



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ELÁSTICA CUÁNTICA
NOCONMUTATIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

PEDRO ALBERTO AGUILAR NÚÑEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS



2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Aguilar
Núñez
Pedro Alberto
55 39 01 19
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
404063553

2. Datos del tutor

Dr
Chryssomalis
Chryssomalakos

3. Datos del sinodal 1

Dr
José Antonio
García
Zenteno

4. Datos del sinodal 2

Dr
Pablo
Barberis
Blostein

5. Datos del sinodal 3

Dr
Alberto
Güijosa
Hidalgo

6. Datos del sinodal 4

Dr
Erick Leonardo
Patiño
Jaidar

7. Datos del trabajo escrito

Elástica cuántica noconmutativa
73 p
2010

ÍNDICE

Índice	iv
Figuras	vi
Introducción	1
1 Preliminares	5
1.1 Fases de Berry	5
1.1.1 Derivación de la fase de Berry	6
1.1.2 Conexión y curvatura de Berry	9
1.1.3 La dinámica de los parámetros	13
1.1.4 Ejemplo: spin 1/2 acoplado a la posición	15
1.2 Constricción de partículas cuánticas mediante potenciales de confinamiento	20
1.2.1 Geometría de la subvariedad encajada	21
1.2.2 Comportamiento efectivo de la partícula	24
1.3 Elementos de teoría cuántica de campos	28
1.3.1 Teoría clásica de campos	28
1.3.2 Cuantización del campo	30
2 Constricción de una partícula cuántica a una cuerda	33
2.1 La partícula	34
2.1.1 Confinamiento a una curva en el espacio euclidiano tridimensional	34

2.1.2	Perturbaciones dependientes de la deformación de la curva	38
2.1.3	Perturbaciones dependientes de la velocidad de la curva . . .	40
2.1.4	Confinamiento a la cuerda	43
2.2	La cuerda	48
2.2.1	Geometría de la cuerda	48
2.2.2	Dinámica de la cuerda	51
2.2.3	Cuantización de los modos	57
3	<i>Backreaction</i> y noconmutatividad de espacio-tiempo efectiva	61
3.1	Fases geométricas	62
3.2	Dinámica efectiva de la cuerda	65
4	Conclusiones	69
	Bibliografía	71

FIGURAS

1.1	La evolución temporal es descrita por una curva en el espacio de parámetros.	6
1.2	El espacio de parámetros de un spin 1/2 inmerso en un campo magnético de magnitud fija y dirección modificable es la variedad S^2 . Cada punto de la variedad corresponde a una configuración distinta del campo magnético.	8
1.3	Sobre cada punto \mathbf{R} del espacio de parámetros M , la fibra es la clase de equivalencia de eigenestados instantáneos de $H(\mathbf{R})$ que difieren por una fase, $g \mathbf{R}\rangle$	10
1.4	Al completarse un ciclo sobre el espacio de parámetros, la curva en el haz fibrado principal no necesariamente debe cerrar. La diferencia de fase es justamente la fase de Berry. Esta es una manifestación de <i>anholonomía</i>	12
1.5	Potencial escalar $V(\mathbf{X})$ presente efectivamente en el sistema pesado. 18	
1.6	Los puntos cercanos a la superficie reciben coordenadas a través del marco adaptado \mathcal{F}	22
2.1	Gráfica del potencial de confinamiento, definido en el plano normal sobre cada punto de la curva.	37
2.2	Una configuración genérica de $\mathbf{X}(u, t)$ para un tiempo t fijo.	49
2.3	Curvas resultantes del modo cero de la expansión de Fourier para (a) φ^t y (b) φ^n . Las flechas representan al campo de deformación, partiendo del círculo unitario.	53

2.4	La curva inferior es el círculo unitario original y la curva superior resulta del modo cero del campo de deformación φ^b , que, en esta parametrización, es para todos los modos puramente vertical. . .	54
2.5	Distribución de probabilidad de los primeros dos eigenestados de oscilador armónico.	59

INTRODUCCIÓN

La idea de la noconmutatividad del espacio-tiempo se remonta a Heisenberg mismo, hacia la década de 1930. Para esos momentos del desarrollo de la teoría cuántica, era ya un hecho conocido el carácter cada vez más descontroladamente divergente de las expansiones perturbativas de las amplitudes cuánticas, dentro del contexto de la teoría cuántica de campos. En el espacio de momentos, estos términos perturbativos son integrales de trayectorias con todos los posibles valores de momento, desde unos arbitrariamente pequeños hasta otros arbitrariamente grandes. El origen del carácter divergente de las integrales de trayectoria pudo rastrearse hasta las contribuciones de trayectorias con momento grande, los cuales corresponden a paquetes de onda localizados. Con la esperanza de introducir un corte en el momento de las trayectorias sobre las que se suma a través de una cota mínima a la localización de paquetes de onda, Heisenberg menciona la noconmutatividad de las coordenadas espaciales como una posible solución.

Este orden de ideas no tuvo muchas repercusiones inmediatamente y se mantuvo, más bien, inocuamente deslizándose en discusiones privadas de teoría cuántica hasta que Snyder se entera y asume de modo pleno la idea y en 1947 presenta el primer artículo sobre noconmutatividad de espacio-tiempo[23]. Sin embargo, los métodos de renormalización dieron una solución eventual al problema de las divergencias en teoría cuántica de campos y la noconmutatividad de espacio-tiempo perdió actualidad.

Ya en la década de 1980, es la investigación matemática, principalmente el grupo de Alain Connes, quien retoma el desarrollo de la noconmutatividad

de espacio-tiempo. Una buena parte de los esfuerzos se centran en formular versiones de variedades donde las coordenadas definidas sobre ellas no conmuten, a lo que se le llama geometría noconmutativa. Más adelante, con las conexiones que se establecen entre teoría de cuerdas y geometría noconmutativa[2],[25], de la noche a la mañana la investigación en esta área se multiplica. De modo menos explosivo aunque no menos significativo contribuyen también a esta expansión la discretitud del espectro de los operadores de área y volumen en gravedad cuántica de lazos[17], así como ciertos argumentos heurísticos de Doplicher *et al*[9], según los cuales los intentos de localización con precisión extrema conducen a un colapso gravitacional, de modo que el espacio-tiempo más allá de cierta escala, la escala de Planck, no tiene “significado operacional”. Vemos pues como la noconmutatividad ha sido principalmente relacionada con el programa de gravedad cuántica.

A pesar de la potencial relevancia de la noconmutatividad en la comprensión de la estructura del espacio-tiempo a escalas fundamentales y al grado de investigación a que ha sido sometida, no puede decirse que sus puntos problemáticos sean inexistentes. Todo lo contrario. Entre las distintas propuestas, no dejan de hacer presencia la arbitrariedad dentro de la multiplicidad de posibles tipos de noconmutatividad, la dificultad en establecer interpretaciones físicas coherentes o una formulación matemática inconsistente. Creemos que al hablar de un espacio-tiempo cuántico, ya sea discreto o *fuzzy*, suele dejarse de lado a la materia misma como un factor determinante, aún cuando las conclusiones de la Relatividad General van en un sentido diferente.

Por esto, nos parece que debe procederse con extremo cuidado al hablar de noconmutatividad de espacio-tiempo e intentar dotarla de una interpretación física coherente. Afortunadamente, dentro de las teorías físicas estándar es posible encontrar situaciones donde emerge naturalmente una descripción efectiva de operadores de posición cuyos componentes no conmutan entre sí. Podemos hacer uso de estas situaciones como un laboratorio de noconmutatividad donde se esté lidiando con objetos familiares, donde nuestros esfuerzos de intuición y comprensión sean asequibles.

En esta tesis, nosotros consideramos una cuerda cuántica realizada como un círculo unitario sobre el cual está definido un campo arbitrario dependiente del tiempo, el campo de deformación del círculo mismo. Se trata de una teoría cuántica de campos de 1+1. Al deformarse la cuerda de modo adiabático y encontrarse una partícula cuántica constreñida a moverse sobre la curva deformada, se induce un comportamiento efectivo de la cuerda, resultado de fijar adiabáticamente el estado de la partícula, cuya descripción efectiva más natural es en términos de una redefinición noconmutativa de sus modos normales de Fourier y de los momentos conjugados a estos. El tipo de noconmutatividad resultante depende de las propiedades de la partícula.

La totalidad de esta tesis ha sido realizada bajo la supervisión del Dr. Chryssomalis Chryssomalakos. El trabajo de la sección 2.1 está basado en trabajo previo de Chryssomalis Chryssomalakos, David Gelbwaser Klimovsky, Héctor Hernández Coronado y Elías Okón Gurvich[8],[10]. El trabajo de la sección 2.2.1 y el capítulo 3 están realizados en colaboración con Héctor Hernández Coronado[11].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

El presente capítulo se muestra como una mezcla heterogénea de contenidos destinados a facilitar la comprensión conceptual y a establecer las convenciones de lenguaje y notación de los elementos involucrados en este trabajo de tesis.

1.1 Fases de Berry

En esta sección se presentará cierta fase –un elemento de $U(1)$ – que hace su aparición tras la evolución cíclica de un sistema cuántico. Al modificar las condiciones de un sistema cuántico hasta hacerlo regresar a su situación inicial, el estado cuántico en que éste se encuentra también volverá a su estado inicial, pero adquirirá una fase adicional a la fase dinámica que dependerá únicamente de la geometría del ciclo realizado y que, por lo tanto, llamamos *geométrica*.

En el contexto de un sistema dependiente del tiempo a través de un conjunto de parámetros externos, la variación “lenta” o, con más precisión, *adiabática* de los parámetros garantizará la evolución cíclica del estado cuántico del sistema, asumiendo que este es no degenerado. La fase geométrica que surge de este modo fue formulada, en toda su generalidad, por Berry en 1983[3]. Desde entonces, ha ocurrido una intensa investigación teórica para aclarar el sentido físico y geométrico[22] de la fase de Berry y generalizarla a estados degenerados[24] o situaciones no necesariamente adiabáticas[1] ni cíclicas[20]. Aunque todo esto es muy interesante por sí mismo, tendrá que limitarse aquí la exposición a lo

puramente relevante para este trabajo. En lo siguiente, nos basamos en [22], [3], [4], [15], [5], [7].

1.1.1 Derivación de la fase de Berry

Consideremos un sistema cuántico que depende de un conjunto de parámetros externos que varían con el tiempo, a los cuales vamos a nombrar de modo colectivo por $\mathbf{R}(t)$. El hamiltoniano $H(\mathbf{R}(t))$ describe a este sistema, de modo que el estado $|\psi(t)\rangle$ en que este se encuentra evoluciona según la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(\mathbf{R}(t)) |\psi(t)\rangle. \quad (1.1)$$

Para un tiempo t arbitrario, $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ corresponde al n -ésimo elemento de la base de eigenestados instantáneos del sistema (que suponemos discreta), es decir, $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ satisface la ecuación de Schrödinger estacionaria,

$$H(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (1.2)$$

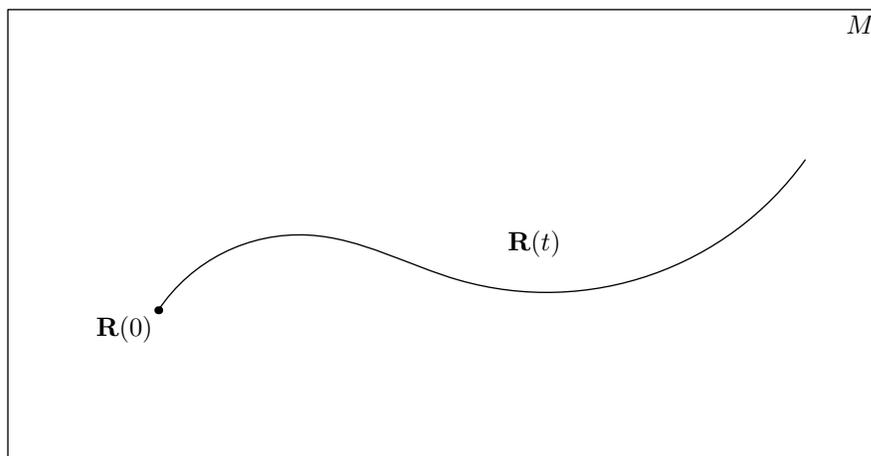


Figura 1.1. La evolución temporal es descrita por una curva en el espacio de parámetros.

En $t = 0$, se prepara al sistema en el eigenestado $|n(\mathbf{R}(0))\rangle$, que suponemos no es degenerado, y se deja evolucionar de modo adiabático, trazándose una curva

1.1. Fases de Berry

en el espacio de parámetros (ver figura 1.1). El teorema adiabático garantiza, en este caso, que el sistema siempre se encontrará en el mismo eigenestado instantáneo n . Si los parámetros varían mucho más lentamente que la frecuencia característica del sistema, definida por la diferencia de energía entre sus eigenestados, entonces esta variación no excitará al sistema con energía suficiente para que haya transiciones entre estados.

Una vez que sabemos que el estado del sistema siempre sigue al eigenestado de energía instantáneo n , tenemos sólo una parte de la información sobre como se escribe este estado. No obstante, es directo probar que la respuesta obvia,

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt'\right) |n(\mathbf{R}(t))\rangle, \quad (1.3)$$

no es solución de la ecuación de Schrödinger. Consideramos una propuesta de solución más general mediante la inclusión de una fase $\gamma(t)$, adicional a la dinámica, es decir,

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt' + i\gamma(t)\right) |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (1.4)$$

En este caso, la exigencia de que (1.4) sea solución a la ecuación de Schrödinger implicará las condiciones que $\gamma(t)$ debe satisfacer. En primer lugar, sustituyendo (1.4) en la ecuación de Schrödinger obtenemos

$$-\frac{d}{dt}\gamma(t)|\psi(t)\rangle + i \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt' + i\gamma(t)\right) \frac{d}{dt}|n(\mathbf{R}(t))\rangle = 0. \quad (1.5)$$

Proyectando (1.5) sobre el bra $\langle\psi(t)|$, obtenemos la ecuación que $\gamma(t)$ debe satisfacer,

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = i \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} \right| n(\mathbf{R}(t)) \right\rangle. \quad (1.6)$$

Para obtener la igualdad anterior, observamos que $|\psi(t)\rangle$ está normalizado por diferir por una fase de $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$. Al integrar (1.6) obtenemos

$$\gamma(t) = i \int_0^t \left\langle n(\mathbf{R}(s)) \left| \frac{d}{ds} \right| n(\mathbf{R}(s)) \right\rangle ds = i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R}, \quad (1.7)$$

con $\nabla_{\mathbf{R}}$ siendo el gradiente en el espacio de parámetros \mathbf{R} . Es sencillo mostrar que $\gamma(t)$ es real partiendo de diferenciar ambos lados de la condición de normalización de $|n(\mathbf{R}(s))\rangle$, $1 = \langle n(\mathbf{R}(s)) | n(\mathbf{R}(s)) \rangle$, de donde se obtiene que el

integrando de (1.7) es puramente imaginario. Por lo tanto, $\gamma(t)$ es efectivamente una fase.

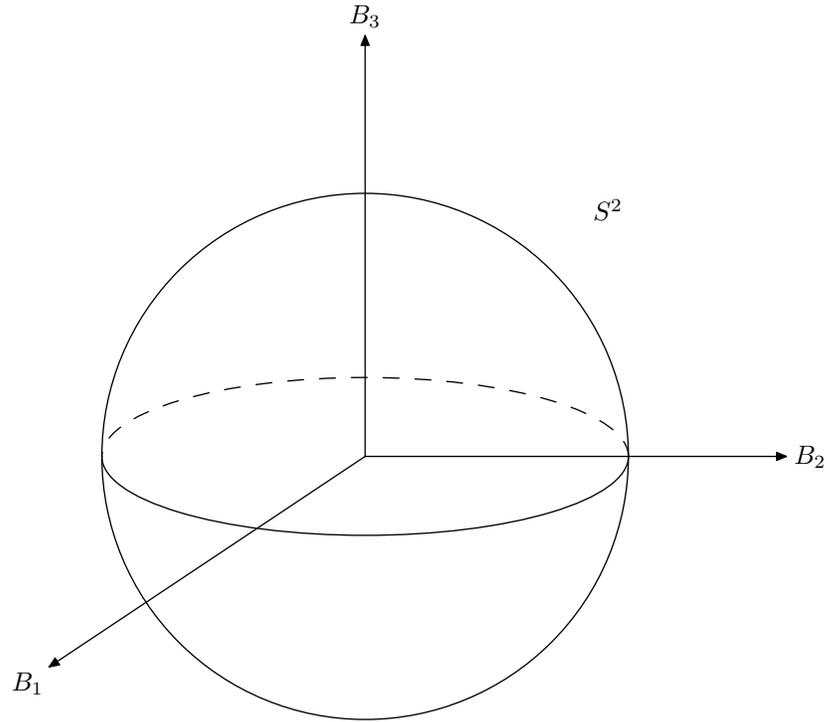


Figura 1.2. El espacio de parámetros de un spin $1/2$ inmerso en un campo magnético de magnitud fija y dirección modificable es la variedad S^2 . Cada punto de la variedad corresponde a una configuración distinta del campo magnético.

El sentido geométrico de la fase de Berry se debe a que no importa la parametrización de la curva (en tanto que su recorrido sea suficientemente lento para asegurar la validez del teorema adiabático) sino únicamente la curva misma en el espacio de parámetros. Lo interesante entonces de la fase (1.7) es que el integrando no necesariamente es una derivada total y que, por lo tanto, al hacer la integración sobre un circuito C en el espacio de parámetros, la fase total $\gamma(C)$ bien puede no ser cero. Una situación donde se obtiene una fase de Berry distinta de cero es en la de una partícula con spin bajo la influencia de un campo magnético de magnitud constante pero que adiabáticamente cambia de

1.1. Fases de Berry

dirección. En este caso, el espacio de parámetros es S^2 (ver figura 1.2) y la fase de Berry es proporcional tanto al spin de la partícula como al ángulo sólido subtendido por el ciclo realizado en S^2 . Por lo tanto, si una partícula inicialmente se encuentra en una superposición de estados de spin

$$|\psi(t=0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle, \quad (1.8)$$

cada uno de estos eigenestados acumulará una fase distinta, por lo que el estado de la partícula tras la realización del ciclo será

$$|\psi(t=T)\rangle = \alpha \exp(i\gamma_+^d + i\gamma_+^C)|+\rangle + \beta \exp(i\gamma_-^d + i\gamma_-^C)|-\rangle, \quad (1.9)$$

donde γ_+^d y γ_+^C son las fases dinámica y geométrica, respectivamente, acumuladas por el estado $|+\rangle$ durante la evolución del sistema (lo análogo se entiende por γ_-^d y γ_-^C). El resultado de la medición de un observable A que no conmute con S_z será

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle+|A|+\rangle + \langle-|A|-\rangle + 2\text{Re} [\alpha^*\beta\langle+|A|-\rangle \exp i(\gamma_-^d + \gamma_-^C - \gamma_+^d - \gamma_+^C)] \quad (1.10)$$

A través de los términos oscilatorios en la última expresión, la fase de Berry es experimentalmente observable.

1.1.2 Conexión y curvatura de Berry

En 1983, muy poco tiempo después de la formulación hecha por Berry, Simon[22] descubrió que la fase de Berry podía ser entendida en términos geométricos como una holonomía en cierto haz fibrado. El lenguaje de esta descripción es el de conexiones en haces fibrados principales. Para una exposición de esta construcción matemática, comprensible para un físico, nos referimos a [15],[5].

En un haz fibrado principal $P(M, U(1))$, donde el espacio base es el espacio de parámetros M y tanto el grupo de estructura como la fibra sobre cada punto de M son $U(1)$, la ecuación de Schrödinger ofrece una ley de transporte paralelo para los vectores de estado. A continuación veremos como esto se realiza.

