



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**FACULTAD DE INGENIERÍA, CIUDAD UNIVERSITARIA
CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS PARA EL
DESARROLLO TECNOLÓGICO**

SISTEMA DE SENSADO ÓPTICO PARA MEMS

**T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN**

PRESENTA

ING. JUAN ANTONIO MONTERO DÍAZ



TUTOR: DR. SANTIAGO JESÚS PÉREZ RUIZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Presidente: Dr. Oleksandr Martynyuk (Facultad de Ingeniería)
Secretario: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar (Facultad de Ingeniería)
Vocal: Dr. Santiago Jesús Pérez Ruiz (Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico)
1er suplente: Dra. Rosalba Castañeda Guzmán (Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico)
2do suplente: Dr. Pablo Luis Rendón Garrido (Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico)

Lugar donde se realizó la tesis: Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico

Tutor de Tesis:

Dr. Santiago Jesús Pérez Ruiz (Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico)

Firma

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Es imposible nombrar a todas las personas que han contribuido de una u otra forma en mi desarrollo académico. Desde mis estudios de primaria hasta los de maestría, una gran cantidad de profesores, compañeros y amigos me han acompañado en esta travesía: desde los fundamentos necesarios hasta los teoremas más complejos y abstractos. Otras personas son aquellas que me han brindado su amistad y apoyo en todo momento, aquellas con las cuales tuve momentos de júbilo, de preocupación, de tristeza y de gloria. Son los amigos una parte importante de mi vida que jamás podré borrar.

Doy una dedicatoria especial a Lidwine, mi esposa. Le agradezco el que haya sido la persona con la que más he compartido y compaginado, la que mejor me ha entendido y también soportado, pero lo más importante, me ha ayudado a crecer. Es alguien que me ha ayudado a mejorar como persona, de quien también he aprendido mucho y la persona con la cual he vivido los mejores momentos de mi vida.

Es mi familia sin duda alguna la cual tiene el mayor crédito de este trabajo. Fueron mis padres, Juan Antonio María de los Ángeles, quienes me enseñaron a vivir con honestidad, compromiso y perseverancia. Mis hermanos Gerardo y Oscar me apoyaron y aconsejaron cuando lo creían necesario valiéndose de una experiencia mayor a la mía. Agradezco profundamente a mis padres y hermanos, quienes, además de inculcarme los valores que una persona necesita para triunfar en la vida, me han brindado lo más importante, la calidez de una familia unida...

¡Gracias por todo su apoyo y confianza!

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1 Introducción	1
1.1 Los Micro-Sistemas Electro-Mecánicos (MEMS).....	3
1.2 Aplicaciones de los MEMS.....	6
1.3 Descripción de la tesis.....	10
Capítulo 2 Breve introducción a las tecnologías de fabricación de MEMS	12
2.1 Procesos básicos	14
2.2 Micromaquinado.....	29
2.3 MUMPs.....	29
Capítulo 3 Fundamentos físicos	36
3.1 Modelo matemático del Trampolín (Cantilever).....	39
3.2 Efecto fotoacústico	59
3.3 Propagación de ondas en fluidos	76
Capítulo 4 Instrumentación del sistema de sensado óptico	82
4.1 Método estático	85
4.2 Método dinámico.....	94
4.3 Validación del sistema	98
Capítulo 5 Conclusiones	104
5.1 Capítulo 1.....	106
5.2 Capítulo 2.....	106
5.3 Capítulo 3.....	107
5.4 Capítulo 4.....	107
5.5 Conclusiones generales.....	108
Bibliografía	111

Capítulo 1

Introducción

Contenido

Capítulo 1 Introducción	1
1.1 Los Micro-Sistemas Electro-Mecánicos (MEMS).....	3
1.2 Aplicaciones de los MEMS	6
1.3 Descripción de la tesis.....	10

Figuras

Figura 1.1 Componentes de un MEMS.....	4
Figura 1.2 Mercado de los MEMS	5
Figura 1.3 Micro cadena y micro engranes	6
Figura 1.4 Micro trampolín.....	6
Figura 1.5 Micro lentes.....	7
Figura 1.6 Micro engrane.....	8
Figura 1.7 Micro varactor	9
Figura 1.8 Micro trampolines.....	9
Figura 1.9 Micro actuadores	10

Ecuaciones

No se encuentran elementos de tabla de ilustraciones.

Tablas

No se encuentran elementos de tabla de ilustraciones.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Los Micro-Sistemas Electro-Mecánicos (MEMS: *Micro-Electro-Mechanical Systems*) han tenido un fuerte desarrollo a partir del surgimiento de instrumentos como el Microscopio de Fuerza Atómica (AFM) en 1986 y otras numerosas aplicaciones. Los MEMS esencialmente consisten en micro estructuras mecánicas con un sistema de transducción (conversión de energía) que permiten construir un sensor o un actuador y que además, por su forma de fabricación, permite integrarlo con la electrónica necesaria para su funcionamiento.

La característica de fácil integración con el resto del circuito integrado, se debe a que se fabrican con proceso que son compatibles con los empleados en la fabricación de componentes electrónicos. De modo que también se emplea la fotolitografía, enmascarillado, difusión, depósito en vacío, etc., junto a técnicas propias, como el micro maquinado.

Otro aspecto común es el empleo de los mismos materiales utilizados en la fabricación de dispositivos semiconductores. De hecho la mayoría de micro estructuras mecánicas se esculpen, con micro maquinado, en silicio. Por supuesto que en la fabricación de MEMS es necesaria la *caracterización* mecánica de la microestructura fabricada. Esta caracterización, en realidad es necesaria aún antes, o por lo menos a la par, de que se desarrollen los procesos, ya que es frecuente que haya necesidad de comprobar alguna dimensión, sobre todo en el espesor, ya que en ciertas técnicas de micro maquinado solo es posible controlar el espesor, indirectamente por el tiempo de ataque, o conocer con exactitud el valor de algún parámetro físico necesario para el diseño (módulo elástico, tensión residual, etc.).

Otro aspecto que demanda una caracterización, en las etapas iniciales de su fabricación, es el hecho de que las microestructuras mecánicas son susceptibles de alterar su funcionamiento por influencia de la temperatura y la composición de sus materiales (por ejemplo puede haber una flexión indeseada por diferencias en los coeficientes de expansión térmica de los materiales utilizados). De modo que la caracterización es necesaria no sólo en la fase final del dispositivo, sino que es muy necesaria en etapas previas. Esta exigencia obliga a pensar muy minuciosamente la secuencia de las etapas de los procesos para desarrollar las microestructuras mecánicas y planear la compatibilidad con alguna forma de caracterización.

1.1 Los Micro-Sistemas Electro-Mecánicos (MEMS)

Los MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems*) son dispositivos que permiten la conjunción de circuitos electrónicos con sistemas mecánicos en una amplia gama de aplicaciones. Esta integración se lleva a cabo en una oblea de sustrato de silicio por medio de tecnología de microfabricación. Con la tecnología MEMS es posible fabricar sistemas completos en un sólo chip (sensor, procesador y actuador). A través de un sensor, un MEMS puede reunir información de tipo mecánica, térmica, biológica, química y/o electromagnética. Después se procesa la información por medio de electrónica y se envía la señal correspondiente al actuador, el cual puede responder cambiando la posición de algo, regulando cierto voltaje, filtrando, etc. La gran ventaja de estos mecanismos es que se construyen de una forma muy similar que los circuitos integrados y al producirlos en una gran cantidad de volumen, los costos de producción son increíblemente bajos.

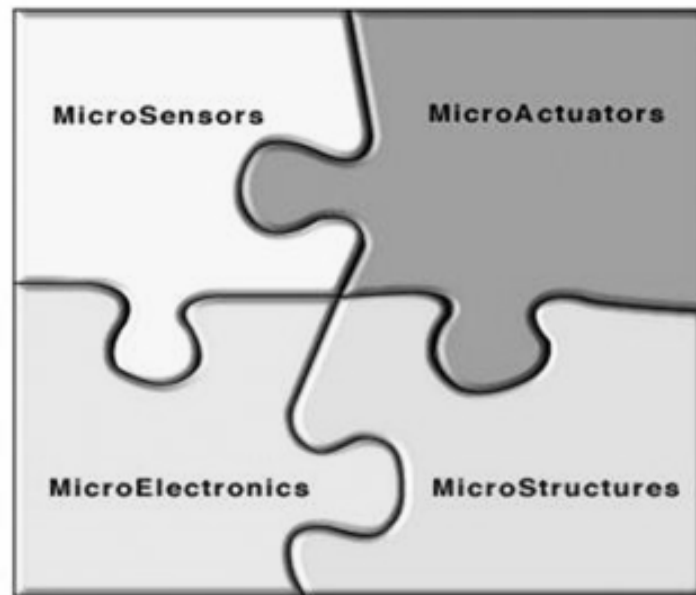


Figura 1.1 Componentes de un MEMS

Existen muchas aplicaciones de los MEMS y las posibilidades de expandir su uso a nuevos campos es muy prometedora. La industria automotriz fue la primera en aplicar esta tecnología al implementar acelerómetros basados en tecnología MEMS para accionar las bolsas de aire de seguridad. El sistema de seguridad antes empleado consistía de acelerómetros grandes que mandaban información a sistemas de control electrónicos separados de las bolsas de aire. El costo de esta tecnología era alrededor de \$50 USD por automóvil. Los MEMS proporcionaron un solo chip que incluye el acelerómetro integrado a la electrónica de control y también a un actuador que libera las bolsas de aire por un costo entre \$5 y \$10 USD. Los meteorólogos utilizaron también esta tecnología para crear el *polvo inteligente*¹ para así poder observar el comportamiento dentro de tornados. Los MEMS invadieron después el mercado de la industria en líneas de producción como sensores de temperatura, sensores de presión, sensores de fluidos o como inyectores de tinta.

¹ *Polvo Inteligente (Smart Dust)*. Red de MEMS inalámbricos que sirve para detectar cambios en el medio ambiente: luz, movimiento, temperatura, ...

Una aplicación contemporánea interesante se encuentra en los BIOMEMS, que sirven para medir presión sanguínea, niveles de azúcar, identificadores de ADN, microscopios de fuerza atómica, sensores de agentes químicos peligrosos, entre otras cosas.

Los MEMS tienen el tamaño de apenas unas cuantas micras. En muchos casos encontramos MEMS más pequeños que el grosor de un cabello humano y más pequeños que un ácaro. Más adelante se describen los procesos de fabricación de MEMS, los cuales son muy similares a los de los circuitos integrados.

Breve historia de los MEMS

La tecnología de los MEMS empezó en los años cincuenta con el objetivo de desarrollar sensores de presión, específicamente en autos. Fue hasta finales de los años sesenta que, como un experimento curioso, se desarrolló una de las primeras aplicaciones basadas en esta tecnología, la cual se trataba de un transistor de efecto de campo (*FET*), desarrollado por la Westinghouse. A partir de experimentos sencillos como ese fue que empezó el crecimiento de esta tecnología. Al ver que su construcción era posible, empezó una amplia investigación sobre dispositivos que pudieran fabricarse por este método y que pudieran aplicarse en la industria.



Figura 1.2 Mercado de los MEMS

En los años setenta se comercializaron los primeros diseños. En los años ochenta se experimentó con los métodos de fabricación y al final de esta década, los MEMS entraron de lleno en el diseño e implementación para microelectrónica y biomédica. En la década de

los noventa, los MEMS alcanzaron la producción masiva hecha por algunas marcas comerciales como Bosch y Philips Semiconductors.

1.2 Aplicaciones de los MEMS

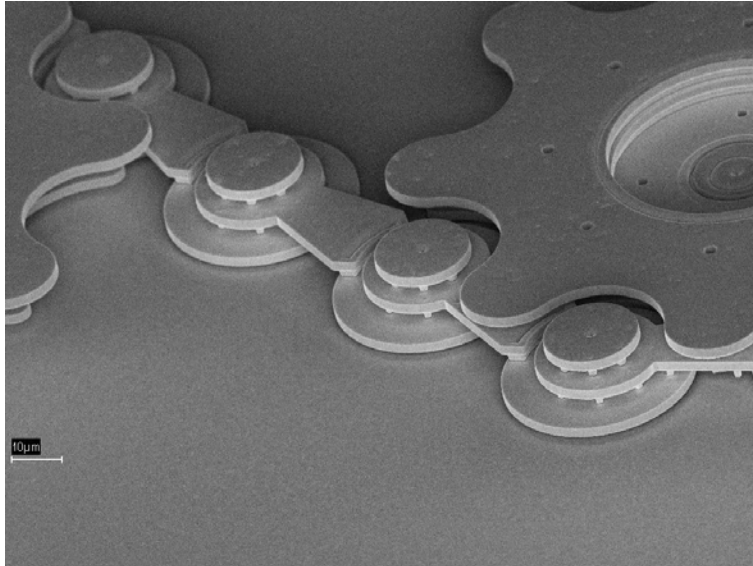


Figura 1.3 Micro cadena y micro engranes

Existen muchas aplicaciones de los MEMS. En esta sección comentaremos unas cuantas sin adentrarnos en su funcionamiento, ya que la teoría básica que describe la mayoría de estas aplicaciones se muestra en el capítulo 3.

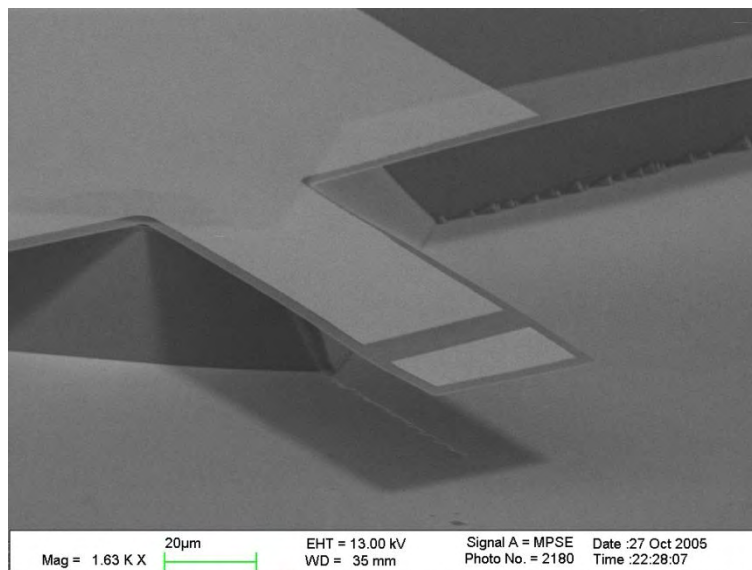


Figura 1.4 Micro trampolín

Comencemos con las tiras bimetálicas. Éstas consisten de un par de tiras de diferentes materiales que tengan diferente coeficiente de expansión térmica. La aplicación más implementada es la de un termopar. La diferencia entre un termopar convencional y uno basado en MEMS es principalmente el tamaño del dispositivo. También puede construirse un arreglo de micro-termopares para disminuir la incertidumbre de la medición. Además, estos termopares pueden integrarse en circuitos electrónicos para construir sensores de temperatura más precisos. La idea de las tiras bimetálicas podemos expandirla a los materiales piezoeléctricos, que pueden ser usados como actuadores o sensores. En ambos casos se ve involucrada una señal eléctrica. Con éstos se pueden desarrollar interruptores o sensores de presión, de viscosidad, ya sea en arreglo de trampolín o de puente. Con un arreglo de sensores de presión pueden crearse sensores que no sólo determinen la presión que sufren sino la posición donde se encuentran los puntos de presión, como en las famosas pantallas o monitores sensibles al tacto, conocidos como sensores biomiméticos. Otra de las aplicaciones de los MEMS está en las puntas de los microscopios de fuerza atómica, que consisten básicamente de un trampolín que toca la muestra y al monitorear el cambio de flexión en el trampolín se va mostrando la textura de dicha muestra.

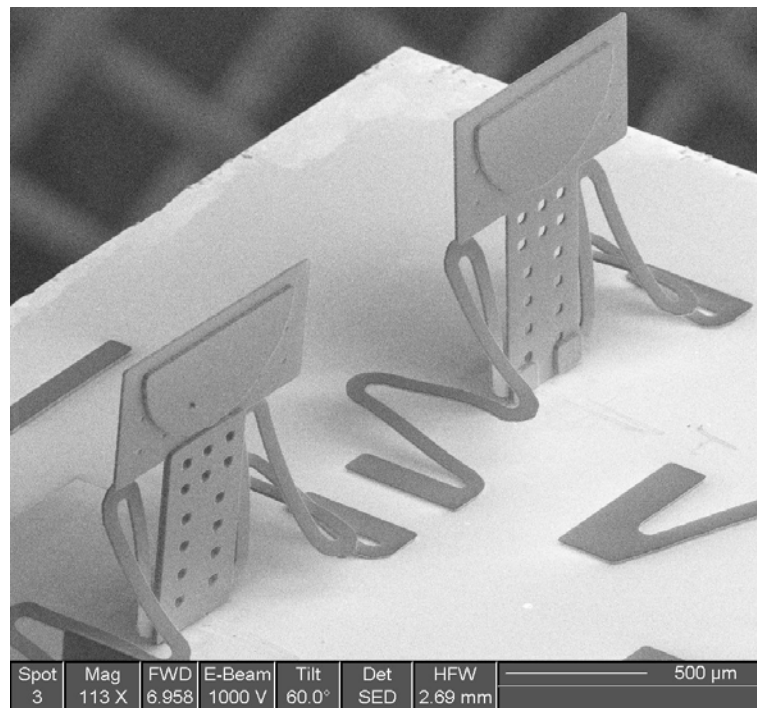


Figura 1.5 Micro lentes

Una de las aplicaciones en las telecomunicaciones es en la construcción de interruptores. A diferencia de los interruptores electromecánicos, los micro mecánicos tienen mayor rapidez de respuesta, lo que permite trabajar a frecuencias más altas y a bajo costo, en el orden de las microondas.



Figura 1.6 Micro engrane

Otra aplicación es la construcción de micro válvulas, las cuales se aplican en las impresoras de inyección de tinta, pues es lo que les permite tener una gran resolución. Estas micro válvulas también se aplican en la biomedicina al funcionar como catalizadores de ciertos medicamentos. Hablando de biomedicina, se han desarrollado micro cámaras y micro pinzas para realizar operaciones con incisiones menores y por lo tanto, tiempo de recuperación del paciente mucho menor y menor riesgo, a diferencia de años atrás. Dentro de esta área se encuentran también los medidores de presión sanguínea y de glucosa, los ojos artificiales y una gran cantidad de órganos artificiales que se encuentran en desarrollo, pero la mayoría es construido con tecnología MEMS, únicamente se utilizan materiales que no sean dañinos al cuerpo humano.

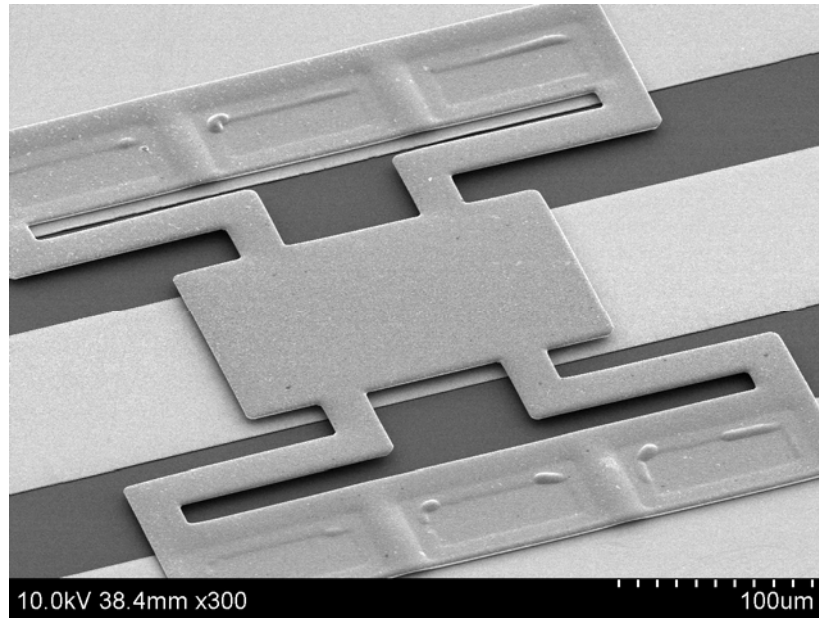


Figura 1.7 Micro varactor

También se han desarrollado micro antenas, micro micrófonos (valga la redundancia), micro pantallas, micro motores, y muchos de los artefactos que utilizamos en el mundo a escala natural también se han miniaturizado.

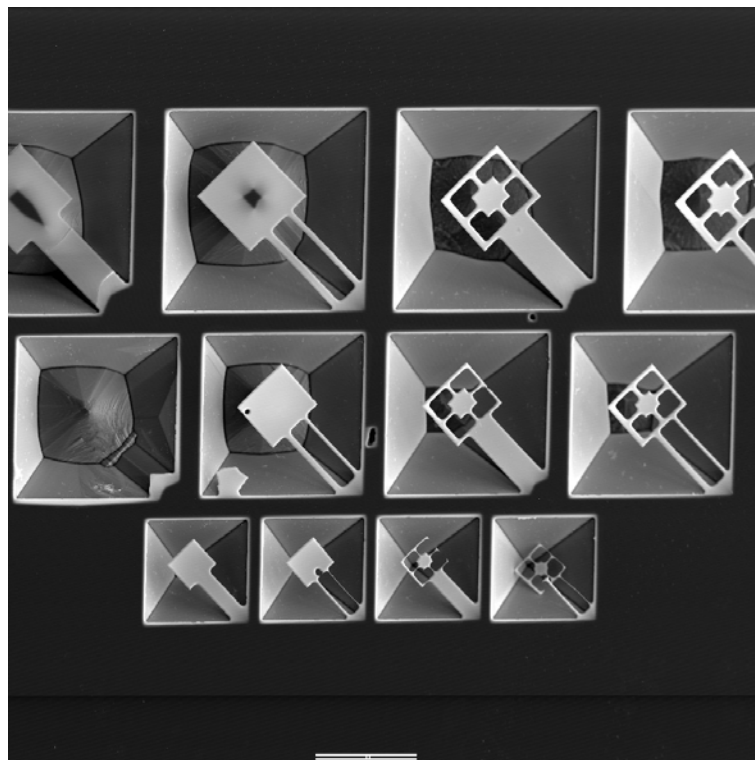


Figura 1.8 Micro trampolines

En resumen, existen micro sensores térmicos, electromagnéticos, mecánicos, químicos, etc., que permiten el desarrollo de muchas aplicaciones.

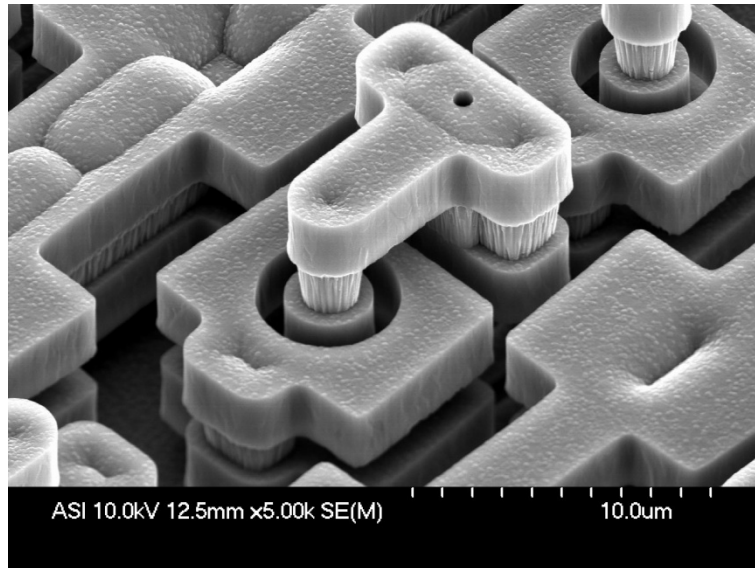


Figura 1.9 Micro actuadores

1.3 Descripción de la tesis

Definición del problema: En particular el objetivo de la presente tesis fue idear un método de medición que nos permitiera la caracterización de la microestructuras mecánicas incompleta, es decir, sin contactos y/o elementos transductores que permitieran su excitación eléctrica y al mismo tiempo fuera lo suficientemente sensible y confiable como para poder utilizarse en escalas muy pequeñas. En particular, se emplearán trampolines por la sencillez de su construcción y versatilidad para emplearse en muy variadas aplicaciones.

Objetivo de la propuesta y método: El sistema de caracterización que ideamos es esencialmente óptico, en la detección del movimiento generado por efecto fotoacústico en la excitación de las microestructuras mecánicas. Muy resumidamente, el efecto fotoacústico consiste, en irradiar las micro estructuras mecánicas con un láser pulsado, por debajo del régimen de ablación, esta energía provoca gradientes de temperatura que, a su vez, provocan esfuerzos que dan como resultado la generación de un movimiento mecánico de flexión.

Resultados esperados: El utilizar luz láser tanto en la excitación como en el registro del movimiento permitirá medir objetos muy pequeños, ya que el haz de luz puede concentrarse, mediante óptica apropiada. El desarrollar este procedimiento de caracterización permitirá evaluar micro estructuras mecánicas que aún no estaban totalmente terminados e incluso permitirá diseñar micro estructuras mecánicas exclusivamente para determinar algún parámetro físico del cual no teníamos certeza de su valor.

Capítulo 2

Breve introducción a las tecnologías de fabricación de MEMS

Contenido

Capítulo 2 Breve introducción a las tecnologías de fabricación de MEMS	12
2.1 Procesos básicos	14
2.2 Micromaquinado.....	29
2.3 MUMPs.....	29

Figuras

Figura 2.1 Etapas en la construcción de un MEMS.....	15
Figura 2.2 Oxidación	16
Figura 2.3 Epitaxia	17
Figura 2.4 Incrustación	18
Figura 2.5 Evaporación.....	18
Figura 2.6 CVD.....	19
Figura 2.7 Electrodeposición.....	20
Figura 2.8 Moldeado	20
Figura 2.9 Exposición de la fotoresina.....	21
Figura 2.10 Etapas de la fotolitografía.....	21
Figura 2.11 Transferencia de la máscara a la película	22
Figura 2.12 Alineación de la máscara.....	22
Figura 2.13 Proceso con máscara alineada.....	23
Figura 2.14 Desaparición de las marcas de la máscara.....	23
Figura 2.15 Litografía.....	24
Figura 2.16 Alineación de la máscara.....	24
Figura 2.17 Patrón dependiente del tiempo de exposición	25
Figura 2.18 Puntos de alineación de la máscara	25
Figura 2.19 Grabado húmedo.....	27
Figura 2.20 RIE.....	27
Figura 2.21 Unión	28
Figura 2.22 Empaquetamiento	28
Figura 2.23 PolyMUMPs	31
Figura 2.24 MetalMUMPs	33
Figura 2.25 SOIMUMPs.....	34

Ecuaciones

No se encuentran elementos de tabla de ilustraciones.

Tablas

Tabla 2.1 Propiedades físicas del silicio y otros materiales	14
--	----

CAPÍTULO 2. BREVE INTRODUCCIÓN A LAS TECNOLOGÍAS DE FABRICACIÓN DE MEMS

Las técnicas de fabricación de los circuitos integrados están muy bien dominadas para la construcción de dispositivos electrónicos. Para su fabricación se utilizan diferentes tipos de materiales, ya sea para estructuras gruesas o de capas finas. Los materiales más utilizados para la elaboración de estructuras gruesas son semiconductores, entre éstos el Silicio (*silicon*) y el Arsenuro de Galio (*gallium arsenide*). Existen también materiales usados en la elaboración de capas delgadas, tales como óxido de silicio térmico (*thermal silicon oxide*), capas dieléctricas (*dielectric layers*), silicio policristalino (*polycrystalline silicon / poly-Si*) y películas de metal (*metal films*), entre ellas el aluminio y el oro.

El desarrollo de la tecnología basada en Silicio ha dado pie a muchas ventajas sobre otras. El Silicio es un material con excelentes propiedades mecánicas, debidas a su estructura molecular. Los componentes micromecánicos se pueden integrar con la electrónica para formar sistemas que incluyan sensores y actuadores en un mismo empaquetado. En la siguiente tabla se muestran las propiedades físicas del silicio y otros materiales, los cuales son los más usados en los procesos de fabricación de microestructuras.

	<i>Módulo de Young</i> [GPa]	<i>Coefficiente de Poisson</i> [1]	<i>Densidad</i> [Kg/m ³]
<i>Si</i>	160	0.22	2400
<i>SiO₂</i>	73	0.17	2200
<i>Poly-Si</i>	160	0.22	2400
<i>Si₃N₄</i>	323	0.25	3100
<i>GaAs</i>	75	0.31	5300

Tabla 2.1 Propiedades físicas del silicio y otros materiales

En diversos países tales como Japón, Estados Unidos de Norteamérica y la Unión Europea, se han desarrollado diversos programas de investigación y fabricación de microestructuras para su integración en proyectos más grandes.

En este capítulo explicaremos a groso modo los procesos que se utilizan en la fabricación de estas microestructuras llamadas MEMS.

2.1 Procesos básicos

Dentro de los materiales para crear películas delgadas tenemos a las capas dieléctricas, las cuales son de dióxido de silicio (*silicon dioxide* – SiO_2), referidas sólo como óxido, o de nitruro de silicio (*silicon nitride* - Si_3N_4). Éstos se utilizan para aislar las diferentes capas de conductores y para las máscaras de difusión o de implantación de iones. Las capas de silicio policristalino se utilizan como electrodos en dispositivos como metal-óxido-semiconductor (MOS). También se utilizan como conductores y para elaborar las juntas de ciertos dispositivos. Las películas de metal sirven para disminuir la resistencia de los semiconductores y para hacer las conexiones de los circuitos. El óxido térmico tiene aplicación en la compuerta (*gate*) de los transistores de efecto de campo (*FETs*) debido a que el óxido empleado tiene más calidad como aislante que el óxido común.

Todos los procesos de fabricación en Silicio empiezan con el crecimiento de una oblea de Silicio pura. Esta oblea tiene un tamaño inicial entre 1 y 8 [in]. El grosor de estas obleas es aproximadamente de 525 [μm] para una de 4 [in] de diámetro y de 750 [μm] para una oblea de 6 [in]. Entonces, entre más grande la oblea, mayor su grosor y a su vez mayor grosor posible para el grabado.

Los procesos básicos se describen a continuación. Vale la pena mencionar que otros procesos son variaciones de los procesos mencionados para lograr así micromaquinados especiales. En la figura 3.1 se puede ver un diagrama de flujo de cómo se construye un MEMS.

