



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA PROPUESTA NUEVA DE GRAVEDAD  
MODIFICADA Y SUS RESTRICCIONES  
ASTROFÍSICAS

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADO EN FÍSICA**

P R E S E N T A :

**TERESITA SUÁREZ NOGUEZ**

TUTOR:

**DR. XAVIER NICOLÁS HERNÁNDEZ DÖRING**



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

A mi papá. A mi mamá.

---

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres. Los quiero.

A Xavier Hernández, mi guía y mi astrónomo favorito, por darme la oportunidad de participar en este proyecto, por presentarme el mundo de la ciencia, me hizo parte de la familia del IA y me permitió ser parte de su familia por un tiempo, gracias por creer en mi, por toda la confianza, el apoyo y la paciencia. Y sobre todo por ayudarme a realizar mi primer trabajo profesional.

Un agradecimiento especial a Miguel Monroy.

A Gabriela Gonzalez. A mi hermana Auned. A los amigos que me acompañaron: Rox, Ofelia, Aranza, Checo, Bernardo, David, Carola, Fer.

A Fed, Ana, Álvaro. Por su hospitalidad.

A todos ustedes por hacer que todo sea más agradable.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Astronomía (IA).

Al CONACyT por su apoyo económico y a la SEP que me apoyó por medio del convenio DIE 0814970.

A los Sinodales.

Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky

Dra. Clara Eugenia Garza Hume

Dr. Xavier Nicolás Hernández Doring

Dr. Pablo Luis Rendón Garrido

Dr. Sergio Mendoza Ramos

---

We will be watching the empire, when you grow up it will be waiting for you.

**Batman Begins (2005)**

---

El trabajo que se presenta en esta tesis fue publicado en el artículo “*Understanding local Dwarf Spheroidals and their scaling relations under MOND*”, Hernandez, X.; Mendoza, S.; Suarez, T.; Bernal, T., 2009, 2009arXiv0904.1434H

# Índice General

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Orígenes de la propuesta de la Materia Oscura . . . . .	5
1.2. Materia oscura en cúmulos galácticos y en galaxias espirales . . . . .	7
1.3. Modelos de Gravedad Modificada . . . . .	8
1.3.1. MOND . . . . .	9
1.3.2. Fundamentos teóricos . . . . .	13
<b>2. Desarrollo de la Propuesta</b>	<b>15</b>
2.1. Sistema Solar . . . . .	22
2.2. Vía Láctea . . . . .	23
2.3. M31 . . . . .	25
<b>3. Derivación de la Ecuación de Equilibrio Hidrostático</b>	<b>31</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>37</b>
4.1. El grupo local de las galaxias enanas esferoidales . . . . .	37
4.1.1. Relaciones de Escala . . . . .	43
<b>5. Discusión Final</b>	<b>49</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	49
5.2. Trabajo Futuro . . . . .	51





# Índice de figuras

1.1.	Curva de rotación para la galaxia espiral NGC6503. . . . .	6
2.1.	Escalamientos de los términos Newtoniano y MOND-iano en la ecuación (2.2), contra el parámetro X. . . . .	19
2.2.	Curva de rotación de M31. . . . .	26
2.3.	Densidad de luminosidad como función del radio del bulbo de M31. . . . .	26
2.4.	Luminosidad como función del radio $r$ del disco de M31. . . . .	27
2.5.	Masa como función del radio del bulbo y del disco de M31. . . . .	27
2.6.	Densidad superficial $\Sigma$ como función del radio del gas atómico y gas molecular en M31. . . . .	28
2.7.	Masa como función del radio del gas atómico y gas molecular en M31. . . . .	29
2.8.	Curvas de rotación de M31 correspondientes a los datos observados por L. Chemin y al ajuste usando la ley de gravedad propuesta en este trabajo (ec. 2.2). . . . .	30
3.1.	Perfil isotérmico de la densidad de equilibrio hidrostático, para $\rho_0 = 0,1M_\odot pc^{-3}$ y $\sigma = 7km/s$ . . . . .	35
4.1.	Comparación de nuestro perfil proyectado de densidad superficial para una solu- ción de equilibrio isotérmico a la ecuación (3.9). . . . .	42
4.2.	Dependencia del radio proyectado a media masa resultante en kpc, contra la den- sidad central asumida en $M_\odot pc^{-3}$ , para una configuración de equilibrio isotérmico bajo la ley de gravedad propuesta, con una $\sigma$ fija de $10 km/s$ . . . . .	44
4.3.	Logaritmos de los valores de los cocientes Newtonianos (M/L) de las galaxias dSph locales, contra las magnitudes totales observadas en la banda V. . . . .	46



# Índice de cuadros

2.1. Valores del parámetro $X$ (ec. 2.4) en varios sistemas de diferente escala. . . . .	17
2.2. Relación entre el incremento en la velocidad de traslación $v_N$ (ec. 2.18) y el incremento debido a la incertidumbre en las cantidades utilizadas en la velocidad $v_x$ (ec. 2.19) . . . . .	23
2.3. Calibración de $G_2$ . . . . .	24
4.1. Propiedades básicas y cocientes (M/L) resultantes para la muestra de las galaxias enanas esferoidales (dSph). . . . .	40

# Capítulo 1

## Introducción

Desde Newton tenemos un formalismo para escribir las leyes de la naturaleza con matemáticas, él describió uno de los fenómenos más importantes del universo que simplificaban las leyes de Kepler en la Ley de Gravitación universal. Newton definió qué es tiempo, posición, distancia, movimiento, velocidad, aceleración y una de las definiciones más importantes que hizo fue la de Fuerza.

1. La ley de Gravitación Universal

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Esta ley establece que la fuerza que ejerce un objeto de masa  $M$  sobre otro objeto de masa  $m$  es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia,  $r$ , que los separa. La ley de Gravitación Universal se usa para medir la masa de objetos.

2. La ecuación de movimiento o segunda ley de Newton, toda fuerza tiene relacionada una aceleración,

---

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}. \quad (1.2)$$

Podemos asociarle a la Fuerza de Gravedad (ec. 1.1) una aceleración utilizando la ecuación de movimiento (ec. 1.2). Esto es importante debido a que la fuerza que domina a escalas galácticas es la fuerza de la gravedad.

En este trabajo supondremos que las trayectorias de los objetos son circulares, lo que implica que un objeto gira al rededor de otro objeto y por lo tanto esta sujeto a una aceleración centrípeta,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}^2}{r}\hat{\mathbf{r}}. \quad (1.3)$$

La única herramienta que tienen los astrónomos es conocer bien las características y comportamiento de la luz que viene de los objetos de estudio ya que la luz es una onda electromagnética que viaja y se propaga en el espacio. En un objeto astronómico dado, formado por varias estrellas, gas y polvo, la información útil para los astrónomos consiste en parámetros físicos como la masa total y la luminosidad total.

Existen dos formas de determinar la masa total: la masa luminosa,  $M_L$ , que se obtiene por medio de la luminosidad del objeto y la masa dinámica,  $M_D$ , obtenida a través de la dinámica de dicho objeto.

Primero, el Sol es una estrella bastante normal de la cual ya se conoce la masa total y la luminosidad total, y sabemos que las galaxias están formadas en promedio por estrellas tipo Sol. Si observamos una galaxia cualquiera cuya luminosidad es  $n$  veces la luminosidad del Sol, a primera aproximación dicho objeto tendrá  $n$  veces la masa del Sol.

En realidad se toma en cuenta la presencia de otros componentes bariónicos, todo lo que podemos ver, como polvo y gas, la presencia de una distribución de masas en las poblaciones

---

estelares y variaciones en sus propiedades luminosas como funciones de la edad y la metalicidad para estimar la masa asociada al componente luminoso de una galaxia, que llamaremos la masa luminosa  $M_L$ .

Por otro lado, para la masa dinámica  $M_D$  tomamos la energía potencial  $K$  de un sistema estelar con masa  $M$ ,

$$K = \frac{1}{2}M \langle v^2 \rangle, \quad (1.4)$$

donde  $\langle v^2 \rangle$  es el cuadrado de la velocidad promedio de un sistema de estrellas, y haciendo uso del teorema del virial para una configuración de estado estacionario, que dice que dos veces la energía potencial más la energía cinética es igual a cero ( $2K + W = 0$ ) podemos obtener una relación para la masa total del objeto en estudio,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{|W|}{M} = \frac{GM}{r_g}, \quad (1.5)$$

donde  $r_g$  es el radio que caracteriza el tamaño de un sistema, típicamente el radio que contiene la mitad de la masa, o en términos de observables, la mitad de la luminosidad e.g. Binney & Tremaine (2008). De ésta última ecuación se resuelve para  $M = M_D$ .

Si calculamos el cociente de la Masa dinámica  $M_D$  sobre la Luminosidad para poblaciones estelares normales de masa bariónica obtendríamos un cociente  $M/L$  en unidades solares (Masa solar  $M_\odot$  y Luminosidad solar  $L_\odot$ ) con un valor de  $\sim 1-7$  e.g. Queloz et al. (1995), Romanowsky et al. (2003).

Conociendo las diferencias entre la masa luminosa,  $M_L$ , y la masa dinámica,  $M_D$ , y la forma de determinar cada una de ellas, se calcularon ambas masas para diferentes sistemas y se encontraba que en el caso del Sol, de la vecindad del Sol y de cúmulos globulares resultaba  $M_D = M_L$ , sin embargo para el caso de una galaxia grande o cúmulos de galaxias se encontraba que  $M_D \sim 20M_L$ . Es decir que se encontraba una discrepancia de masa.

---

En una muestra de estrellas se puede relacionar la masa total con la luminosidad total suponiendo una función de luminosidad, la distribución relativa de estrellas de diferentes masas y luminosidades. Pero hay que tener cuidado al relacionar la masa de un objeto astronómico con su luminosidad, por ejemplo, en una muestra de estrellas en la vecindad del sol el 95 % de la luminosidad total está dada por estrellas más brillantes que el sol que representan sólo el 25 % de la masa total, mientras que las estrellas más débiles que el sol contribuyen con sólo el 5 % de la luminosidad total pero contienen el 75 % de la masa e.g. Milgrom (2002).

Se hace la suposición de que los procesos de formación estelar son similares en todos los sistemas; entonces, al calcular los cocientes M/L en regiones de baja densidad, como serían las partes externas de una galaxia o cúmulos de galaxias, se obtendrían cocientes M/L intrínsecos parecidos a cualquier otra población.

La idea de que el cociente M/L no varía fuertemente está sustentada por los modelos de evolución química de la Vía Láctea y la vecindad solar, que son consistentes con las observaciones y con los principios básicos de evolución estelar y galáctica, e.g. Carigi (2003), Boissier & Prantzos (2003). Sin embargo al tratar de extrapolar a escalas galácticas, la mayoría de los sistemas tienen cocientes M/L mucho más grandes de lo que se observa en las partes centrales de las galaxias. Estos cocientes son mucho más grandes que los asociados a poblaciones estelares normales ( $\simeq 2 - 5$  en unidades solares), en muchos casos por más de un orden de magnitud. Esto llevó a la gente a formular algunas hipótesis, como son:

1. El proceso de formación estelar en regiones de baja densidad de masa origina predominantemente estrellas y objetos de baja luminosidad. Esta opción fue descartada hace mucho tiempo por consideraciones cosmológicas.
2. Hay masa que no brilla, lo que implica que existe alguna partícula elemental desconocida. A este material exótico que desconocemos y que podría ser responsable de esta anomalía se le llama materia oscura. Esta hipótesis se ha vuelto tan importante que la trataremos a continuación detalladamente.

3. Que sea necesario modificar la ley de gravitación para campos gravitacionales débiles.

### 1.1. Orígenes de la propuesta de la Materia Oscura

En 1846 Le Verrier predijo la existencia de un planeta extra de los que ya se conocían, Neptuno, como explicación a las desviaciones de la órbita de Urano con respecto al movimiento puramente Kepleriano. Poco tiempo después el planeta fue detectado por el astrónomo J.G. Galle (1846). En ese mismo año Le Verrier descubrió la precesión anómala del perihelio de mercurio y en 1859 Le Verrier analizó las siguientes opciones para explicar la anomalía.

1. Un campo gravitacional de materia invisible (planeta, asteroides cerca del sol), implicando la introducción de un nuevo objeto, Vulcano. Aunque la trayectoria completa de Vulcano fue calculada, el planeta no fue observado.
2. La falta de precisión, implicando que el modelo gravitacional tiene que ser ajustado [A.F. Zakharov, S. Capozziello (2009)].
3. Cambios a la ley Newtoniana.

Se puede explicar la precesión de Mercurio usando la idea de que la fuerza gravitacional va como  $\frac{1}{r^n}$  con  $n=2.0000001574$ , dónde  $r$  es la distancia de la ecuación (1.1), también modificando un 10 % la masa de Venus. Otra modificación a la ley de gravitación universal que puede explicar fenómenos como éste fue hecha por I. Newton (1686), publicado en su *principia* dónde él consideró una generalización de una fuerza gravitacional

$$F = \frac{br^p + cr^q}{r^3}, \quad (1.6)$$

donde b,c,o,q son constantes.

Usando esta generalización Le Verrier explica la precesión de Mercurio (1876) pero usando a Vulcano. Como sabemos el problema no se resolvió satisfactoriamente hasta que Einstein



## 1.1 Orígenes de la propuesta de la Materia Oscura

---

mostró este fenómeno como una consecuencia natural de su teoría general de la relatividad. Siguiendo el camino de Le Verrier y analizando cuidadosamente las trayectorias de cuerpos celestes se pudo reconstruir potenciales gravitacionales y distribuciones de masa que dominan los movimientos de cuerpos celestes.

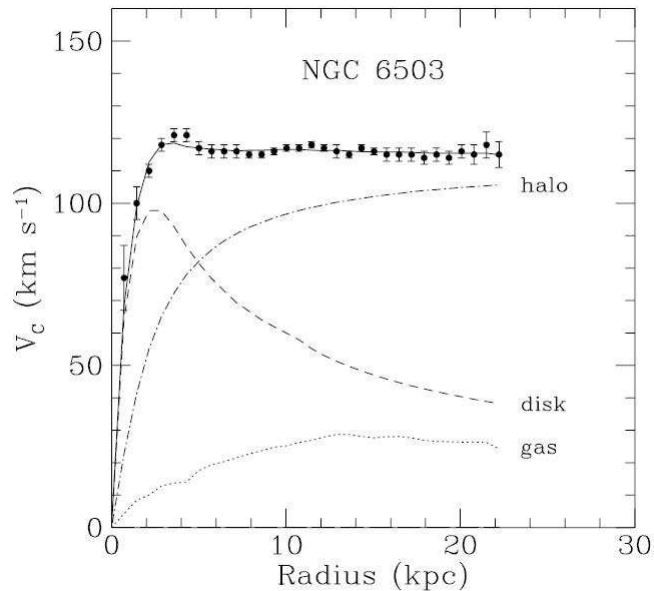


Figura 1.1: Curva de rotación para la galaxia espiral NGC6503. Los puntos son las velocidades circulares medidas de la rotación en función de distancia del centro de la galaxia. Las curvas rayadas y punteadas son la contribución a la velocidad rotatoria debido al disco observado y el gas, respectivamente, y la curva punto-rama es la contribución del halo oscuro.