Consideremos a nuestro sistema externo como un sistema clásico, de modo que el espacio de parámetros es descrito por una variedad M , cuyas coordenadas

localmente son $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)$. Para cada punto \mathbf{R} de M tenemos una configuración de los parámetros que determina al hamiltoniano $H(\mathbf{R})$. Consideramos al n -ésimo eigenestado de $H(\mathbf{R})$, $|n(\mathbf{R})\rangle$. Como los estados $|n(\mathbf{R})\rangle$ y $e^{i\phi}|n(\mathbf{R})\rangle$ son físicamente indistinguibles, consideramos que el estado físico del sistema en \mathbf{R} es la clase de equivalencia

$$[|\mathbf{R}\rangle] = \{g|\mathbf{R}\rangle \mid g \in U(1)\}. \quad (1.11)$$

Llamamos a los elementos de esta clase $|\mathbf{R}\rangle$ porque el teorema adiabático nos garantiza que estamos tratando siempre con el eigenestado n en cada punto de la variedad. Por lo tanto, al estado cuántico en cada punto de la variedad M tenemos la libertad de asociarle un elemento de la clase de equivalencia, que es homeomorfa a $U(1)$, es decir, sobre cada \mathbf{R} tenemos como fibra una copia de $U(1)$ (ver figura 1.3). Por esto, vamos a considerar el haz fibrado principal $P(M, U(1))$, donde el conjunto de funciones de transición entre las distintas trivializaciones locales tiene que ser otra copia de $U(1)$.

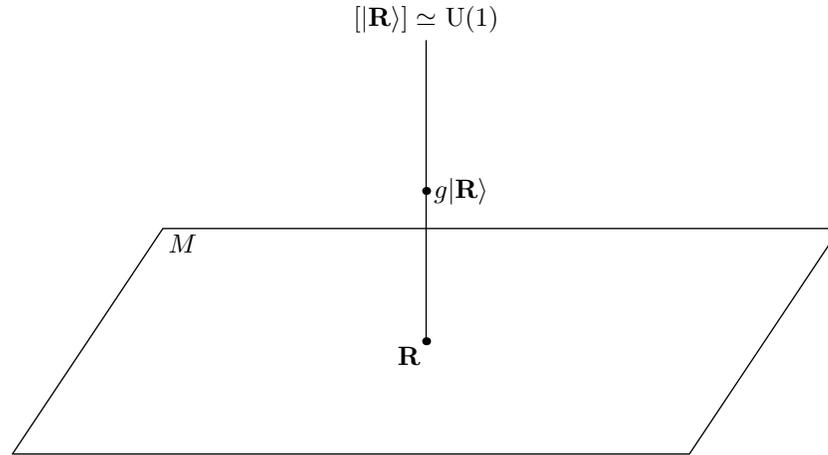


Figura 1.3. Sobre cada punto \mathbf{R} del espacio de parámetros M , la fibra es la clase de equivalencia de eigenestados instantáneos de $H(\mathbf{R})$ que difieren por una fase, $g|\mathbf{R}\rangle$.

La ecuación de Schrödinger determina la evolución del estado cuántico $|\mathbf{R}\rangle$ a $t = 0$ para otros tiempos. Vigentes las condiciones del teorema adiabático, le asigna, en particular, una fase a cada estado $|\mathbf{R}\rangle$. Tras la siguiente definición

1.1. Fases de Berry

de una 1-forma \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = A_\mu dR^\mu = i\langle \mathbf{R} | d | \mathbf{R} \rangle, \quad (1.12)$$

determinada sobre el espacio de parámetros M y siendo $d = (\partial/\partial R^\mu) dR^\mu$ la derivada exterior en M , tenemos que la evolución cuántica a lo largo de una trayectoria C sobre M implica una correspondencia al estado $|\mathbf{R}\rangle$ de una fase

$$\exp i \int_C \mathcal{A}, \quad (1.13)$$

de acuerdo con la ecuación (1.7) traducida al lenguaje de formas diferenciales. En términos del haz fibrado principal, al establecer un mapeo desde el espacio de parámetros hacia el espacio total, la curva C es *levantada* hacia el espacio total. Por lo tanto, \mathcal{A} determina una conexión.

A la 1-forma \mathcal{A} se le denomina la *conexión de Berry*. Existe la misma libertad para escoger esta conexión que para establecer un homeomorfismo entre la fibra sobre cada punto y $U(1)$. Dada una curva C , cambiar de homeomorfismo corresponde a cambiar las coordenadas de la curva levantada multiplicándolas por un elemento del grupo $U(1)$ distinto para cada fibra, $e^{i\varphi(\mathbf{R})}$. A esto se le conoce en la Física como una transformación de norma. Para mostrar que \mathcal{A} es de verdad la expresión local de una conexión, debe transformar ante una transformación de norma

$$|\mathbf{R}\rangle \longrightarrow e^{i\varphi(\mathbf{R})} |\mathbf{R}\rangle \quad (1.14)$$

del modo

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A} + i d\varphi = e^{-i\varphi(\mathbf{R})} \mathcal{A} e^{i\varphi(\mathbf{R})} + e^{-i\varphi(\mathbf{R})} d e^{i\varphi(\mathbf{R})}, \quad (1.15)$$

algo que, en efecto, ocurre.

Cuando la curva C en M es cerrada y no encierra singularidades de la forma de conexión, y M es topológicamente trivial, el teorema de Stokes permite que la fase sea escrita como

$$\gamma(C) = i \oint_C \mathcal{A} = i \int_S d\mathcal{A}, \quad (1.16)$$

donde S es cualquier superficie cuya frontera sea justamente C , $\partial S = C$. Dependiendo del valor de esta fase, notamos que al concluir un ciclo en el espacio

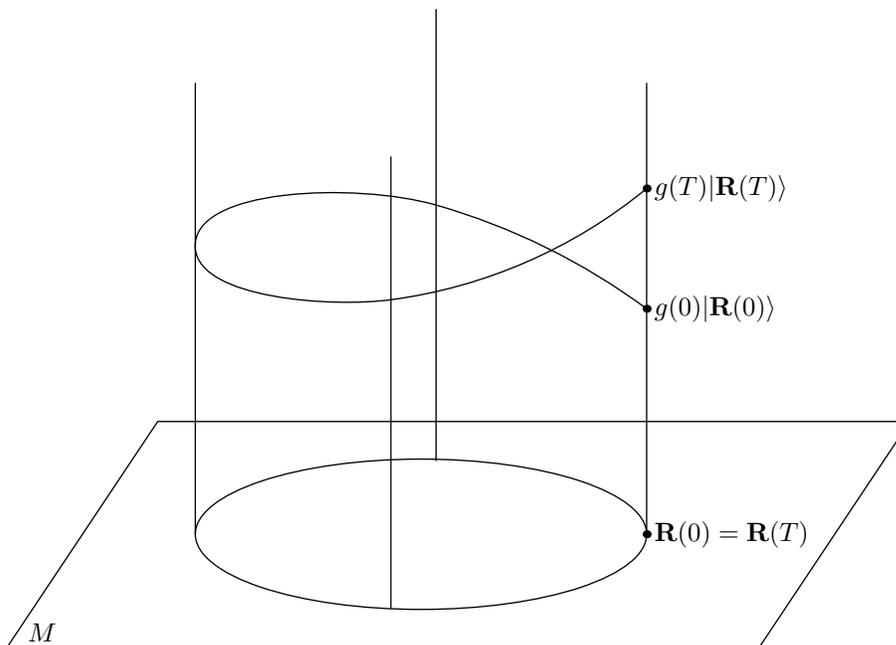


Figura 1.4. Al completarse un ciclo sobre el espacio de parámetros, la curva en el haz fibrado principal no necesariamente debe cerrar. La diferencia de fase es justamente la fase de Berry. Esta es una manifestación de *anholonomía*.

de parámetros, no necesariamente volvemos al mismo elemento de la fibra del que partimos, es decir, (1.16) es una expresión de *holonomía* (o, mejor dicho, *anholonomía*) asociada a esta evolución cíclica (ver figura 1.4).

Definimos la *curvatura de Berry* \mathcal{K} justo como

$$\mathcal{K} = d\mathcal{A} = K_{\mu\nu} dR^\mu \wedge dR^\nu = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \langle \mathbf{R} |) (\partial_\nu | \mathbf{R} \rangle) - (\partial_\nu \langle \mathbf{R} |) (\partial_\mu | \mathbf{R} \rangle)] dR^\mu \wedge dR^\nu. \quad (1.17)$$

Este es un tensor antisimétrico definido sobre el espacio de parámetros que mapea un par de vectores tangentes a M para producir un escalar. Su significado es, entonces, que su flujo a través de una superficie S es la fase $\gamma(C)$. Este tensor permanece invariante tras una transformación de norma (1.14),

$$\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}' = \mathcal{K}, \quad (1.18)$$

aunque, de hecho, no es el único. Un tensor más general, invariante ante una

1.1. Fases de Berry

transformación de norma, es

$$T(\mathbf{R}) = (d\langle\mathbf{R}|) (1 - |\mathbf{R}\rangle\langle\mathbf{R}|) (d|\mathbf{R}\rangle), \quad (1.19)$$

al cual se le suele nombrar *tensor geométrico cuántico* [4]. Sus componentes, dado un sistema de coordenadas locales, son

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu\langle\mathbf{R}|) (1 - |\mathbf{R}\rangle\langle\mathbf{R}|) (\partial_\nu|\mathbf{R}\rangle), \quad (1.20)$$

de donde es fácil notar que se trata de un tensor hermitiano, así como que su parte imaginaria es justamente la mitad del tensor de curvatura de Berry y su parte real es un tensor simétrico que denotamos por g , cuyas componentes son

$$g_{\mu\nu} = \langle\mathbf{R}| (\partial_\mu|\mathbf{R}\rangle) \langle\mathbf{R}| (\partial_\nu|\mathbf{R}\rangle). \quad (1.21)$$

El tensor g es una métrica natural en el espacio de parámetros[7], de modo que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dR^\mu dR^\nu \quad (1.22)$$

es el cuadrado de la distancia entre dos puntos cercanos en M .

1.1.3 La dinámica de los parámetros

La fase de Berry surge de la interacción de un sistema cuántico con su ambiente. Hemos podido calcular, bajo la aproximación adiabática, la acción unilateral de la variación del ambiente sobre el sistema cuántico. Sin embargo, ambiente y sistema cuántico constituyen propiamente un único sistema físico, donde los parámetros \mathbf{R} son en sí las variables dinámicas de un sistema ‘pesado’ o ‘lento’ y el sistema cuántico es el sistema ‘ligero’ o ‘rápido’. Esta terminología proviene de la aproximación de Born-Oppenheimer, donde las variables del sistema pesado son las posiciones de los núcleos atómicos, mientras que el sistema ligero se refiere a los electrones. Bajo esta perspectiva, el sistema ligero puede a su vez provocar un efecto recíproco sobre el pesado. Vamos a mostrar siguiendo a Berry[4] que este efecto recíproco se manifiesta como la aparición de un campo de norma determinado por el tensor geométrico cuántico y de un potencial escalar en el espacio ambiente.

Sean X_μ las variables de posición del sistema pesado y P_μ sus momentos conjugados. El hamiltoniano del sistema total es

$$H_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} Q_{\mu\nu} P_\mu P_\nu + H(\xi; \mathbf{X}), \quad (1.23)$$

donde $Q_{\mu\nu}$ es un tensor de masa y ξ se refiere a las variables dinámicas del sistema ligero. H es el hamiltoniano del sistema ligero, al cual habíamos considerado exclusivamente en las secciones anteriores, donde \mathbf{X} se refería a los parámetros externos. Este hamiltoniano para el sistema ligero tiene por eigenestados a $|n(\mathbf{X})\rangle$ y sus energías son $E_n(\mathbf{X})$. Para escribir la función de onda del sistema total, consideramos como ansatz una función separable en un factor referido al sistema pesado y otro referido al sistema ligero,

$$\langle \mathbf{X} | \Psi \rangle = \Psi_{\text{pesado}}(\mathbf{X}) |n(\mathbf{X})\rangle. \quad (1.24)$$

En este ansatz, al considerar a $|n(\mathbf{X})\rangle$ como la función de onda del sistema ligero, hemos reincorporado implícitamente al teorema adiabático. De este modo, el estado ligero queda fijo a un estado cuántico, tras lo cual el hamiltoniano efectivo del sistema pesado es

$$H_{\text{ef}} \equiv \langle n(\mathbf{X}) | H_{\text{tot}} | n(\mathbf{X}) \rangle. \quad (1.25)$$

Formalmente, la reacción del sistema ligero sobre el pesado se debe a la operación de los momentos sobre el hamiltoniano del sistema ligero a través de su dependencia de los parámetros. El resultado de esta proyección de la función de onda del sistema ligero sobre el hamiltoniano total es

$$H_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} Q_{\mu\nu} [P_\mu - A_\mu(\mathbf{X})] [P_\nu - A_\nu(\mathbf{X})] + \Phi(\mathbf{X}) + E_n(\mathbf{X}), \quad (1.26)$$

donde

$$A_\mu(\mathbf{X}) = i\hbar \langle n(\mathbf{R}) | (\partial_\mu |n(\mathbf{R})\rangle) \quad (1.27)$$

y

$$\Phi(\mathbf{X}) = \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\mu\nu} Q_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(\mathbf{X}) \quad (1.28)$$

Reconocemos al potencial A_μ como la forma de conexión de Berry, salvo un factor \hbar . El término $E_n(\mathbf{X})$ es la energía del sistema ligero. De modo particular,

1.1. Fases de Berry

nuestro interés se concentra en los campos de norma A_μ y Φ que afectan el comportamiento efectivo del sistema pesado.

Los efectos físicos del potencial A_μ aparecen a través del campo ‘magnético’ inducido

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = i\hbar K_{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

que sabemos bien que es invariante ante transformaciones de norma. De modo que el campo ‘magnético’ que experimenta el sistema pesado es la parte antisimétrica del tensor geométrico cuántico, mientras que la parte simétrica corresponde a un campo ‘eléctrico’ dado por el gradiente de Φ , según (1.28). Es un hecho dado que el campo ‘eléctrico’ depende de las derivadas de $g_{\mu\nu}$, mientras que el campo ‘magnético’ depende de $K_{\mu\nu}$ mismo. En todo caso, el objeto relevante aquí es el tensor geométrico cuántico.

1.1.4 Ejemplo: spin 1/2 acoplado a la posición

Consideremos un sistema compuesto de un oscilador armónico con posición \mathbf{X} y momento \mathbf{P} con un spin 1/2 acoplado a la posición \mathbf{X} del oscilador con una fuerza λ . En las unidades donde \hbar , la masa y la constante del oscilador son la unidad, el hamiltoniano de este sistema es

$$H_{\text{tot}} = \frac{P^2 + X^2}{2} + \lambda \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.30)$$

En este caso, el sistema ‘ligero’ es el spin, mientras que el sistema ‘pesado’ es el oscilador. Queremos calcular el hamiltoniano efectivo del oscilador cuando el spin queda fijado permanentemente al eigenestado de spin positivo respecto a una dirección arbitraria \mathbf{n} . Veremos que el comportamiento del oscilador queda modificado de un modo muy preciso en términos de cantidades asociadas a la curvatura de Berry y a la métrica g correspondientes a esta situación física.

El desarrollo del eigenestado de spin positivo en la dirección \mathbf{n} en la base de eigenestados del operador \mathbf{S}_z , $|+\rangle$ y $|-\rangle$, es

$$|n^+\rangle = \cos(\Theta/2)e^{-i\Phi/2}|+\rangle + \sin(\Theta/2)e^{i\Phi/2}|-\rangle, \quad (1.31)$$

Este estado está escrito en las coordenadas esféricas usuales R , Θ y Φ referidas a la posición del oscilador, donde R es la coordenada radial, Θ es el ángulo polar y Φ es el ángulo azimutal. El hamiltoniano que gobierna al comportamiento efectivo del sistema pesado es

$$H_{\text{ef}}(\mathbf{X}) = \langle n^+ | H_{\text{tot}} | n^+ \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mu} [P_{\mu} - A_{\mu}(\mathbf{X})]^2 + \Phi(\mathbf{X}) + E^+(\mathbf{X}), \quad (1.32)$$

donde las componentes del potencial vectorial ‘magnético’ \mathcal{A} se obtienen de modo directo como

$$A_X(\mathbf{X}) = i \langle n^+ | (\partial_X | n^+ \rangle) = -\frac{YZ}{2(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}}, \quad (1.33a)$$

$$A_Y(\mathbf{X}) = i \langle n^+ | (\partial_Y | n^+ \rangle) = \frac{XZ}{2(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}}, \quad (1.33b)$$

$$A_Z(\mathbf{X}) = i \langle n^+ | (\partial_Z | n^+ \rangle) = 0, \quad (1.33c)$$

mientras que el potencial ‘eléctrico’ es

$$\Phi(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \text{tr } g = \frac{1}{4(X^2 + Y^2 + Z^2)} + \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2}. \quad (1.34)$$

y la energía del sistema ligero es simplemente

$$E^+(\mathbf{X}) = \lambda(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}. \quad (1.35)$$

En este caso particular, tanto el potencial ‘magnético’ como el potencial ‘eléctrico’ surgen a través de la acción del operador de momento sobre la dependencia de los parámetros del hamiltoniano del sistema ‘ligero’ y de sus eigenestados, tomado en su representación usual en el espacio de coordenadas mediante operadores diferenciales $P_{\mu} = -i\partial_{\mu}$ para $\mu = X, Y, Z$.

Notamos que únicamente aparecen componentes no nulas del potencial vectorial en las direcciones X y Y , mientras que el término asociado a la dirección Z es nulo. Así que, aunque el hamiltoniano total (1.30) es simétrico entre diferentes coordenadas y momentos y $|n^+\rangle$ es el estado de spin positivo en una dirección arbitraria, surgen diferencias entre distintas direcciones en la expresión final del hamiltoniano efectivo. Esta asimetría aparece porque el modo de escribir el estado $|n^+\rangle$ como (1.31) implica que una norma particular fue escogida.

1.1. Fases de Berry

Una norma distinta producirá un potencial vectorial distinto. Por ejemplo, es posible escoger una norma diferente de modo que aparezca una componente no nula del potencial vectorial en la dirección Z . No obstante, los efectos físicos provienen de la derivada exterior del potencial vectorial, la forma de curvatura, la cual es invariante de norma.

Basándonos en la aparición de un término ‘magnético’ (1.33) en (1.32), se definen los nuevos operadores de momento

$$\tilde{P}_X \equiv P_X - A_X = P_X + \frac{YZ}{2(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}}, \quad (1.36a)$$

$$\tilde{P}_Y \equiv P_Y - A_Y = P_Y - \frac{XZ}{2(X^2 + Y^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}}, \quad (1.36b)$$

$$\tilde{P}_Z \equiv P_Z - A_Z = P_Z. \quad (1.36c)$$

Las relaciones de conmutación entre estos momentos redefinidos son

$$[\tilde{P}_X, \tilde{P}_Y] = -iK_{XY} = -\frac{iZ}{2(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \quad (1.37a)$$

$$[\tilde{P}_Y, \tilde{P}_Z] = -iK_{YZ} = -\frac{iX}{2(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \quad (1.37b)$$

$$[\tilde{P}_Z, \tilde{P}_X] = -iK_{ZX} = -\frac{iY}{2(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \quad (1.37c)$$

Por lo tanto, tenemos unos momentos redefinidos cuyos conmutadores no son cero. En tanto que estas relaciones de conmutación son proporcionales a la forma de curvatura de Berry, aunque la forma de los nuevos momentos depende de la norma particular que fue escogida para el estado cuántico $|n^+\rangle$, la forma de las relaciones de conmutación es independiente de esta norma.

