional Autónoma de México  Facultad de Ciencias  Carrera  Número de cuenta</p>	<p>Datos del alumno  Pérez  Peña  Ricardo  56574332  Universidad Nacional Autónoma de México  Facultad de Ciencias  Física  402084244</p>
<p>2. Datos del tutor  Grado  Nombres  Apellido paterno  Apellido materno</p>	<p>Datos del tutor  Dr.  Juan Adrián  Reyes  Cervantes</p>
<p>3. Datos del Sinodal 1  Grado  Nombres  Apellido Paterno  Apellido Materno</p>	<p>Datos del Sinodal 1  Dr.  José Manuel  Hernández  Alcántara</p>
<p>4. Datos del Sinodal 2  Grado  Nombres  Apellido Paterno  Apellido Materno</p>	<p>Datos del Sinodal 2  Dr.  José Rufino  Díaz  Uribe</p>
<p>5. Datos del Sinodal 3  Grado  Nombre  Apellido Paterno  Apellido Materno</p>	<p>Datos del Sinodal 3  M. en C.  Mirna  Villavicencio  Torres</p>
<p>6. Datos del Sinodal 4  Grado  Nombres  Apellido Paterno  Apellido Materno</p>	<p>Datos del Sinodal 4  Dr.  Carlos Ignacio  Mendoza  Ruiz</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito  Título   Número de Páginas  Año</p>	<p>Datos del trabajo escrito  Propagación de Ondas Electromagnéticas en una  Interfase con Tres Medios.  99  2010</p>

# Índice General

0.1	Introducción. . . . .	2
<b>1</b>	<b>Pantallas de Cristal Líquido.</b>	<b>5</b>
1.1	Visualizadores de Información. . . . .	7
<b>2</b>	<b>Campos Electromagnéticos.</b>	<b>9</b>
2.1	Ecuaciones de Maxwell. . . . .	9
2.2	Ecuación de Onda. . . . .	12
2.2.1	Solución de la Ecuación de Onda. . . . .	13
2.3	Ondas Electromagnéticas en Medios. . . . .	13
2.3.1	Condiciones de Frontera. . . . .	15
2.3.2	Amplitud de las Ondas Reflejada y Transmitida. . . . .	18
<b>3</b>	<b>Ondas Electromagnéticas en Medios Compuestos.</b>	<b>26</b>
3.1	Modelo Propuesto. . . . .	28
3.2	Propuesta de campos magnéticos. . . . .	29
<b>4</b>	<b>Métodos de Solución.</b>	<b>36</b>
4.1	Condiciones de Frontera. . . . .	36
4.1.1	Condiciones en la interfase entre los medios 2 y 3, para $\mathbf{H}_z$ , $\mathbf{D}_y$ y $\mathbf{E}_x$ . . . . .	36
4.1.2	Condiciones en la interfase entre los medios 0 y 2 y 3. . . . .	45
4.2	Solución a orden cero en $\mathcal{O}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$ . . . . .	63
4.3	Solución a primer orden en $\mathcal{O}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$ . . . . .	77
4.4	Discusión de Resultados. . . . .	88
<b>5</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>91</b>
<b>6</b>	<b>Apendice:Representación Integral de la Función de Hankel.</b>	<b>94</b>

## 0.1 Introducción.

El trabajo que se desarrollará en esta tesis de licenciatura se inspira en los esfuerzos prácticos de elaborar pantallas de cristal líquido de visión amplia. Las pantallas de cristal líquido, conocidas comúnmente como pantallas de LCD por su acrónimo en inglés, constan de una matriz multiplexada de pixeles y a su vez cada píxel de la matriz está constituido por una celda de cristal líquido. Dicha celda puede ser fácilmente manipulada mediante el uso de voltajes alternos que varían la configuración del cristal líquido (más específicamente la variación en la configuración del cristal líquido se traduce en una variación de su permitividad eléctrica y por lo tanto en su índice de refracción). [1], [3]

Para lograr desplegar información por medio de visualizadores de cristal líquido, se activan ciertos pixeles de la pantalla para que permitan la transmisión de la luz o se desactivan para evitar su paso, entonces es posible imaginar que en algún instante dos celdas adyacentes podrían tener distintos índices de refracción.

Para simplificar el problema, se considera una superficie compuesta de dos medios distintos (que formarían la pantalla) inmersos en otro medio que se tomará como el vacío. El modelo propuesto tiene como finalidad describir

la propagación de luz en presencia de estos tres medios y se desea obtener las amplitudes del campo tanto reflejado como transmitido y analizar su dependencia con el ángulo de incidencia.

El propósito de esta tesis es obtener una expresión analítica que permita determinar la amplitud de las ondas reflejadas y transmitidas en el modelo simplificado de los tres medios que se mencionó en el párrafo anterior. Para lograrlo se partirá de una solución propuesta en términos de ondas planas tal y como se hace en algunos libros de texto cuando se tiene el problema de dos medios solamente[7]. Al igual que se hace comunmente, se aplicarán las condiciones de frontera y se obtendrá una serie de ecuaciones que se resumen en un sistema de tres ecuaciones con el cual se obtienen las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida.

La tesis se divide en los siguientes capítulos:

En el capítulo 1 se plantean algunas motivaciones que han llevado al desarrollo en el área de los cristales líquidos, se mencionan sus orígenes y principalmente se describe en rasgos generales cómo funciona una pantalla de cristal líquido.

En el capítulo 2 se revisa la teoría de la propagación de luz en medios y para esto se efectúa una revisión de la teoría electromagnética, que se

utilizarán a lo largo del desarrollo del modelo propuesto.

Posteriormente en el capítulo 3 se plantea el modelo propuesto que se utilizará para estudiar el problema planteado y a lo largo de este capítulo se aplicará la teoría ya conocida del electromagnetismo para llegar a tres ecuaciones analíticas que formarán un sistema de ecuaciones para obtener las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. A partir del sistema de ecuaciones se pueden plantear varios métodos de solución, y en este trabajo de tesis se siguió como primera aproximación el método de aproximaciones sucesivas quedándose hasta primer orden.

Finalmente, se resumen los resultados principales y se comentan algunas perspectivas.

# Capítulo 1

## Pantallas de Cristal Líquido.

En 1968 dos científicos de RCA demostraron que una capa delgada de cristal líquido era capaz de cambiar de turbia a clara cuando se le aplicaba un voltaje eléctrico. Aunque éste fue el primer visualizador de cristal líquido (LCD) requería un voltaje demasiado elevado; consumía mucha potencia y producía un visualizador de baja calidad. Tres años después, dos científicos que trabajaban uno en Suiza y el otro en Estados Unidos, informaron que una celda de cristal líquido podría cambiarse de claro a oscuro por medio de un voltaje eléctrico. La calidad mejorada de este visualizador junto con su bajo consumo de potencia, hizo a este dispositivo digno de aplicación. Diez años después equipos que funcionaban con baterías tales como relojes y calculadoras, contenían visualizadores de cristal líquido que requerían extremadamente baja potencia.[1], [2]



La combinación de ambos progresos científicos y las nuevas ideas tecnológicas, causaron una explosión en el número de investigaciones en el campo. En el área de los LCD se desarrollaron por lo menos seis tipos diferentes de visualizadores, incluyendo algunos que usaban cristales líquidos nemáticos y esmécticos. Numerosos artículos de investigación comenzaron a llenar volúmenes cada año, y aparecieron regularmente nuevas aplicaciones. El número de conferencias de investigación sobre cristales líquidos crecieron en tamaño desde aproximadamente cincuenta participantes en los comienzos de 1960, hasta aproximadamente setecientas personas a finales del 1980. Los grupos de físicos, químicos e ingenieros que estudiaron los cristales líquidos en sus inicios formaron universidades y laboratorios industriales por todo el mundo. Este periodo fue claramente excitante en la historia de la investigación sobre los cristales líquidos, y muchos de los conocimientos detallados de los cristales líquidos derivan de estos trabajos.

El estudio de los cristales líquidos jugó un papel importante en nuestro conocimiento cada vez mayor de cómo la estructura molecular influye en el comportamiento del cristal líquido. La agitación producto de estas actividades también permitió desarrollar visualizadores de cristal líquido para relojes, calculadoras, teléfonos, cámaras, equipos de oficina, ordenadores personales,

televisiones en miniatura y ventanas que cambian de claro a opaco.

Uno de los campos que continuamente se desarrolla es el de la síntesis de nuevos componentes de cristales líquidos, los cuales contribuyen en nuestro conocimiento de la síntesis orgánica en general. Entre otras aplicaciones de los cristales líquidos encontramos termómetros de cristal líquido y capas sensibles a la temperatura, polímeros de cristal líquido de elevada dureza, y agentes tensoactivos para la industria de extracción del petróleo[3]. Los progresos en nuestro entendimiento de las fases del cristal líquido también contribuyen en nuestra comprensión de las membranas celulares y de ciertas enfermedades, tales como la anemia drepanocítica y la arteriosclerosis[4].

## **1.1 Visualizadores de Información.**

Todos los visualizadores de información utilizan la capacidad de controlar la luz para funcionar. Controlando que partes del visualizador se iluminan y cuales quedan oscuras, la información se comunica al usuario. El ejemplo más sencillo de este funcionamiento es un visualizador numérico de siete segmentos. La luz transmitida a través de la superficie de cada uno de los siete segmentos se controla independientemente, pudiendo producir cada uno de los diez dígitos. Si se quieren representar dígitos y letras, se puede usar una matriz de cinco por siete y controlando la luz proveniente de las treinta

y cinco áreas distintas se pueden desplegar todas las letras y dígitos con más detalle. El arquetipo de flexibilidad es una pantalla de gran escala donde el campo entero de visión se compone de pequeñas áreas (llamadas píxeles), cada una de las cuales se controlan independientemente. Con una pantalla de 600 filas y 800 columnas (480píxeles), podemos visualizar información tanto alfanumérica como gráfica[4].

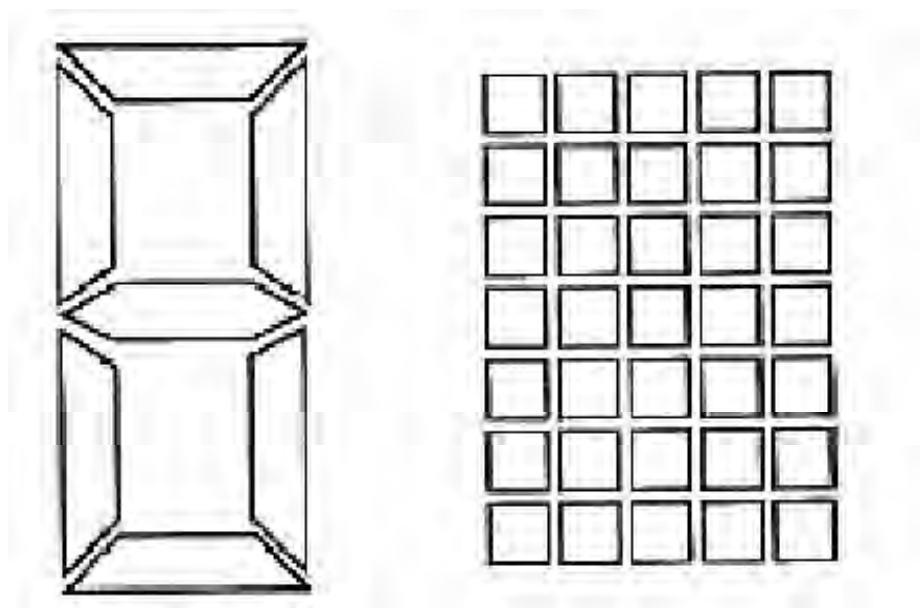


Figura 1.1: Visualizador de 7 segmentos y matriz de 7x5 píxeles.

Debido a que en este trabajo no se estudiarán las propiedades específicas de los cristales líquidos, no se hará una revisión de su estructura y de su comportamiento.

# Capítulo 2

## Campos Electromagnéticos.

Los primeros fenómenos electromagnéticos conocidos fueron la electrostática y el magnetismo. Con el tiempo nuestro dominio en este campo se fue extendiendo y comenzaron a aparecer posibilidades técnicas, producto de nuestro conocimiento. Se hizo posible el envío de señales a largas distancias por medio del telégrafo que transmitía por cables y posteriormente sin necesidad de conexión alguna. En nuestros días las aplicaciones son vastas y aún restan muchas por descubrirse.

### 2.1 Ecuaciones de Maxwell.

A mediados del siglo diecinueve se reconoció que muchos resultados experimentales de la electricidad y el magnetismo, obtenidos por varios científicos entre los que se destacan Ampère, Oersted y Faraday, podían resumirse en una serie de ecuaciones sintetizadas por Maxwell, las cuales publicó en su

obra titulada “Treatise on Electricity and Magnetism”. En ella Maxwell bosquejó el desarrollo de la teoría electromagnética. El desarrollo de este campo no solo se vió impulsado por el deseo de conocer las bases teóricas del electromagnetismo, sino también por la importancia de las aplicaciones tecnológicas. Como fue el de la telegrafía, entre otras aplicaciones.

Hubo muchas personas involucradas en el estudio de la teoría electromagnética, Fitzgerald, Poynting, Lodge, Lorentz, entre otros; pero probablemente el más influyente fue Oliver Heaviside quien simplificó notablemente la notación matemática. Inicialmente la descripción dada por Maxwell involucraba 20 ecuaciones. De hecho las ecuaciones de Maxwell tal como las conocemos hoy en día fueron publicadas por primera vez por Heaviside en 1884, utilizando la notación introducida por Gibbs[5]. Esta notación sigue vigente hoy en día.

Las ecuaciones de Maxwell describen la interacción entre el campo eléctrico y magnético, e indican como pueden ser generados ambos. Los campos electromagnéticos se modifican dentro de la materia, y la forma en que se ven afectados está dada por las relaciones constitutivas de los materiales.

Para separar las interacciones del campo electromagnético de los efectos del medio, se introducen dos campos eléctrico y magnético adicionales:

**D** y **H**. Estos dos campos se atribuyen a la presencia de cargas y corrientes libres; mientras que los campos **E** y **B** son los que actúan directamente sobre las cargas de prueba. El medio determina como los dos pares de campos se relacionan mutuamente, por medio de la permitividad eléctrica  $\varepsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$ . Esto es, para medios lineales, isotrópicos y homogéneos

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.2)$$

utilizando los dos campos **D** y **H** pueden reescribirse las ecuaciones de Maxwell, para obtener la descripción electromagnética en medios, la cual se expone a continuación (en el sistema MKS)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

en ausencia de cargas y corrientes libres  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ , respectivamente.

## 2.2 Ecuación de Onda.

Para obtener la ecuación de onda se considerarán medios lineales, isotrópicos, homogéneos en ausencia de corrientes y cargas libres (dieléctricos). Primero se tomará el rotacional de la ecuación (2.6) y se utilizarán las relaciones constitutivas (2.1), (2.2).

$$\nabla \times \left( \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \varepsilon \mathbf{E}), \quad (2.7)$$

de donde se obtiene

$$\frac{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B})}{\mu} - \nabla^2 \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] = -\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

como  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , entonces

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

similarmente se encuentra que

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.10)$$

donde la velocidad de la onda es

$$v^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon} = \frac{c^2}{n^2}, \quad (2.11)$$

$n$  es el índice de refracción, el cual se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio.

### 2.2.1 Solución de la Ecuación de Onda.

La solución en términos de *ondas planas* a la ecuación de onda (2.9), (2.10), en general se representa mediante la combinación lineal de funciones oscilantes, dependientes de la posición y del tiempo, tal es el caso de

$$\Psi(r, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)} + Be^{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}, \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector de propagación,

$$|\mathbf{k}| = k = \frac{\omega}{v} = \frac{n\omega}{c}, \quad (2.13)$$

## 2.3 Ondas Electromagnéticas en Medios.

Si una onda electromagnética plana con vector de propagación  $\mathbf{k}_i$  y frecuencia  $\omega_i$  moviéndose a través de un medio cuyo índice de refracción es  $n_1$ , incide



sobre una interfase plana de un medio cuyo índice de refracción es  $n_2$ . En general debe haber una onda reflejada por la superficie con vector de propagación  $\mathbf{k}_r$  y frecuencia  $\omega_r$ , y una onda transmitida con vector de propagación  $\mathbf{k}_t$  y frecuencia  $\omega_t$  después de atravesar la interfase.