La Materia Oscura es una materia hipotética de composición desconocida cuya existencia se infiere sólo a partir de efectos gravitacionales, es un tipo de materia no disipativa, no colisional, no interactuante con la radiación electromagnética.

J. H. Oort (1932) fue el primer astrónomo que utilizó las observaciones de los movimientos de estrellas en la vecindad solar con el objetivo principal de describir la cinemática de la

---

## 1.2 Materia oscura en cúmulos galácticos y en galaxias espirales

---

vecindad solar pero también inició el proceso de interpretar la cinemática en términos dinámicos construyendo el primer modelo moderno de nuestra galaxia. Por otra parte, Zwicky (1933, 1937) encontró por primera vez sistemas donde  $M_D \gg M_L$  e.g. el cúmulo Coma, lo que interpretó como evidencia de materia oscura. Oort (para la galaxia) y Zwicky (para el cúmulo coma) encontraron que los potenciales gravitacionales obtenidos de las distribuciones de luz observadas eran diferentes a los potenciales inferidos de mediciones cinemáticas. Oort usó una aproximación conservativa, como el caso de Le Verrier con la anomalía de Mercurio, asumiendo que la ley de gravedad tiene que ser newtoniana y teniendo que introducir una sustancia “invisible” la cual después se empezó a llamar *Materia Oscura*. La necesidad de introducir más materia estaba basada en los estudios de las curvas de rotación para galaxias espirales. No se obtenía lo esperado por el modelo newtoniano sino que las curvas de rotación se aplanan (véase la figura 1.1), es decir, para radios grandes las velocidades se mantenían aproximadamente constantes (Rubin y Ford, 1970).

## 1.2. Materia oscura en cúmulos galácticos y en galaxias espirales

Las curvas de rotación son el método más directo de medir la distribución de masa dinámica de una galaxia. La información más precisa del comportamiento de curvas de rotación en radios grandes se ha obtenido para galaxias externas.

Tomando del teorema de Virial, ecuación (1.5), para una configuración en estado estacionario:

$$mv^2 = m \frac{GM(R)}{R}, \quad (1.7)$$

donde  $v$  es la velocidad de una partícula de prueba de masa  $m$  a una distancia  $R$  del centro de

---

la galaxia y  $M(R)$  es la masa acumulada de la galaxia hasta un radio  $R$ . Si deseamos ajustar las curvas de rotación con distribuciones de simetría esférica, suponiendo  $\rho = cte$  (se tendría  $M(R) \propto R^3$  y  $V \propto R$ ), para la parte plana de las curvas de rotación se sugiere  $\rho = cte/R^2$  (por lo tanto, tenemos  $M(R) \propto R$  y  $V = cte$ ). El problema es que la masa observada  $M(R)$  decae exponencialmente con el radio y el dilema es nuevamente que se tiene la necesidad de una nueva sustancia (Materia Oscura) o modificar las leyes fundamentales de la gravitación. Los componentes que conforman un sistema astronómico se mueven en relación unos con otros sin poder alejarse entre ellos porque están amarrados al jalón gravitacional del resto del sistema y eso evita la dispersión del sistema. En la actualidad se usa el término “ materia oscura ” para denotar cualquier forma de materia cuya existencia es inferida únicamente por sus efectos gravitacionales. El problema de la materia oscura surge tanto por el desajuste que existe en las masas de las galaxias como en las estructuras cósmicas. Esta discrepancia de masa es omnipresente. Aparece prácticamente en todos los sistemas, desde galaxias enanas hasta galaxias normales y grupos de galaxias hasta supercúmulos extensos.

A pesar de su supuesta presencia dominante, varias décadas de múltiples esfuerzos experimentales a nivel mundial no han logrado una detección directa de esta hipotética componente. Hasta el momento no hay una sola evidencia empírica independiente de la realidad de la hipótesis de la materia oscura.

### 1.3. Modelos de Gravedad Modificada

Si decidimos respetar las leyes de la física entonces la materia oscura es la única explicación a las discrepancias de masa, pero si aceptamos un cambio a las leyes estándares entonces no forzosamente necesitamos a la materia oscura. Los movimientos de un sistema galáctico son descritos por una particular fórmula en física newtoniana, donde se combinan dos leyes básicas: la ley de la gravitación de newton (que relaciona la fuerza de gravedad entre cuerpos a las masas

de los cuerpos y su separación) y la segunda ley de newton (que relaciona a la fuerza con la aceleración). La aceleración de un cuerpo en una órbita depende de la velocidad del cuerpo y del radio de la órbita. Bajo todos estos lineamientos uno deriva la conexión entre masas, velocidad, tamaño orbital o distancia. Estas leyes newtonianas explican precisamente el vuelo de un misil y los movimientos de los planetas pero su extrapolación a galaxias presenta problemas, como ya se explicó al ver las curvas de rotación, entonces modificando la fuerza se espera evitar la necesidad de invocar materia oscura.

Dos cambios drásticos a la física newtoniana ya se ha demostrado que son necesarios, implicaciones asociadas a la relatividad y a la mecánica cuántica, en regímenes de velocidades cercanas a la de la luz y escalas subatómicas. Lo que nos interesa averiguar es qué atributos de los sistemas galácticos son tan extremos que pueden requerir todavía otra modificación. El primer atributo posible que se nos viene a la mente es el tamaño, la gravedad tal vez se sale de la ley newtoniana a grandes distancias.

Por el momento no podemos excluir la posibilidad de una modificación a las leyes de gravitación tal como lo hacen las teorías MOND (Milgrom 2002), TeVeS (Bekenstein 2005),  $f(R)$  (Capozziello 2009), etc.

### 1.3.1. MOND

MOND (*MOdified Newtonian Dynamics*) es una modificación a la segunda ley de newton cuando se tiene una fuerza gravitacional, propuesta por Milgrom, que cambió la relación entre la fuerza y la aceleración cuando la aceleración es baja. Esta modificación introduce una constante,  $a_0$ , con las dimensiones de una aceleración y propone que la dinámica newtoniana estándar es una buena aproximación sólo para aceleraciones que son mucho más grandes que  $a_0$ . Pero cuando la aceleración es pequeña comparada con  $a_0$  la segunda ley de newton se altera: la fuerza se vuelve proporcional al cuadrado de la aceleración. Para explicar las aceleraciones observadas en galaxias, MOND propone que una fuerza más pequeña produce una mayor aceleración, por

lo tanto, la masa produce una aceleración mayor a grandes distancias de lo que sucede en la dinámica newtoniana y así elimina la necesidad de materia oscura.

Supongamos que la masa de una galaxia está contenida en un cierto radio, la dinámica newtoniana nos diría que fuera de este radio la velocidad angular de los objetos debería decrecer al aumentar la distancia al centro.

Sabemos que en este caso la velocidad tangencial es inversamente proporcional a la raíz del radio ( $v_T \propto 1/\sqrt{r}$ ) pues esto es justo lo que pasa en el sistema solar: Mercurio orbita más rápido que la Tierra, que a su vez orbita más rápido que Saturno. La mayor parte de la masa en el sistema solar está contenida en el sol y la velocidad orbital de los planetas decrece en los planetas externos. La situación es radicalmente diferente para distancias suficientemente grandes desde el centro de la Galaxia (escalas galácticas), la velocidad orbital se incrementa desde el centro de la Galaxia hasta alcanzar un máximo  $\simeq 220 \text{ km/s}$  a unos  $4 \text{ kpc}$  del centro, nivel al cual permanece prácticamente constante para distancias mayores.

En galaxias espirales, en lugar de que las velocidades disminuyan cuando se incrementa la distancia desde el centro, se aproximan a un valor constante. Se observa una relación empírica entre la luminosidad total de una galaxia espiral,  $L_{tot}$ , y el valor asintótico de su curva de rotación  $V_\infty$ , del tipo  $V_\infty^4 \propto L_{tot}$ , lo que se conoce como la relación de Tully – Fisher.

Para tratar de explicar las discrepancias de masa, usando una partícula de prueba a una distancia  $\mathbf{r}$  de una masa  $M$  sujeta a una aceleración  $\mathbf{a}$ , Milgrom nos dice que la fuerza de la ecuación (2) va como una aceleración multiplicada por una función adimensional  $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)$ .

$$\mathbf{F} = m \mu\left(\frac{a}{a_0}\right) \mathbf{a}. \quad (1.8)$$

De aquí se propone que para aceleraciones grandes (Newton) la  $\mu$  va como  $\mu(x) = 1$ . De la misma forma que para el caso anterior, de igualar las fuerzas se obtiene la siguiente relación para aceleración, donde  $a_0$  es una constante del orden de  $10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$  :

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) a = G \frac{M}{r^2}. \quad (1.9)$$

MOND se puede resumir en esta relación (1.9).

Para el caso de aceleraciones más pequeñas que  $a_0$ , la propuesta es que la función  $\mu(x)$  tienda a  $x$ , con la  $x$  de MOND sería:

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a}{a_0}. \quad (1.10)$$

En este caso sustituyendo en la ecuación (1.9) llegamos al siguiente resultado

$$\frac{a^2}{a_0} = G \frac{M}{r^2}. \quad (1.11)$$

Como seguimos en el caso de velocidades orbitales utilizamos aceleración centrípeta (ec. 1.3) para obtener una relación en términos de la velocidad

$$\frac{v^4}{a_0 r^2} = G \frac{M}{r^2}. \quad (1.12)$$

Acomodando los términos en esta última ecuación vemos que la velocidad va como la raíz cuarta de la masa y que además la velocidad tangencial es una constante que depende sólo de la masa del sistema como se ve en la ecuación (1.13), para el caso de aceleraciones más pequeñas que  $a_0$ ,

$$v = \sqrt[4]{G a_0 M}. \quad (1.13)$$

Se han hecho observaciones suficientemente detalladas para comparar predicciones teóricas y MOND ajusta notablemente. Estas comparaciones implican un parámetro que se debe ajustar para cada galaxia: un cociente Masa-Luminosidad (M/L). En cambio, para materia oscura al comparar con las observaciones se requiere especificar la cantidad y distribución de materia

oscura.

En la tierra, y en general en todo el sistema solar, no se pueden medir efectos de MOND porque la aceleración es newtoniana y es muy grande en comparación con  $a_0$ .

Necesitaríamos ir mucho más lejos que la órbita de Plutón para empezar a medir los efectos de MOND. Los detalles de la función  $\mu$  todavía se desconocen, solamente tenemos su comportamiento en los límites.

$$\mu(x) \rightarrow \begin{cases} 1, & x \gg 1 \\ x, & x \ll 1 \end{cases}$$

Es importante mencionar los hechos fenomenológicos que MOND puede explicar, que son los siguientes:

1. Las curvas de rotación de galaxias son asintóticamente planas.
2. La velocidad de rotación de una galaxia es proporcional a la cuarta raíz de su masa bariónica total: la relación Tully-Fisher bariónica. La constante de proporcionalidad es  $(G a_0)^{1/4}$ .
3. Galaxias con altas densidades superficiales centrales correspondientes a aceleraciones más grandes que  $a_0$  no deberían mostrar discrepancia de masa en las partes interiores. La discrepancia debería aparecer solamente más allá de ciertos radios pero siempre y cuando la aceleración sea comparable con  $a_0$ .
4. En Galaxias LSB, las cuales tienen densidad superficial baja, la discrepancia de masa debe empezar justo en el centro.
5. La distribución de la materia visible (bariónica) en cada galaxia determina firmemente el campo de aceleración de una galaxia. Esto debe sostenerse a pesar de las historias de formación, evolución e interacción que las diversas galaxias han experimentado.

Si decidiéramos ignorar a MOND encontraríamos problemas para aceleraciones más pequeñas que  $a_0$  pero por otro lado se tienen problemas en velocidades extremas o gravedades demasiado fuertes, para esto la relatividad es necesaria.

### 1.3.2. Fundamentos teóricos

MOND surge como una relación empírica que describe bien la fenomenología de las galaxias pero sin a ser una teoría de campo fundamental. Se necesita modificar la acción para el campo gravitacional para garantizar la conservación de la energía y el momento como consecuencias inmediatas de las simetrías del lagrangiano.

Dado que MOND, ecuación (1.10), es incompatible con las leyes de conservación, excepto si se aplica sólo a partículas de prueba, el paradigma de MOND puede hacerse consistente dinámicamente formulándolo como una teoría de gravitación modificada.

En el caso de gravedad Newtoniana, un cuerpo se mueve con una aceleración igual a  $g_N = -\nabla\phi_N$ , donde  $\phi_N$  es el potencial gravitacional newtoniano, determinado por la ecuación de Poisson (ec. 1.14)

$$\nabla^2\phi_N = 4\pi G\rho, \tag{1.14}$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa que produce  $\phi_N$ . La ecuación de Poisson puede derivarse del Lagrangiano

$$L_N = - \int d^3r \{ \rho\phi_N + (8\pi G)^{-1}(\nabla\phi_N)^2 \}. \tag{1.15}$$

Para hacer una modificación a esta teoría vamos a quedarnos con la noción de que existe un sólo potencial  $\phi$  del cual se deriva una aceleración. La modificación más general de  $L_N$  que resulta es

$$L = - \int d^3r \left\{ \rho\phi_N + (8\pi G)^{-1}a_0^2 f \left[ \frac{(\nabla\phi)^2}{a_0^2} \right] \right\}, \tag{1.16}$$



donde  $f(x^2)$  es una función arbitraria. Notemos que es necesaria una escala para la aceleración, a menos que estemos en el caso newtoniano. Variando  $L$  con respecto a  $\phi$ , con una variación de  $\phi$  que desaparece en el límite, resulta una ecuación de Poisson modificada

$$\nabla \bullet [\mu(|\nabla\phi|/a_0)\nabla\phi] = 4\pi G\rho, \quad (1.17)$$

con  $\mu(x) = f'(x^2)$ , como la ecuación que determina el potencial modificado. Para recuperar el caso en el que se tiene una partícula de prueba con una aceleración  $g = -\nabla\phi$  basta aplicar las condiciones de frontera  $|\nabla\phi| \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$  en la ecuación (1.17).