Vamos a detenernos un poco a estudiar la forma del hamiltoniano efectivo (1.32). El primer término corresponde a la parte cinética. En primer lugar, recordamos que el momento conjugado a la posición de una partícula cargada en movimiento bajo la influencia de un campo magnético externo con potencial vectorial $\boldsymbol{\alpha}$ es $\mathbf{p} + (e/c)\boldsymbol{\alpha}$ en general[12], según la prescripción de acoplamiento mínimo. Por eso, en nuestro hamiltoniano efectivo vemos un potencial ‘magnético’ inducido. Quien viva en el sistema pesado notará la presencia de un campo ‘magnético’. De hecho, se trata del campo de un monopolo magnético

centrado en el punto $\mathbf{X} = 0$ en el espacio de parámetros. Al expresar al potencial vectorial (1.33) en coordenadas esféricas, resulta claro que este posee una singularidad para la coordenada polar $\theta = 0$, es decir, a lo largo del eje Z . Fuera de esta singularidad, se puede verificar que

$$d\mathcal{A} = \frac{c}{2e} \frac{1}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} (XdY \wedge dZ + YdZ \wedge dX + ZdX \wedge dY). \quad (1.38)$$

Este es precisamente el campo producido por un monopolo magnético de carga c/e [15]. Se trata además de la única configuración ‘magnética’ consistente con la simetría esférica del hamiltoniano total y la arbitrariedad del estado del sistema ligero. Por otro lado, la presencia de singularidades del potencial vectorial obstruye la posibilidad de que su derivada sea igual al campo ‘magnético’ en todo el espacio y que entonces su flujo asociado sea nulo.

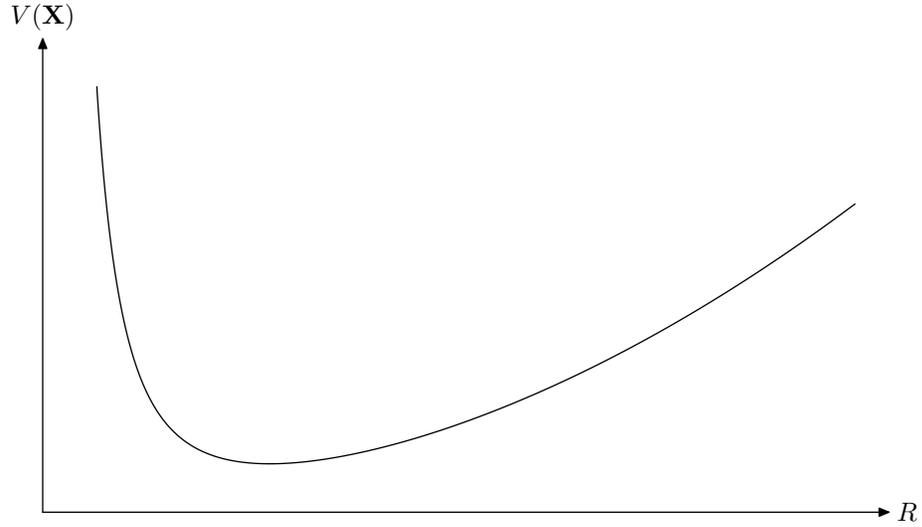


Figura 1.5. Potencial escalar $V(\mathbf{X})$ presente efectivamente en el sistema pesado.

En segundo lugar, el potencial escalar efectivo a que está sujeto el sistema pesado es

$$V(\mathbf{X}) = \frac{1}{4R^2} + \frac{R^2}{2} + \lambda R \quad (1.39)$$

donde R es la coordenada esférica radial. En la figura 1.5 observamos su gráfica. Este potencial posee simetría esférica. El primer término es un po-

1.1. Fases de Berry

tencial centrífugo que evita que el oscilador armónico ocupe la posición $R = 0$. Como la diferencia entre la energía de los dos estados del spin es $2|\lambda|R$, cuando $R = 0$ el sistema se encuentra en un estado degenerado. El potencial suprime la posibilidad de que el estado del spin se vuelva degenerado exigiéndole al sistema una energía infinita para alcanzarla. Esto no lo provoca el campo ‘magnético’, pues la fuerza de Lorentz sobre una partícula que se dirige al origen de coordenadas de modo radial es nula, considerando que el campo también es radial.

En el sistema anterior, obtuvimos de modo efectivo operadores de momento noconmutativos entre sí. De modo análogo, es posible obtener coordenadas efectivas noconmutativas. Podemos ahora pensar en un Hamiltoniano donde el spin está acoplado al momento, ya no a la posición, del modo

$$H_{\text{tot}} = \frac{P^2 + X^2}{2} + \lambda \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.40)$$

Este hamiltoniano puede ser obtenido del hamiltoniano del sistema anterior (1.30) mediante las sustituciones $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{X}$. Escogemos el signo negativo en la segunda sustitución para preservar las relaciones de conmutación en el espacio fase, es decir, para que la sustitución sea una transformación canónica de coordenadas. Las relaciones de conmutación entre los operadores de spin y posición y momento se preservan de igual modo, en tanto que todas estas ya eran nulas. Por lo tanto, en esta situación el hamiltoniano efectivo del sistema ‘pesado’ será (1.32) seguido de las mismas sustituciones entre posición y momento, es decir,

$$H_{\text{ef}}(\mathbf{P}) = \langle n^+ | H_{\text{tot}} | n^+ \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mu} [X_{\mu} - A_{\mu}(\mathbf{P})]^2 + \Phi(\mathbf{P}) + E^+(\mathbf{P}), \quad (1.41)$$

donde

$$A_{P_X} = i \langle n^+ | (\partial_{P_X} | n^+ \rangle) = -\frac{P_Y P_Z}{2(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{1/2}(P_X^2 + P_Y^2)}, \quad (1.42a)$$

$$A_{P_Y} = i \langle n^+ | (\partial_{P_Y} | n^+ \rangle) = \frac{P_X P_Z}{2(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{1/2}(P_X^2 + P_Y^2)}, \quad (1.42b)$$

$$A_{P_Z} = i \langle n^+ | (\partial_{P_Z} | n^+ \rangle) = 0, \quad (1.42c)$$

$$\Phi(\mathbf{P}) = \frac{1}{4(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)} + \frac{P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2}{2}, \quad (1.43)$$

$$E^+(\mathbf{X}) = \lambda(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{1/2}. \quad (1.44)$$

En analogía al procedimiento para el sistema anterior, realizamos las siguientes redefiniciones de operadores de posición

$$\tilde{X} \equiv X - A_{P_X}(\mathbf{P}) = X + \frac{P_Y P_Z}{2(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{1/2}(P_X^2 + P_Y^2)}, \quad (1.45a)$$

$$\tilde{Y} \equiv Y - A_{P_Y}(\mathbf{P}) = Y - \frac{P_X P_Z}{2(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{1/2}(P_X^2 + P_Y^2)}, \quad (1.45b)$$

$$\tilde{Z} \equiv Z - A_{P_Z}(\mathbf{P}) = Z, \quad (1.45c)$$

que producen las siguientes relaciones de conmutación entre sí

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = -iK_{P_X P_Y} = -\frac{iP_Z}{2(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{3/2}}, \quad (1.46a)$$

$$[\tilde{Y}, \tilde{Z}] = -iK_{P_Y P_Z} = -\frac{iP_X}{2(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{3/2}}, \quad (1.46b)$$

$$[\tilde{Z}, \tilde{X}] = -iK_{P_Z P_X} = -\frac{iP_Y}{2(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2)^{3/2}}. \quad (1.46c)$$

1.2 Constricción de partículas cuánticas mediante potenciales de confinamiento

En la exposición de este método de constricción de partículas, el artículo por Schuster & Jaffe[21] será seguido muy de cerca.

Existen muchas situaciones de interés en el contexto de la mecánica cuántica en que el movimiento de una partícula está constreñido a una subvariedad encajada en \mathbb{R}^n . El problema de constreñir es abordado usualmente de dos maneras distintas. El primer enfoque es el de la *cuantización intrínseca*, donde el hamiltoniano de la partícula se plantea en términos de coordenadas y momentos intrínsecos a la superficie encajada y se procede a cuantizar el sistema de modo canónico. Se puede decir pues que en este enfoque la constricción se realiza *a priori*, así como *a priori* se vuelve irrelevante el espacio ambiente y el sistema cuántico depende exclusivamente de las propiedades intrínsecas de la superficie encajada. El segundo enfoque introduce un *potencial de confinamiento*, donde la constricción se realiza suprimiendo la incursión de la partícula al espacio normal a la superficie a través de la imposición de un potencial sobre este espacio

1.2. Constricción de partículas cuánticas mediante potenciales de confinamiento

normal. Aquí, el movimiento normal a la superficie se fija en un estado de baja excitación, usualmente en el estado base. La intención es que la escala de la energía necesaria para que la partícula penetre en el espacio normal a la superficie sea mucho mayor a la asociada al movimiento en su espacio tangente. El comportamiento efectivo de la partícula tras constreñirla a la superficie depende tanto de la geometría intrínseca de ésta como de su encajamiento en el espacio ambiente.

Físicamente, las situaciones en que una partícula se encuentra constreñida a vivir en cierto espacio se deben a potenciales que ahí las mantienen confinadas. De ahí que emplear un potencial de confinamiento parece ser un método más realista de constreñir una partícula.

A continuación este formalismo será desarrollado. Antes que nada, consideraremos una partícula cuántica sin spin y un potencial escalar de confinamiento. El orden de la exposición será el siguiente: primero se mostrará la geometría del encajamiento de la subvariedad en el espacio ambiente, con el propósito principal de establecer un sistema local de coordenadas en el cual las coordenadas normales a la superficie queden bien distinguidas de las tangentes, y se reescribirá el hamiltoniano de la partícula en estas coordenadas; se impondrá un potencial escalar normal a la superficie y se fijará el movimiento de la partícula a uno de sus eigenestados normales; a continuación se derivará el hamiltoniano efectivo para el movimiento tangencial de la partícula.

1.2.1 Geometría de la subvariedad encajada

Sea M una superficie de dimensión m y x^μ un sistema local de coordenadas, $\mu = 1, \dots, m$. El encajamiento de M en \mathbb{R}^n ($n > m$) estará dado por un mapeo suave $\mathbf{R} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M al espacio ambiente \mathbb{R}^n . Introducimos un sistema de coordenadas adaptado a la superficie a través de un conjunto de m vectores linealmente independiente tangentes a un punto x de la superficie encajada,

$$\mathbf{t}_\mu(x) \equiv \partial_\mu \mathbf{R}(x), \quad (1.47)$$

y $n - m = p$ vectores normales a la superficie y mutuamente ortonormales, \mathbf{n}^i , $i = m + 1, \dots, n$. En una vecindad de la superficie M , las coordenadas de un punto \mathbf{r} del espacio euclidiano \mathbb{R}^n pueden expresarse del modo

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{R}(x) + y^i \mathbf{n}^i, \quad (1.48)$$

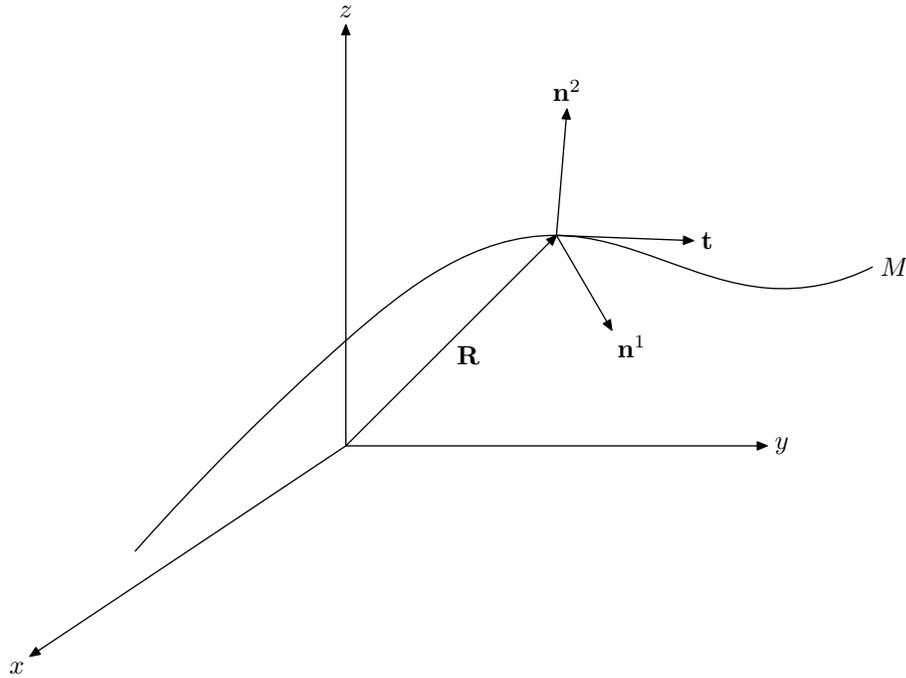


Figura 1.6. Los puntos cercanos a la superficie reciben coordenadas a través del marco adaptado \mathcal{F} .

donde y es el conjunto de distancias y^i a la superficie M en las direcciones normales \mathbf{n}^i y x se refiere al conjunto apropiado de coordenadas locales x^μ del punto de M al que nos referimos. Este es el marco adaptado \mathcal{F} a la superficie. La métrica para el marco \mathcal{F} está dada por

$$G_{AB} = \partial_A \mathbf{r} \cdot \partial_B \mathbf{r}. \quad (1.49)$$

En la expresión para la métrica, los índices $A, B = 1, \dots, n$ y las derivadas son tomadas respecto a las m coordenadas x^μ y las $n - m$ coordenadas y^i del marco

1.2. Constricción de partículas cuánticas mediante potenciales de confinamiento

adaptado \mathcal{F} . El producto punto es simplemente el producto interno euclidiano entre vectores en \mathbb{R}^n . Para obtener una forma explícita de G_{AB} en términos de la superficie M y su encajamiento, aplicamos una generalización de las ecuaciones de Frenet-Serret¹,

$$\partial_\nu \mathbf{n}^i = \alpha_\mu^{i\nu} \mathbf{t}_\mu - A_\mu^{ij} \mathbf{n}^j, \quad (1.50a)$$

$$\partial_\nu \mathbf{t}_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \mathbf{t}_\rho + \alpha_{\mu\nu}^i \mathbf{n}^i, \quad (1.50b)$$

donde los índices repetidos denotan una suma sobre sus valores y los coeficientes de las expansiones están determinados por

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{t}_\mu \cdot \mathbf{t}_\nu, \quad (1.51a)$$

$$\alpha_{\mu\nu}^i = \mathbf{t}_\mu \cdot \partial_\nu \mathbf{n}^i, \quad (1.51b)$$

$$A_\mu^{ij} = \mathbf{n}^i \cdot \partial_\mu \mathbf{n}^j. \quad (1.51c)$$

Estos coeficientes tienen un significado propio dentro del lenguaje de la geometría diferencial. $g_{\mu\nu}$ es la métrica inducida sobre la superficie M (primera forma fundamental), $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ se refiere a los símbolos de Christoffel y $\alpha_{\mu\nu}^i$ y A_μ^{ij} son la segunda forma fundamental y la forma fundamental normal, respectivamente. Seguimos la convención de que los índices inferiores en tensores se obtienen de índices superiores mediante contracción con $g_{\mu\nu}$.

Una observación importante es que la elección del marco adaptado no es única. Esta situación es producto de la libertad existente para escoger vectores base del espacio normal. Dado un conjunto de vectores base en el espacio normal, una rotación que preserve la ortogonalidad y la orientación de estos vectores genera un marco adaptado igualmente válido. Esta libertad está asociada entonces a $\text{SO}(p)$. Ante una rotación $R^{ij}(x)$ de los vectores normales, $\alpha_{\mu\nu}^i$ transforma como un vector y A_μ^{ij} como una conexión de norma de $\text{SO}(p)$, es decir, bajo la transformación $\mathbf{n}^i \rightarrow R^{ij} \mathbf{n}^j$, ocurre

$$\alpha_{\mu\nu}^i \longrightarrow R^{ij} \alpha_{\mu\nu}^j, \quad (1.52a)$$

$$A_\mu^{ij} \longrightarrow R^{ik} A_\mu^{kl} R^{jl} + R^{ik} \partial_\mu R^{jk}. \quad (1.52b)$$

¹En [21], el signo de $\alpha_\mu^{i\nu}$ es incorrecto.

Usando la definición de la métrica G_{AB} y las ecuaciones generalizadas de Frenet-Serret, la expresión para la métrica G_{AB} resulta

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu} + y^k y^l A_\mu^{kh} A_\nu^{lh} & y^k A_\mu^{jk} \\ y^k A_\nu^{ik} & \delta^{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

donde²

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2y^k \alpha_{\mu\nu}^k + y^k y^l \alpha_{\mu\rho}^k g^{\rho\sigma} \alpha_{\sigma\nu}^l. \quad (1.54)$$

Es fácil mostrar que $\det G = \det \gamma$ y que el inverso de la métrica G_{AB} es

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} \lambda^{\mu\nu} & \lambda^{\mu\sigma} y^k A_\sigma^{kj} \\ \lambda^{\nu\sigma} y^k A_\sigma^{ki} & \delta^{ij} + y^k y^l A_\sigma^{ik} A_\rho^{jl} \lambda^{\sigma\rho} \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

siendo $\lambda^{\mu\nu} \equiv (\gamma^{-1})_{\mu\nu}$ la matriz inversa de $\gamma_{\mu\nu}$.

Hemos desarrollado una descripción del espacio euclidiano \mathbb{R}^n cercano a M donde las coordenadas tangentes y las coordenadas normales están claramente diferenciadas, así como la estructura diferencial de esta descripción. Una vez logrado esto, continuamos con la implementación de la dinámica de una partícula en esta descripción.

1.2.2 Comportamiento efectivo de la partícula

La descripción de la dinámica de una partícula constreñida a la superficie M está determinada por la sujeción de la partícula a un potencial escalar que implementa este confinamiento. El hamiltoniano de la partícula es el hamiltoniano de una partícula libre en \mathbf{R}^n , un laplaciano en \mathbf{R}^n , más el término del potencial que realiza el confinamiento. En coordenadas cartesianas, la expresión del laplaciano es muy sencilla, mientras que la del potencial es complicada. En cambio, en el marco adaptado a la superficie, el laplaciano se complica mientras que la expresión del potencial es muy sencilla. Seguiremos este último camino. Una vez obtenido el hamiltoniano de la partícula, este será proyectado sobre el estado correspondiente al movimiento normal para obtener el hamiltoniano efectivo de la partícula que describe su movimiento a lo largo de M .

²De la discrepancia de signo en la definición de $\alpha_\mu^{i\nu}$ con [21] se introduce una discrepancia en la definición de $\gamma_{\mu\nu}$.

1.2. Constricción de partículas cuánticas mediante potenciales de confinamiento

En coordenadas cartesianas z^A , $A = 1, \dots, n$, y en unidades donde \hbar y la masa de la partícula son la unidad, el hamiltoniano H_E de la partícula se escribe como

$$H_E = -\frac{1}{2}\partial_A\partial_A + V, \quad (1.56)$$

donde V es el potencial de confinamiento que depende únicamente de las coordenadas normales y^i a la superficie. La condición de normalización de las funciones de onda Φ es simplemente

$$\int d^n z \Phi^* \Phi = 1. \quad (1.57)$$

Escogiendo ahora las coordenadas del marco adaptado, el hamiltoniano tiene la forma

$$H_E = \frac{1}{2|G|^{1/2}}\partial_A G^{AB}|G|^{1/2}\partial_B + V, \quad (1.58)$$

mientras que la condición de normalización adopta la forma

$$\int |G|^{1/2} d^m x d^p y \Phi^* \Phi = 1. \quad (1.59)$$

En general, $|A|$ denota el determinante de la matriz A . Para que las funciones de onda Φ en estas coordenadas puedan ser interpretadas como amplitudes de probabilidad de una partícula moviéndose en M , tenemos que reescalarlas por el factor $|G|^{1/4}/|g|^{1/4}$, donde $|g| \equiv \det(g_{\mu\nu})$. Definimos entonces $\Psi = |G|^{1/4}/|g|^{1/4}\Phi$. A su vez, el hamiltoniano tiene que ser conjugado por el mismo factor para que las funciones de onda reescaladas sean sus eigenfunciones, por lo que definimos

$$H \equiv \frac{|G|^{1/4}}{|g|^{1/4}} H_E \frac{|g|^{1/4}}{|G|^{1/4}}. \quad (1.60)$$

Tras esto la condición de normalización para las funciones Φ induce la condición de normalización para las funciones reescaladas

$$\int |g|^{1/2} d^m x d^p y \Psi^* \Psi = 1, \quad (1.61)$$

de tal forma que $\int d^p y \Psi^* \Psi$ es interpretado como la densidad de probabilidad para un partícula constreñida a M respecto a la medida sobre la superficie $|g|^{1/2} d^m x$.

