



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE FÍSICA

DINÁMICA DE REDES Y COEVOLUCIÓN
EN SISTEMAS COMPLEJOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A:

GERARDO IÑIGUEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. RAFAEL ÁNGEL BARRIO PAREDES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL
DR. OCTAVIO MIRAMONTES VIDAL
DRA. CARMEN VAREA GILABERT



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO



posgrado en ciencias físicas
u n a m

Estimado(a) Colega:

El Comité Académico del Posgrado en Ciencias Físicas en su sesión del 6 de noviembre del presente ha designado como Jurado del alumno **GERARDO IÑIGUEZ GONZALEZ** con número de cuenta **300693951**, para dictaminar si el trabajo desarrollado como tesis titulado: *“Dinámica de redes y co-evolución en sistemas complejos”*, dirigido por el Dr. Rafael Ángel Barrio Paredes, tiene los méritos para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA) conforme al plan de estudios 4057.

Propietario: Dr. Rafael Ángel Barrio Paredes

Recibí ejemplar fecha

Propietario: Dra. Julia Tagüeña Parga

Recibí ejemplar fecha

Propietario: Dr. Christopher R. Stephens Stevens

Recibí ejemplar fecha

Suplente: Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal

Recibí ejemplar fecha

Suplente: Dra. Carmen Varea Gilabert

Recibí ejemplar fecha

Atentamente.

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Ciudad Universitaria, D. F., a 6 de noviembre del 2009.

El Coordinador del Posgrado en Ciencias Físicas

Dr. Manuel Torres Labansat

“Everything should be made as simple as possible, but not simpler.”

Albert Einstein

“The map is not the territory.”

Alfred Korzybski

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi supervisor Rafael Barrio, quien me enseñó el valor de una misteriosa intuición y una curiosidad infinita; a mi tutor de licenciatura Pedro Miramontes, por mostrarme que la sabiduría puede ser benevolente y humilde; y a los profesores Kimmo Kaski y János Kertész, por su invaluable ayuda en el desarrollo de esta investigación.

Este trabajo no existiría sin el amor eterno y apoyo incondicional de mi madre y mi hermana, les debo más de lo que jamás podré lograr en esta vida. El deseo insaciable de conocer, siempre temperado por un propósito, es regalo de mi padre.

Es indispensable agradecer también a mi mejor amigo Daniel Arévalo, quien me mostró a través de los años que los hermanos no siempre tienen la misma sangre; y a mi mejor amiga Tatiana Niembro, por recordarme día a día que la vida puede ser vivida con pasión y esperanza.

Índice general

Introducción	5
I Dinámica de Redes	8
1. Redes, dinámicas no lineales y sistemas complejos: Nociones básicas	9
1.1. Representación y caracterización de redes	12
1.2. Dinámicas no lineales	23
1.3. Sistemas complejos	27
2. Estructura: topología de redes	31
2.1. Redes ordenadas	32
2.2. Redes al azar: modelo de Erdős - Rényi	34
2.3. Redes de mundo pequeño: modelo de Watts - Strogatz	37
2.4. Redes libres de escala: modelo de Barabási - Albert	40
2.5. Distribuciones de rango: la función tipo beta	43
3. Función: dinámica sobre redes	48
3.1. Difusión y caminantes aleatorios	49
3.2. Procesos de propagación	53
3.3. Dinámicas colectivas y sincronización	57
4. Detección de comunidades	61
4.1. El algoritmo de Lancichinetti - Fortunato - Kertész	64
II Coevolución en Sistemas Complejos	67
5. Interacción entre estructura y función: el concepto de coevolución	68

5.1. El marco teórico de coevolución	69
6. El problema de formación de opinión en sistemas sociales	73
6.1. Antecedentes del problema	75
6.2. El modelo de Zanette - Gil	77
7. El modelo coevolutivo de formación de opinión	83
7.1. Descripción del modelo	84
7.2. Cálculos numéricos	91
8. Análisis de campo medio	103
8.1. Campo medio para la microdinámica de formación de opinión	103
8.2. Campo medio para la macrodinámica de reconexión de la red	108
III Conclusiones y Apéndices	123
Conclusiones	124
A. Algoritmo para el modelo coevolutivo de formación de opinión	127
Bibliografía	129

Índice de figuras

1.1. Representación de diversas gráficas	14
1.2. Asortatividad en redes	19
2.1. Algunas redes ordenadas	33
2.2. Redes de mundo pequeño	38
2.3. Distribuciones de rango	45
3.1. Patrones de Turing	51
3.2. El modelo de Kuramoto	60
4.1. Comunidades y dendogramas	63
6.1. El modelo de Zanette - Gil	78
6.2. El modelo de Zanette - Gil en varias topologías de red	81
7.1. Las cerraduras cíclica y focal en una red social	89
7.2. Estado final del sistema como función del parámetro g para varios tamaños de red.	93
7.3. Estado final del sistema como función del parámetro g	94
7.4. Emergencia de comunidades	96
7.5. Escalamiento del estado final de la red con el tamaño N	98
7.6. Tamaño de las comunidades y el número de Dunbar	99
7.7. Microdinámica de formación de opinión sobre una red cuadrada	100
7.8. Asortatividad y disasortatividad en el sistema	101
8.1. La función de Brillouin y la fracción de agentes indecisos	108
8.2. Creación y destrucción de enlaces en la red	110
8.3. Cambio en la conectividad de la red	111
8.4. Los factores f	116
8.5. Triángulos y cuadrados en la red	119

8.6. Campo medio para la macrodinámica	121
--	-----

Resumen

El concepto de red se considera esencial en el entendimiento de la emergencia y sustentabilidad del comportamiento colectivo en diversos sistemas complejos estudiados en ciencias físicas, sociales, biológicas y económicas, por nombrar algunos ejemplos. No obstante, aunque éstos pueden ser representados por una simple gráfica, la caracterización precisa de enlaces y nodos en ella es usualmente bastante arbitraria, y por tanto cantidades básicas como la dimensión y métrica del espacio no están bien definidas, lo cual lleva a ambigüedades en el establecimiento de ecuaciones dinámicas que dicten el estado del sistema. En el presente trabajo se propone un marco teórico general para estudiar la dinámica de redes basado en el concepto de coevolución, que implica una retroalimentación entre las variables dinámicas definidas sobre los nodos y la propia estructura de la red. La utilidad y generalidad del marco teórico se muestra modelando un proceso de formación de opinión en sociedades humanas, en el cual se predice y caracteriza la formación de múltiples comunidades en la red independientemente de las condiciones iniciales y para una región amplia de los parámetros del modelo. A pesar de la aparente complejidad del proceso en cuestión, es posible hacer un análisis de campo medio que concuerda con los resultados numéricos.