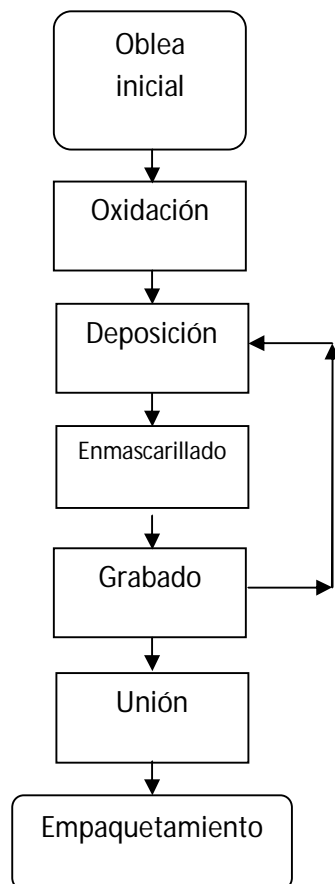
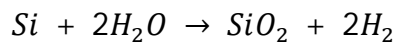
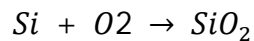


Figura 2.1 Etapas en la construcción de un MEMS

Oxidación (Oxidation)

El Silicio se oxida a temperatura ambiente y a una presión atmosférica normal, pero el grosor de esta oxidación es de tan sólo unos cuantos átomos de grosor. Si esta oxidación se lleva a cabo a altas temperaturas, aproximadamente a 800 [°C] los grosores son mayores.

La oxidación térmica es un proceso en el que una película delgada de óxido de silicio se crece encima de una oblea de silicio puro. Esta oxidación tiene las siguientes reacciones químicas, las cuales se llevan a cabo entre 900 y 1200 [°C], dependiendo de si se usa vapor de agua o vapor de oxígeno



A partir de las temperaturas a las que se oxida el Silicio se definen dos tipos de oxidación: la húmeda (*wet*) y la seca (*dry*). A más altas temperaturas, se dice que se lleva a cabo una oxidación húmeda, con lo cual se tiene también una oxidación más rápida, aunque la densidad del óxido es menor. También se puede oxidar la oblea a altas presiones, con lo que la temperatura necesaria para la oxidación será mucho menor, disminuyendo el tiempo de crecimiento de una oblea.

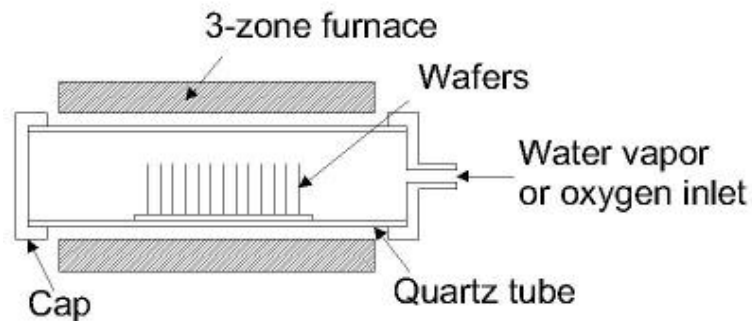


Figura 2.2 Oxidación

Dopaje (Doping)

Inicialmente, la oblea de Silicio no es un material intrínseco, sino extrínseco, ya sea de tipo P o de tipo N. El dopaje de la oblea pura se puede hacer por difusión o por implantación de iones. Para el dopaje positivo se utiliza Boro (*B*) y para el dopaje negativo se utiliza el Fósforo (*P*).

Tratamiento térmico (Anneal)

Este proceso se lleva a cabo debido a que las obleas impuras son severamente dañadas al dopar al Silicio. El tratamiento térmico se lleva a cabo a una temperatura de 800

[C]. A través de esto se asegura también que los átomos dopantes toman la posición correcta en la red cristalina.

Deposición (Deposition)

Este proceso es muy importante debido a que gracias a que depositamos otras capas de material podemos crear las estructuras que nos permiten desarrollar las aplicaciones deseadas.

Existen diversas técnicas para depositar películas de material sobre la oblea de silicio. Entre éstas se encuentran: epitaxia, incrustación, evaporación, deposición de vapor químico y métodos de giro. Todas las técnicas anteriores sirven para depositar material de semiconductores, metales, aislantes y polímeros.

- Epitaxia (*Epitaxy*). Esta técnica sirve para crecer una capa de silicio cristalino de dopaje y concentración diferente a la oblea de silicio. El grosor va desde 1 hasta 20 μm . Se usa bastante en la fabricación de CMOS, ya que tiene una alta eficiencia al crear junturas p-n. El proceso se lleva a cabo en estado gaseoso, utilizando gases que contienen silicio, tales como SiH_4 , $\text{SiH}_2\text{C}_{12}$ y SiC_{14} . La tasa de deposición está entre 0.2 y 4 $[\mu\text{m}/\text{min}]$. Durante este proceso se lleva a cabo el dopaje. Para ello se utilizan AsH_3 o PH_3 , si el dopaje es de tipo negativo, y B_2H_6 , si el dopaje es de tipo positivo. Esta técnica también sirve para crecer una capa de silicio policristalino sobre un material diferente, por lo que en este caso el proceso es llamado *Heteroepitaxia*.

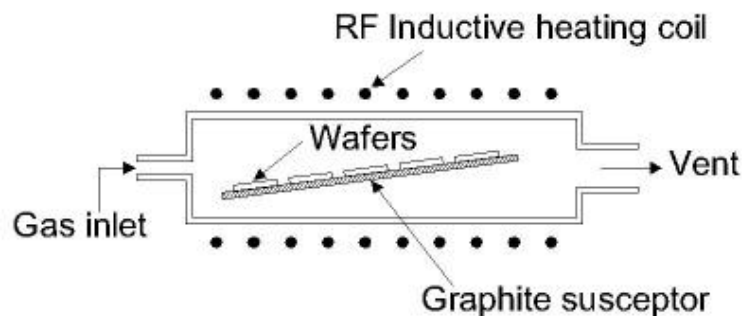


Figura 2.3 Epitaxia

- Incrustación (*Sputtering*). Esta técnica consiste básicamente de bombardear con cierto material un área específica. El proceso se lleva a cabo en una cámara de vacío y se utilizan iones de argón (Ar) como el medio de transporte del material a incrustarse. Debido a que existen varias formas de generar estos iones, existen también diversos métodos de sputtering. La tasa promedio de deposición está entre 0.1 y 0.3 $[\mu\text{m}/\text{min}]$. Las ventajas que ofrece esta técnica son que se puede incrustar casi cualquier material inorgánico, además de que es muy efectivo para depositar metales a bajas temperaturas, aunque ciertos metales, como el oro, el platino y la plata necesitan de una capa de adhesión, ya que no se incrustan perfectamente en el silicio.

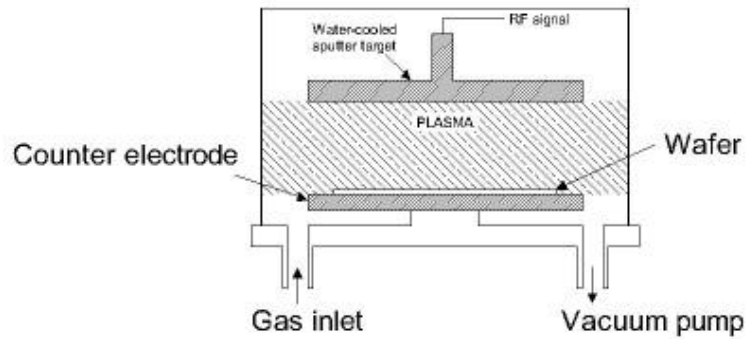


Figura 2.4 Incrustación

- Evaporación (*Evaporation*). La evaporación puede reducirse a calentar hasta altas temperaturas el material a depositarse para que después se condense y forme una película delgada sobre el silicio. Casi cualquier elemento puede depositarse por este método, pero aquellos materiales de dos o más elementos no tendrán la misma composición química después de la evaporación, ya que durante ésta se lleva a cabo una recomposición del material. Este proceso se lleva a cabo en una cámara de vacío. La tasa de deposición es alrededor de 5 a 10 [nm/min].

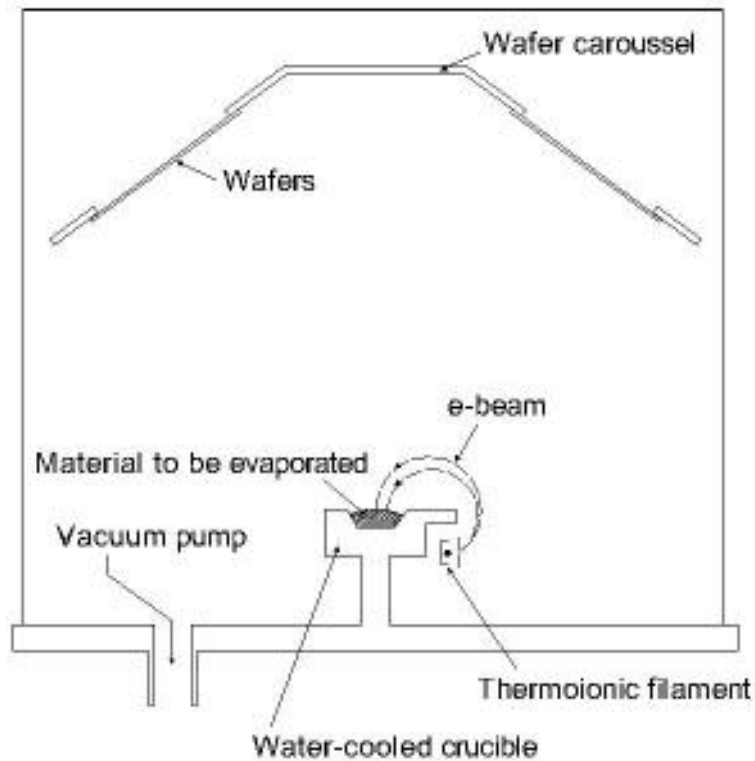


Figura 2.5 Evaporación

- CVD (*Chemical Vapor Deposition*). La deposición por vapor químico (CVD) es la técnica más usada para colocar capas delgadas de materiales provenientes del silicio en las obleas ya procesadas. Los materiales depositados por esta técnica son

materiales no cristalinos que pueden ser depositados a presión atmosférica, *atmospheric pressure chemical vapor deposition (APCVD)*, o a baja presión, *low pressure chemical vapor deposition (LPCVD)*, aunque también existe la técnica basada en plasma utilizada en bajas temperaturas, *plasma-enhanced chemical vapor deposition (PECVD)*. LPCVD se utiliza ampliamente para depositar materiales tales como silicio policristalino, nitruro de silicio y óxido de silicio. PECVD se utiliza para colocar las capas de aluminio, donde la temperatura de deposición es menor a 400 [C]. La tasa de deposición varía con respecto al material a depositar. Ésta puede ser desde 5 hasta 70 [nm/min].

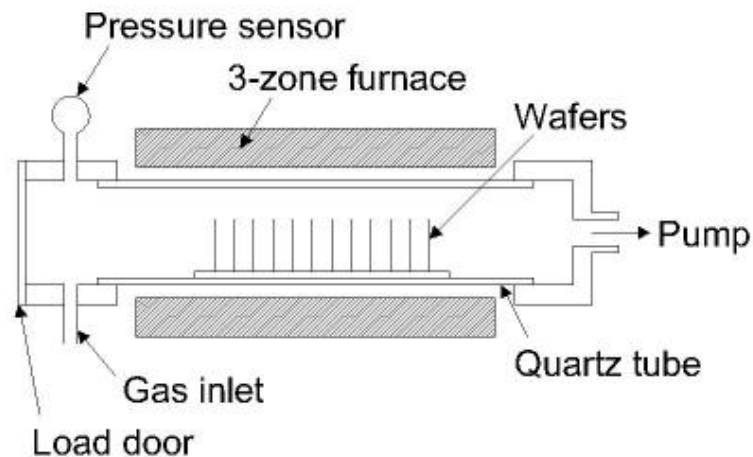


Figura 2.6 CVD

- PVD (*Physical Vapor Deposition*). Este tipo de deposición es muy similar a CVD. La gran diferencia consiste en que al evaporarse, el material no se descompone en diferentes elementos, como ocurre en CVD. Este tipo de deposición es más usada con metales, aunque la calidad de la película depositada no se compara con la depositada por CVD.
- Electrodeposición (*Electrodeposition/Electroplating*). Este proceso se utiliza en materiales conductores. La deposición se hace de dos formas: electroplateado y electroplateado sin diferencia de potencial eléctrico. En el primero se sumerge el material a depositar en un líquido que se somete a una diferencia de potencial, por lo que las moléculas se separan por electrólisis y así se deposita el material en uno de los electrodos. En el segundo, el líquido genera una reacción química con el material sin necesidad de una diferencia de potencial externa, y el material se deposita de igual forma en el sustrato.

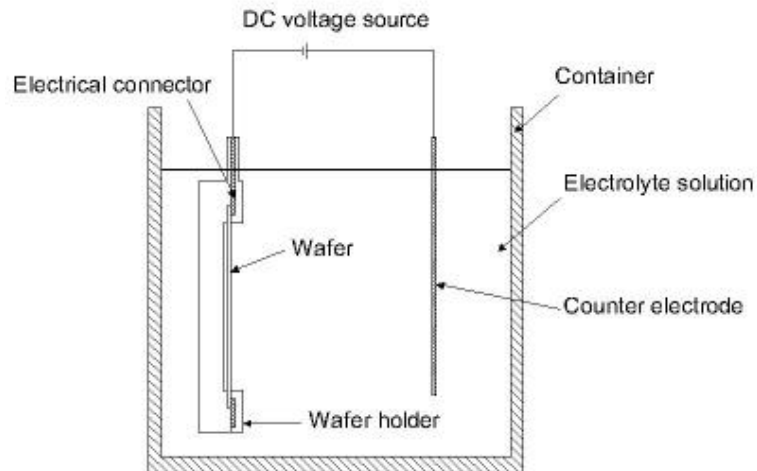


Figura 2.7 Electrodeposición

- Método de giro (*Spin-on method*). También llamado moldeado (*casting*). Este proceso es útil al depositar materiales orgánicos y dieléctricos. Se lleva a cabo al girar la oblea a grandes velocidades (500 a 5000 [rpm]). Mientras tanto, se vierte el material a depositar en estado líquido y se mantiene girando la oblea por 30 o 60 segundos. Grosos de 20 hasta 200 [μm] pueden alcanzarse por este método.

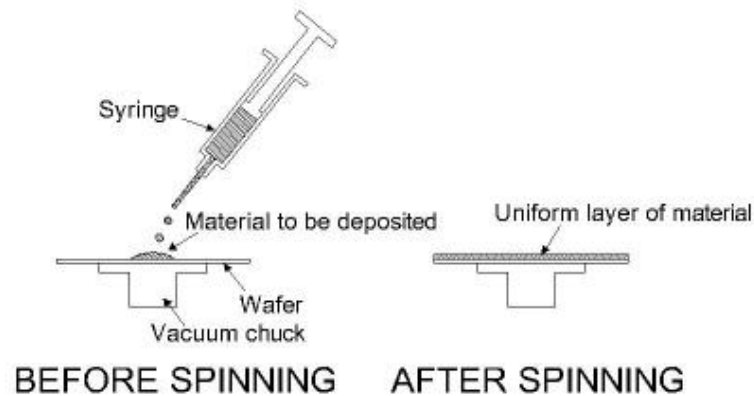


Figura 2.8 Moldeado

Enmascarillado (Patterning)

El enmascarillado de la oblea se hace a través de técnicas de litografía. La litografía es un proceso fotográfico para imprimir patrones sobre un polímero fotosensible (*photoresist*) y así formar máscaras que servirán para el grabado.

- Litografía (*Lithography*). La litografía óptica ofrece una precisión bastante grande, aunque para futuras aplicaciones se deberán desarrollar técnicas nuevas para el enmascarillado de estructuras más pequeñas. El primer paso de la litografía consiste en colocar una capa de material fotosensible. Este material puede ser de tipo positivo o de tipo negativo. Su grosor queda determinado por la viscosidad del

material y la velocidad de giro con la que se coloca sobre la oblea. Después se coloca una máscara para así exponer la oblea a rayos ultravioleta. Si el material fotosensible es positivo, después de exponerlo a los rayos UV se vuelve blando, si es negativo se vuelve duro. El material fotosensible más blando se remueve al sumergir la oblea en una solución que lo disuelve dejando una plantilla para remover el óxido y así crear una máscara de óxido para atacar el silicio.

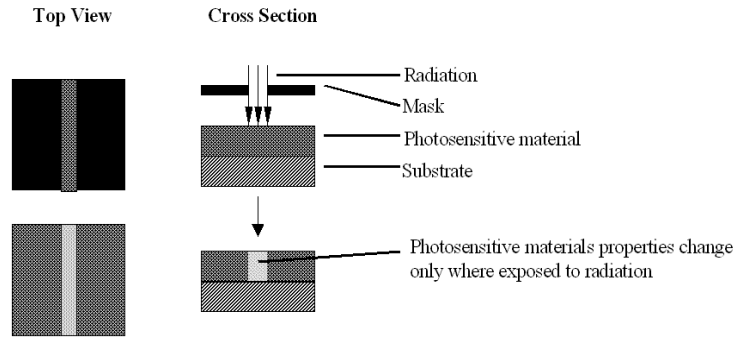


Figura 2.9 Exposición de la fotoresina

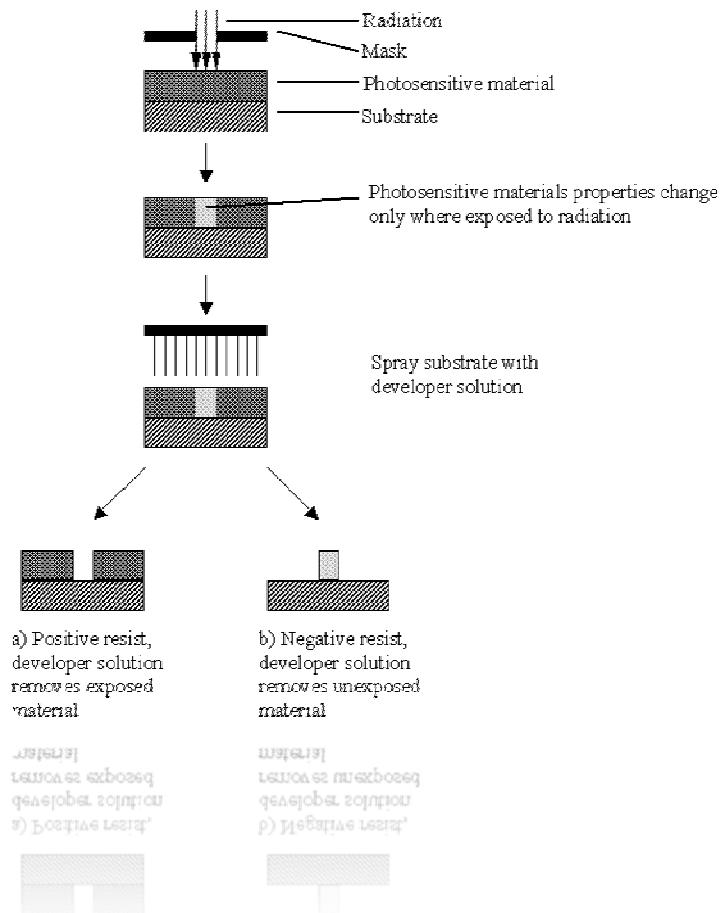


Figura 2.10 Etapas de la fotolitografía

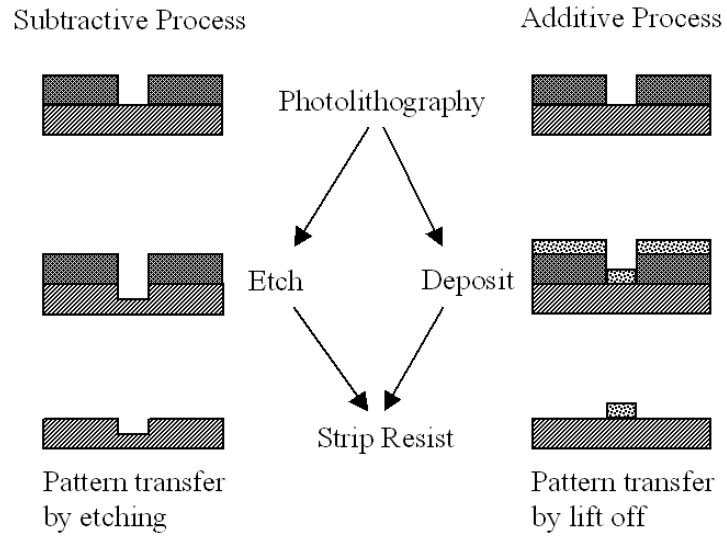


Figura 2.11 Transferencia de la máscara a la película

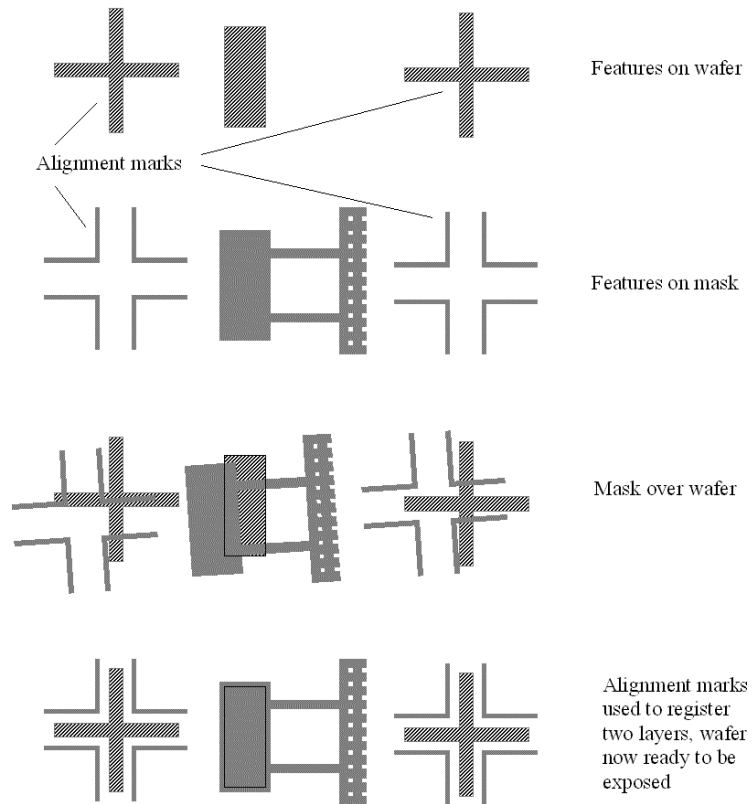


Figura 2.12 Alineación de la máscara

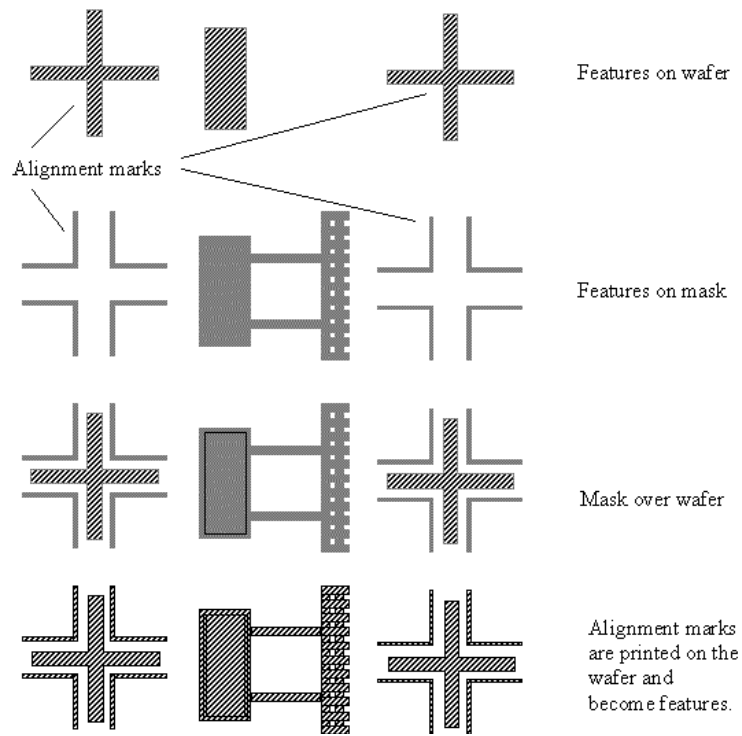


Figura 2.13 Proceso con máscara alineada

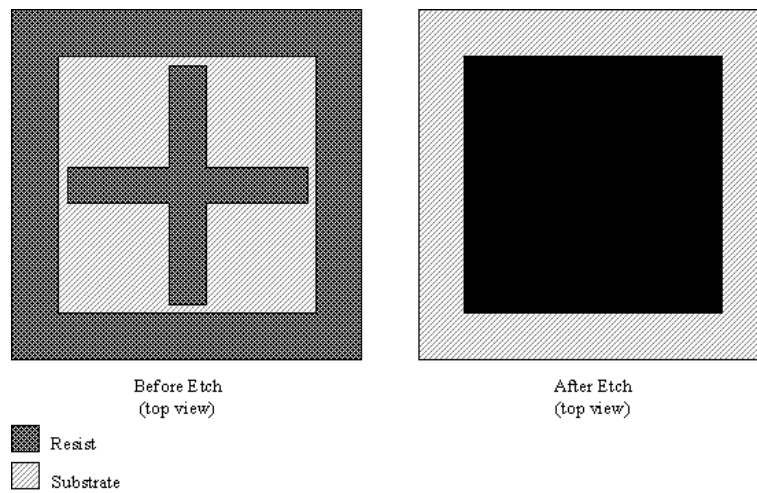


Figura 2.14 Desaparición de las marcas de la máscara

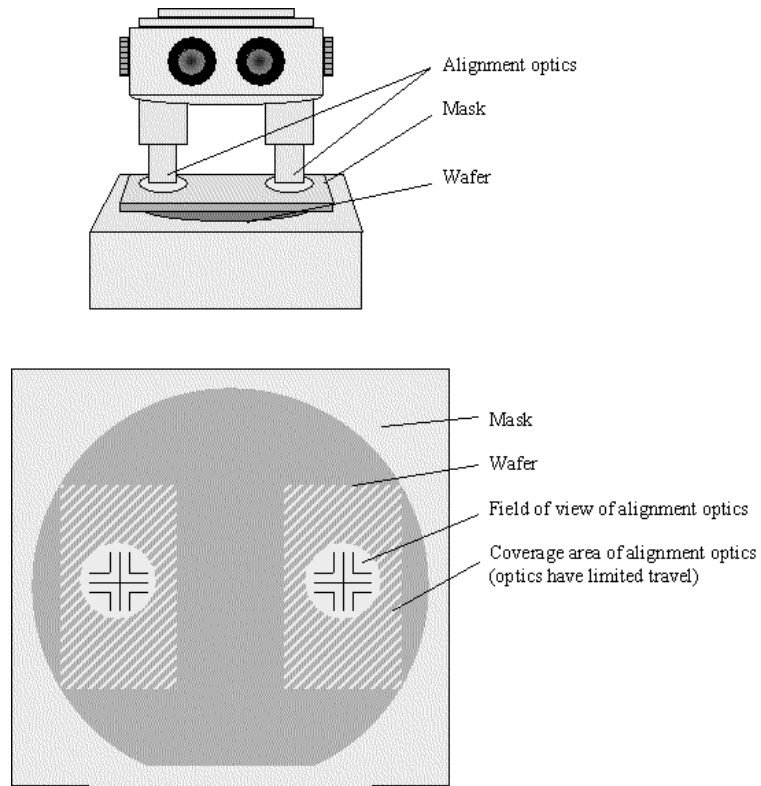


Figura 2.15 Litografía

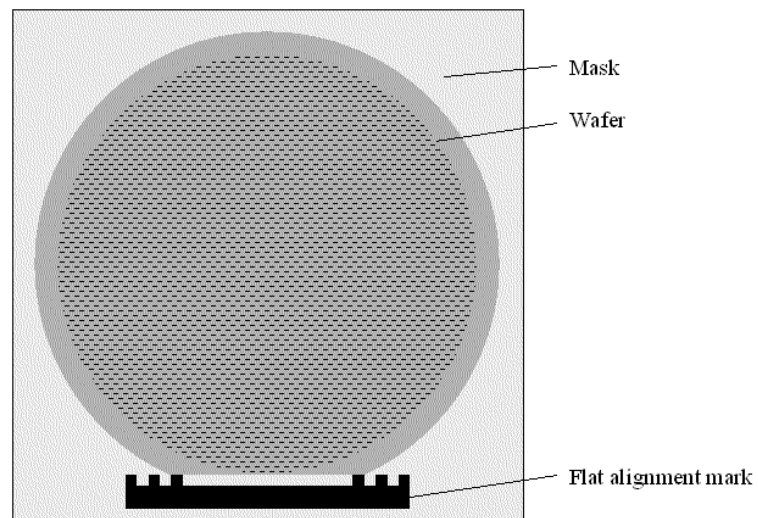


Figura 2.16 Alineación de la máscara

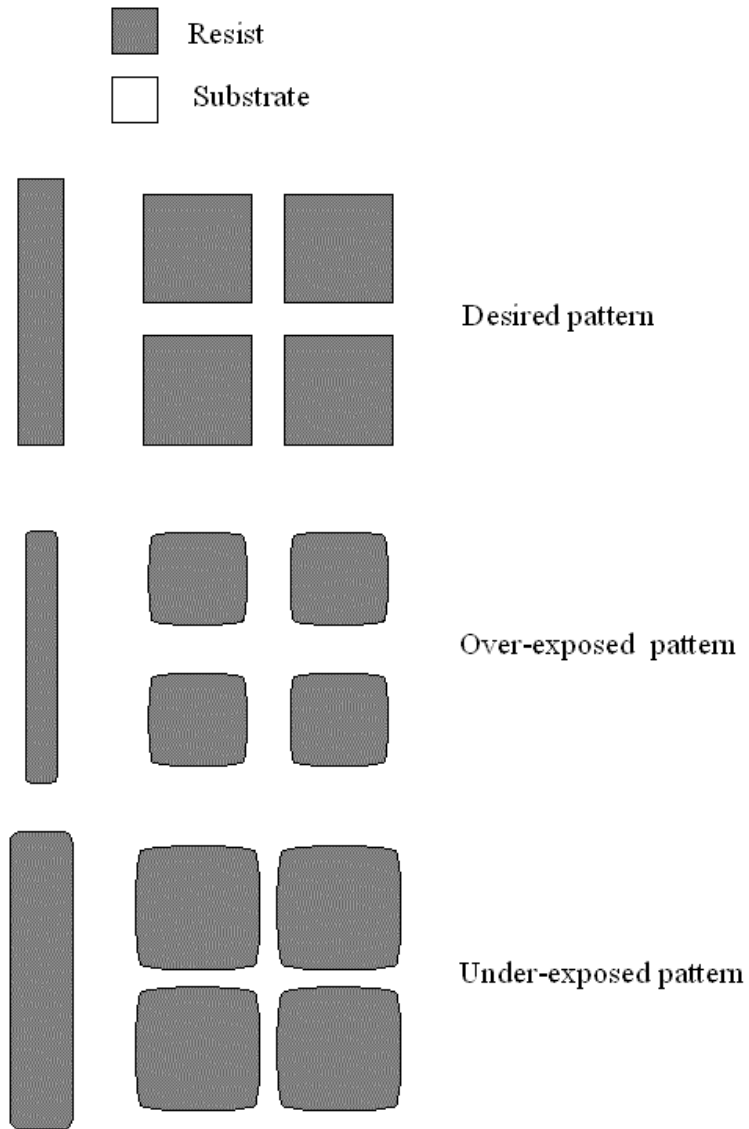


Figura 2.17 Patrón dependiente del tiempo de exposición

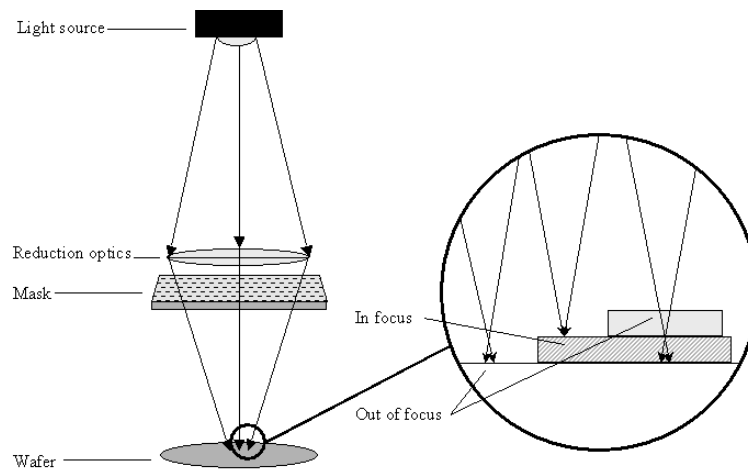


Figura 2.18 Puntos de alineación de la máscara

Grabado (Etching)

Una vez que las obleas tienen una plantilla de óxido, el siguiente paso es grabarlas con ella. Este grabado se realiza tanto en máscaras como en el silicio mismo para crear las estructuras. Este grabado puede ser de tipo húmedo (*wet*) o de tipo seco (*dry*). Aunados a otras características, los procesos de grabado tienen diferentes formas, por lo que se definen tres procesos principales de grabado: isotrópico (*isotropic*), anisotrópico (*anisotropic*) y anisotrópico orientado (*anisotropic-orientation dependent*).