Ahora, usando la forma explícita de G_{AB} y su determinante, podemos obtener la forma de H . Definiendo los operadores $\hat{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{2}iA_\mu^{ij}L_{ij}$, donde los $L_{ij} = i(y^j\partial_i - y^i\partial_j)$ son los operadores de momento angular definidos sobre el espacio normal a M , podemos escribir muy sucintamente al hamiltoniano reescalado

$$H = -\frac{1}{2|\gamma|^{1/4}}\partial_i|\gamma|^{1/2}\partial_i\frac{1}{|\gamma|^{1/4}} - \frac{1}{2|g|^{1/4}|\gamma|^{1/4}}\hat{\partial}_\mu\lambda^{\mu\nu}|\gamma|^{1/2}\hat{\partial}_\nu\frac{|g|^{1/4}}{|\gamma|^{1/4}} + V(y). \quad (1.62)$$

Ahora falta implementar la constricción de la partícula a M mediante el potencial de confinamiento. Es decir, hace falta dar la forma explícita de V . Esto es sencillo. Recordamos, en primer lugar, que V es función únicamente de las coordenadas normales a la superficie y, en segundo lugar, que para que esta constricción sea efectiva, V debe poseer un mínimo profundo en cada $y^i = 0$. Debido a este mínimo, podemos expandir el potencial en potencias de y^i alrededor de $y^i = 0$ de la manera

$$V(y^i) = \frac{1}{2}\omega^2 y^{i2} + O(y^3). \quad (1.63)$$

El hecho de que escribamos una sola frecuencia ω proviene de la suposición de que la forma del potencial es simétrica entre las distintas direcciones normales, por lo menos hasta orden cuadrático. Debido a este mínimo profundo, podemos despreciar términos de órdenes cúbico y superiores de la expansión. Esto significa que consideramos que ω es mucho más grande que la escala de curvaturas de la superficie, denotada por κ , es decir, que $\omega \gg \kappa^2$. Para simplificar el análisis posterior, las siguientes redefiniciones son útiles. En primer lugar, introducimos un parámetro adimensional η que contenga la información de la escala de frecuencia mediante la redefinición $\omega \rightarrow \omega/\eta^2$. De este modo, ω es del mismo orden de κ^2 y η debe ser muy pequeño. En tanto que, de hecho, quisieramos tomar el límite $\eta \rightarrow 0$, este se vuelve un parámetro perturbativo natural de este formalismo. Por otro lado, redefinimos las coordenadas normales del modo $y^i \rightarrow \eta y^i$. Todo esto nos facilita realizar el límite $\eta \rightarrow 0$. Aplicando lo anterior al hamiltoniano H , expandiendo sus términos en potencias de η y agrupando

1.2. Constricción de partículas cuánticas mediante potenciales de confinamiento

los términos resultantes, este queda expresado como

$$H = \frac{1}{\eta^2} H_{-2} + H_0 + O(\eta), \quad (1.64)$$

donde

$$H_{-2} = -\frac{1}{2} \left(\partial_i \partial_i - \omega^2 y^i{}^2 \right) \quad (1.65)$$

y

$$\begin{aligned} H_0 = & -\frac{1}{2g^{1/2}} \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} A_\mu^{ij} L_{ij} \right) g^{\mu\nu} g^{1/2} \left(\partial_\nu + \frac{i}{2} A_\nu^{kl} L_{kl} \right) \\ & + \frac{1}{8} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \left(\alpha_{\mu\nu}^i \alpha_{\rho\sigma}^i - 2\alpha_{\mu\rho}^i \alpha_{\nu\sigma}^i \right) \end{aligned} \quad (1.66)$$

El término H_{-2} de la expansión perturbativa (1.66) es el hamiltoniano de un oscilador armónico de p dimensiones definido sobre el espacio normal a M . El orden de este término es η^{-2} , de modo que con η tan pequeño como deseemos podemos asociarle una escala de energía arbitrariamente grande al movimiento normal a la superficie. Como, de hecho, nos interesa el límite $\eta \rightarrow 0$, ignoramos los términos del hamiltoniano de órdenes positivos de η , es decir, preservamos los términos relevantes H_{-2} y H_0 .

El hamiltoniano efectivo para el movimiento tangente a la superficie se obtiene fijando el movimiento normal a ella. Para efectuar esto, separamos la función de onda de la partícula en un término para el movimiento tangente, dependiente de las coordenadas x^μ , y en un término para el movimiento normal, dependiente de las coordenadas y^i , del modo

$$\Psi(x, y) = \sum_{\beta} \psi_{\beta}(x) \chi_{\beta}(y), \quad (1.67)$$

donde el índice $\beta = 1, \dots, d$ enumera los estados degenerados del hamiltoniano H_{-2} que gobierna el movimiento normal a la superficie. Podemos restringirnos a un sólo subespacio degenerado, pues la diferencia entre su energía es tan grande que transiciones provocadas por el movimiento tangencial quedan descartadas. La degeneración de H_{-2} se debe a la simetría $SO(p)$ del potencial de confinamiento V . La función $\chi_{\beta}(y)$ obedece

$$H_{-2} \chi_{\beta}(y) = E_{-2} \chi_{\beta}(y), \quad (1.68)$$

donde E_{-2} es la contribución a orden η^{-2} a la energía total de la partícula. Tras proyectar el espacio de estados generados por $\chi_1(y), \dots, \chi_d(y)$ sobre H_0 , se obtiene una matriz \mathcal{H} de dimensión $d \times d$ cuyas componentes son

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \int d^p y \chi_\alpha^*(y) H_0 \chi_\beta(y). \quad (1.69)$$

\mathcal{H} actúa sobre funciones de onda ψ , con componentes ψ_β , y la dinámica sobre la superficie está determinada por la ecuación

$$\mathcal{H}\psi = E_0\psi, \quad (1.70)$$

donde E_0 es la contribución a orden 0 en η a la energía total de la partícula.

1.3 Elementos de teoría cuántica de campos

Si x y p son la posición y el momento canónico de una partícula, la primera cuantización se efectúa promoviendo a x y p a operadores en un espacio de Hilbert. Este espacio de Hilbert es el conjunto de estados de la partícula y su representación en el espacio de coordenadas es la función de onda, que es simplemente una función compleja. El proceso de cuantización de un campo sigue un camino similar. Aquí, tanto el campo como su momento conjugado son promovidos a operadores que actúan sobre los elementos de una suma directa de espacios de Hilbert, llamada espacio de Fock. El resultado es una teoría cuántica de campos.

A continuación, introduciremos los elementos necesarios de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la dinámica de un campo necesarias para, de inmediato, llevar a cabo su cuantización.

1.3.1 Teoría clásica de campos

El punto de partida de la formulación lagrangiana de un campo escalar es la observación de que sus ecuaciones de movimiento satisfacen un principio variacional. Consideremos un campo escalar $\varphi(t, \mathbf{x})$, una función real del espacio-

1.3. Elementos de teoría cuántica de campos

tiempo. Sea la acción asociada a este campo

$$S = \int dt dx^3 \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad (1.71)$$

donde \mathcal{L} es nombrada la *densidad lagrangiana* a causa del simple hecho de que el lagrangiano está dado por su integral en todo el espacio $\int dx^3 \mathcal{L}$. Como la densidad lagrangiana será nuestro objeto de análisis, por simplicidad nos referimos a ella como el *lagrangiano*. En este caso, lo hemos tomado como función del campo y sus primeras derivadas, como es usual hacerlo para simplificar los cálculos.

El campo $\varphi(t, \mathbf{x})$ genera una hipersuperficie R de dimensión 4 encajada en el espacio 5-dimensional que contiene su gráfica. La frontera ∂R está definida por las hipersuperficies tipo espacio inicial y final $t = t_i$ y $t = t_f$. Realizamos una variación del campo manteniendo la frontera ∂R fija. Esto induce una variación de la acción. El principio variacional a que aludíamos inicialmente afirma que la historia del campo, su forma en el espacio-tiempo, realizada físicamente es aquella en que la variación de la acción, bajo una variación de los campos, es nula. La búsqueda de los extremos de la acción produce la siguiente ecuación diferencial[18], llamada de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0, \quad (1.72)$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $x^0 = t$. Esta es la ecuación de movimiento del campo φ , que involucra al campo y a sus primeras derivadas. La solución de la ecuación (1.72) describe la configuración del campo en el espacio-tiempo. Es posible mostrar que si el lagrangiano contiene derivadas de segundo orden de los campos, la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi)} \right) = 0. \quad (1.73)$$

La conexión de la formulación lagrangiana con la hamiltoniana comienza por la definición del momento conjugado del campo $\pi(x^\mu)$ mediante

$$\pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \varphi(t, \mathbf{x}))}. \quad (1.74)$$

La definición del hamiltoniano es una transformada de Legendre del lagrangiano, del espacio de los campos y sus velocidades al espacio de los campos y sus momentos conjugados, dada por

$$H = \int dx^3 (\pi(t, \mathbf{x}) \partial_t \varphi(t, \mathbf{x}) - \mathcal{L}). \quad (1.75)$$

Tras la definición del hamiltoniano y del momento conjugado hemos llegado al punto de partida de la cuantización del campo.

1.3.2 Cuantización del campo

El procedimiento siguiente describe la cuantización de un campo no-relativista. Lo que obtendremos al final del proceso es un campo cuántico. En este proceso, la etapa inicial, en que el campo formalmente se considera cuántico, consiste en la promoción del campo y de su momento conjugado a operadores en cierto espacio. Esto preserva una analogía con el método de cuantización en que la posición x y el momento p de una partícula son promovidos a operadores hermitianos en un espacio de Hilbert. En este caso, el campo φ juega el papel de la posición x y su momento conjugado π el del momento p . Las relaciones de conmutación a las que están sujetos el campo y su momento son análogas asimismo a las relaciones de conmutación canónicas de la mecánica cuántica ordinaria, en este caso llamadas relaciones de conmutación *a tiempos iguales*, dadas por

$$[\varphi(t, x), \pi(t, x')] = i\delta(x - x'), \quad (1.76)$$

$$[\varphi(t, x), \varphi(t, x')] = [\pi(t, x), \pi(t, x')] = 0. \quad (1.77)$$

Usando una base discreta de funciones $\{\psi_k\}$, podemos escribir al operador de campo $\varphi(t, x)$ como una serie de la forma

$$\varphi(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(t) \psi_k(x). \quad (1.78)$$

Realizando una expansión análoga para el momento conjugado obtenemos formalmente

$$\pi(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi_k(t) \psi_k^*(x). \quad (1.79)$$

1.3. Elementos de teoría cuántica de campos

Esta expansión proviene de que la base de funciones $\{\psi_k\}$ sea completa y de la obtención del momento conjugado a través de la ecuación (1.74). Las funciones $\varphi_k(t)$ y $\pi_k(t)$ se asumen como operadores para que el campo y su momento conjugado retengan esa naturaleza, mientras que $\psi_k(x)$ es una función. Esta elección es arbitraria, aunque haciendo las cosas así los operadores siguen guardando una dependencia temporal.

Las relaciones que deben satisfacer tanto los operadores $\varphi_k(t)$, $\pi_k(t)$ como las funciones $\psi_k(x)$ son obtenidas de las relaciones de conmutación a tiempos iguales (1.76). Sustituyendo la expansión del campo (1.78) y el momento conjugado (1.79) en (1.76) obtenemos

$$\begin{aligned} [\varphi(t, x), \pi(t, x')] &= \left[\sum_j \varphi_j(t) \psi_j(x), \sum_k \pi_k(t) \psi_k^*(x') \right], \\ &= \sum_j \sum_k [\varphi_j(t), \pi_k(t)] \psi_j(x) \psi_k^*(x'), \\ &= i\delta(x - x'). \end{aligned} \tag{1.80}$$

Como se supone que el conjunto de funciones $\{\psi_k\}$ es completo, entonces

$$\sum_k \psi_k(x) \psi_k^*(x') = \delta(x - x'), \tag{1.81}$$

de modo que para que la última igualdad de (1.80) sea válida, la condición

$$[\varphi_j(t), \pi_k(t)] = i\delta_{jk} \tag{1.82}$$

debe ser satisfecha. De modo análogo se demuestra que las dos relaciones de conmutación restantes en (1.76) conducen a las siguientes relaciones

$$[\varphi_j(t), \varphi_k(t)] = [\pi_j(t), \pi_k(t)] = 0. \tag{1.83}$$

Hasta aquí nos es posible hablar en términos tan generales, es decir, sin considerar a algún lagrangiano específico. La promesa de este procedimiento es que los operadores $\varphi_k(t)$, $\pi_j(t)$ nos permitirán construir o serán ellos mismos operadores de creación y aniquilación de los modos de expansión del campo, lo que nos permitirá construir el espacio completo de estados que describan la

configuración del campo. A este espacio de estados se le llama espacio de Fock, el cual será una suma directa infinita de conjuntos de estados ortonormales completos, uno para cada modo de expansión del campo. Será más adelante, en la aplicación misma de este método, contando con un lagrangiano dado y con una expansión del campo, que se apreciará su utilidad.

CAPÍTULO 2

CONSTRICCIÓN DE UNA PARTÍCULA CUÁNTICA A UNA CUERDA

El mecanismo de *backreaction* existente en la evolución adiabática de un sistema cuántico se desenvuelve en dos momentos que, para el caso particular considerado en esta tesis, son desarrollados en este capítulo.

El primer momento consiste en analizar a un sistema cuántico cuya dinámica, en virtud de un mecanismo dado, depende de un conjunto de parámetros externos, los cuales varían adiabáticamente. De este modo la evolución temporal de los eigenestados del sistema queda determinada, con la característica de que estos permanecen básicamente fijos respecto a los valores instantáneos que asumen los parámetros. El segundo momento es muy interesante, pues en este se analiza el efecto que tiene el *congelamiento* del sistema cuántico sobre el ambiente que provee los parámetros, considerado en sí mismo como un sistema físico con dinámica propia, mediante la obtención de un hamiltoniano efectivo. En este hamiltoniano efectivo aparecen cantidades asociadas a las fases de Berry.

Al primer momento se corresponde la primera sección de este capítulo. En esta, se estudia una partícula cuántica confinada a una cuerda cuya geometría es realizada como un círculo deformado adiabáticamente. Se desarrolla el formalismo de confinamiento a una curva general y el modo en que el hamiltoniano de la partícula se acopla a la forma de la cuerda y a la velocidad de su deformación, en particular a los modos de Fourier de un campo de deformación,

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

como parámetros externos. La discusión del espacio de parámetros comienza a ser desarrollada en la segunda sección, es decir, se presenta a la cuerda como un sistema cuántico con una dinámica propia, correspondiente al hecho de que se trata de una cuerda elástica cuya configuración de equilibrio es un círculo que puede curvarse pero difícilmente estirarse. Se obtienen las coordenadas más apropiadas para su análisis y se identifica su espacio de estados.

Las conclusiones de este mecanismo de *backreaction* —la acumulación de fases geométricas no triviales en la evolución de los estados de la partícula y el efecto de la presencia de la partícula cuántica sobre la dinámica de la cuerda— se reservan para el siguiente capítulo.

2.1 La partícula

En esta sección, la discusión se centrará en el análisis de la dinámica de la partícula cuántica. Esta se trata de una partícula cuántica confinada a una vecindad de una cuerda. El confinamiento de la partícula se efectúa a través de un mecanismo físicamente realista presentado en la sección (1.2), consistente en la imposición de un fuerte potencial definido sobre el espacio normal a la cuerda, cuyo propósito es suprimir el movimiento de la partícula fuera de la cuerda. La dinámica resultante de la partícula hallará su expresión en un hamiltoniano efectivo, que reflejará tanto la geometría de la cuerda como el hecho de que esta posee una dinámica propia. Los detalles de todo este mecanismo de confinamiento serán expuestos a continuación.

2.1.1 Confinamiento a una curva en el espacio euclidiano tridimensional

En la sección (1.2) se presentó un método de constricción de partículas cuánticas mediante potenciales de confinamiento. Dada una superficie M a la cual debe ser confinada la partícula, el espacio total es separado en un espacio tangente y un espacio normal a M a través de la construcción de un marco adaptado a la superficie. Sobre el espacio normal se introduce un potencial de oscilador

2.1. La partícula

armónico, debido a que posee un fuerte mínimo sobre la superficie M . Por lo tanto, las brechas de energía entre niveles adyacentes son grandes y, al fijar su estado normal a un eigenestado del oscilador, logramos que la partícula quede confinada de modo efectivo. La fuerza del potencial normal viene modulada por un factor η , que sirve de factor perturbativo en el formalismo. Hasta este punto, la conclusión a que se llega es que el hamiltoniano efectivo en el espacio total que gobierna a la partícula es

$$H = \frac{1}{\eta^2} H_{-2} + H_0 + O(\eta), \quad (2.1)$$

donde

$$H_{-2} = -\frac{1}{2} \left(\partial_i \partial_i - \omega^2 y^i{}^2 \right), \quad (2.2a)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2g^{1/2}} \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} A_\mu^{ij} L_{ij} \right) g^{\mu\nu} g^{1/2} \left(\partial_\nu + \frac{i}{2} A_\nu^{kl} L_{kl} \right) + \frac{1}{8} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \left(\alpha_{\mu\nu}^i \alpha_{\rho\sigma}^i - 2\alpha_{\mu\rho}^i \alpha_{\nu\sigma}^i \right). \quad (2.2b)$$

y $g_{\mu\nu}$, $\alpha_\mu^{i\nu}$ y A_μ^{ij} son las formas fundamentales primera, segunda y normal del marco adaptado, respectivamente, según fueron definidas en (1.51); los L_{ij} son operadores de momento angular en el espacio normal, e índices griegos etiquetan a las coordenadas tangentes, mientras que los índices latinos etiquetan a las coordenadas normales.

La situación que se nos presenta involucra a una cuerda ubicada en el espacio físico tridimensional. Para analizar esta situación, el encajamiento de una curva general en el espacio tridimensional será desarrollado y, posteriormente, será aludido el caso concreto de la cuerda cuántica. De igual manera, realizaremos el análisis de la constricción considerando la curva a un tiempo fijo, más adelante consideraremos una posible evolución temporal.

Escribimos las coordenadas de un punto en la vecindad de la cuerda como

$$\mathbf{r}(s, \alpha, \beta) = \mathbf{R}(s) + \eta\alpha\mathbf{N} + \eta\beta\mathbf{B}. \quad (2.3)$$

En la expresión anterior, $\mathbf{R}(s)$ es el encajamiento de la curva, parametrizada por longitud de arco s . El vector tangente a la curva es $\partial_s \mathbf{R} = \mathbf{T}$, el cual,

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

junto con $\mathbf{N} = \partial_s \mathbf{T} / |\partial_s \mathbf{T}|$ y $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, forma una triada de vectores unitarios ortogonales. Como únicamente existe una coordenada del espacio tangente, los índices griegos serán omitidos. Retomando la forma de las ecuaciones de Frenet-Serret para la triada, con curvatura κ y torsión τ de la curva, podemos de inmediato identificar los coeficientes de las formas fundamentales (1.51),

$$g = 1, \quad (2.4a)$$

$$\alpha^1 = -\kappa, \quad \alpha^2 = 0, \quad (2.4b)$$

$$A^{11} = A^{22} = 0, \quad A^{12} = -A^{21} = -\tau. \quad (2.4c)$$

La elección de los vectores \mathbf{N} y \mathbf{B} , pertenecientes a la triada de Frenet, como base del espacio normal a la curva fija la libertad de norma SO(2) asociada. La métrica tridimensional correspondiente a las coordenadas (s, α, β) es

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} (1 - \eta\alpha\kappa)^2 + \eta^2(\alpha^2 + \beta^2)\tau^2 & -\eta^2\beta\tau & \eta^2\alpha\tau \\ -\eta^2\beta\tau & \eta^2 & 0 \\ \eta^2\alpha\tau & 0 & \eta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

cuyo determinante es

$$G = \eta^4(1 - \eta\alpha\kappa)^2. \quad (2.6)$$

Una vez que tenemos dispuesta la información geométrica del encajamiento de la curva, para el caso en cuestión los componentes del hamiltoniano tridimensional (2.2) de la partícula se reducen a

$$H_{-2} = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2) + \frac{1}{2}\omega^2(\alpha^2 + \beta^2), \quad (2.7a)$$

$$H_0 = -\frac{1}{2}(\partial_s - i\tau L)^2 - \frac{\kappa^2}{8}, \quad (2.7b)$$

con $L = -i(\alpha\partial_\beta - \beta\partial_\alpha)$ el operador de momento angular definido en el espacio normal. H_0 es el hamiltoniano para el movimiento tangente de la partícula en presencia de un campo de norma SO(2) de fondo y un potencial inducido por la geometría de la curva. Por otro lado, H_{-2} es el hamiltoniano para el movimiento en el espacio normal en un potencial de oscilador armónico bidimensional simétrico en ambas direcciones. Es importante mencionar que cada

2.1. La partícula

uno de los eigenestados de H_{-2} , a excepción del estado base, pertenece a un subespacio degenerado de $n + 1$ elementos para cada nivel de excitación n .