Es útil escribir la ecuación de campo en términos de un campo newtoniano no modificado  $g_N = -\nabla\phi_N$ , para la misma distribución de masa, la cual satisface la ecuación de Poisson. Eliminando  $\rho$  obtenemos

$$\nabla \bullet [\mu(\nabla\phi/a_0)\nabla\phi - \nabla\phi_N] = 0. \quad (1.18)$$

En esta ecuación 1.18 la expresión que está entre parentesis se puede escribir como

$$\mu(g/a_0)g = g_N + \nabla \times \mathbf{h}, \quad (1.19)$$

donde  $\mathbf{h}$  es un campo vectorial. Si despreciamos el término  $\nabla \times \mathbf{h}$  en una cierta región del espacio, la aceleración en partículas de prueba está dada por la ecuación de campo que es la misma que la de la ecuación (1.8)(Bekenstein&Milgrom, 1984).

En lo que resta de esta tesis sólo trataremos a MOND como una ley empírica para describir la fenomenología galáctica, dejando para trabajo a futuro el problema de la extensión relativista de esta teoría.

# Capítulo 2

## Desarrollo de la Propuesta

En este trabajo se considera una modificación a la ley de gravitación universal (ec. 1.1), que consiste en una extensión a la ley de gravitación ya propuesta por Newton, es decir, un segundo término que describa las observaciones en un campo de interacción gravitacional débil.

En términos de la aceleración newtoniana  $g$  que siente una partícula, la propuesta de MOND es

$$\mu\left(\frac{g}{a_0}\right)g = g_N,$$

donde la aceleración de gravedad Newtoniana es  $g_N = GM/r^2$  y  $\mu$  es una función no especificada.

Ya mencionamos anteriormente que MOND está definido en los límites de la aceleración (aceleraciones muy grandes y aceleraciones pequeñas). Esto quiere decir que cuando  $g \gg a_0$  (aceleraciones grandes) la función  $\mu$  va como  $\mu(x) = 1$  y en este caso observamos que recuperamos la aceleración de Newton. Sin embargo en el límite opuesto, cuando  $g \ll a_0$  (aceleraciones pequeñas) la función  $\mu$  se reduce a  $x$  y en este límite la propuesta de MOND estaría dada por  $g = (a_0 g_N)^{1/2}$ . Además mencionamos que la constante  $a_0$  tiene unidades de aceleración; su valor se ha determinado calibrándola en el régimen de MOND con las observaciones de las curvas de velocidad de rotación de las galaxias espirales grandes.

Sin embargo, lo que es importante señalar es que no se tienen detalles confiables de la

---

transición de aceleraciones (cuando pasamos de aceleraciones grandes a aceleraciones pequeñas), es decir en la transición de la función  $\mu$ . Esta transición mal definida ha sido difícil de manejar.

Lo que nosotros hicimos fue aprovechar las diferencias de las escalas de distancia y masa que existen entre los dos regímenes de aceleración, de tal manera que se obtenga una ley de aceleración que ajuste a todas las escalas:

$$g = g_N + (a_0 g_N)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Esto implica implícitamente la elección de una cierta función  $\mu$  como se verá más adelante.

Para el caso de una partícula que se encuentra a una distancia  $\mathbf{r}$  de una masa  $\mathbf{M}$ , la ecuación (2.1) sería

$$g = -\frac{GM}{r^2} - \frac{G_2 M^{1/2}}{r} \quad (2.2)$$

donde la  $G$  es la constante de Newton y la  $G_2$  esta dada por  $G_2 = (a_0 G)^{1/2}$ . El potencial estándar Newtoniano es  $g_N$  tal que  $g_N = -\nabla(\phi_N)$  y de forma general  $g = -\nabla(\phi)$ .

Vamos ahora a reescribir la aceleración (2.1) en términos de  $g_N$  para definir un nuevo parámetro adimensional  $X$ ;

$$g = g_N(1 + X) \quad (2.3)$$

donde

$$X = \left(\frac{G_2}{G}\right) \left(\frac{R}{M^{1/2}}\right) \quad (2.4)$$

con valores estándares de  $a_0 = 1 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ ;  $G_2 = 1,2 \times 10^{-34} M_\odot^{-1/2} \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^2$  y  $G = 4,5 \times 10^{-39} M_\odot^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^3$ , escogiendo estas unidades por comodidad para aplicaciones galácticas. El objetivo de definir el parámetro  $X$  es analizar su comportamiento a diferentes

---

---

escalas.

Los valores obtenidos del parámetro  $X$  en la ecuación (2.3) que se calcularon para diferentes escalas usando los valores de  $G$  y  $G_2$  ya establecidos se muestran a continuación en la tabla 2.1.

Sistema	$M(M_\odot)$	$R(kpc)$	$X$
Órbita Terrestre	$3 \times 10^{-6}$	$2.07 \times 10^{-23}$	$3.23 \times 10^{-6}$
Sistema Solar	1	$4.86 \times 10^{-9}$	$1.3 \times 10^{-4}$
Cúmulos Globulares	$10^{5-6}$	$2-10 \times 10^{-3}$	0.1 -0.01
Galaxias Elípticas	$10^9 - 10^{11}$	0.5-10	$\sim 0.1$
Disco Galáctico al radio solar	$5 \times 10^{10}$	8.5	2
En las afueras de la via Láctea	$0.7 \times 10^{11}$	100	20

Tabla 2.1: Valores del parámetro  $X$  en varios sistemas de diferente escala.

En escalas terrestres la aportación a la dinámica gravitacional que hace el segundo término de la ecuación (2.3) es del orden de una parte en  $10^6$  y no presenta ningún conflicto con las observaciones, puesto que la incertidumbre de  $G$  es de una parte en  $10^4$ .

Para escalas del sistema solar esta aportación del segundo término en el valor de  $X$  todavía cae dentro de la incertidumbre de la  $G$  sola. Estos valores de  $X$  se vuelven aún más pequeños para los planetas que están más adentro que la tierra en el sistema solar y crecen hacia afuera del sistema solar, pero las incertidumbres en periodos y radios orbitales también crecen substancialmente para los planetas externos, con observaciones modernas extendiéndose sólo por una fracción del periodo orbital.

Si nos vamos hacia los cúmulos globulares las correcciones que haría la ecuación (2.3) se vuelven más pequeñas que los errores y las incertidumbres en las observaciones determinadas para los valores del radio y las masas de los cúmulos globulares.

En el caso de las galaxias elípticas vemos que la corrección a la dinámica gravitacional debida a la inclusión propuesta de un segundo término en la ecuación (2.3) es suficientemente pequeña como para pasar desapercibida, en todos los sistemas dónde no se ha encontrado una anomalía gravitacional y donde la dinámica es consistente con la gravedad Newtoniana, en ausencia de

---

cualquier Materia Oscura.

Por otro lado, en sistemas donde la presencia de Materia Oscura es inferida, y dado que siempre se infiere que es dominante, vemos que la contribución que hace el término Newtoniano a la propuesta de MOND es por lo general insignificante. Como se observa en la tabla 2.1 para el caso del disco galáctico en el radio solar un valor de  $X = 2$  es consistente con una cantidad de materia oscura inferida de aproximadamente 50 % dentro del círculo solar. Si nos vamos a las afueras de la vía láctea con un valor de  $X = 20$  vemos que el sistema está totalmente dominado por Materia Oscura, o está en un régimen donde el segundo término de la ecuación (2.3) determina casi completamente la dinámica.

Una representación esquemática de la transición de aceleraciones está dada en la figura (2.1), donde se muestra una gráfica de las dependencias de gravedad Newtoniana y gravedad MOND-iana contra el parámetro  $X$ . La aceleración tiene una dependencia de suma de leyes de potencias que asegura que para pequeños valores de  $X$  domina el término Newtoniano,  $g_N$ , mientras que para valores grandes de  $X$  sucede lo contrario dominando el término de MOND,  $g_M$ , el segundo término de la ecuación (2.2). La propuesta de la ecuación (2.3) busca ser consistente con todas las observaciones relevantes, en todas las escalas, sin necesidad de encontrar una  $\mu$  extra arbitraria que medie entre el régimen Newtoniano y el MOND-iano.

Ahora mostraremos cómo esta formulación de gravedad modificada es equivalente a tomar una función  $\mu$  en MOND que va como

$$\mu(x) = \frac{\sqrt{1 + 4x} - 1}{\sqrt{1 + 4x} + 1},$$

propuesta originalmente por Bekenstein (Bekenstein 2004). Esto le da un amplio soporte a nuestro modelo dado el buen ajuste a las observaciones que se logran con dicha función.

Como mencionamos en la introducción, MOND se resume en que la fuerza es proporcional a la aceleración por una función que depende de la aceleración.

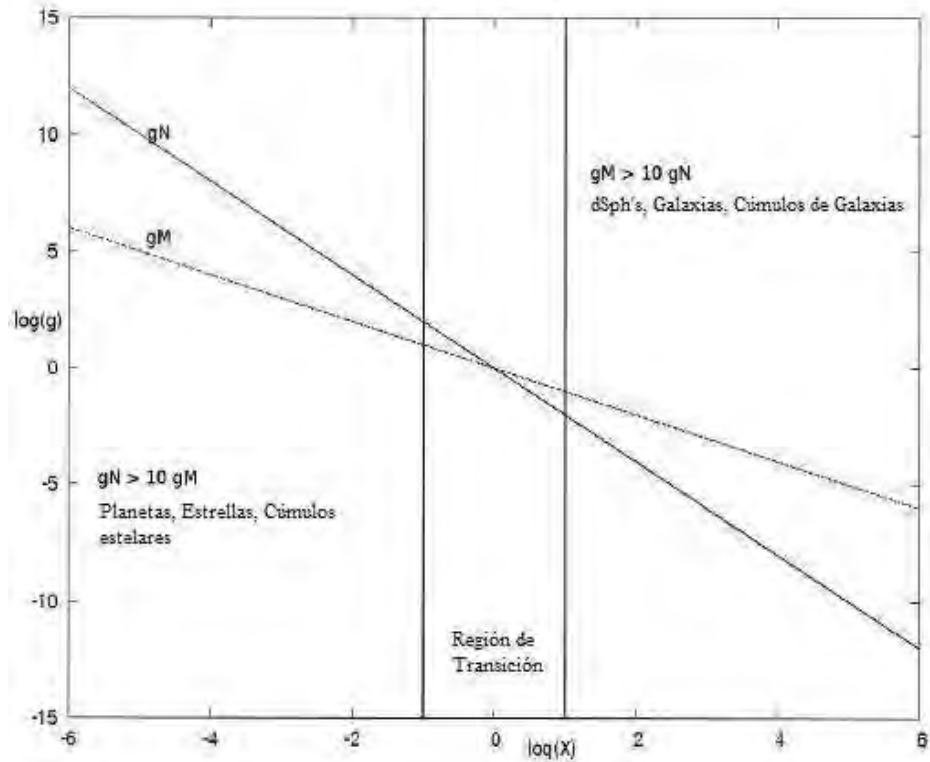


Figura 2.1: Escalamientos de los términos Newtoniano y MOND-iano,  $g_N$  y  $g_M$  respectivamente, en la ecuación (2.2), contra el parámetro  $X$ . En la región del lado izquierdo de la primera línea vertical  $g_N$  domina sobre  $g_M$  por más de un orden de magnitud. En esta región se encuentran sistemas donde no es necesaria la materia oscura para explicar la dinámica observada bajo la gravedad de Newton. Del lado derecho de la segunda línea vertical  $g_M$  domina sobre  $g_N$  por más de un orden de magnitud, en esta región se encuentran los sistemas donde la materia oscura es necesaria para describir la dinámica observada bajo gravedad Newtoniana.

---


$$F = m \mu \left( \frac{a}{a_0} \right) a = G \frac{Mm}{r^2} \quad (2.5)$$

Demostraremos que nuestra propuesta

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{M}{r^2} + (Ga_0)^{1/2} \frac{M^{1/2}}{r} \quad (2.6)$$

es equivalente a la propuesta de Bekenstein con  $x = \frac{a}{a_0}$ ,

$$\mu(a/a_0) = \frac{\sqrt{(1 + 4(a/a_0))} - 1}{\sqrt{(1 + 4(a/a_0))} + 1} \quad (2.7)$$

o lo que es lo mismo, demostraremos que las dos propuestas se implican mutuamente.

La fenomenología de MOND nos da esta relación

$$\mu \left( \frac{a}{a_0} \right) a = G \frac{M}{r^2}; \quad (2.8)$$

sustituyendo la aceleración de la ec. (2.6) en (2.8) obtenemos

$$\left( \frac{\sqrt{1 + 4 \left( \frac{GM}{a_0 r^2} + \sqrt{\frac{GM}{a_0 r^2}} \right)} - 1}{\sqrt{1 + 4 \left( \frac{GM}{a_0 r^2} + \sqrt{\frac{GM}{a_0 r^2}} \right)} + 1} \right) \left( G \frac{M}{r^2} + \sqrt{\frac{Ga_0 M}{r^2}} \right) = G \frac{M}{r^2}. \quad (2.9)$$

Hacemos un cambio de variable para simplificar las cuentas

$$z^2 = G \frac{M}{a_0 r^2} \quad (2.10)$$

y podemos reescribir la ecuación (2.9) como

$$z^2 \left[ \sqrt{(1 + 4(z^2 + z))} + 1 \right] = \left[ \sqrt{(1 + 4(z^2 + z))} - 1 \right] (z^2 + z). \quad (2.11)$$

Distribuyendo términos

---


$$z^2\sqrt{(1+4(z^2+z))} + z^2 = z^2\sqrt{(1+4(z^2+z))} - z^2 + z\sqrt{(1+4(z^2+z))} - z, \quad (2.12)$$

$$2z^2 = z\sqrt{(1+4(z^2+z))} - z, \quad (2.13)$$

$$2z = \sqrt{(1+4(z^2+z))} - 1, \quad (2.14)$$

$$(2z+1)^2 = 1+4(z^2+z). \quad (2.15)$$

Finalmente, desarrollando los dos términos obtenemos

$$4z^2 + (4)(1)z + 1 = 1 + 4z^2 + 4z, \quad (2.16)$$

$$4z^2 + 4z + 1 = 4z^2 + 4z + 1. \quad (2.17)$$

Con este desarrollo hemos demostrado que nuestra propuesta (ecuación 2.2) es equivalente a la función  $\mu(x)$  bajo MOND propuesta por Bekenstein.

A pesar de que estas dos formulaciones son matemáticamente equivalentes, en el caso de Bekenstein esto se piensa como una transición entre 2 regímenes extremos, mientras que en nuestro caso la ecuación (2.2) se podría interpretar como un desarrollo en serie truncado. Se antoja añadir un tercer término, una constante probablemente negativa que podría usarse para modelar la energía oscura, a nivel cosmológico, aunque para esto sería necesario una extensión relativista de la propuesta de esta tesis, cosa que formará parte de un desarrollo futuro.

De esta forma la ecuación (2.2) se ve como una aproximación a una ley de gravedad universal,



sólo los primeros términos de la cual hemos comenzado a apreciar al explorar regímenes de densidades cada vez más bajas, que ocurren a distancias cada vez más grandes, como se muestra en las siguientes secciones.