Los grabados húmedos son en su mayoría de tipo isotrópico y algunos otros anisotrópicos orientados. Los secos permiten tipos de grabado particulares debidos a los gases utilizados. La otra técnica llamada grabado de plasma permite, con mayor rapidez, obtener grabados verticales. El objetivo final del proceso es grabar o remover el material para formar las microestructuras o también para formar máscaras que se utilizarán con otras películas.

- Grabado isotrópico húmedo (*Isotropic wet etching*). Este método involucra un removedor líquido. El más usado es el HNA, que se usa sobre todo para remover silicio policristalino. Consiste de una mezcla de ácidos: HF, HNO₃ y CH₃COOH. La tasa de remoción es alrededor de 0.1 a 100 [μm/min] dependiendo de la concentración del ácido.
- Grabado anisotrópico húmedo (*Anisotropic wet etching*). Los removedores anisotrópicos se conocen también como removedores dependientes de orientación (*ODEs - Orientation-Dependent Etchants*). Existe una amplia gama de éstos, pero a la mayoría se les calienta hasta 100 [°C]. El más usado es el KOH. La tasa de remoción depende de la orientación del removedor. Estas orientaciones están referidas a la dirección del frente del removedor. Las reacciones que se llevan a cabo son la oxidación y reducción siguientes

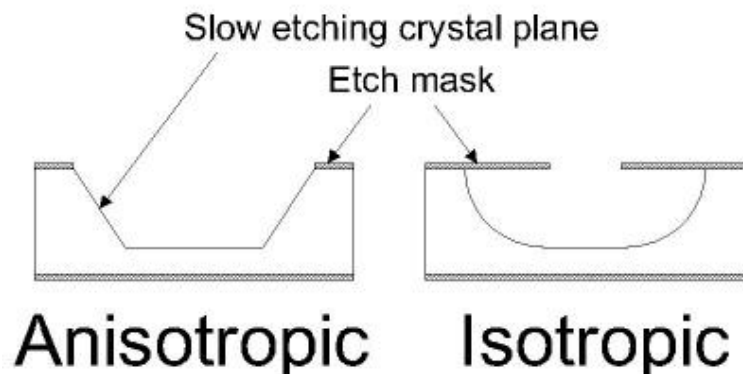
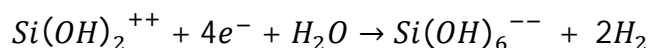
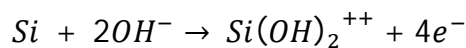


Figura 2.19 Grabado húmedo

- Grabado por plasma (seco) y RIE (*Plasma (dry) and Reactive Ion Etching*). Este proceso ha sido utilizado a lo largo de los años para grabar silicio policristalino. A diferencia del isotrópico húmedo, el grabado es más uniforme. Primero se generan neutrones e iones que se aceleran con un campo electromagnético controlado. Cuando la remoción se debe únicamente al proceso químico de los neutrones y el silicio, se dice que es un grabado por plasma. En cambio, si los iones bombardeados sobre el silicio generan una reacción química que a su vez reacciona para generar nuevos iones, se llama grabado por RIE.

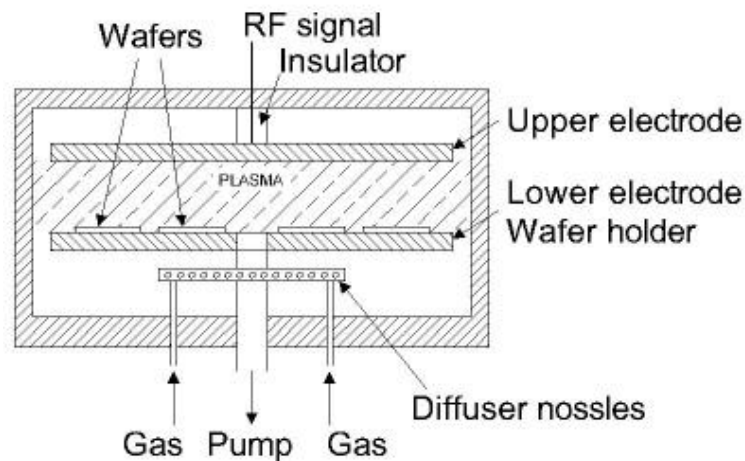


Figura 2.20 RIE

- DRIE (*Deep Reactive Ion Etching*). Este método se desarrolló en los noventa debido a que ningún proceso conocido hasta el momento podía lograr remover el material, dejando las paredes completamente verticales, sobre todo en estructuras muy definidas. La tasa de remoción va desde 1 hasta 15 [$\mu\text{m}/\text{min}$]. El truco consiste en hacer una remoción parcial por plasma o RIE. Después se deposita una capa delgada de un polímero y se repite otro paso de remoción por plasma o RIE, solo que en este caso, el polímero reforzará las paredes y le dará un aspecto más vertical, logrando así grabados más definidos y profundos.

Unión (Bonding)

En muchas aplicaciones se necesita sellar el dispositivo para evitar movimiento extremo. Si el dispositivo contiene aluminio, no se podía sellar a temperaturas muy altas. Además, debido a que se unen circuitos integrados, también éstos pueden sufrir daños al unirlos al sensor o actuador. En esta tesis no se estudian a fondo las técnicas de unión, ya que junto con el empaquetamiento, es un campo vasto de conocimiento y que queda fuera del objetivo de la tesis.

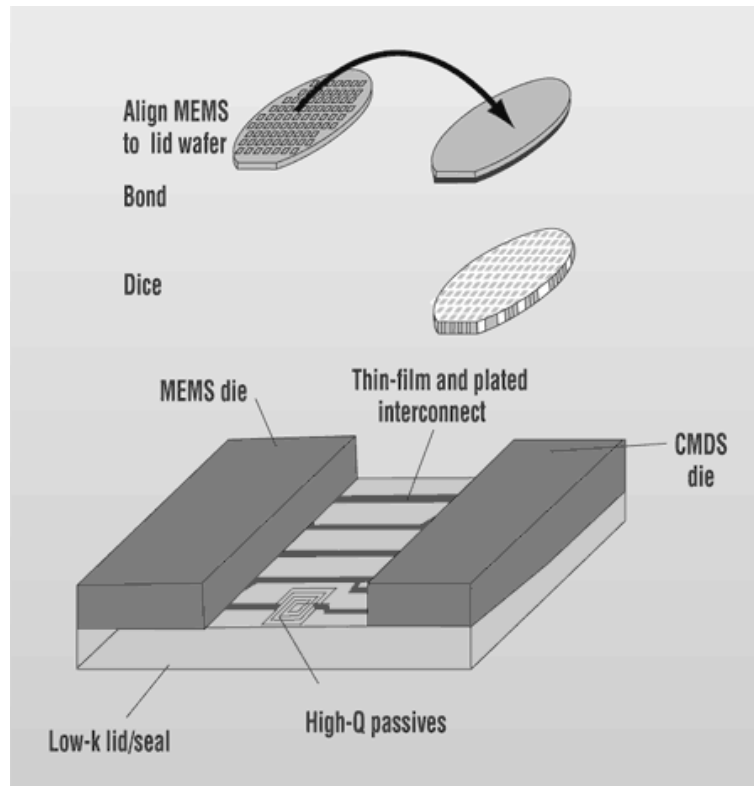


Figura 2.21 Unión

Empaquetamiento (Packaging)

El empaquetamiento de MEMS es una disciplina muy estudiada, algo diferente del empaquetamiento de circuitos integrados. En esta tesis no se comentan las técnicas de empaquetamiento pero se deja al lector la idea de que esta área de estudio es de las principales en países donde hay centros de investigación en MEMS y NEMS.

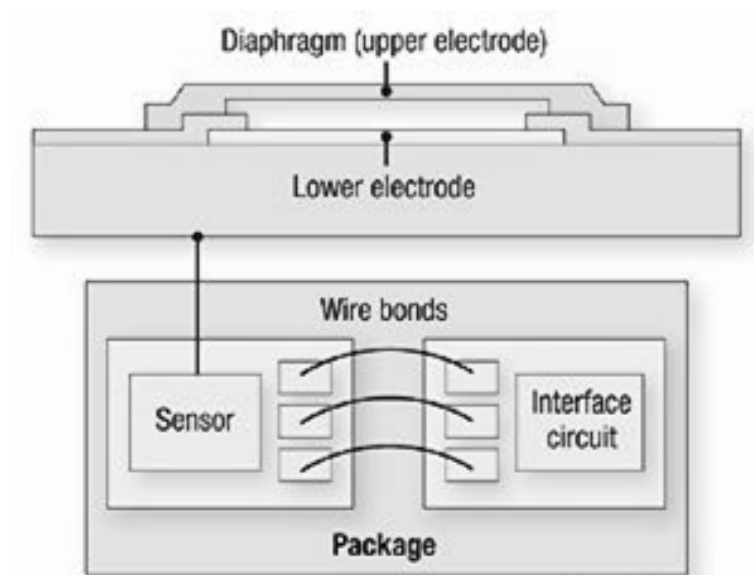


Figura 2.22 Empaquetamiento

2.2 Micromaquinado

El micromaquinado se refiere en sí a la construcción o enmascarillado de piezas mecánicas a partir de sustratos de silicio. A continuación se describen a groso modos los dos micromaquinados más usados en la fabricación de MEMS.

Micromaquinado de volumen

Gracias a este tipo de micromaquinado pueden construirse dispositivos mecánicos como barras, diafragmas, orificios, resortes, motores, etc. Por esta razón es el micromaquinado más usado en la fabricación de MEMS.

Se empezó a utilizar en los años sesenta. Consiste en ir removiendo parte del sustrato, por lo que no se necesita depositar ninguna película, reduciendo costos. Dichos dispositivos son de un grosor entre 200 y 500 [μm], por lo que no se pueden crear dispositivos muy delgados. Las técnicas usadas en este tipo de micromaquinado son:

- Grabado isotrópico húmedo
- Grabado anisotrópico húmedo
- Grabado isotrópico por plasma
- Grabado por reacción de iones

Estas técnicas se complementan con los procesos de fabricación básicos.

Micromaquinado de superficie

Esta técnica se empezó a utilizar en los años ochenta. A diferencia del maquinado de volumen, aquí se van depositando películas por algunos de los procesos básicos y se van enmascarillando para formar las piezas mecánica, de grosores mucho menores, por lo que piezas más delgadas pueden fabricarse.

Una técnica para crear piezas mecánicas móviles es la de capas de sacrificio. Estas capas se depositan momentáneamente para dar soporte a capas superiores. Cuando se eliminan, las capas superiores quedan libres, por lo que la pieza mecánica cobra movimiento.

Los procesos más usados son cualquiera de los procesos de depósito, LIGA, electrogalvanizado, LPCVD, etc. Los materiales más usados son polisilicio y óxidos para capas de sacrificio o aislantes.

2.3 MUMPs

El acrónimo de MUMPs se refiere a procesos multiusuario de MEMS (*Multi User MEMS Process*), es decir, a los procesos que pueden ser empleados para fabricar MEMS diseñados por la industria, por universidades y otro tipo de usuarios para diferentes aplicaciones. Son procesos bien establecidos que permiten a estos usuarios el desarrollo de prototipos a bajo costo. Dentro de estos procesos se encuentran el PolyMUMPs, el SOIMUMPs y el MetalMUMPs. Los tres son procesos comerciales que diferentes compañías como MEMSCAP ofrecen. La desventaja es que estos procesos no son flexibles y por ello existen muchas limitantes para el diseño de prototipos. PolyMUMPs es una técnica de micromaquinado de superficie de tres capas de silicio policristalino. SOIMUMPs consiste en un proceso de micromaquinado de silicio sobre aislante de un grosor mayor al grosor típico de una capa de material y MetalMUMPs es un proceso donde se utiliza níquel galvanizado.

En las próximas secciones se describen los procesos MUMPs mencionados anteriormente, así como los procesos básicos, con la finalidad de conocer sus ventajas y desventajas para así elegir el más adecuado.

PolyMUMPs

El proceso PolyMUMPs se compone de tres capas de silicio policristalino, las cuales pueden usarse para formar diferentes piezas mecánicas o también pueden combinarse para así lograr formar alguna pieza más compleja.

El proceso empieza con una oblea inicial de silicio tipo N (dopaje con Fósforo), de 150 [mm] de espesor y entre 1-2 [Ω /cm] de resistividad. El siguiente paso consiste en la deposición por medio de LPCVD de 600 [nm] de nitruro de silicio, NITRIDE. Dicha capa actúa como capa de aislamiento. La primera capa de silicio policristalino, POLY0, se deposita encima de la capa aislante y consta de 500 [nm] de grosor. Se crea una máscara para grabar la capa de POLY0 por medio del proceso de litografía. Se procede después a grabar la capa por el proceso de Plasma. Una capa de 2 [μ m] de PSG se deposita por medio de LPCVD y se temple alrededor de una hora a 1050 [°C] con Argón. Esta capa se llama OXIDE1. OXIDE1 se remueve al final del proceso para liberar las piezas mecánicas, por lo que se le llama capa de sacrificio. También por el proceso de litografía se crean las máscaras para grabar los DIMPLES, pequeños “topes” utilizados en estructuras mecánicas más complejas. El proceso de grabado de los DIMPLES es por RIE. La profundidad de éstos es de 750 [nm]. Se modela una nueva capa, también por litografía, y se graba por RIE, dando origen al anclaje, ANCHOR1, el cual crea hoyos para la conexión entre POLY0-POLY1 y/o NITRIDE-POLY1. Una nueva capa de 2 [μ m] de silicio policristalino, POLY1, se deposita. Ésta crea la primera capa estructural del proceso. Esta capa se dopa al templearla durante una hora a 1050 [°C] con PSG. Este dopaje sirve también para disminuir el estrés de POLY1. Se modela la máscara para grabar POLY1 por litografía y se graba por RIE. Se deposita una segunda capa de sacrificio (PSG), OXIDE2, de 750 [nm] de grosor, la cual también se temple. Se empieza con la primera fase del modelado de la máscara, la cual se lleva a cabo por litografía y se graba por RIE. Esta fase se llama POLY1 POLY2 VIA y sirve para conectar la capa POLY1-POLY2. La segunda fase también es a través de litografía y RIE. En este caso se crean hoyos en OXIDE1 y OXIDE2 para crear el anclaje,

ANCHOR2, de POLY2. La última capa estructural de silicio policristalino, POLY2, se deposita con un grosor de 1.5 [µm]. Esta capa se dopa al igual que POLY1. El modelado de la máscara y el grabado son por litografía y RIE, respectivamente. La última capa consiste de 500 [nm] de metal, la cual crea las uniones, reduce la resistencia en POLY2 y crea una superficie reflejante. Primero se modela la máscara por litografía. Después se deposita el metal (Oro) y se modela por Lift-off, por lo que no se requiere grabado. Las capas de sacrificio se eliminan con una concentración de Ácido Ferroso, liberando las partes mecánicas del dispositivo.

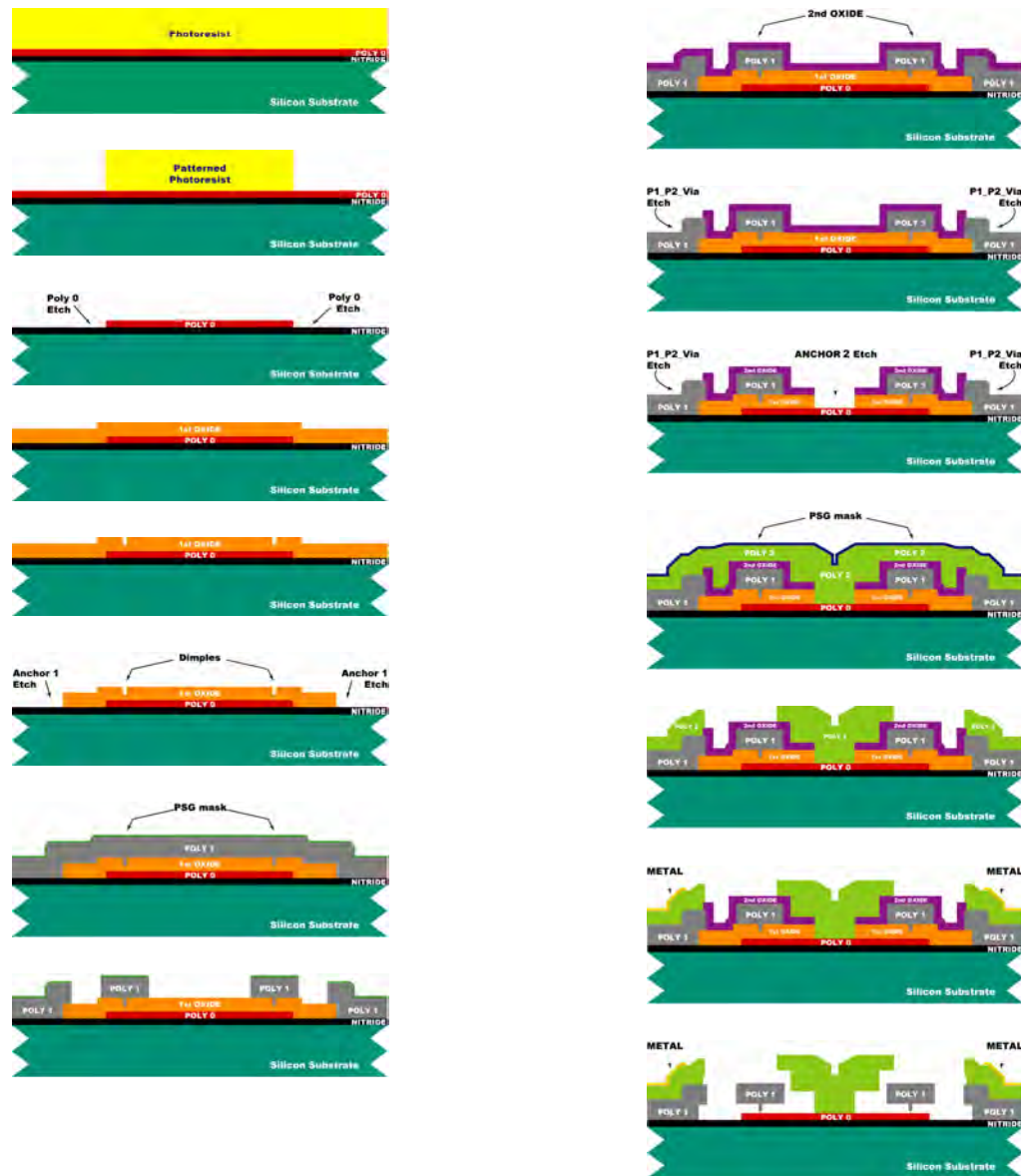


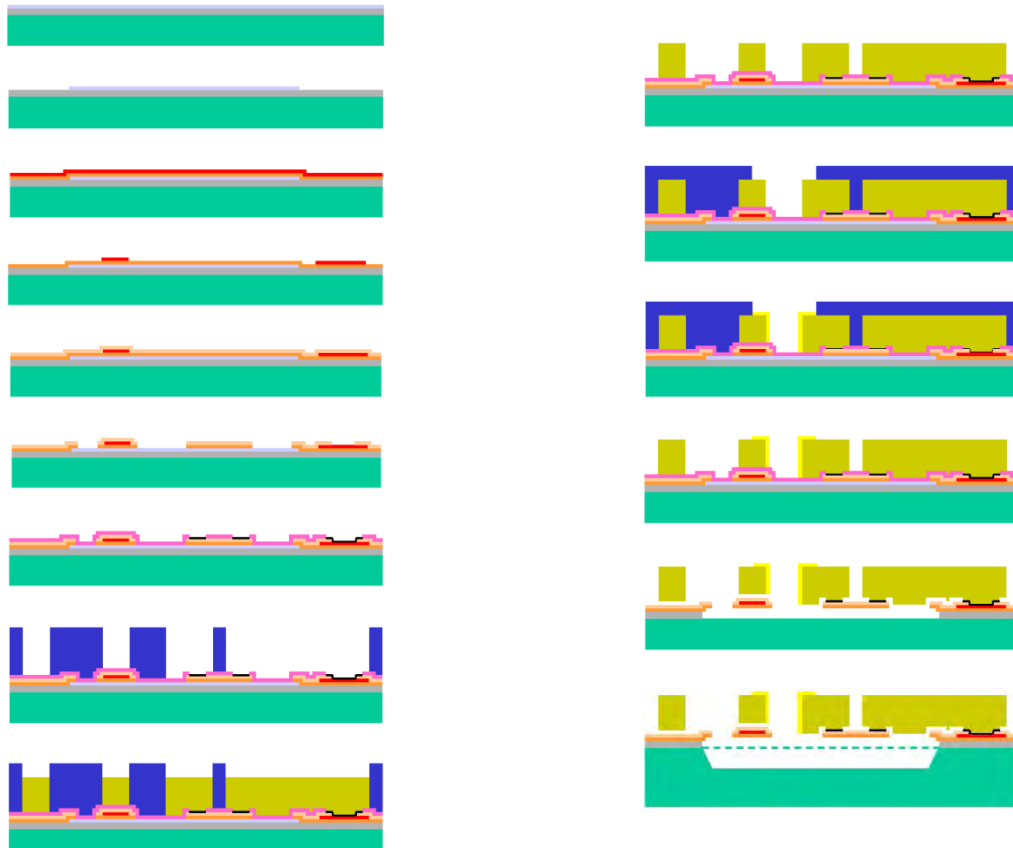
Figura 2.23 PolyMUMPs

MetalMUMPs

Este proceso tuvo sus principios en los años noventa. Está pensado para poder fabricar tantos tipos de diseño como sean posibles en una misma oblea de silicio. Como es

un proceso general, los grosores de las capas tienen un rango definido y una serie de reglas de diseño fueron establecidas para poder fabricar el mayor número de MEMS.

La oblea inicial consta de una capa de sustrato, una de óxido aislante y una de cristal de fosfosilicato (PSG), llamada también nivel de máscara OXIDE1. Esta oblea se graba al agregar la resina fotosensible y al exponerla a rayos ultravioleta. Se agregan después una capa de nitruro de silicio y otra de silicio policristalino, esta última llamada nivel de máscara POLY. El segundo nivel se modela litográficamente, removiendo después el silicio policristalino no deseado. Una segunda capa de nitruro de silicio se agrega encima de la última capa. Las dos capas de nitruro de silicio se enmascaran litográficamente y dan lugar al nivel de máscara NITRHOLE, sin afectar la capa de silicio policristalino. Se agrega una segunda capa de óxido y se modela por litografía. Encima de la última capa se modela y graba el anclaje que da origen al cuarto nivel de máscara METANCH. Se coloca una pequeña capa de cobre y titanio para agregar material fotosensible y al grabarse se crea una plantilla para depositar el siguiente nivel. Los espacios se rellenan con níquel galvanizado y se recubren con oro, lo cual se llama el nivel de máscara METAL. Se remueve el material fotosensible dejando únicamente el nivel METAL. Se vuelve a agregar una capa de material fotosensible y se graba para crear la máscara del siguiente nivel. Esta máscara se conoce como el nivel de máscara GOLDOVP. Una capa de oro se utiliza como recubrimiento del nivel METAL. El nivel GOLDOVP se remueve. Todas las capas de óxido, PSG, se remueven. Se graba el sustrato inicial para terminar con el proceso.



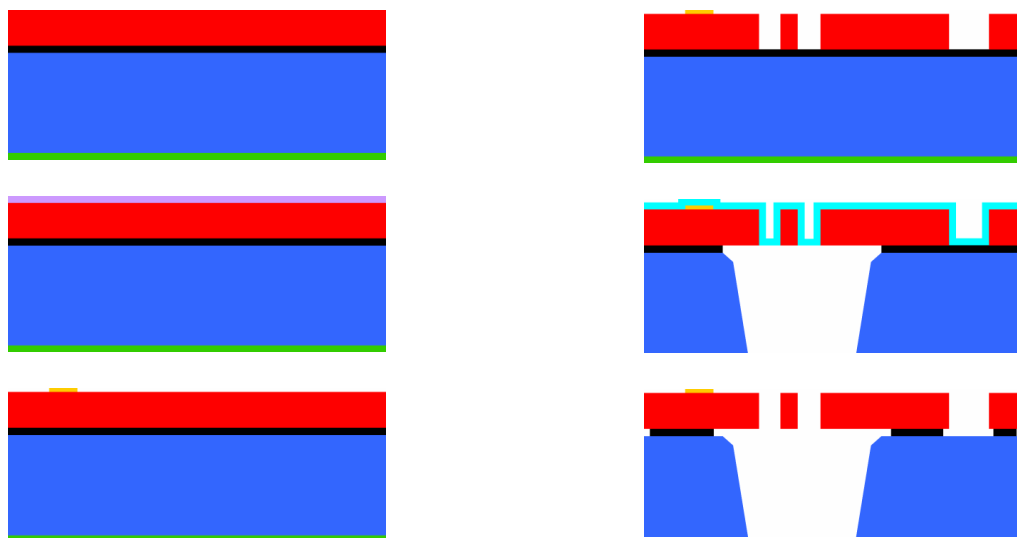
Substrate	Oxide 1	Poly	Oxide 2	Metal
Isolation Oxide	Nitride 1	Nitride 2	Anchor Metal	Sidewall Metal
Photoresist				

Figura 2.24 MetalMUMPs

SOIMUMPs

Este es un proceso para fabricar microestructuras de silicio sobre aislante. Es un proceso simple de cuatro niveles de máscara. Este proceso se diseñó para ser lo más general posible. Diseños más específicos pueden necesitar algún proceso particular. El proceso consiste de cuatro máscaras únicamente.

La oblea que se utiliza como sustrato inicial consiste de una capa de óxido, de sustrato, de otra capa de óxido y una capa de silicio. Una capa de cristal de fosfosilicato (PSG) de utiliza para dopar la capa de silicio por medio de un proceso de cocción para lograr así que el fósforo quede en la superficie de la capa de silicio. Después de este proceso se remueve la capa de PSG. Las obleas se revisten con material fotosensible y se modelan litográficamente para colocar después el nivel de máscara PAD METAL, el cual consiste de capas de cromo y de oro. El primer nivel de máscara comprendido por la capa de silicio, SOI, se modela con material fotosensible expuesto a luz ultravioleta. Un material de protección se aplica en la superficie del sustrato, cubriendo la capa de silicio y la de metal. El sustrato se voltea y el óxido del fondo se elimina para poder modelar litográficamente el segundo nivel de máscara en el sustrato, TRENCH, eliminando después la capa de óxido entre el sustrato y el silicio dopado. El material de protección se remueve y se elimina el óxido para descubrir el sustrato por la parte superior. Se crea aparte en otra oblea de silicio una máscara fantasma para el grabado del metal. Se crean también pilares para evitar el contacto entre la máscara fantasma y la capa de silicio, que también sirve de alineación. La capa de metal, de cromo y Au, se deposita a través de la máscara fantasma. Se remueve la máscara fantasma y solamente queda una parte de la capa de metal sobre la de silicio.