Introducción

En los últimos años, la comunidad científica ha presenciado la abrumadora producción de trabajos donde el concepto de red se utiliza como el elemento básico y común para describir un conjunto extremadamente variado de fenómenos en la Naturaleza, entre los que se pueden mencionar las redes de amistad, colaboración científica o algún otro tipo de interacción social entre individuos, las redes organizacionales y de relaciones de negocios entre empresas, la Internet, la WWW y las redes de llamadas telefónicas, las redes neuronales, genéticas, metabólicas y de proteínas, y las redes de distribución de materiales, como la asociada al torrente sanguíneo en un ser vivo, o las redes eléctricas, de carreteras y de correo en una ciudad.

A pesar de las obvias diferencias entre todos estos fenómenos, su estudio dentro de un marco matemático presenta muchas similitudes, principalmente en lo que respecta a su estructura y función. Por un lado la estructura de todos estos sistemas corresponde a una red, es decir, a un conjunto de elementos constitutivos que interactúan o no entre sí de diversas maneras. Por el otro, su función corresponde a la evolución temporal de las características de tales elementos e interacciones, lo cual se puede describir por un sistema dinámico. Más aún, estas estructuras y funciones presentan muchas propiedades estadísticas y dinámicas en común que usualmente sólo se observaban en sistemas físicos, como la percolación y otras transiciones de fase, la invariancia de escala de ciertas distribuciones de probabilidad, y la aglomeración y formación de cúmulos en la red. En otras palabras, estos sistemas están generalmente formados por un conjunto muy grande de componentes interactuantes cuyo comportamiento colectivo no puede ser descrito sólo en términos de los elementos individuales, y con el tiempo se han llegado a conocer como sistemas complejos en la literatura de las ciencias físicas, biológicas y sociales.

La abstracción de los sistemas complejos a partir de los conceptos de estructura y función permite dos análisis extremos: podemos estudiar las características estáticas y dinámicas de la estructura de una red sin función, o la forma en que la función evoluciona en el tiempo en una estructura de red estática. Sin embargo, el caso intermedio en el cual la red tiene tanto estructura como función

resulta a la vez más interesante y complicado, pues la interacción explícita entre la topología de una red y un sistema dinámico definido sobre ella es un ingrediente teórico útil para describir las propiedades que emergen del comportamiento colectivo de las componentes del fenómeno. Dicho de otra forma, en el modelado de un sistema complejo se pueden definir variables dinámicas (desde ahora las denominaremos “variables de estado”) que describen el estado temporal de cada elemento (es decir, la función), las cuales hacen que la topología de la red (es decir, la estructura) cambie en el tiempo adaptándose a la función. Esta interacción entre estructura y función en un sistema complejo será referida de ahora en adelante como coevolución.

Hasta donde sabemos, el concepto de coevolución no ha sido aún considerado de manera formal y abstracta en un régimen matemático, más allá de los detalles específicos de cada fenómeno analizado. Por tanto, en el presente trabajo se propone un marco teórico general que utiliza la coevolución para explicar la existencia de algunas propiedades emergentes en un sistema complejo. Tal marco teórico se ejemplifica en detalle con un modelo particular para describir y caracterizar la emergencia de comunidades en un proceso de formación de opinión en una red social. A fin de consolidar la presentación de nuestros resultados, se incluye también una revisión detallada de los logros en el campo de Sistemas Complejos, con especial énfasis en el uso de los conceptos de estructura y función para la construcción de modelos, la detección de comunidades y la descripción de redes sociales.

En el primer capítulo se presentan los conceptos matemáticos básicos utilizados para estudiar a los sistemas complejos, tomados principalmente de las Teorías de Gráficas y Ecuaciones Diferenciales. En el segundo capítulo se revisan las propiedades de varios ejemplos arquetípicos de redes sin función: las redes ordenadas, aleatorias, de mundo pequeño y libres de escala. En el tercer capítulo se estudian tres dinámicas básicas que pueden ser definidas sobre cualquier estructura de red: la difusión y el problema de caminantes aleatorios, los procesos de propagación de enfermedades, y la sincronización en sistemas oscilatorios. En el cuarto capítulo se discute el concepto de comunidad en una red, así como algunos de los algoritmos computacionales para su detección más relevantes en la literatura.

En el quinto capítulo se introduce nuestro marco teórico de coevolución, y sus características generales básicas con respecto a la emergencia de propiedades en un sistema complejo. En el sexto capítulo se describen los antecedentes en el problema de formación de opinión en redes sociales, especialmente los modelos que ya consideran el concepto de coevolución. En el séptimo capítulo se introduce y analiza de forma numérica nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión, para ejemplificar cómo el régimen coevolutivo del marco teórico posibilita la emergencia de comunidades

en el sistema. En el octavo capítulo se realiza un análisis de campo medio para los procesos de formación de opinión y reconexión de la red fuera del régimen coevolutivo, donde las correlaciones entre las variables dinámicas del sistema se reducen a un mínimo. Finalmente, se enlistan algunas conclusiones de la investigación realizada, y se describe el algoritmo computacional de nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión.

Parte I

Dinámica de Redes

Capítulo 1

Redes, dinámicas no lineales y sistemas complejos: Nociones básicas

A fin de poder describir y predecir el comportamiento de un fenómeno de la Naturaleza desde un punto de vista científico, es conveniente abstraer sus propiedades dentro de un formalismo matemático cuyo éxito depende, en esencia, del grado de similitud entre los elementos estructurales, dinámicos y de interacción del fenómeno y sus correspondientes conceptos en el modelo. Entre las herramientas de abstracción a nuestra disposición, el formalismo de redes ha resultado de gran utilidad en los últimos años, con aplicaciones a sistemas físicos, sociales, biológicos, tecnológicos, económicos y semánticos, entre otros, principalmente por haber encontrado propiedades y comportamientos cuya forma específica no depende del sistema particular estudiado [1–5]. Parte del éxito de esta teoría se deriva de la generalidad de sus conceptos básicos, pues la *estructura* de un fenómeno se modela simplemente por una *red* donde los *nodos* representan las partes del sistema y los *enlaces* las posibles interacciones entre dichas partes. Además de la estructura, es fundamental considerar la *función* de la red, es decir, la forma en que propiedades medibles definidas sobre los nodos y enlaces cambian con el paso del tiempo, lo cual usualmente se aborda usando conjuntos de ecuaciones diferenciales o de diferencias con acoplamientos no lineales, conocidos como *sistemas dinámicos* en la literatura física y matemática [6–8].

Así, el fenómeno más general considerado por este formalismo es aquél que puede ser descrito por una o varias estructuras de red y funciones definidas sobre ellas, que nosotros denominamos un *sistema complejo*. En este trabajo se considera el caso en que las evoluciones temporales de las estructuras y las funciones de la red están *acopladas* entre sí, lo cual implica la existencia de *propiedades emergentes* (es decir, de comportamientos o propiedades del sistema que no pueden

ser explicados a partir del análisis individual de sus partes). Este proceso en que la estructura y la función producen propiedades emergentes a partir de una dinámica acoplada lo denominamos *coevolución*.