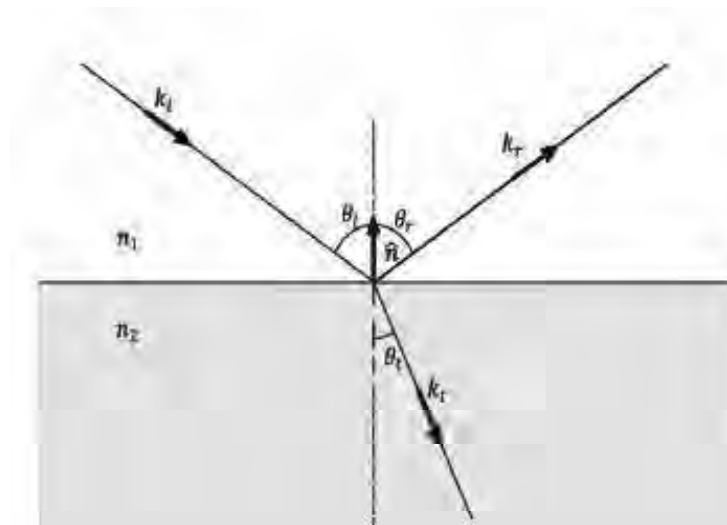


Figura 2.1: Reflexión y refracción de una onda plana.

Al incidir una onda plana cuyo vector de onda es  $\mathbf{k}_i$  sobre la superficie que divide los dos medios, su vector de onda forma un ángulo,  $\theta_i$ , con el vector normal a la superficie, denotado por  $\hat{\mathbf{n}}$ . De manera similar se definen el ángulo de reflexión  $\theta_r$  y el ángulo de transmisión  $\theta_t$  como los ángulos que  $\mathbf{k}_r$  y  $\mathbf{k}_t$  hacen con el vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Las ondas incidente, reflejada y transmitida son *ondas planas* y sus ecua-

ciones son, respectivamente:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}, \quad (2.16)$$

Las relaciones entre estas tres ondas se hallan al utilizar las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera sobre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ .

### 2.3.1 Condiciones de Frontera.

En presencia de dos medios distintos en contacto por medio de un interfase, como se muestra en la figura (2.1), son válidas las ecuaciones constitutivas y de Maxwell, ecuaciones (2.1) a (2.6). Además los vectores de campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ , deben satisfacer las condiciones de frontera al pasar de un medio al otro; por ejemplo del medio 1 al medio 2, figura (2.1).

Al aplicar la ley de Gauss sobre una superficie cerrada se encuentra que la discontinuidad en la componente normal de  $\mathbf{D}$  está dada por la densidad superficial de carga sobre la interfase. Generalmente esta superficie se elige

como un cilindro situado entre los dos medios por igual (con sus caras planas perpendiculares a la interfase).

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma, \quad (2.17)$$

en caso de que la densidad de carga,  $\sigma$ , en la interfase sea nula la componente normal de  $\mathbf{D}$  es continua.

Similarmente al aplicar la ley de Gauss en el caso del campo magnético se obtiene que la componente normal de  $\mathbf{B}$  es continua a través de la interfase entre los medios 1 y 2.

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (2.18)$$

De forma similar al integral sobre un circuito cerrado se pueden determinar las condiciones sobre las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ .

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad (2.19)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}, \quad (2.20)$$

en donde  $\mathbf{K}$  es la corriente superficial ubicada en la interfase de los dos materiales. Si la corriente superficial es nula, la componente normal de  $\mathbf{H}$  es

continua a través de la interfase entre ambos medios.

Aplicando la condición de frontera en el caso en que no hay cargas libres,  $\sigma = 0$ , a las ondas incidente, reflejada y transmitida se obtiene de la ecuación (2.17) lo siguiente

$$E_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} + E_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} = E_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}, \quad (2.21)$$

para que lo anterior sea posible debe cumplirse que los términos exponenciales sean iguales en las variables  $x$  y  $t$  (que son independientes), y esto sólo sucede si la frecuencia es la misma en los tres casos.

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t, \quad (2.22)$$

es decir que no cambie el "color" de la luz en los tres medios; y si además

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}. \quad (2.23)$$

Lo anterior da como resultado la ley de la reflexión

$$\text{sen}\theta_i = \text{sen}\theta_r, \quad (2.24)$$

y la ley de Snell.

$$n_1 \text{sen} \theta_i = n_2 \text{sen} \theta_t. \quad (2.25)$$

La ley de la reflexión establece que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión y más aún establece que al incidir un rayo de luz, este se encuentra en el mismo plano que el rayo reflejado, y la normal a la superficie también se encuentra en este plano. A este plano se le conoce como *plano de incidencia*.

### 2.3.2 Amplitud de las Ondas Reflejada y Transmitida.

En general la onda plana incidente puede tener polarización arbitraria, de cualquier modo puede dividirse en componentes.  $\mathbf{E}_{\parallel}$  paralelo al plano de incidencia y  $\mathbf{E}_{\perp}$  normal al plano de incidencia. En nuestro caso tomaremos el plano de incidencia sobre la página, ver figura (2.2). Considerando primero el término normal  $\mathbf{E}_{\perp}$  y la condición de frontera, ecuación (2.19), para el campo eléctrico tangencial a la interfase se obtiene

$$\mathbf{E}_{\perp i} + \mathbf{E}_{\perp r} = \mathbf{E}_{\perp t}, \quad (2.26)$$

el campo magnético que acompaña a  $\mathbf{E}_{\perp}$  se obtiene por medio de la siguiente relación

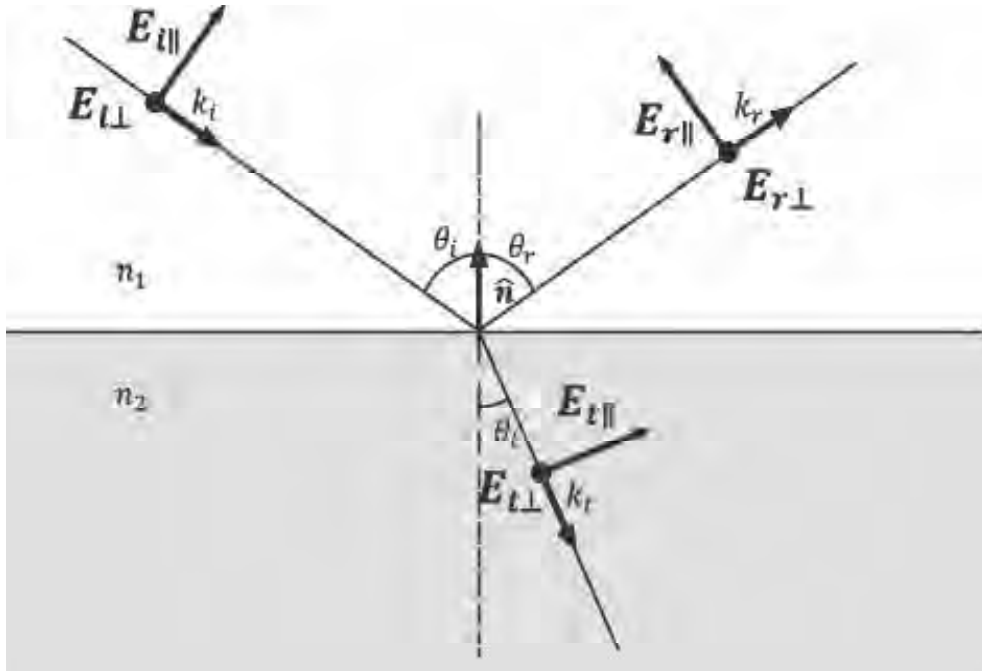


Figura 2.2: Componentes normal y tangencial, del campo eléctrico, al plano de incidencia que está sobre la hoja.

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}_{\perp} = \frac{n_i}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\perp}, \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{B}_{\parallel}$  es el campo magnético paralelo al plano de incidencia.

La relación anterior se obtiene al escribir las ecuaciones de Maxwell en el espacio de Fourier.

La componente del campo magnético normal a la interfase debe ser continua por las condición de frontera, ecuación (2.18) y la componente tangencial a la interfase debe ser continua siempre que no existan corrientes libres, ecuación (2.19).

ción (2.20). La componente tangencial a la interfase del campo magnético cumple con la relación

$$-B_{\parallel i} \cos \theta_i + B_{\parallel r} \cos \theta_r = -B_{\parallel t} \cos \theta_t, \quad (2.28)$$

y la componente normal a la interfase cumple con la relación

$$B_{\parallel i} \sin \theta_i + B_{\parallel r} \sin \theta_r = B_{\parallel t} \sin \theta_t, \quad (2.29)$$

debido a que  $\theta_i = \theta_r$  y utilizando la ecuación (2.27) se reescriben las dos ecuaciones anteriores (2.28) y (2.29) del siguiente modo

$$n_1 E_{\perp i} \cos \theta_i - n_1 E_{\perp r} \cos \theta_i = n_2 E_{\perp t} \cos \theta_t, \quad (2.30)$$

$$n_1 E_{\perp i} \sin \theta_i + n_1 E_{\perp r} \sin \theta_i = n_2 E_{\perp t} \sin \theta_t, \quad (2.31)$$

de las cuales se obtienen las relaciones entre  $E_{\perp i}$ ,  $E_{\perp r}$  y  $E_{\perp t}$ . De estas relaciones derivan las ecuaciones de Fresnel

$$r_{\perp} = \frac{E_{\perp r}}{E_{\perp i}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (2.32)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{\perp t}}{E_{\perp i}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = -\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (2.33)$$

Para el caso en que el campo eléctrico incidente se encuentra en el plano de incidencia, es posible encontrar de igual modo que en el caso anterior las ecuaciones de Fresnel las cuales se muestran a continuación

$$r_{\parallel} = \frac{E_{\parallel r}}{E_{\parallel i}} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, \quad (2.34)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{\parallel t}}{E_{\parallel i}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \quad (2.35)$$

A continuación se presenta la gráfica de las amplitudes reflejada y transmitida, en los casos en que el campo eléctrico se encuentra paralelo al plano de incidencia, ecuaciones (2.34) y (2.35); y en el caso en que el campo eléctrico se encuentra perpendicular al plano de incidencia, ecuaciones (2.32) y (2.33).

Como se puede ver de la gráfica (2.3) la amplitud  $r_{\parallel}$  comienza a ángulo cero con un valor positivo, lo cual significa que a incidencia normal hay reflexión y conforme aumenta el ángulo de incidencia la amplitud de la onda reflejada disminuye hasta llegar a cero a un cierto ángulo, llamado ángulo de Brewster. A partir de este ángulo la polarización del campo eléctrico paralela al plano de incidencia dejará de reflejarse ya que ahora el campo reflejado esta en desfase por  $\pi$  radianes, es decir que la onda reflejada tiene



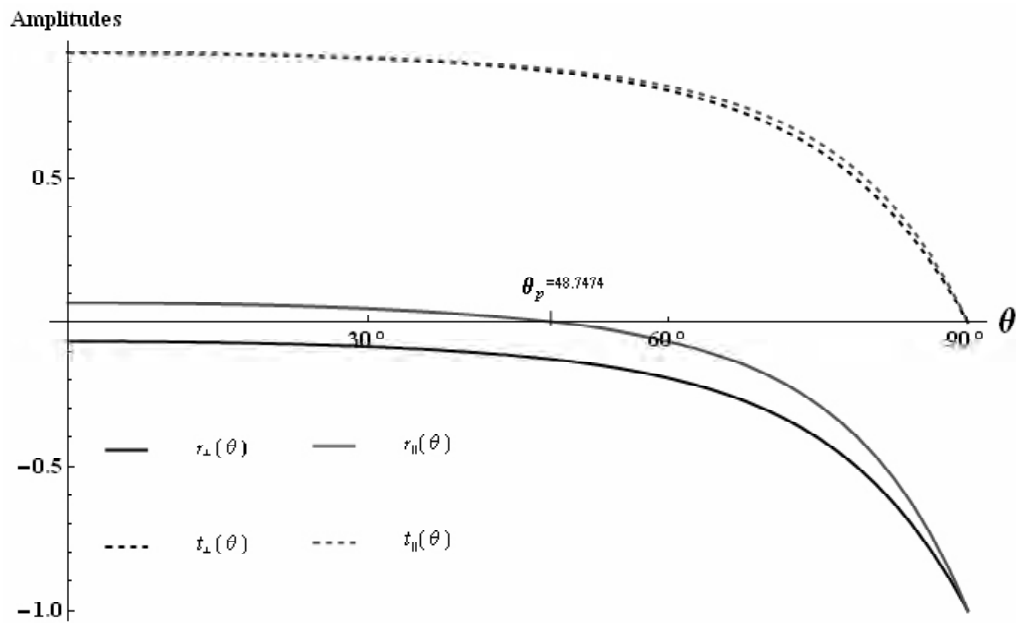


Figura 2.3: Coeficientes de reflexión y transmisión en función del ángulo de incidencia, dichos coeficientes corresponden a reflexión externa,  $n_t > n_i$  en una interfase aire-vidrio,  $n_t = \sqrt{1.3}$ .

otra polarización.

El ángulo de Brewster esta en función de la longitud de onda debido a la dispersión, pero no varía mucho en el rango de longitudes del visible.

Usualmente el ángulo de Brewster se utiliza para obtener luz polarizada. Si luz no polarizada incide sobre la interfase al ángulo de Brewster, la luz reflejada es luz polarizada con el vector eléctrico transversal al plano de incidencia.

Se debe decir que los coeficientes de Fresnell no siempre son cantidades

medibles directamente, mientras que las cantidades que pueden medirse son las intensidades de los campos.

La reflectancia  $R$  (o reflectividad ) y la transmitancia  $T$  (o la transmitividad ) que se refieren a la irradiancia reflejada y transmitida.

En ausencia de absorción o dispersión en la interfase se debe cumplir que

$$R + T = 1, \quad (2.36)$$

por conservación de energía. Las energías incidente transmitida y reflejada que cruza por unidad de tiempo y por unidad de área en la interfase son

$$\begin{aligned} I_i &= \vec{S}_i \cdot \hat{n} = S_i \cos \theta_i, \\ I_r &= \vec{S}_r \cdot \hat{n} = S_r \cos \theta_r, \\ I_t &= \vec{S}_t \cdot \hat{n} = S_t \cos \theta_t, \end{aligned} \quad (2.37)$$

respectivamente, y ya que  $I = \frac{v\varepsilon}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*)$ , donde  $\mathbf{S}$  es el vector de Poynting definido como

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (2.38)$$

entonces

$$\begin{aligned} R &= \frac{S_r \cos \theta_r}{S_i \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} = \\ &= \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2 = |r_{\perp}|^2, \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} = \frac{n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i} \left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2 \\ &= \frac{n_1 \cos \left( \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right) \right)}{n_2 \cos \theta_i} |t_{\perp}|^2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

De la figura (2.4) se ve que a incidencia normal la reflectancia es casi nula y por otro lado la transmitancia es máxima. A un ángulo de  $90^\circ$  se tiene lo contrario, la reflectancia es máxima y la transmitancia es nula.

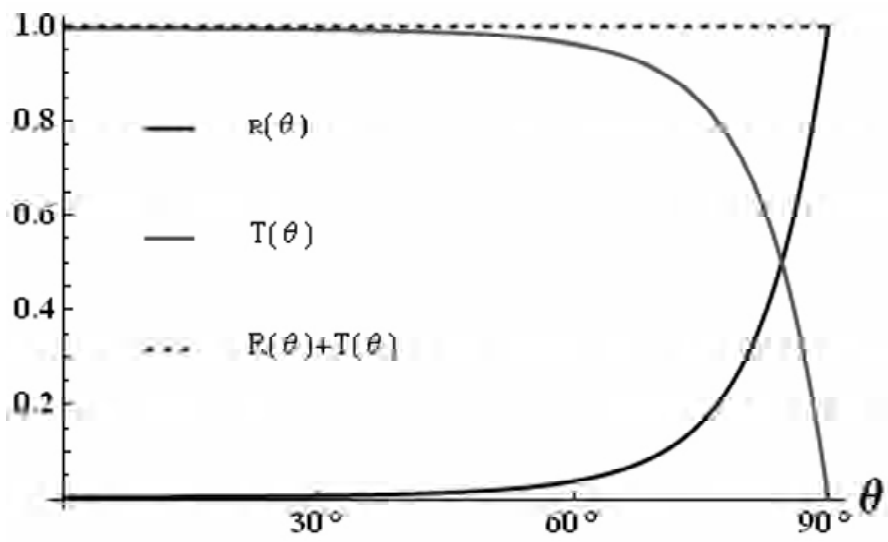


Figura 2.4: Reflectancia y transmitancia con el ángulo de incidencia.