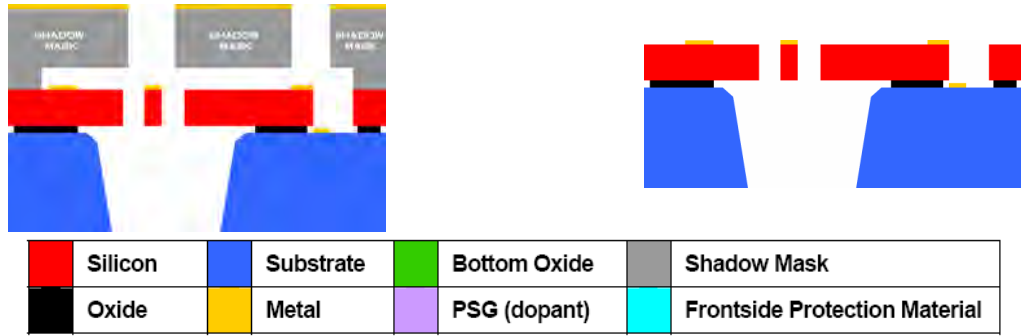


Figura 2.25 SOIMUMPs

Capítulo 3

Fundamentos físicos

Contenido

Capítulo 3 Fundamentos físicos	36
3.1 Modelo matemático del Trampolín (Cantilever).....	39
3.2 Efecto fotoacústico	59
3.3 Propagación de ondas en fluidos	76

Figuras

Figura 3.1 Esquema de un trampolín	40
Figura 3.2 Flexión del trampolín (expresión 3.3)	42
Figura 3.3 Casos de amortiguamiento (de la expresión 3.10)	46
Figura 3.4 Factor de calidad. Respuesta a impulso (arriba). Respuesta a una chirp (abajo).....	53
Figura 3.5 Gráfica de la ecuación 3.16. Las raíces son los valores de γn	56
Figura 3.6 La pendiente de esta recta es aproximadamente π	57
Figura 3.7 Modos de vibración del trampolín	58
Figura 3.8 Fotofono de Bell	60
Figura 3.9 Evolución del efecto fotoacústico	61
Figura 3.10 Efecto fotoacústico.....	61

Ecuaciones

(3.1)	40
(3.2)	40
(3.3)	41
(3.4)	42
(3.5)	42
(3.6)	44
(3.7)	44
(3.8)	44
(3.9)	45
(3.10)	46
(3.11)	47
(3.12)	48
(3.13)	49
(3.14)	51
(3.15)	52
(3.16)	56
(3.17)	57
(3.18)	59
(3.19)	59
(3.20)	59
(3.21)	62
(3.22)	63
(3.23)	63
(3.24)	63
(3.25)	66
(3.26)	67
(3.27)	67
(3.28)	72
(3.29)	73
(3.30)	73
(3.31)	73
(3.32)	74
(3.33)	75
(3.34)	75

(3.35)	75
(3.36)	76
(3.37)	76
(3.38)	76
(3.39)	77
(3.40)	77
(3.41)	77
(3.42)	77
(3.43)	78
(3.44)	78
(3.45)	79
(3.46)	79
(3.47)	79
(3.48)	80
(3.49)	80

Tablas

Tabla 3.1 Valores de γ_n para los diferentes modos de vibración	57
--	----

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS FÍSICOS

En el presente capítulo, se discuten las barras empotradas en extremo, es decir los trampolines, como la estructura más idónea para el sensado de señales. Los modelos del trampolín se desarrollarán con detalle, porque esta estructura ha resultado ser sumamente versátil en diversos problemas de sensado y sus aplicaciones a menudo se deben a detalles finos de su dinámica.

Los sensores basados en trampolines, se pueden utilizar aprovechando los dos siguientes mecanismos físicos: a) Deflexión del extremo libre del trampolín, mecanismo lento que constituye el modo estático y b) Cambio de frecuencia de resonancia del trampolín, mecanismo más rápido, que establece el modo dinámico. Dependiendo de la variable a sensar será el modo en que se utilizará el trampolín.

Para un mejor entendimiento, en este capítulo se presenta un análisis estático y uno dinámico del trampolín, con lo cual se pretende justificar los métodos de caracterización empleados. También se desea demostrar la relación entre las variables involucradas en estos análisis, con el fin de obtener una expresión que permita medirlas de forma directa o de forma indirecta. La siguiente sección habla de cómo se puede excitar al trampolín (efecto fotoacústico) y las consideraciones necesarias. La última sección muestra cómo se propaga la onda acústica.

3.1 Modelo matemático del Trampolín (Cantilever)

Podemos dividir el análisis de un trampolín en dos partes: la estática y la dinámica. La primera se refiere al comportamiento del trampolín cuando se encuentra en reposo y se le aplica una fuerza constante. La segunda tiene que ver con el comportamiento del trampolín cuando éste es sometido a una excitación variable, es decir, que se excita con señales de diferentes frecuencias.

Análisis estático del trampolín

Sea un trampolín de grosor t , ancho w , largo l_e , masa m y módulo de Young E . Colocaremos el origen de nuestro sistema de referencia en el extremo fijo del trampolín, como se muestra en la figura 3.1.

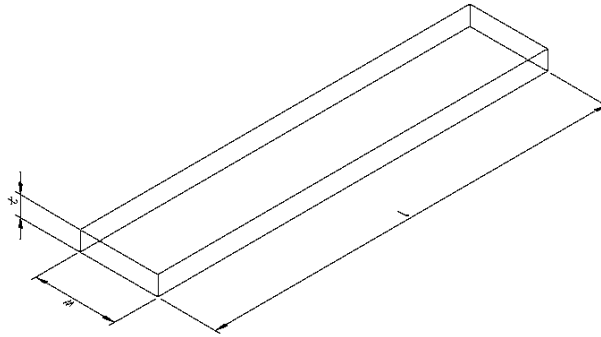


Figura 3.1 Esquema de un trampolín

Si el trampolín está sometido a la gravedad g , con dirección $-\hat{z}$, entonces el trampolín no se mantiene derecho debido a su propia masa, sino que sufre cierta flexión y por ende un desplazamiento. Lo mismo aplica para una masa externa que se le agregue o si se le aplica una fuerza en dicho eje. Para el análisis de este fenómeno, podemos partir de que la curvatura κ de un trampolín se puede expresar de la siguiente forma

$$\kappa = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_z(x, t) = \frac{M}{EI} \quad (3.1)$$

Donde:

- κ - Radio de curvatura del trampolín [m^{-1}]
- u_z - Componente vertical del vector de posición del trampolín [m]
- M - Momento de flexión del trampolín [$N m$]
- E - Módulo de Young del trampolín [Pa]
- I - Momento de inercia del trampolín [m^4]

Sabemos también que el momento de flexión M , para cualquier punto del trampolín (desde $x = 0$ hasta $x = l_e$), es:

$$M = F(l_e - x) \quad (3.2)$$

Donde:

- F - Distribución de fuerza a lo largo del trampolín [N]

Entonces, podemos sustituir la ecuación 3.2 en la ecuación 3.1. De este modo podemos obtener la componente vertical del vector de posición del trampolín $u_z(x, t)$, como sigue:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_z(x, t) = \frac{F(l_e - x)}{EI}$$

Integramos ambos lados de la ecuación con respecto a x

$$\int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_z(x, t) dx = \int_0^x \frac{F(l_e - x)}{EI} dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_z(x, t) = \frac{F}{EI} \left(l_e x - \frac{x^2}{2} \right)$$

Integramos nuevamente ambos lados con respecto a x

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} u_z(x, t) dx = \int_0^x \frac{F}{EI} \left(l_e x - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$u_z(x, t) = \frac{F}{EI} \left(l_e \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (3.3)$$

A partir de este resultado podemos obtener el desplazamiento del extremo libre del trampolín, ya que para $x = l_e$, $u_z(l_e, t) = z$

$$z = \frac{F}{EI} \left(l_e \frac{l_e^2}{2} - \frac{l_e^3}{6} \right)$$

$$z = \frac{F}{EI} \left(\frac{l_e^3}{2} - \frac{l_e^3}{6} \right)$$

$$z = \frac{F}{EI} l_e^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right)$$

$$z = \frac{Fl_e^3}{3EI}$$

Nótese que este resultado es independiente del tiempo, lo que es coherente si estamos analizando el comportamiento estático. Además, podemos definir lo que se conoce como constante elástica equivalente k_e , utilizando solamente

$$\frac{F}{z} = k_e = \frac{3EI}{l_e^3}$$

Y sabiendo que para un trampolín rectangular y delgado ($w \gg t$ y $l_e \gg t$)

$$I = \frac{wt^3}{12}$$

Entonces

$$k_e = \frac{3Ewt^3}{12l_e^3}$$

$$k_e = \frac{wE}{4} \left(\frac{t}{l_e} \right)^3 \quad (3.4)$$

Para aclarar un poco lo visto anteriormente, nos valemos de la ayuda de un programa para apreciar la flexión del trampolín, como se ve en la siguiente figura

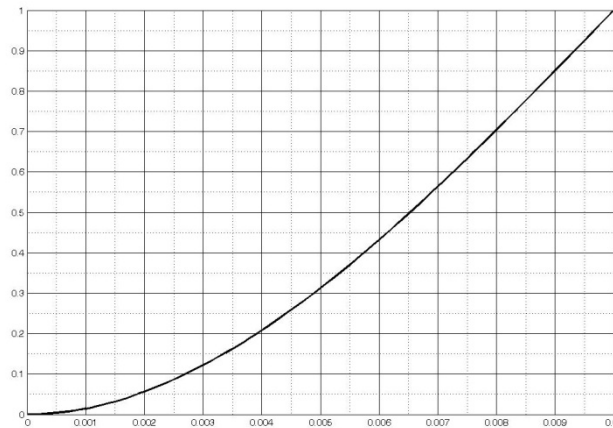


Figura 3.2 Flexión del trampolín (expresión 3.3)

Análisis dinámico del trampolín

Si tomamos de nuevo un trampolín como el de la figura 3.1, la ecuación que describe el sistema, en régimen dinámico, se puede obtener de un balance de fuerzas como sigue

$$EI l_e \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_z(x, t) + 2\alpha(m_t + \Delta m) \frac{\partial}{\partial t} u_z(x, t) + (m_t + \Delta m) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_z(x, t) = 0 \quad (3.5)$$

Donde

α - Coeficiente de amortiguamiento o de atenuación [rad/s]

m_t - Masa del trampolín [kg]

Δm - Masa absorbida por el trampolín [kg]

Si definimos $m = m_t + \Delta m$ y dividimos toda la ecuación por m simplificamos los cálculos

$$\frac{EIl_e}{m} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_z(x, t) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial t} u_z(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_z(x, t) = 0$$

Además conocemos las condiciones de frontera siguientes

$$\begin{aligned} u_z(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} u_z(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_z(l_e, t) &= 0 \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_z(l_e, t) &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior, suponemos que la función solución $u_z(x, t)$ es de variables separables, es decir, que $u_z(x, t)$ puede expresarse como un producto de dos funciones, una dependiente de x y otra de t

$$u_z(x, t) = X(x)T(t)$$

Entonces, al sustituir $u_z(x, t)$ en la ecuación, podemos reducir la ecuación de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{EIl_e}{m} \frac{\partial^4}{\partial x^4} X(x)T(t) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial t} X(x)T(t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(x)T(t) &= 0 \\ \frac{EIl_e}{m} X''''(x)T(t) + 2\alpha X(x)T'(t) + X(x)T''(t) &= 0 \end{aligned}$$

Después dividimos toda la ecuación entre $X(x)T(t)$ y restamos $\frac{EIl_e X''''(x)}{mX(x)}$ ambos lados de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)T(t)} \left[\frac{EIl_e}{m} X''''(x)T(t) + 2\alpha X(x)T'(t) + X(x)T''(t) \right] &= 0 \\ \frac{EIl_e}{m} \frac{X''''(x)}{X(x)} + 2\alpha \frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{T''(t)}{T(t)} &= 0 \\ -\frac{EIl_e}{m} \frac{X''''(x)}{X(x)} + \frac{EIl_e}{m} \frac{X''''(x)}{X(x)} + 2\alpha \frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{T''(t)}{T(t)} &= -\frac{EIl_e}{m} \frac{X''''(x)}{X(x)} \\ 2\alpha \frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{T''(t)}{T(t)} &= -\frac{EIl_e}{m} \frac{X''''(x)}{X(x)} \end{aligned}$$

Como se puede ver, un lado de la ecuación es dependiente solamente de x y el otro solamente de t , entonces no importa como x y t varíen uno respecto al otro, pues la igualdad

permanece. Esta condición sólo se cumple si ambos lados de la ecuación son constantes. Entonces podemos obtener dos ecuaciones diferenciales igualadas a una constante, que por simplicidad en la resolución del problema llamaremos $-\omega_n^2$ (velocidad angular natural del sistema en $[rad/s]$), a partir de esta última

$$2\alpha \frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega_n^2 \quad (3.6)$$

$$\frac{EI l_e X''''(x)}{m X(x)} = \omega_n^2 \quad (3.7)$$

Comenzaremos resolviendo primero la ecuación 3.6. La forma más sencilla es escribir la ecuación de una forma más apropiada, igualándola a cero y utilizando el polinomio característico

$$2\alpha \frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{T''(t)}{T(t)} + \omega_n^2 = 0$$

Ahora multiplicamos por $T(t)$

$$T(t) \left[2\alpha \frac{T'(t)}{T(t)} + \frac{T''(t)}{T(t)} + \omega_n^2 \right] = 0$$

$$T''(t) + 2\alpha T'(t) + T(t)\omega_n^2 = 0$$

El polinomio característico de esta ecuación diferencial lineal, homogénea y de segundo orden es

$$D^2 + 2\alpha D + \omega_n^2 = 0$$

Obtenemos entonces las raíces de este polinomio por la solución general de una ecuación algebraica de segundo grado

$$D_{1,2} = \frac{-(2\alpha) \pm \sqrt{(2\alpha)^2 - 4(\omega_n^2)}}{2}$$

Para simplificar el análisis definimos ahora ζ , que se conoce como factor de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} \quad (3.8)$$

O lo que es lo mismo

$$\alpha = \zeta \omega_n$$

Entonces, podemos reescribir las raíces del polinomio característico como sigue

$$D_{1,2} = -\alpha \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Podemos ver que existen cuatro tipos de soluciones del polinomio característico

- $|\zeta| = 1$ - raíces reales repetidas
- $|\zeta| > 1$ - raíces reales diferentes
- $|\zeta| < 1$ - raíces complejas conjugadas
- $|\zeta| = 0$ - raíces imaginarias conjugadas

El caso de raíces reales repetidas se conoce como caso críticamente amortiguado, donde el trampoline vuelve al equilibrio (posición original) sin tener sobrepasos, es decir, sin pasar por la posición de equilibrio y moverse hacia la otra dirección. El caso de raíces reales diferentes se conoce como sobreamortiguado; en este caso, el trampoline tampoco tiene sobrepasos pero tarda más tiempo en regresar al equilibrio. El tercer caso es el de raíces complejas conjugadas, que se conoce como subamortiguado; éste presenta sobrepasos en el transitorio, es decir, pasa varias veces por la posición de equilibrio antes de quedarse en ella. El último caso, sin amortiguamiento, el trampoline oscila indefinidamente.

En física, así como en muchos casos de ingeniería, el caso más estudiado es el de raíces complejas conjugadas, ya que los sistemas casi siempre presentan un amortiguamiento. En el caso de un trampoline, como se comenta más adelante, el amortiguamiento se debe principalmente a las propiedades mecánicas de la estructura y además al fluido en el que se mueve.

Si analizamos el caso de las raíces complejas conjugadas, podemos definir

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

O para fines prácticos

$$f_d = f_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.9)$$

Entonces, con estas definiciones podemos reescribir el valor de las raíces

$$D_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

Donde

ω_d - Velocidad angular amortiguada [*rad/s*]

En este caso encontramos las dos raíces que satisfacen la ecuación 3.6. Basta con tomar una sola raíz como solución. El signo de ω_d nos indica el sentido de giro asociado al

movimiento del trampolín, así que podemos usar ambas soluciones indistintamente. Por lo tanto, una solución de 3.6 sería

$$T(t) = A_0 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \quad (3.10)$$

Donde

A_0 – Constante determinada por las condiciones iniciales del problema

La siguiente figura muestra los diferentes casos de raíces mencionados

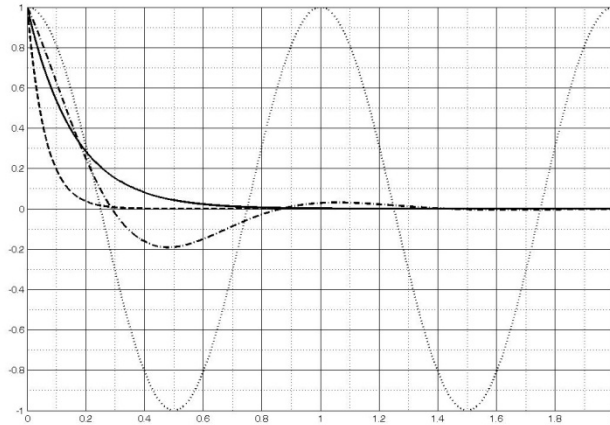


Figura 3.3 Casos de amortiguamiento (de la expresión 3.10)

Si queremos ver la respuesta en frecuencia del trampolín, podemos hacerlo con la ayuda de la transformada de Laplace, \mathcal{L} , pero también es posible hacerlo con la transformada de Fourier, \mathfrak{F} . En este caso lo haremos por medio de la transformada de Laplace. A partir de la ecuación diferencial 2.6, podemos ver la respuesta al impulso $\delta(t)$ y considerando condiciones iniciales nulas, aplicamos la transformada como sigue

$$\mathcal{L}\{T''(t) + 2\alpha T'(t) + T(t)\omega_n^2 = \delta(t)\}$$

$$s^2 T(s) + 2\alpha s T(s) + \omega_n^2 T(s) = 1$$

$$T(s)[s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2] = 1$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}$$

Vamos a sustituir $s = j\omega$, aunque cabe señalar que ya obtuvimos los polos, $s = -\alpha \pm j\omega_d$, por lo que con este paso sólo obtendremos una función en ω

$$T(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\alpha(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$T(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2\alpha j\omega + \omega_n^2}$$

$$T(\omega) = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2\alpha\omega)}$$

$$T(\omega) = \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2\zeta\omega_n\omega)}$$

Y si queremos una función de f

$$T(f) = \frac{1}{(2\pi f_n^2 - 2\pi f^2) + j(2\zeta 2\pi f_n 2\pi f)}$$

$$T(f) = \frac{1}{(2\pi)^2 [(f_n^2 - f^2) + j(2\zeta f_n f)]} \quad (3.11)$$

La expresión anterior nos ayuda a conocer el comportamiento del trampoline en frecuencia, dándonos información de la magnitud del movimiento y de la fase. Entonces, podemos graficar la magnitud $|T(f)|$, para conocer, además de la frecuencia de resonancia, f_r (en este caso $f_r \neq f_d$), el ancho de banda Δf y por lo tanto el factor de calidad Q .

Hagamos el proceso anterior de forma analítica. Primero obtenemos la magnitud de la función de transferencia

$$|T(f)| = \frac{1/(2\pi)^2}{\sqrt{(f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2}}$$

Para encontrar el máximo de esta función derivamos una vez con respecto a f e igualamos a cero

$$\frac{d}{df} |T(f)| = \frac{d}{df} \frac{1/(2\pi)^2}{\sqrt{(f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2}} = 0$$

$$0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d}{df} \frac{1}{\sqrt{(f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2}}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[2(f_n^2 - f^2)(-2f) + 2(2\zeta f_n f)(2\zeta f_n)]}{[(f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2]^{3/2}} \right\} \\
0 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{[2f(f_n^2 - f^2) - 4f(\zeta f_n)^2]}{[(f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2]^{3/2}} \right\} \\
0 &= 2f(f_n^2 - f^2) - 4f(\zeta f_n)^2 \\
(f_n^2 - f^2) &= 2(\zeta f_n)^2 \\
f^2 &= f_n^2 - 2\zeta^2 f_n^2 \\
f &= \pm f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}
\end{aligned}$$

Podemos tomar cualquier signo de la raíz

$$f_r = f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (3.12)$$

O también

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Si comparamos la expresión 3.9 con la 3.12 corroboramos que $f_r \neq f_d$, son similares pero no idénticas. Más adelante se explican las diferencias entre éstas. Ahora, con $f = f_r$ podemos conocer el valor máximo de la magnitud de la función de transferencia

$$\begin{aligned}
|T(f_r)| &= \frac{1/(2\pi)^2}{\sqrt{(f_n^2 - f_r^2)^2 + (2\zeta f_n f_r)^2}} = T_{max} \\
T_{max} &= \frac{1/(2\pi)^2}{\sqrt{(f_n^2 - [f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}]^2)^2 + (2\zeta f_n [f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}])^2}} \\
T_{max} &= \frac{1/(2\pi)^2}{\sqrt{(f_n^2 - f_n^2 [1 - 2\zeta^2])^2 + (2\zeta f_n^2 \sqrt{1 - 2\zeta^2})^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{max} &= \frac{1/(2\pi)^2}{\sqrt{4f_n^4\zeta^4 + 4\zeta^2f_n^4(1 - 2\zeta^2)}} \\
T_{max} &= \frac{1/(2\pi)^2}{2f_n^2\sqrt{\zeta^4 + \zeta^2 - 2\zeta^4}} \\
T_{max} &= \frac{1/(2\pi)^2}{2f_n^2\zeta^2\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}} \\
T_{max} &= \frac{1}{2\alpha^2\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ahora, para obtener el ancho de banda determinamos primero las frecuencias para las cuales la función tiene la mitad del valor máximo

$$\frac{T_{max}}{2} = \frac{1/(2\pi)^2}{4f_n^2\zeta^2\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}} = \frac{1/(2\pi)^2}{\sqrt{(f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2}}$$

$$4f_n^2\zeta^2\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} = \sqrt{(f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2}$$

$$16f_n^4\zeta^4\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right) = (f_n^2 - f^2)^2 + (2\zeta f_n f)^2$$

$$16f_n^4(\zeta^2 - \zeta^4) = f_n^4 - 2f_n^2f^2 + f^4 + 4\zeta^2f_n^2f^2$$

$$f^4 + 2(2\zeta^2f_n^2 - f_n^2)f^2 + [f_n^4 - 16f_n^4(\zeta^2 - \zeta^4)] = 0$$

$$f^4 + 2(2\zeta^2 - 1)f_n^2f^2 + [1 - 16(\zeta^2 - \zeta^4)]f_n^4 = 0$$

Si ahora llamamos $D = f^2$ tenemos una ecuación de segundo grado

$$D^2 + 2(2\zeta^2 - 1)f_n^2D + [1 - 16(\zeta^2 - \zeta^4)]f_n^4 = 0$$

Entonces

$$D_{1,2} = \frac{-[-2(2\zeta^2 - 1)f_n^2] \pm \sqrt{[2(2\zeta^2 - 1)f_n^2]^2 - 4[1 - 16(\zeta^2 - \zeta^4)]f_n^4}}{2}$$

$$D_{1,2} = \frac{2f_r^2}{2} \pm \sqrt{\frac{4(2\zeta^2 - 1)^2 f_n^4 - 4[1 - 16(\zeta^2 - \zeta^4)]f_n^4}{4}}$$

$$D_{1,2} = -f_r^2 \pm f_n^2 \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 1 - 1 + 16(\zeta^2 - \zeta^4)}$$

$$D_{1,2} = f_r^2 \pm f_n^2 \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 16\zeta^2 - 16\zeta^4}$$

$$D_{1,2} = f_r^2 \pm f_n^2 \sqrt{12\zeta^2 - 12\zeta^4}$$

$$D_{1,2} = f_r^2 \pm 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{\frac{3}{\zeta^2} - 3}$$

$$D_{1,2} = f_r^2 \pm 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}$$

Recordemos que hicimos un cambio de variable, por lo que, para volver a la función en frecuencia utilizamos la ecuación que nos dio ese cambio. Además, recordemos que podemos tomar cualquier signo de la siguiente raíz, pues éste sólo nos indica un sentido.

$$f = \sqrt{D}$$

$$f = \sqrt{f_r^2 \pm 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}$$

$$f_2 = \sqrt{f_r^2 + 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}$$

$$f_1 = \sqrt{f_r^2 - 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}$$

O bien

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_r^2 + 2\alpha^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_r^2 - 2\alpha^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}$$

Con lo que el ancho de banda se puede expresar como

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

$$\Delta f = \sqrt{f_r^2 + 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} - \sqrt{f_r^2 + 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} \quad (3.14)$$

Con estos valores podemos calcular ahora el factor de calidad

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f}$$

$$Q = \frac{f_r}{\sqrt{f_r^2 + 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} - \sqrt{f_r^2 + 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}}$$

$$Q = \frac{f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\sqrt{(f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2})^2 + 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} - \sqrt{(f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2})^2 + 2f_n^2 \zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}}$$

$$Q = \frac{f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + 2\zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} - f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 - 2\zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\sqrt{1 - 2\zeta^2 \left[1 - \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}\right]} - \sqrt{1 - 2\zeta^2 \left[1 + \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}\right]}}$$

Podemos simplificar la expresión anterior si elevamos todo al cuadrado y quitando algunos términos, como sigue

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= \left\{ \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\sqrt{\sqrt{1-2\zeta^2} \left[1 - \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} \right]} - \sqrt{1-2\zeta^2} \left[1 + \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} \right]} \right\}^2 \\
 Q^2 &= \frac{(1-2\zeta^2)}{\left\{ \sqrt{1-2\zeta^2 + 2\zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} - \sqrt{1-2\zeta^2 - 2\zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} \right\}^2} \\
 Q^2 &= \frac{1-2\zeta^2}{2-4\zeta^2 - 2\sqrt{1-2\zeta^2 + 2\zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}} \sqrt{1-2\zeta^2 - 2\zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}} \\
 Q^2 &= \frac{1-2\zeta^2}{2-4\zeta^2 - 2\sqrt{[1-2\zeta^2]^2 - \left[2\zeta^2 \sqrt{3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}\right]^2}} \\
 Q^2 &= \frac{1-2\zeta^2}{2\left\{1-2\zeta^2 - \sqrt{1-4\zeta^2 + 4\zeta^4 - 4\zeta^4 \left[3\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)\right]}\right\}} \\
 Q^2 &= \frac{1-2\zeta^2}{2\left\{1-2\zeta^2 - \sqrt{1-4\zeta^2 + 4\zeta^4 - 12\zeta^2 + 4\zeta^4}\right\}} \\
 Q^2 &= \frac{1-2\zeta^2}{2-4\zeta^2 - 2\sqrt{1-16\zeta^2 + 8\zeta^4}}
 \end{aligned}$$

Si sacamos ahora raíz cuadrada, tenemos una expresión más sencilla del factor de calidad

$$Q = \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\sqrt{2-4\zeta^2 - 2\sqrt{1-16\zeta^2 + 8\zeta^4}}} \quad (3.15)$$

Los parámetros obtenidos anteriormente se representan en la figura 3.4. Se muestra en área sombreada el ancho de banda y la frecuencia de resonancia.

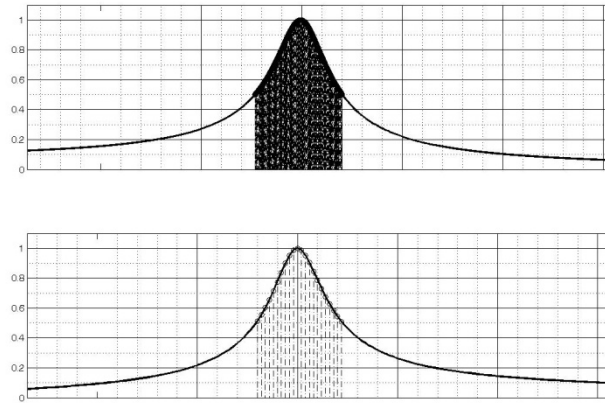


Figura 3.4 Factor de calidad. Respuesta a impulso (arriba). Respuesta a una chirp (abajo)

Una vez obtenida la solución para la parte dependiente del tiempo, ahora resolvemos la ecuación 3.7, que nos describe el comportamiento del trampolín en cada uno de sus puntos.

$$\frac{EI l_e X''''(x)}{m X(x)} = \omega_n^2$$

$$X''''(x) = \omega_n^2 X(x) \frac{m}{EI l_e}$$

$$X''''(x) - \omega_n^2 X(x) \frac{m}{EI l_e} = 0$$

Definamos el siguiente parámetro

$$k_n^4 = \omega_n^2 \frac{m}{EI l_e}$$

$$X''''(x) - k_n^4 X(x) = 0$$

El polinomio característico de esta ecuación diferencial es

$$D^4 - k_n^4 = 0$$

$$D^4 = k_n^4$$

$$\sqrt{D^4} = \sqrt{k_n^4}$$

$$D^2 = \pm k_n^2$$

Entonces, las primeras dos raíces se obtienen tomando el signo positivo de la ecuación anterior

$$D_{1,2} = \sqrt{+k_n^2}$$

$$D_{1,2} = \pm k_n$$

Las otras dos raíces se obtienen tomando el signo negativo

$$D_{3,4} = \sqrt{-k_n^2}$$

$$D_{3,4} = \pm j k_n$$

Tomando el resultado anterior sabemos que la solución será de la forma

$$X(x) = C_0 e^{+k_n x} + C_1 e^{-k_n x} + C_2 e^{+j k_n x} + C_3 e^{-j x}$$

Vamos a reescribir esta solución para hacer un análisis más profundo. Podemos hacerlo expresando las exponenciales en forma trigonométrica

$$X(x) = C_0 [\sinh(k_n x) + \cosh(k_n x)] + C_1 [\sinh(-k_n x) + \cosh(-k_n x)] \\ + C_2 [j \sin(k_n x) + \cos(k_n x)] + C_3 [j \sin(-k_n x) + \cos(-k_n x)]$$

$$X(x) = C_0 [\sinh(k_n x) + \cosh(k_n x)] + C_1 [-\sinh(k_n x) + \cosh(k_n x)] \\ + C_2 [j \sin(k_n x) + \cos(k_n x)] + C_3 [-j \sin(k_n x) + \cos(k_n x)]$$

Después reagrupamos términos semejantes

$$X(x) = \sinh(k_n x) [C_0 - C_1] + \cosh(k_n x) [C_0 + C_1] + j \sin(k_n x) [C_2 - C_3] \\ + \cos(k_n x) [C_2 + C_3]$$

Ahora renombramos las constantes (la j se incluyó en D_2). Ahora podemos derivar con respecto a x y utilizar las condiciones de frontera para obtener los valores de las nuevas constantes

$$X(x) = D_0 \sinh(k_n x) + D_1 \cosh(k_n x) + D_2 \sin(k_n x) + D_3 \cos(k_n x)$$

Primera condición de frontera

$$X(0) = D_0 \sinh(0) + D_1 \cosh(0) + D_2 \sin(0) + D_3 \cos(0) = 0$$

$$D_1 + D_3 = 0$$

$$D_3 = -D_1$$

La primera derivada con respecto a x es

$$X'(x) = k_n D_0 \cosh(k_n x) + k_n D_1 \sinh(k_n x) + k_n D_2 \cos(k_n x) - k_n D_3 \sin(k_n x)$$

Aplicando la segunda condición de frontera

$$X'(0) = k_n D_0 \cosh(0) + k_n D_1 \sinh(0) + k_n D_2 \cos(0) - k_n D_3 \sin(0) = 0$$

$$k_n D_0 + k_n D_2 = 0$$

$$D_2 = -D_0$$

La segunda derivada con respecto a x es

$$X''(x) = k_n^2 D_0 \sinh(k_n x) + k_n^2 D_1 \cosh(k_n x) - k_n^2 D_2 \sin(k_n x) - k_n^2 D_3 \cos(k_n x)$$