El formalismo de sistemas complejos puede introducirse de manera casi inmediata en la estructura conceptual de cualquier teoría en Física, aunque no haya sido considerado y analizado de manera explícita hasta hace algunas décadas. De manera arquetípica, un sistema físico es un conjunto de partículas en el espacio-tiempo interactuando entre sí y con el exterior a través de campos que definen un hamiltoniano para el sistema. El movimiento de las partículas se describe con variables dinámicas conjugadas (como la posición y el momento, o la energía y el tiempo) a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas conocidas como leyes de movimiento, las cuales normalmente se derivan de un principio de mínima acción. Si las interacciones decaen con la distancia, uno puede desprestigiar interacciones a largo alcance y definir una red de interacciones donde los nodos son las partículas y los enlaces son las interacciones entre partículas definidas por los acoplamientos en las leyes de movimiento. En otras palabras, la *estructura* de la red está dada por una configuración de partículas e interacciones, mientras que su *función* está determinada por el comportamiento de las variables dinámicas conjugadas.

En principio la estructura y la función de la red pueden interactuar entre sí, pues el estado de las variables dinámicas determina el tipo de interacciones que existen entre las partículas, y a su vez las interacciones presentes en un momento dado definen la forma de las leyes de movimiento que rigen a las variables dinámicas. Un ejemplo claro de cómo un sistema físico puede ser representado por una red se toma del campo de la Física del Estado Sólido [9], donde la estructura de un cristal se modela por una configuración periódica y estática de átomos. En el modelo de amarre fuerte utilizado para calcular la estructura de bandas electrónicas en un sólido, el hamiltoniano del cristal se aproxima por una suma de hamiltonianos atómicos localizados en diferentes sitios de una red, donde las funciones de onda son aproximadas por funciones de Wannier en los sitios atómicos. Si los electrones están fuertemente ligados a sus respectivos núcleos, el traslape es menor y por tanto podemos considerar a las funciones propias del hamiltoniano de una partícula como funciones propias del hamiltoniano del cristal. Así, se llega de forma natural a la idea de una red asociada al cristal donde cada átomo es un nodo y los enlaces representan las interacciones de intercambio y directas con los átomos vecinos. Esta idealización ha resultado muy útil en el análisis estadístico de los sólidos cristalinos y amorfos, pues ha sido fundamental para predecir y caracterizar efectos tan relevantes como las transiciones de fase y las propiedades de las excitaciones elementales en los materiales dieléctricos [10, 11].

La utilidad de los sistemas complejos como herramientas de descripción de fenómenos en la Naturaleza es particularmente clara cuando éstos presentan *auto-organización*, es decir, cuando los elementos individuales del sistema alcanzan, a través de sus interacciones, estados caracterizados por *propiedades emergentes* nuevas que trascienden las propiedades de las partes constitutivas del sistema. Estas propiedades emergentes dependen de las características de los elementos y sus interacciones, las condiciones de frontera con el exterior y las distintas escalas en las cuales existe el sistema. Por lo tanto, no pueden ser descritas a partir del análisis de los componentes por separado, y es necesario estudiar las interacciones presentes en todo el sistema a través de las distintas escalas.

Aunque aún no se tienen muchos avances en el análisis matemático formal de las propiedades emergentes, desde hace algunos años se reconoce de manera intuitiva que su presencia es común en los sistemas complejos, e incluso se considera como parte de su definición. Al variar la escala en que se observa un sistema complejo, desde las partes individuales hasta el sistema completo, se puede ver una *jerarquía emergente* donde las estructuras de los niveles altos son nuevas características globales que no pueden ser descritas a partir de interacciones locales en periodos largos de tiempo, pues los sistemas complejos en general presentan comportamientos caóticos [12, 13]. Esto implica que tales sistemas no pueden ser analizados en cada nivel de jerarquía por separado, ya que su evolución temporal depende del comportamiento del sistema a varias escalas. Bajo esta idea la coevolución es un concepto útil para describir la emergencia de patrones, pues tal interacción entre estructura y función implica que el número de grados de libertad del sistema puede cambiar, y por tanto el sistema complejo puede tener comportamientos cualitativamente distintos en cada escala.

Posiblemente la razón principal por la cual la teoría de sistemas complejos ha ganado tanta popularidad en los últimos años radica en que se ha mostrado la existencia de estas propiedades estadísticas emergentes en muchos sistemas fuera del ámbito de la Física, y ha unificado varios de ellos en cuanto a los modelos y propiedades requeridas para describirlos. En las ciencias sociales, por ejemplo, resulta ya común considerar a las comunidades de personas como redes donde los nodos representan a los individuos y los enlaces las posibles interacciones o relaciones entre ellos (ya sean de amistad, confianza o sexualidad, o de carácter profesional, político o financiero, entre otros) [2, 5]. Desde hace tiempo tales *redes sociales* han sido estudiadas de forma cuantitativa a partir de la aplicación de cuestionarios y el análisis comparativo de las respuestas de los individuos [14] a fin de determinar propiedades locales como la relativa importancia o centralidad de una persona en la red [15, 16]. Sin embargo, estos resultados son limitados debido al reducido tamaño de las redes utilizadas o por la ambigüedad presente en la asociación de números o intensidades a ciertos tipos

de relación entre personas, donde las respuestas de los individuos dependen en gran medida de su personalidad y los ambientes culturales, políticos y económicos en los que viven.

Para evitar este tipo de problemas, recientemente muchas investigaciones en sistemas complejos sociales han utilizado la gran cantidad de datos disponibles en la Internet, la WWW y otras redes tecnológicas de comunicación para obtener sistemas de tamaño considerablemente más grande, donde las interacciones pueden ser cuantificadas de forma más simple y directa (es decir, con un registro electrónico cuantificable), como la relación de colaboración entre investigadores basada en el número de artículos compartidos [17], o la relación de amistad asociada al número y duración de llamadas telefónicas entre personas [18], en los cuales las herramientas matemáticas de análisis estadístico (heredadas principalmente de teorías físicas) pueden usarse para describir propiedades estructurales y funcionales de estas redes, como la presencia de correlaciones y transiciones de fase de percolación [19]. Aunque uno debe ser cuidadoso al derivar conclusiones sociales o de comportamiento individual a partir de tales estudios, resulta convincente pensar que no sólo los sistemas físicos presentan propiedades emergentes dependientes de la escala; una red con un gran número de interacciones sociales puede ser descrita a partir de un pequeño número de variables globales, pues los individuos se comportan estadísticamente de manera equivalente a pesar de que sus variables microscópicas (basadas en la personalidad y fisiología característica, por ejemplo) sean muy diferentes.