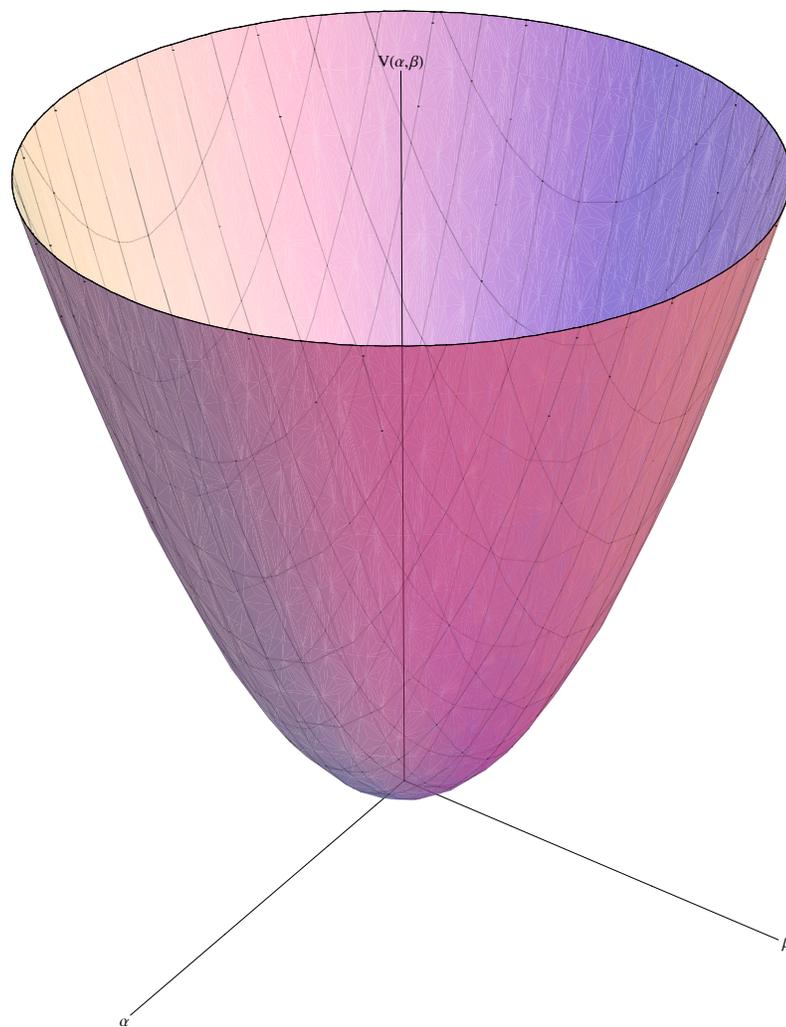


Figura 2.1. Gráfica del potencial de confinamiento, definido en el plano normal sobre cada punto de la curva.

La función de onda de la partícula se puede factorizar en una función de onda

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

para el movimiento tangente y otra para el movimiento normal de la manera

$$\Psi^\sigma(s, \alpha, \beta) = \psi^\sigma(s)\chi^\sigma(\alpha, \beta), \quad (2.8)$$

donde σ etiqueta de algún modo a cada uno de los estados degenerados. El modo en que el hamiltoniano tangente se acopla a los grados de libertad normales es a través de la presencia de L , de modo que, para que el hamiltoniano efectivo tangente de la partícula (1.69) quede diagonalizado, $\chi^\sigma(\alpha, \beta)$ debe ser eigenestado simultáneo de H_{-2} y L . Esto es posible porque H_{-2} y L conmutan. Entonces, la función de onda normal, en el n -ésimo nivel de excitación, debe satisfacer las ecuaciones

$$H_{-2}\chi^\sigma = \omega(n+1)\chi^\sigma, \quad (2.9a)$$

$$L\chi^\sigma = \sigma\chi^\sigma, \quad (2.9b)$$

con $\sigma = -n, -n+2, \dots, n-2, n$. Una exposición del cambio de base de número $\{|n_1, n_2\rangle\}$ a la de base de eigenestados simultáneos de H y L , $\{|n, \sigma\rangle\}$, donde $n = n_1 + n_2$ y $\sigma = n_1 - n_2$, se encuentra en [14], [19]. Al proyectar estos estados sobre el hamiltoniano efectivo tridimensional, obtenemos el hamiltoniano efectivo de la partícula sobre el espacio tangente

$$\mathcal{H}^\sigma = -\frac{1}{2}(\partial_s - i\sigma\tau)^2 - \frac{\kappa^2}{8}. \quad (2.10)$$

La expresión de este hamiltoniano contiene información tanto de la geometría de la curva a través de la curvatura y la torsión, como información del encajamiento en el espacio total a través de un campo de fondo relacionado con la elección de coordenadas normales.

2.1.2 Perturbaciones dependientes de la deformación de la curva

Consideremos una pequeña deformación de la curva $\mathbf{R}(s)$. Esta puede ser descrita por un campo de deformación \mathbf{v} sobre la curva, de modo que el encajamiento de la curva deformada quede expresado como

$$\mathbf{R}(s) \longrightarrow \mathbf{R}(s) + \xi\mathbf{v}(s). \quad (2.11)$$

2.1. La partícula

Esta deformación introduce modificaciones en la curvatura y la torsión a primer orden en ξ del tipo

$$\kappa \longrightarrow \kappa + \xi \kappa_\xi, \quad (2.12a)$$

$$\tau \longrightarrow \tau + \xi \tau_\xi. \quad (2.12b)$$

La forma de estas modificaciones es muy complicada, sin embargo, por ejemplo, para deformaciones de un círculo unitario, donde $\kappa = 1$ y $\tau = 0$, estas toman la siguiente forma

$$\kappa_\xi = v^n + \partial_s^2 v^n, \quad (2.13a)$$

$$\tau_\xi = \partial_s v^b + \partial_s^3 v^b. \quad (2.13b)$$

En este caso, el hamiltoniano tangente no se modifica únicamente por la sustitución de la nueva información geométrica (2.12) en (2.10). Como la deformación no necesariamente debe preservar la longitud de arco localmente, la parametrización de la curva original bien puede dejar de ser la longitud de arco de la curva deformada. El efecto que tiene esto en el formalismo es una modificación de la métrica tridimensional en las coordenadas adaptadas a la curva deformada. Las componentes de la métrica que requieren modificación son aquellas formadas por derivadas respecto a la longitud de arco de la curva deformada. Si esta última se llama s y la de la curva original es u , entonces $\partial_s = (\partial u / \partial s) \partial_u \equiv \rho \partial_u$. Por lo tanto, la forma final de la métrica es

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} [(1 - \eta\alpha\kappa)^2 + \eta^2(\alpha^2 + \beta^2)\tau^2] \rho^2 & -\eta^2 \beta \tau \rho & \eta^2 \alpha \tau \rho \\ -\eta^2 \beta \tau \rho & \eta^2 & 0 \\ \eta^2 \alpha \tau \rho & 0 & \eta^2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

con determinante

$$G = \eta^4 (1 - \eta\alpha\kappa)^2 \rho^2. \quad (2.15)$$

La dependencia en la métrica tridimensional del campo de deformación está contenida en ρ . Tenemos que $\rho = 1 + \xi(\partial_s v^t - \kappa v^n)$, es decir, la presencia de esta dependencia está precisamente mediada por la condición de preservación

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

local de longitud de arco. A la vez, la métrica tangente deja de ser trivial y resulta, en cambio,

$$g = \rho^2, \quad (2.16)$$

la primer entrada de la métrica tridimensional evaluada sobre la curva ($\alpha = \beta = 0$). A continuación se calcula el hamiltoniano efectivo según (2.2), obteniéndose

$$\mathcal{H}^\sigma \longrightarrow \mathcal{H}^\sigma + \xi \mathcal{H}_\xi^\sigma, \quad (2.17)$$

donde los términos de primer orden en la amplitud del campo de deformación quedan agrupados en \mathcal{H}_ξ^σ . Para el caso del círculo deformado, la contribución al hamiltoniano debido al campo de deformación es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\xi^\sigma = & -\frac{1}{4}v^n - \frac{1}{4}\partial_s^2 v^n + \frac{i}{2}\sigma\partial_s^2 v^b + \frac{i}{2}\sigma\partial_s^4 v^b \\ & + \left(i\sigma\partial_s v^b - \frac{1}{2}\partial_s v^n + \frac{1}{2}\partial_s^2 v^t + i\sigma\partial_s^3 v^b \right) \partial_s + (-v^n + \partial_s v^t) \partial_s^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1.3 Perturbaciones dependientes de la velocidad de la curva

El procedimiento para obtener el hamiltoniano tangente de la partícula comenzó por la elección de la descripción del problema en las coordenadas del marco adaptado a la curva (s, α, β) . Este marco adaptado fue considerado fijo en el tiempo. No obstante, si existe una dependencia temporal en las coordenadas adaptadas de un punto fijo en el espacio cartesiano, aparecen modificaciones en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el movimiento tangente, debidas a la transformación de la derivada temporal bajo el cambio de coordenadas cartesianas a adaptadas a la curva. Si esta dependencia temporal no es explícita, sino a través de un conjunto de parámetros ξ , el cambio de coordenadas es de la forma

$$(x^i, t) \longrightarrow (y^i, t'), \quad y^i = y^i(x^j; \xi(t)), \quad t' = t, \quad (2.19)$$

y la transformación de la derivada temporal tiene la forma

$$\partial_t = \partial_{t'} + \dot{\xi} \left(\frac{\partial s}{\partial \xi} \partial_s + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \partial_\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \partial_\beta \right) \equiv \partial_{t'} + \dot{\xi} \mathbf{U}. \quad (2.20)$$

Además del operador de derivada temporal en el marco adaptado, aparece un término adicional debido a la dependencia sobre cada una de las coordenadas

2.1. La partícula

adaptadas del parámetro ξ . Este último término aparecerá como un término inercial $-i\dot{\xi}\mathbf{U}$ en el hamiltoniano tangente. Para incluirlo en el hamiltoniano tangente, es necesario conjugarlo por $g^{1/4}/G^{1/4}$ y obtener el valor de expectación del operador resultante cuando el estado normal es χ^σ .

Para construir el hamiltoniano efectivo, debemos primero conjugar ambos lados de la ecuación de Schrödinger por $g^{1/4}/G^{1/4}$. Al realizar la conjugación de la derivada parcial respecto a t' , resulta un término adicional de la forma

$$-i\frac{G^{1/4}}{g^{1/4}}\partial_{t'}\frac{g^{1/4}}{G^{1/4}} = -i\dot{\xi}\frac{G^{1/4}}{g^{1/4}}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{g^{1/4}}{G^{1/4}}. \quad (2.21)$$

Debido a la dependencia implícita de las coordenadas adaptadas en la amplitud de la deformación, este término viene multiplicado por $\dot{\xi}$. Al hamiltoniano efectivo tangente debe añadirse el resultado de obtener el valor de expectación de este término respecto al estado χ^σ .

Para encontrar la forma explícita de estas contribuciones en las componentes del campo de deformación, observamos primero que \mathbf{U} es el campo de velocidades de puntos con coordenadas cartesianas fijas vistos en el sistema de coordenadas adaptadas bajo cambios del parámetro ξ . Para obtener una expresión de \mathbf{U} en términos de las coordenadas adaptadas, recordamos, en primer lugar, que las coordenadas cartesianas de un punto en la vecindad de la curva deformada \mathbf{R} están dadas por

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} + \eta\alpha\mathbf{N} + \eta\beta\mathbf{B}. \quad (2.22)$$

Es fácil demostrar ahora que $\mathbf{U} = -\partial_\xi\mathbf{x}$, pues simplemente reconocemos que las coordenadas adaptadas son función tanto de las coordenadas cartesianas como del valor de los parámetros ξ , es decir, $s^i = s^i(\mathbf{x}; \xi)$. De igual manera, $x^j = x^j(\mathbf{s}; \xi)$. Eligiendo un punto arbitrario \mathbf{u} , la condición de que unas coordenadas sean inversas de otras queda expresada en la relación $u^i = x^i(\mathbf{s}(\mathbf{u}; \xi); \xi)$. Derivando esta relación respecto a ξ , obtenemos que

$$0 = \frac{\partial x^i}{\partial s^j} \frac{\partial s^j}{\partial \xi} + \frac{\partial x^i}{\partial \xi}, \quad (2.23)$$

lo cual implica que \mathbf{U} y $-\partial_\xi\mathbf{x}$ son de hecho el mismo vector, pues los factores que acompañan a las parciales $(\partial s^j/\partial \xi)$ son justamente los elementos de la matriz

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

jacobiana asociada al cambio de coordenadas adaptadas a cartesianas. Tomando $\mathbf{N} = \eta^{-1}\partial_\alpha$ y $\mathbf{B} = \eta^{-1}\partial_\beta$, es un ejercicio directo mostrar que $\partial_\xi \mathbf{T} = \partial_s \mathbf{v}$, $\partial_\xi \mathbf{N} = \kappa^{-1}[\partial_s^2 \mathbf{v} - ((\partial_s^2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}]$ y $\partial_\xi \mathbf{B} = (\partial_s \mathbf{v}) \times \mathbf{N} + \kappa^{-1} \mathbf{T} \times [\partial_s^2 \mathbf{v} - ((\partial_s^2 \mathbf{v}) \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}]$ y que, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathbf{x} &= \mathbf{v} + \eta\alpha\partial_\xi \mathbf{N} + \eta\beta\partial_\xi \mathbf{B} \\ &= [v^t - \eta\alpha(\partial_s v^n - \tau v^b + \kappa v^t) - \eta\beta(\tau v^n + \partial_s v^b)] \partial_s \\ &\quad + \frac{1}{\eta} v^n \partial_\alpha + \frac{1}{\eta} v^b \partial_\beta + i\kappa^{-1}(\partial_s^2 v^b) L + O(\eta^2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Finalmente, al realizar la transformación de semejanza del campo de velocidades \mathbf{U} y $\partial_{t'}$ por $g^{1/4}/G^{1/4}$ y obtener el valor de expectación bajo los estados χ^σ , obtenemos una perturbación al hamiltoniano tangente debida a la variación en el tiempo de la configuración de la curva

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\xi^\sigma &\equiv -i \int d\alpha d\beta \chi^{\sigma*} \frac{G^{1/4}}{g^{1/4}} (\mathbf{U} + \partial_{t'}) \frac{g^{1/4}}{G^{1/4}} \chi^\sigma \\ &= i v^t \partial_s - \sigma \kappa^{-1} \partial_s^2 v^b + \frac{i}{2} v^n + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

En principio, el operador \mathcal{H}_ξ se encuentra representado como una matriz de rango igual a la dimensión del subespacio de estados normales degenerados. Sin embargo, por la elección de expresar a los estados normales en la base de eigenestados de L , en particular, y por el hecho de que los términos de \mathbf{U} proporcionales a α , β , ∂_α y ∂_β son anulados tras la integración en el espacio normal, así como que $\beta\partial_\beta$ tiene una representación matricial diagonal con componentes $-1/2$, \mathcal{H}_ξ es diagonal y escribimos sus componentes simplemente como \mathcal{H}_ξ^σ . En esto, hemos aprovechado el tratamiento de osciladores bidimensionales simétricos presentado en [14].

Reuniendo los resultados anteriores correspondientes a las contribuciones al hamiltoniano tangente de la partícula debidas a la curva (2.10) y sus deformaciones (2.18), (2.25), hemos encontrado que la ecuación para el movimiento tangente de la partícula es

$$i\partial_t \psi^\sigma(s) = \mathcal{H}_0^\sigma \psi^\sigma(s) + \xi \mathcal{H}_\xi^\sigma \psi^\sigma(s) + \dot{\xi} \mathcal{H}_\xi^\sigma \psi^\sigma(s). \quad (2.26)$$

2.1. La partícula

Es muy importante reconocer que la dinámica de la partícula se acopla a la configuración de la cuerda. Esta información se encuentra contenida en la expresión del hamiltoniano efectivo (2.26), donde tanto la amplitud de la deformación como su velocidad entran como parámetros externos dependientes del tiempo. Ante una variación lenta y pequeña de la cuerda, la función de onda tangente de la partícula se determinará por la eigenfunción de \mathcal{H}_0^σ a $t = t_0$, evolucionada temporalmente de acuerdo al formalismo de fases de Berry o Wilczek-Zee, según sea el caso. A su vez, la eigenfunción instantánea de \mathcal{H}_0^σ se obtendrá mediante teoría de perturbaciones a primer orden independiente del tiempo.

2.1.4 Confinamiento a la cuerda

Desarrollado ya el hamiltoniano tangente de la partícula (2.26) en sus distintas contribuciones, y estando estas bien establecidas para configuraciones generales de curvas dinámicas en el espacio euclidiano tridimensional, es ahora directo emplear estos resultados para la situación específica que nos interesa. Nuestro objetivo es conocer la dinámica de una partícula cuántica constreñida a moverse en la vecindad de una cuerda. La forma de esta se realiza como una pequeña y lenta deformación de un círculo unitario. Este cambio de forma está expresado como un campo de deformación φ definido sobre el círculo y con una dependencia temporal no trivial. El encajamiento de la cuerda está dado por

$$\mathbf{X}(s, t) = \mathbf{R}(s) + \epsilon\varphi(s, t), \quad (2.27)$$

donde \mathbf{R} es el encajamiento del círculo y s es longitud de arco de la curva deformada. Consideramos $\epsilon \ll 1$, para que la escala de la deformación sea mucho menor que la del círculo. La dinámica propia de la cuerda será analizada en la sección siguiente.

Podemos describir el campo de deformación a través de la colección entera de las amplitudes de Fourier de sus componentes

$$\begin{aligned} \varphi(t, s) &= \varphi^t(s, t)\mathbf{T} + \varphi^n(s, t)\mathbf{N} + \varphi^b(s, t)\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k [\varphi_k^t(t)\mathbf{T} + \varphi_k^n(t)\mathbf{N} + \varphi_k^b(t)\mathbf{B}] e^{iks}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

El índice k corre sobre todos los enteros. Se trata de una suma discreta porque el campo está definido sobre una curva cerrada. Sin embargo es más útil describir a la deformación en términos de campos

$$\phi^1 = \varphi^t \mathbf{T} - \partial_s \varphi^n \mathbf{N}, \quad (2.29a)$$

$$\phi^2 = -\partial_s \varphi^t \mathbf{T} + \varphi^n \mathbf{N}, \quad (2.29b)$$

$$\phi^3 = \varphi^b \mathbf{B}. \quad (2.29c)$$

En la sección siguiente se muestra que estos campos de deformación están relacionados precisamente con los modos normales de oscilación de la cuerda. Segmentar al conjunto de deformaciones en estos tres tipos nos permite separar las deformaciones que preservan localmente la longitud de la curva de las que no lo hacen.