Aplicando la tercera condición de frontera y sustituyendo D_2 y D_3

$$X''(l_e) = k_n^2 D_0 \sinh(k_n l_e) + k_n^2 D_1 \cosh(k_n l_e) - k_n^2 (-D_0) \sin(k_n l_e) - k_n^2 (-D_1) \cos(k_n l_e) = 0$$

$$0 = D_0 [\sinh(k_n l_e) + \sin(k_n l_e)] + D_1 [\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)]$$

$$-D_0 [\sinh(k_n l_e) + \sin(k_n l_e)] = D_1 [\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)]$$

$$D_1 = -D_0 \frac{\sinh(k_n l_e) + \sin(k_n l_e)}{\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)}$$

La tercera derivada con respecto a x es

$$X'''(x) = k_n^3 D_0 \cosh(k_n x) + k_n^3 D_1 \sinh(k_n x) + k_n^3 D_2 \cos(k_n x) - k_n^3 D_3 \sin(k_n x)$$

Aplicando la cuarta condición de frontera

$$X'''(l_e) = k_n^3 D_0 \cosh(k_n l_e) + k_n^3 D_1 \sinh(k_n l_e) + k_n^3 D_2 \cos(k_n l_e) - k_n^3 D_3 \sin(k_n l_e) = 0$$

$$0 = D_0 [\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)] + D_1 [\sinh(k_n l_e) - \sin(k_n l_e)]$$

$$-D_0 [\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)] = D_1 [\sinh(k_n l_e) - \sin(k_n l_e)]$$

$$D_1 = -D_0 \frac{\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)}{\sinh(k_n l_e) - \sin(k_n l_e)}$$

Podemos igualar las dos expresiones para D_1 obteniendo

$$-D_0 \frac{\sinh(k_n l_e) + \sin(k_n l_e)}{\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)} = -D_0 \frac{\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)}{\sinh(k_n l_e) - \sin(k_n l_e)}$$

$$[\sinh(k_n l_e) - \sin(k_n l_e)][\sinh(k_n l_e) + \sin(k_n l_e)] = [\cosh(k_n l_e) + \cos(k_n l_e)]^2$$

$$\sinh^2(k_n l_e) - \sin^2(k_n l_e) = \cosh^2(k_n l_e) + 2\cosh(k_n l_e)\cos(k_n l_e) + \cos^2(k_n l_e)$$

$$0 = \cosh^2(k_n l_e) - \sinh^2(k_n l_e) + 2\cosh(k_n l_e)\cos(k_n l_e) + \cos^2(k_n l_e) + \sin^2(k_n l_e)$$

$$0 = 1 + 2\cosh(k_n l_e)\cos(k_n l_e) + 1$$

$$2\cosh(k_n l_e)\cos(k_n l_e) + 2 = 0$$

$$\cosh(k_n l_e)\cos(k_n l_e) + 1 = 0 \tag{3.16}$$

La ecuación 3.16 sólo se cumple para ciertos valores de $k_n l_e$. Estos valores se pueden obtener mediante un programa de simulación numérica. En esta sección se muestra una forma de obtener los valores de $k_n l_e = \gamma_n$. Esta forma consiste en utilizar la ecuación anterior. Si graficamos esta función, podemos notar que los valores de γ_n son las raíces de la función, es decir, cuando ésta vale cero. En la siguiente gráfica se muestra lo anterior



Figura 3.5 Gráfica de la ecuación 3.16. Las raíces son los valores de γ_n

En ambos casos basta con localizar los cruces por cero y los valores de γ_n . Si realizamos cálculos hasta obtener un número grande de valores de γ_n , por ejemplo $n = 100$ (primeros cien cruces por cero), podemos ver que después de los primeros valores de γ_n los siguientes tienen una diferencia entre sí de aproximadamente π . Ésto se puede apreciar en la siguiente gráfica

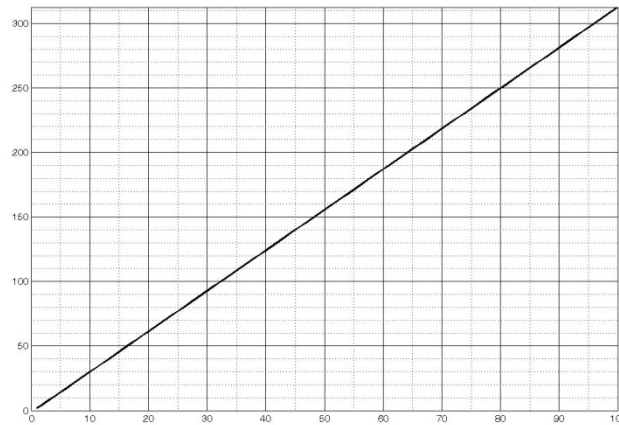


Figura 3.6 La pendiente de esta recta es aproximadamente π

Entonces, la solución de la ecuación 3.7 es

$$X(x) = D_0\{\sinh(k_n x) - \sin(k_n x) + P[\cos(k_n x) - \cosh(k_n x)]\} \quad (3.17)$$

Con P siendo cualquiera de las dos expresiones siguientes

$$P = \frac{\sinh(\gamma_n) + \sin(\gamma_n)}{\cosh(\gamma_n) + \cos(\gamma_n)} = \frac{\cosh(\gamma_n) + \cos(\gamma_n)}{\sinh(\gamma_n) - \sin(\gamma_n)}$$

Y para los diez primeros modos de vibración ($n = 10$)

n	$\gamma_n = k_n l_e$
1	1.8762
2	4.6862
3	7.8627
4	10.9868
5	14.1459
6	17.2700
7	20.4291
8	23.5532
9	26.7123
10	29.8364

Tabla 3.1 Valores de γ_n para los diferentes modos de vibración

A continuación se muestra una figura que permite entender el concepto de modos de vibración. Las líneas punteadas representan los dos primeros modos de vibración. La línea oscura representa al trampolín en movimiento, considerando los primeros cien modos de vibración

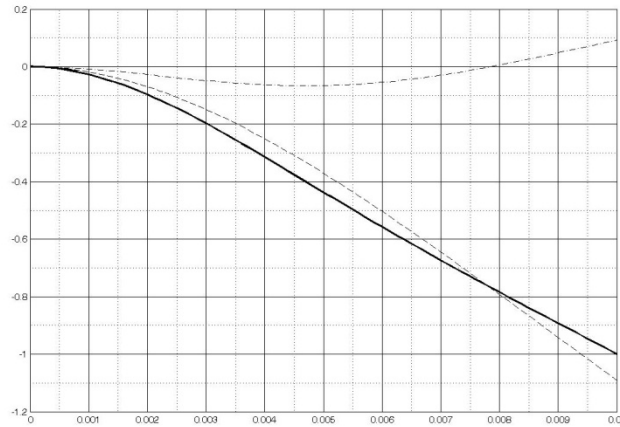


Figura 3.7 Modos de vibración del trampolín

Recordemos que hicimos un cambio de variable en la ecuación diferencial dependiente del x

$$k_n^4 = \omega_n^2 \frac{m}{EI l_e}$$

Entonces, despejando a ω_n

$$\omega_n^2 = k_n^4 \frac{EI l_e}{m}$$

$$\omega_n = \sqrt{k_n^4 \frac{EI l_e}{m}}$$

$$\omega_n = \pm \sqrt{k_n^4 \frac{EI l_e}{m}}$$

Sabemos que k_n es un número real y positivo, y también sabemos que el signo de ω_n sólo nos indica una dirección de giro. Además, sustituimos el momento de inercia para un trampolín delgado

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{EI l_e}{m}}$$

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{El_e w t^3}{m \cdot 12}}$$

$$\omega_n = \frac{k_n^2 t}{2} \sqrt{\frac{E w t l_e}{3 m}}$$

$$\omega_n = \frac{k_n^2 t}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

Si ahora recordamos que $\gamma_n = k_n l_e$, entonces, como resultado final tenemos

$$\omega_n = \left(\frac{\gamma_n}{l_e}\right)^2 \frac{t}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

O bien, en la frecuencia

$$f_n = \left(\frac{\gamma_n}{l_e}\right)^2 \frac{t}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{3\rho}} \quad (3.18)$$

La ecuación anterior nos relaciona los modos de vibración con la respuesta en frecuencia y por ende, con la respuesta temporal del trampolín.

Para finalizar este análisis, retomando el hecho de que $u_z(x, t) = X(x)T(t)$, ya podemos escribir la solución total de 3.5

$$u_z(x, t) = \{A_0 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}\} \{D_0 \{\sinh(k_n x) - \sin(k_n x) + P[\cos(k_n x) - \cosh(k_n x)]\}\}$$

Como D_0 y A_0 son constantes

$$u_z(x, t) = U_0 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \{\sinh(k_n x) - \sin(k_n x) + P[\cos(k_n x) - \cosh(k_n x)]\} \quad (3.19)$$

Con P siendo cualquiera de las dos expresiones siguientes

$$P = \frac{\sinh(\gamma_n) + \sin(\gamma_n)}{\cosh(\gamma_n) + \cos(\gamma_n)} = \frac{\cosh(\gamma_n) + \cos(\gamma_n)}{\sinh(\gamma_n) - \sin(\gamma_n)} \quad (3.20)$$

La única constante desconocida es U_0 . Ésta se determina por las condiciones iniciales del problema.

3.2 Efecto fotoacústico

El efecto fotoacústico consiste en la generación de ondas acústicas (ondas mecánicas) por medio de absorción de luz. Alexander Graham Bell fue el primero en reportar este efecto en 1880: “discos delgados compuestos por diferentes sustancias emitieron sonido al ser expuestos a un haz de luz solar rápidamente interrumpido”. Una de estas sustancias era el Selenio (*Se*). El sonido generado por este bloque de discos se generó al absorber luz infrarroja, que es una parte de la luz solar. En 1973, Allan Rosencwaig y Gersho desarrollaron un modelo más detallado del fenómeno.

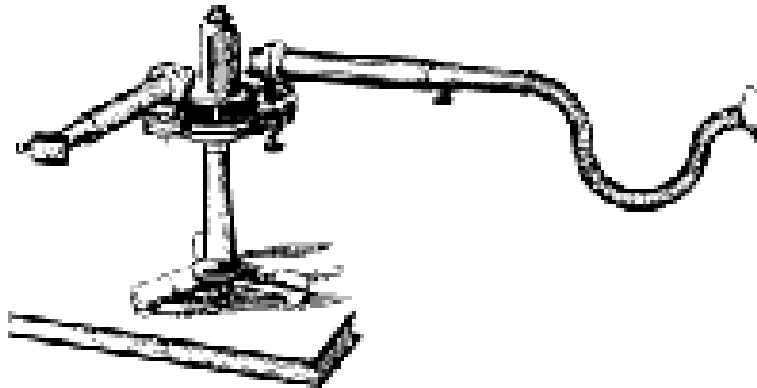


Figura 3.8 Fotofono de Bell

De forma similar que en el efecto fotoeléctrico, el fenómeno empieza cuando algún material absorbe luz. Los fotones excitan a las partículas de un cierto nivel de energía que vibran a cierta frecuencia y tienen cierta temperatura, éstas pasan a un estado de mayor energía y vibran con mayor frecuencia, es decir, aumentan su temperatura. Se presentan dos entonces tipos de desexcitación: radiativos y no radiativos. En los procesos radiativos, se produce emisión espontánea y, en el caso de los láseres, emisión estimulada. Los procesos no radiativos se manifiestan debido al gradiente de temperaturas entre dos zonas de un material y se equilibra por conducción, la cual lleva asociada una elongación y contracción del material. Estas deformaciones producen en el medio donde se encuentra el material un cambio de presión y, si éstos se repiten una y otra vez, se genera una onda mecánica.

Una forma de generar varias veces estos cambios de presión es cambiando la amplitud de la intensidad luminosa (modulando), por ejemplo, como lo hizo Bell, tapando y destapando el haz de luz que alumbraba el bloque de discos de *Se*. Por lo tanto, la amplitud de la presión cambiará de igual forma de la amplitud del haz de luz.

Cada elemento, y por ende cada molécula, al graficar su espectro electromagnético, tiene un intervalo donde la absorción es mayor. Ese intervalo contiene las frecuencias a las cuales el fluido generará las ondas mecánicas. Para llevar a cabo las mediciones, el fluido en cuestión se mantiene en una pequeña cápsula llamada celda fotoacústica (usualmente de forma cilíndrica). El efecto fotoacústico puede darse en gases, líquidos y sólidos, ya que los cambios bruscos de temperatura producen en cualquier estado físico una expansión y una compresión, que dan origen a las ondas mecánicas. Una forma de detectar estos cambios es con un piezoeléctrico (en el caso de los sólidos) o con un micrófono (en el caso de fluidos).

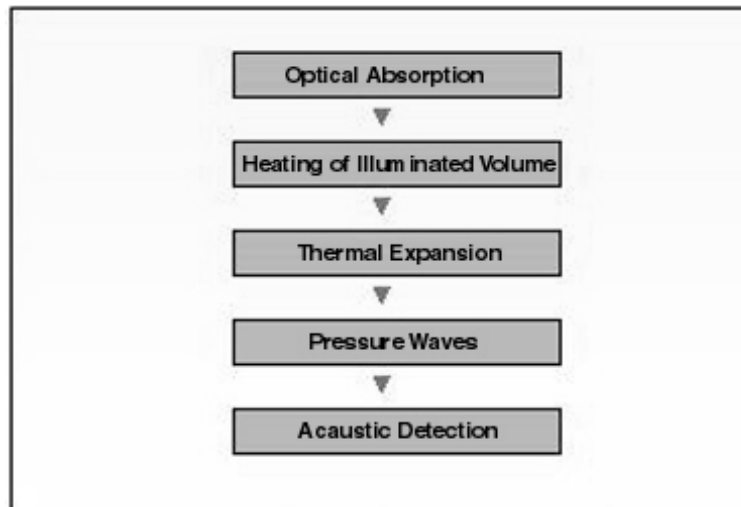


Figura 3.9 Evolución del efecto fotoacústico

Si la frecuencia a la que se excita el material no corresponde exactamente a su frecuencia de resonancia, la amplitud de la onda mecánica será pequeña, pero si sí corresponde, la amplitud será mayor. La dirección en la que incide el haz de luz de excitación influye debido a la geometría de la celda fotoacústica, ya que cada dirección tiene diferentes modos de vibración y por ende una frecuencia de resonancia propia. Si estas condiciones se cumplen, entonces la celda propia funciona como un amplificador.

Al igual que en espectroscopía óptica, un barrido en la frecuencia del haz de excitación puede darnos un espectro del material en cuestión y así, pueden desarrollarse diversas aplicaciones. Para lograr medir éstas respuestas se puede excitar el fluido con pulsos ultracortos de luz, emulando una función delta de Dirac, la cual contiene todas las frecuencias. El haz de excitación también puede ser modulado en amplitud por ruido blanco, o por un haz que contenga la mayor cantidad de colores (frecuencias).

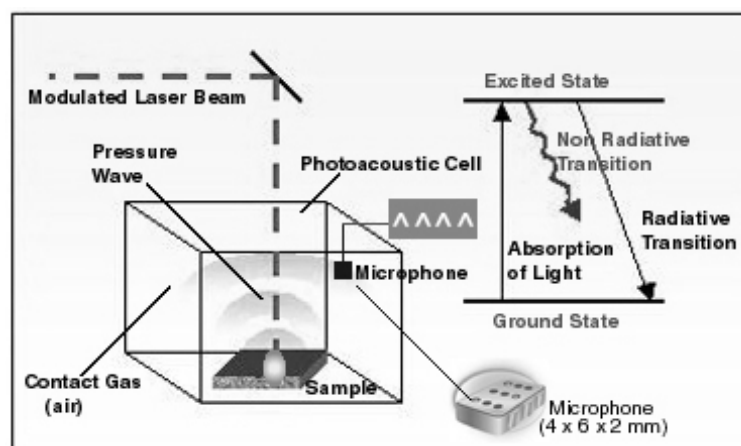


Figura 3.10 Efecto fotoacústico

Ondas acústicas en medio controlado (Modelo de Rosencwaig)

Consideremos una celda fotoacústica de forma cilíndrica como la mostrada en la figura 3.11, con diámetro D y longitud L . Si L es pequeña en comparación con la longitud de onda de la señal fotoacústica, entonces un micrófono de prueba medirá la presión promedio producida en la celda. La muestra de diámetro D y grosor l se coloca dentro de ésta, con una cara expuesta al gas contenido en la celda y la otra cara tocando un material mal conductor de calor con grosor l_b .

Figura 3.11 Celda fotoacústica

La longitud de la columna de aire está determinada por

$$l_g = L - l - l_b$$

Definamos ahora los siguientes parámetros para cada material ($i = s, g, b$ para la muestra, el gas y el mal conductor, respectivamente)

k_i – Conductividad térmica [$cal/ms^{\circ}C$]

ρ_i – Densidad [kg/m^3]

C_i – Calor específico [$cal/kg^{\circ}C$]

$\alpha_i = k_i/C_i\rho_i$ – Difusividad térmica [m^2/s]

$a_i = \sqrt{\omega/2\alpha_i}$ – Coeficiente de difusión térmica [$1/m$]

$\mu_i = 1/a_i$ – Longitud de la difusión térmica [m]

Ahora, si la intensidad de una fuente monocromática, de longitud de onda λ y senoidalmente modulada es

$$I = \frac{1}{2}I_0[1 + \cos(\omega t)]$$

Entonces, la densidad de calentamiento producida en cualquier punto x es

$$= \frac{1}{2}\beta I_0 e^{\beta x} [1 + \cos(\omega t)]$$

La ecuación de difusión queda de la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_s = \frac{1}{\alpha_s}\frac{\partial}{\partial t}\theta_s - Ae^{\beta x}[1 + e^{j\omega t}] \quad (3.21)$$

Con

$$A = \frac{\beta I_0 \eta}{2k_s}$$

$$-l < x < 0$$

Donde

I_0 – Flujo de luz monocromática incidente [W/m^2]

β – Coeficiente de absorción óptica [$1/m$]

θ_s – Temperatura de la muestra [K]

η – Eficiencia de conversión de luz a calor [1]

Para sólidos y temperatura de vacío podemos considerar que $\eta = 1$. Las ecuaciones de difusión para el gas y para el mal conductor de calor son

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta_b = \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial}{\partial t} \theta_b \quad (3.22)$$

Con

$$-l - l_b < x < -l$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta_g = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial}{\partial t} \theta_g \quad (3.23)$$

Con

$$0 < x < l_g$$

La parte real de la función solución de las ecuaciones 3.21, 3.22, 3.23 es la de interés físico, ya que representa la temperatura de la celda fotoacústica y ésta se puede comparar con la del medio externo a la celda

$$T(x, t) = Re\{\theta(x, t)\} + T_0$$

$$T(x, t) = Re\{\vartheta_{ac}(x, t)\} + \vartheta_0 + T_0$$

$$T(x, t) = T_{ac}(x, t) + T_{dc} \quad (3.24)$$

Con

T_0 – Temperatura ambiente [K]

Las condiciones de frontera asociadas de la función solución son

$$\theta(-l - l_b, t) = T_0$$

$$\theta(l_g, t) = T_0$$

Las condiciones de continuidad quedan determinadas por

$$\theta_g(0, t) = \theta_s(0, t)$$

$$\theta_b(-l, t) = \theta_s(-l, t)$$

$$k_g \frac{\partial}{\partial x} \theta_g(0, t) = k_s \frac{\partial}{\partial x} \theta_s(0, t)$$

$$k_b \frac{\partial}{\partial x} \theta_b(-l, t) = k_s \frac{\partial}{\partial x} \theta_s(-l, t)$$

Ahora escribimos la solución general

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{l_b} (x + l + l_b) W_0 + W e^{\sigma_b(x+l)+j\omega t} & -l - l_b < x < -l \\ e_1 + e_2 x + d e^{\beta x} + [U e^{\sigma_s x} + V e^{-\sigma_s x} - E e^{\beta x}] e^{j\omega t} & -l < x < 0 \\ \frac{1-x}{l_g} \vartheta_0 + \vartheta e^{-\sigma_g x + j\omega t} & 0 < x < l_g \end{cases}$$

Donde

W, U, V, E, ϑ – Constantes complejas referidas a las componentes variantes
 $e_1, e_2, d, W_0, \vartheta_0$ – Constantes reales referidas a las componentes de directa
 $\sigma_i = (1 + j)a_i$

Y además

$$d = -\frac{A}{\beta^2}$$

$$E = \frac{A}{\beta^2 - \sigma_s^2}$$

En la solución general se consideró que

$$\mu_b \ll l_b$$

$$\mu_g \ll l_g$$

Entonces, las constantes de componente directa se obtienen aplicando las condiciones de continuidad a la solución general. Así obtenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vartheta_0}{l_g} = e_1 + d \\ W_0 = e_1 - e_2 l + d e^{-\beta l} \\ -\frac{k_g}{l_g} \vartheta_0 = k_s (e_2 + \beta d) \\ \frac{k_b}{l_b} W_0 = k_s (e_2 + d \beta e^{-\beta l}) \end{array} \right.$$

Si ahora aplicamos las mismas condiciones de continuidad para observar las componentes senoidales, tenemos también 4 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta = U + V - E \\ W = U e^{-\sigma_s l} + V e^{\sigma_s l} - E e^{-\beta l} \\ -k_g \sigma_g \vartheta = k_s (\sigma_s U - \sigma_s V - \beta E) \\ k_b \sigma_b W = k_s (\sigma_s U e^{-\sigma_s l} - \sigma_s V e^{\sigma_s l} - \beta E e^{-\beta l}) \end{array} \right.$$

De estos últimos sistemas de ecuaciones obtenemos las constantes que se ven involucradas en la solución para la región de la columna de gas, ya que ahí se produce la señal fotoacústica

$$\vartheta = \frac{\beta I_0}{2k_s(\beta^2 - \sigma_s^2)} \left[\frac{(r-1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (r+1)(b-1)e^{-\sigma_s l} + 2(b-r)e^{-\beta l}}{(g+1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (g-1)(b-1)e^{-\sigma_s l}} \right]$$

Con

$$b = \frac{k_b a_b}{k_s a_s}$$

$$g = \frac{k_g a_g}{k_s a_s}$$

$$r = (1+j) \frac{\beta}{2a_s}$$

Por lo que la temperatura en la superficie que colinda con el gas se puede expresar como

$$T(0, t) = T_0 + \vartheta_0 + [\vartheta_1 \cos(\omega t) - \vartheta_2 \sin(\omega t)]$$

Donde

$$\vartheta = \vartheta_1 + j\vartheta_2$$

$$Re\{\vartheta(0, t)\} = \vartheta_0 + [\vartheta_1 \cos(\omega t) - \vartheta_2 \sin(\omega t)]$$

Se puede ver de este resultado que las variaciones de temperatura están dadas únicamente por dos términos de la solución en la superficie que tiene contacto con el gas. Entonces, para cualquier punto dentro de la celda, la variación de temperatura está dada por la parte real de

$$\begin{aligned}\theta_{ac}(x, t) &= \vartheta e^{-\sigma_g x + j\omega t} \\ T_{ac}(x, t) &= e^{-a_g x} [\vartheta_1 \cos(\omega t - a_g x) - \vartheta_2 \sin(\omega t - a_g x)]\end{aligned}\quad (3.25)$$

Como se ve en la ecuación anterior, la componente dependiente del tiempo de la función de temperatura decae rápidamente en $x = 2\pi/a_g = 2\pi\mu_g$. Entonces definimos una frontera de capa de gas de esta longitud a partir de la cual ya no hay variaciones de temperatura.

Para obtener la temperatura promedio dentro de la frontera de capa de gas

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2\pi\mu_g} \int_0^{2\pi\mu_g} \theta_{ac}(x, t) dx$$

Usando la aproximación de $e^{-2\pi} \ll 1$

$$\bar{\theta} \cong \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \vartheta e^{j(\omega t - \frac{\pi}{4})}$$

Entonces, el resto de la columna de gas se ve afectado por las variaciones de presión que provoca la variación periódica de temperatura en la frontera de capa de gas, como si fuera un pistón. Si tomamos esta idea, podemos conocer el desplazamiento por medio de la ley para gases ideales

$$\begin{aligned}\delta x(t) &= 2\pi\mu_g \frac{\bar{\theta}}{T_0} \\ \delta x(t) &= \frac{\vartheta\mu_g}{\sqrt{2}T_0} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{4})}\end{aligned}$$

Si asumimos que el resto de la columna de gas está en condiciones adiabáticas, entonces

$$PV^\gamma = cte$$

Donde

P – Presión [Pa]

V – Volumen de la columna de gas [m^3]
 γ – Razón de calores específicos [1]

Por lo que las variaciones de presión serán

$$\delta P(t) = \frac{\gamma P_0}{V_0} \delta V$$

$$\delta P(t) = \frac{\gamma P_0}{l_g} \delta x(t)$$

$$\delta P(t) = Q e^{j(\omega t - \frac{\pi}{4})}$$

Con

$$Q = \frac{\gamma \vartheta P_0}{\sqrt{2} l_g a_g T_0}$$

$$Q = \frac{\beta I_0 \gamma P_0}{2\sqrt{2} k_s l_g a_g T_0 (\beta^2 - \sigma_s^2)} \left[\frac{(r-1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (r+1)(b-1)e^{-\sigma_s l} + 2(b-r)e^{-\beta l}}{(g+1)(b+1)e^{\sigma_s l} - (g-1)(b-1)e^{-\sigma_s l}} \right] \quad (3.26)$$

Donde

P_0 – Presión del ambiente [Pa]
 V_0 – Volumen del ambiente [Pa]

Entonces, el cambio de presión está dado por la parte real de la ecuación anterior

$$\Delta P(t) = Re\{\delta P(t)\}$$

$$\Delta P(t) = Q_1 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - Q_2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Delta P(t) = q \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi\right) \quad (3.27)$$

Con

$$Q = Q_1 + jQ_2 = q e^{-j\varphi}$$

Podemos analizar entonces 6 casos especiales para comprender mejor la onda generada. Para ello, definimos los siguientes términos

$$\mu_\beta = \frac{1}{\beta}$$

$$Y = \frac{\gamma P_0 I_0}{2\sqrt{2}l_g T_0}$$

Asumimos también que

$$g < b \rightarrow k_g a_g < k_b a_b$$

$$b \sim 1 \rightarrow k_b a_b \sim k_s a_s$$

Sólidos ópticamente transparentes ($\mu_\beta > l$)

En estos casos, la luz es absorbida a lo largo de toda la muestra y no necesariamente se absorbe toda la luz.

- *Sólidos térmicamente delgados* ($\mu_s \gg l$) y $\mu_\beta < \mu_s$. Con $e^{-\beta l} \cong 1 - \beta l$, $e^{\pm \sigma_s l} \cong 1$ y $|r| > 1$

$$Q = \frac{lY}{2a_g a_b k_b} (\beta - 2a_s b - j\beta) \cong \frac{(1-j)\beta l \mu_b}{2a_g} \frac{Y}{k_b}$$

De este resultado podemos ver que la señal acústica es proporcional a βl y como μ_b/a_g es inversamente proporcional a ω , entonces Q es también inversamente proporcional a ω . Aquí se aprecia la participación del material mal conductor de calor.

- *Sólidos térmicamente delgados* ($\mu_s > l$) y $\mu_\beta > \mu_s$. Con $e^{-\beta l} \cong 1 - \beta l$, $e^{\pm \sigma_s l} \cong 1 \pm \sigma_s l$ y $|r| < 1$

$$Q = \frac{\beta l Y}{4k_s a_g a_s^3 b} [\beta^2 + 2a_s^2 + j(\beta^2 - 2a_s^2)] \cong \frac{(1-j)\beta l \mu_b}{2a_g} \frac{Y}{k_b}$$

La expresión de Q es idéntica al caso anterior por lo que las conclusiones son las mismas.

- *Sólidos térmicamente gruesos* ($\mu_s < l$) y $\mu_\beta \gg \mu_s$. Con $e^{-\beta l} \cong 1 - \beta l$, $e^{-\sigma_s l} \cong 0$ y $|r| \ll 1$

$$Q \cong -j \frac{\beta \mu_s \mu_s}{2a_g k_s} Y$$

En este caso la señal acústica es proporcional a $\beta\mu_s$ e inversamente proporcional a $\omega^{3/2}$. Esto se presenta debido a que la luz absorbida y que se convierte en calor se difunde dentro de la muestra.

Sólidos ópticamente opacos ($\mu_\beta \ll l$)

En estos casos, toda la luz es absorbida sólo por una parte de la muestra. El resto de la muestra no absorbe luz.

- *Sólidos térmicamente delgados ($\mu_s \gg l$) y $\mu_\beta \ll \mu_s$. Con $e^{-\beta l} \cong 0$, $e^{\pm\sigma_s l} \cong 1$ y $|r| \gg 1$*

$$Q \cong \frac{(1-j)\mu_b}{2a_g} \frac{\mu_b}{k_b} Y$$

Aquí tenemos “opacidad fotoacústica” que, combinada con la “opacidad óptica” nos produce que la señal fotoacústica sea $1/\beta l$ veces más grande que en el primer caso de sólidos ópticamente transparentes. La dependencia de frecuencia es también inversamente proporcional a ω .

- *Sólidos térmicamente gruesos ($\mu_s < l$) y $\mu_\beta < \mu_s$. Con $e^{-\beta l} \cong 0$, $e^{-\sigma_s l} \cong 0$ y $|r| > 1$*

$$Q \cong \frac{Y}{2a_g a_s k_s \beta} (\beta - 2a_s - j\beta) \cong \frac{(1-j)\mu_s}{2a_g} \frac{\mu_s}{k_s} Y$$

Este resultado es similar al anterior, sólo que las propiedades del material mal conductor son reemplazadas por las de la muestra.

- *Sólidos térmicamente gruesos ($\mu_s \ll l$) y $\mu_\beta > \mu_s$. Con $e^{-\beta l} \cong 0$, $e^{-\sigma_s l} \cong 0$ y $|r| < 1$*

$$Q = \frac{-j\beta Y}{4k_s a_g a_s^3} (2a_s - \beta + j\beta) \cong -j \frac{\beta \mu_s \mu_s}{2a_g k_s} Y$$

Este caso es interesante, ya que a pesar de que se trata de un sólido ópticamente opaco, si se tienen que es térmicamente grueso, también existe una señal fotoacústica que sí es proporcional a β , en este caso a $\beta\mu_s$ y por ello es inversamente proporcional a $\omega^{3/2}$.

Todos los casos analizados producen una onda acústica debida a las variaciones en la temperatura de una delgada columna de gas que funge como frontera entre la muestra y el resto del gas. En la siguiente sección se presenta la formación de ondas acústicas debido a la expansión y contracción del medio.