Para poder profundizar en el estudio de algunas propiedades generales de los sistemas complejos y su aplicación a fenómenos particulares de la Naturaleza, tenemos que establecer formalmente ciertos conceptos y nociones básicas que son utilizadas con frecuencia en este campo de investigación. Por lo tanto, en la primera sección de este capítulo se presenta una pequeña introducción a la Teoría de Gráficas, el formalismo matemático usado para describir la estructura de una red. En la siguiente sección se describen las características usuales de los sistemas dinámicos, los cuales representan la función de la red. Finalmente, en la última sección se presenta la definición más general de un sistema complejo que concierne a nuestro trabajo, en la cual las evoluciones temporales de estructuras y funciones pueden interactuar entre sí para determinar el comportamiento macroscópico del sistema.

1.1. Representación y caracterización de redes

Históricamente, la Teoría de Gráficas fue iniciada por el matemático suizo Leonhard Euler en 1736 con su famosa solución del “problema de los puentes de Königsberg”, donde se cuestionaba la existencia de un camino cerrado que cruzara cada uno de los siete puentes de la ciudad prusa

solamente una vez¹. En vez de encontrar todos los posibles caminos y eliminarlos progresivamente hasta encontrar uno que cumpliera las restricciones del problema, Euler abstraigo la situación considerando cada parte de la ciudad como un nodo y cada puente como un enlace (los elementos básicos de una red o gráfica), y posteriormente demostró que el camino deseado no existía. De manera similar, la estructura de diversos fenómenos naturales, situaciones o sistemas puede representarse por una gráfica, donde las partes de dichos sistemas son los nodos, y las interacciones o relaciones entre partes son los enlaces [1,4]. Claramente, la forma en que uno define tales partes e interacciones tiene un efecto decisivo en la gráfica resultante y por tanto en la abstracción del fenómeno, por lo que es fundamental que estas definiciones se hagan a partir de las necesidades descriptivas del modelo. Desde la época de Euler (y en especial durante el siglo XX) la Teoría de Gráficas se ha desarrollado de manera extensiva, y diversas referencias [20–24] compilan los numerosos resultados y aplicaciones en ella. Las cantidades básicas para describir la topología de una gráfica que son relevantes para el presente trabajo son comunes en la literatura matemática y física, y se presentan a continuación.

1.1.1. Representación de redes

Una *gráfica* o *gráfica no dirigida* G se define como el par ordenado $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$, formado por el conjunto $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ de *nodos* (también llamados *vértices* o *puntos*) y el conjunto $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_E\}$ de *enlaces* (también conocidos como *bordes* o *líneas*) $e_k = (n_i, n_j)$ que unen a los nodos. Para enfatizar el *número de nodos* N y el *número de enlaces* E ,² la gráfica G se puede denotar por $G(N, E)$ o $G_{N,E}$ mientras que los nodos n_i se denotan por su orden i y el enlace e_k entre los nodos i, j por $e_{ij} = (i, j) = (j, i) = e_{ji}$, pues e_k es un par no ordenado. La forma usual de dibujar una gráfica consiste en representar los nodos por puntos o círculos y los enlaces por líneas entre tales puntos o círculos, como se muestra en la figura (1.1a). Siguiendo la convención de la literatura física en sistemas complejos, las palabras *gráfica* y *red* se utilizan como sinónimos en este trabajo, aunque tengan significados distintos en la literatura matemática³. Por otro lado, en una *gráfica dirigida* $\vec{G} = (\mathcal{N}, \vec{\mathcal{E}})$ cada enlace tiene una dirección definida (representada por una flecha, como se presenta en la figura (1.1b)), por lo que $\vec{\mathcal{E}}$ tiene como elementos pares ordenados y $(i, j) \neq (j, i)$. La gráfica no dirigida G (dirigida \vec{G}) se llama una *gráfica con pesos* $G^w = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$ ($\vec{G}^w = (\mathcal{N}, \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{W})$) si la intensidad de cada enlace e_{ij} se asocia a un *peso* $w_{ij} \in \mathcal{W}$, los cuales se esquematizan con diversos groesores de línea (de forma similar a lo mostrado en la figura (1.1c)). Finalmente, La gráfica no dirigida G (dirigida \vec{G}) se llama una *red geográfica* $G^c = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{C})$ ($\vec{G}^c = (\mathcal{N}, \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{C})$) si la posición

¹*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Euler, 1736).

²En la nomenclatura usual, N y E se denominan el *orden* y *tamaño* de G , respectivamente.

³En Teoría de Gráficas, una *red* es una multigráfica (una gráfica con posibles auto-enlaces o enlaces múltiples) con capacidades naturales asociadas a cada enlace y nodos fuente y sumidero definidos [23].

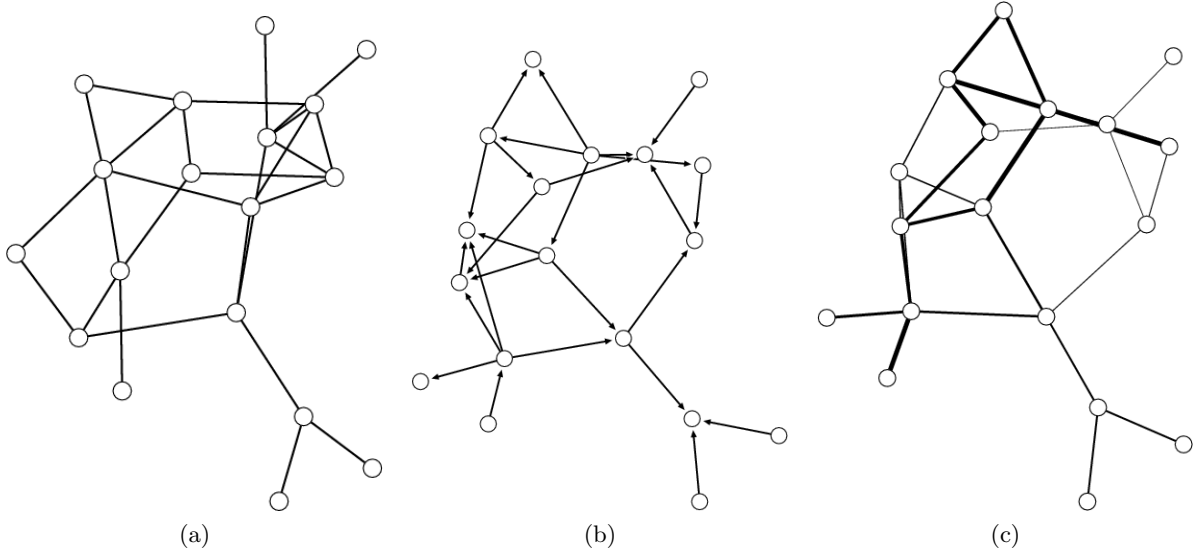


Figura 1.1: Representación de una gráfica (a) no dirigida, (b) dirigida y (c) con pesos, la cual tiene $N = 18$ nodos y $E = 26$ enlaces. En la gráfica no dirigida tanto los nodos como los enlaces son equivalentes entre sí, en la dirigida la dirección de cada enlace se muestra con una flecha, mientras que en la gráfica con pesos éstos se representan esquemáticamente con diversos gruesos de línea.

de cada nodo n_i se asocia a un conjunto de *coordenadas* $\vec{c}_i \in \mathcal{C}$ en un espacio n -dimensional \mathbb{R}^n .