## Capítulo 3

# Ondas Electromagnéticas en Medios Compuestos.

En esta sección se expondrá el modelo propuesto para describir el comportamiento de la luz al incidir sobre un medio cuya permitividad eléctrica no es homogénea a lo largo de la interfase, es decir que cambia de un lugar a otro. Recordemos que una pantalla de cristal líquido está formada por pixeles y cada píxel es una celda de cristal líquido, tal como se muestra en la figura (1.1). En cada celda de cristal líquido es posible variar la configuración molecular mediante campos eléctricos y por lo mismo la permitividad eléctrica varía en cada celda.

Con el objetivo de simplificar el sistema a estudiar se plantea un sistema en el cual sólo se consideran dos medios con distintos índices de refracción los cuales se unen en un costado. Estos dos medios a su vez están inmersos

en otro medio cuyo índice de refracción es distinto a los anteriores, por lo que se tiene un sistema conformado por tres medios diferentes tal como se muestra en la figura (3.1).

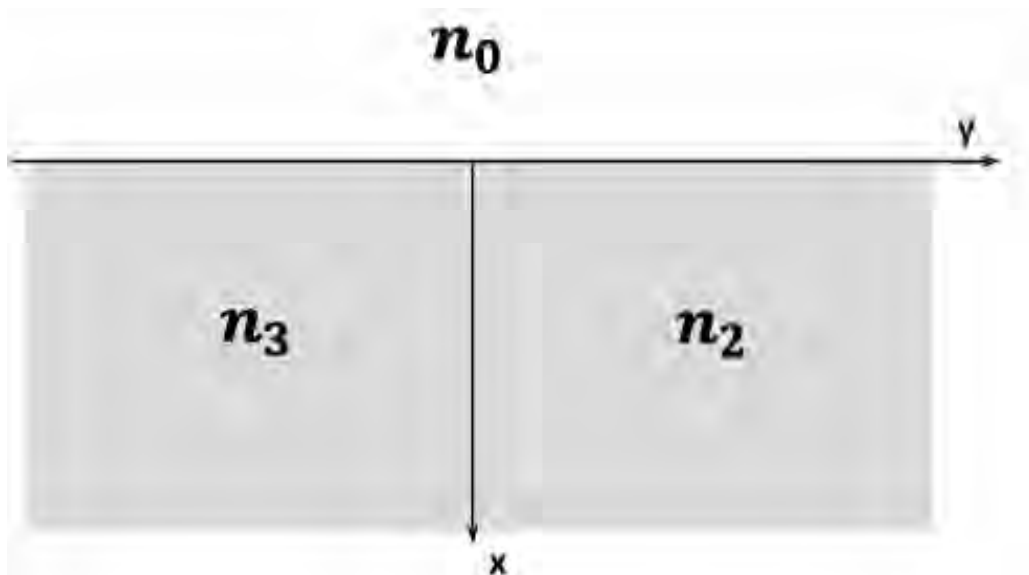


Figura 3.1: Tres medios, en cuyas fronteras se sitúa el marco de referencia.

En este sistema planteado los medios con índices de refracción  $n_3$  y  $n_2$  son medios homogéneos, no se está considerando que sean cristales líquidos. Esto como primera aproximación al sistema a estudiar.

A partir de este modelo se desea obtener la intensidad de la onda electromagnética reflejada y transmitida para contar con una teoría útil, la cual sirva de base para la configuración de pantallas de cristal líquido de visión

amplia.

### 3.1 Modelo Propuesto.

En la figura (3.1) se muestran tres medios distintos. Si una onda plana que se propaga en el medio cuyo índice de refracción es  $n_0$  y con vector de propagación arbitrario, incide sobre la interfase formada por los medios con índices  $n_3$  y  $n_2$  como se muestra en la figura(3.2), sucederá lo siguiente:

- Se reflejará la onda incidente; pero no hay certeza de que como en la sección anterior, tanto las ondas reflejada y transmitida sean ondas planas. Sin embargo debido a que las ecuaciones de Maxwell se siguen cumpliendo, las ondas en los tres medios se deben poder expresar como una combinación lineal de muchas ondas planas.
- La onda incidente se transmitirá, por ejemplo, al medio con índice  $n_3$  (medio tres) cumpliendo las condiciones de frontera, y al propagarse la onda en este medio se encontrará con la interfase que forma con el medio cuyo índice es  $n_2$  (medio dos); por lo que en el medio tres habrá tres direcciones de propagación. Del mismo modo sucederá en el medio dos.

- Para puntualizar, en la figura (3.2) se muestran las direcciones del vector de propagación en los tres medios; como puede verse ya se tomó en cuenta que al pasar una onda del medio 0 al medio 3, la componente  $y$  del vector de onda debe conservarse y por tanto en el medio tres se cambió a  $k_{3y}$  por  $k_{0y}$ . Luego si una onda que viaja a través del medio 3 e incide sobre la interfase con el medio 2, la componente del vector de onda que se conserva es la componente  $x$ . De este modo en el medio dos se cambió a  $k_{2x}$  por  $k_{3x}$ .

En la siguiente sección se mostrará la solución propuesta para el problema antes mencionado, y siguiendo un método similar al que se emplea en la sección (2.3) se obtendrán las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas.

## 3.2 Propuesta de campos magnéticos.

El sistema de referencia se elige de la siguiente manera: se definen los ejes  $x$  e  $y$  tal como se muestra en la figura (3.2) de modo que el eje  $y$  se ubique en la interfase entre los medios 0, 2 y 3, y el eje  $x$  positivo se ubica en la interfase entre los medios 2 y 3. La dirección positiva del eje  $y$  se elige hacia la derecha de la página y la dirección positiva del eje  $x$  hacia abajo. Para completar el sistema de referencia se define al eje  $z$  perpendicular a la página.



En las secciones anteriores se utilizó como solución particular de la ecuación de onda a *una onda plana*. En virtud del principio de superposición una solución más general es una *superposición de ondas planas* para las distintas regiones, que adopta la forma de transformadas de Fourier en el espacio de vectores de onda para las amplitudes  $t_1$  y  $t_2$ , en el caso de las ondas transmitidas en el medio 2, y de  $t_3$  y  $t_4$  para las ondas transmitidas en el medio 3; mientras que para las ondas reflejadas en el medio de incidencia es la amplitud  $A$ .

Es necesario especificar al igual que se hizo en la parte final del capítulo anterior, la dirección en la que varía el campo eléctrico o bien el magnético. En el caso que nos concierne se elegirá el campo magnético perpendicular al plano de incidencia, es decir en la dirección  $z$ .

En la figura (3.3) se muestra al modelo que se describió y además se señalan las amplitudes de la onda reflejada  $A(k_y)$ , y de las ondas transmitidas en los medios  $t_1(k_{2y})$ ,  $t_2(k_{2y})$ ,  $t_3(k_y)$  y  $t_4(k_y)$ . Las flechas que se asignan a cada una de estas amplitudes en la figura (3.3) son sólo para indicar alguna posible dirección de propagación en los medios 0, 2 y 3. Notese que las amplitudes antes mencionadas son funciones de los vectores de onda y esto se hace debido a que la solución que se propondrá del campo magnético, se hará en términos

de una transformada de Fourier.

A continuación se presentará la solución propuesta para este sistema; pero antes se discutirá un poco sobre esta.

La solución se dividirá en dos partes, la primera corresponde a la solución que tomará el campo magnético  $\mathbf{H}$  en la región  $x < 0$ . En esta región se tomará a la onda incidente y se le sumará un término relacionado con la transformada de Fourier inversa de la amplitud  $A(k_y)$ . La intención de tomar esta transformada es por que se pretenden considerar todas las posibles direcciones de propagación de la onda reflejada. Esto se hace ya que desde un inicio se consideró que la forma de la onda reflejada era desconocida y esa información nos la proporcionará la amplitud  $A(k_y)$ , cuando sea determinada.

En la región  $x > 0$ , se tienen dos medios los cuales están bien localizados debido a que el eje  $x$  positivo los divide. La solución que se propondrá tiene la misma idea que la solución en  $x < 0$ , es decir que se tomarán a las amplitudes  $t_1(k_{2y}), t_2(k_{2y})$ , en el medio 2 y se considerarán todas las posibles direcciones de propagación. También se toman consideraciones similares en el medio 3 .

Tomando en cuenta lo anterior se propone la solución del siguiente modo, para la región  $x > 0$ .

$$\begin{aligned}
H_z &= \Theta(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_1(k_{2y})e^{ik_{2y}y} + t_2(k_{2y})e^{-ik_{2y}y}] dk_y \\
&\quad + \Theta(-y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_3(k_y)e^{ik_y y} + t_4(k_y)e^{-ik_y y}] dk_y \\
x &> 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
k_{2y} &= \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} \\
&= \sqrt{k_2^2 - k_3^2 + k_y^2},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

se elige a  $k_{2y}$  de ese modo ya que en la interfase  $y = 0$ ,  $x > 0$ , la componente del vector de onda que se conserva es la componente en la dirección de  $x$  y  $\Theta(y)$  es la función de Heaviside definida como

$$\Theta(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} . \tag{3.3}$$

Por otro lado la solución en el medio 0 es

$$H_z = e^{ik_{0x}x + ik_{0y}y} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_x x + ik_y y} A(k_y) dk_y$$

$$x < 0, \tag{3.4}$$

se debe tener presente que la magnitud del vector de onda se puede expresar por medio de sus componentes del siguiente modo

$$k_{ix}^2 + k_{iy}^2 = k_i^2 = \left(\frac{n_i \omega}{c}\right)^2$$

$$i = 0, 2, 3 \quad , \tag{3.5}$$

donde  $n_i$  es el índice de refracción en los distintos medios. Si el medio 0 se considera como el vacío, entonces  $n_0 = 1$  y  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ .

Como se puede ver existe una dependencia entre  $k_x$  y  $k_y$ , por lo que al integrar sobre  $k_y$  en las ecuaciones (3.1) y (3.4) se están considerando todos los posibles vectores de propagación, es decir todas las posibles ondas planas monocromáticas que se propagan en todas las posibles direcciones

En el siguiente capítulo se expondrá la solución del modelo propuesto, si bien esta relacionado directamente con este capítulo, se decidió considerar a este de forma individual para dar claridad al modelo que se propone.

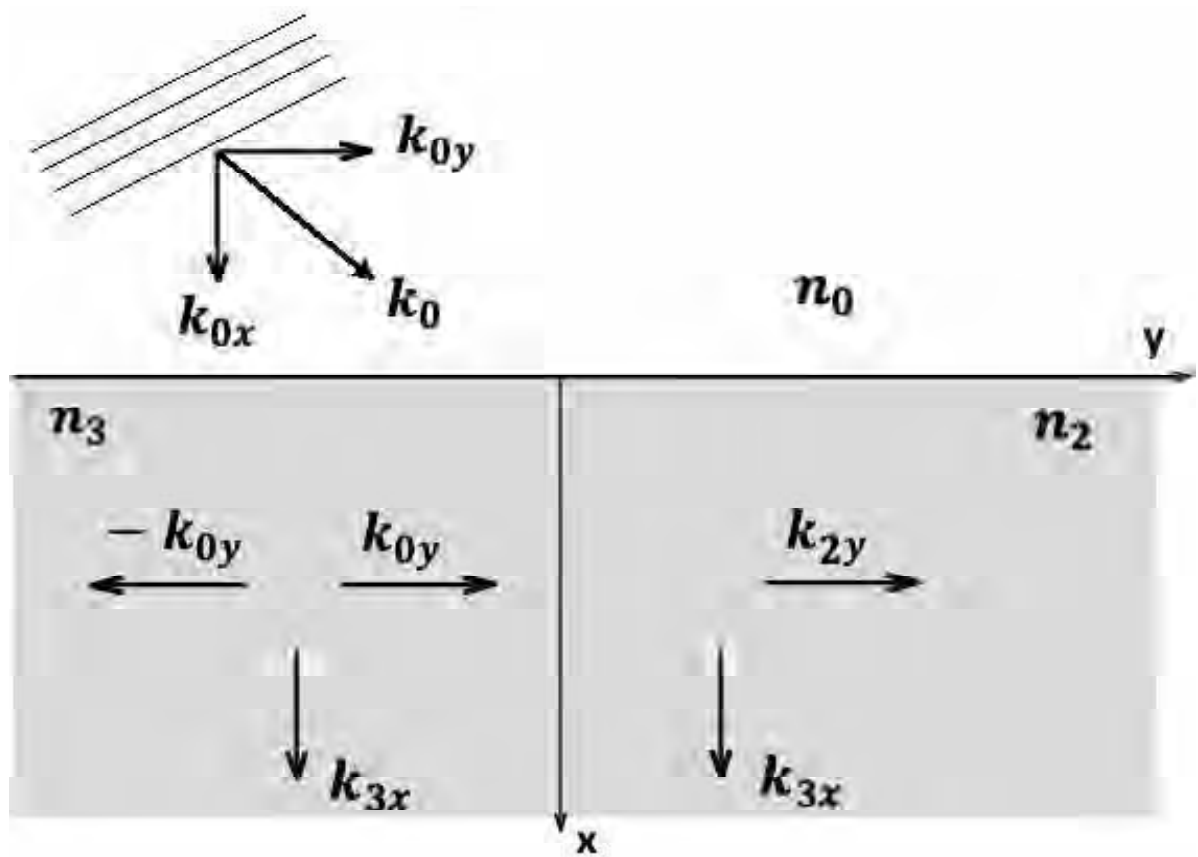


Figura 3.2: Onda plana propagándose en el medio con índice de refracción  $n_0$ , incide sobre la superficie que forman los medios dos y tres. En esta figura se muestran los vectores de propagación del campo  $\mathbf{H}$ , en las direcciones de  $x$  e  $y$ , en los tres medios.

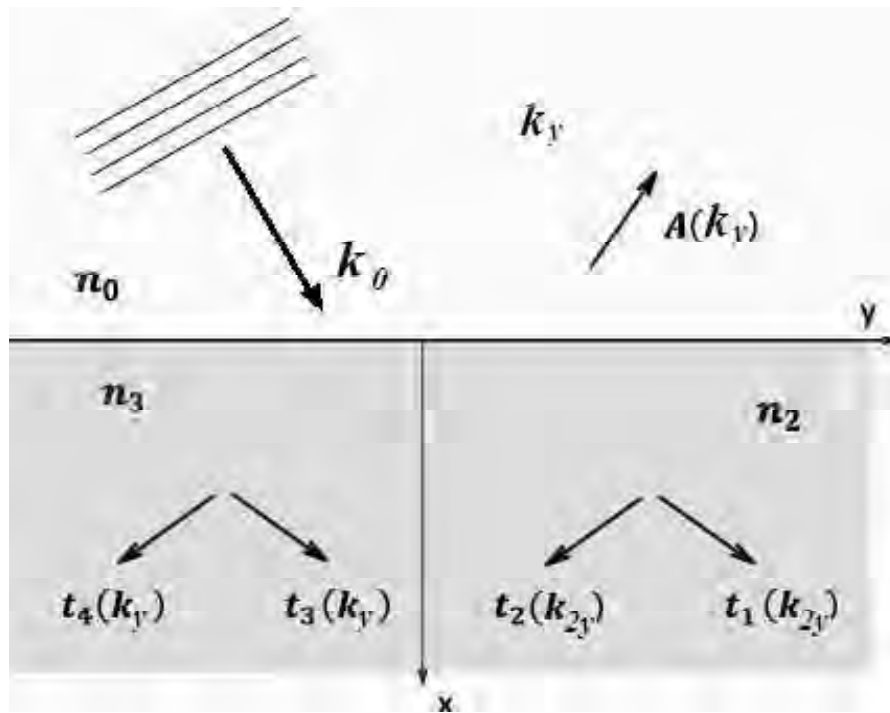


Figura 3.3: Amplitudes de las ondas que se propagan en los tres medios.

# Capítulo 4

## Métodos de Solución.

A lo largo de este capítulo se expondrá un método de solución iterativo para encontrar las amplitudes  $t_1(k_{2y})$ ,  $t_2(k_{2y})$ ,  $t_3(k_y)$ ,  $t_4(k_y)$  y  $A(k_y)$  de el modelo propuesto, ecuaciones (3.1) y (3.4). Al inicio se seguirá un método similar al aplicado en la sección (2.3). Se partirá de las ecuaciones de Maxwell en medios y se aplicarán las condiciones de frontera con la finalidad de obtener algunas expresiones que ayuden a relacionar las amplitudes entre sí; para después hallar sus expresiones en términos del vector de onda  $k_y$ .

### 4.1 Condiciones de Frontera.

#### 4.1.1 Condiciones en la interfase entre los medios 2 y 3, para $H_z$ , $D_y$ y $E_x$

Antes de comenzar se define a  $\hat{n}$  como el vector normal a la frontera común entre los tres medios, la cual esta sobre el eje  $y$ . Del mismo modo se define a

$\hat{n}'$  como el vector normal a la frontera común entre los medios 2 y 3, en esta última frontera el semieje  $x > 0$  está sobre la interfase entre los medios 2 y 3.