El primer paso a seguir es calibrar y probar una ley de gravitación no relativista.

## 2.1. Sistema Solar

En el sistema solar veremos que los efectos de la introducción del segundo término de nuestra propuesta (ecuación 2.2) son despreciables o menores a las incertidumbres asociadas a las observaciones, para los planetas internos a Saturno y para la luna terrestre. En lo que sigue supondremos como criterio de comparación órbitas circulares. No es nuestra intención un modelaje preciso de los movimientos planetarios sino una modelación comparativa entre dos leyes de fuerza.

Dado que las estrellas, los planetas y objetos similares orbitan alrededor de otro cuerpo celeste, están sujetos a una aceleración centrípeta de magnitud  $v^2/r$ . Sustituyendo esta aceleración en la ecuación de movimiento  $F = md^2x/dt^2$  obtenemos la relación dada por la ecuación (1.1):

$$v_N^2 = \frac{GM}{r}, \quad (2.18)$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa del Sol (cuerpo atrayente) y r es el radio orbital.

De igual manera podemos reescribir la ecuación (2.2) usando la aceleración centrípeta para obtener una relación en términos de la velocidad, considerando que la masa  $M(r)$  es constante

$$v_x^2 = \frac{GM(r)}{r} + G_2M(r)^{1/2}. \quad (2.19)$$

Entonces queremos comparar  $v_N^2/v_x^2$  con  $v_N^2/(v_N^2 + \delta v^2)$ , para los planetas del sistema solar,

donde  $\delta v^2$  es el error cuadrático en las velocidades de traslación. Este se calculó propagando el error de la fuerza de gravitación newtoniana de la siguiente manera:

$$\delta v^2 = \frac{GM}{r^2} (\delta r) + \frac{(\delta G)M}{r}, \quad (2.20)$$

considerando la incertidumbre en  $G$ ,  $\delta G = 4 \times 10^{-11} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$ , reportada por Binney & Tremaine (2008), para  $\delta r$  tomamos las incertidumbres en los radios máximos en  $kpc$  de los planetas del sistema solar y el sistema tierra-luna reportados por P. K. Seidelman (1992). Utilizando los valores extremos de  $G_2$ , calibrados para el caso de la Vía Láctea que veremos en la siguiente sección, se obtuvieron los valores que se muestran en la tabla (2.2).

Planeta	$v_N^2/(v_N^2 + \delta v^2)$	$v_N^2/v_x^2 (G_{2min})$	$v_N^2/v_x^2 (G_{2max})$
Venus	0.99981	0.99997	0.99987
Tierra	0.99980	0.99995	0.99982
Marte	0.99965	0.99993	0.99972
Júpiter	0.99846	0.99975	0.99906
Saturno	0.99443	0.99955	0.99827
Luna	0.99974	0.99993	0.99975

Tabla 2.2: Muestra que el incremento en la velocidad de traslación al cuadrado, asociado a aumentar el segundo término a la fuerza de gravitación de newton ( $v_x^2$ ), es menor al incremento debido a la incertidumbre en las cantidades utilizadas en esta velocidad ( $v_N^2 + \delta v^2$ ).

## 2.2. Vía Láctea

Las estrellas tienen una órbita aproximadamente circular alrededor del centro de la galaxia, de radio  $r$  y velocidad tangencial  $v$ . Por esta razón también consideramos que están sujetos a una aceleración centrípeta (ec. 1.3). Observacionalmente sabemos que para todas las galaxias espirales, incluida la Vía Láctea, la distribución de brillo superficial del disco galáctico tiene un perfil de luminosidad que decae exponencialmente con el radio. Suponiendo cocientes  $M/L$  relativamente constantes, la masa de la galaxia está fuertemente concentrada hacia el centro de

la misma por lo que podemos considerar que el valor de la masa es aproximadamente constante con el radio. Si nos alejamos del centro de la galaxia, es decir, en la ecuación (2.2) a radios grandes el término newtoniano (primer término) se va más rápidamente a cero y entonces la fuerza gravitacional estaría dada principalmente por el segundo término.

Como primera aproximación para ajustar el valor de  $G_2$ , despreciamos el primer término en la ecuación (2.2) y usamos valores observados en la parte exterior del disco galáctico de la Vía Láctea ( $M \sim 0.5 \times 10^{11} - 1.0 \times 10^{11} M_\odot$ ) con una velocidad tangencial de  $v = 220 \text{Kms}^{-1}$  y una masa de  $M = 0.5 \times 10^{11} M_\odot$  se obtiene  $G_2 = 1,8 \times 10^{-34} M_\odot^{-1/2} s^{-2} \text{kpc}^2$ , mientras que usando una  $v = 220 \text{Kms}^{-1}$  y  $M = 1.0 \times 10^{11} M_\odot$  se obtiene  $G_2 = 1,28 \times 10^{-34} M_\odot^{-1/2} s^{-2} \text{kpc}^2$ . En una segunda aproximación para ajustar  $G_2$  utilizando los dos términos de la ecuación (2.2) consideraremos distintos valores de las velocidades a distintos radios pero los mismos valores para la masa de la Vía Láctea. Suponemos un movimiento circular de las estrellas en el disco galáctico y de la ecuación (2.2) sabemos que  $G_2$  está dada por:

$$G_2 = \frac{GM^{1/2}}{r} - \frac{v^2}{M^{1/2}}. \quad (2.21)$$

De esta ecuación obtenemos la siguiente tabla (2.3), de donde obtenemos una calibración de  $G_2$ , tomando en cuenta rangos máximos de incertidumbre en las estimaciones de la masa bariónica de la Vía Láctea.

$v(\text{km/s})$	$r(\text{kpc})$	$G_2(M= 0.5 \times 10^{11} M_\odot)$	$G_2(M= 1 \times 10^{11} M_\odot)$
205	15	$1.3003 \times 10^{-34}$	$0.44313 \times 10^{-34}$
196	30	$1.4676 \times 10^{-34}$	$0.79957 \times 10^{-34}$
196	60	$1.6359 \times 10^{-34}$	$1.0377 \times 10^{-34}$
196	90	$1.6921 \times 10^{-34}$	$1.1171 \times 10^{-34}$

Tabla 2.3: Valores obtenidos para  $G_2$ .

Los valores máximo y mínimo de  $G_2$  obtenidos en la tabla (2.3) fueron utilizados en la sección (2.1) para probar que el segundo término de la fuerza de gravedad de la ecuación (2.2),

$G_2M^{1/2}/r$ , es del orden de la incertidumbre del cuadrado de la velocidad de traslación de los planetas del sistema solar,  $\delta v^2$ , calculada con la fuerza de Newton  $F_N = GM/r^2$ . Específicamente:  $G_2M^{1/2} \sim \delta v^2$ , lo que significa que el incluir el segundo término en la fuerza de gravitación no tiene efectos observables a escala del sistema solar.

## 2.3. M31

En el caso de la galaxia M31, también conocida como Andrómeda, tenemos los datos observacionales del brillo superficial del bulbo y del disco en función del radio y los datos observacionales de la densidad superficial como función del radio de gas atómico y molecular. Con estos datos (amablemente suministrados por L. Chemin) podemos obtener la curva de rotación de M31 bajo la ley de gravedad propuesta para compararla con la curva observada por L. Chemin como se muestra en la figura (2.2).

Para sacar la curva de rotación obtuvimos primero la densidad superficial de luminosidad del disco y del bulbo con la siguiente relación (Binney & Tremaine 2008)

$$L = 10^{\frac{m - 5 \log_{10}(d/10pc)}{-2.5}}, \quad (2.22)$$

donde L tiene como unidades  $\frac{L_{\odot}}{\text{arcsec}^2}$  pero se hace un cambio de variable de  $\text{arcsec}^2$  a  $\text{pc}^2$ ,  $d$  es la distancia a la galaxia y  $m$  es el brillo superficial (magnitud aparente). Con esto obtenemos los perfiles de luz para el bulbo (Fig. 2.3) y el disco (Fig. 2.4), que son básicamente una relación de la luminosidad como función del radio.

El bulbo de una galaxia se entiende como la parte central de una galaxia donde se concentra la mayor luminosidad, en el perfil de luz del bulbo (Fig. 2.3) vemos que toda la luminosidad se concentra entre 0 y 5  $kpc$ , y en el disco (Fig. 2.4) encontramos la luminosidad concentrada entre 0 y 25  $kpc$ .

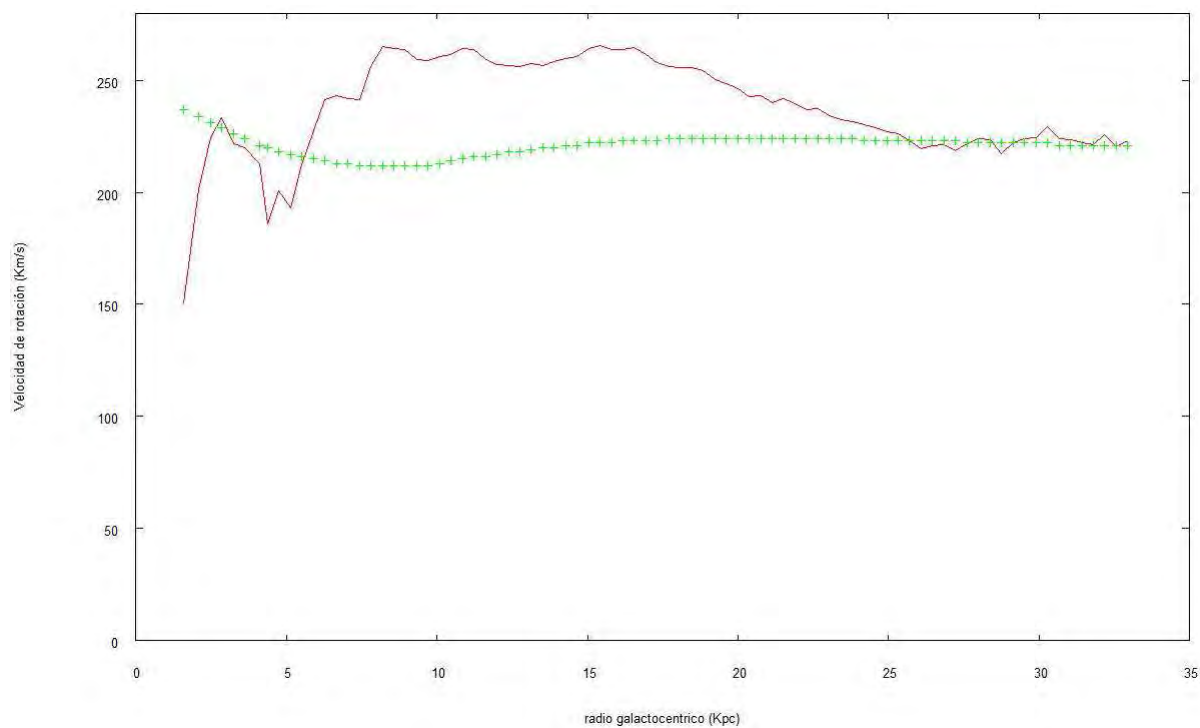


Figura 2.2: Curva de rotación de M31. La línea continua corresponde a la curva observada por L. Chemin, la curva con + corresponde a la curva calculada con la ley de gravedad propuesta en el presente trabajo.

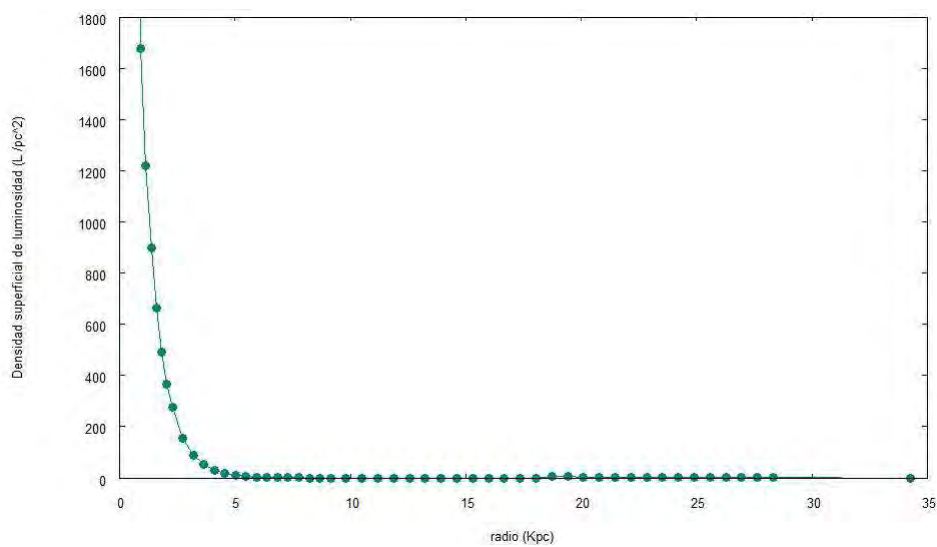


Figura 2.3: Densidad de luminosidad como función del radio del bulbo de M31.

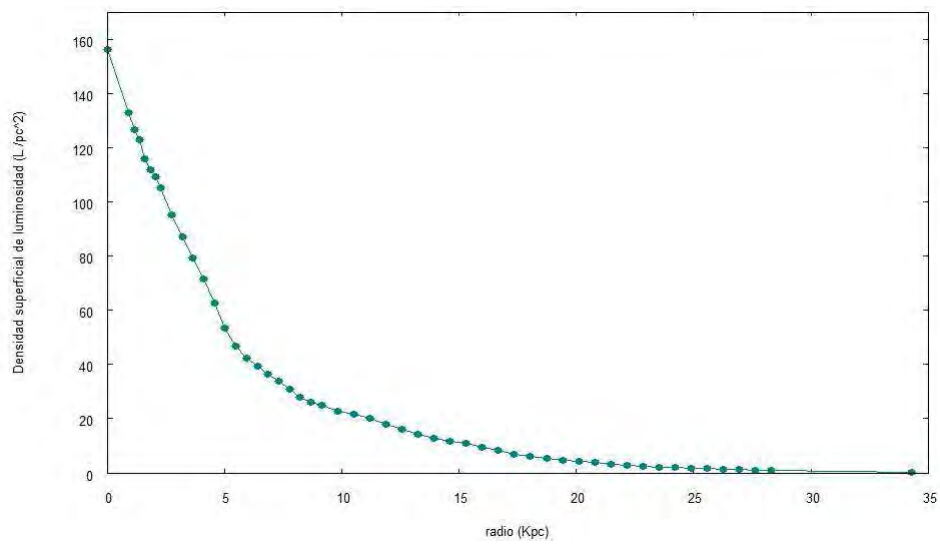


Figura 2.4: Luminosidad como función del radio  $r$  del disco de M31.