La relación entre N y E también da una nomenclatura para la gráfica $G_{N,E}$. Si $E \sim \mathcal{O}(N^2)$ la gráfica es *densa*, mientras que si $E \sim \mathcal{O}(N)$ la gráfica es *rala*⁴. La gráfica $G_{N,E}$ se denomina *completa* (o *clique*) si todo par de nodos comparte un enlace, y se denota por \mathcal{E}_N . Si \mathcal{E}_N es no dirigida el número de enlaces en ella está dado por $E = \binom{N}{2} = N(N-1)/2$, mientras que si es dirigida $E = N(N-1)$, pues en el segundo caso $(i,j) \neq (j,i) \forall i,j \in \mathcal{N}$. En particular, el *clique* \mathcal{E}_3 se llama *triángulo*.

Existen varias definiciones que conciernen secuencias dentro de gráficas. Entre ellas, una *caminata* de longitud l es una secuencia alternante no vacía $n_0 e_0 \dots e_{l-1} n_l$ de nodos y enlaces en G tal que $e_i = (i, i+1) \forall i < l$. La caminata de menor longitud entre los nodos i, j se conoce como el *camino más corto* o *geodésica* entre i y j , mientras que un *ciclo* de longitud l es una caminata cerrada que empieza y acaba en el mismo nodo sin repetir algún enlace, y se denota por \mathcal{C}_l . Así, $\mathcal{C}_3 = \mathcal{E}_3$ es un triángulo y \mathcal{C}_4 un *cuadrado*, por ejemplo. Si existe una caminata entre cualquier par de nodos i, j en G la gráfica se denomina *conexa* o *conectada*; en caso contrario se tiene una gráfica *disconexa* o *no conectada*. Una gráfica $G' = (\mathcal{N}', \mathcal{E}')$ es una *subgráfica* de $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ y $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$.

Una forma útil de representar completamente una red se logra con la *matriz de conectividad* o *adyacencia* \mathbf{A} . En una gráfica no dirigida $G = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$, también llamada *gráfica simple*, \mathbf{A} es una

⁴Formalmente, estas definiciones sólo tienen sentido en familias de gráficas con $N \rightarrow \infty$, aunque de manera intuitiva se pueden utilizar en gráficas individuales [23].

matriz $N \times N$ con entradas

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}, \quad (1.1)$$

por lo que \mathbf{A} es una matriz simétrica donde los enlaces se representan por unos y la diagonal tiene ceros si no hay auto-enlaces. En una gráfica dirigida \mathbf{A} no es necesariamente simétrica, mientras que en una gráfica con pesos⁵ se tiene $A_{ij} = w_{ij}$ (ver la figura (1.1c)), donde la ausencia del enlace (i, j) se representa con el peso $w_{ij} = 0$. Para una gráfica simple G , las potencias (o *momentos*) de \mathbf{A} se relacionan directamente con el número de caminatas de longitud determinada entre un par cualquiera de nodos. Dada una longitud $l \in \mathbb{N}$,

$$(A^l)_{ij} = \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_l=1}^N A_{ik_1} \dots A_{k_l j}, \quad (1.2)$$

es decir, $(A^l)_{ij}$ está dado por una suma a la que sólo contribuyen los términos $A_{ik_1} \dots A_{k_l j} = 1$ que corresponden a las caminatas $n_i(i, k_1) \dots (k_l, j)n_j$ de longitud l entre i y j . Así, $(A^l)_{ij}$ es el número de caminatas de longitud l entre los nodos i, j de G . La matriz de conectividad \mathbf{A} y sus momentos sirven para determinar varias cantidades comúnmente utilizadas para caracterizar topológicamente una red, las cuales se presentan en la siguiente sección.

1.1.2. Caracterización de redes

El grado de un nodo: distribuciones y correlaciones.

El *grado* (o *número de coordinación*⁶) k_i del nodo i en la red no dirigida $G_{N,E}$ se define como el número de vértices conectados con i a través de un enlace. A partir de las ecuaciones (1.1) y (1.2), k_i está dado por

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} = (A^2)_{ii}, \quad (1.3)$$

pues cada entrada no nula en la columna i de \mathbf{A} corresponde a un nodo incidente con i , y equivalentemente, por cada uno de tales nodos existe un ciclo \mathcal{C}_2 que empieza y termina en i . En una gráfica dirigida $\vec{G}_{N,E}$, los enlaces cumplen $(i, j) \neq (j, i)$ y resulta útil definir los grados *interno* y *externo* del nodo i como

$$k_i^{int} = \sum_{j=1}^N A_{ji} \quad \text{y} \quad k_i^{ext} = \sum_{j=1}^N A_{ij}, \quad (1.4)$$

⁵En este caso \mathbf{A} también se conoce como la *matriz de pesos*, denotada por \mathbf{W} .

⁶También referido como *conectividad* en este trabajo.

donde el *grado total* del nodo i en \vec{G} es $k_i^{int} + k_i^{ext}$.⁷ Si la red tiene pesos las definiciones (1.3) y (1.4) son equivalentes, pero ahora $A_{ij} = w_{ij} \forall i, j \in \mathcal{N}$.

Si consideramos el grado como la única variable topológica relevante, la forma más básica de caracterizar la red G se logra a través de la *distribución de grado* $P(k)$, definida como la probabilidad de que un nodo escogido uniformemente al azar tenga grado k , o bien

$$P(k) = \frac{N_k}{N}, \quad (1.5)$$

donde N_k es el número de nodos con grado k en G , y la relación $\sum_k N_k = N$ define la normalización de la distribución, $\sum_k P(k) = 1$. En el caso de \vec{G} necesitamos dos distribuciones, $P(k^{int})$ y $P(k^{ext})$, definidas de manera similar. De aquí, la forma en que el grado se distribuye en los nodos se puede conocer calculando los momentos de $P(k)$, dados por

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

El primer momento $\langle k \rangle$ se conoce como el *grado promedio* de G , y se puede escribir también como $\langle k \rangle = (1/N) \sum_{i=1}^N k_i$, donde $(1/N) \sum_{i=1}^N$ es el operador explícito de promedio para cantidades discretas definidas en los nodos de la red⁸. Para las gráficas simples y conexas existe una relación básica bastante útil entre $\langle k \rangle$, N y E . Claramente, el número de enlaces E se puede calcular sumando las conectividades de todos los nodos y dividiendo entre dos (pues cada enlace se cuenta dos veces), por lo que $E = (1/2) \sum_{i=1}^N k_i = N \langle k \rangle / 2$, es decir,

$$\langle k \rangle = 2 \frac{E}{N}. \quad (1.7)$$

Una red cuya topología está completamente definida por su grado promedio (como la *red al azar* de Erdős-Rényi [25], que se aborda en el capítulo 2) se puede considerar como una *aproximación de orden cero* para la descripción de un fenómeno real, válida cuando el comportamiento del sistema se puede definir totalmente a través de un parámetro fijo. Por el otro lado, el segundo momento $\langle k^2 \rangle$ mide las *fluctuaciones* en la distribución de conectividad $P(k)$, las cuales resultan fundamentales para establecer la estructura de ciertos tipos de redes. Por ejemplo, como se ve también en el capítulo 2, la *red libre de escala* de Barabási-Albert [26] está caracterizada por fluctuaciones libres

⁷No se debe confundir el grado total $k_i^{int} + k_i^{ext}$ de un nodo en una gráfica dirigida con el grado k_i de un nodo en una red no dirigida.