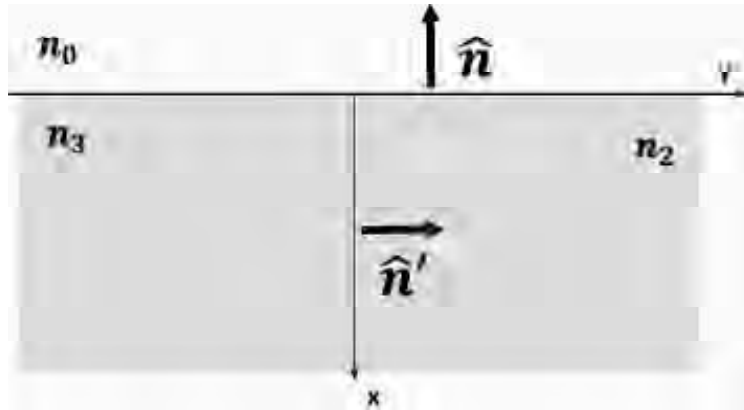


Figura 4.1: Vectores normales empleados al aplicar las condiciones de frontera.

A continuación se aplicarán las condiciones a la frontera en  $\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

#### a) Continuidad de $\mathbf{H}_z$

La componente tangencial del campo magnético debe ser continua en  $y = 0$ ; siempre que no haya corrientes libres, ecuación(2.20)

$$[\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{H}(y > 0, x > 0) - \mathbf{H}(y < 0, x > 0))]_{y=0} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}'$  es el vector normal al plano  $y = 0$

El campo magnético incidente oscila en la dirección del eje  $z$ , normal al



plano de incidencia; por lo que el producto cruz de  $\hat{\mathbf{n}}'$  con  $\mathbf{H}_2$  y  $\mathbf{H}_3$  resultará en un vector en la dirección  $\hat{i}$

$$\hat{i}(H(y > 0, x > 0) - H(y < 0, x > 0)) = 0, \quad (4.2)$$

tomando la solución propuesta, ecuación(3.1) y evaluando en  $y = 0$  se obtiene la siguiente expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_1(k_{2y}) + t_2(k_{2y})] dk_y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_3(k_y) + t_4(k_y)] dk_y, \quad (4.3)$$

se sigue entonces que los términos dentro de las integrales deben ser iguales

$$t_1(k_{2y}) + t_2(k_{2y}) = t_3(k_y) + t_4(k_y). \quad (4.4)$$

### b) Continuidad en $\mathbf{D}_y$

La componente  $\mathbf{D}_y$  normal a la interfase deberá ser continua mientras no existan cargas libres

$$(\mathbf{D}(y > 0, x > 0) - \mathbf{D}(y < 0, x > 0)) \cdot \hat{\mathbf{n}}' = 0, \quad (4.5)$$

de las ecuaciones de Maxwell, ecuación (2.6), en ausencia de corrientes libres

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4.6)$$

tomando la derivada parcial con respecto al tiempo de la expresión (4.5) y utilizando la ecuación anterior

$$(\nabla \times \mathbf{H}(y > 0, x > 0) - \nabla \times \mathbf{H}(y < 0, x > 0)) \cdot \hat{\mathbf{n}}' = 0, \quad (4.7)$$

debido a que  $\mathbf{H}_z$  es perpendicular al plano de incidencia, es decir en la dirección  $z$ , el rotacional de  $\mathbf{H}_z$  queda expresado como

$$\nabla \times \mathbf{H}_z = \hat{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \hat{j} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \quad (4.8)$$

dado que  $\hat{\mathbf{n}}'$  está en dirección de  $\hat{j}$ , al hacer el producto punto con  $\nabla \times \mathbf{H}_z$  sólo quedará la componente  $\hat{j}$  y la ecuación (4.7) se reduce a

$$- \left( \frac{\partial H_z(y > 0, x > 0)}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial H_z(y < 0, x > 0)}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.9)$$

Sustituyendo las expresiones para  $H_z(y > 0, x > 0)$ ,  $H_z(y < 0, x > 0)$  y evaluando en  $y = 0$  se obtiene la siguiente relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} i \sqrt{k_3^2 - k_y^2} [t_1(k_{2y}) + t_2(k_{2y})] dk_y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} i\sqrt{k_3^2 - k_y^2} [t_3(k_y) + t_4(k_y)] dk_y, \quad (4.10)$$

entonces se satisface la igualdad

$$i\sqrt{k_3^2 - k_y^2} (t_1(k_{2y}) + t_2(k_{2y})) = i\sqrt{k_3^2 - k_y^2} (t_3(k_y) + t_4(k_y)). \quad (4.11)$$

Esta última ecuación es la misma que (4.4).

### c) Continuidad de $\mathbf{E}_x$

La componente tangencial del campo eléctrico debe cumplir con la condición de frontera planteada en la ecuación (2.19). Si se toma la derivada parcial con respecto al tiempo de la ecuación antes mencionada se obtiene

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left( \frac{\partial \mathbf{E}(y < 0, x > 0)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}(y > 0, x > 0)}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Utilizando la ecuación (2.6), de las ecuaciones de Maxwell, junto con la relación constitutiva (2.1) y el rotacional de  $\mathbf{H}_z$ , ecuación (4.8) del inciso anterior, se obtiene la condición sobre  $\mathbf{E}_x$

$$\hat{\mathbf{n}}' \times \left\{ \hat{i} \left( \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y < 0, x > 0)}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y > 0, x > 0)}{\partial y} \right) \right\}$$

$$-\widehat{j} \left( \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y < 0, x > 0)}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y > 0, x > 0)}{\partial x} \right) \Bigg\}$$

$$= 0, \quad (4.13)$$

en el producto cruz anterior sólo es significativa la componente  $\widehat{i}$  ya que  $\widehat{\mathbf{n}}' \parallel \widehat{j}$ , por lo anterior

$$(\widehat{\mathbf{n}}' \times \widehat{i}) \left( \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y < 0, x > 0)}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y > 0, x > 0)}{\partial y} \right) = \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

como el producto cruz  $(\widehat{\mathbf{n}}' \times \widehat{i})$  es distinto de cero entonces el término del segundo paréntesis deberá ser igual a cero.

$$\left( \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y < 0, x > 0)}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \mathbf{H}_z(y > 0, x > 0)}{\partial y} \right) = 0, \quad (4.15)$$

sustituyendo a  $\mathbf{H}_z(y < 0, x > 0)$  y  $\mathbf{H}_z(y > 0, x > 0)$  en la ecuación anterior y evaluando en  $y = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [ik_{2y}t_1(k_{2y}) - ik_{2y}t_2(k_{2y})] dk_y \\ &= \frac{1}{\varepsilon_3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [ik_y t_3(k_y) - ik_y t_4(k_y)] dk_y, \end{aligned} \quad (4.16)$$

entonces los términos dentro de las integrales deberán ser iguales

$$\frac{k_{2y}}{\varepsilon_2} (t_1(k_{2y}) - t_2(k_{2y})) = \frac{k_y}{\varepsilon_3} (t_3(k_y) - t_4(k_y)), \quad (4.17)$$

por simplicidad se renombrará a  $\frac{k_{2y}}{\varepsilon_2}$  y  $\frac{k_y}{\varepsilon_3}$  de la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_3} &= \frac{k_y}{\varepsilon_3}, \\ \frac{1}{\eta_2} &= \frac{k_{2y}}{\varepsilon_2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

entonces

$$\frac{1}{\eta_2} (t_1(k_{2y}) - t_2(k_{2y})) = \frac{1}{\eta_3} (t_3(k_y) - t_4(k_y)). \quad (4.19)$$

Se han obtenido tres ecuaciones al aplicar las condiciones de frontera en la interfase de los medios **2** y **3**, ecuaciones (4.4), (4.11) que es básicamente la misma relación (4.4), y (4.19). De estas tres ecuaciones se obtendrán a continuación relaciones que más adelante serán de utilidad.

De la ecuación (4.4) se despeja  $t_1$  y se sustituye en la ecuación (4.19)

$$\frac{1}{\eta_2} (t_3 + t_4 - 2t_2) = \frac{1}{\eta_3} (t_3 - t_4), \quad (4.20)$$

entonces se obtiene  $t_2$  en términos de  $t_3$  y  $t_4$

$$t_2 = \frac{t_3}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) + \frac{t_4}{2} \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_3}\right), \quad (4.21)$$

similarmente se encuentra  $t_1$  en términos de  $t_3$  y  $t_4$

$$t_1 = \frac{t_3}{2} \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) + \frac{t_4}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right). \quad (4.22)$$

Ahora al restar las ecuaciones (4.21) y (4.22)

$$t_1 - t_2 = \left(\frac{\eta_2}{\eta_3}\right) (t_3 - t_4). \quad (4.23)$$

De la ecuación (4.4) se puede ver que  $t_1 - t_3 = t_4 - t_2$ . Si a la ecuación (4.22) se le resta  $t_3$ , después de reagrupar términos se obtiene

$$t_1 - t_3 = t_4 - t_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) (t_4 - t_3). \quad (4.24)$$

A continuación se obtendrán otras dos relaciones. Para obtener la primera se utiliza la ecuación (4.4), a ambos lados de la igualdad se suma  $t_3 - t_2$

$$t_1 + t_3 = 2t_3 + t_4 - t_2, \quad (4.25)$$

luego se sustituye  $t_4 - t_2$  de la ecuación (4.24)

$$t_1 + t_3 = \frac{t_3}{2} \left(3 + \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) + \frac{t_4}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right), \quad (4.26)$$

de manera similar se obtiene

$$t_4 + t_2 = \frac{t_4}{2} \left( 3 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + \frac{t_3}{2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right). \quad (4.27)$$

Una relación más se obtiene de la ecuación (4.19) y la ecuación (4.24).

Primero se obtiene de la ecuación (4.19)

$$\frac{t_1}{\eta_2} - \frac{t_3}{\eta_3} = \frac{t_2}{\eta_2} - \frac{t_4}{\eta_3}, \quad (4.28)$$

luego se multiplica la ecuación (4.24) por  $\frac{1}{\eta_2}$  y se despeja  $\frac{t_1}{\eta_2}$ ; después se resta  $\frac{t_3}{\eta_3}$  y después de reagrupar términos queda

$$\frac{t_1}{\eta_2} - \frac{t_3}{\eta_3} = \frac{t_2}{\eta_2} - \frac{t_4}{\eta_3} = \frac{1}{2\eta_2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) (t_4 + t_3). \quad (4.29)$$

De la ecuación (4.19) y de la ecuación (4.29), se despeja  $\frac{t_1}{\eta_3}$  y se suma  $\frac{t_3}{\eta_2}$  a toda la ecuación. Luego se sustituye el valor de  $\frac{t_2}{\eta_3} - \frac{t_4}{\eta_2}$  de la ecuación (4.29) y finalmente se reagrupan términos

$$\frac{t_1}{\eta_2} + \frac{t_3}{\eta_3} = \frac{t_3}{2\eta_2} \left( 1 + 3\frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + \frac{t_4}{2\eta_2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right), \quad (4.30)$$

de manera similar

$$\frac{t_2}{\eta_2} + \frac{t_4}{\eta_3} = \frac{t_4}{2\eta_2} \left( 1 + 3\frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + \frac{t_3}{2\eta_2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right), \quad (4.31)$$

de las ecuaciones que se encontraron, ecuaciones (4.17) a (4.31) se puede disminuir en dos el número de coeficientes independientes, ya que  $t_2$  y  $t_1$  se expresan en términos de los otros dos coeficientes  $t_3$  y  $t_4$ . Lo anterior será de mucha utilidad al tratar de encontrar dichos coeficientes, que en realidad son las amplitudes de reflexión y transmisión en los respectivos medios, véase la figura (3.3).

#### 4.1.2 Condiciones en la interfase entre los medios **0** y **2** y **3**.

A continuación se aplicarán las condiciones de frontera en  $x = 0, \forall y$ . Para poder aplicar las condiciones de frontera se denotará al campo magnético incidente como  $H(x < 0)$  y al campo magnético que se transmitirá como  $H(x > 0)$ .

##### a) continuidad de $\mathbf{H}_z$

De las condiciones de frontera, la condición del campo tangencial  $\mathbf{H}_z$  al plano  $x = 0$ , ecuación (2.20)

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}(x > 0) - \mathbf{H}(x < 0)) = 0, \quad (4.32)$$

debido a que  $\hat{\mathbf{n}} \parallel \hat{\mathbf{i}}$ , vease la figura (4.1) y  $H_z$  está en la dirección del eje  $z$  se obtiene lo siguiente



$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}(x > 0) - \mathbf{H}(x < 0)) = \hat{j}(H(x > 0) - H(x < 0)) = 0, \quad (4.33)$$

como se tomó la interfase paralela al eje  $y$ , debe evaluarse la ecuación anterior en  $x = 0$

$$[H(x > 0) - H(x < 0)]_{x=0} = 0. \quad (4.34)$$

Sustituyendo la solución propuesta, ecuaciones (3.1) y (3.4), y evaluando en  $x = 0$  se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} e^{ik_0y} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_yy} A(k_y) dk_y &= \Theta(y) \int_{-\infty}^{\infty} (t_1(k_{2y})e^{ik_{2y}y} + t_2(k_{2y})e^{-ik_{2y}y}) dk_y \\ &+ \Theta(-y) \int_{-\infty}^{\infty} (t_3(k_y)e^{ik_yy} + t_4(k_y)e^{-ik_yy}) dk_y. \end{aligned} \quad (4.35)$$

### b) Continuidad de $\mathbf{E}_y$

Aplicando la condición de frontera, ecuación (2.19)

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}(x < 0) - \mathbf{E}(x > 0)) = 0, \quad (4.36)$$

a continuación se toma la derivada parcial con respecto al tiempo de la ecuación anterior

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left( \left( \frac{\partial \mathbf{E}(x < 0)}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial \mathbf{E}(x > 0)}{\partial t} \right) \right) = 0, \quad (4.37)$$

utilizando las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones constitutivas, es posible obtener

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4.38)$$

si se sustituye en la condición de frontera, ecuación (4.37)

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{n}} \times \left( \left( \frac{\partial \mathbf{E}(x < 0)}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial \mathbf{E}(x > 0)}{\partial t} \right) \right) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \times \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(x < 0) - \left( \frac{1}{\varepsilon_3} \nabla \times \mathbf{H}(x > 0, y < 0) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}(x > 0, y > 0) \right) \right). \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Anteriormente se realizó el desarrollo del rotacional del campo  $\mathbf{H}_{zi}$ , ecuación (4.8), y recordando que  $\hat{\mathbf{n}} \parallel \hat{\mathbf{z}}$  la ecuación (4.39) se reduce al efectuar el producto cruz

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{n}} \times \left( \frac{\partial \mathbf{E}(x < 0)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}(x > 0)}{\partial t} \right) \\
&= (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{j}}) \left( -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial H_z(x < 0)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial H_z(x > 0, y < 0)}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial H_z(x > 0, y > 0)}{\partial x} \right) = 0. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

En la ecuación (4.40) como el producto cruz entre  $\hat{\mathbf{n}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$  es distinto de cero, el otro término entre paréntesis debe ser igual a cero.