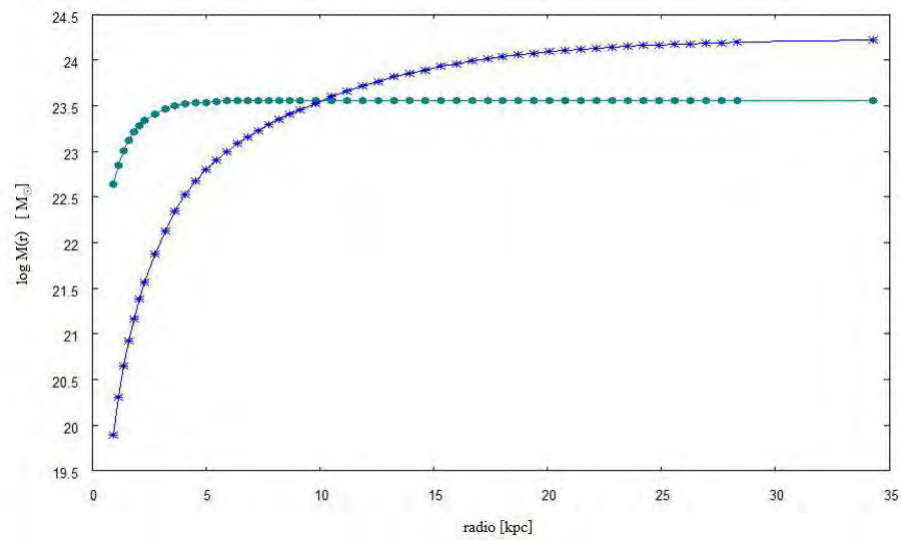


Figura 2.5: Masa como función del radio del bulbo, ●, y del disco, \*, de M31.

Dados los perfiles de luminosidad para el bulbo y el disco podemos obtener una densidad superficial de masa ( $\Sigma$ ) usando valores específicos de los cocientes Masa–Luminosidad. En este caso usamos un valor de  $M/L = 1$  para el disco y de  $M/L = 5$  para el bulbo, tomamos además una interpolación lineal de radios fijos para todos los componentes y de esta forma obtener la masa  $M(r)$  como función del radio, para el bulbo y el disco (Fig. 2.5).

Para el gas molecular y gas atómico tenemos la densidad superficial como función del radio (Fig. 2.6).

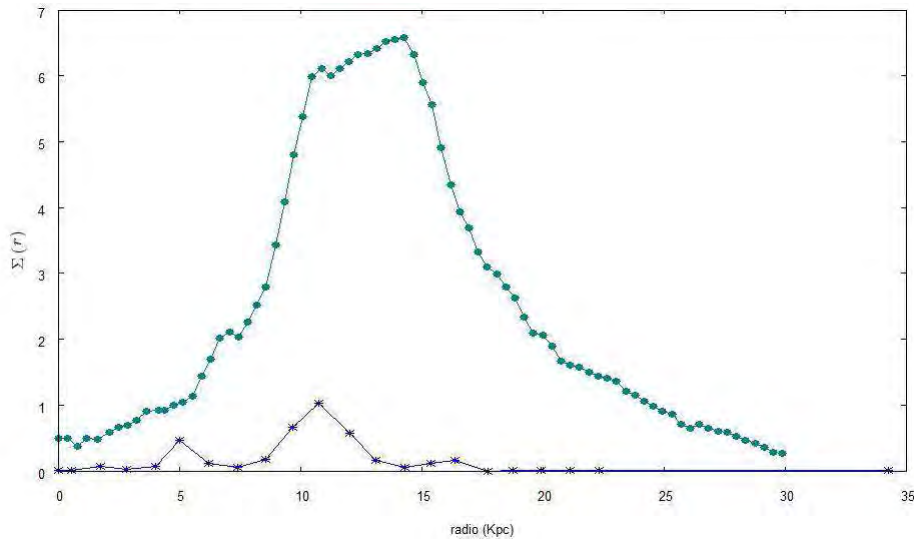


Figura 2.6: Densidad superficial  $\Sigma$  como función del radio del gas atómico, ● y gas molecular, \*, en M31.

Usando los valores de  $\Sigma$  como función del radio  $r$  se hizo un programa que hiciera la integración numérica para obtener la masa  $M(r)$  interna a una superficie gaussiana esférica con centro en el centro de la galaxia, a distintos radios. Resultando los perfiles de masa para el gas atómico y gas molecular (fig. 2.7).

Por último calculamos la velocidad de rotación  $v$  de la ecuación (2.19) para cada una de las componentes, obteniendo la velocidad de todo el sistema como la suma cuadrática de las velocidades:

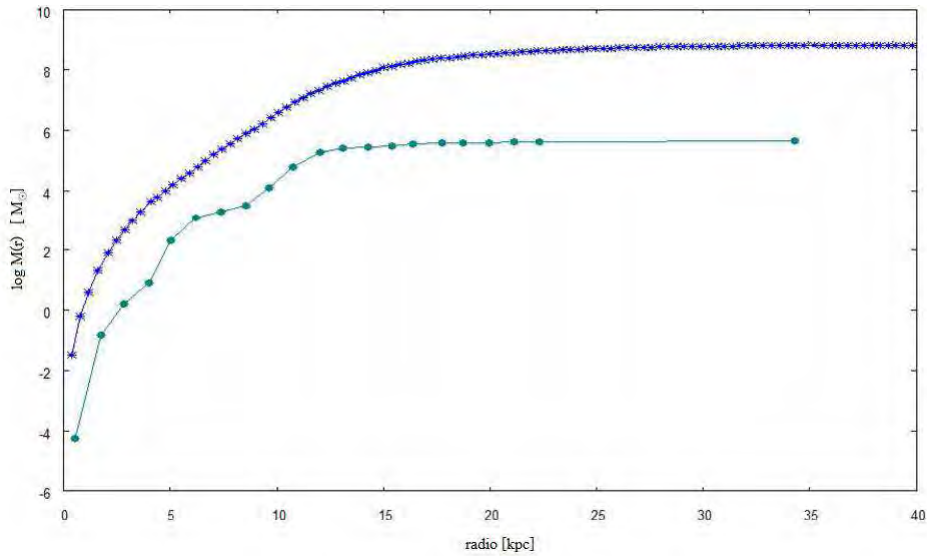


Figura 2.7: Masa como función del radio del gas atómico, \*, y gas molecular, ●, en M31.

$$v_{total} = \left( v^2_{disco} + v^2_{bulbo} + v^2_{gasmol} + v^2_{gasatom} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

Estamos suponiendo que no existe la materia oscura y por lo tanto la masa debe ser congruente con las curvas de rotación. En la gráfica (2.8) se muestra la velocidad de rotación de cada una de las componentes del sistema: bulbo, disco, gas atómico y gas molecular, también mostramos la curva de rotación que resultó de la ecuación (2.23) y la curva correspondiente a los datos de L. Chemin.

En la figura (2.8) se observa que la curva de rotación correspondiente a los datos observacionales y la curva que resulta del ajuste que se hizo con la aceleración de la ecuación (2.2) se asemejan a partir de 25 Kpc. Una galaxia gigante como M31 tiene un radio de  $\sim 100 - 200 \text{ kpc}$  aproximadamente y no es una galaxia de disco común y corriente, es una galaxia gigante y si se ve desde afuera, la zona de los 25 kpc internos es pequeña con respecto al tamaño total de la galaxia M31. Por esto consideramos que la aceleración propuesta sí describe bien este sistema.

La “joroba” que se observa entre los 5 y 20kpc no se puede ajustar con ningún modelo



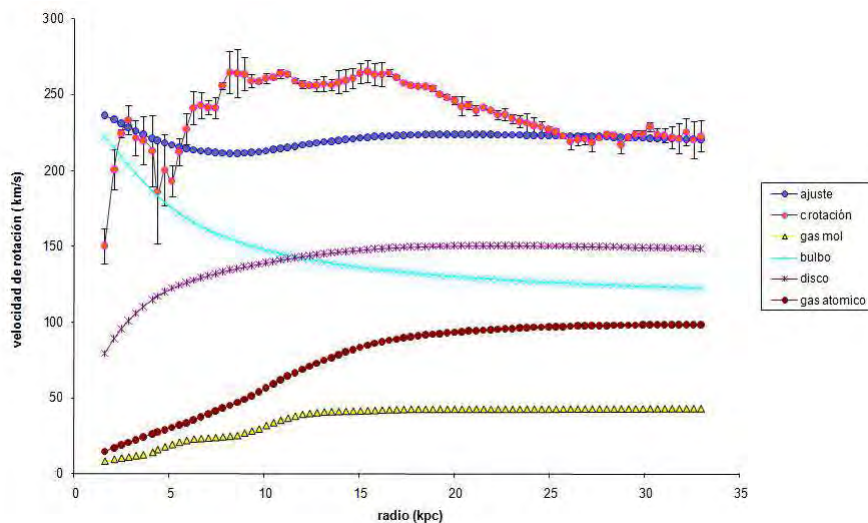


Figura 2.8: Se muestran las Curvas de rotación de M31 correspondientes a los datos observados por L. Chemin y al ajuste usando la ley de gravedad propuesta en este trabajo. También se muestran las curvas de rotación de las componentes de M31: bulbo, disco, gas atómico y gas molecular.

dinámico y muy probablemente sea evidencia de la falta de correlación entre la curva de rotación medida y la distribución de la masa dinámica de M31 (efectos hidrodinámicos, movimientos circulares, desajustes entre el lado izquierdo y el lado derecho de la curva de rotación, etc). En la gráfica donde se muestra la densidad superficial de los gases (fig. 2.6) observamos un anillo entre 8 y 20  $kpc$  que coincide con el rango del radio en  $kpc$  donde se forma la “joroba” de la curva observacional.

Para el caso del disco y los gases existe un cierto error debido a que se consideró simetría esférica, sin embargo comparando la curva de rotación de un disco infinitamente delgado y la curva de rotación asociada a una esfera con el mismo perfil de masa  $M(r)$  vemos que este error es menos del 10% (Binney & Tremaine 2008). Esto es una cota máxima al error ya que el disco no es infinitamente delgado sino que tiene un cierto ancho. Con respecto al término de MOND podemos esperar un error similarmente pequeño dada la simetría del problema e.g. los teoremas de Newton para distribuciones esféricas también se cumple.

## Capítulo 3

# Derivación de la Ecuación de Equilibrio Hidrostático

Existe un número grande de galaxias satélites de baja luminosidad alrededor de la Vía Láctea. Estas galaxias son clasificadas como las galaxias enanas esferoidales, denotadas como dSph (dwarf spheroidal galaxies). Nos referiremos al *grupo local de las dSph* para especificar el grupo de galaxias satélites de la Vía Láctea ya que también existe un grupo de enanas esferoidales en M31. Aunque son muchas las dSph detectadas, en realidad son pocas las que han sido bien estudiadas. Estas galaxias se encuentran a una distancia  $\sim 20 - 200$  kpc medida desde el centro de la Vía Láctea y tienen una masa de estrellas de  $\sim 10^{6-7} M_{\odot}$ . Cuando las dSph son analizadas con gravitación newtoniana se encuentra que los cocientes M/L para estas galaxias son muy grandes con respecto a los cocientes M/L de una galaxia promedio.

Se ha encontrado que están arriba de  $> \sim 100 M_{\odot}/L_{\odot}$ . Esto implica que necesitan materia oscura y convierte a estos sistemas en uno de los principales objetos de estudio para inferencias de Materia Oscura e.g. Sanchez-Salcedo & Hernandez 2007, Angus 2007. Cuando son analizadas bajo MOND en algunos ajustes se necesitan  $a_0$  diferentes a las propuestas (Lokas 2002) o incluso se puede seguir necesitando materia oscura aún en MOND.

---

La propuesta que se hace en este trabajo pretende describir mejor las observaciones de cómo lo hace MOND. Los sistemas que presentan más problemas en MOND son precisamente las galaxias enanas esferoidales (dSph), por lo que probaremos rigurosamente la fuerza de gravedad que proponemos. Las dSph son sistemas auto-gravitantes con simetría esférica, nos basaremos en configuraciones de equilibrio para conjuntos auto-gravitantes de estrellas.

Comenzaremos observando la validez de los teoremas de Newton para distribuciones esféricamente simétricas de materia, es decir, la fuerza que siente un observador en el interior de una cáscara esférica desaparece y la contribución del campo en puntos exteriores en la esfera es el mismo que se produciría si toda la masa estuviera concentrada en el centro. Esto funciona en la propuesta que se presenta aquí, ecuación (2.1). Los dos teoremas dependen del hecho de que el numerador del término newtoniano de la ecuación (2.2) para una fracción fija del ángulo sólido de una cáscara delgada aumenta con el cuadrado de la distancia a la cáscara, como lo hace el denominador. Para el segundo término de la ecuación, el numerador se escala como  $R$  porque es proporcional a  $M^{1/2}$ , tal como el denominador, asegurando la validez de los Teoremas de Newton para distribuciones de masa esféricas.

Un gas politropico, donde la presión depende de la densidad, se define por una ecuación de estado:

$$p = K\rho^\gamma, \tag{3.1}$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad y  $\gamma$  es la razón de calores específicos.

Así la ecuación de equilibrio hidrostático para una esfera autogravitante de un gas politropico es (ec. 3.2),

$$\frac{dp}{dr} = \rho\nabla(\phi). \tag{3.2}$$

Sustituimos la ec. (3.1) en la ec. (3.2) para obtener

---


$$K\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr} = -\rho\nabla\phi = -\rho\left(G\frac{M}{r^2} + \frac{(Ga_0M)^{1/2}}{r}\right) \quad (3.3)$$

$$K\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr} = -\left(G\frac{M}{r^2} + \frac{(Ga_0M)^{1/2}}{r}\right). \quad (3.4)$$

Tomamos la ecuación de continuidad (3.5)

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (3.5)$$

la cual podemos escribir equivalentemente como:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr}.$$

Ahora sustituimos en (3.4) la ecuación de continuidad (ec. 3.5) para obtener

$$K\gamma\left(\frac{1}{4\pi r^2}\right)^{\gamma-2} \frac{dM(r)^{\gamma-2}}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr}\right) = -\left(G\frac{M}{r^2} + \frac{(Ga_0M)^{1/2}}{r}\right). \quad (3.6)$$

Desarrollando la derivada resulta

$$K\gamma\left(\frac{1}{4\pi r^2}\right)^{\gamma-2} \frac{dM(r)^{\gamma-2}}{dr} \left(\frac{-2}{4\pi r^3} \frac{dM(r)}{dr} + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d^2M(r)}{dr^2}\right) = -\left(G\frac{M}{r^2} + \frac{(Ga_0M)^{1/2}}{r}\right). \quad (3.7)$$

Esta ecuación será resuelta numéricamente. El objetivo de la ecuación (3.7) es obtener una relación de la Masa como función del radio y usar la masa para obtener los cocientes M/L de las galaxias enanas esferoidales. Hemos utilizado la correspondencia entre configuraciones politropicas de equilibrio hidrostático y sistemas estelares autogravitantes, la cual no depende de la forma de la ecuación de Poisson, y está asegurada si se fijan las siguientes condiciones (Binney & Tremaine 2008):

---


$$K = \sigma^2 \quad y \quad \gamma = 1$$

Con esto podemos reescribir la ecuación (3.7) como

$$\sigma^2 \left( \frac{1}{4\pi r^2} \right)^{-1} \frac{dM(r)}{dr}^{-1} \left( \frac{-2}{4\pi r^3} \frac{dM(r)}{dr} + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d^2 M(r)}{dr^2} \right) = - \left( G \frac{M}{r^2} + \frac{(Ga_0 M)^{1/2}}{r} \right) \quad (3.8)$$

$$\sigma^2 \left[ \frac{-2}{r} + \frac{d^2 M(r)}{dr^2} \frac{dr}{dM(r)} \right] = - \left( G \frac{M}{r^2} + \frac{(Ga_0 M)^{1/2}}{r} \right). \quad (3.9)$$

Obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden para  $M(r)$  donde,  $\sigma = cte$  es la dispersión de velocidad isotrópica para una población de estrellas, y tomando condiciones a la frontera  $M(r) \rightarrow 0$  y  $dM/dr = 4\pi r^2 \rho$  para  $r \rightarrow 0$ , una densidad central  $\rho_0 = cte$ , podemos resolver la ecuación (3.9) numéricamente.