Para el círculo unitario, la curvatura κ es uno, mientras que la torsión τ es cero. Por lo tanto, la contribución de la curva no deformada al hamiltoniano tangente es simplemente

$$\mathcal{H}_0^\sigma = -\frac{1}{2} \partial_s^2 - \frac{1}{8}. \quad (2.30)$$

Este es el hamiltoniano de una partícula libre sobre el círculo, lo cual se implementa mediante la imposición de condiciones de frontera periódicas. El término $-1/8$ desplaza el mínimo de energía en esa medida. Se trata de un hecho afortunado el que las funciones de onda ψ_{0m}^σ , soluciones de $\mathcal{H}_0^\sigma \psi_{0m}^\sigma = E_{0m}^\sigma \psi_{0m}^\sigma$, sean tan simples,

$$\psi_{0m}^\sigma(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ims}, \quad E_{0m}^\sigma = \frac{m^2}{2} - \frac{1}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.31)$$

A excepción del estado base, todos los estados libres son doblemente degenerados, sin contar la degeneración en el estado normal χ^σ .

En virtud de las ecuaciones (2.18), (2.25), los elementos de matriz de las contribuciones al hamiltoniano tangente correspondientes a los modos normales

2.1. La partícula

de las deformaciones $\phi_k^1, \phi_k^2, \phi_k^3$ son

$$\langle m | \mathcal{H}_{\phi_k^1}^\sigma | n \rangle = \frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \frac{k(k^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{m-n,k} \quad (2.32a)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\phi_k^2}^\sigma | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{k^2 - 3kn + 2n^2}{2} + \frac{k^2 - 1}{4(1 + k^2)} \right] \delta_{m-n,k} \quad (2.32b)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\phi_k^3}^\sigma | n \rangle = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sigma k(1 - k^2)(k - 2n) \delta_{m-n,k} \quad (2.32c)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\phi_k^1}^\sigma | n \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{k - 2n}{1 + k^2} \delta_{m-n,k} \quad (2.32d)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\phi_k^2}^\sigma | n \rangle = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1 + 2k^2 - 2kn}{1 + k^2} \delta_{m-n,k} \quad (2.32e)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\phi_k^3}^\sigma | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma k^2 \delta_{m-n,k} \quad (2.32f)$$

respectivamente. Como estas últimas contribuciones al hamiltoniano tangente son de orden ϵ , se tratan de perturbaciones al hamiltoniano libre. Por otro lado, es importante demandar aquí que la variación de todas las amplitudes de Fourier sea adiabática. Esta condición, además de situarnos en el contexto de fases geométricas a través de la variación de parámetros externos, nos posibilita el empleo de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo [14] para encontrar las correcciones a la función de onda libre ocasionadas por los hamiltonianos de deformación. Suponemos, desde luego, que este tratamiento perturbativo es posible, es decir, que pequeñas variaciones al hamiltoniano libre se traducen en pequeñas variaciones en la función de onda tangente.

Vemos pues que los elementos de matriz de las contribuciones al hamiltoniano debidas a los modos normales de Fourier ϕ_k^i del campo de deformación y a sus velocidades $\dot{\phi}_k^i$ no son nulos. A través de la ecuación (2.26) notamos que el hamiltoniano tangente de la partícula adquiere una dependencia en las amplitudes de estos modos y sus velocidades. Estos son los parámetros externos a los que se acopla la dinámica de la partícula y el espacio de parámetros de la partícula es el conjunto de valores que esta colección de amplitudes puede asumir. De modo que, hasta ahora, los parámetros externos son cantidades complejas. Para disponer de parámetros externos reales, contemplamos las partes real ξ_k^i y $\dot{\xi}_k^i$ e imaginaria ζ_k^i y $\dot{\zeta}_k^i$ de los modos normales y sus velocidades, respec-

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

tivamente. Esto nos permitirá, más adelante, ceñirnos a la convención de que los elementos de la conexión y la curvatura de Berry para estos parámetros sean todos reales. Los elementos de matriz de los hamiltonianos correspondientes a estos parámetros son,

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\xi_k^1}^\sigma | n \rangle &= -\frac{i}{8\sqrt{2\pi}} \frac{k(5k^2 - 12mk + 8m^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} \\ &+ \frac{i}{8\sqrt{2\pi}} \frac{k(5k^2 + 12mk + 8m^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.33a)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\zeta_k^1}^\sigma | n \rangle &= \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \frac{k(-5k^2 + 12mk - 8m^2 + 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} \\ &- \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \frac{k(5k^2 + 12mk + 8m^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.33b)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\xi_k^2}^\sigma | n \rangle = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{3k - 2m}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} - \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{3k + 2m}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \quad (2.33c)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\zeta_k^1}^\sigma | n \rangle = -\frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \frac{3k - 2m}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} - \frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \frac{3k + 2m}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \quad (2.33d)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\xi_k^2}^\sigma | n \rangle &= \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - k^2)(2k^2 - 6mk + 4m^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} \\ &+ \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - k^2)(2k^2 + 6mk + 4m^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.34a)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\zeta_k^2}^\sigma | n \rangle &= -\frac{i}{8\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - k^2)(2k^2 - 6mk + 4m^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} \\ &+ \frac{i}{8\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - k^2)(2k^2 + 6mk + 4m^2 - 1)}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.34b)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\xi_k^2}^\sigma | n \rangle &= -\frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \frac{2k^2 - 2mk - 1}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} \\ &- \frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \frac{2k^2 + 2mk - 1}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.34c)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\zeta_k^2}^\sigma | n \rangle &= -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{2k^2 - 2mk - 1}{1 + k^2} \delta_{n-m, -k} \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{2k^2 + 2mk - 1}{1 + k^2} \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.34d)$$

2.1. La partícula

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\xi_k^3}^\sigma | n \rangle &= \frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \sigma k (1 - k^2) (k - 2m) \delta_{n-m, -k} \\ &+ \frac{i}{4\sqrt{2\pi}} \sigma k (1 - k^2) (k + 2m) \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$$\begin{aligned} \langle m | \mathcal{H}_{\zeta_k^3}^\sigma | n \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \sigma k (1 - k^2) (k - 2m) \delta_{n-m, -k} \\ &- \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \sigma k (1 - k^2) (k + 2m) \delta_{n-m, k}, \end{aligned} \quad (2.35b)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\xi_k^3}^\sigma | n \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sigma k^2 \delta_{n-m, -k} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sigma k^2 \delta_{n-m, k}, \quad (2.35c)$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{\zeta_k^3}^\sigma | n \rangle = -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sigma k^2 \delta_{n-m, -k} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \sigma k^2 \delta_{n-m, k}. \quad (2.35d)$$

Si consideramos a la partícula en el estado $m = 0$ respecto al hamiltoniano tangente no perturbado (2.30), el cual corresponde a una configuración circular estática, las correcciones a su estado son proporcionales a los elementos de matriz $(m, 0)$ de las contribuciones al hamiltoniano de la partícula que acabamos de presentar, de acuerdo a la teoría de perturbaciones independientes del tiempo (ver [14]). La función de onda del estado perturbado resulta

$$\begin{aligned} \psi_0^\sigma(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \left[\xi_k^1 \frac{1 - k^2}{k(1 + k^2)} \sin ks - \zeta_k^1 \frac{1 - k^2}{k(1 + k^2)} \cos ks \right. \\ &+ \xi_k^2 \frac{1 - k^2}{k^2(1 + k^2)} \cos ks + \zeta_k^2 \frac{1 - k^2}{k^2(1 + k^2)} \sin ks + 2i \xi_k^3 \sigma (1 - k^2) \cos ks \\ &+ 2i \zeta_k^3 \sigma (1 - k^2) \sin ks - \dot{\xi}_k^1 \frac{2i}{k(1 + k^2)} \sin ks + \dot{\zeta}_k^1 \frac{2i}{k(1 + k^2)} \cos ks \\ &\left. - \dot{\xi}_k^2 \sigma \frac{2i}{k^2(1 + k^2)} \cos ks - \dot{\zeta}_k^2 \frac{2i}{k^2(1 + k^2)} \sin ks - 4\dot{\xi}_k^3 \sigma \cos ks - 4\dot{\zeta}_k^3 \sigma \sin ks \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

con energía

$$E_0^\sigma = -\frac{1}{8} + \frac{\epsilon}{4\sqrt{2\pi}} \xi_0^2 + \frac{(n+1)\omega}{\eta^2}. \quad (2.37)$$

La expresión de la energía de la partícula muestra, por un lado, que, además de la energía del estado base de partícula libre en el espacio tangente y de la energía del nivel de excitación n de oscilador armónico bidimensional en el espacio normal, a este orden de la perturbación la única contribución a la energía

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

debida a la deformación de la cuerda corresponde al modo normal ξ_0^2 , es decir, a un escalamiento global del círculo. Por otro lado, esta energía es independiente de σ , de modo que presenta una degeneración de orden $n + 1$ respecto al estado en el espacio normal.

2.2 La cuerda

Además de que ésta es el ambiente en donde se desenvuelve la partícula cuántica, la cuerda esta dotada de una dinámica propia, como se mostrará más adelante. El orden de la exposición es el siguiente: comenzaremos por describir la geometría de la cuerda usando la estructura diferencial apropiada a ella; a continuación, su dinámica será motivada y desarrollada, y, finalmente, se realizará la cuantización de sus posibles configuraciones.

2.2.1 Geometría de la cuerda

Consideremos una cuerda elástica cuya forma corresponde a una pequeña deformación de un círculo unitario. Esta forma puede ser expresada mediante un encajamiento en \mathbb{R}^3 del modo

$$\mathbf{X}(u, t) = \mathbf{R}(u) + \epsilon\varphi(u, t). \quad (2.38)$$

Aquí, $\mathbf{R}(u)$ se refiere al círculo unitario parametrizado por su longitud de arco u y $\varphi(u, t)$ es un campo de deformación del círculo. La escala de $\mathbf{R}(u)$ y $\varphi(u, t)$ es la misma y la información de la escala de la deformación es absorbida en el parámetro ϵ , de modo que una pequeña deformación corresponde a $\epsilon \ll 1$. Lo que tenemos, entonces, para cada t fijo es una curva cerrada en el espacio euclidiano parametrizada por la longitud de curva del círculo u . Para cada tiempo distinto tendremos una configuración distinta de la cuerda.

Para cada punto $\mathbf{X}(u, t)$ de la cuerda, nuestro sistema de coordenadas será un marco adaptado al círculo, compuesto por una triada de vectores ortonormales

2.2. La cuerda

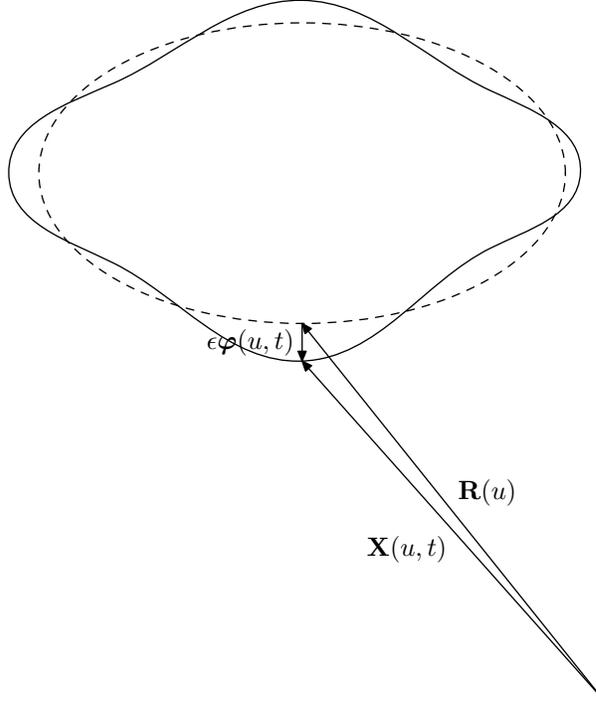


Figura 2.2. Una configuración genérica de $\mathbf{X}(u, t)$ para un tiempo t fijo.

tangente $\mathbf{t}(u)$, normal $\mathbf{n}(u)$ y binormal $\mathbf{b}(u)$ al círculo, dados por

$$\mathbf{t}(u) = \frac{\partial \mathbf{R}(u)}{\partial u}, \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{n}(u) = \frac{\partial \mathbf{t}(u)}{\partial u}, \quad (2.39b)$$

$$\mathbf{b}(u) = \mathbf{t}(u) \times \mathbf{n}(u). \quad (2.39c)$$

La parametrización del círculo por su propia longitud de arco u garantiza que \mathbf{t} sea unitario. Las coordenadas de la cuerda serán entonces

$$\mathbf{X}(u, t) = \mathbf{R}(u) + \epsilon [\varphi^t(u, t)\mathbf{t}(u, t) + \varphi^n(u, t)\mathbf{n}(u, t) + \varphi^b(u, t)\mathbf{b}(u, t)], \quad (2.40)$$

donde φ^t , φ^n y φ^b son las distancias a lo largo de cada una de las direcciones de la triada ortonormal.

Mientras que escogemos al parámetro u de tal forma que corresponda a la longitud de arco del círculo unitario, bien puede ocurrir aunque no será el caso

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

generalmente que al mismo tiempo u corresponda a la longitud de arco de la cuerda deformada. Para obtener algunas cantidades geométricas importantes de la cuerda —la torsión y la curvatura— es útil que se realice la parametrización de la cuerda por su propia longitud. Dichas cantidades jugarán un papel muy relevante en la discusión posterior.

La longitud de arco de la curva \mathbf{X} a un tiempo fijo desde $\mathbf{X}(0, t)$ hasta $\mathbf{X}(u, t)$ es

$$s(u, t) = \int_0^u \sqrt{\partial_{u'} \mathbf{X}(u', t) \cdot \partial_{u'} \mathbf{X}(u', t)} du'. \quad (2.41)$$

Introduciendo la forma del encajamiento de la cuerda (2.40), se muestra de modo directo que a primer orden en ϵ obtenemos

$$\begin{aligned} s(u, t) &= u + \epsilon \int_0^u \partial_{u'} \mathbf{X}(u', t) \cdot \partial_{u'} \varphi(u', t) du', \\ &= u + \epsilon \int_0^u [-\varphi^n(u', t) + \partial_{u'} \varphi^t(u', t)] du'. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para obtener la última igualdad consideramos que el círculo no tiene torsión y que su curvatura es 1 y empleamos las ecuaciones de Frenet-Serret[6],

$$\partial_u \mathbf{t} = \kappa \mathbf{n}, \quad (2.43a)$$

$$\partial_u \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad (2.43b)$$

$$\partial_u \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.43c)$$

la triada adaptada a una curva parametrizada necesariamente por longitud de arco u . Con esto, hemos encontrado que la diferencia entre ambos parámetros es de orden ϵ , como es de esperarse. Lo que hemos obtenido es s como función de u . Para reparametrizar la cuerda, necesitamos a u como función de s . Si suponemos que esta función es de la forma $u(s, t) = s +$ un término de orden ϵ , lo que hallamos es que

$$u(s, t) = s - \epsilon \int_0^s [-\varphi^n(s', t) + \partial_{s'} \varphi^t(s', t)] ds'. \quad (2.44)$$

Reparametrizamos la cuerda sustituyendo (2.44) en (2.40), lo que nos permite encontrar la triada ortonormal adaptada a la cuerda. El cálculo de la curvatura

2.2. La cuerda

κ y la torsión τ de la cuerda con la ayuda de las ecuaciones de Frenet-Serret arroja como resultado, a primer orden en ϵ ,

$$\kappa(u, t) = 1 + \epsilon [\varphi^n(u, t) + \partial_u^2 \varphi^n(u, t)], \quad (2.45a)$$

$$\tau(u, t) = \epsilon [\partial_u^3 \varphi^b(u, t) + \partial_u \varphi^b(u, t)]. \quad (2.45b)$$

Observamos que la longitud de arco de la cuerda (2.42) difiere de la longitud de arco del círculo por un término de orden ϵ . Si este término es cero en cada punto de la cuerda, entonces la deformación φ preserva localmente la longitud de arco. Este tipo de deformaciones está caracterizado por la condición

$$0 = -\varphi^n(u, t) + \partial_u \varphi^t(u, t) \quad (2.46)$$

para todo u . Una deformación de este tipo garantiza que la curva resultante permanezca parametrizada por longitud de arco.

2.2.2 Dinámica de la cuerda

La dinámica de la cuerda debe reflejar, por un lado, que su configuración de equilibrio es el círculo unitario y, por otro, que es una cuerda elástica en sus direcciones normales pero no longitudinalmente, es decir, es susceptible de doblarse pero no de estirarse. Introducimos el lagrangiano de la cuerda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{2} \mu (\delta \kappa)^2 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda} (\delta s)^2, \quad (2.47)$$

donde ρ es una densidad lineal uniforme de masa. El primer término es la energía cinética de la cuerda, cuya única contribución es debida a la deformación dependiente del tiempo φ . Los dos términos restantes son la contribución de la energía potencial. La energía elástica necesaria para deformar al círculo es proporcional al cuadrado de la diferencia de curvatura entre la cuerda deformada y el círculo, $\delta k = \varphi_n + \partial_s^2 \varphi^n$. La magnitud de este potencial viene escalado por el factor $\mu (> 0)$. Entre más grande sea μ , las configuraciones de la cuerda que localmente se curven con respecto al círculo necesitarán una energía mas grande para realizarse. Adicionalmente, penalizamos dinámicamente deformaciones que modifiquen localmente la longitud de la cuerda, pues el término

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

$\delta s = -\partial_s \varphi^t + \varphi^n$ es la diferencia local de longitud de arco entre la cuerda original y la deformada. Esta energía potencial viene modulada por el factor μ/λ . Las configuraciones que no preserven localmente la longitud de arco serán más penalizadas a medida que λ sea más pequeño. En nuestro esquema, deseamos suprimir dinámicamente las deformaciones que estiren o contraigan la cuerda, de modo que consideramos a λ muy pequeño y lo aprovechamos como un factor perturbativo. Enfatizamos que este tipo de deformaciones puede existir, aunque la energía necesaria para que ello ocurra es muy grande. La expresión del lagrangiano resulta explícitamente

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_s \varphi, \partial_s^2 \varphi) &= \frac{1}{2} \rho \left[(\dot{\varphi}^t)^2 + (\dot{\varphi}^n)^2 + (\dot{\varphi}^b)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu (\varphi_n + \partial_s^2 \varphi^n)^2 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\lambda} (\partial_s \varphi^t - \varphi^n)^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.73) obtenemos las ecuaciones de movimiento para los campos de deformación,

$$\ddot{\varphi}^t = \frac{\mu}{\rho \lambda} (\partial_s^2 \varphi^t - \partial_s \varphi^n), \quad (2.49a)$$

$$\ddot{\varphi}^n = -\frac{\mu}{\rho} (\partial_s^4 \varphi^n + 2\partial_s^2 \varphi^n + \varphi^n) + \frac{\mu}{\rho \lambda} (\partial_s \varphi^t - \varphi^n), \quad (2.49b)$$

$$\ddot{\varphi}^b = 0. \quad (2.49c)$$

A excepción de φ^b , las ecuaciones para φ^t y φ^n están acopladas. Este acoplamiento es anulado si el campo de deformaciones preserva localmente la longitud de arco, es decir, si satisface (2.46). Por lo tanto, para tiempos pequeños el campo φ^b y, si la deformación preserva localmente longitudes de arco, el campo φ^t aumentan o disminuyen linealmente con el tiempo. Soluciones de este tipo comprenden traslaciones verticales y rotaciones pequeñas de la cuerda, respectivamente, las cuales tienen lugar hasta que términos de orden ϵ y mayores, que no hemos considerado de modo explícito, se vuelven significativos, restringiendo el movimiento libre de la cuerda.