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial H_z(x < 0)}{\partial x} \right) = \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial H_z(x > 0, y < 0)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial H_z(x > 0, y > 0)}{\partial x}, \tag{4.41}$$

y una vez más se evalúa en  $x = 0$  debido a la interfase que se está tomando. Sustituyendo la solución propuesta, ecuación (3.1), (3.4) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ k_{0x} e^{ik_{0y}y} - \int_{-\infty}^{\infty} k_x e^{ik_y y} A(k_y) dk_y \right\} \\
&= \Theta(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y^2}}{\varepsilon_2} [t_1(k_{2y}) e^{ik_{2y}y} + t_2(k_{2y}) e^{-ik_{2y}y}] dk_y
\end{aligned}$$

$$+\Theta(-y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y^2}}{\varepsilon_3} [t_3(k_y)e^{ik_y y} + t_4(k_y)e^{-ik_y y}] dk_y. \quad (4.42)$$

### c) Continuidad de $\mathbf{D}_x$

De las condiciones de continuidad para las componentes normales a la interfase

$$(\mathbf{D}(x > 0) - \mathbf{D}(x < 0)) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (4.43)$$

Tomando la derivada parcial con respecto al tiempo y empleando la ecuación (2.6) de las ecuaciones de Maxwell

$$\left( \frac{\partial \mathbf{D}(x > 0)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{D}(x < 0)}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\nabla \times \mathbf{H}_z(x > 0) - \nabla \times \mathbf{H}_z(x < 0)),$$

al emplear la expresión para el rotacional de  $\mathbf{H}_z$ , ecuación (4.8), lo anterior se puede desarrollar de la siguiente manera

$$\left[ \left( \hat{i} \left( \frac{\partial H_z(x > 0)}{\partial y} \right) - \hat{j} \left( \frac{\partial H_z(x > 0)}{\partial x} \right) \right) - \left( \hat{i} \left( \frac{\partial H_z(x < 0)}{\partial y} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial H_z(x < 0)}{\partial x} \right) \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$= 0, \quad (4.44)$$

la ecuación anterior se simplifica ya que  $\hat{\mathbf{n}} \parallel \hat{\mathbf{i}}$ , con lo que se obtiene

$$\left[ \left( \frac{\partial H_z(x > 0)}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial H_z(x < 0)}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (4.45)$$

al evaluar en  $x = 0$

$$\left( \frac{\partial H_z(x > 0, y < 0)}{\partial y} + \frac{\partial H_z(x > 0, y > 0)}{\partial y} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial H_z(x < 0)}{\partial y} \right)_{x=0}. \quad (4.46)$$

Dentro de la solución propuesta, ecuación (3.1), esta presente la función de Heaviside la cual puede reescribirse en términos de la función signo.

$$\Theta(y) = \frac{1 + \text{sign}(y)}{2}, \quad (4.47)$$

donde

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} -1 & y < 0 \\ 0 & y = 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}, \quad (4.48)$$

desarrollando la condición (4.46) y tomando en cuenta que la derivada de la función signo es la función delta de Dirac se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
& \delta(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [t_1(k_{2y}) e^{ik_{2y}y} + t_2(k_{2y}) e^{-ik_{2y}y}] dk_y \right. \\
& \left. - \int_{-\infty}^{\infty} [t_3(k_y) e^{ik_y y} + t_4(k_y) e^{-ik_y y}] dk_y \right\} \\
& + \Theta(y) \int_{-\infty}^{\infty} ik_{2y} [t_1(k_{2y}) e^{ik_{2y}y} - t_2(k_{2y}) e^{-ik_{2y}y}] dk_y \\
& + \Theta(-y) \int_{-\infty}^{\infty} ik_y [t_3(k_y) e^{ik_y y} - t_4(k_y) e^{-ik_y y}] dk_y \\
& = ik_{0y} e^{ik_{0y}y} + \int_{-\infty}^{\infty} ik_y e^{ik_y y} A(k_y) dk_y. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Haciendo un recuento, se obtuvieron tres relaciones importantes al aplicar las condiciones de frontera entre los medios 0, 2 y 3, ecuaciones (4.35), (4.42) y (4.49). También se obtuvieron varias relaciones útiles al aplicar las condiciones de frontera en la interfase de los medios 2 y 3. A partir de todas las relaciones obtenidas se buscará obtener mediante aproximaciones sucesivas una expresión para los coeficientes  $\mathbf{A}(\mathbf{k}_y)$ ,  $t_1(k_{2y})$ ,  $t_2(k_{2y})$ ,  $t_3(k_y)$  y  $t_4(k_y)$ .

Antes de intentar resolver el sistema de ecuaciones, (4.35), (4.42) y

(4.49), es conveniente simplificarlo. Por tal motivo se harán algunas manipulaciones matemáticas, las cuales se exponen a continuación.

Primero se partirá de la ecuación (4.35), la cual se multiplica por  $e^{-ik'_y y}$  y se integra sobre  $y$ . También se emplea la ecuación (4.47) quedando

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_{0y}-k'_y)y} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_y-k'_y)y} A(k_y) dk_y dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 + \text{sign}(y)}{2} \right) \left[ t_1(k_{2y}) e^{i(k_{2y}-k'_y)y} + t_2(k_{2y}) e^{-i(k_{2y}+k'_y)y} \right] dk_y dy \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 - \text{sign}(y)}{2} \right) \left[ t_3(k_y) e^{i(k_y-k'_y)y} + t_4(k_y) e^{-i(k_y+k'_y)y} \right] dk_y dy,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

es posible simplificar la ecuación anterior utilizando la representación de la función delta de Dirac escrita en la base de Fourier

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-x)y} dy, \tag{4.51}$$

y la transformada de Fourier de la función signo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(y) e^{i(k_y - k'_y)y} dy = \frac{i\pi}{k_y - k'_y}, \quad (4.52)$$

con lo anterior y reordenando la ecuación (4.50)

$$\begin{aligned} & 2\pi\delta(k_{0y} - k'_y) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k_y - k'_y) A(k_y) dk_y \\ & - 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (t_1(k_{2y}) \delta(k_{2y} - k'_y) + t_2(k_{2y}) \delta(k_{2y} + k'_y)) dk_y \\ & - 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (t_3(k_y) \delta(k_y - k'_y) + t_4(k_y) \delta(k_y + k'_y)) dk_y \\ & = \frac{i\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t_1(k_{2y})}{k_{2y} - k'_y} + \frac{t_2(k_{2y})}{k_{2y} + k'_y} - \frac{t_3(k_y)}{k_y - k'_y} - \frac{t_4(k_y)}{k_y + k'_y} \right) dk_y. \end{aligned} \quad (4.53)$$

En el lado izquierdo de la ecuación (4.53), las tres integrales que figuran involucran términos donde aparece una delta de Dirac del tipo  $\delta(k_{iy} - k'_y)$ , donde  $i = 0, 2, 3$ . Recordando la ecuación (3.5), en la cual se hace explícita la relación existente entre  $k_{iy}$ ,  $k_x$  y  $k_i$  y junto con la propiedad de la función delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0), \quad (4.54)$$



al emplear esta propiedad en las integrales del lado izquierdo de la ecuación (4.53) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
& 2\pi\delta(k_{0y} - k'_y) + 2\pi A(k'_y) \\
& -\pi(t_1(k'_y) + t_3(k'_y) + t_2(-k'_y) + t_4(-k'_y)) \\
& = \frac{i\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t_1(k_{2y})}{k_{2y} - k'_y} + \frac{t_2(k_{2y})}{k_{2y} + k'_y} - \frac{t_3(k_y)}{k_y - k'_y} - \frac{t_4(k_y)}{k_y + k'_y} \right) dk_y, \quad (4.55)
\end{aligned}$$

de las ecuaciones (4.26) y (4.27) se puede reescribir el segundo término del lado izquierdo

$$\begin{aligned}
t_1(k'_y) + t_3(k'_y) &= \frac{t_3(k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_4(k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right), \\
t_4(-k'_y) + t_2(-k'_y) &= \frac{t_4(-k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_3(-k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\pi\delta(k_{0y} - k'_y) + 2\pi A(k'_y) \\
& -\pi \left( \frac{t_3(k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_4(k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\pi \left( \frac{t_4(-k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_3(-k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) \right) \\
& = \frac{i\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t_1(k_{2y})}{k_{2y} - k'_y} + \frac{t_2(k_{2y})}{k_{2y} + k'_y} - \frac{t_4(k_y)}{k_y + k'_y} - \frac{t_3(k_y)}{k_y - k'_y} \right) dk_y,
\end{aligned} \tag{4.56}$$

el lado derecho de la igualdad anterior se puede escribir de un modo más conveniente al hacer la suma que está dentro de la integral

$$\begin{aligned}
& \frac{t_1(k_{2y})}{k_{2y} - k'_y} + \frac{t_2(k_{2y})}{k_{2y} + k'_y} - \frac{t_4(k_y)}{k_y + k'_y} - \frac{t_3(k_y)}{k_y - k'_y} \\
& = \frac{k_{2y}(t_1 + t_2)(k_{2y}) + k'_y(t_1 - t_2)(k_{2y})}{k_{2y}^2 - k_y'^2} - \frac{k_y(t_3 + t_4)(k_y) + k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_y^2 - k_y'^2},
\end{aligned} \tag{4.57}$$

de las ecuaciones (4.4) y (4.23) que se obtuvieron con anterioridad la relación anterior queda

$$\frac{k_{2y}(t_1 + t_2)(k_{2y}) + k'_y(t_1 - t_2)(k_{2y})}{k_{2y}^2 - k_y'^2} - \frac{k_y(t_3 + t_4)(k_y) + k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_y^2 - k_y'^2},$$

$$= \frac{k_{2y}(t_3 + t_4)(k_y) + \frac{\eta_2}{\eta_3} k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_{2y}^2 - k_y'^2} - \frac{k_y(t_3 + t_4)(k_y) + k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_y^2 - k_y'^2}. \quad (4.58)$$

Como es posible observar, el término anterior involucra solamente dos de las amplitudes,  $t_3(k_y)$  y  $t_4(k_y)$ , gracias a que se utilizaron las ecuaciones (4.4) y (4.23) que vinculan a las amplitudes entre sí. A continuación se sustituirá la ecuación (4.58) dentro de la integral en la ecuación (4.55); también se optará sustituir  $\frac{\eta_2}{\eta_3}$  por  $\frac{k_y \varepsilon_2}{k_{2y} \varepsilon_3}$ , vease la ecuación (4.18).

$$\begin{aligned} & \delta(k_{0y} - k'_y) + A(k'_y) \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{t_3(k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_4(k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{t_4(-k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_3(-k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) \right) \\ & = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{k_{2y}(t_3 + t_4)(k_y) + \frac{\varepsilon_2 k_y}{\varepsilon_3 k_{2y}} k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_{2y}^2 - k_y'^2} \right) dk_y \\ & - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{k_y(t_3 + t_4)(k_y) + k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_y^2 - k_y'^2} \right) dk_y. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Siguiendo un procedimiento similar al que se siguió con la ecuación (4.35), ahora con las ecuaciones (4.42) y (4.49) se obtiene lo siguiente.

De la ecuación (4.42) al multiplicarla por  $e^{-ik'_y y}$  e integrando sobre  $y$  de  $-\infty$  a  $\infty$

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_{0y}-k'_y)y} dy - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x}{\varepsilon_0} e^{i(k_y-k'_y)y} A(k_y) dk_y dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 + \text{sign}(y)}{2} \right) \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y^2}}{\varepsilon_2} \left[ t_1(k_{2y}) e^{i(k_{2y}-k'_y)y} + t_2(k_{2y}) e^{-i(k_{2y}+k'_y)y} \right] dk_y dy \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 - \text{sign}(y)}{2} \right) \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y^2}}{\varepsilon_3} \left[ t_3(k_y) e^{i(k_y-k'_y)y} + t_4(k_y) e^{-i(k_y+k'_y)y} \right] dk_y dy,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

de la ecuación (3.2)

$$k_{2y} = \sqrt{k_2^2 - k_3^2 + k_y^2},$$

entonces el primer término del lado derecho de la igualdad se reescribe

$$\frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_{0y}-k'_y)y} dy - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x}{\varepsilon_0} e^{i(k_y-k'_y)y} A(k_y) dk_y dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 + \text{sign}(y)}{2} \right) \frac{\sqrt{k_3^2 - (k_{2y}^2 - k_2^2 + k_3^2)}}{\varepsilon_2} \times \\
&\quad \times \left[ t_1(k_{2y}) e^{i(k_{2y} - k'_y)y} + t_2(k_{2y}) e^{-i(k_{2y} + k'_y)y} \right] dk_y dy \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 - \text{sign}(y)}{2} \right) \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y^2}}{\varepsilon_3} \left[ t_3(k_y) e^{i(k_y - k'_y)y} + t_4(k_y) e^{-i(k_y + k'_y)y} \right] dk_y dy,
\end{aligned} \tag{4.61}$$

utilizando la ecuación (4.54) y la ecuación (4.52)

$$\begin{aligned}
&2\pi \frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \delta(k_{0y} - k'_y) - 2\pi \frac{k'_x}{\varepsilon_0} A(k'_y) \\
&- 2\pi \frac{\sqrt{k_2^2 - k_{2y}'^2}}{2\varepsilon_2} [t_1(k'_y) + t_2(-k'_y)] - 2\pi \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{2\varepsilon_3} [t_3(k'_y) + t_4(-k'_y)] \\
&= \frac{i\pi}{2\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2} \left[ \frac{t_1(k_{2y})}{k_{2y} - k'_y} + \frac{t_2(k_{2y})}{k_{2y} + k'_y} \right] dk_y \\
&\quad - \frac{i\pi}{2\varepsilon_3} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_3^2 - k_y^2} \left[ \frac{t_3(k_y)}{k_y - k'_y} + \frac{t_4(k_y)}{k_y + k'_y} \right] dk_y,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

de la ecuación (4.58), se pueden simplificar los términos del lado derecho de la igualdad ya que

$$\begin{aligned} \frac{t_1(k_{2y})}{k_{2y} - k'_y} + \frac{t_2(k_{2y})}{k_{2y} + k'_y} &= \frac{k_{2y}(t_1 + t_2)(k_{2y}) + k'_y(t_1 - t_2)(k_{2y})}{k_{2y}^2 - k_y'^2} \\ &= \frac{k_{2y}(t_3 + t_4)(k_y) + \frac{\eta_2}{\eta_3}k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_{2y}^2 - k_y'^2}, \end{aligned} \tag{4.63}$$

y también se pueden sustituir  $t_1(k'_y)$  y  $t_2(-k'_y)$  por las ecuaciones (4.21) y (4.22), en el tercer término del lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} t_2(-k'_y) &= \frac{t_3(-k'_y)}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) + \frac{t_4(-k'_y)}{2} \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_3}\right), \\ t_1(k'_y) &= \frac{t_3(k'_y)}{2} \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) + \frac{t_4(k'_y)}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \delta(k_{0y} - k'_y) - \frac{k'_x}{\varepsilon_0} A(k'_y) \\ &- \frac{\sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2}}{2\varepsilon_2} \left[ \frac{t_3(k'_y)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k_{2y}}\right) + \frac{t_4(k'_y)}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k_{2y}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{k_2^2 - k_{2y}'^2}}{2\varepsilon_2} \left( \frac{t_3(-k_y')}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k_y'}{\varepsilon_3 k_{2y}'} \right) + \frac{t_4(-k_y')}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_2 k_y'}{\varepsilon_3 k_{2y}'} \right) \right) \\
& -\frac{\sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{2\varepsilon_3} [t_3(k_y') + t_4(-k_y')] \\
= & \frac{i}{4\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2} \left[ \frac{k_{2y} (t_3 + t_4) (k_y) + \frac{\varepsilon_2 k_y}{\varepsilon_3 k_{2y}} k_y' (t_3 - t_4) (k_y)}{k_{2y}^2 - k_y'^2} \right] dk_y \\
& -\frac{i}{4\varepsilon_3} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_3^2 - k_y^2} \left[ \frac{k_y (t_3 + t_4) (k_y) + k_y' (t_3 - t_4) (k_y)}{k_y^2 - k_y'^2} \right] dk_y.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Por último de la ecuación (4.49) se obtiene al multiplicar por  $e^{-ik_y' y}$  e integrar sobre  $y$  lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \left\{ \left[ t_1(k_{2y}) e^{i(k_{2y} - k_y') y} + t_2(k_{2y}) e^{-i(k_{2y} + k_y') y} \right] dk_y \right. \\
& \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ t_3(k_y) e^{i(k_y - k_y') y} + t_4(k_y) e^{-i(k_y + k_y') y} \right] dk_y \right\} dy \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 + \text{sign}(y)}{2} \right) i k_{2y} \left[ t_1(k_{2y}) e^{i(k_{2y} - k_y') y} - t_2(k_{2y}) e^{-i(k_{2y} + k_y') y} \right] dk_y dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1 - \text{sign}(y)}{2} \right) i k_y \left[ t_3(k_y) e^{i(k_y - k'_y)y} - t_4(k_y) e^{-i(k_y + k'_y)y} \right] dk_y dy \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} i k_{0y} e^{i(k_{0y} - k'_y)y} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i k_y e^{i(k_y - k'_y)y} A(k_y) dk_y dy, \tag{4.65}
\end{aligned}$$

utilizando la ecuación (4.54) y la ecuación (4.52)

$$\begin{aligned}
& 2\pi i k_{0y} \delta(k_{0y} - k'_y) + 2\pi i k'_y A(k'_y) \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} ([t_1(k_{2y}) + t_2(k_{2y})] - [t_3(k_y) + t_4(k_y)]) dk_y \\
& - \frac{i}{2} 2\pi k'_y [t_1(k'_y) + t_3(k'_y) - t_2(-k'_y) - t_4(-k'_y)] \\
& = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\pi k_{2y} \left[ \frac{t_1(k_{2y})}{k_{2y} - k'_y} - \frac{t_2(k_{2y})}{k_{2y} + k'_y} \right] dk_y \\
& - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\pi k_y \left[ \frac{t_3(k_y)}{k_y - k'_y} - \frac{t_4(k_y)}{k_y + k'_y} \right] dk_y, \tag{4.66}
\end{aligned}$$



de la ecuación (4.4) se ve que el tercer término del lado izquierdo es cero y de las ecuaciones (4.26) y (4.27) se simplifica el cuarto término. Para simplificar el lado derecho de la ecuación, se desarrollan las fracciones y se utilizan las ecuaciones (4.23) y (4.4).