Resolvimos la ec. (3.9) con el método de diferencias finitas de Euler, con una resolución de diez mil puntos. Verificamos la convergencia de la solución aumentando la resolución con un factor de 3 y confirmando que se obtienen los mismos resultados.

Además notamos que ignorando el primer término del lado derecho de la ecuación (3.9), el comportamiento límite de  $M(r)$  para valores grandes de  $r$  cuando el término de MOND domina es como  $M(r) \rightarrow M_{tot}$ . Por lo tanto, podemos contar con soluciones completas de la ecuación (3.9) que produzcan perfiles de densidad de volumen caracterizados por una masa total finita. En contraste con lo que pasaría en sistemas newtonianos, donde las configuraciones isotérmicas tienen una masa total infinita, bajo la ley de gravedad propuesta, configuraciones isotérmicas autogravitantes serán naturalmente acotadas en sus masas y tendrán un radio medio total bien definido y finito,  $r_{hm}$ , para caracterizar las configuraciones de equilibrio resultantes. Se espera

que la masa total de la configuración vaya como  $\sigma^4$ , como en el caso de MOND, y de la escala dimensional de masa  $\langle M \rangle \propto \sigma^4 (G a_0)^{1/2}$ , se esperaría llegar a una relación análoga a la relación Tully-Fisher para sistemas galácticos esferoidales.

En la figura (3.1) se muestra una gráfica de la variación de la densidad,  $\rho$ , como función del radio,  $R$ , para una solución de la muestra numérica a la ecuación (3.9), para  $\sigma = 7 \text{ km s}^{-1}$  y  $\rho_0 = 0,1 M_\odot \text{ pc}^{-3}$ . Obtenemos como resultado una masa total final bien definida,  $M_{tot}$ , de  $3 \times 10^6 M_\odot$ , y un radio final a media masa de  $0,39 \text{ kpc}$ . Vemos que el decaimiento esperado del perfil de densidad a grandes radios es más rápido que  $r^{-3}$ . Este tipo de perfiles de densidad se usarán para modelar el sistema de las galaxias enanas esferoidales.

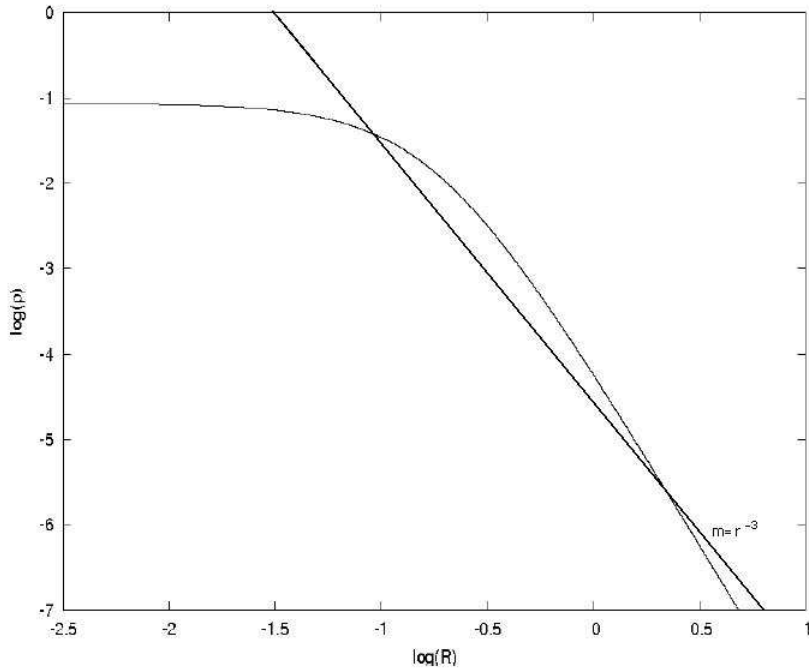


Figura 3.1: Un perfil isotérmico de la densidad de equilibrio, para  $\rho_0 = 0,1 M_\odot \text{ pc}^{-3}$  y  $\sigma = 7 \text{ km/s}$ , resultando en una masa total de  $3 \times 10^6 M_\odot \text{ pc}^{-3}$ . La distancia está en unidades de kpc. La línea recta tiene una pendiente de  $r^{-3}$



# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. El grupo local de las galaxias enanas esferoidales

Según lo que discutimos en el capítulo (3), una vez que se dan los valores para la dispersión de la velocidad,  $\sigma$ , y la densidad central,  $\rho_0$ , la solución de la ecuación (3.9) nos da perfiles completos de la densidad de equilibrio hidrostático.

Para modelar ahora las galaxias enanas esferoidales (dSph) tomamos valores que ya han sido reportados para la dispersión de velocidad de estos sistemas, que fijan por lo tanto uno de los dos parámetros necesarios para el modelo. El perfil de densidad que obtuvimos en el capítulo (3) está integrado sobre una dimensión, para darnos un perfil de densidad superficial del cual se mide el radio medio total proyectado. Esto nos da una segunda restricción. Ahora deberemos variar los valores de la densidad central de entrada  $\rho_0$  hasta conseguir que el radio a media masa  $r_{hm}$  concuerde con los valores del radio a media luz  $r_{hl}$  ya reportados para las dSph. Los valores observacionales de la dispersión de velocidad y el radio a media luz  $r_{hl}$  de una cierta galaxia dSph determinan completamente el modelo. Dividiendo la masa total  $M_{tot}$  para el modelo resultante por la luminosidad total  $L_{tot}$  de las dSph nos da los cocientes M/L para el modelo.



---

## 4.1 El grupo local de las galaxias enanas esferoidales

---

Los valores de los radios a media luz y las luminosidades totales las tomamos de Gilmore et al.(2007), quien resume los resultados publicados para las referencias dadas en la tabla (4.1), excepto para Ursa Minor, donde tomamos los valores revisados para  $L_{tot}$  de Palma et al (2003).

Aunque otros sistemas estelares muestran perfiles de dispersión de velocidad que generalmente decaen conforme incrementa el radio, por ejemplo cúmulos globulares, el caso para galaxias dSph es diferente, con estos sistemas mostrando esencialmente perfiles de dispersión de velocidad planos. En casos en que se observa que el perfil de dispersión de velocidad baja, esto comunmente ocurre hacia los bordes de la galaxia, afectando sólo un muy pequeño porcentaje de la masa total del sistema. La constancia de estos perfiles de dispersiones de velocidades observados valida el uso de la ecuación (3.9) bajo condiciones isotérmicas para el modelo local de las dSph, bajo la ley de gravedad propuesta.

Los valores de  $\sigma$  los tomamos al ajustar valores constantes a los perfiles  $\sigma$  de Angus (2008), los cuales son a buena aproximación planos, con la excepción de Ursa Minor que muestra un cierto decrecimiento al aumentar la distancia radial. Esta galaxia también muestra estructura interna en el espacio fase en radios pequeños, la cual puede explicar en gran parte el aumento de la  $\sigma$  hacia el centro. El valor que tomamos para  $\sigma$  es un valor representativo de la situación al rededor del radio a media luz. Si una dependencia radial de  $\sigma$  en Ursa Minor fuera confirmada, este sistema debería ser excluido de la muestra pues entraría en conflicto con el modelo isotérmico que nosotros tomamos en este trabajo.

La tabla (4.1) muestra los resultados para las ocho galaxias dSph mejor estudiadas. Los valores de los cocientes M/L que obtuvimos son comparables con los que obtiene Angus (2008) para los mismos sistemas,  $(M/L)_A$  en la tabla, pero se observa un decrecimiento, consistente con incluir otro término a la fuerza: la componente Newtoniana, la cual reduce los cocientes M/L. En general, los valores del parámetro  $\langle X \rangle$  encontrados, calculados del modelo resultante como  $(G_2/G)(2^{1/2}R_{hl}/M_{tot}^{1/2})$  explican por qué la adición del término Newtoniano es requerida para explicar completamente la dinámica. La amplia gama de valores de  $\langle X \rangle$  mostrados en la

---

## 4.1 El grupo local de las galaxias enanas esferoidales

---

tabla (4.1), explica por que a veces una diferente  $a_0$  se ha encontrado para varios dSph, cuando se ajusta la dinámica con funciones  $\mu$  MOND que converjan rápidamente al límite  $g = g_M$ .

El caso donde el efecto del segundo término en la ecuación (2.3) es más grande, es el de Draco, donde la configuración compacta y los valores de  $\sigma$  relativamente altos permiten que el término Newtoniano influya, llevando a una disminución importante del cociente (M/L) inferido de entre 8.1 y 30.9, con respecto al de Angus (2008) entre 22.6 y 72.9 para una función  $\mu(x)$  en MOND que tiende muy rápido al límite  $g = g_M$ . Con la posible excepción de Fornax y Sculptor, el valor del parámetro  $\langle X \rangle$  para Draco, es el más bajo de la muestra.

Los intervalos de confianza  $(1 - \sigma)$  de nuestros resultados son límites inferiores, ya que su cálculo incluye sólo las incertidumbres en los valores asignados a  $\sigma$ , no los errores observacionales en las luminosidades totales y radios a media masa. La libertad en el ajuste funcional del perfil de luz aumentaría ligeramente nuestros intervalos de confianza, e.g. los valores de  $r_{hl}$  reportados para Ursa Minor, Fornax y Sculptor son simplemente límites inferiores, para estas galaxias la cantidad disponible es el radio de core para ajustes a un perfil de King. Esto último es simplemente un efecto a segundo orden, nuestros valores M/L no son muy sensibles a los valores usados de  $r_{hl}$  por la forma en que son obtenidos. Según lo esperado, el determinante principal de la masa total resultante de la solución numérica de la ecuación (3.9) es la entrada de  $\sigma$ . Encontramos que según lo esperado en el régimen de MOND, existe una fuerte correlación, con el escalamiento resultante para todas las galaxias descrito por:

$$M_{tot} = \frac{(5,5\sigma^2)^2}{a_0 G} \quad (4.1)$$

Podemos ver esto como una extensión de la relación de Tully-Fisher a las escalas galácticas más pequeñas, una consecuencia natural de la ley de gravedad que estamos usando. Considerando los valores grandes de M/L naturales para poblaciones estelares viejas, e.g. Queloz et al. (1995), Romanowsky et al. (2003) encuentran cocientes  $M/L \sim 7 - 8$ . Los nuevos resultados

## 4.1 El grupo local de las galaxias enanas esferoidales

Galaxia	$L_{tot} \times 10^5$	$R_{hl}$	$\sigma$	$(M/L)_A$	$\langle X \rangle$	(M/L)	Edad
	$L_{odot}$	kpc	km/s				Gyr
Carina	4.3	0.290	$7 \pm 1.8$	$5.6^{+5.2}_{-2.9}$	7	$6.8^{8.3}_{-4.6}$	3
Draco	2.6	0.230	$8 \pm 1.5$	$43.9^{+29}_{19.3}$	4.1	$17.0^{+13.9}_{-8.9}$	10
LeoI	48.0	0.330	$8 \pm 1.2$	$0.7^{0.65}_{0.3}$	5.7	$1.0^{+0.6}_{-0.44}$	2
Sextans	5.0	0.630	$7 \pm 1.0$	$9.2^{+5.3}_{3.0}$	13.4	$6.3^{+4.2}_{-2.8}$	(2–6)
Fornax	150.0	0.400	$12 \pm 1.3$	$1.4^{+0.45}_{-0.35}$	$> 3.4$	$1.4^{+0.6}_{-0.4}$	(2 – 3)
Sculptor	22.0	0.160	$9.5 \pm 1.7$	$3.7^{+2.2}_{1.4}$	$> 2.2$	$3.4^{2.1}_{-0.7}$	$> 5$
LeoII	7.0	0.185	$6 \pm 1.4$	$1.85^{+2}_{1.1}$	5.5	$2.3^{+2.4}_{.04}$	6.5
Ursa Minor	5.8	0.300	$8 \pm 2$	$5.8^{+6.5}_{3.6}$	$> 5.3$	$8.0^{+9.8}_{-5.1}$	12

Tabla 4.1: Propiedades básicas y cocientes (M/L) resultantes para la muestra de las galaxias enanas esferoidales (dSph) para  $G_2 = 1.40 \times 10^{-34} M_{\odot}^{-1/2} s^{-2} kpc^2$ . En la columna  $(M/L)_A$  se muestran los valores calculados por Angus (2008) bajo MOND estándar y en la columna  $M/L$  están los valores resultantes del modelo que se propone en este trabajo. Las luminosidades totales (en el visible) y los radios a media luz  $r_{hl}$  fueron tomados de Wilkinson et al. (2006), Wilkinson et al. (2004), Koch et al. (2007), Kleyna et al. (2004), Walker et al. (2006), Mateo (1998), Coleman et al. (2007), Irwin & Hatzidimitriou (1995). Las galaxias en la tabla fueron tomadas de Gilmore et al. (2007) en ese orden. Las velocidades de dispersión están ajustadas a un valor constante a los datos de Angus (2008).  $\langle X \rangle$  nos da el valor promedio del parámetro  $X$  como se definió en la sección 2, la cual mide la importancia relativa de los términos Newtoniano y MONDiano en la ecuación (2.3). La última columna muestra una estimación de la edad de la población estelar más joven presente en cada uno de los sistemas, permitiendo una interpretación de los valores inferidos  $M/L$  en términos de evolución estelar. Los datos de la edad fueron tomados para Carina, Ursa Minor, LeoI, LeoII de Hernandez et al. (2000), para Fornax de Coleman & de Jong (2008), para Draco de Aparicio et al. (2001), para Sextans de Lee et al. (2003) y para Sculptor de Babusiaux et al. (2005).