Para dar solución a la aparente complejidad de las ecuaciones (2.49), descomponemos los campos en una suma de modos de Fourier

$$\varphi^i(u, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k e^{iku} \varphi_k^i(t). \quad (2.50)$$

2.2. La cuerda

para $i = t, n, b$. El entero k corre desde $-\infty$ hasta ∞ . La razón por la que los campos se escriben como sumas discretas es que estos están definidos sobre un círculo. Además, la condición de que los campos sean reales (y, en el contexto cuántico, hermíticos) implica la relación $\varphi_{-k}^i = \varphi_k^{i*}$. La conveniencia de realizar esta descomposición radica en que las ecuaciones de movimiento de la cuerda son lineales en los campos y su expresión en términos de los modos de Fourier debe conducir a ecuaciones acopladas de las amplitudes únicamente. Desacoplarlas, a su vez, debe conducir a modos normales de oscilación.

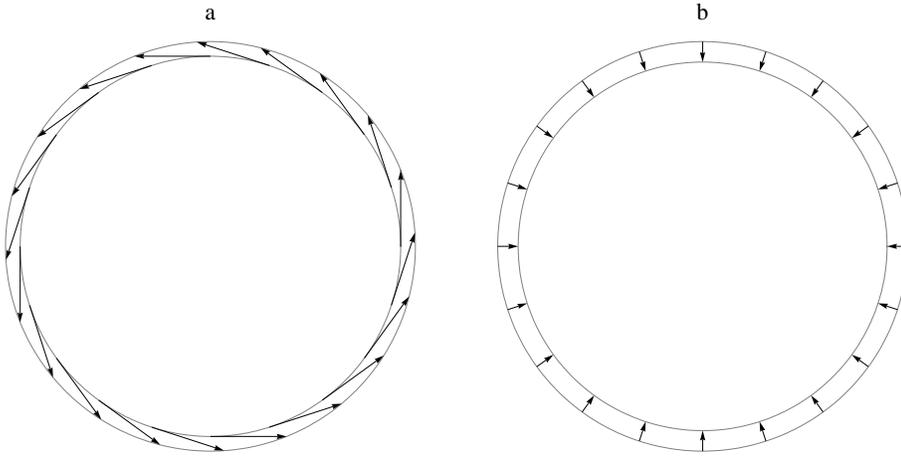


Figura 2.3. Curvas resultantes del modo cero de la expansión de Fourier para (a) φ^t y (b) φ^n . Las flechas representan al campo de deformación, partiendo del círculo unitario.

Los modos cero de estas series son importantes, porque definen transformaciones globales de la cuerda. En este caso, los modos cero de los campos φ^t , φ^n y φ^b producen rotaciones, escalamientos y traslaciones verticales de la cuerda, respectivamente, para deformaciones pequeñas.

Cada campo $\varphi^i(u, t)$ describe, para un tiempo fijo, una configuración de la cuerda determinada por su valor en cada punto de la cuerda, es decir, dicha configuración está determinada por un número infinito no numerable de grados de libertad. No obstante, en el lado derecho de la ecuación (2.50) expresamos los

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

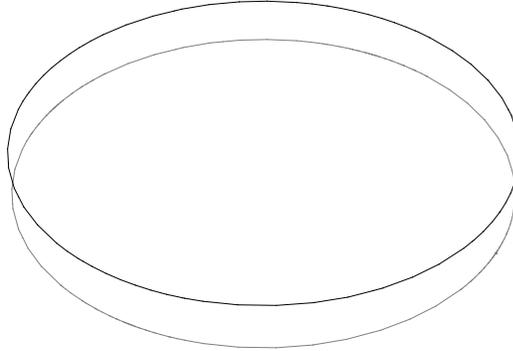


Figura 2.4. La curva inferior es el círculo unitario original y la curva superior resulta del modo cero del campo de deformación φ^b , que, en esta parametrización, es para todos los modos puramente vertical.

campos como series de Fourier que describen a una configuración completamente determinada por la colección de números φ_k^i , la cual es de cardinalidad infinita numerable. La pregunta natural es si al expresar los campos como series de Fourier perdemos información, es decir, si habrá configuraciones de la cuerda que no puedan ser realizadas como (2.50). Claramente, esto es lo que ocurre, pues los coeficientes φ_k^i son, de hecho, integrales sobre toda la cuerda, de modo que configuraciones discontinuas de la cuerda no pueden ser expresadas como una serie de Fourier. Aun más, el número de configuraciones continuas de la cuerda es muy pequeño comparado con el número de configuraciones discontinuas, es de medida cero en el conjunto total de posibilidades. Sin embargo, físicamente las configuraciones discontinuas no son relevantes, debido a que la derivada funcional de la acción respecto al campo evaluada en estas configuraciones es muy grande y sus fases correspondientes se cancelarán cuando la cuantización de las deformaciones sea realizada.

Para que los campos φ^i sean soluciones a la dinámica de la cuerda, deben satisfacer las ecuaciones (2.49). Esto impone las ecuaciones diferenciales que

2.2. La cuerda

cada modo debe obedecer,

$$\ddot{\varphi}_k^t = -\frac{\mu k^2}{\rho\lambda}\varphi_k^t - \frac{i\mu k}{\rho\lambda}\varphi_k^n, \quad (2.51a)$$

$$\ddot{\varphi}_k^n = -\frac{\mu}{\rho}\left[(1-k^2)^2 + \frac{1}{\lambda}\right]\varphi_k^n + \frac{i\mu k}{\rho\lambda}\varphi_k^t, \quad (2.51b)$$

$$\ddot{\varphi}_k^b = 0. \quad (2.51c)$$

Las ecuaciones de movimiento para φ_k^t y φ_k^n forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, que tienen que ser desacopladas mediante combinaciones lineales de los campos en cuestión. Encontramos que

$$\phi_k^1 = \varphi_k^t - ik\varphi_k^n, \quad (2.52a)$$

$$\phi_k^2 = -ik\varphi_k^t + \varphi_k^n, \quad (2.52b)$$

$$\phi_k^3 = \varphi_k^b \quad (2.52c)$$

son aquellas combinaciones, pues satisfacen las ecuaciones diferenciales desacopladas, a orden cero en λ ,

$$\ddot{\phi}_k^i = -\omega_{i,k}^2\phi_k^i \quad (2.53)$$

con

$$\omega_{1,k}^2 = \frac{\mu k^2 (1-k^2)^2}{\rho (1+k^2)}, \quad (2.54a)$$

$$\omega_{2,k}^2 = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{(1-k^2)^2}{1+k^2} + \frac{1+k^2}{\lambda} \right], \quad (2.54b)$$

$$\omega_{3,k}^2 = 0, \quad (2.54c)$$

los cuales son números estrictamente no negativos. De ahí que escribamos $\omega_{1,k}^2$ y $\omega_{2,k}^2$ y $\omega_{3,k}^2$ como frecuencias de oscilación al cuadrado. La ecuación (2.53) nos dice que ϕ_k^1 , ϕ_k^2 y ϕ_k^3 se comportan como osciladores armónicos, es decir, que son modos normales de oscilación. De este modo, hemos descompuesto el movimiento de la cuerda como una suma de oscilaciones de modos normales alrededor del círculo, un comportamiento acotado que se esperaría de una pequeña deformación de una configuración estable. La frecuencia del modo ϕ_k^2 es grande comparada con la del modo ϕ_k^1 , pues uno de sus términos está

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

modulado por el factor de λ inverso. Cuando las configuraciones de la cuerda sean cuantizadas, las brechas de energía entre niveles adyacentes de ese modo serán grandes, provocando que sus excitaciones difícilmente ocurran. Por ese motivo, llamamos a ϕ_k^1 el *modo suave* y a ϕ_k^2 el *modo duro*.

Aunque hemos encontrado los modos normales de oscilación de la cuerda, aun falta mostrar, a nivel del hamiltoniano, que las configuraciones de la cuerda son una colección infinita de osciladores armónicos. Para esto, primero escribiremos el lagrangiano de la cuerda en términos de las amplitudes de los modos normales ϕ . Insertando las series de Fourier (2.50) en la expresión de la densidad lagrangiana (2.48) e integrando sobre todo el círculo obtenemos el lagrangiano L de la cuerda

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2}L(\varphi_k, \dot{\varphi}_k) &= \sum_k \frac{\rho}{2} (\dot{\varphi}_k^{t*} \dot{\varphi}_k^t + \dot{\varphi}_k^{n*} \dot{\varphi}_k^n + \dot{\varphi}_k^{b*} \dot{\varphi}_k^b) \\ &+ \frac{\mu}{2} [2ik\varphi_k^{t*} + (1+k^2)\varphi_k^{n*}] [2ik\varphi_k^t - (1+k^2)\varphi_k^n] \\ &+ \frac{\mu}{2\lambda} (ik\varphi_k^{t*} + \varphi_k^{n*}) (ik\varphi_k^t - \varphi_k^n). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ahora expresamos los campos en las variables de los modos normales (2.52) obteniendo, a orden cero en λ ,

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2}L(\phi_k, \dot{\phi}_k) &= \frac{1}{2} \sum_k \frac{\rho}{1+k^2} \dot{\phi}_k^{1*} \dot{\phi}_k^1 + \rho \left[\frac{1}{1+k^2} - \frac{2(1-k^2)^2 k^2 \lambda}{(1+k^2)^3} \right] \dot{\phi}_k^{2*} \dot{\phi}_k^2 + \rho \dot{\phi}_k^{3*} \dot{\phi}_k^3 \\ &- \frac{\mu k^2 (1-k^2)^2}{(1+k^2)^2} \phi_k^{1*} \phi_k^1 - \mu \left[\frac{(1-k^2)^2 (1-2k^2)}{(1+k^2)^2} + \frac{1}{\lambda} \right] \phi_k^{2*} \phi_k^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Aunque nos interesa la expresión del lagrangiano hasta orden cero en λ , mostramos los términos de orden primero relevantes para la obtención correcta de las ecuaciones de movimiento de los modos normales hasta orden cero en λ .

De los lagrangianos (2.55) y (2.56), obtenemos los momentos conjugados de las amplitudes de los modos de Fourier en las direcciones del marco adaptado

2.2. La cuerda

al círculo

$$\pi_k^t \equiv \epsilon^{-2} \frac{\partial L(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)}{\partial \dot{\varphi}_k^t} = \rho \dot{\varphi}_k^{t*}, \quad (2.57a)$$

$$\pi_k^n \equiv \epsilon^{-2} \frac{\partial L(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)}{\partial \dot{\varphi}_k^n} = \rho \dot{\varphi}_k^{n*}, \quad (2.57b)$$

$$\pi_k^b \equiv \epsilon^{-2} \frac{\partial L(\varphi_k, \dot{\varphi}_k)}{\partial \dot{\varphi}_k^b} = \rho \dot{\varphi}_k^{b*}, \quad (2.57c)$$

y de las amplitudes de los modos normales

$$\tilde{\pi}_k^t \equiv \epsilon^{-2} \frac{\partial L(\phi_k, \dot{\phi}_k)}{\partial \dot{\phi}_k^t} = \frac{\rho}{1+k^2} \dot{\phi}_k^{t*}, \quad (2.58a)$$

$$\tilde{\pi}_k^n \equiv \epsilon^{-2} \frac{\partial L(\phi_k, \dot{\phi}_k)}{\partial \dot{\phi}_k^n} = \frac{\rho}{1+k^2} \dot{\phi}_k^{n*}, \quad (2.58b)$$

$$\tilde{\pi}_k^b \equiv \epsilon^{-2} \frac{\partial L(\phi_k, \dot{\phi}_k)}{\partial \dot{\phi}_k^b} = \rho \dot{\phi}_k^{b*}, \quad (2.58c)$$

respectivamente. Los momentos conjugados de las amplitudes de los modos normales se presentan a primer orden en λ . Los momentos conjugados, definidos de este modo, comparten con las amplitudes de los modos normales el mismo orden ϵ^2 en la expresión del hamiltoniano de la cuerda y facilitan el tratamiento perturbativo de esta. Esto es claro cuando obtenemos el hamiltoniano de la cuerda, según (1.75),

$$\begin{aligned} \epsilon^{-2} H(\phi_k, \tilde{\pi}_k) &= \frac{1}{2} \sum_k \frac{1+k^2}{\rho} \tilde{\pi}_k^{1*} \tilde{\pi}_k^1 + \frac{1+k^2}{\rho} \tilde{\pi}_k^{2*} \tilde{\pi}_k^2 + \frac{1}{\rho} \tilde{\pi}_k^{3*} \tilde{\pi}_k^3 \\ &+ \frac{\rho \omega_{1,k}^2}{1+k^2} \phi_k^{1*} \phi_k^1 + \frac{\rho \omega_{2,k}^2}{1+k^2} \phi_k^{2*} \phi_k^2 + \rho \omega_{3,k}^2 \phi_k^{3*} \phi_k^3. \end{aligned} \quad (2.59)$$

En conclusión, en los modos normales ϕ_k^1 y ϕ_k^2 , el comportamiento es el de osciladores armónicos independientes, mientras que en el modo ϕ_k^3 , para tiempos pequeños, el comportamiento es el de una partícula libre.

2.2.3 Cuantización de los modos

Hasta ahora, hemos preparado los elementos para realizar la cuantización de las configuraciones de la cuerda de un modo físicamente significativo. Para esto, hemos encontrado coordenadas de las deformaciones de la cuerda, relacionadas

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

con sus modos normales de oscilación, en las cuales logra apreciarse que esta puede ser descrita como una colección infinita de osciladores armónicos, cada uno con una frecuencia de oscilación distinta. A partir de este hecho, es claro el método de cuantización a seguir.

Cuantizamos las configuraciones de la cuerda promoviendo los campos de deformación a operadores, en un primer momento, e imponiendo relaciones de conmutación a tiempos iguales entre dichos campos y sus momentos conjugados (1.76). Estas relaciones implican que las amplitudes de la expansión de Fourier (2.50) satisfacen a su vez las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\varphi_k^a(t), \varphi_l^b(t)] &= [\pi_k^a(t), \pi_l^b(t)] = 0, \\ [\varphi_k^a(t), \pi_l^b(t)] &= i\hbar\epsilon^{-2}\delta_{kl}\delta^{ab}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Usando las relaciones anteriores (2.60), así como la definición de las amplitudes de los modos normales (2.52), se muestra que estas y sus momentos conjugados satisfacen relaciones de conmutación análogas,

$$\begin{aligned} [\phi_k^a(t), \phi_l^b(t)] &= [\tilde{\pi}_k^a(t), \tilde{\pi}_l^b(t)] = 0, \\ [\phi_k^a(t), \tilde{\pi}_l^b(t)] &= i\hbar\epsilon^{-2}\delta_{kl}\delta^{ab}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Definimos los operadores de escalón

$$\mathbf{a}_k^a = \left(\frac{\rho_a\omega_{a,k}}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(\phi_k^a + i\frac{\tilde{\pi}_k^a}{\rho_a\omega_{a,k}}\right), \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{a}_k^{a\dagger} = \left(\frac{\rho_a\omega_{a,k}}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(\phi_k^{a\dagger} - i\frac{\tilde{\pi}_k^{a\dagger}}{\rho_a\omega_{a,k}}\right), \quad (2.62b)$$

donde ρ_a es el término de masa que aparece en el hamiltoniano (2.59), correspondiente a cada modo normal, explícitamente $\rho_1 = \rho/(1+k^2)$, $\rho_2 = \rho/(1+k^2)$ y $\rho_3 = \rho$. Este par de operadores nos permite generar todo el espacio de estados para cada uno de los osciladores armónicos en que se descompone la cuerda. Para uno de estos osciladores, el estado base, que llamamos $|0_k^a\rangle$, es aquel que es aniquilado por el operador \mathbf{a}_k^a , es decir, $\mathbf{a}_k^a|0_k^a\rangle = 0$. Los estados excitados son generados mediante la aplicación sucesiva del operador $\mathbf{a}_k^{a\dagger}$ del modo

$$|n_k^a\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\mathbf{a}_k^{a\dagger}\right)^n |0_k^a\rangle. \quad (2.63)$$

2.2. La cuerda

El espacio de estados de la cuerda es un producto tensorial infinito, cuyos factores son espacios de estados de osciladores armónicos individuales en los primeros dos modos normales y el espacio de estados no ligados de partícula libre del tercer modo normal. Un estado arbitrario de la cuerda está descrito por un producto tensorial de la forma

$$|\psi\rangle = \prod_k |n_k^1\rangle |n_k^2\rangle |\tilde{\pi}_k^3\rangle, \quad (2.64)$$

donde n_k^1 y n_k^2 son los niveles de excitación de los modos ϕ_k^1 y ϕ_k^2 , respectivamente, y $\tilde{\pi}_k^3$ es el momento del modo ϕ_k^3 . Este estado puede pensarse como un funcional que recoge una configuración determinada de la cuerda, especificada por un valor fijo para cada amplitud de los modos normales, y nos informa de la amplitud de probabilidad de que tal configuración sea de hecho la asumida por la cuerda; se trata de un funcional de configuraciones concretas a números complejos. Por ejemplo, si la cuerda se encuentra en el estado base, el cual

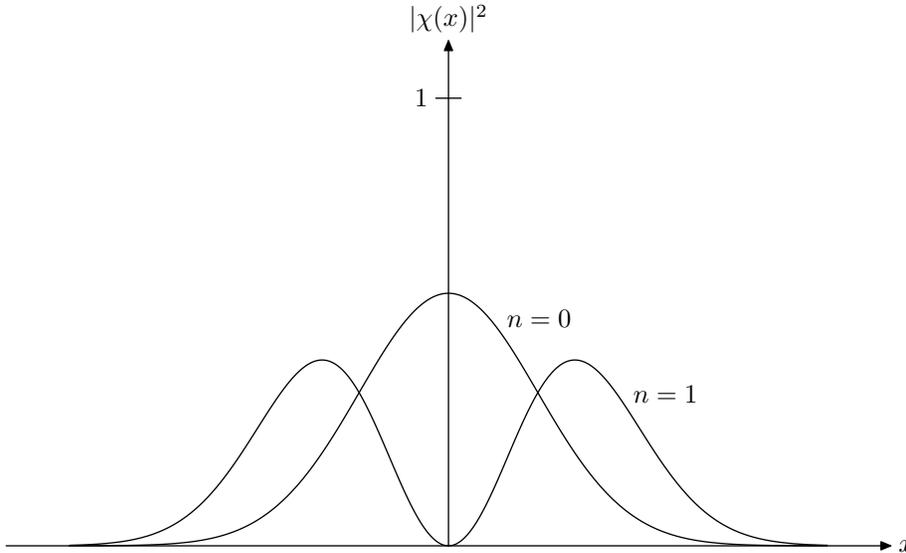


Figura 2.5. Distribución de probabilidad de los primeros dos eigenestados de oscilador armónico.

se realiza cuando todos los modos normales se encuentran en el estado base,

Capítulo 2. Constricción de una partícula cuántica a una cuerda

según la figura (2.5), la función de onda correspondiente será un producto de gaussianas y la configuración de la cuerda más probable es el círculo. Si ahora alguno de los modos normales se encuentra en el primer estado excitado, la densidad de probabilidad de que la cuerda asuma la configuración circular es nula, pues la función de onda de dicho estado excitado (así como de todo nivel impar) es impar ante inversiones espaciales. Por supuesto que debe tenerse cuidado al hablar del estado base de la cuerda, en vista de que el estado base de los modos ϕ_k^3 , relacionadas con deformaciones en la dirección normal al plano del círculo, corresponde a ondas con momento cero. Esto significa que al colocar a la cuerda en su estado base, en la dirección normal al plano en que se encuentra el círculo este se ha deslocalizado totalmente. Podemos localizar a la cuerda en un rango finito encendiendo un potencial de oscilador armónico definido en la dirección \mathbf{b} , justo como si sujetáramos a la cuerda con resortes de frecuencia fija ω_0 , y lograr el estado base en esta dirección colocando a cada uno de los modos φ_k^3 en su estado base de oscilador armónico, cada uno con la misma frecuencia ω_0 .