$$t_1(k'_y) + t_3(k'_y) = \frac{t_3(k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + \frac{t_4(k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right),$$

$$t_4(-k'_y) + t_2(-k'_y) = \frac{t_4(-k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + \frac{t_3(-k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right),$$

$$t_1(k_{2y}) - t_2(k_{2y}) = \left( \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) (t_3(k_y) - t_4(k_y)),$$

$$t_1(k_{2y}) + t_2(k_{2y}) = t_3(k_y) + t_4(k_y),$$

en donde  $\frac{\eta_2}{\eta_3} = \frac{\varepsilon_2 k_y}{\varepsilon_3 k_{2y}}$

$$k_{0y} \delta (k_{0y} - k'_y) + k'_y A(k'_y)$$

$$- \frac{1}{2} k'_y \left( \frac{t_3(k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_4(k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} k'_y \left( \frac{t_4(-k'_y)}{2} \left( 3 + \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) + \frac{t_3(-k'_y)}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 k'_y}{\varepsilon_3 k'_{2y}} \right) \right) \\
= & \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} k_{2y} \left[ \frac{k_{2y} \frac{\varepsilon_2 k_y}{\varepsilon_3 k_{2y}} (t_3 - t_4) (k_y) + k'_y (t_3 + t_4) (k_y)}{k_{2y}^2 - k_y'^2} \right] dk_y \\
& - \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} k_y \left[ \frac{k_y (t_3 - t_4) (k_y) + k'_y (t_3 + t_4) (k_y)}{k_y^2 - k_y'^2} \right] dk_y.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Entonces, finalmente se obtuvieron tres ecuaciones, (4.59), (4.64) y (4.67), las cuales conforman un *sistema de ecuaciones integrales*. En dicho sistema se tienen como incógnitas a las amplitudes  $A(k'_y)$ ,  $t_3(k'_y)$  y  $t_4(k'_y)$ . Dicho sistema conviene resolverlo *mediante aproximaciones sucesivas* y en vista de esto es necesario elegir el parámetro de aproximación, el cuál será  $(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$  que más adelante llamaremos  $\gamma$ .

## 4.2 Solución a orden cero en $\mathcal{O}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$ .

Para llevar acabo la aproximación a orden cero se desarrolla en series de potencias a  $k_{2y}$ . De la ecuación (3.2) se puede reescribir a  $k_{2y}$  para obtener su desarrollo en series

$$\begin{aligned}
k_{2y} &= \sqrt{k_2^2 - k_3^2 + k_y^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} k_0^2 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 + k_y^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}\right) k_0^2 + k_y^2} \\
&= \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} + k_y^2},
\end{aligned} \tag{4.68}$$

en la ecuación anterior se sustituyó a  $k_3$  por  $\frac{n_3\omega}{c}$  y a su vez  $n_3$  por  $\sqrt{\frac{\varepsilon_3\mu_3}{\varepsilon_0\mu_0}}$ . Como la gran mayoría de los materiales que son transparentes en la region del espectro visible de la radiación electromagnética, son esencialmente no magnéticos  $\mu \approx \mu_0$  debido a que no interaccionan magnéticamente con la luz, entonces  $n_3 \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}}$  y  $n_2 \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}$ . A su vez si se sustituye a  $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$  por  $\gamma$  se obtiene

$$k_{2y} = \sqrt{\gamma \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} + k_y^2},$$

al expandir a  $k_{2y}$  en series de  $\gamma$

$$k_{2y} = k_y \left( 1 + \gamma \frac{k_0^2}{2k_y^2 \varepsilon_0} - \gamma^2 \frac{k_0^4}{8k_y^4 \varepsilon_0^2} + \dots \right). \quad (4.69)$$

A orden cero en  $\mathcal{O}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$

$$k_{2y} \approx k_y, \quad (4.70)$$

por otro lado de las ecuaciones (4.26) y (4.27)

$$t_1 + t_3 = \frac{t_3}{2} \left( 3 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + \frac{t_4}{2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right),$$

$$t_4 + t_2 = \frac{t_4}{2} \left( 3 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) + \frac{t_3}{2} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} \right),$$

se pueden simplificar a orden cero ya que

$$\begin{aligned} \frac{\eta_2}{\eta_3} &= \frac{\varepsilon_2 k_y}{\varepsilon_3 k_{2y}} \\ &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3}{\varepsilon_3 k_{2y}} k_y \\ &= \frac{\gamma + \varepsilon_3}{\varepsilon_3 k_{2y}} k_y, \end{aligned} \quad (4.71)$$

y como  $k_{2y} \approx k_y$

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_2}{\eta_3} &= \frac{\varepsilon_2 k_y}{\varepsilon_3 k_{2y}} \\
&= \frac{k_y}{k_y} = 1,
\end{aligned}
\tag{4.72}$$

entonces las ecuaciones (4.26) y (4.27) quedan del siguiente modo

$$\begin{aligned}
t_1 + t_3 &= \frac{t_3}{2} (3 + 1) + \frac{t_4}{2} (1 - 1) \\
&= 2t_3,
\end{aligned}
\tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
t_4 + t_2 &= \frac{t_4}{2} (3 + 1) + \frac{t_3}{2} (1 - 1) \\
&= 2t_4,
\end{aligned}
\tag{4.74}$$

al sustituir  $k_{2y}$  a orden cero en  $\gamma$  en las ecuaciones (4.59), (4.64) y (4.67), el sistema integral de ecuaciones se simplifica, ya que la parte integral se anula.

$$\delta(k_{0y} - k'_y) + A(k'_y) - \frac{1}{2} (2t_3(k'_y) + 2t_4(-k'_y)) = 0.
\tag{4.75}$$

Para la ecuación (4.64) se debe tomar en cuenta que en el tercer término del lado izquierdo de dicha ecuación,  $\frac{\sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2}}{2\varepsilon_2}$ , se puede reescribir utilizando la ecuación (4.68)

$$\begin{aligned}
k_{2y} &= \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} + k_y^2}, \\
\frac{\sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2}}{2\varepsilon_2} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} - k_y^2}}{2\varepsilon_2} \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 - k_y^2} \\
&= \left( \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3} \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 - k_y^2} \\
&= \left( \frac{1}{-\gamma + \varepsilon_3} \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 - k_y^2},
\end{aligned} \tag{4.76}$$

que a orden cero queda del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2}}{2\varepsilon_2} &\approx \frac{1}{2\varepsilon_3} \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 - k_y^2} \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_3} \sqrt{k_3^2 - k_y^2}
\end{aligned}$$

(4.77)

Las expansiones en series anteriores, ecuación (4.72) y (4.77), se sustituirán en la ecuación (4.64)

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \delta(k_{0y} - k'_y) - \frac{k'_x}{\varepsilon_0} A(k'_y) \\
& - \frac{\sqrt{k_2^2 - k_{2y}'^2}}{2\varepsilon_2} [t_1(k'_y) + t_2(-k'_y)] - \frac{\sqrt{k_3^2 - k_{3y}'^2}}{2\varepsilon_3} [t_3(k'_y) + t_4(-k'_y)] \\
& = \frac{i\pi}{2\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_3^2 - k_y^2} \left[ \frac{k_{2y}(t_3 + t_4)(k_y) + \frac{\varepsilon_2 k_y}{\varepsilon_3 k_{2y}} k'_y (t_3 - t_4)(k_y)}{k_{2y}^2 - k_y'^2} \right] dk_y \\
& - \frac{i\pi}{2\varepsilon_3} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k_3^2 - k_y^2} \left[ \frac{k_y(t_3 + t_4)(k_y) + k'_y(t_3 - t_4)(k_y)}{k_y^2 - k_y'^2} \right] dk_y,
\end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación (4.64) a orden cero es la siguiente

$$\frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \delta(k_{0y} - k'_y) - \frac{k'_x}{\varepsilon_0} A(k'_y) - \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{2\varepsilon_3} [2t_3(k'_y) + 2t_4(-k'_y)] = 0. \tag{4.78}$$

Para la ecuación (4.67) se obtiene a orden cero

$$k_{0y}\delta(k_{0y} - k'_y) + k'_y A(k'_y) - k'_y (t_3(k'_y) - t_4(-k'_y)) = 0. \quad (4.79)$$

Resolviendo el sistema a orden cero, ecuaciones (4.75), (4.78) y (4.79) se obtienen las amplitudes  $\mathbf{A}(\mathbf{k}'_y)$ ,  $\mathbf{t}_3(\mathbf{k}'_y)$  y  $\mathbf{t}_4(-\mathbf{k}'_y)$

$$A(k'_y) = \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{\varepsilon_3 k'_x + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}, \quad (4.80)$$

$$t_3(k'_y) = \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} (k_{0y} - k'_y) + \varepsilon_3 (k_{0y} k'_x + 2k'_y k_{0x} + k'_y k'_x)}{2k'_y (\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} + \varepsilon_3 k'_x)}, \quad (4.81)$$

$$t_4(-k'_y) = \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{k'_y - k_{0y}}{2k'_y}$$

$$t_4(k'_y) = \delta(k_{0y} + k'_y) \frac{-k'_y - k_{0y}}{2k'_y}. \quad (4.82)$$



Las ecuaciones (4.80), (4.81) y (4.82) pueden simplificarse ya que al integrar sobre  $k_y$ , por las propiedades de la función delta de Dirac se obtiene que los términos del tipo  $(k_{0y} - k'_y)$  se hacen cero; entonces las amplitudes resultan en lo siguiente

$$A(k'_y) = \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{\varepsilon_3 k'_x + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}, \quad (4.83)$$

$$t_3(k'_y) = \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{\varepsilon_3 (k_{0y} k'_x + 2k'_y k_{0x} + k'_y k'_x)}{2k'_y (\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} + \varepsilon_3 k'_x)}, \quad (4.84)$$

$$t_4(k'_y) = 0. \quad (4.85)$$

Lo que estas soluciones para las amplitudes expresan es que a orden cero el sistema es un sistema de sólo dos medios como el que se revisó en la sección (2.3). Lo anterior se puede ver de la figura (3.3), ya que al ser  $t_4 = 0$  entonces no hay interfase en  $y = 0$  que haga que se reflejen las ondas que incidan sobre ella.

Una vez que se tiene la expresión de las amplitudes  $A(k'_y)$ ,  $t_3(k'_y)$  y  $t_4(k'_y)$ , se deberán insertar en la solución propuesta desde un inicio, ecuaciones (3.1) y (3.4), para obtener finalmente la expresión para el campo  $H_z(x < 0)$  y  $H_z(x > 0)$ .

Comenzando con la ecuación (3.4)

$$\begin{aligned}
H_z(x < 0) &= e^{ik_{0x}x + ik_{0y}y} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k_{0y} - k_y) e^{-ik_x x + ik_y y} \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y^2}}{\varepsilon_3 k_x + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y^2}} dk_y \\
&= e^{ik_{0x}x + ik_{0y}y} + e^{-ik_{0x}x + ik_{0y}y} \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}{\varepsilon_3 k_{0x} + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

En la región  $x > 0$ , se tiene la solución propuesta, ecuación (3.4)

$$\begin{aligned}
H_z(x > 0) &= \Theta(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_1(k_{2y})e^{ik_{2y}y} + t_2(k_{2y})e^{-ik_{2y}y}] dk_y \\
&\quad + \Theta(-y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_3(k_y)e^{ik_y y} + t_4(k_y)e^{-ik_y y}] dk_y,
\end{aligned}$$

para las expresiones de  $t_1(k_{2y})$  y  $t_2(k_{2y})$  se recurre a las ecuaciones (4.21) y (4.22)

$$\begin{aligned}
t_2 &= \frac{t_3}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) + \frac{t_4}{2} \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) \\
&= t_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{t_3}{2} \left(1 + \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) + \frac{t_4}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_3}\right) \\
&= t_3,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
H_z(x > 0) &= \Theta(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_3(k_{2y})e^{ik_{2y}y} + t_4(k_{2y})e^{-ik_{2y}y}] dk_y \\
&\quad + \Theta(-y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x} [t_3(k_y)e^{ik_yy} + t_4(k_y)e^{-ik_yy}] dk_y, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t_3(k_y) \left( \Theta(y)e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x + ik_yy} + \Theta(-y)e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x + ik_yy} \right) dk_y \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} t_4(k_y) \left( \Theta(y)e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x - ik_yy} + \Theta(-y)e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x - ik_yy} \right) dk,
\end{aligned} \tag{4.87}$$

por las propiedades de la función delta de Dirac y sustituyendo las expresiones para  $t_3(k_y)$  y  $t_4(k_y)$  se obtiene

$$\begin{aligned}
H_z(x > 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} t_3(k_y) \left( \Theta(y) e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x + ik_y y} + \Theta(-y) e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x + ik_y y} \right) dk_y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k_{0y} - k_y) \frac{\varepsilon_3 (k_{0y}k_x + 2k_y k_{0x} + k_y k_x)}{2k_y (\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y^2} + \varepsilon_3 k_x)} \times \\
&\quad \times \left( \Theta(y) e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x + ik_y y} + \Theta(-y) e^{i\sqrt{k_3^2 - k_y^2}x + ik_y y} \right) dk_y \\
&= \frac{\varepsilon_3 (k_{0y}k_{0x} + 2k_{0y}k_{0x} + k_{0y}k_{0x})}{2k_{0y} (\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} + \varepsilon_3 k_{0x})} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}x + ik_{0y}y} (\Theta(y) + \Theta(-y)) \\
&= \frac{\varepsilon_3 2k_{0x}}{\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} + \varepsilon_3 k_{0x}} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}x + ik_{0y}y}.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Para recapitular se presenta la solución del campo  $H_z$  en las dos regiones  $x > 0$  y  $x < 0$ .

$$H_z(x < 0) = e^{ik_{0x}x + ik_{0y}y} + e^{-ik_{0x}x + ik_{0y}y} \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}{\varepsilon_3 k_{0x} + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}$$

$$H_z(x > 0) = \frac{\varepsilon_3 2k_{0x}}{\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} + \varepsilon_3 k_{0x}} e^{i\sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}x + ik_{0y}y}. \quad (4.89)$$

El primer término de  $H_z(x < 0)$  corresponde a la onda plana incidente, cuya amplitud es 1, y el segundo término corresponde a una onda plana que se refleja con amplitud

$$r_{\perp} = \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}{\varepsilon_3 k_{0x} + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}. \quad (4.90)$$

la ecuación (4.90) es el coeficiente de Fresnel y para analizarlo debe ponerse en función del ángulo de incidencia

Como se mencionó anteriormente, las componentes del vector de onda en el medio de incidencia en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  son  $k_{0x}$  y  $k_{0y}$ , respectivamente. Estas componentes a su vez pueden expresarse en términos del ángulo de incidencia,  $\theta$ , véase la figura (3.3).

$$\begin{aligned} k_{0x} &= k_0 \cos(\theta) \\ k_{0y} &= k_0 \sin(\theta), \end{aligned} \quad (4.91)$$

entonces la amplitud reflejada en función del ángulo es

$$r_{\perp} = \frac{\varepsilon_3 k_0 \cos(\theta) - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_0^2 \sin^2(\theta)}}{\varepsilon_3 k_0 \cos(\theta) + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_0^2 \sin^2(\theta)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon_3 k_0 \cos(\theta) - \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 - k_0^2 \sin^2(\theta)}}{\varepsilon_3 k_0 \cos(\theta) + \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 - k_0^2 \sin^2(\theta)}} \\
&= \frac{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} \cos(\theta) - \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} - \sin^2(\theta)}}{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} \cos(\theta) + \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} - \sin^2(\theta)}}, \tag{4.92}
\end{aligned}$$

ya que  $k_3^2 = \frac{\varepsilon_3 \mu_3}{\varepsilon_0 \mu_0} k_0^2 \simeq \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2$ .