⁸Para simplificar las ecuaciones la notación $\langle \bullet \rangle$ se puede obviar, suponiendo la acción del operador de promedio a través de la eliminación del subíndice i , es decir, $\bullet = (1/N) \sum_{i=1}^N \bullet_i$.

de cota, pues $\langle k^2 \rangle$ diverge en el límite $k_{max} \rightarrow \infty$, con k_{max} el *grado máximo* en la red. Se pueden conocer momentos superiores, o incluso determinar la forma explícita de $P(k)$, lo cual nos lleva a una *aproximación de primer orden* para la descripción de un fenómeno real, dada por una red cuya única restricción es la forma de su distribución de grado. Aunque esta aproximación puede resultar más precisa que la anterior, sigue basándose en propiedades locales de la red, e ignora correlaciones entre nodos que pueden existir en sistemas reales [27,28]. Así, una *aproximación de segundo orden* se caracteriza por tener una distribución $P(k)$ dada y una función de correlación de dos puntos, como la *probabilidad condicional* $P(k'|k)$ (también llamada *probabilidad de transición*), definida como la probabilidad de que un nodo con grado k previamente conocido esté conectado a un nodo con grado k' , la cual cumple con la condición de normalización $\sum_{k'} P(k'|k) = 1$.

Para encontrar una relación entre $P(k)$ y $P(k'|k)$ es necesario considerar el número total de enlaces entre un vértice con grado k' y otro con grado k , denotado por $E_{k'k}$. Este número (simétrico ante el intercambio de sus índices) cumple las relaciones

$$\sum_{k'} E_{k'k} = kN_k \quad \text{y} \quad \sum_k \sum_{k'} E_{k'k} = 2E = \langle k \rangle N, \quad (1.8)$$

pues el número de enlaces que emanan de nodos con grado k es kN_k y, por la ecuación (1.7), el doble del número total de enlaces es igual a la suma de todos los grados en G . Así, a partir de la ecuación (1.8) la *probabilidad conjunta* $P(k', k)$ (la probabilidad de que en la elección aleatoria de un enlace en G encontremos en sus extremos nodos con grados k' y k de forma simultánea) se puede calcular como

$$P(k', k) = \frac{E_{k'k}}{\sum_k \sum_{k'} E_{k'k}} = \frac{E_{k'k}}{\langle k \rangle N}, \quad (1.9)$$

y con las ecuaciones (1.5), (1.8) y (1.9) la probabilidad condicional toma la forma⁹

$$P(k'|k) = \frac{E_{k'k}}{\sum_{k'} E_{k'k}} = \frac{E_{k'k}}{kN_k} = \frac{\langle k \rangle P(k', k)}{kP(k)}. \quad (1.10)$$

Ahora bien, la simetría de la probabilidad conjunta (heredada de la simetría de $E_{k'k}$) implica $P(k', k) = P(k, k')$, por lo que podemos escribir nuevamente la ecuación (1.10) con los índices k' , k intercambiados e igualar las dos ecuaciones para obtener la relación de conservación de número de enlaces

$$kP(k'|k)P(k) = k'P(k|k')P(k'), \quad (1.11)$$

⁹De hecho, esta expresión es un caso particular del axioma de probabilidades condicionales en Teoría de Probabilidad, $P(A|B) = P(A, B)/P(B)$ [29], de donde se puede inferir que el evento B corresponde en este caso al hecho de seguir un enlace y encontrar al final un nodo con grado k , por lo que la probabilidad asociada a tal evento es $P_{enc}(k) = kP(k)/\langle k \rangle$.

llamada en la literatura *condición de balance detallado de grado* [30], la cual establece simplemente que el número de enlaces que van de nodos de grado k a nodos de grado k' debe ser igual al número de enlaces que van de vértices de grado k' a vértices de grado k , y se puede ver como una relación de cerradura que asegura la existencia de la red (pues todo enlace en G debe tener dos nodos en los extremos).

En el caso de una red G^{nc} sin correlaciones entre los grados de sus nodos, una expresión explícita para la probabilidad de transición se puede derivar de forma relativamente sencilla. Cuando no existen correlaciones entre los grados k' , k de dos vértices conectados entre sí, la probabilidad conjunta $P^{nc}(k', k)$ es simplemente el producto de las probabilidades de seguir un enlace y encontrar en sus extremos nodos con grados k' y k , es decir, $P^{nc}(k', k) = k'kP(k')P(k)/\langle k \rangle^2$. De este modo, a partir de la ecuación (1.10) la probabilidad de transición en el caso no correlacionado es

$$P^{nc}(k'|k) = \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle}. \quad (1.12)$$

En cuanto a la ecuación (1.11), es afortunado que exista una relación fundamental entre las distribuciones $P(k)$ y $P(k'|k)$ que permita establecer características de las correlaciones en una red con tan pocas restricciones y de manera formal, pero aún así, los datos correspondientes a $P(k'|k)$ en sistemas reales son en general difíciles de interpretar debido al ruido existente por el orden finito N de la red, por lo que resulta práctico definir el *promedio del grado de los nodos adyacentes a un vértice dado* a partir de tal distribución. Dicha cantidad, conocida como el *grado promedio de los vecinos más cercanos* de los vértices con grado k [31], está dada por

$$\langle k_{nn}(k) \rangle = \sum_{k'} k' P(k'|k) = \frac{1}{kN_k} \sum_i \sum_{j=1}^N A_{ij} k_j, \quad (1.13)$$

donde la primera expresión (en términos de $P(k'|k)$) muestra la dependencia explícita en k de manera formal, y la segunda es una definición operativa de tal promedio, con una suma sobre los nodos i de grado k .