---

## 4.1 El grupo local de las galaxias enanas esferoidales

---

que obtuvimos ahora están en el límite para ser compatibles con los cocientes  $M/L$  para poblaciones estelares viejas, para todas las galaxias dSph bien estudiadas. Esto sucede para todas las galaxias excepto para Draco que apenas es compatible, en el nivel  $1 - \sigma$ , para nuestros límites inferiores en los intervalos de confianza. Tenemos una ley de gravedad que para configuraciones de equilibrio isotérmico puede explicar la dinámica observada para las galaxias dSph locales, sin la necesidad de usar Materia Oscura. De los resultados que acabamos de mencionar arriba, encontramos una consistencia en la comparación de los cocientes  $M/L$  y la edad de las poblaciones estelares más jóvenes presentes en cada una de las galaxias, como se infiere de la modelación directa de los CDMs observados de las galaxias en cuestión, dada en la última columna de la tabla (4.1).

Los valores más altos para nuestros cocientes ( $M/L$ ), para Ursa Minor y Draco, coinciden con las galaxias que no muestran población estelar más joven de 10 Gyr, las galaxias más viejas en la muestra, mientras que los valores más bajos de  $M/L$  son obtenidos para Leo I y Fornax, las galaxias más jóvenes en la muestra con poblaciones estelares con edades menores a 2 Gyr. El resto de la muestra son galaxias que muestran sus estrellas más jóvenes en edades intermedias a los valores mencionados y para las que encontramos también cocientes  $M/L$  con valores intermedios. La interpretación de la dinámica bajo la ley de gravedad propuesta está de acuerdo con el incremento natural en los cocientes  $M/L$  de poblaciones estelares debido al envejecimiento de estrellas y a la acumulación de agujeros negros y enanas blancas.

Mostraremos el perfil resultante de densidad de masa superficial proyectado para el modelo de la galaxia Leo II, normalizado por la luminosidad total del sistema, para construir el perfil de brillo superficial determinado por la ley de gravedad propuesta para un sistema de equilibrio isotérmico teniendo una dispersión de velocidad y un  $r_{hl}$  proyectado igual a los observados para Leo II (suponiendo que  $r_{hm}$  es equivalente al  $r_{hl}$  observado).

En la figura (4.1) está graficado el perfil de luz observado de densidad superficial para Leo II, junto con el correspondiente perfil del modelo, hasta el radio donde las medidas caen por

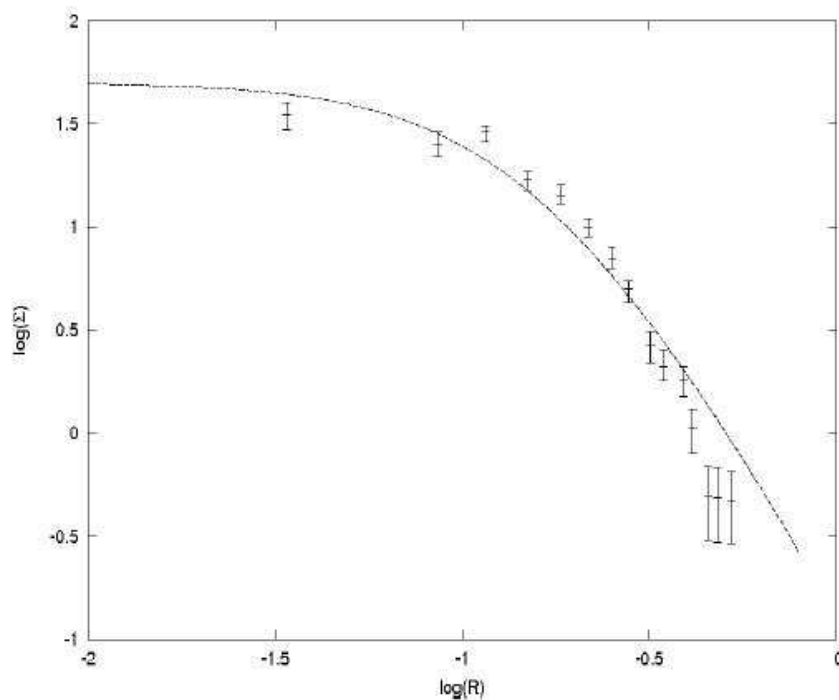


Figura 4.1: Comparación de nuestro perfil proyectado de densidad superficial para una solución de equilibrio isotérmico a la ecuación (3.9), tomando los valores observacionales de  $\sigma$  y  $r_{hm}$  proyectado para Leo II. Para comprar, presentamos el perfil de densidad superficial de cuenta de estrellas contadas de Leo II por Coleman et al. (2007). Ambos perfiles fueron normalizados a la misma luminosidad total.

debajo del ruido de fondo , normalizados a la misma luminosidad total. Las barras de error que se muestran en la figura (4.1) tomadas de Coleman et. al. (2007), son estimaciones para los intervalos de confianza para hacer la comparación de nuestro perfil con el de Coleman (2007).

Notamos que las barras de error de Coleman et al. (2007), dadas en la Figura (4.1), son estimaciones inferiores a los intervalos de confianza para comparar con nuestro perfil. Los errores se refieren sólo a las cuentas de estrellas medidas y no al perfil de densidad superficial. Observamos que existe un buen ajuste que demuestra que el modelo propuesto es bueno, consistente con la dinámica y con la distribución de luz tanto integral como con resolución espacial para las galaxias dSph bien estudiadas.

### 4.1.1. Relaciones de Escala

Se muestra en la figura (4.2) el comportamiento de las configuraciones de equilibrio isotérmico que resolvimos en términos del  $r_{hm}$  resultante proyectado como una función del valor de entrada de  $\rho_0$  y con un valor constante de  $\sigma = 10 \text{ km/s}$ . Una característica que podemos remarcar de la figura (4.2) es que la curva decrece conforme incrementa la  $\rho_0$ , y cuando  $\rho_0$  alcanza un valor de  $0,3 M_{\odot}pc^{-3}$ , el radio  $r_{hl}$  se estanca en un valor aproximadamente constante de 150 pc, del cual ya no baja.

Esto se reproduce cualitativamente para todos los valores de  $\sigma$  en el rango de los valores observados para las galaxias dSph locales, encontrando pequeños cambios en los valores mínimos de  $r_{hm}$ . Esto se ve interesante porque ofrece una explicación natural para el hecho de que las galaxias dSph locales muestran valores mínimos de  $r_{hl}$  proyectados muy bajos de aproximadamente 150 pc. Estos modelos para las galaxias dSph locales están restringidos por los valores observacionales de  $\sigma$  y  $r_{hl}$  que se encuentran dentro de la región plana del espacio  $r_{hm}$  vs.  $\rho_0$ .

Ahora para entender los valores newtonianos de (M/L) asignados a las galaxias dSph locales y los escalamientos que muestran con la luminosidad total,  $L_{tot}$ , o magnitud absoluta,  $M_v$ , vemos que los valores newtonianos asignados a los cocientes (M/L) nunca están lejos de

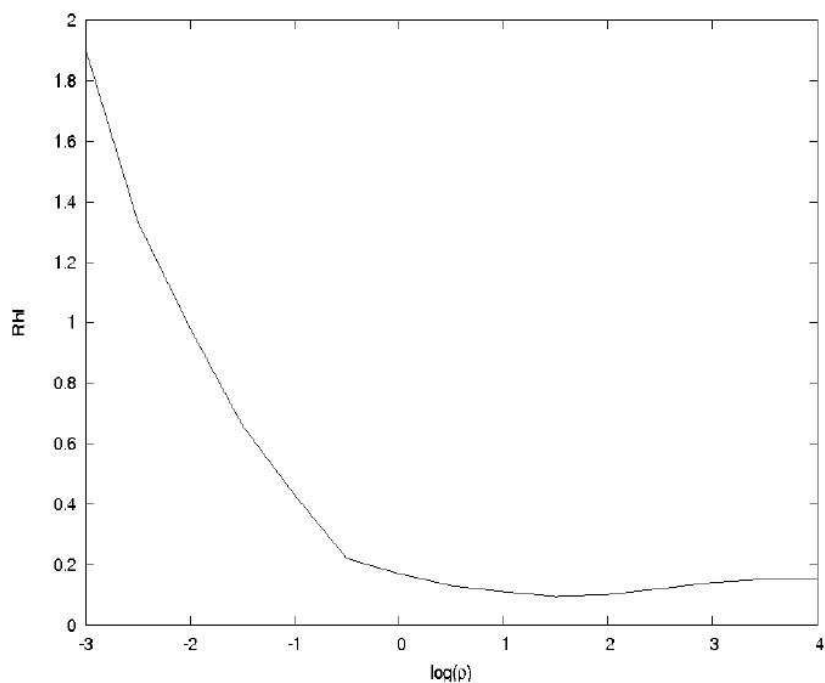


Figura 4.2: Dependencia del radio proyectado a media masa resultante en kpc, contra la densidad central asumida en  $M_{\odot}pc^{-3}$ , para una configuración de equilibrio isotérmico bajo la ley de gravedad propuesta, con una  $\sigma$  fija de  $10 \text{ km/s}$ . Es evidente una amplia región donde el  $r_{hm}$  permanece casi constante, precisamente al nivel donde están los valores del  $r_{hl}$  para las galaxias dSph observadas, sistemas que tienen valores típicos de  $\sigma \simeq 10 \text{ km/s}$ .

$$(M/L)_N = \left( \frac{10\sigma^2 r_{hl}}{G} \right) \left( \frac{1}{L_{tot}} \right). \quad (4.2)$$

Tomando nuestros resultados dados en la sección (3) o tomando alternativamente como un hecho empírico el  $r_{hl}$  observado de aproximadamente 300  $pc$ , podemos evaluar la ecuación anterior a primer orden en  $r_{hl} = 0,3$ . Además podemos ver el caso de una población estelar vieja media tomando un valor constante de  $M/L = 5$  como un valor representativo para las galaxias dSph locales y reemplazando  $\sigma^2$  por el valor correspondiente de la ecuación (4.2) obtenemos

$$(M/L)_N = \left( \frac{3\sqrt{5}}{5,5} \right) \left( \frac{G_2}{G} \right) \left( \frac{1}{L_{tot}} \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Sacando el logaritmo de esta ecuación y utilizando la magnitud absoluta  $M_v = -2,5\log(L_{tot}) + 4,83$  obtenemos

$$\log(M/L)_N = 3,77 + 0,2M_v. \quad (4.4)$$

Graficando esta ecuación (4.4) y sobreponiendo en la misma gráfica los valores (newtonianos) recientes determinados para  $(M/L)_N$  para las galaxias dSph locales obtenemos la figura (4.3). Vemos que es un buen ajuste, extendiéndose por más de 8 ordenes de magnitud en  $M_v$ , aún más notable es que la tendencia encontrada se extiende por varios órdenes de magnitud hacia los nuevos sistemas de las más pequeñas galaxias dSph recién detectadas (Gilmore 2009).

Vemos que las expectativas de la ley de gravedad propuesta para los valores de los cocientes  $(M/L)$  newtonianos, modelando con soluciones de equilibrio isotérmico de la ecuación (3.9) y teniendo radios típicos de cerca de 0,3  $kpc$  concuerda muy bien con medidas independientes. La dispersión restante en la figura (4.3) es compatible con las variaciones en los valores de  $M/L$  reales para las galaxias individuales, y variaciones de  $r_{hl}$  alrededor del promedio de 0,3  $kpc$  usado en la ecuación (4.4), la cual no es un ajuste a los datos sino un estimado a primer orden dentro de la ley de gravedad propuesta. Una explicación muy simple para los valores de  $(M/L)_N$

---



## 4.1 El grupo local de las galaxias enanas esferoidales

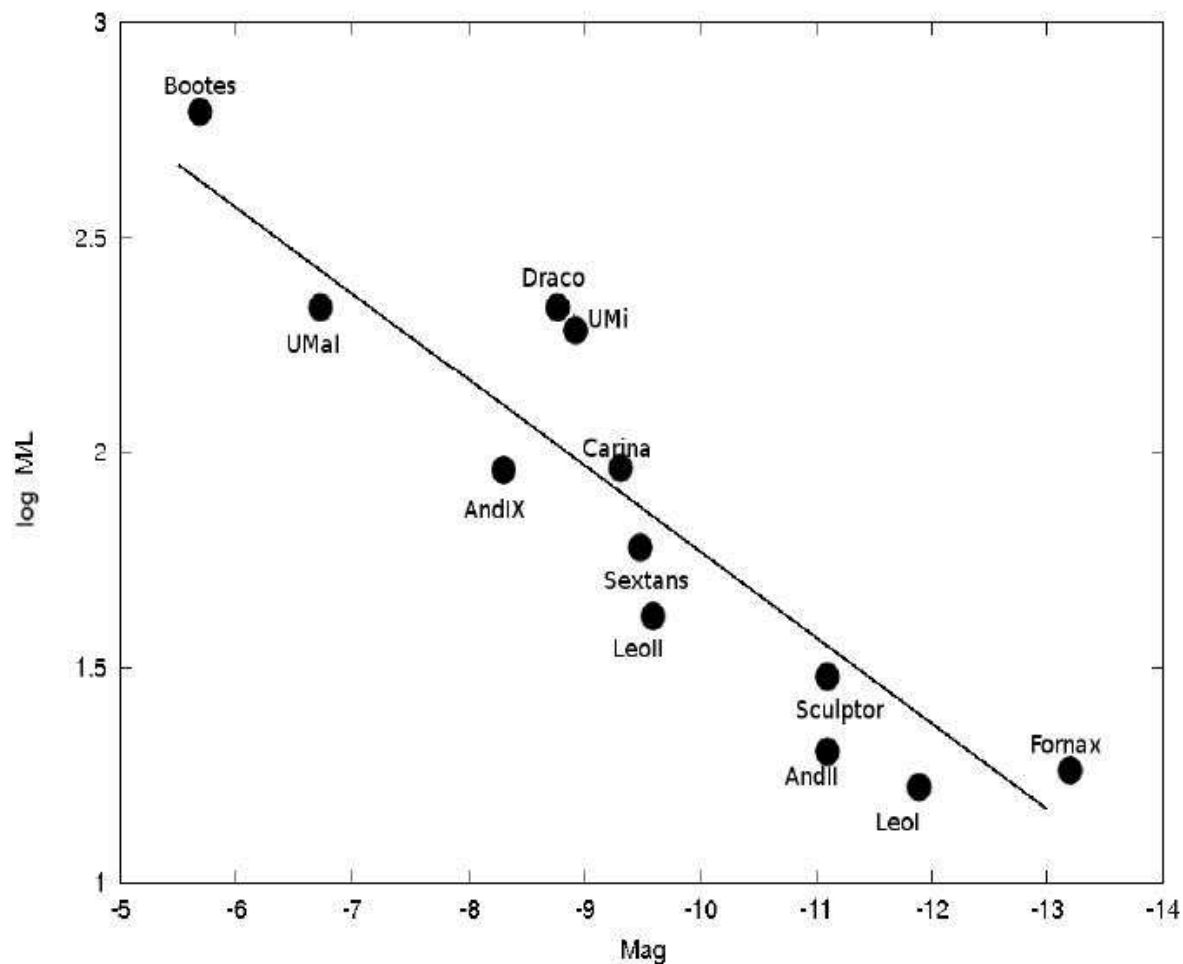


Figura 4.3: Logaritmos de los valores de los cocientes Newtonianos ( $M/L$ ) de las galaxias dSph locales, contra las magnitudes totales observadas en la banda V. La línea recta muestra los valores Newtonianos  $M/L$  que estarán asignados a configuraciones de equilibrio isotérmico de una población de estrellas teniendo un cociente constante intrínseco estelar  $M/L$  de 5, y un radio a media masa constante de 300  $kpc$ , consistente con lo que se observa, y para lo que el modelo propuesto proporciona configuraciones de equilibrio teniendo dispersiones de velocidad de 10  $km/s$ , como muestran las dSph observadas, de acuerdo con la ley de gravedad presentada en este trabajo.