El coeficiente de transmisión será

$$\begin{aligned}
t_{\perp} &= \frac{\varepsilon_3 2k_{0x}}{\varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} + \varepsilon_3 k_{0x}} \\
&= \frac{\varepsilon_3 2k_0 \cos(\theta)}{\varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} k_0^2 - k_0^2 \sin^2(\theta)} + \varepsilon_3 k_0 \cos(\theta)} \tag{4.93}
\end{aligned}$$

En la gráfica de los coeficientes de Fresnel, gráfica (4.2), se puede observar que son de la misma forma que los obtenidos en la sección (2.3.2); por lo que se puede decir que a orden cero el modelo propuesto coincide con el resultado que ya es conocido y se puede observar que la amplitud reflejada cruza toma el valor de cero a un ángulo de  $48.7474^\circ$ , este ángulo es conocido comunmente como el ángulo de Brewster.

Por otro lado la Reflectancia y la transmitancia se obtienen sustituyendo

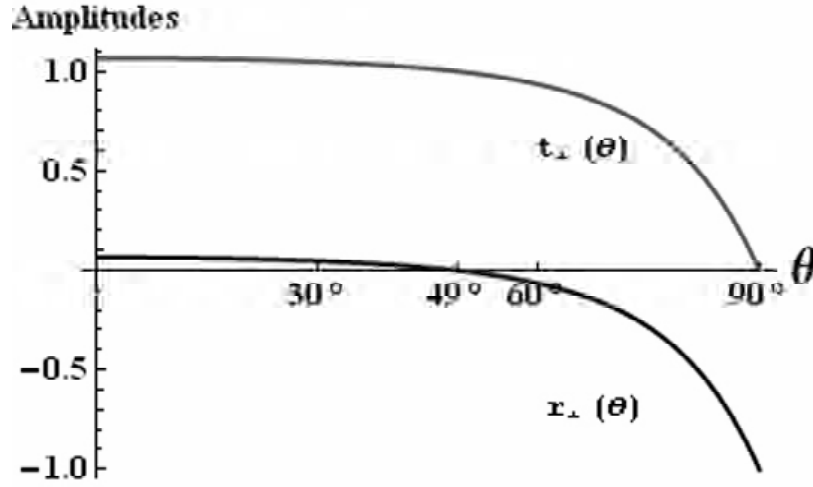


Figura 4.2: Coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud como función del ángulo de incidencia, que corresponden a las ecuaciones obtenidas a orden cero de  $r_{\perp}(\theta)$  y  $t_{\perp}(\theta)$ . Se considero  $\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} = 1.3$ .

a  $r_{\perp}$  y  $t_{\perp}$ , en las ecuaciones (2.39) y (2.40)

$$R = |r_{\perp}|^2 = \left| \frac{\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} \cos(\theta) - \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} - \sin^2(\theta)}}{\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} \cos(\theta) + \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} - \sin^2(\theta)}} \right|^2, \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} T &= |t_{\perp}^2| \\ &= \frac{n_3 \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_0}{n_3} \sin \theta\right)\right)}{n_0 \cos \theta} \times \\ &\quad \times \left| \frac{2 \frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} \cos(\theta)}{\sqrt{\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} - \sin^2(\theta)} + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_0} \cos(\theta)} \right|^2. \end{aligned}$$

(4.95)

En la gráfica (4.3) se puede observar que la transmitancia y la reflectancia se comportan según lo esperado , ecuación (2.36), que implica que la energía que incide sobre la interfase  $x = 0$  sea igual a la suma de las energías de las ondas reflejada y transmitida.

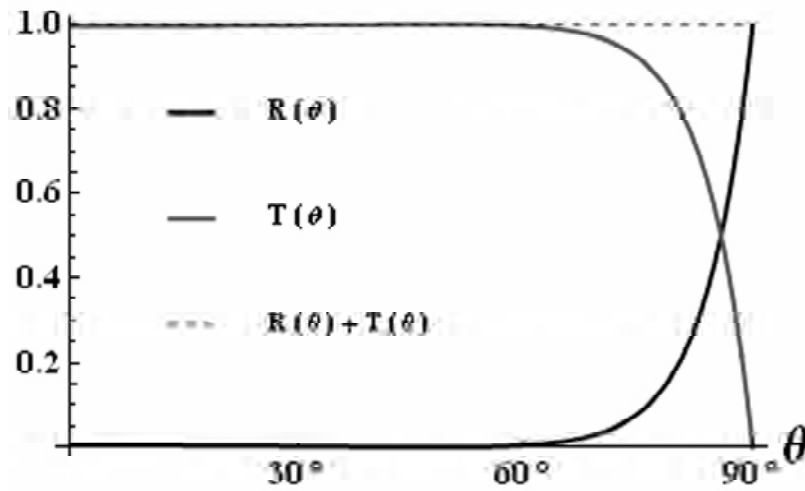


Figura 4.3: Reflectancia y transmitancia obtenidas a orden cero, y su suma que por el principio de conservación de la energía es igual a 1. En este caso se utilizó  $\varepsilon_3/\varepsilon_0 = 1.3$ .

### 4.3 Solución a primer orden en $\mathcal{O}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)$ .

El procedimiento para llegar a la expresión de las amplitudes  $A(k_y)$ ,  $t_3(k_y)$  y  $t_4(k_y)$  a primer orden, es en esencia el mismo que se siguió en la sección



anterior donde se encontró la solución a orden cero. En la sección anterior se partió de expandir en series de potencias de  $\gamma$  a  $k_{2y}$ , ecuación (4.69), y dicha expansión en series de potencias (a orden cero en  $\gamma$ ) se sustituyó en las ecuaciones (4.59), (4.64) y (4.67) con lo cual se obtuvo el sistema de ecuaciones a orden cero. Apartir del sistema de ecuaciones a orden cero se encontraron las amplitudes buscadas.

A primer orden se hace un procedimiento similar, sólo que la expansión en series de  $k_{2y}$  se tomará a primer orden. De la ecuación (4.69) se puede ver que dicha expansión queda de la siguiente forma

$$k_{2y} \approx k_y \left( 1 + \gamma \frac{k_0^2}{2k_y^2 \varepsilon_0} \right), \quad (4.96)$$

Dicha expansión en series a primer orden se sustituye en las ecuaciones (4.59), (4.64) y (4.67). Al sustituir la expansión de  $k_{2y}$  en tales ecuaciones resultan términos del tipo  $\gamma t_3(k_y)$  o  $\gamma t_4(k_y)$ . Se debe tener cuidado con estos términos ya que de entrada se supone que se están buscando las expresiones para estas amplitudes a primer orden, por lo que los términos  $\gamma t_3(k_y)$  o  $\gamma t_4(k_y)$  son en principio expresiones a segundo orden en  $\gamma$ . Por tal motivo se opta por sustituir las soluciones que se obtuvieron en la sección anterior para dichas amplitudes, ecuaciones (4.84) y (4.85) en los términos antes

mencionados para hacerlos forzosamente de primer orden.

Al hacer lo antes descrito se obtiene un sistema de ecuaciones a primer orden en  $\gamma$ , donde nuevamente las amplitudes  $A(k_y)$ ,  $t_3(k_y)$  y  $t_4(k_y)$  son las incógnitas que se encontrarán al resolver el sistema de ecuaciones.

Debido a la laboriosidad del proceso arriba descrito se opta por presentar solamente las tres ecuaciones que se obtienen a primer orden.

$$\begin{aligned}
& A(k'_y) + \delta(k_{0y} - k'_y) - t_3(k'_y) - t_4(-k'_y) \\
& - \gamma \frac{k'_x (2k_y'^2 \varepsilon_0 - k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2 \varepsilon_0 + k_x' \varepsilon_3} \right)} \left( \delta(k_{0y} - k'_y) - \delta(k_{0y} + k'_y) \right) \\
& - i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x (2k_y^3 k_y' \varepsilon_0 - 2k_0^2 k_y k_y' \varepsilon_3 + k_0^2 k_y'^2 \varepsilon_3) \delta(k_{0y} - k_y)}{4k_y^2 (k_y - k_y')^2 (k_y + k_y') \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y^2 \varepsilon_0 + k_x \varepsilon_3} \right)} dk_y \\
& + i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x k_y^2 (2k_y'^2 \varepsilon_0 + k_0^2 \varepsilon_3) \delta(k_{0y} - k_y)}{4k_y^2 (k_y - k_y')^2 (k_y + k_y') \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y^2 \varepsilon_0 + k_x \varepsilon_3} \right)} dk_y \\
& = 0, \tag{4.97}
\end{aligned}$$

$$\frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \delta(k_{0y} - k'_y) - \frac{k'_x}{\varepsilon_0} A(k'_y) - \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{\varepsilon_3} [t_3(k'_y) + t_4(-k'_y)]$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma \frac{k'_x \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} (2k_y'^2 \varepsilon_0 + k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 + k'_x \varepsilon_3 \right)} \delta(k_{0y} - k'_y) \\
& +\gamma \frac{k'_x \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} (2k_y'^2 \varepsilon_0 - k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 + k'_x \varepsilon_3 \right)} \delta(k_{0y} + k'_y) \\
& +i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y^2} k_x (2k_y^4 - 2k_y^3 k'_y) \varepsilon_0}{4k_y^2 (k_y - k'_y)^2 (k_y + k'_y) \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y^2} \varepsilon_0 + k_x \varepsilon_3 \right)} \times \\
& \times \delta(k_{0y} - k_y) dk_y \\
& +i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y^2} k_x (k_0^2 k_y^2 + 2k_0^2 k_y k'_y - k_0^2 k_y'^2) \varepsilon_3}{4k_y^2 (k_y - k'_y)^2 (k_y + k'_y) \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y^2} \varepsilon_0 + k_x \varepsilon_3 \right)} \times \\
& \times \delta(k_{0y} - k_y) dk_y \\
& = 0, \tag{4.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{0y} \delta(k_{0y} - k'_y) + k'_y A(k'_y) - k'_y (t_3(k'_y) - t_4(-k'_y)) \\
& -\gamma \frac{k'_x (2k_y'^2 \varepsilon_0 - k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 + k'_x \varepsilon_3 \right)} (\delta(k_{0y} - k'_y) + \delta(k_{0y} + k'_y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x (2k_y^4 \varepsilon_0 - 2k_y^3 k'_y \varepsilon_0 - k_0^2 k_y^2 \varepsilon_3 - k_0^2 k_y'^2 \varepsilon_3)}{4k_y (k_y - k'_y)^2 (k_y + k'_y) \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y^2 \varepsilon_0 + k_x \varepsilon_3} \right)} \times \\
& \times \delta(k_{0y} - k_y) dk_y \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Las ecuaciones anteriores, (4.97), (4.98) y (4.99), se pueden simplificar ya que los integrandos de las tres ecuaciones son el producto de una función de  $k'_y$  por una función delta de Dirac.

Entonces el sistema de ecuaciones a primer orden que se resolverá es el siguiente

$$\begin{aligned}
& A(k'_y) + \delta(k_{0y} - k'_y) - t_3(k'_y) - t_4(-k'_y) \\
& - \gamma \frac{k'_x (2k_y'^2 \varepsilon_0 - k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2 \varepsilon_0 + k'_x \varepsilon_3} \right)} (\delta(k_{0y} - k'_y) - \delta(k_{0y} + k'_y)) \\
& - i\gamma \frac{k_{0x} (2k_{0y}^3 k'_y \varepsilon_0 - 2k_0^2 k_{0y} k'_y \varepsilon_3 + k_0^2 k_y'^2 \varepsilon_3)}{4k_{0y}^2 (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2 \varepsilon_0 + k_{0x} \varepsilon_3} \right)} \\
& + i\gamma \frac{k_{0x} k_{0y}^2 (2k_y'^2 \varepsilon_0 + k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_{0y}^2 (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2 \varepsilon_0 + k_{0x} \varepsilon_3} \right)} \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{0x}}{\varepsilon_0} \delta(k_{0y} - k'_y) - \frac{k'_x}{\varepsilon_0} A(k'_y) - \frac{\sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{\varepsilon_3} [t_3(k'_y) + t_4(-k'_y)] \\
& + \gamma \frac{k'_x \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} (2k_y'^2 \varepsilon_0 + k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 + k'_x \varepsilon_3 \right)} \delta(k_{0y} - k'_y) \\
& + \gamma \frac{k'_x \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} (2k_y'^2 \varepsilon_0 - k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 + k'_x \varepsilon_3 \right)} \delta(k_{0y} + k'_y) \\
& + i\gamma \frac{\sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} k_{0x} (2k_{0y}^4 - 2k_{0y}^3 k'_y) \varepsilon_0}{4k_{0y}^2 (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} \varepsilon_0 + k_{0x} \varepsilon_3 \right)} \\
& + i\gamma \frac{\sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} k_{0x} (k_0^2 k_{0y}^2 + 2k_0^2 k_{0y} k'_y - k_0^2 k_y'^2) \varepsilon_3}{4k_{0y}^2 (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \varepsilon_0 \varepsilon_3 \left( \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} \varepsilon_0 + k_{0x} \varepsilon_3 \right)} \\
& = 0, \tag{4.101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_{0y} \delta(k_{0y} - k'_y) + k'_y A(k'_y) - k'_y (t_3(k'_y) - t_4(-k'_y)) \\
& - \gamma \frac{k'_x (2k_y'^2 \varepsilon_0 - k_0^2 \varepsilon_3)}{4k_y'^2 \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_y'^2} \varepsilon_0 + k'_x \varepsilon_3 \right)} (\delta(k_{0y} - k'_y) + \delta(k_{0y} + k'_y)) \\
& - i\gamma \frac{k_{0x} (2k_{0y}^4 \varepsilon_0 - 2k_{0y}^3 k'_y \varepsilon_0 - k_0^2 k_{0y}^2 \varepsilon_3 - k_0^2 k_y'^2 \varepsilon_3)}{4k_{0y} (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \varepsilon_0 \left( \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2} \varepsilon_0 + k_{0x} \varepsilon_3 \right)}
\end{aligned}$$

$$= 0. \quad (4.102)$$

Como se puede observar de las tres ecuaciones anteriores, resolver el sistema de ecuaciones para obtener  $A(k_y)$ ,  $t_3(k_y)$  y  $t_4(k_y)$  es laborioso. Para no perder de vista el objetivo que se persigue, sólo se presentará la solución del sistema

$$\begin{aligned}
A(k'_y) = & \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{\varepsilon_3 k'_x + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}} \\
& + \gamma \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{k'_x \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{(\varepsilon_3 k'_x + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2})^2} \\
& + i\gamma S(k'_y) \quad , \quad (4.103)
\end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
S(k'_y) = & \frac{1}{(\varepsilon_3 k_{0x} + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2})} \times \left( -\frac{k_{0x} (2k_{0y}^2 \varepsilon_0 - k_0^2 \varepsilon_3)}{8k_{0y}^2 k'_y \varepsilon_0} \right. \\
& \left. + \frac{k_{0x} (2k_{0y}^4 \varepsilon_0 - 2k_{0y}^3 k'_y \varepsilon_0 - k_0^2 k_{0y}^2 \varepsilon_3 - k_0^2 k_y'^2 \varepsilon_3)}{4k_{0y} k'_y (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \varepsilon_0} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k_{0x}k'_x\varepsilon_3 (2k_{0y}^4\varepsilon_0 - 2k_{0y}^3k'_y\varepsilon_0 - k_0^2k_{0y}^2\varepsilon_3 - k_0^2k'_y{}^2\varepsilon_3)}{4k_{0y}\varepsilon_0 (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \left( k'_xk'_y\varepsilon_3 + \varepsilon_0k'_y\sqrt{k_3^2 - k'_y{}^2} \right)} \\
& + \frac{k_{0x}k'_y (2k_{0y}^4\varepsilon_0 - 2k_{0y}^3k'_y\varepsilon_0 + k_0^2k_{0y}^2\varepsilon_3 + 2k_0^2k_{0y}k'_y\varepsilon_3 - k_0^2k'_y{}^2\varepsilon_3)}{4k_{0y}^2 (k_{0y} - k'_y)^2 (k_{0y} + k'_y) \left( k'_xk'_y\varepsilon_3 + \varepsilon_0k'_y\sqrt{k_3^2 - k'_y{}^2} \right)} \\
& + \frac{k_{0x} (2k_{0y}^2\varepsilon_0 - k_0^2\varepsilon_3) \left( k'_x\varepsilon_3 - \varepsilon_0\sqrt{k_3^2 - k'_y{}^2} \right)}{8k_{0y}^2\varepsilon_0 \left( k'_xk'_y\varepsilon_3 + \varepsilon_0k'_y\sqrt{k_3^2 - k'_y{}^2} \right)}.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Por tanto sustituyendo  $A(k_y)$  dada por la Ec.(4.103) en la Ec.(3.4), obtenemos el  $H_z$  en la región  $x < 0$ .