Ondas acústicas por expansión del medio

La parte que falta de analizar es la expansión térmica de la muestra debido a la luz absorbida y posteriormente convertida en calor. Para ello consideramos sólidos ópticamente transparentes y térmicamente delgados, así que manejamos la solución obtenida anteriormente para la columna de gas que genera ondas acústicas pero las ondas acústicas de interés se generan por la expansión y contracción térmica de la muestra. Para ello, consideremos la región iluminada de la muestra como un nuevo arreglo experimental representado en la figura 3.12

Figura 3.12 Área iluminada de la muestra

Definamos los siguientes parámetros

τ_L – Ancho temporal del pulso láser [s]

τ_{NR} – Tiempo de relajación de los procesos no radiativos [s]

τ_r – Tiempo en que la onda acústica sale radialmente del área iluminada [s]

E_0 – Energía del pulso láser [J]

v_s – Velocidad de la onda acústica en la muestra [m/s]

R – Radio del haz láser [m]

Si consideramos que

$$\tau_L \gg \tau_{NR}$$

$$\tau_L \gg \tau_r$$

$$\tau_r = \frac{R}{v_s}$$

Estas consideraciones nos permiten analizar el fenómeno tomando en cuenta un solo pedazo de la parte temporal del haz incidente, es decir, como un pulso. Esto nos permitirá desarrollar la teoría para la fotoacústica pulsada.

El cambio de temperatura dentro de la muestra puede obtenerse una vez que se hayan obtenido las constantes de los sistemas de ecuaciones presentados en esta sección. Otra forma de analizar ese cambio de temperatura es mediante la energía absorbida por la muestra E_s a partir de la energía del haz de luz E_0

$$E_s = E_0(1 - e^{-\beta l}) \cong E_0\beta l$$

La energía de desexcitación es

$$E_{ac} = \eta E_s = \eta E_0\beta l$$

Si ahora suponemos que el radio del área iluminada, R , es mayor que la longitud de la difusión térmica

$$R \gg \mu_s$$

Entonces

$$E_{ac} = \rho V_0 C_s \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{E_{ac}}{\rho \pi R^2 l C_s} = \frac{\eta E_0 \beta}{\rho \pi R^2 C_s}$$

El volumen de la muestra se expandirá debido al calentamiento, y se verá reflejado en un aumento del radio

$$\Delta V = \epsilon V_0 \Delta T$$

Donde

ϵ – Coeficiente de expansión volumétrico [$1/^\circ\text{C}$]

$$\pi(\Delta r + R)^2 l - \pi R^2 l = \epsilon \pi R^2 l \Delta T$$

$$(\Delta r + R)^2 - R^2 = \epsilon R^2 \Delta T$$

$$\Delta r^2 + 2\Delta r R + R^2 - R^2 = \epsilon R^2 \Delta T$$

$$\left(\frac{\Delta r}{R}\right)^2 + 2\Delta r = \epsilon R \Delta T$$

Si $\Delta r \ll R$

$$\Delta r \cong \frac{\epsilon R \Delta T}{2}$$

$$\Delta r \cong \frac{\epsilon R}{2} \frac{\eta E_0 \beta}{\rho \pi R^2 C_s}$$

$$\Delta r \cong \frac{\epsilon \eta E_0 \beta}{2 \rho \pi R C_s}$$

El desplazamiento acústico será

$$u_s(r) = \Delta r \sqrt{\frac{R}{r}}$$

$$u_s(r) = \frac{\epsilon\eta E_0\beta}{2\rho\pi R C_s} \sqrt{\frac{R}{r}}$$

$$u_s(r) = \frac{\epsilon\eta E_0\beta}{2\rho\pi C_s\sqrt{Rr}}$$

Y la onda de presión queda determinada como

$$p_s(r) = \frac{v_s\rho u_s(r)}{\tau_L}$$

$$p_s(r) = \frac{v_s\rho}{\tau_L} \frac{\epsilon\eta E_0\beta}{2\rho\pi C_s\sqrt{Rr}}$$

$$p_s(r) = \frac{v_s}{\tau_L} \frac{\epsilon\eta E_0\beta}{2\pi C_s\sqrt{(v_s\tau_L)r}}$$

$$p_s(r) = \frac{v_s^2\epsilon\eta E_0\beta}{2\pi C_s\sqrt{(v_s\tau_L)^3r}}$$

$$p_s(r) = \frac{v_s^2\epsilon\eta E_0\beta}{2\pi C_s\sqrt{R^3r}} \quad (3.28)$$

Si ahora consideramos el caso en el que el radio del área iluminada, R , es menor que la longitud de la difusión térmica

$$R \ll \mu_s$$

Entonces, por ley de Hook

$$P_0 = \kappa \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$P_0 = \rho v_s^2 \epsilon \Delta T$$

$$P_0 = \rho v_s^2 \epsilon \frac{\eta E_0\beta}{\rho\pi R^2 C_s}$$

$$P_0 = \frac{v_s^2 \epsilon \eta E_0\beta}{\pi R^2 C_s}$$

Entonces, la onda acústica será

$$p_f(r) = P_0 \sqrt{\frac{R}{r}}$$

$$p_f(r) = \frac{v_s^2 \epsilon \eta E_0 \beta}{\pi R^2 C_s} \sqrt{\frac{R}{r}}$$

$$p_f(r) = \frac{v_s^2 \epsilon \eta E_0 \beta}{\pi C_s \sqrt{R^3 r}} \quad (3.29)$$

Las ecuaciones 3.28 y 3.29 son análogas, por lo tanto podemos escribirlas como

$$p(r) = \begin{cases} \frac{A}{2\sqrt{R^3 r}} & R \gg \mu_s \\ \frac{A}{\sqrt{R^3 r}} & R \ll \mu_s \end{cases} \quad (3.30)$$

Con

$$A = \frac{v_s^2 \epsilon \eta E_0 \beta}{\pi C_s}$$

Si ahora vemos la diferencia entre los dos casos

$$\frac{p_f}{p_s} = \frac{A/\sqrt{R^3 r}}{A/2\sqrt{R^3 r}}$$

$$\frac{p_f}{p_s} = \frac{1}{1/2}$$

$$\frac{p_f}{p_s} = 2 \quad (3.31)$$

Por lo tanto, un haz de luz con un radio angosto, menor a la longitud de difusión térmica, produce una amplitud de presión más alta que un haz ancho, espacialmente hablando. En ambos casos se trata de una onda acústica radial a la muestra que la genera.

Relevancia de la duración temporal del pulso de luz incidente

En las secciones anteriores se describió el proceso físico de cómo se genera una onda acústica a partir de un haz de luz que incide en un material de prueba. El haz de luz

genera ondas acústicas básicamente de dos formas. La primera se debe a las variaciones de temperatura en el entorno de la muestra que ocurren ciertamente en una delgada capa del gas que la rodea. La segunda forma se debe a la expansión y contracción de la muestra. Estrictamente, la luz incidente se considera como un pulso debido a que además de tener una cierta frecuencia, va modulada en forma de pulsos. En esta sección se muestra la diferencia entre pulsos temporalmente angostos y anchos.

Consideremos ahora un fluido ópticamente opaco ($\mu_\beta \ll l$). Consideremos también un haz de luz de radio R tal que $\mu_\beta \ll R$, entonces la onda acústica será de frente plano. Ya sabemos que la temperatura está dada por

$$\Delta T = \frac{E_{ac}}{\rho V_0 C_s}$$

En este caso, la energía de desexcitación será proporcional a μ_β y no a l . El volumen excitado será también diferente, por lo que

$$\Delta T = \frac{\eta E_0 \beta \mu_\beta}{\rho \pi R^2 \mu_\beta C_s}$$

$$\Delta T = \frac{\eta E_0 \beta}{\rho \pi R^2 C_s}$$

El cambio de temperatura es el mismo que para un fluido ópticamente transparente. Ahora, como $R = v_s \tau_L$ y $v_s \tau_L \ll \mu_\beta$, el volumen calentado no tiene el tiempo suficiente para una expansión isobárica, por lo que la presión aumentará sólo en el volumen iluminado

$$p_c = \rho v_s^2 \epsilon \Delta T$$

$$p_c = \rho v_s^2 \epsilon \frac{\eta E_0 \beta}{\rho \pi R^2 C_s}$$

$$p_c = \frac{v_s^2 \epsilon \eta E_0 \beta}{\pi R^2 C_s}$$

$$p_c = \frac{A}{R^2} \tag{3.32}$$

Si ahora tenemos que $v_s \tau_L \gg \mu_\beta$, el cambio en el volumen será ahora

$$\Delta V = \epsilon V_0 \Delta T$$

$$\pi R^2 (v_s \tau_L + u_h) - \pi R^2 v_s \tau_L = \epsilon \pi R^2 v_s \tau_L \frac{\eta E_0 \beta \mu_\beta}{\rho \pi R^2 v_s \tau_L C_s}$$

$$v_s \tau_L + u_h - v_s \tau_L = \epsilon \frac{\eta E_0 \beta \mu_\beta}{\rho \pi R^2 C_s}$$

$$u_h = \frac{\epsilon \eta E_0 \beta \mu_\beta}{\rho \pi R^2 C_s}$$

Y la presión será

$$p_l = u_h \frac{v_s \rho}{\tau_L}$$

$$p_l = \frac{\epsilon \eta E_0 \beta \mu_\beta v_s \rho}{\rho \pi R^2 C_s \tau_L}$$

$$p_l = \frac{\epsilon \eta E_0 \beta \mu_\beta v_s}{\pi R^2 C_s \tau_L}$$

$$p_l = \frac{A \mu_\beta}{v_s \tau_L R^2} \quad (3.33)$$

Entonces, la presión está dada como

$$p = \begin{cases} \frac{A}{R^2} & v_s \tau_L \ll \mu_\beta \\ \frac{A \mu_\beta}{v_s \tau_L R^2} & v_s \tau_L \gg \mu_\beta \end{cases} \quad (3.34)$$

Si tomamos la razón de las ecuaciones 3.32 y 3.33, tenemos como resultado final

$$\frac{p_c}{p_l} = \frac{A/R^2}{A \mu_\beta / v_s \tau_L R^2}$$

$$\frac{p_c}{p_l} = \frac{1}{\mu_\beta / v_s \tau_L}$$

$$\frac{p_c}{p_l} = \frac{v_s \tau_L}{\mu_\beta} \gg 1 \quad (3.35)$$

Por lo tanto, un pulso corto produce una amplitud de presión más grande que un pulso ancho, temporalmente hablando.

3.3 Propagación de ondas en fluidos

Una vez que hemos analizado las fuentes que producen ondas mecánicas (sonido), conviene analizar a grosso modo la propagación de éstas en un medio y así podemos tomar ciertas consideraciones al momento de hacer mediciones. En esta sección se desarrolla un poco la teoría de propagación de ondas mecánicas, que ya es bien conocida.

Sea la ecuación de Navier-Stokes linealizada

$$p - p_0 \approx c_0^2(\rho - \rho_0) \quad (3.36)$$

La ecuación de continuidad en tres dimensiones (conservación de masa)

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.37)$$

Y la ecuación de conservación de momento sin efecto de gravedad

$$\rho \frac{D}{Dt}\vec{u} + \nabla p = \vec{0} \quad (3.38)$$

Con la derivada material en tres dimensiones expresada como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$$

Si consideramos que en reposo el fluido tiene los siguientes valores

$$p = p_0$$

$$\rho = \rho_0$$

$$\vec{u} = \vec{0}$$

Ahora, si el fluido se perturba con

$$p = p_0 + p_1$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}_1$$

Con dichas perturbaciones mucho menores que los valores de referencia. Entonces, sustituyendo en las ecuaciones 3.37 y 3.38

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}(\rho_0 + \rho_1) + (\rho_0 + \rho_1)\nabla \cdot \vec{u}_1 &= 0 \\
\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \vec{u}_1 \cdot \nabla(\rho_0 + \rho_1) \right] + (\rho_0 + \rho_1)\nabla \cdot \vec{u}_1 &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + \vec{u}_1 \cdot \nabla\rho_1 + (\rho_0 + \rho_1)\nabla \cdot \vec{u}_1 &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + \rho_0\nabla \cdot \vec{u}_1 + [\vec{u}_1 \cdot \nabla\rho_1 + \rho_1\nabla \cdot \vec{u}_1] &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + \rho_0\nabla \cdot \vec{u}_1 &= 0 \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\rho_0 + \rho_1)\frac{D}{Dt}\vec{u}_1 + \nabla(p_0 + p_1) &= \vec{0} \\
\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_1 + \vec{u}_1 \cdot \nabla \times \vec{u}_1 \right] + \nabla(p_1) &= \vec{0} \\
\nabla p_1 + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_1 &= \vec{0} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p_0 + p_1) - p_0 &\approx c_0^2[(\rho_0 + \rho_1) - \rho_0] \\
p_1 &\approx c_0^2\rho_1 \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación 3.41 en la ecuación 3.39 y derivando con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_1}{c_0^2} \right) + \left(\frac{p_0}{c_0^2} \right) \nabla \cdot \vec{u}_1 \right] &= \frac{\partial}{\partial t} 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1 + \frac{\partial}{\partial t} p_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1 + p_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}_1 &= 0 \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Sustituyendo también en 3.40 y sacando la divergencia de la ecuación 3.40

$$\nabla \cdot \left[\nabla p_1 + \left(\frac{p_0}{c_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 \right] = \nabla \cdot \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 p_1 + \nabla \cdot \left(\frac{p_0}{c_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 &= 0 \\ c_0^2 \left[\nabla^2 p_1 + \frac{p_0}{c_0^2} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 \right] &= 0 \\ c_0^2 \nabla^2 p_1 + p_0 \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Restando la ecuación 3.43 a la 3.42 tenemos que

$$\begin{aligned} c_0^2 \nabla^2 p_1 + p_0 \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 - \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1 + p_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{u}_1 \right] &= 0 \\ \nabla^2 p_1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Con

$$c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p_1}{\rho_1}$$

La cual es la ecuación de onda lineal en tres dimensiones para un medio no viscoso y sin gravedad. Esta ecuación también puede presentarse en términos de la densidad por medio de la ecuación 3.41. Ésta ecuación puede presentarse en una sola dimensión y la solución puede utilizarse para las otras tres dimensiones en forma análoga, por lo tanto la ecuación de onda en una dimensión será

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = 0$$

Si se introduce el efecto de la viscosidad se tendrá una ecuación diferencial como la siguiente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p + \alpha \frac{\partial}{\partial x} p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = 0$$

Para obtener la solución de la ecuación de onda suponemos que ésta es de variables separables, es decir que, tal como lo hicimos en el análisis del trampolín, se puede expresar como el producto de una función del tiempo t y una de la posición x

$$p = X(x)T(t)$$

Entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)T(t) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} X(x)T(t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(x)T(t) = 0$$

$$X''(x)T(t) + \alpha X'(x)T(t) - \frac{1}{c_0^2} X(x)T''(t) = 0$$

$$c_0^2 \frac{X''(x)}{X(x)} + \alpha c_0^2 \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$$

$$c_0^2 \frac{X''(x)}{X(x)} + \alpha c_0^2 \frac{X'(x)}{X(x)} = -\omega_n^2 \quad (3.45)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega_n^2 \quad (3.46)$$

Resolvamos primero la ecuación 3.46

$$T''(t) = -\omega_n^2 T(t)$$

$$T''(t) + \omega_n^2 T(t) = 0$$

El polinomio característico es

$$D^2 + \omega_n^2 = 0$$

$$D^2 = -\omega_n^2$$

$$D = \pm j\omega_n$$

Por lo que una solución para la parte temporal será

$$T(t) = T_0 e^{j\omega_n t} \quad (3.47)$$

Cabe señalar que cada término de 3.47 representa una solución y que la combinación lineal de ambas es también solución. Ahora solucionamos la ecuación 3.45

$$X''(x) + \alpha X'(x) = -\frac{\omega_n^2}{c_0^2} X(x)$$

$$X''(x) + \alpha X'(x) + \left(\frac{\omega_n}{c_0}\right)^2 X(x) = 0$$

El polinomio característico es

$$D^2 + \alpha D + \left(\frac{\omega_n}{c_0}\right)^2 = 0$$

$$D_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\left(\frac{\omega_n}{c_0}\right)^2}}{2}$$

Si

$$\alpha = \zeta \omega_n$$

Entonces

$$D_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{(\zeta \omega_n)^2 - 4\left(\frac{\omega_n}{c_0}\right)^2}}{2}$$

$$D_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 4\left(\frac{1}{c_0}\right)^2}}{2}$$

De aquí consideramos

- $|\zeta| = 2/c_0$ - raíces reales repetidas
- $|\zeta| > 2/c_0$ - raíces reales diferentes
- $|\zeta| < 2/c_0$ - raíces complejas conjugadas
- $|\zeta| = 0$ - raíces imaginarias conjugadas

$$D_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 4\left(\frac{1}{c_0}\right)^2}}{2}$$

Por lo que una solución para la parte que depende de x es

$$X(x) = X_0 e^{D_1 x} = X_0 e^{-\frac{\alpha}{2} x} e^{\frac{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 4\left(\frac{1}{c_0}\right)^2}}{2} x} \quad (3.48)$$

Entonces, la solución total será:

$$p(x, t) = X(x)T(t) = T_0 e^{j\omega_n t} X_0 e^{D_1 x} = P_0 e^{D_1 x + j\omega_n t} \quad (3.49)$$

La ecuación anterior describe la propagación de una onda acústica a lo largo del eje x y en cualquier instante t .

Capítulo 4

Instrumentación del sistema de sensado óptico

Contenido

Capítulo 4 Instrumentación del sistema de sensado óptico	82
4.1 Método estático	85
4.2 Método dinámico.....	94
4.3 Validación del sistema.....	98

Figuras

Figura 4.1 Arreglo experimental	84
Figura 4.2 Circuito armado para el sensor de posición	85
Figura 4.3 Forma de las señales de muy baja frecuencia aplicadas como señales de directa	86
Figura 4.4 Arreglo experimental, vista 1	87
Figura 4.5 Arreglo experimental, vista 2	88
Figura 4.6 Arreglo experimental, vista 3	88
Figura 4.7 Arreglo experimental, vista 4	88
Figura 4.8 Láser para medición.....	89
Figura 4.9 Láser de excitación	89
Figura 4.10 Sensor de posición iluminado por el haz reflejado.....	90
Figura 4.11 Circuito del sensor de posición	90
Figura 4.12 Detección por reflejo de haz	91
Figura 4.13 Detección por proyección de sombra	91
Figura 4.14 Trampolines piezoeléctricos (izquierda). Trampolines de silicio (derecha).....	92
Figura 4.15 Ejemplo del haz reflejado que incide sobre el sensor	92
Figura 4.16 Ejemplo de la proyección de la sombra del trampolín.....	93
Figura 4.17 Rampa aplicada como señal de directa de amplitud variable.....	94
Figura 4.18 Espectro obtenido con el analizador B&K.....	95
Figura 4.19 Medición con barrido en frecuencia.....	96
Figura 4.20 Medición con ruido blanco	96
Figura 4.21 Medición con secuencia MLS.....	97
Figura 4.22 Medición con señal de directa modulada.....	98
Figura 4.23 Recta de ajuste para las mediciones con chirp	100
Figura 4.24 Recta de ajuste para las mediciones con el analizador	100
Figura 4.25 Recta de ajuste para las mediciones con ruido blanco.....	100
Figura 4.26 Gráficas de los diferentes métodos de medición.....	101

Ecuaciones

(4.1).....	99
(4.2).....	99
(4.3).....	99

Tablas

Tabla 4.1 Características físicas de las barras de BaTiO ₃	99
Tabla 4.2 Mediciones	99
Tabla 4.3 Resultados	101
Tabla 4.4 Frecuencias de resonancia medidas por los diferentes métodos.....	102

CAPÍTULO 4. INSTRUMENTACIÓN DEL SISTEMA DE SENSADO ÓPTICO

Los resultados obtenidos de la teoría presentada en el capítulo anterior servirán para la explicación de la instrumentación y para el análisis de los resultados que se obtendrán. Así, se puede dejar como variable independiente un parámetro y fijar los demás, midiendo la variable correspondiente que nos permita determinar de forma directa o indirecta el valor de dicho parámetro. Apoyándonos en los análisis del caso estático y del caso dinámico tenemos por consecuencia un método estático y uno dinámico. En esta sección se describen los métodos implementados en esta tesis y se justifican por medio del análisis matemático. Además, se muestran mediciones de prueba y calibración para comprobar el correcto funcionamiento del sistema.

Para ambos métodos se utilizó la detección en forma óptica, ya que ésta tiene un ancho de banda muy amplio, más allá del rango acústico, además de que ésta es una técnica no invasiva al sistema. Para ello se utilizó un láser LDM150, de la marca IMATRONIC, que tiene una longitud de onda, λ , de 635 ± 5 [nm] y una potencia de 3 [mW]. Como sensor se utilizó un fotodiodo de cuatro cuadrantes S4349 marca HAMAMATSU, que tiene un ancho de banda de 20 [MHz]. El arreglo experimental, utilizado en ambos casos (dinámico y estático), se muestra a continuación:

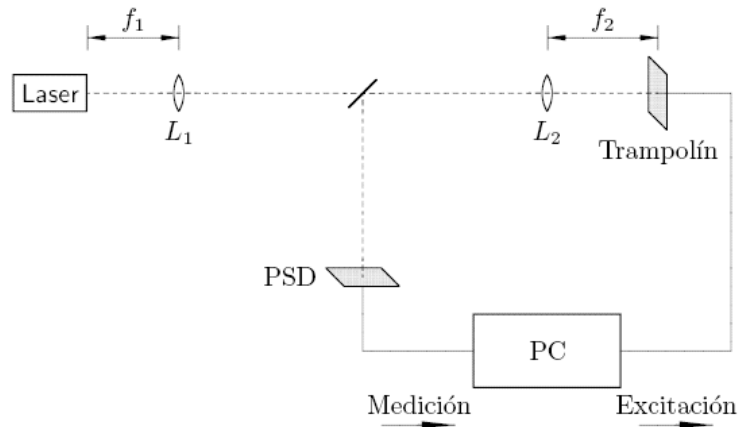


Figura 4.1 Arreglo experimental

Se construyó también un circuito que permitió capturar la señal del fotodiodo para poder procesarla. Como el fotodiodo es de cuatro cuadrantes, tiene cuatro salidas (A, B, C, D), y éstas se representan como fuentes de corriente, la primera etapa del circuito fue un convertor corriente-voltaje, utilizando un circuito integrado LM13700. La segunda etapa consistió en sumar las señales correspondientes a las direcciones en ambos ejes, x (A+B y C+D) y y (A+D y B+C) con el circuito integrado OP07. La última etapa ($x=(A+B)-(C+D)$ y $y=(A+D)-(B+C)$) también se realizó con OP07s. El circuito armado se muestra en la figura 4.2. Este circuito se puede utilizar en ambos métodos, el estático y el dinámico. Los valores de las resistencias son independientes para cada problema. En nuestro caso $R_1 = 1$ [k Ω], $R_2 = 10$ [k Ω], $R_3 = 100$ [k Ω], $R_4 = 100$ [k Ω] y $R_5 = 10$ [k Ω].

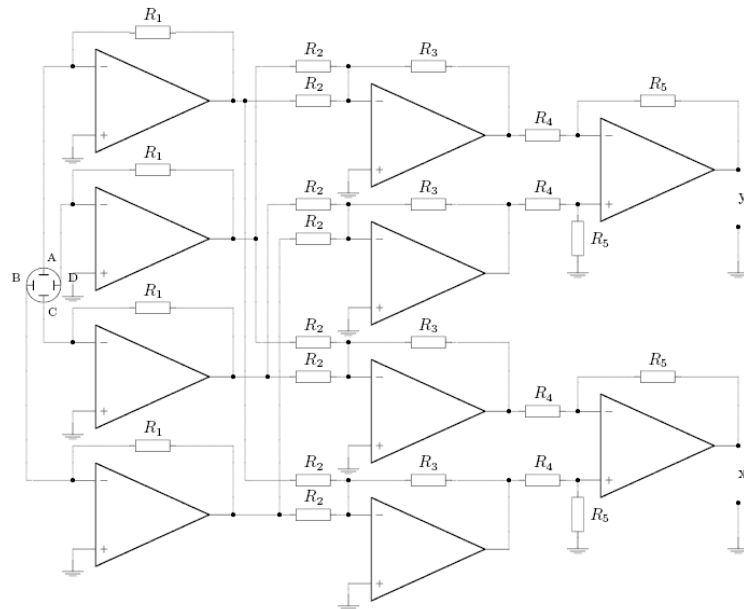


Figura 4.2 Circuito armado para el sensor de posición

Se utilizó una computadora de escritorio P4 @ 2.4 [GHz], 1.5 [GB] en memoria RAM y con una tarjeta de audio Creative SB Audigy [D880]. Los programas se realizaron en MATLAB 7.5.0.342 (R2007b) y se desarrolló una interfaz gráfica para realizar las mediciones. Además, otros equipos fueron utilizados, dependiendo del método a utilizar.

4.1 Método estático

Partiendo del análisis del caso estático del trampolín se puede obtener analíticamente el valor de la constante elástica k_e , siempre y cuando se conozcan los valores del módulo de Young del material, E , con el que se fabricó el trampolín y sus dimensiones. Así pues, podemos a partir de este punto relacionar la distribución de fuerza a lo largo del trampolín, F , con el desplazamiento del extremo libre del mismo, $z = u_z(x)$, lo que nos resulta en una ecuación de una recta:

$$F = k_e z$$

O lo que es lo mismo:

$$z = \frac{F}{k_e}$$

Esto quiere decir que conociendo la constante elástica del trampolín podemos determinar el desplazamiento que sufre el extremo libre al someterse a una fuerza conocida o la fuerza necesaria para desplazar el extremo libre a distancia requerida.

Ahora podemos utilizar estas ecuaciones en un experimento. Por ejemplo, si construimos un trampolín y le aplicamos una distribución de fuerza de cualquier naturaleza y medimos al desplazamiento del extremo libre podemos obtener una constante elástica experimental k_e^{exp} . Con esta simple medición podemos determinar experimentalmente el módulo de Young, por ejemplo, al relacionar la k_e^{exp} con las dimensiones, por supuesto conocidas, del trampolín. Así se puede tener una comparación entre el valor de E_s^{exp} , módulo de Young experimental estático, y el E^{teo} , módulo de Young teórico, reportado en libros. Además, teniendo con certeza el valor de la k_e^{exp} podemos someter el trampolín a diversas distribuciones de fuerza y medir para cada una el desplazamiento del extremo libre, obteniendo así los valores de dichas distribuciones de fuerza.

Una de las limitantes de este experimento es que el desplazamiento del extremo libre del trampolín sólo se considera lineal para distancias pequeñas. Además, existe un punto de colapso en el cual el trampolín puede romperse. Esto a su vez es una gran ventaja si lo que se requiere es medir fuerzas muy pequeñas. Por ejemplo, en la microscopía de fuerza atómica (AFM) se utiliza al trampolín como la punta del microscopio y se mide la fuerza que lo dobla, para así sacar una imagen de la superficie que está tocando. Este método también puede ser útil si se requiere medir masas muy pequeñas, ya sea para componentes muy pequeños o para cantidades muy pequeñas de ciertas sustancias.

Con un generador SRS DS345 se excitó al trampolín con señales rampa, cuadradas y dientes de sierra, todas de baja frecuencia (0.1 [Hz]) simulando señales de directa de amplitud variable (figura 4.3). Se generó un programa en MATLAB que captura la señal de un multímetro HP 3478A por medio de la interfaz GPIB.

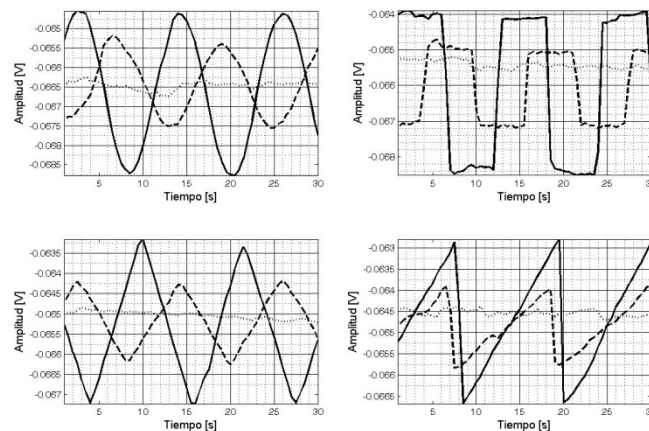


Figura 4.3 Forma de las señales de muy baja frecuencia aplicadas como señales de directa

El arreglo experimental de la figura 4.1 se muestra en la siguiente serie de figuras (4.4 – 4.14). En la figura 4.4 se puede observar en primer plano un trampolín piezoeléctrico sujetado por un par de placas de hierro. Las placas tienen un recubrimiento de pintura que funciona como aislante entre ellas a excepción de la parte central interior de cada una, que funcionan como electrodos para el trampolín. Las placas se encuentran pegadas a una barra de latón que a su vez esta sujeta dentro de otra barra de latón, con ayuda de un prisionero.

La parte más delgada de esta última barra también está empotrada en otra barra de latón, la cual está fijada en la mesa óptica por medio de tornillos. Este arreglo mecánico permitió darle 2 grados libertad de movimiento a las placas negras para poder ajustar el trampolín. También se puede ver en esta figura el láser de excitación, al fondo, con el cual se estimula mecánicamente al trampolín, ya sea piezoeléctrico o de silicio. En la parte inferior de la imagen se puede observar como el haz reflejado incide en el fotodiodo de cuatro cuadrantes, el cual está montado en el circuito que se muestra en la figura 4.2.

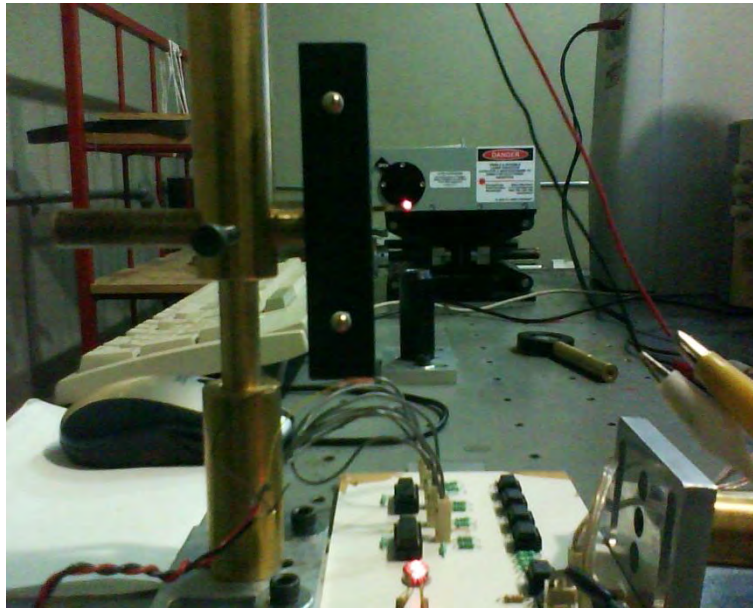


Figura 4.4 Arreglo experimental, vista 1

En la figura 4.5 se ve el láser de medición del lado izquierdo, el cual está empotrado en una barra y ésta a su vez en una base, todo de latón, con lo que se puede ajustar la altura y ángulo del haz incidente.