#### 4.1 El grupo local de las galaxias enanas esferoidales

---

asignados a las ya bien estudiadas galaxias dSph se obtienen con la ley de gravedad propuesta, sin la necesidad de invocar procesos astrofísicos (Fuerzas de marea, etc) o de afinar cualquier parámetro.



# Capítulo 5

## Discusión Final

### 5.1. Conclusiones

Al principio comentamos que la masa luminosa  $M_L$  tiene un valor distinto a la masa dinámica  $M_D$  en sistemas astronómicos a escalas grandes y que esta discrepancia de masa se observa también en las curvas de rotación de galaxias que se aplanan a un cierto radio. Con el fin de buscar una explicación a esto, en este trabajo se propone que cuando la aceleración de un objeto astronómico es pequeña comparada con una constante de aceleración  $a_0$  sea necesario alterar la segunda ley de Newton y MOND propone que una fuerza más pequeña produce una mayor aceleración. Dentro de MOND Milgrom nos dice que la fuerza va como una aceleración multiplicada por una función  $\mu(x)$ . En términos de la aceleración  $g$  que siente una partícula, la propuesta de MOND es  $\mu(g/a_0) = g_N$  que en el caso de aceleraciones pequeñas  $\mu$  se comporta como  $\mu(g/a_0) = g/a_0$ .

Con MOND tenemos una teoría definida en aceleraciones muy grandes (Newtonianas) y en aceleraciones pequeñas, pero esta teoría no especifica a detalle que pasa en la transición entre estos límites de aceleración, que en términos de MOND es la transición de la función  $\mu$ .

En este trabajo se introduce una variante de MOND que elimina la necesidad de este régimen

de transición, que consiste en sumar un término Newtoniano  $g_N = G\frac{M}{r^2}$  con un término MOND-iano  $g_M = (a_0g_N)^{1/2}$ , estos términos son componentes de la aceleración que contribuyen a todas las escalas, es decir, que cuando nos encontramos a escalas del sistema solar el término que domina es  $g_N$  pero cuando nos vamos a escalas galácticas el término  $g_M$  tiene una mayor contribución.

En el capítulo 2 con la ecuación 2.3 definimos un nuevo parámetro  $X$ . Este parámetro determina la importancia relativa del término Newtoniano y MOND-iano en la ecuación, entre más grande es el valor de  $X$  mayor es la contribución del término  $g_M$ . Vimos que a escalas pequeñas, como sería la órbita terrestre o el sistema solar, el valor de la  $X$  es pequeña e insignificante y es compatible con las observaciones. Yendo a escalas un poco mayores, como son cúmulos globulares, la  $X$  sigue siendo pequeña y cae dentro de las incertidumbres de las observables. En el caso de galaxias elípticas vemos que la corrección que se hace es suficientemente pequeña y no contribuye pero en estos sistemas no se ha encontrado anomalía gravitacional por lo que nuestra propuesta es compatible también a estas escalas. Sin embargo en aquellos sistemas donde es necesaria la Materia Oscura, como sería a las afueras de la vía láctea vemos que el término  $g_M$  determina completamente la dinámica dandonos valores de  $X$  considerablemente grandes.

Por otro lado, con el análisis que hicimos para M31 vimos que el ajuste que se hizo con la aceleración de la ecuación (2.2) nos da una curva de rotación que se asemeja a la curva de rotación observacional a partir de 25 kpc, por lo que consideramos que la aceleración propuesta si describe bien este sistema.

Además cabe mencionar que la formulación de gravedad modificada presentada en este trabajo está sustentada por la equivalencia de tomar una función  $\mu$  en MOND propuesta por Bekenstein en el año 2004:  $\mu = \frac{z-1}{z+1}$  con  $z = \sqrt{1+4x}$ . Con todo esto hemos mostrado que esta propuesta es consistente con observaciones dinámicas en todas las escalas del sistema solar hasta grandes escalas externas.

Para el caso de las enanas esferoidales dSph, donde los resultados de MOND resultan haber

---

sido más controversiales, nosotros demostramos que los cocientes  $M/L$  se mejoran sin necesidad de utilizar materia oscura, debido a la inclusión del término newtoniano. Los cocientes  $M/L$  resultantes concuerdan cualitativamente con las edades de las poblaciones estelares de las galaxias individuales dSph, para la muestra estudiada.

Esto debería ser útil para explicar la fenomenología de MOND en la extrapolación teórica de Relatividad General, si la materia oscura siguiera sin detectarse.

## 5.2. Trabajo Futuro

Dentro del marco clásico, hay varios otros problemas de dinámica galáctica que se tendrían que explorar en el contexto de la ley de fuerzas propuesta en esta tesis, problemas como la estabilidad de discos galácticos, brazos y barras galácticos y problemas de fricción dinámica.

La ecuación 2.2 se podría interpretar como un desarrollo en serie, donde se puede agregar un tercer término que podría ser una constante, probablemente negativa, que ayudaría a modelar la energía oscura, para esto sería necesaria una extensión relativista.

Para extender la exploración de las consecuencias astrofísicas de esta propuesta hacia la cosmología y problemas de la autoconsistencia de ondas gravitacionales y observaciones de lentes gravitacionales, se necesita de un marco tipo relatividad general que converja al límite newtoniano a velocidades bajas, y a lo que aquí presentamos a aceleraciones bajas o distancias grandes.

Una propuesta como la que se hizo en esta tesis sirve para guiar los modelos de gravedad modificada al aportar el límite de bajas velocidades a las que dichas teorías deberían tender.



# Bibliografía

- [1] Anderson, J. D., Lau, E. L., Turyshev, S., Williams, J. G., & Nieto, M. M. 2002, in Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 34, Bulletin of the American Astronomical Society, 660-+
- [2] Angus, G.W., 2008, MNRAS, 387, 1481
- [3] Angus, G.W., Shan, H. Y., Zhao, H. S., Famaey, B., 2007, ApJ, 654, L13
- [4] Aparicio, A., Carrera, R., Martinez-Delgado, D., 2001, ApJ, 122, 2524
- [5] Arbey, A., 2008, OAJ, 1, 27
- [6] Babusiaux, C., Gilmore, G., Irwin, M., 2005, MNRAS, 359, 985
- [7] Bekenstein, J., Milgrom, M., 1984, ApJ, 286, 7
- [8] Bekenstein, J., 2004, Phys. Rev. D., 70, 3509
- [9] Binney, J., Tremaine, S., 2008, Galactic Dynamics (Princeton University Press, Princeton, NJ)
- [10] Bruneton, J. P., Esposito-Farese, G., 2007, Phys. Rev. D., 76, 124012
- [11] Capozziello, S., Stabile, A., Troisi, A., 2007, Phys. Rev. D., 76, 104019
- [12] Carigi, L., (2003), MNRAS, 339, 825.



- [13] Chapman, S. C., Ibata, R., Lewis, G. F., Ferguson, A. M. N., Irwin, M., McConnachie, A., Tanvir, N., 2005, *ApJ*, 632, L87
- [14] Coleman, M. G., Jordi, K., Rix, H.W., Grebel, E. K., Koch, A., 2007, *AJ*, 134, 1938
- [15] Coleman, M. G., Jordi, K., Rix, H.W., Grebel, E. K., Koch, A., 2007, *AJ*, 134, 1938  
Coleman, M. G., Jordi, K., Rix, H.W., Grebel, E. K., Koch, A., 2007, *AJ*, 134, 1938
- [16] Coleman, M. G., de Jong, J. T. A., 2008, *ApJ*, 685, 933
- [17] Cote, P., Mateo, M., Olszewski, E., Cook, K., 1999, *ApJ*, 526, 147
- [18] Famaey, B., Binney, J., 2005, *MNRAS*, 363, 603
- [19] Famaey, B., et al., 2007, *Phys. Rev. D.*, 75, 063002
- [20] Galle, J. G. 1846, *MNRAS*, 7, 153
- [21] Gentile, G.. et al., 2007, *A&A*, 472, L25
- [22] Gilmore, G., Wilkinson, M. I., Wyse, R. F. G., Klenya, J. T., Koch, A., Evans, N. W., Grebel, E. K., 2007, *ApJ*, 663, 948
- [23] Halle A., Zhao, H. S., Li, B., 2008, *ApJ*, 177, 1
- [24] Hernandez, X., Gilmore, G., 1998, *MNRAS*, 297, 517
- [25] Hernandez, X., Gilmore, G., Valls-Gabaud, D., 2000, *MNRAS*, 317, 831
- [26] Irwin, M., Hatzidimitriou, D., 1995, *MNRAS*, 277, 1354
- [27] Klenya, J. T., Wilkinson, M. I., Evans, N. W., Gilmore, G., 2004, *MNRAS*, 354, L66
- [28] Koch, A., Wilkinson, M. I., Klenya, J. T., Gilmore, G., Grebel, E. K., Mackey, A. D., Evans, N. W., Wyse, R. F. G., 2007, *ApJ*, 657, 241

- [29] Le Verrier. 1846, *Compte Rendu*, 31
- [30] Le Verrier, U. 1859, *R. Acad. Sci. Paris*, 59, 379
- [31] Le Verrier, U. 1876, *R. Acad. Sci. Paris*, 83, 576
- [32] Lee, M. G., et al., 2003, *AJ*, 126, 2840
- [33] Lokas, E. L., 2001, *MNRAS*, 327, L21
- [34] Lokas, E. L., 2002, *MNRAS*, 333, 697
- [35] Mateo, M. L., 1998, *ARA&A*, 36, 435
- [36] Milgrom, M., 1983, *ApJ*, 270, 365
- [37] Milgrom, M., 2002, *New Astron.Rev.* 46 741-753
- [38] Milgrom, M., Sanders, R. H., 2003, *ApJ*, 599, 25
- [39] Milgrom, M., Sanders, R. H., 2008, *ApJ*, 678,131
- [40] Milgrom, M., (2002), *Does Dark Matter Really Exist?*, *Scientific American*, 30-37.
- [41] Milgrom, M., (1998), *The Modified Dynamics - A Status Review*, *astro-ph/9810302v1*, 15.
- [42] Monnier Ragaigine, D.; van Driel, W.; Balkowski, C.; Boissier, S.; Prantzos, N.,(2003), *Ap&SS*, 284, 917.
- [43] Nipoti, C., Londrillo, P., Zhao, H. S., Ciotti, L., 2007, *MNRAS*, 379, 597
- [44] Nipoti, C., Ciotti, L., Binney, J., Londrillo, P., 2008, *MNRAS*, 386, 2194
- [45] Padmanabhan, T., (1995), *Structure formation in the universe*, Cambridge University press, 483.

- [46] Palma, C., Majewski, S. R., Siegel, M. H., Patterson, R. J., Ostheimer, J.C., Link, R., 2003, AJ, 125, 1352
- [47] Peñarrubia, J., Navarro, J. F., McConnachie, A. W., 2008, ApJ, 673, 226
- [48] Queloz, D., Dubath, P., & Pasquini, L. 1995, A&A, 300, 31
- [49] Romanowsky, A. J., Douglas, N. G., Arnaboldi, M., et al. 2003, Science, 301, 1696
- [50] Sanchez-Salcedo, F. J., Reyes-Iturbide, J., Hernandez, X., 2006, MNRAS, 370, 1829
- [51] Sanchez-Salcedo, F. J., Hernandez, X., 2007, ApJ, 667, 878
- [52] Sanchez-Salcedo, F. J., Saha, K., Narayan, C. A., 2008, MNRAS, 385, 1585
- [53] Sanders, R. H., McGaugh, S. S., 2002, ARA&A, 40, 263
- [54] Sanders, R. H., 2005, MNRAS, 363, 459
- [55] Sanders, R. H., Noordermeer E., 2007, MNRAS, 379, 702
- [56] Skordis et al., 2006, Phys. Rev. Lett., 96, 1301
- [57] Sobouti, Y., 2007, A&A, 464, 921
- [58] Sofue, Y., Rubin, V., 2001, ARA&A, 39, 137
- [59] Kenneth Seidelmann, P., (1992) *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, U.S. Naval Observatory, Washington, D.C.
- [60] Tiret, O., et al., 2007, A&A, 476, L1
- [61] Toth, V. T. & Turyshev, S. G. 2009, Phys. Rev. D, 79, 043011
- [62] Turyshev, S. G. 2009, Physics Uspekhi, 52, 1

- [63] Turyshev, S. G. & Toth, V. T. 2009, Space Science Reviews, 86
- [64] Walker, M. G., Mateo, M., Olszewski, E. W., Bernstein, R., Wang, X., Woodroffe, M., 2006, AJ, 131, 2114
- [65] Wilkinson, M. I., Klenya, J. T., Evans, N.W., Gilmore, G., Irwin M. J., Grebel, E. K., 2004, ApJ., 611, L21
- [66] Wilkinson, M. I., Klenya, J. T., Evans, N. W., Gilmore, G., Read, J. I., Koch, A., Grebel, E. K., Irwin M. J., 2006, EAS Publ. Ser., 20, 105 2006
- [67] Wu, X., Famaey, B., Gentile, G., Perets, H., Zhao, H. S., 2008, MNRAS, 386, 2199
- [68] Zakharov, A. F., Capozziello, S., De Paolis, F., Ingrosso, G., Nucita, A.A., (2009), The Role of Dark Matter and Dark Energy in Cosmological Models: Theoretical Overview, Space Sci Rev, 13.
- [69] Zhao, et al., 2006, MNRAS, 368, 171
- [70] Zhao, H. S., 2007, ApJ, 671, L1
- [71] Zwicky, F., 1937, ApJ, 86, 217