El primer término de la solución a primer orden de  $A(k'_y)$ , ecuación (4.103), corresponde a la que se obtuvo a orden cero. Como se vió en la sección anterior, ecuación (4.86), este término corresponde a ondas planas en el espacio de configuración, que se reflejan

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k_{0y} - k'_y) \frac{\varepsilon_3k_{0x} - \varepsilon_0\sqrt{k_3^2 - k'_y{}^2}}{\varepsilon_3k'_x + \varepsilon_0\sqrt{k_3^2 - k'_y{}^2}} e^{-ik'_xx + ik'_yy} dk'_y \\
& = e^{-ik_{0x}x + ik_{0y}y} \frac{\varepsilon_3k_{0x} - \varepsilon_0\sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}{\varepsilon_3k_{0x} + \varepsilon_0\sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

El segundo término de la ecuación (4.103) también corresponde a ondas

planas en la misma dirección que la anterior, pero con diferente amplitud.

$$\begin{aligned}
& \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k'_x \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}}{\left(\varepsilon_3 k'_x + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_y'^2}\right)^2} \\
& \times \delta(k_{0y} - k'_y) e^{-ik'_x x + ik'_y y} dk'_y \\
& = \gamma \frac{k_{0x} \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}{\left(k_{0x} \varepsilon_3 + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}\right)^2} e^{-ik_{0x} x + ik_{0y} y}. \tag{4.106}
\end{aligned}$$

Entonces la amplitud de las ondas planas reflejadas será la siguiente

$$\begin{aligned}
r_{1\perp} & = \frac{\varepsilon_3 k_{0x} - \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}{\varepsilon_3 k_{0x} + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}} \\
& + \gamma \frac{k_{0x} \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}}{\left(k_{0x} \varepsilon_3 + \varepsilon_0 \sqrt{k_3^2 - k_{0y}^2}\right)^2}. \tag{4.107}
\end{aligned}$$

Las contribuciones, en el espacio de configuración, aportados por  $S(k'_y, k'_x)$  se pueden escribir explícitamente en función de integrales y derivadas de la función de Hankel  $H_0^{(1)}$ ; para tener una idea puede verse el apéndice que esta al final. Sin embargo, a partir de este punto limitaremos nuestro análisis



a estudiar solamente la solución de campo lejano, es decir la dependencia espacial del campo que se obtiene a una distancia mucho mayor que la longitud de onda de la señal electromagnética. Para este propósito nótese que el término restante en el espacio de configuración es de la forma

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} S(k'_y, k'_x) e^{-ik'_x x + ik'_y y} dk'_y, \quad (4.108)$$

por lo que es conveniente efectuar los siguientes cambios de variables

$$k'_y = k_0 \sin \theta, k'_x = k_0 \cos \theta, \quad (4.109)$$

$$x = r \sin \phi, y = r \cos \phi, \quad (4.110)$$

donde  $k_0$  y  $\theta$  son coordenadas polares en el espacio de Fourier y corresponden a la magnitud del vector de onda y al ángulo de incidencia, respectivamente. De modo similar  $r$  y  $\phi$  son coordenadas polares en el espacio de configuración.

De esta manera  $T(x, y, z)$  se transforma en

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} S(k_0 \sin \theta, k_0 \cos \theta) e^{ik_0 r \cos(\theta + \phi)} \cos \theta d\theta.$$

Ahora, si consideramos  $r \gg 2\pi/k_0$  ( condición de campo lejano ) y notamos que  $T(x, y, z)$  es de la forma

$$\int_C g(\theta) \text{Exp}(r f(\theta)) d\theta, \quad (4.111)$$

en donde  $C$  es el círculo unitario, podemos utilizar el método de aproximación del punto silla [8] que al ser aplicado resulta en la siguiente expresión aproximada.

$$T(r, \phi) \approx \frac{\sqrt{2\pi} g(0) e^{rf(0)} e^{i\alpha}}{|rf''(0)|^{1/2}},$$

la cual nos muestra que la amplitud de dicho término disminuye con la distancia. Por tanto, dado que la amplitud de las contribuciones del tipo onda plana mantiene su amplitud para distancias grandes, entonces en el límite de campo lejano podemos despreciar los términos provenientes de  $T(r, \phi)$ .

Aunque en este trabajo no se exponen explícitamente a los términos  $T(r, \phi)$ , cabe decir que se analizaron y se encontró que la región donde están presentes las ondas de forma cilíndrica es del orden de una longitud de onda, en el visible.

Finalmente se graficarán los coeficientes de reflexión que corresponden sólo a las amplitudes de las ondas planas, que como ya se vio son las únicas que contribuyen en el campo lejano, ecuación (4.107).

Se nota de las gráficas (4.4) y (4.5) que el ángulo de Brewster aumenta al incrementar el valor de la perturbación,  $\gamma$ , en comparación al ángulo de Brewster que se obtuvo a orden cero.

Como ya se mencionó la reflectancia y la transmitancia son cantidades

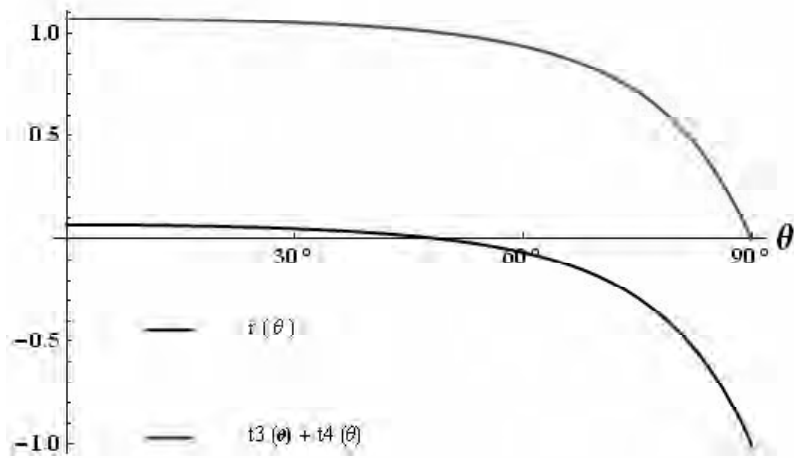


Figura 4.4: Coeficientes de reflexión  $r_{\perp}$ , para  $\gamma = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 0.01$ , que equivale a una diferencia de índices de refracción de 0.1.

que pueden medirse, pero en este caso no se graficarán debido a que al ser esto una aproximación, de entrada no debiera satisfacerse esta condición. En estudios posteriores se planea desarrollar el modelo presentado, considerando tanto el campo lejano como las contribuciones que se despreciaron.

#### 4.4 Discusión de Resultados.

Al desarrollar el modelo propuesto, se encontró un sistema de ecuaciones integrales, para las amplitudes de reflexión y de transmisión, dicho sistema es importante ya que a partir de él se puede tratar de encontrar las amplitudes buscadas por distintos métodos.

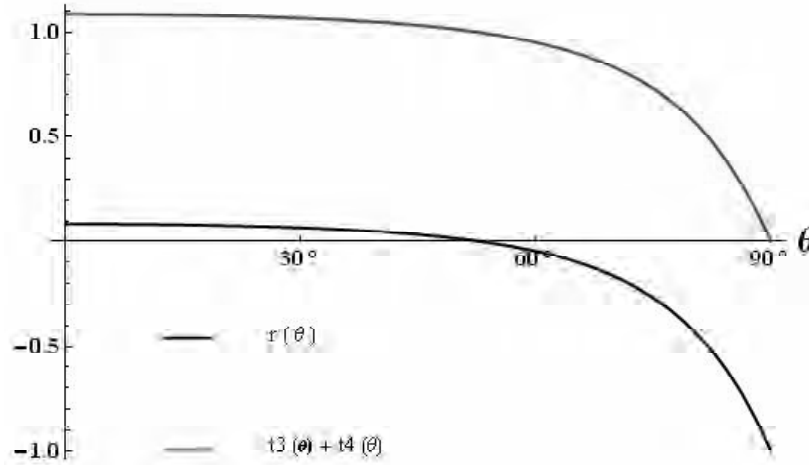


Figura 4.5: Coeficientes de reflexión  $r_{1\perp}$ , para  $\gamma = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 0.1$ , que equivale a una diferencia de índices de refracción de  $\approx 0.3$ .

La solución obtenida fue mediante aproximaciones sucesivas, y a orden cero se encontró que la solución empata con la solución presentada en el caso comunmente conocido, que es cuando sólo hay dos medios.

A su vez se obtuvo la solución a primer orden de la onda reflejada, la cual esta constituida por funciones de Hankel y sus derivadas (Ondas cilíndricas), y ondas planas. En el límite de campo lejano calculamos el coeficiente de reflexión y transmisión a primer orden, y se notó que el ángulo de Brewster puede aumentarse dependiendo de la diferencia entre las permitividades de los medio que forman la pantalla,  $\gamma$ .

En este trabajo se dejó la aproximación a primer orden y aún falta determinar si una solución a segundo orden puede proporcionar información útil.

# Capítulo 5

## Conclusiones.

En este trabajo de tesis se consideró como modelo para entender las pantallas de cristal líquido una pantalla formada por dos medios homogéneos e isotrópicos. Para encontrar la forma de los campos reflejados se propuso un modelo que consistió en una superposición infinita y continua de ondas planas que se puede expresar como una transformada de Fourier. Con dicho modelo se obtuvo un sistema de ecuaciones integrales para la amplitud de la onda reflejada y la amplitud de la onda transmitida. Dicho sistema de ecuaciones se resolvió en forma aproximada desarrollando en series del parámetro definido como la diferencia de las permitividades de ambos medios que forman la pantalla.

La solución a orden cero reproduce consistentemente los coeficientes de Fresnel de los modos transversos magnéticos (ondas s) estudiados en los cur-

tos de óptica. De igual modo se encontró a orden cero que la Transmitancia y la Reflectancia cumplen con el principio de conservación de la energía.

A primer orden se obtuvieron de igual forma los correspondientes coeficientes de reflexión y transmisión (ondas  $s$ ) en el límite de campo lejano, y se graficaron como función del ángulo de incidencia. Por otro lado se encontró que el ángulo de Brewster aumenta conforme se aumenta el parámetro de aproximación, lo que quiere decir que este sistema estudiado polarizará a mayores ángulos conforme se aumenta la diferencia en los índices de refracción de los dos medios. Aunque debe tenerse cuidado ya que no puede aumentarse indefinidamente dicho parámetro ya que en ese caso la perturbación pudiera ser mayor que la aproximación a orden cero, lo cual no debe permitirse.

También se ve de las gráficas (4.4) y (4.5) que la transmitancia a incidencia normal es mayor cuando la diferencia de los índices de refracción de los medios es mayor, lo cual indica a primera aproximación que para formar pantallas de visión amplia, debieran configurarse para que la diferencia de índices entre pixeles fuera grande; pero habría que estudiar que tan grande debiera ser esa diferencia para tener la configuración más eficiente, ya que la forma en que las pantallas de cristal líquido varían la permitividad en sus celdas es por medio de la aplicación de voltajes, lo cual lleva a pensar en otro parámetro

que es el consumo de energía.

Más allá de este método particular que se eligió es posible resolver el sistema de ecuaciones integrales, exacto, con varios métodos, tal es el caso de los métodos numéricos, con los cuales se podría incluso proponer que la permitividad en los medios que forman la pantalla no sean isótropos; tal como sucede en las pantallas de cristal líquido. Esto por que la configuración molecular se puede variar aplicando algún campo eléctrico, y así el modelo contemplaría una variación de la permitividad eléctrica con la posición, en  $x$ , en  $y$  e incluso en  $z$ ; pero debe tomarse en cuenta el tiempo de cómputo.



## Capítulo 6

### Apendice: Representación Integral de la Función de Hankel.

En este apéndice se deducirán las siguientes transformadas de Fourier en la variable  $y$

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_x|x| + i\sqrt{k^2 - k_x^2}y}}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} dk_x, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial y} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x|x| + i\sqrt{k^2 - k_x^2}y} dk_x = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x + i\sqrt{k^2 - k_x^2}y} dk_x, \quad x > 0, \quad (6.2)$$

donde  $\mathcal{H}_0^{(1)}$  es la función de Hankel de orden cero en forma integral.

$$\mathcal{H}_0^{(1)} = J_0(kr) + iY_0(kr)$$

Consideremos la función de Green de la ec. de Helmholtz 2D, al cual está

definida por

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \Psi(x, y) = \delta(x)\delta(y). \quad (6.3)$$

si proponemos un desarrollo en ondas planas de la ecuación diferencial

$$\Psi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x + ik_y |y|} f(k_x) dk_x \quad (6.4)$$

Sustituyendo se obtiene

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} (k_x^2 + k_y^2 + 2ik_y \delta(y)) e^{ik_x x + ik_y |y|} f(k_x) dk_x,$$

lo cual puede describirse como

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \Psi(x, y) = -2i\delta(y) \int_{-\infty}^{\infty} k_y e^{ik_x x + ik_y |y|} f(k_x) dk_x. \quad (6.5)$$

Luego, para que  $\Psi(x, y)$  sea solución de la Ec.(6.3) es necesario que  $-2ik_y f(k_x) = 1/2\pi$  ya que de esta manera se obtiene el desarrollo de  $\delta(x)$  en la base de Fourier. Insertando  $f(k_x)$  en la ecuación (6.4) se llega a la expresión

$$\Psi(x, y) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_x x + ik_y |y|}}{k_y} dk_x. \quad (6.6)$$

Por otro lado, Si definimos a  $\Phi$  como la transformada de Fourier de  $\Psi$  se tiene

$$\Phi(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x + ik_y y} \Psi(x, y) dk_x dk_y;$$

por tanto la ecuación para  $\Psi(x, y)$  toma la forma

$$(k^2 - k_x^2 - k_y^2) \Phi(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi}, \quad (6.7)$$

que al sustituirla en la transformada inversa de  $\Phi(k_x, k_y)$  queda como

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_x x - ik_y y}}{k^2 - k_x^2 - k_y^2} dk_x dk_y. \quad (6.8)$$

Introduciendo las coordenadas polares  $k_x = \varkappa \cos \theta$ ,  $k_y = \varkappa \sin \theta$  y  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  en la ecuación (6.8) se obtiene

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ir\varkappa \cos(\phi - \theta)}}{k^2 - \varkappa^2} \varkappa d\varkappa d\theta, \quad (6.9)$$

que después de identificar a la función de Bessel

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\varkappa)}{k^2 - \varkappa^2} \varkappa d\varkappa = -\frac{1}{2\pi} K_0(ikr) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad (6.10)$$

en donde  $K_0$  es la función de Bessel de segunda clase y  $H_0^{(1)}$  es la función de

Hankel las cuales están relacionadas por la expresión

$$K_0(-ix) = \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}(x). \quad (6.11)$$

Entonces comparando las expresiones Ec.(6.10) y (6.6) se obtiene, tomando

en cuenta que  $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(kr) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_x x + i\sqrt{k_0^2 - k_x^2}|y|}}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} dk_x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_y|y| + i\sqrt{k_0^2 - k_y^2}x}}{\sqrt{k_0^2 - k_y^2}} dk_y \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_x|x| + i\sqrt{k_0^2 - k_x^2}y}}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} dk_x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_y y + i\sqrt{k_0^2 - k_y^2}|x|}}{\sqrt{k_0^2 - k_y^2}} dk_y \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_x|x| + i\sqrt{k_0^2 - k_x^2}y}}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} dk_x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sqrt{k_0^2 - k_y^2}|x| + ik_y y}}{\sqrt{k_0^2 - k_y^2}} dk_y
\end{aligned} \tag{6.12}$$

# Bibliografía

- [1] J. A. Castellano, Liquid Gold: The Story of Liquid Crystal Displays and the Creation of an Industry, World Scientific, Singapore, 2005.
- [2] Pikin. S, L. Blinov. Cristales Líquidos. Traducido del ruso por Rubén Presto. 1<sup>a</sup> ed. Mir Moscu. ” Hayka” 1982.
- [3] P. J. Collings and M. Hird, Introduction to Liquid Crystals, Chemistry and Physics, Taylor and Francis, Great Britain 1998.
- [4] M. R. Fisch, Liquid Crystals, Laptops and Life, World Scientific, New Jersey, 2004.
- [5] O. Darrigol, Electrodynamics from Ampère to Einstein, Oxford, Mexico City, 2000.
- [6] J.V. Stuart, Intermediate Electromagnetic Theory, Worl Scientific, Singapore, 2001.

- [7] Hetch, Óptica, Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2000.
- [8] Arfken, George B, Mathematical methods for physicists, Academic, San Diego, 2001.