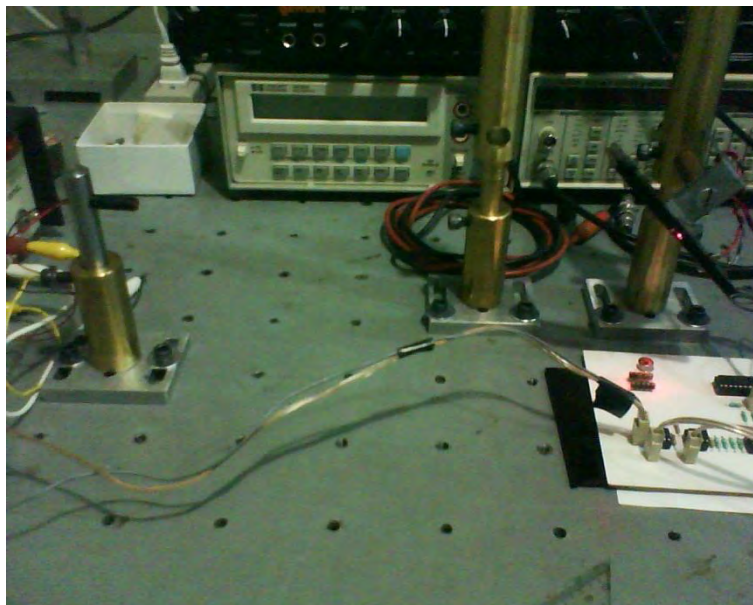


Figura 4.5 Arreglo experimental, vista 2

En esta vista (figura 4.6) se aprecia claramente el reflejo en el trampolín y la incidencia del haz reflejado en el sensor. El haz incidente y el haz reflejado forman un ángulo de 90° respectivamente.

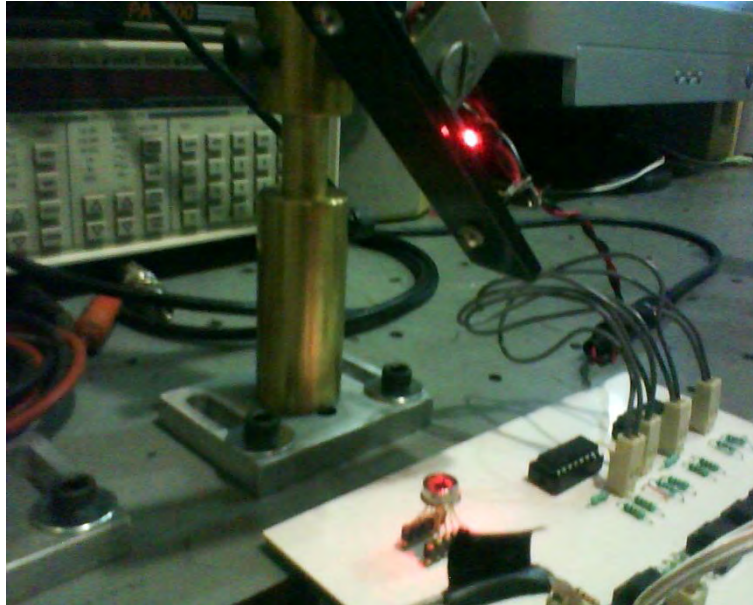


Figura 4.6 Arreglo experimental, vista 3

En la figura 4.7 se ve la parte posterior del trampolín y cómo el láser está apuntando a él. También se observa al fondo la fuente de voltaje de directa que alimenta al láser de medición.

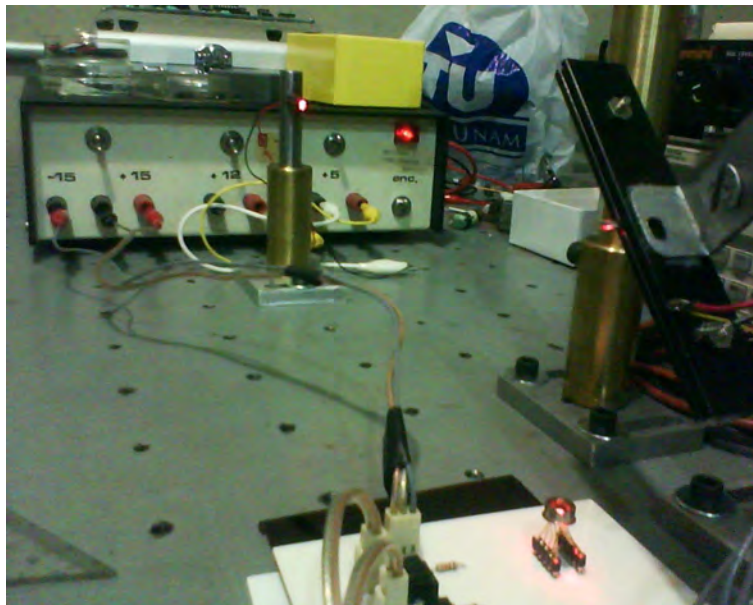


Figura 4.7 Arreglo experimental, vista 4

La figura 4.8 muestra el láser de medición a mayor detalle. Se puede ver que su pequeño tamaño facilita su operación, es decir, el ajuste en la dirección del haz de luz incidente.

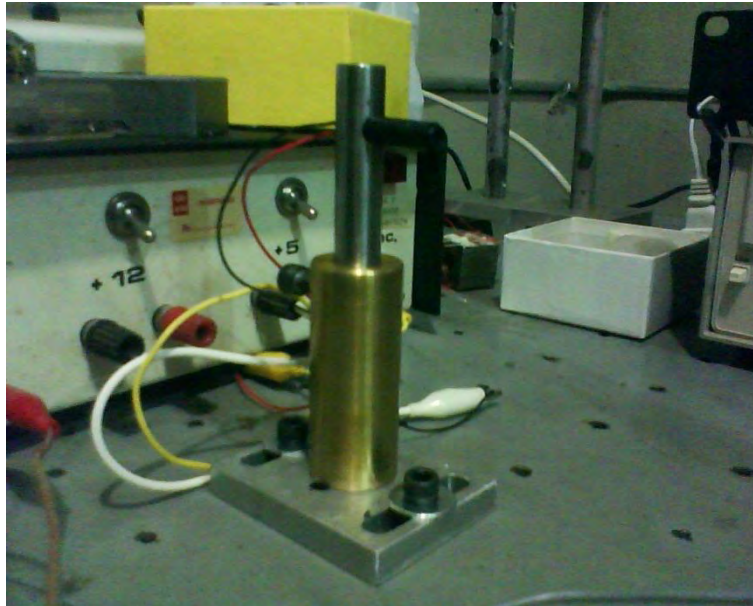


Figura 4.8 Láser para medición

A diferencia del láser de medición, el láser de excitación tiene un tamaño muy grande, figura 4.9. En la imagen sólo se muestra la parte donde se genera el haz, pero el set completo consiste básicamente de una planta donde se encuentra la bomba que ayuda a enfriar el elemento que genera el haz de luz y la lámpara de flasheo que permite que éste láser trabaje en modo pulsado.

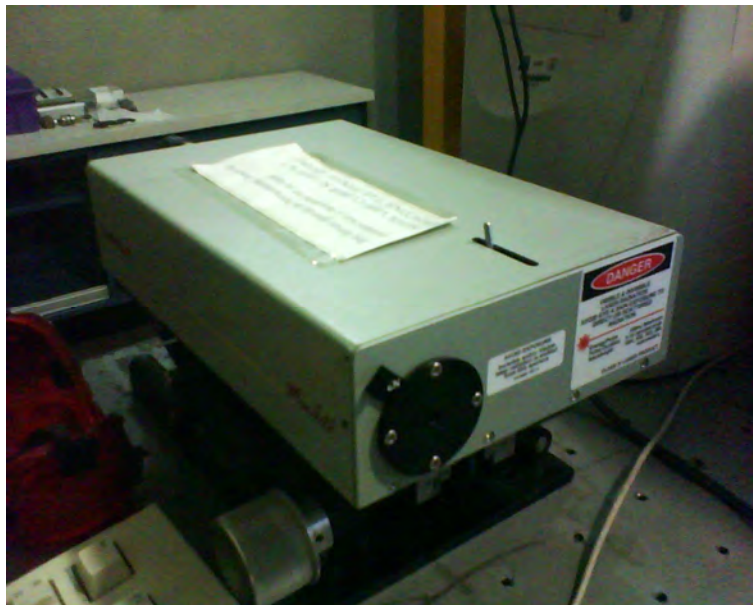


Figura 4.9 Láser de excitación

En la siguiente figura, figura 4.10, puede apreciarse el sensor de posición montado en su circuito asociado. En esta imagen el haz laser cubre casi toda el área de sensado ya que se utilizó un método diferente que se explicará más adelante.

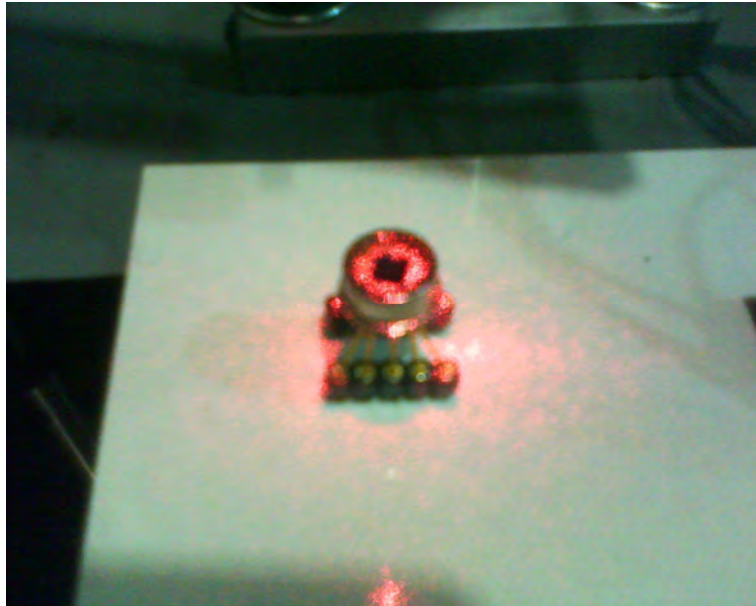


Figura 4.10 Sensor de posición iluminado por el haz reflejado

La figura 4.11 muestra a detalle el circuito del sensor de posición. Utiliza seis circuitos integrados. Como entrada tiene las 4 salidas del sensor de posición que tienen la información de cuánta luz incide en cada cuadrante. Como salida entrega dos señales que denotan las componentes x y y para describir la posición del haz de luz, o en su defecto, la posición de la sombra, que se describirá más adelante.

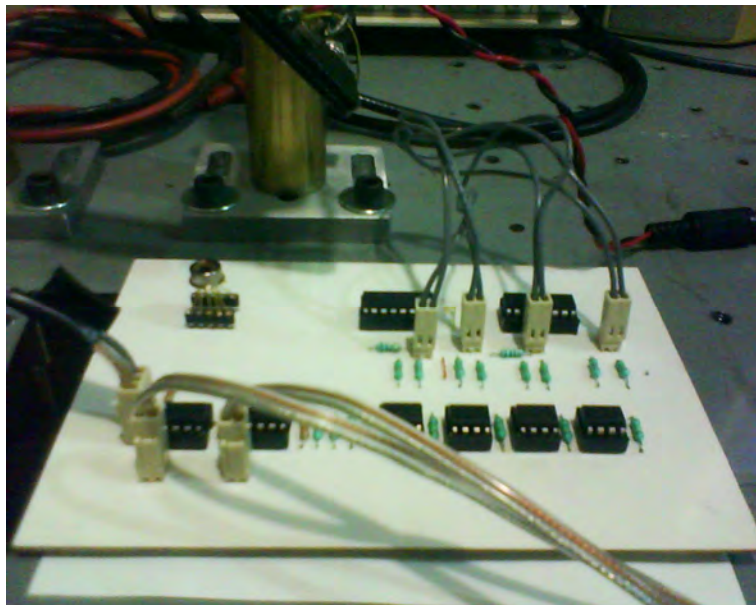


Figura 4.11 Circuito del sensor de posición

Aquí se observa como el haz reflejado del trampolín forma un ángulo de 90° con el haz incidente a él, figura 4.12. También se aprecia lo útil de tener montado al trampolín en las bases de latón y en las placas.

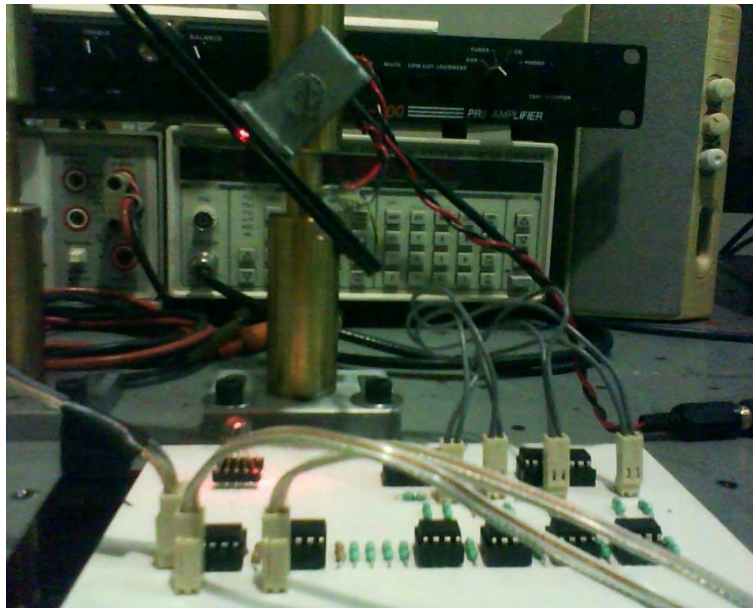


Figura 4.12 Detección por reflejo de haz

En esta figura, figura 4.13, se presenta el otro método utilizado para detectar la posición del trampolín a través de su sombra. En este caso el láser de medición se monta de forma diferente. Esto se explica más adelante.

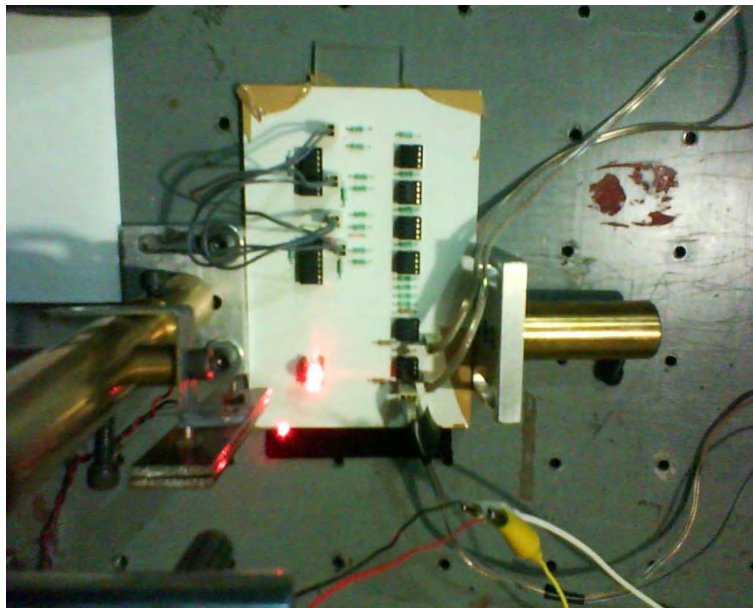


Figura 4.13 Detección por proyección de sombra

En la figura 4.14 se muestran los trampolines de silicio que, a diferencia de los piezoeléctricos, son mucho más pequeños, del orden de 10 o más veces más pequeños,

tamaños típicos de MEMS. De largo tienen desde 500 [μm] hasta 2 [mm], de ancho 500 [μm] y de grosor 10 [μm]. Dichos trampolines se producen con procesos basados en procesos de fabricación de circuitos integrados. En esta figura se aprecian arreglos “peine” de 15 – 20 trampolines.



Figura 4.14 Trampolines piezoeléctricos (izquierda). Trampolines de silicio (derecha)

Para explicar “el método de la sombra” que se utilizó para las mediciones, veamos el siguiente ejemplo.

Supongamos que el haz reflejado del trampolín está ubicado de la siguiente forma:

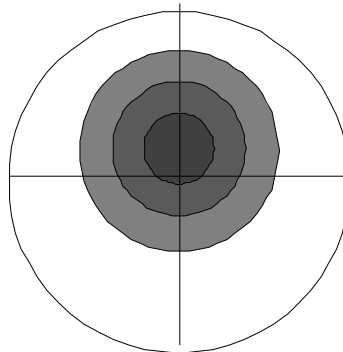


Figura 4.15 Ejemplo del haz reflejado que incide sobre el sensor

El haz no es un punto exacto, sino que existe un gradiente en la intensidad del haz que también es percibido por el sensor. A pesar de eso, el sensor puede detectar la posición del centro del haz, que es la de interés, que está asociada con la posición del trampolín. Si consideramos para efectos prácticos tres zonas de intensidad que nos ayuden a describir el gradiente, la zona más oscura (la del centro) genera más corriente en el sensor que las otras. También consideremos que el haz de luz sólo se mueve en la dirección y para mayor facilidad Pero parte de estas otras están en los otros cuadrantes del sensor, por lo que existirán corrientes generadas en esos cuadrantes. Las cuatro salidas representan cada una de estas corrientes y el circuito se encarga de sacar las diferencias de corriente, como se explicó anteriormente para sacar una corriente resultante en la dirección x y otra en la dirección y , por lo que a pesar de dicho gradiente en el haz de luz, el sensor determinará el centro del haz y por lo tanto, de la posición del trampolín, que en este ejemplo se encuentra en la parte superior del sensor, cuadrantes A y D. Este es el mecanismo tradicional de un sensor de posición de cuatro cuadrantes.

Consideremos ahora el caso de la proyección de la sombra del trampolín:

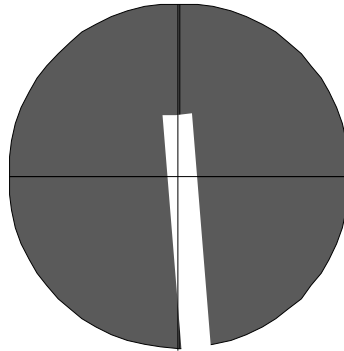


Figura 4.16 Ejemplo de la proyección de la sombra del trampolín

La figura anterior muestra la proyección de la sombra del trampolín (en blanco) y en gris la parte del haz laser que no toca al trampolín. Si seguimos la misma idea de que cada cuadrante genera una corriente asociada a la cantidad de luz que lo ilumina, entonces tenemos de nuevo 4 corrientes que son la entrada del circuito asociado al sensor. De nuevo, este circuito saca la diferencia, anteriormente explicada, y determina una señal correspondiente al eje x y otra al eje y . La diferencia con el ejemplo anterior es que si pensamos de la misma manera, el sensor nos dirá que el centro del haz se encuentra del lado derecho, en los cuadrantes D y C, pero nosotros no medimos un haz sino una proyección de sombra. Entonces, si pensamos que la ausencia de corriente y no su presencia es la que nos indica la posición, podemos afirmar que la punta del trampolín (que es la que más se flexiona), es la que se encuentra del lado izquierdo, en los cuadrantes A y B.

Utilizar este método tiene sus ventajas y sus desventajas. En ambos métodos, el centro del haz de luz o de la sombra, según sea el caso, deben de estar lo más centrados posible. Dentro de las ventajas del método de la sombra es que uno puede ahorrarse un lente en la óptica del arreglo y la lente usada se utiliza para colimar el haz, con lo que se logra una proyección más exacta de la sombra. Además, debido a que el laser de medición está completamente alineado con el sensor, se minimizan errores debidos a la apertura angular del haz y de la lente. Otra ventaja es que se tiene una mejor alineación del arreglo, ya que todo queda montado en la misma pieza: laser, trampolín y lente, a diferencia del método habitual. En las desventajas podemos contemplar que debido a que la flexión se presenta a lo largo del trampolín, la medición involucra también la flexión de la parte media, aunque cabe resaltar que las aportaciones de esa parte son mínimas.

Entonces, como resumen, en el método estático se utilizó la proyección de la sombra del trampolín para detectar las desviaciones de la punta ocasionadas por la excitación eléctrica. Como señal de excitación se utilizaron rampas de muy baja frecuencia (0.000001 [Hz]) que simulaban corriente directa de amplitud variable, como se ve en la figura 4.17.

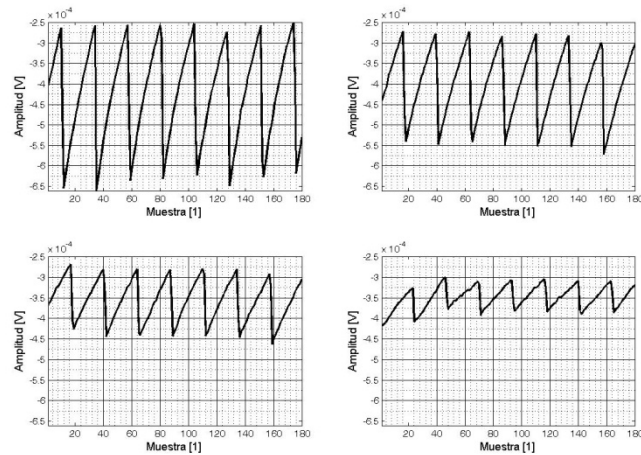


Figura 4.17 Rampa aplicada como señal de directa de amplitud variable

4.2 Método dinámico

De la ecuación 2.14 se puede ver que existen varias frecuencias de resonancia para cada modo de vibración. Los valores de γ_n se obtienen solucionando la ecuación 2.19. Los demás parámetros permanecen constantes. También se nota que para el primer modo, la amplitud de la vibración es máxima, por lo que analizando al trampolín en ese modo podemos obtener analíticamente el valor de la frecuencia de resonancia fundamental f_1 .

Si ahora construimos un dispositivo que nos permita medir la frecuencia de resonancia de un trampolín y conocemos todas las propiedades físicas de éste (E , ρ , l_e , y t) podemos entonces determinar experimentalmente el valor de γ_1 para así compararlo con el analítico. Por otra parte, si conocemos todas las propiedades físicas del trampolín menos el módulo de Young, E , podemos utilizar el valor analítico de γ_1 y medir f_1 para obtenerlo. Una medición indirecta más, consiste en conocer el módulo de Young, pero en este caso no conocemos la masa del trampolín m , pero sí sus dimensiones (t , w y l_e). Con esto podemos desarrollar un dispositivo que consista de un trampolín cubierto con una película que absorba cierto compuesto y, si consideramos que al absorberlo las dimensiones t , w y l_e prácticamente no cambian, podemos medir el cambio en la masa Δm ya que es inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia de resonancia f_1 , para así determinar la masa del componente que se absorbió.

Para lograr esto se utilizaron diferentes métodos dinámicos: se utilizó un barrido en frecuencia (*chirp*), ruido blanco y un impulso que simula el efecto fotoacústico, para fines preliminares. Además, se experimentó con una señal de directa modulada por una senoidal a la frecuencia de resonancia del trampolín, para comparar los resultados con el método estático. Todos los métodos dinámicos se compararon con los obtenidos con un analizador de espectros B&K.

En las siguientes figuras se muestran los programas hechos en MATLAB que permitieron la implementación del método dinámico.

La figura 4.18 muestra el espectro del trampolín medido con un analizador de espectros B&K. la medición se realizó para obtener la función de transferencia. Los datos almacenados en el analizador se pasaron a la PC por medio del puerto serial. Ya en la PC, los datos se procesaron con MATLAB y se determinó la frecuencia de resonancia y el ancho de banda del trampolín. En la figura también se aprecia la interfaz gráfica creada para una mayor facilidad al procesar y adquirir las señales. Del lado izquierdo se presentan la frecuencia de resonancia en Hz y el factor de calidad. En la esquina superior derecha se encuentran los botones para abrir una medición y salvar los resultados obtenidos. En la esquina inferior derecha están los botones para ajustar el zoom de la gráfica del espectro. El botón más grande sirve para procesar la medición.

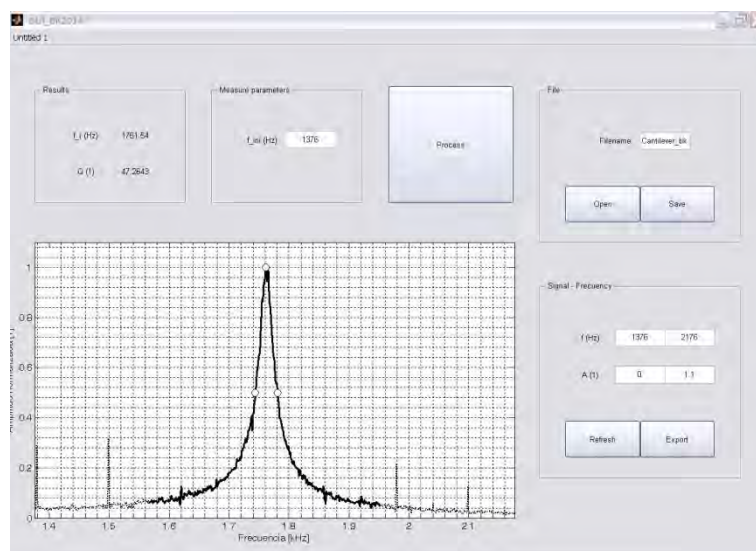


Figura 4.18 Espectro obtenido con el analizador B&K

En esta figura, figura 4.19, se presenta la medición en el dominio del tiempo s (arriba) y el espectro asociado (abajo). La medición en tiempo se normalizó, al igual que el espectro. Para el espectro se promedió la medición en varias secciones, por lo que se pueden ver dos gráficas, una más suave que la otra (la promediada). Al igual que en la figura anterior, en la esquina superior izquierda se presentan la frecuencia de resonancia y el factor de calidad. Del lado derecho también se encuentran los botones para ajustar el zoom en la gráfica de tiempo y en el espectro, así como los botones para abrir mediciones antiguas y salvar resultados. En la parte central superior se encuentran los campos para fijar los parámetros que definen al barrido en frecuencia (*chirp*), tales como frecuencia inicial del barrido, frecuencia final, frecuencia de muestreo, duración, número de repeticiones de la señal y número de secciones en las que se dividirá para promediarla.

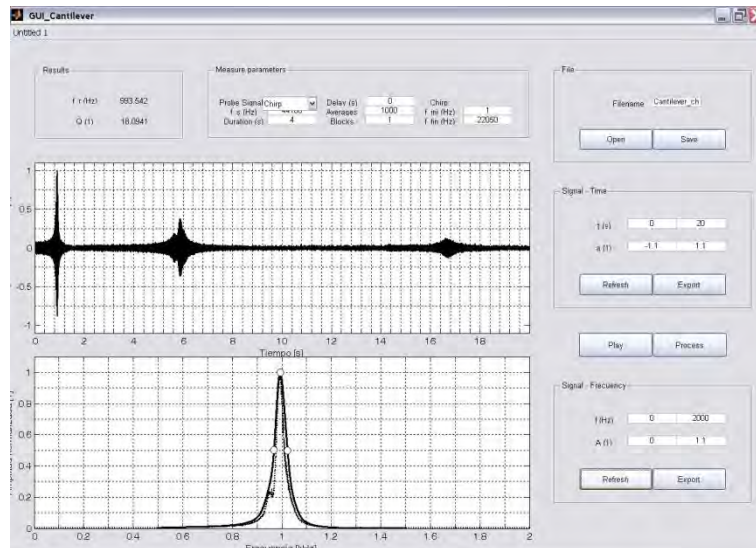


Figura 4.19 Medición con barrido en frecuencia

La figura siguiente, figura 4.20, es muy similar a la anterior, ya que se trata de la misma interfaz gráfica, pero la señal de excitación ahora es ruido blanco, el cual se selecciona de un menú dentro de la interfaz. En la gráfica de tiempo se nota muy bien que se trata de ruido. En la gráfica del espectro se puede ver más claramente la diferencia entre el espectro total y el promediado.

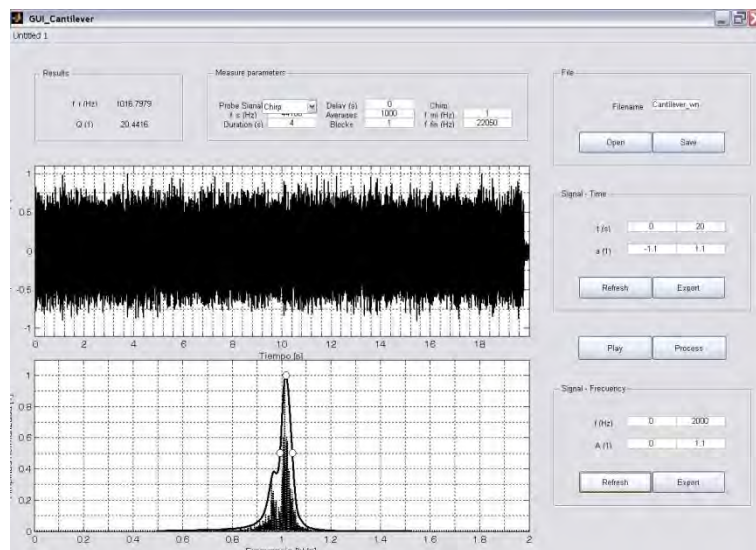


Figura 4.20 Medición con ruido blanco

La figura 4.21 muestra en la gráfica de tiempo la medición realizada por secuencias MLS, las cuales simulan la excitación de un impulso. El programa para generar la secuencia y capturar la respuesta fue realizado por el Dr. Felipe Orduña Bustamante en el CCADET de la UNAM. Este tipo de excitación es importante ya que la excitación mecánica (fotoacústica) es precisamente un impulso. Los botones del lado derecho de la interfaz gráfica son para ajuste de zoom y salvar resultados. Existe un botón de

procesamiento y del lado superior izquierdo también se presentan la frecuencia de resonancia y el factor de calidad.