La correlación promedio $\langle k_{nn}(k) \rangle$ es una forma simple, intuitiva y útil de definir una estructura de grado en la red, conocida como *asortatividad* [28]. En la gráfica no correlacionada G^{nc} , las ecuaciones (1.12) y (1.13) resultan en $\langle k_{nn}^{nc} \rangle = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$, es decir, $\langle k_{nn}^{nc} \rangle$ es una constante independiente de k , por lo que G^{nc} se denomina *no asortativa*. En cambio, las redes correlacionadas se clasifican como *asortativas* si $\langle k_{nn}(k) \rangle$ es una función creciente de k (lo cual es usual en redes asociadas a sistemas sociales, e indicador de que nodos de cierto grado tienden a conectarse con vértices de grado similar),

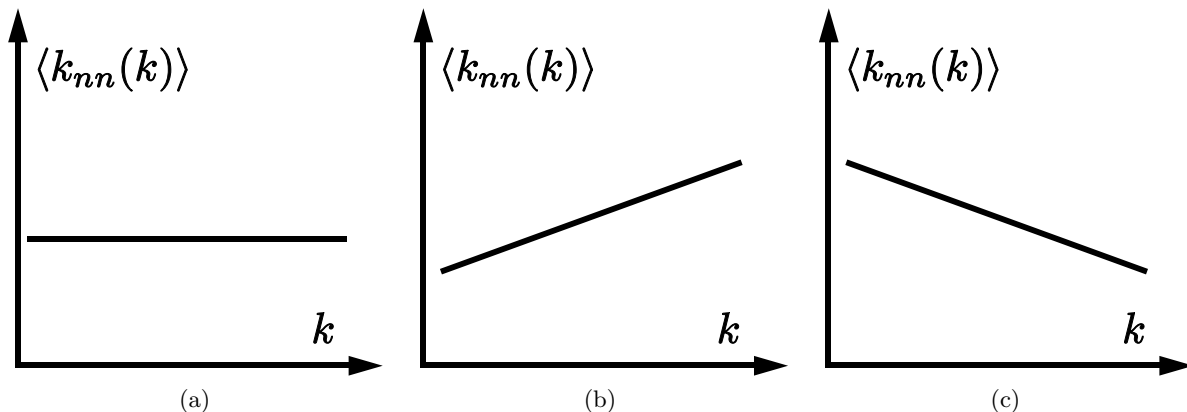


Figura 1.2: Representación esquemática de los comportamientos característicos del grado promedio de los vecinos más cercanos $\langle k_{nn}(k) \rangle$ como función del grado k , conocidos como (a) no asortatividad, (b) asortatividad y (c) disasortatividad. En las gráficas no asortativas $\langle k_{nn} \rangle$ es independiente de k , mientras que las redes correlacionadas son asortativas o disasortativas si $\langle k_{nn}(k) \rangle$ es una función creciente o decreciente de k , respectivamente.

y como *disasortativas* si $\langle k_{nn}(k) \rangle$ es una función decreciente de k (visto en redes que representan sistemas biológicos o tecnológicos, donde normalmente los nodos de grado alto tienden a conectarse con vértices de grado bajo). Un esquema de estos comportamientos característicos se presenta en la figura (1.2).

El coeficiente de agrupamiento.

La propiedad de *agrupamiento* o *transitividad* en una red es una medida de la cantidad de triángulos \mathcal{E}_3 presentes en ella. Una red no dirigida G es *altamente transitiva* si, una vez encontrados los enlaces (i, j) y (j, l) para nodos i, j y l arbitrarios, existe una alta probabilidad de que el enlace (i, l) también exista, de donde se deriva el nombre. La palabra agrupamiento proviene del lenguaje de redes sociales, pues un triángulo (que representa, por ejemplo, el caso en el que “el amigo de mi amigo también es mi amigo” [5]) es el bloque básico de una estructura social, y por tanto la presencia de muchos triángulos indica la existencia de grupos o comunidades en la red¹⁰. Al igual que el grado de un nodo, el agrupamiento es una propiedad local de G (aunque ya toma en cuenta correlaciones de corto alcance pues implica la existencia de ciertos enlaces entre vértices) y puede usarse para describir la red de manera global a través de un coeficiente promediado sobre todos los nodos de G . La forma en que tal promedio se evalúa define dos coeficientes básicos asociados a esta propiedad. En primer lugar, el *coeficiente de transitividad* T se define como la fracción de *tripletes*

¹⁰No obstante, el problema de caracterización y detección de comunidades en G (encontrar una subgráfica $G' \subseteq G$ que comparta ciertas propiedades topológicas definidas como relevantes) va más allá de la simple determinación de una propiedad local en la red como el agrupamiento, y se analiza con detalle en el capítulo 4.

conectados que también forman triángulos en G [2,17], es decir,

$$T = \frac{3 \times \text{número de triángulos}}{\text{número de tripletes conectados}}, \quad (1.14)$$

donde un triplete conectado se forma por un vértice con enlaces a un par no ordenado de nodos, y el factor 3 está presente pues cada triángulo contribuye con tres tripletes conectados (centrados en cada vértice de \mathcal{E}_3), y asegura la normalización $0 \leq T \leq 1$, con los valores extremos $T = 0$ y $T = 1$ correspondientes a una red sin triángulos y al clique \mathcal{E}_N , respectivamente. Así, T es la probabilidad media de que dos nodos conectados con el mismo vértice también estén conectados entre sí.

Por el otro lado, el *coeficiente de agrupamiento local* del nodo i , C_i , se calcula como el número de enlaces existentes entre los k_i vecinos de i dividido entre los $k_i(k_i - 1)/2$ posibles enlaces [32,33], o de manera equivalente, como la fracción de los posibles triángulos con i como uno de sus vértices que de hecho están presentes en G . Entonces, si n_i^Δ denota al número de triángulos \mathcal{E}_3 que incluyen a i ,

$$C_i = \frac{2n_i^\Delta}{k_i(k_i - 1)} = \frac{(A^3)_{ii}}{k_i(k_i - 1)}, \quad (1.15)$$

pues el número de ciclos \mathcal{C}_3 que empiezan y acaban en i , $(A^3)_{ii}$, es igual al doble del número de triángulos que incluyen a i . De forma adicional, se define $C_i = 0$ en los casos indeterminados $k_i = 0, 1$. Con esto, el *coeficiente de agrupamiento* C de la red es el promedio de C_i sobre todos los nodos en G , es decir,

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (1.16)$$

Aunque T y C coinciden en la normalización y el tipo de gráficas correspondientes a sus valores extremos, consideran órdenes distintos en el cálculo de la razón entre triángulos y tripletes y el promedio sobre vértices. Mientras que T mide la razón de los promedios, C calcula el promedio de la razón, por lo que en C pesan más las contribuciones de nodos con grado bajo y en general los coeficientes toman valores diferentes para la misma gráfica G .