CAPÍTULO 3

Backreaction Y NOCONMUTATIVIDAD DE ESPACIO-TIEMPO EFECTIVA

La relevancia de lo discutido hasta ahora consiste en identificar la forma en que la configuración de la cuerda, a través de sus modos normales y las velocidades de estos, juega el papel de parámetro externo para la dinámica de la partícula. En este capítulo analizamos la dinámica de la partícula cuando la cuerda varía adiabáticamente, así como la dinámica efectiva de la cuerda cuando de este modo el estado de la partícula ha quedado “fijo” respecto a su configuración instantánea. Para la primer tarea, el objeto relevante es la fase de Berry adquirida por el estado de la partícula, el cual puede obtenerse mediante una integral de superficie de la curvatura de Berry. Para el segundo objetivo, el hamiltoniano efectivo adquiere una forma sencilla si se expresa en términos de campos y momentos conjugados que involucran a la conexión de Berry y, al hacer esto, sus relaciones de conmutación se modifican por una cantidad proporcional a la curvatura de Berry. De esto modo, las cantidades más importantes serán las curvaturas de Berry en los distintos planos del espacio de parámetros. Lo más notable es precisamente la existencia de curvaturas de Berry no nulas.

3.1 Fases geométricas

Cuando un sistema cuántico se encuentra descrito inicialmente por un estado que es elemento de un subespacio de estados degenerados del hamiltoniano, una variación adiabática de este ya no garantiza una permanencia del sistema en el mismo eigenestado. Acontece en vez una mezcla no trivial de elementos del subespacio degenerado[24]. Tal mezcla está determinada por una matriz $U = \mathcal{P} \exp \int_{t_0}^t \mathcal{A}(\tau) d\tau$, donde \mathcal{A} es una matriz antihermitiana, llamada potencial de Wilczek-Zee, pues transforma como un potencial de norma ante cambios locales de base del subespacio degenerado. Sin embargo, si U resulta ser diagonal, no existe ninguna mezcla de estados y cada estado degenerado puede ser tratado individualmente en el formalismo de fases de Berry. Una condición suficiente para que esto ocurra es que el potencial de Wilczek-Zee sea diagonal.

En el capítulo anterior, encontramos que el estado de una partícula confinada a moverse en la vecindad de una curva cerrada podía ser factorizado en un estado para el movimiento a lo largo de la cuerda y en un eigenestado de oscilador armónico bidimensional simétrico para el movimiento normal a la cuerda. De este modo, salvo el estado base, la componente normal del estado de la partícula forma parte de un subespacio degenerado de $n+1$ dimensiones, para un nivel de excitación n . A su vez, mediante el mecanismo de confinamiento, el hamiltoniano para el movimiento tangente queda determinado por el estado degenerado particular en que se fija al estado normal, al tomar el valor de expectación del hamiltoniano total según (1.69). Existe la posibilidad de que esto rompa la degeneración del estado de la partícula, lo cual sucede, pero no por completo. Al usar la base de eigenestados simultáneos de oscilador armónico y momento angular, la matriz del hamiltoniano (1.69) asume una forma diagonal y cada entrada queda expresada como (2.10), con valores de momento angular $\sigma = -n, -n+2, \dots, n-2, n$. El estado tangente, por tanto, debe satisfacer la ecuación de Schrödinger

$$\mathcal{H}^\sigma \psi^\sigma = -\frac{1}{2} \partial_s^2 \psi^\sigma + i\sigma\tau \partial_s \psi^\sigma + \frac{1}{2} \left(i\sigma \partial_s \tau + \sigma^2 \tau^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right) \psi^\sigma = E^\sigma \psi^\sigma, \quad (3.1)$$

3.1. Fáses geométricas

de donde resulta claro que $\psi^{-\sigma} = \psi^{\sigma*}$ y $E^{-\sigma} = E^{\sigma}$, es decir, el espacio de estados de la partícula, confinada a una configuración *fija* de la cuerda, permanece degenerado, sin tomar en cuenta incluso una posible degeneración propia de cada \mathcal{H}^{σ} . Aún más, cuando la configuración de la cuerda se realiza como una pequeña deformación, cambiante en el tiempo, de una forma fija, el hamiltoniano para el movimiento tangente adquiere pequeñas perturbaciones, las cuales no necesariamente modifican el espectro a través de un rompimiento de las degeneraciones.

Es, en conclusión, el formalismo de Wilczek-Zee el que en principio debe ser empleado para determinar la evolución temporal del estado de la partícula, bajo una variación adiabática de los parámetros a que está acoplada su dinámica. Para un parámetro ξ del hamiltoniano de la partícula, los elementos de la matriz \mathcal{A} son

$$A^{\sigma\rho} = i \int ds d\alpha d\beta G^{1/2} \frac{g^{1/4}}{G^{1/4}} \Psi^{\sigma*}(s, \alpha, \beta) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{g^{1/4}}{G^{1/4}} \Psi^{\rho}(s, \alpha, \beta) \right), \quad (3.2)$$

donde $\Psi^{\sigma} = \chi^{\sigma} \psi^{\sigma}$ es la función de onda de la partícula, factorizada en funciones de onda para los espacios normal y tangente a la cuerda. G es el determinante de la métrica en coordenadas adaptadas a la curva.

La derivada total que aparece en (3.2) debe considerar la dependencia en ξ del objeto sobre el que opera tanto explícita, a través de la función de onda tangente, como implícitamente a través de las coordenadas adaptadas. Para la curva de la sección 2.2, realizada como una deformación de un círculo unitario, a partir de (2.24) con $\tau = 0$ y $\kappa = 1$, esta derivada total tiene por expresión

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi} - [v^t - \eta\alpha (\partial_s v^n + v^t) - \eta\beta \partial_s v^b] \partial_s - \frac{1}{\eta} v^n \partial_{\alpha} - \frac{1}{\eta} v^b \partial_{\beta} - \partial_s^2 v^b L \quad (3.3)$$

para un campo de deformación $\xi(t)\mathbf{v}$, a primer orden en η . Por lo tanto, retomando las expresiones (2.6), (2.9), (2.36), las componentes del potencial de Wilczek-Zee (3.2) resultan

$$A^{\sigma\rho} = \delta_{\sigma\rho} \int ds \psi^{\sigma*} \left(i \frac{\partial}{\partial\xi} - i v^t \partial_s - \frac{i v^n}{2} + \sigma \partial_s^2 v^b \right) \psi^{\rho}. \quad (3.4)$$

El que en esta base el potencial de Wilczek-Zee resulte diagonal simplifica notablemente el tratamiento de la evolución de la partícula, pues permite remi-

Capítulo 3. *Backreaction* y noconmutatividad de espacio-tiempo efectiva

tirnos al formalismo de fases de Berry para cada uno de sus estados. Simplemente reconocemos que los elementos diagonales del potencial de Wilczek-Zee (3.2) coinciden con la conexión de Berry, referida a la evolución de un estado ψ^σ . En vista de (3.4), además, denotamos de aquí en adelante a cada conexión simplemente por A^σ .

Si la variación de la cuerda es adiabática, la fase de Berry resultante no debe depender de la velocidad con que esta sea deformada. Esto significa que los momentos conjugados de las amplitudes de los modos normales de la deformación pueden considerarse arbitrariamente pequeños y tomar en cuenta las contribuciones a la fase de Berry provenientes únicamente de curvaturas de Berry en los planos formados por amplitudes de modos normales. Geométricamente, si una curva en el espacio de parámetros, formado por las amplitudes y sus momentos conjugados, es recorrida durante la variación de la cuerda, esta puede proyectarse a los planos de las amplitudes y la fase resultante de integrar la curvatura de Berry sobre estos planos debe ser la fase de Berry. En términos de las amplitudes de deformaciones reales ξ_k^i y ζ_k^i , las componentes no nulas de la curvatura de Berry son

$$K_{\xi_j^1 \zeta_k^3} = \frac{\sigma}{8\pi} \frac{1 - 2k^2 - k^4}{k(1 + k^2)} \delta_{jk}, \quad (3.5a)$$

$$K_{\zeta_j^1 \xi_k^3} = -\frac{\sigma}{8\pi} \frac{1 - 2k^2 - k^4}{k(1 + k^2)} \delta_{jk}, \quad (3.5b)$$

$$K_{\xi_j^2 \xi_k^3} = \frac{\sigma}{8\pi} \frac{(1 - k^2)(1 - k^2 - k^4)}{k^2(1 + k^2)} \delta_{jk}, \quad (3.5c)$$

$$K_{\zeta_j^2 \zeta_k^3} = \frac{\sigma}{8\pi} \frac{(1 - k^2)(1 - k^2 - k^4)}{k^2(1 + k^2)} \delta_{jk}. \quad (3.5d)$$

Las demás curvaturas son nulas o pueden obtenerse por antisimetría. Como resultado de haber expandido el hamiltoniano tangente hasta orden cuadrático en las amplitudes, las curvaturas que presentamos son independientes de los campos, de modo que la fase de Berry resultante debe ser la curvatura de Berry multiplicada por el área de la superficie acotada por el ciclo trazado en el espacio de parámetros. De relevancia práctica es el hecho de que todas las curvaturas son proporcionales a σ , el momento angular de la partícula en el espacio normal a la

3.2. Dinámica efectiva de la cuerda

cuerda. De modo que si el estado inicial de la partícula es una superposición de estados con distinto momento angular, la fase de Berry para cada eigenestado será distinta y términos de interferencia serán generados en el estado de la partícula, resultando en modificaciones a su densidad de probabilidad.

3.2 Dinámica efectiva de la cuerda

Berry [4] muestra que existe un modo, que puede considerarse de cierto modo canónico, de expresar al hamiltoniano efectivo de la cuerda una vez que su variación adiabática ha provocado que el estado de la partícula permanezca “congelado”. En efecto, tras obtener el valor esperado del hamiltoniano del sistema entero cuerda–partícula respecto al estado de la partícula $|\Psi\rangle$, existe desde luego una arbitrariedad para ordenar los términos resultantes. En particular, pueden agruparse productos de amplitudes de modos en direcciones distintas o de amplitudes con momentos completando cuadrados de distintos modos. Sin embargo, siguiendo la prescripción de Berry de considerar las cantidades

$$\Phi_k^i = \phi_k^i - A \tilde{\pi}_k^i \quad (3.6a)$$

$$\Pi_k^i = \tilde{\pi}_k^i - A_{\phi_k^i}, \quad (3.6b)$$

la expresión del hamiltoniano efectivo asume una forma en términos de cantidades relacionadas puramente con la fase de Berry,

$$\begin{aligned} H_{\text{ef}}(\Phi, \Pi) &= \langle \Psi | H_{\text{cuerda}} + H_{\text{partícula}} | \Psi \rangle \\ &= E_0^\sigma + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_k \frac{1+k^2}{\rho} \Pi_k^{1*} \Pi_k^1 + \frac{1+k^2}{\rho} \Pi_k^{2*} \Pi_k^2 + \frac{1}{\rho} \Pi_k^{3*} \Pi_k^3 \\ &\quad + \frac{\rho \omega_{1,k}^2}{1+k^2} \Phi_k^{1*} \Phi_k^1 + \frac{\rho \omega_{2,k}^2}{1+k^2} \Phi_k^{2*} \Phi_k^2 + \rho \omega_{3,k}^2 \Phi_k^{3*} \Phi_k^3, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde E_0^σ es la energía de la partícula, dada por (2.37). Existe un término adicional que en principio debe ser considerado, que es la suma de todas las componentes del producto entre la matriz de masa en el hamiltoniano de la cuerda y la parte simétrica del tensor geométrico cuántico (1.19). No obstante, este término es de orden cuarto en ϵ . Lo que notamos, en conclusión, es que

Capítulo 3. *Backreaction* y noconmutatividad de espacio-tiempo efectiva

en estas nuevas variables Φ_k^i y Π_k^i , el hamiltoniano efectivo de la cuerda retiene la forma del hamiltoniano de una colección infinita de osciladores armónicos independientes, con la adición de un término de potencial debido a la presencia de la partícula.

El hamiltoniano efectivo preserva su carácter de operador, pues el valor de expectación del hamiltoniano del sistema cuerda-partícula, el cual opera sobre estados de este sistema entero, fue tomado únicamente respecto al estado de la partícula. Por lo tanto, el hamiltoniano efectivo es aún un operador sobre el espacio de estados de la cuerda.

A cambio de esta simplicidad en la forma del hamiltoniano efectivo, las relaciones de conmutación entre las amplitudes de los campos normales y entre sus momentos conjugados dejan de ser nulas, lo cual nos parece realmente interesante. Estas relaciones de conmutación son, en general,

$$[\Phi_j^a, \Phi_k^b] = [\phi_j^a, \phi_k^b] - [A^{\tilde{\pi}_j^a}, \phi_k^b] - [\phi_j^a, A^{\tilde{\pi}_k^b}] + [A^{\tilde{\pi}_j^a}, A^{\tilde{\pi}_k^b}] \quad (3.8a)$$

$$[\Pi_j^a, \Pi_k^b] = [\tilde{\pi}_j^a, \tilde{\pi}_k^b] - [A_{\phi_j^a}, \tilde{\pi}_k^b] - [\tilde{\pi}_j^a, A_{\phi_k^b}] + [A_{\phi_j^a}, A_{\phi_k^b}]. \quad (3.8b)$$

Ignoramos el conmutador entre elementos de la conexión, porque es de orden cuarto en ϵ , independientemente de que el conmutador mismo sea cero o no, y lo que nos queda es

$$[\Phi_j^a, \Phi_k^b] = - [A^{\tilde{\pi}_j^a}, \phi_k^b] - [\phi_j^a, A^{\tilde{\pi}_k^b}] = iK^{\tilde{\pi}_j^a \tilde{\pi}_k^b}, \quad (3.9a)$$

$$[\Pi_j^a, \Pi_k^b] = - [A_{\phi_j^a}, \tilde{\pi}_k^b] - [\tilde{\pi}_j^a, A_{\phi_k^b}] = -iK_{\phi_j^a \phi_k^b}. \quad (3.9b)$$

Por lo tanto, las relaciones de conmutación entre las amplitudes reales de los

3.2. Dinámica efectiva de la cuerda

modos normales del campo de deformación y sus momentos conjugados son

$$[\Phi_j^1, \Phi_k^2] = 0, \quad (3.10a)$$

$$[\Phi_j^2, \Phi_k^3] = -\frac{i\epsilon^2\sigma}{2\pi\rho^2}\delta_{j,-k}, \quad (3.10b)$$

$$[\Phi_j^3, \Phi_k^1] = \frac{\epsilon^2\sigma}{2\pi\rho^2k}\delta_{j,-k}, \quad (3.10c)$$

$$[\Pi_j^1, \Pi_k^2] = 0, \quad (3.10d)$$

$$[\Pi_j^2, \Pi_k^3] = -\frac{i\epsilon^2\sigma}{8\pi}\frac{(1-k^2)(1-k^2-k^4)}{k^2(1+k^2)}\delta_{j,-k}, \quad (3.10e)$$

$$[\Pi_j^3, \Pi_k^1] = \frac{\epsilon^2\sigma}{8\pi}\frac{1-2k^2-k^4}{k(1+k^2)}\delta_{j,-k}. \quad (3.10f)$$

Es importante notar que, en cada caso, las relaciones de conmutación entre los modos y entre sus momentos son proporcionales del eigenvalor de momento angular σ . En otros contextos, existen situaciones físicas donde las relaciones de conmutación entre los operadores de posición dependen del momento angular del objeto en cuestión (ver, por ejemplo, [13], [16]).

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En este trabajo consideramos una cuerda cuántica realizada como un círculo unitario sobre el que se encuentra definido un campo de deformación. Esta cuerda es una *elástica*, que puede deformarse con cierto esfuerzo en sus direcciones normales, pero a la que debe someterse a un gran esfuerzo para estirla o contraerla. La descripción de este campo se realiza mediante la colección de sus modos de Fourier. Cuando la amplitud de la deformación de la cuerda es pequeña, el campo se descompone en una colección infinita de osciladores armónicos independientes, las amplitudes de los modos normales de Fourier. En estas circunstancias, se cuantiza la cuerda a través de la cuantización de sus modos normales. El espacio de estados resultante es un producto de espacios de oscilador armónico.

Sobre la cuerda se encuentra una partícula cuántica constreñida a moverse. La constricción se realiza imponiendo un potencial de oscilador armónico en el espacio normal a la cuerda. Se encuentra el hamiltoniano efectivo tangente de la partícula, el cual incluye como parámetros externos a la amplitud de los modos de Fourier de la cuerda, así como las velocidades, o momentos conjugados, de estos. Al variar la cuerda adiabáticamente y fijar a la partícula en un eigenestado de momento angular σ definido en la dirección normal a la cuerda, el estado de la partícula, que forma parte de un subespacio degenerado, queda fijo a un eigenestado instantáneo de su hamiltoniano, dado que la matriz de Wilczek-Zee

en cierta base es diagonal. La fase de Berry correspondiente es proporcional al momento angular σ , de modo que es experimentalmente accesible mediante superposiciones de estados con distinto momento angular.

En la aproximación adiabática, el estado de la partícula y el de la cuerda pueden ser estudiados de modo independiente. Al quedar fijo el estado de la partícula, puede estudiarse el efecto que ésta tiene sobre la cuerda al obtenerse un hamiltoniano efectivo de la cuerda como el valor esperado del hamiltoniano del sistema cuerda-partícula bajo el estado de la partícula. Encontramos que este hamiltoniano efectivo puede seguirse expresando como el de una colección infinita de osciladores armónicos, pero en unas variables covariantes de posición y momento cuyas relaciones de conmutación no son nulas. Los conmutadores entre operadores de posición y operadores de momento son proporcionales al momento angular de la partícula en el plano normal a la cuerda, es decir, están relacionados con las propiedades de la partícula que sobre la cuerda se mueve.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Y. Aharonov and J. Anandan. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 58(16):1593–1596, Apr 1987.
- [2] D. Amati, M. Cialafoni, and G. Veneziano. Can Space-Time Be Probed Below the String Size? *Phys. Lett.*, B216:41, 1989.
- [3] M. V. Berry. Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.
- [4] Michael V. Berry. The Quantum Phase, Five Years After. in *Shapere, A. (Ed.), Wilczek, F. (Ed.): Geometric Phases in Physics* 7-28.
- [5] A. Bohm, A. Mostafazadeh, Q. Koizumi, H. Niu, and J. Zwanziger. *The Geometric Phase in Quantum Systems: Foundations, Mathematical Concepts, and Applications in Molecular and Condensed Matter Physics*. Springer Verlag, 2003.
- [6] Manfredo Perdigao do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [7] Dariusz Chruściński and Andrzej Jamiolkowski. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, 2004.
- [8] C. Chryssomalakos, H. Hernandez, and E Okon. Quantum Geometric Phases in Deformable Extended Objects. Sin publicar, 2008.

- [9] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, and John E. Roberts. The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.*, 172:187–220, 1995.
- [10] Elias Okon Gurvich. *Relevancia de la noconmutatividad en la descripción cuántica del espaciotiempo*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
- [11] Héctor Hernández Coronado. *No-conmutatividad del espaciotiempo, fases geométricas y dinámica cuántica constreñida*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
- [12] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, third edition, 1998.
- [13] T. F. Jordan and N. Mukunda. Lorentz-covariant position operators for spinning particles. *Phys. Rev.*, 132(4):1842–1848, Nov 1963.
- [14] Albert Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover Publications, 1999.
- [15] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Taylor and Francis, second edition, 2003.
- [16] M. H. L. Pryce. The Mass center in the restricted theory of relativity and its connection with the quantum theory of elementary particles. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A195:62–81, 1948.
- [17] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B442:593–622, 1995.
- [18] Lewis Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, second edition, 1996.
- [19] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison Wesley, 1993.
- [20] Joseph Samuel and Rajendra Bhandari. General setting for berry’s phase. *Phys. Rev. Lett.*, 60(23):2339–2342, Jun 1988.

Bibliografia

- [21] P. C. Schuster and R. L. Jaffe. Quantum mechanics on manifolds embedded in Euclidean space. *Ann. Phys.*, 307:132–143, 2003.
- [22] Barry Simon. Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 51(24):2167–2170, Dec 1983.
- [23] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, 1947.
- [24] Frank Wilczek and A. Zee. Appearance of gauge structure in simple dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 52(24):2111–2114, Jun 1984.
- [25] Edward Witten. Noncommutative Geometry and String Field Theory. *Nucl. Phys.*, B268:253, 1986.