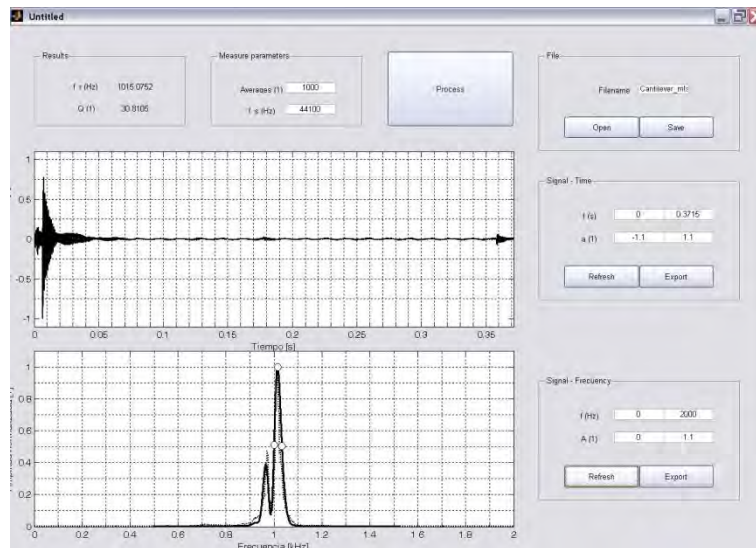


Figura 4.21 Medición con secuencia MLS

En la figura 4.22 se distinguen 3 señales en cada gráfica. En la primera gráfica, dominio del tiempo, la señal negra es la señal de excitación, que consiste de una señal de directa cuya amplitud aumenta cada segundo y está modulada por una senoidal cuya frecuencia es cercana a la frecuencia de resonancia del trampolín. Las señales azul y roja son las obtenidas del sensor de posición después del circuito asociado, es decir, las variaciones en el eje y y x . La gráfica de abajo corresponde al valor RMS de la señal de excitación en cada intervalo donde la amplitud de la señal de directa es constante, vs el valor RMS de cada eje (azul y roja) en los mismos intervalos y la señal negra la suma geométrica de éstas dos últimas. Con esto se obtuvieron, para este caso, 30 puntos, los cuales nos describen el desplazamiento de la punta del trampolín en cada eje con respecto al valor RMS de cada intervalo, esto, con fines de compararlo con el método estático.

Este método se utilizó así ya que la tarjeta de audio de la PC no reproduce señales de directa, por lo que se optó por la modulación. Además se tiene un control en cada instante de la medición y el procesamiento, cosa que no se obtiene con el generador de señales. Otra ventaja es que se puede programar un medición para ver el efecto de histéresis en el trampolín, que al parecer no es muy grande pero sí existe, es decir, tiene memoria.

Dicho tipo de medición no se estudió a fondo pero se presentaron resultados interesantes, ya que todo se basa en la definición de valor RMS, que nos dice que es el valor de una fuente de directa al que equivale una señal aleatoria en el tiempo. Obviamente, no se presentan los mismos resultados si la frecuencia de la senoide con la que se modula es diferente a la frecuencia de resonancia del trampolín. El cambio sólo se notó en la amplitud de la señal medida, aunque un estudio más elaborado es recomendable.

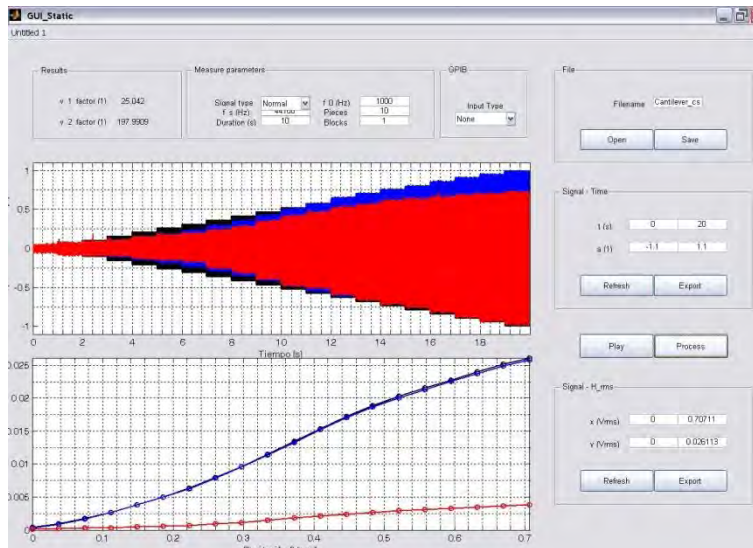


Figura 4.22 Medición con señal de directa modulada

La infraestructura usada en este método fue la misma que en el método estático. Las mismas bases, el mismo sensor, el mismo circuito, el mismo láser de medición y el mismo láser de excitación. Por lo tanto, el mismo trabajo puede usarse en dos caminos para llegar a resultados similares y comparar.

4.3 Validación del sistema

Para validar el sistema construido se hizo un experimento para determinar experimentalmente el módulo de Young de los trampolines. Para ello utilizamos el método dinámico, para poder comparar los resultados de las diferentes mediciones. Cabe señalar nuevamente que los tres primeros modos de vibración son los más influyentes en el movimiento del trampolín. Por lo tanto utilizamos trampolines piezoeléctricos para poder excitarlos eléctricamente. La tabla 4.1 muestra las cantidades físicas que describen a los trampolines piezoeléctricos. La tabla 4.2 muestra los resultados de las mediciones realizadas con ruido blanco y chirp como señales de excitación, también se muestran los resultados del analizador de espectros.

Un arreglo de 11 trampolines se implementó para reducir el error en medición del módulo de Young. Cada uno se fijó a diferente longitud y se obtuvo el módulo de Young general, a partir de las 11 frecuencias de resonancia medidas.

<i>Beam</i>	<i>Length [μm]</i>	<i>Width [μm]</i>	<i>Thick [μm]</i>	<i>Mass [mg]</i>
<i>A</i>	15700	1570	600	111.94
<i>B</i>	15710	1580	590	110.09
<i>C</i>	15710	1580	590	110.44
<i>D</i>	15650	1580	590	110.47
<i>E</i>	15740	1580	600	113.97
<i>F</i>	15680	1580	590	112.12

G	15690	1580	590	111.45
H	15690	1580	610	114.26
I	15690	1600	610	116.22
J	15680	1590	590	110.98
K	15710	1580	620	112.43

Tabla 4.1 Características físicas de las barras de BaTiO₃

Utilizando una versión de la ecuación 3.18 obtenemos que:

$$f_r = ml_e^{-2} \quad (4.1)$$

Con esta ecuación podemos construir una recta y así minimizar el error en la medición. Entonces, la pendiente quedará expresada por:

$$m = \frac{\gamma_1^2 t}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{3\rho}} \quad (4.2)$$

Entonces, de esta última ecuación, una vez obtenidas las frecuencias de resonancia y la pendiente de la recta ajustada, podremos calcular el módulo de Young mediante:

$$E = \frac{48\pi^2 \rho}{\gamma_1^4 t^2} m^2 \quad (4.3)$$

Las señales de excitación fueron una chirp y ruido blanco. Los resultados se compararon con los de un analizador B&K2034. Tanto la señal de excitación como la capturada se filtraron con un filtro Butterworth, cuyas frecuencias de corte son de 500 y 20000 [Hz], para quitar los efectos de las señales de corriente directa y de alta frecuencia.

Trampolín	l_e [μm]	f_r [Hz]		
		Chirp	Ruido	Analizador
A	12000	1821.1	1837	1829.2
B	10000	2569.3	2619.7	2623
C	12000	1591.1	1632.2	1694.4
D	6000	6949.2	7010.8	7011
E	6000	8198.8	8262.9	8249.6
F	10000	2399.4	2436.3	2430.9
G	8000	4565	4645.4	4641
H	8000	4004.1	4082.3	4096.1
I	8000	4507.3	4554.7	4546.5
J	10000	2450.5	2474.8	2463.2
K	12000	1760.3	1772.2	1761.5

Tabla 4.2 Mediciones

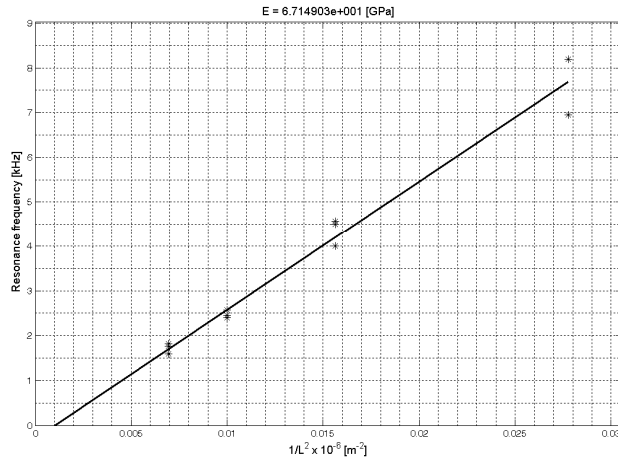


Figura 4.23 Recta de ajuste para las mediciones con chirp

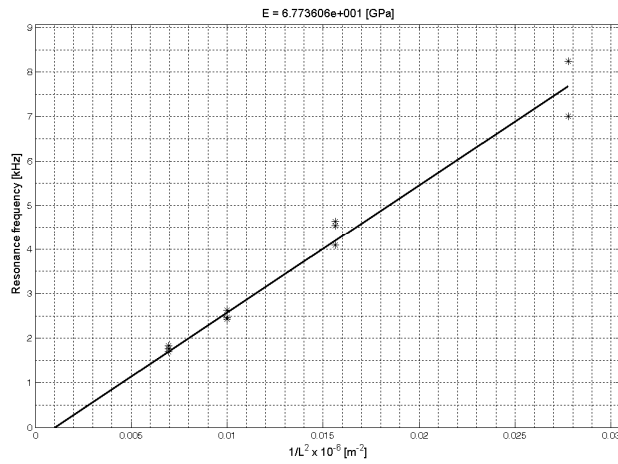


Figura 4.24 Recta de ajuste para las mediciones con el analizador

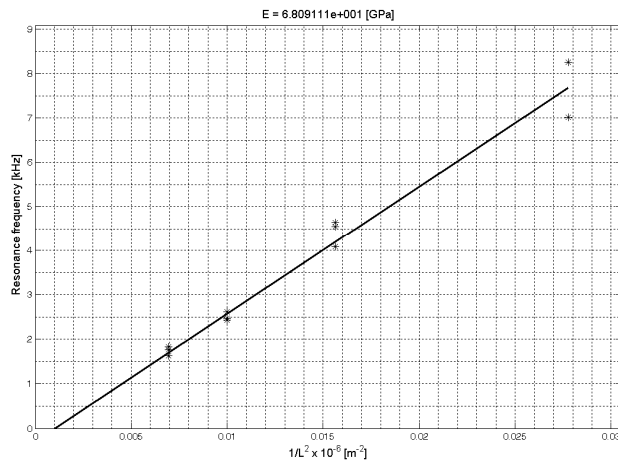


Figura 4.25 Recta de ajuste para las mediciones con ruido blanco

En la tabla 4.3 se muestran los resultados obtenidos después de hacer el ajuste de rectas correspondiente.

<i>Método</i>	<i>Recta de ajuste</i>	<i>Módulo de Young [GPa]</i>
<i>Chirp</i>	$259130[\text{Pa}^{1/2}] \text{L}^{-2}[\text{m}^{-2}] - 294[\text{Pa}^{1/2} \text{m}^{-2}]$	67.149
<i>Ruido blanco</i>	$260940[\text{Pa}^{1/2}] \text{L}^{-2}[\text{m}^{-2}] - 276[\text{Pa}^{1/2} \text{m}^{-2}]$	68.091
<i>Analizador</i>	$260260[\text{Pa}^{1/2}] \text{L}^{-2}[\text{m}^{-2}] - 264[\text{Pa}^{1/2} \text{m}^{-2}]$	67.737

Tabla 4.3 Resultados

Los resultados de este experimento se comentan en el último capítulo de esta tesis.

Una vez validado el arreglo, se realizaron mediciones pero excitando fotoacústicamente. Los resultados de estas mediciones se presentan mediante la siguiente gráfica:

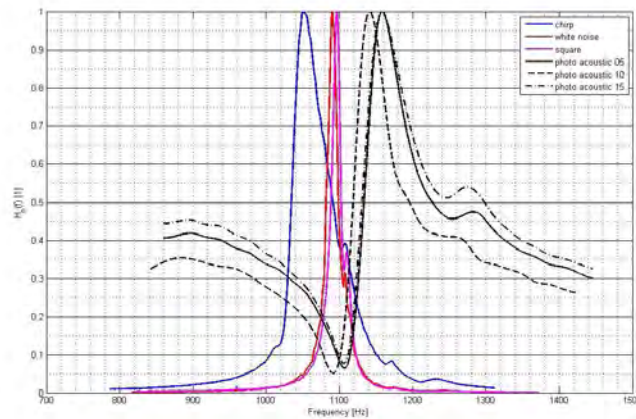


Figura 4.26 Gráficas de los diferentes métodos de medición

En la gráfica anterior se muestra en azul la medición con chirp, en rojo la medición con ruido blanco, en morado la medición con un pulso cuadrado de baja frecuencia (tratando de simular un impulso) y en negro se presentan diferentes mediciones excitando fotoacústicamente. Los pulsos se utilizaron a diferentes frecuencias de repetición: 5, 10 y 15 pulsos por segundo. Las frecuencias de resonancia se ven en la tabla 4.4. Los resultados se discuten en el último capítulo de esta tesis.

<i>Excitación</i>	<i>f_r [Hz]</i>
Chirp	1049.9
Ruido blanco	1090.1
Pulso cuadrado	1096.6
Fotoacústico (5 [Hz])	1158.2
Fotoacústico (10 [Hz])	1141.2
Fotoacústico (15 [Hz])	1158.2

Tabla 4.4 Frecuencias de resonancia medidas por los diferentes métodos

Una vez validada la implementación, se realizó el experimento con un arreglo de trampolines de silicio, de dimensiones muy pequeñas (mencionadas anteriormente). Lamentablemente no se pudieron obtener mediciones debido a que el laser de excitación destruyó los trampolines al intentarlo. Se tomó la decisión de usar un atenuador, pero se requieren nuevos trampolines, un poco más grandes. Debido al tiempo de construcción, no se pudieron realizar nuevas mediciones, por lo que ese trabajo se realizará a futuro.

Capítulo 5

Conclusiones

Contenido

Capítulo 5 Conclusiones	104
5.1 Capítulo 1	106
5.2 Capítulo 2	106
5.3 Capítulo 3	107
5.4 Capítulo 4	107
5.5 Conclusiones generales	108

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

5.1 Capítulo 1

Se comentó brevemente que los MEMS son dispositivos que han evolucionado rápidamente a lo largo de su relativa reciente existencia. Tal desarrollo ha permitido la baja en los costos de producción, a la par del perfeccionamiento de técnicas de construcción de circuitos integrados. Por otro lado, se mencionaron las propiedades físicas de estos dispositivos, de las que podemos recalcar que debido a su tamaño los consumos de energía son también pequeños, ya sea en dispositivos de sensado o en actuadores. También se mencionó que debido a la naturaleza de su construcción, la integración de partes mecánicas (actuadores y sensores) con circuitos es muy sencilla, con lo que se logra en un solo chip un dispositivo completo con entradas y salidas de variables físicas.

En este capítulo se justificó el hecho de pensar en esta tecnología como una alternativa con grandes ventajas para sustituir muchas de las aplicaciones actuales, de mejorar las ya existentes y finalmente de desarrollar nuevas aplicaciones que anteriormente se veían limitadas por las propiedades físicas de los materiales o por el costo de producción.

5.2 Capítulo 2

Este capítulo engloba la gran mayoría de los procesos involucrados con la construcción de dispositivos MEMS. Se habló de procesos generales que se usan en circuitos integrados, de procesos establecidos para lograr el diseño de máscaras y de procesos para remover material (tales como los micromaquinados de superficie y de volumen) y también se habló de procesos bien establecidos y estandarizados para la construcción de MEMS, como lo son los procesos MUMPs.

Se comentaron las características básicas de dichos procesos otorgando al lector un panorama de su evolución y de la diversidad de producción con la que se cuenta actualmente.

5.3 Capítulo 3

En este capítulo se pretendió explicar a detalle tres temas: el comportamiento de un trampolín de dimensiones pequeñas, la manera en que una señal óptica puede transformarse en otra variable física como una onda mecánica (acústica) y la forma en que esta onda mecánica se propaga en un medio.

El primer tema ayuda a la comprensión del diseño de un MEMS de tipo trampolín. El análisis a detalle del comportamiento del trampolín puede realizarse en forma similar al estudiar puentes o membranas. Los resultados serán diferentes pero similares, ya que se consideran más condiciones de frontera lo cual cambiará la solución matemática de la ecuación del trampolín

El segundo tema abarcó un análisis profundo del efecto fotoacústico. En él se plantean dos tipos de efecto fotoacústico: el efecto fotoacústico en la capa de gas que rodea el material de excitación y el efecto fotoacústico por expansión y compresión del material excitado. En el primero se generan ondas mecánicas de baja amplitud y en el segundo se generan ondas mecánicas de mayor amplitud. En este tema se justificó que un pulso corto, temporalmente hablando, produce mayores cambios de presión y que un pulso angosto, espacialmente hablando, produce mayores cambios de presión. Con esto, justificamos que el láser de excitación debe de estar lo mejor enfocado posible y se deben hacer incidir pulsos cortos para lograr excitar con mayor amplitud al trampolín.

En el tercer tema se explica brevemente la forma en la que la onda generada se propaga en el medio. Esto se abarcó porque con esto terminamos de relacionar la entrada con la salida del sistema. Con estos resultados puede hacerse un análisis más profundo, midiendo únicamente la entrada y la salida, relacionando una función de transferencia.

5.4 Capítulo 4

Los valores medidos en el experimento del módulo de Young están dentro de los valores consignados por los fabricantes para el PbTiO_3 PbZrO_3 [11], $E = 6.63$ a 7.5×10^{10} Pa pero con una densidad mayor, entre 7800 a 7900 kg/m^3 . Tomando como valor patrón el módulo de Young determinado a partir de las mediciones con el analizador de espectros, tenemos que el error porcentual de las mediciones realizadas es de 0.868551962 [%] para las mediciones con barrido en frecuencia y de 0.523068083 [%] para las mediciones realizadas con ruido blanco. Las inexactitudes mayores ocurren en la medición de las frecuencias de resonancia y la longitud de los trampolines. Este error se debe a la manera

en que se colocaron los trampolines sobre un bastidor, de tal manera que hay imprecisión en colocarlos a una distancia determinada. Si bien nuestro error no es muy alto, determinamos que se debe principalmente a la incertidumbre de medir la longitud de la barra montada como trampolín. Pero el objetivo de lograr una técnica de medición para el módulo de Young en pequeñas estructuras milimétricas se alcanzó razonablemente bien. Por lo tanto, la implementación es válida para la medición de la frecuencia de resonancia de trampolines.

Una vez validada la implementación se investigó si se obtendrían los mismos resultados al excitar con el láser pulsado. Los resultados de la tabla 4.4 muestran que la diferencia más grande entre las mediciones al excitar eléctricamente y al excitar fotoacústicamente es de 108.3 [Hz], lo que representa un 9.35 [%] de error entre las mediciones, el cual se puede reducir si se hacen varias mediciones para diferentes longitudes de trampolín. Si bien el error es significativo, tenemos que considerar el error de las mediciones al excitar eléctricamente, que fue de 0.87 [%] el más grande. Por lo tanto tenemos un error de aproximadamente un 10 [%]. Aún con este error, la precisión en las mediciones puede mejorarse bastante si el sistema se integra. Además, la resolución del instrumento es de 0.1 [Hz], por lo que podemos tomar valores relativos entre frecuencias de resonancia y estimar sin mucha incertidumbre los valores de interés, como se demostró para el módulo de Young. Por lo tanto, la implementación con excitación fotoacústica es válida para la medición de frecuencia de resonancia de trampolines.

La misma medición se realizó para los trampolines de silicio pero, a pesar que se lograron algunas mediciones, después de cierto tiempo de excitación, el laser pulsado destruye los trampolines. Hay dos posibles razones por las cuales pasa esto. La primera es que el laser pulsado calienta demasiado al trampolín y va devastando el silicio con el que se hizo, por lo que el trampolín se destruye. La segunda es que el trampolín de silicio no soporta estar en resonancia por mucho tiempo y eventualmente se destruye. De acuerdo a las mediciones y a las bibliografías consultadas, la segunda razón es poco probable ya que el silicio tiene propiedades mecánicas que no validan esa teoría. Por lo tanto, asumimos la primera razón, aunque se necesita hacer más estudios sobre eso.

5.5 Conclusiones generales

A lo largo de este trabajo puede entenderse el concepto de los MEMS a grosso modo pero también se puede detallar su estudio a diferencia de otros trabajos, ya que se abarca desde una perspectiva contextual, una perspectiva de análisis, diseño y fabricación para finalmente explicar una forma de medición y validación del sistema que se desee implementar.

Como futuros trabajos se puede profundizar en el análisis matemático de un puente o de una membrana y comparar resultados con el análisis del trampolín. También se puede profundizar en los procesos más adecuados de fabricación para diseños particulares. Por otro lado, se puede hacer mayor investigación en métodos de medición que permitan validar los prototipos. En fin, el campo de los MEMS es tan amplio que este trabajo solo englobó los temas más trascendentales que nos permitirán tener un panorama amplio sobre esta tecnología.

Bibliografía

Contenido

Bibliografía 111

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bakri-Kassem M., Mansour, R. R., “High Tuning Range Plate MEMS Variable Capacitors with Arrays of Supporting Beams”, MEMS 2006, Istanbul, Turkey, 22-26, January 2006, IEEE, (2006)
- [2] Bakri-Kassem, M., Mansour, R. R., “An Improved Design for Plate MEMS Variable Capacitors”, IEEE MTT-S Digest, pp.865-868, (2004)
- [3] Balanis, C., “Advanced Engineering Electromagnetics”, USA: John Wiley & Sons, (1989)
- [4] Baxter, L., “Capacitive Sensors: Design & Applications”, New York: IEEE Press, (1997)
- [5] Carrizosa, G., “Conmutador MEMS resonante para la banda x”, Tesis para obtener el grado de Ingeniero, México: Facultad de Ingeniería UNAM C.U., (2007)
- [6] Carter, J. et al, “PolyMUMPs Design Handbook”, Revision 11.0, USA: MEMSCAP Inc., (2005)
- [7] Chowdhury, S., Ahmadi, M. Miller, W.C. “Pull-In Voltage Calculations for MEMS Sensors with Catilevers Beams”, IEEE, (2005)
- [8] Dec, A., Suyama, K. “Micromachined Electro-Mechanically Tunable Capacitors and Their Applications to RF IC’s”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol 46, No 12, DECEMBER, pp. 2587-2596, (1998)
- [9] Gardner, J., et al., “Microsensors MEMS and Smart Devices”, England: John Wiley & Sons, (2001)
- [10] He, S., Mrad, R. B., “A Novel MEMS Tunable Capacitor, International Conference on MEMS, NANO and Smart Systems”, IEEE, (2004)
- [11] Herman, D., Gaitan, M., DeVoe, D., “MEMS Test Structures for Mechanical Characterization of VLSI Thin Films”, SEM Conference, Portland Oregon, (2001)
- [12] Hoelen, C., de Mul, F. “A New Theoretical Approach to Photoacoustic Signal Generation”, Acoustical Society of America, Vol. 106, No.2, August, pp.695-706, (1999)
- [13] Hoivik, N. et al. “Digitally Controllable Variable High-Q MEMs Capacitor for RF Applications”, IEEE MTT-S Digest, pp.2115-2118, (2001)
- [14] Hsu, F.-R., “MEMS Packaging”, UK: The Institution of Electrical Engineers, (2004)
- [15] <http://www.scribd.com/doc/17325706/smardust>
- [16] Ionis, G., Dec, A., Suyama, K. “A Zipper-Action Differential Micro Mechanical Tunable Capacitor”, IEEE, pp.29-32, (2002)
- [17] Ionis, G., Dec, A., Suyama, K. “Differential Multi-Finger MEMS Tunable Capacitors for RF Integrated Circuits”, IEEE MTT-S Digest, pp.345-348, (2002)
- [18] Kaltenbacher, M., “Numerical Simulation of Mechatronics Sensors and Actuators”, Germany: Springer, (2004)

- [19] Kiesewetter, L., Zhang, J.-M., Houdeau, D., Steckenborn, A., "Determination of Young's moduli of micromechanical thin films using the resonance method", *Sensors and Actuators A*. pp.153-159, (1992)
- [20] Kikukawa, A., Koyanagi, H., Etoh, K., Hosaka, S. "In-Line Optical Lever System for Ultrasmall Cantilever Displacement Detection", *Japan Journal of Applied Physics*, Vol.39, No.4, April, pp.1885-1889, (2000)
- [21] Kollias, A. T., Avaritsiotis, J. N., "Time domain simulation and measurements for piezoelectric biomorph, Elsevier [revista electrónica], disponible en www.sciencedirect.com, (2004)
- [22] Li, D., Scnapp B. "Projecting two-axis nanometer scale displacement of microscopic beads onto a quadrant photodetector with a laser beam", *Review of Scientific Instruments*, Vol. 68, No.10, October, pp.3920-3921, (1997)
- [23] Lyshevsky, S., "Nano and Micro Electromechanical Parts Systems", Second Edition; USA:CRC Press, (2005)
- [24] Rosencwaig, A., Gersho, A. "Theory of photoacoustic effect with solids", *Journal of applied Physics*, Vol. 47, No1, January, pp.64-69, (1976)
- [25] Sankaranarayanan, J., Behera, M., Aluru, N., Mayaram, K. "Accuracy Issues in a High-Level Model for MEMS Varactors", *IEEE*, pp.144-148, (2003)
- [26] Suzuki, H., "Resonance Frequencies and loss factors of various single-degree-of-freedom systems", *Journal of Acoustical Society of Japan (E)* Vol.21, No.3, pp.163-166, (2000)
- [27] Svend G., Harlufsen, H. "Digital Filter vs FFT Techniques for Dampning Measurments", *Sound and Vibration*, March, (1990)
- [28] Vekatesh, C., Pati, S., Bhat, N., Pratap, R. "A torsional MEMS Varactor with Widwe Dynamic Rage and Low Actuation Voltage", *IEEE*, (2003)
- [29] G. Bell. "art. XXXIV on the production and reproduction of sound by light". *Am. J. Sci.* 20, 305-324, (1880)
- [30] R. M. White. "Generation of elastic waves by transient surface heating". *J. Appl. Phys.*, 34 p.p. 3359, (1963),
- [31] J. G. Parker, "Optical absorption in glass: investigation using an acoustic technique" *Appl. Opt.* 12 2974 (1973).
- [32] Rosencwaig. "Photoacoustic Spectroscopy: A New Tool for Investigation of Solids". *Anal. Chem.* 47 (6), 593A-604A, (1975).
- [33] U. Zammit, M. Marinelli, R. Pizzoferrato, F. Scuderi and S. Martelluci. "Photoacoustics as a technique for simultaneous measurement of thermal conductivity and heat capacity" *J. Phys E:Sci. Instrum.* 21, 935-937, (1988)
- [34] G. B. Cristison and H. A. MacKenzie. "Laser Photoacoustic detection of phycological glucose concentrations in human whole blood" *Medical and Biological Engineering & Computing*, 284-290, (1993).
- [35] Hee K. Park. Dongsik Kim and Costas P. Grigoropoulos, "Presure generation and measurement in the rapid vaporization of water on a pulse-laser heated surface". *J. Appl. Phys.* 80(7), 4072-4081, (1996)
- [36] Scruby C.B., Dewhurst R.J., Hutchins D.A., and Palmer S.B. "Quantitative studies of thermally generated elastic waves in laser-irradiated metal" (1980) , *J. Appl Phys.*, 51 (12), p.p. 6210.
- [37] H. M. Lai and K. Young "Theory of the pulsed optoacoustic technique". *J. Acoust. Soc. Am.* 72(6), 2000-2007, (1982)

- [38] C. Tam and H. Coufal. "Photoacoustic generation and detection of 10 ns acoustic pulses in solids". (1983), *Appl. Phys. Lett.* 42 (1).
- [39] J. O. Tocho, F. Cussó, R. Ramírez and J.A. Gonzalo, " Laser induced photoacoustic effect during ferroelectric phase transitions". *Appl. Phys. Letter.* (1991), 59, (14).
- [40] Rose L.R.F. "Point-source representation for laser-generated ultrasound". (1984), *J. Acoust. Soc. Am.* 75 p.p. 723.
- [41] Michael M. Farrow, Roger K. Burnham, Max Auzanneau, Steven L. Olsen, Neil Purdie and Edward M. Eyring. "Piezoelectric detection of photoacoustic signals". *App. Opt.* 17 (7), 1093 (1978).
- [42] G. Rousset and F. Lepoutre. "Influence of thermoelástico bending on photoacoustic experiments related to measurements of thermal diffusivity of metals." *J. Appl. Phys.* 54(5), 3283, (1983).
- [43] M. Villagrán Muniz, C. Garcia-Segundo, H.F. Ranea-Sandoval, C. Gorzaga, G.M. Bilmes "Photoacoustic analysis of stimulated emission in pulsed dye laser", *Appl. Phys. B.* 61, 361 (1995)
- [44] Florian R, Pelzl J, Rosenberg M, Wernhardt R, Vargas H. "Photoacoustic detection of phase transitions". *Physica Status Solidi A*, vol.48, no.1, 16 July 1978, pp.K35-8
- [45] W. Jackson y N. M. Amer. "Piezoelectric photoacoustic detection:Theory and experiment". (1980), *J. Appl Phys.*, 51-6 p.p. 3343.
- [46] A.C. Tam. "Applications of photoacoustic sensing techniques". *Reviews of Modern Physics*, 58 (2), (1988).
- [47] J. Etxebarria, S. Uriarte, J. Fernández, M.J. Tello and A. Gómez-Cuevas. "Piezoelectric photoacoustic detection of first and second-order phase transition". (1984), *J. Phys.C: Solid State Phys.* 17, p.p. 6601.
- [48] Nagele M, Sigrist MW. "Mobile laser spectrometer with novel resonant multipass photoacoustic cell for trace-gas sensing". *Applied Physics B-Lasers & Optics*, B70, (6), pp.895-901, (2000).
- [49] Ferber AM, Olckers P, Rogne H, Lloyd MH. "A miniature silicon photo-acoustic detector for gas monitoring applications". *Measurement & Control*, 34, (2), pp.44-46, (2001).
- [1] Rosencwaig and A. Gersho. "Photoacoustic effect with solids: A theoretical treatment". *Science* 190, 556-557, (1975).
- [50] Rosencwaig and A. Gersho. "Theory of the photoacoustic effect with solids". *J. Appl. Phys.*, 47 (1), 64-69, (1976).
- [51] Rosancwaig. "Photoacoustics and Photoacoustics Spectroscopy". *J. Willey N.Y.* (1980)
- [52] Richardson CJK, Ehrlich MJ, Wagner JW. "Measurements of nanometer scale interface diffusion between tungsten and niobium thin films using high frequency laser based ultrasound". *Journal of the Acoustical Society of America*, vol.107,(4), April 2000, pp.1987-93.