El coeficiente de agrupamiento local se puede generalizar a una gráfica dirigida \vec{G} considerando la asimetría de su matriz de conectividad \mathbf{A} . De acuerdo a la ecuación (1.15), en una gráfica no dirigida C_i cuenta el número relativo de tripletes conectados (formados por los enlaces (i, j) y (i, l) , por ejemplo) que forman un triángulo con el enlace adicional (j, l) . Así, en \vec{G} esta definición se puede extender separando las contribuciones correspondientes al grado interno k_i^{int} (los triángulos formados por (j, i) y (l, i)) y al grado externo k_i^{ext} (los triángulos formados por (i, j) y (i, l)), pero aún así se tiene una ambigüedad en la selección del enlace adicional, pues $(j, l) \neq (l, j)$. Normalmente

tal problema se resuelve tomando un factor simétrico que considera ambos enlaces [22], y a partir de la ecuación (1.4) los *coeficientes de agrupamiento local interno y externo* del nodo i en la gráfica dirigida \vec{G} se definen como

$$\begin{aligned} C_i^{int} &= \frac{2}{k_i^{int}(k_i^{int} - 1)} \sum_{j,l=1}^N A_{ji} A_{li} \frac{A_{jl} + A_{lj}}{2}, \\ C_i^{ext} &= \frac{2}{k_i^{ext}(k_i^{ext} - 1)} \sum_{j,l=1}^N A_{ij} A_{il} \frac{A_{jl} + A_{lj}}{2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

En el caso de una red no dirigida con pesos G^w , los enlaces adicionales (j, l) no presentes para formar triángulos no tienen un peso definido, por lo que también existe una ambigüedad en la redefinición del factor de normalización $k_i(k_i - 1)/2$ de la ecuación (1.15). A diferencia del caso dirigido, aquí no existe una nomenclatura tan establecida, y la definición del *coeficiente local de agrupamiento con pesos* C_i^w depende de las necesidades específicas del modelo en cuestión. Por ejemplo, se puede normalizar de manera global con el peso promedio $\langle w \rangle = (1/2E) \sum_{i,j=1}^N w_{ij}$ sobre todos los enlaces de G^w [22],

$$C_i^w = \frac{(A^3)_{ii}}{\langle w \rangle^3 k_i(k_i - 1)}, \quad (1.18)$$

o se puede normalizar de manera local con el peso conjunto $s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}$ de los enlaces de i [34],

$$C_i^w = \frac{1}{s_i(k_i - 1)} \sum_{j,l=1}^N \frac{w_{ij} + w_{il}}{2} \theta(w_{ij}) \theta(w_{il}) \theta(w_{jl}), \quad (1.19)$$

donde θ es la función escalón usual¹¹. Estas definiciones se pueden extender al caso dirigido \vec{G}^w de manera relativamente directa a partir de las ecuaciones (1.17).

Distancias y medidas de centralidad sobre la red.

La caracterización topológica de una gráfica a través de medidas locales como el grado o el coeficiente de agrupamiento puede servir para establecer la “importancia” de un nodo respecto a los otros, donde la importancia de un vértice se relaciona con el efecto que su exclusión tiene sobre la estructura y funcionamiento de la red [35]. No obstante, cuando la gráfica se utiliza para describir procesos de transporte o comunicación en un sistema real, medidas relacionadas con las distancias entre nodos han resultado de mayor utilidad, y llevan al concepto de *centralidad* de un vértice en la red, utilizado principalmente en el ámbito de las ciencias sociales para describir dicha “importancia”

¹¹ $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

de los elementos en un sistema dado [14]. Como se menciona en la sección 1.1.1, la geodésica entre los nodos i y j es la caminata de menor longitud entre ellos, y su tamaño L_{ij} sirve para definir la *matriz de distancias* \mathbf{L} , una matriz simétrica que contiene todas las geodésicas en la red no dirigida G . Con esto, la *longitud promedio del camino más corto* entre los nodos de una subgráfica conexa $G' \subseteq G$, también denominada *longitud característica* de G' , se define como

$$L = \frac{1}{N'(N' - 1)} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} L_{ij}, \quad (1.20)$$

donde los índices i y j corren sobre todos los vértices pertenecientes a $G' = G'_{N',E'}$. Claramente, el promedio L sólo está bien definido para componentes conexas de la red, pues L_{ij} tiene un valor indeterminado cuando no existen caminatas entre los nodos i y j . Si en tal caso se considera que la distancia L_{ij} diverge, el factor L_{ij} en la ecuación (1.20) se puede sustituir por su inverso para definir la *eficiencia* de G [36], la cual está bien determinada en una red desconexa. Como se ve en el capítulo 2, la relación entre la longitud característica y el coeficiente de agrupamiento sirve para definir una clase de gráficas conocidas como las *redes de mundo pequeño* de Watts-Strogatz, donde un coeficiente de agrupamiento alto puede coexistir con una longitud característica pequeña [33].

La forma más simple de cuantificar la centralidad de un nodo en G' se logra con el *coeficiente de centralidad* o *cercanía* del vértice i [2, 22], definido como

$$c(i) = \frac{1}{\sum_{\substack{j \\ i \neq j}} L_{ij}}, \quad (1.21)$$

donde, como antes, el índice j corre sobre los vértices de G' . Así, el nodo i más *central* en G' es aquel para el cual $c(i)$ es máximo, es decir, el nodo con una geodésica de longitud promedio mínima con cualquier otro vértice. No obstante, en ciertas situaciones no es suficiente con tener el nodo más cercano en promedio a los demás, pues se necesita información acerca de la capacidad de dicho vértice para transmitir información entre cualquier par de nodos. En tales casos resulta útil definir la *proximidad* del nodo i [15, 16] como

$$b(i) = \sum_{\substack{j,l \\ i \neq j \neq l}} \frac{n_{jl}(i)}{n_{jl}}, \quad (1.22)$$

donde n_{jl} es el número total de geodésicas distintas entre los vértices j y l , y $n_{jl}(i)$ es el número de tales caminatas que pasan por i . Con esta definición, un nodo es central si $b(i)$ es máxima, es decir, si hay una alta probabilidad de que una transmisión de información (o alguna otra variable relevante

del sistema) sobre las geodésicas de la red pase por i . En las ciencias sociales es común considerar al grado, la cercanía y la proximidad como las medidas básicas de centralidad de un individuo en una red social [14]. La ecuación (1.22) se puede extender de manera directa a los enlaces en G' en la llamada *proximidad de enlaces*, donde se considera el número relativo de geodésicas que pasan por un enlace dado.

1.2. Dinámicas no lineales

Una vez establecida la estructura de una red, que usualmente se utiliza para representar las partes de un sistema en la Naturaleza y las interacciones entre éstas, resulta coherente considerar su *función*, es decir, la evolución temporal de las propiedades medibles de tales partes y sus interacciones en términos de conjuntos de ecuaciones diferenciales o de diferencias (en general acopladas de manera no lineal) denominados *sistemas dinámicos* en la literatura física. Desde hace tiempo tal enfoque ha sido utilizado con éxito en las áreas de Física de Estado Sólido y Materia Condensada para describir fenómenos tan diversos como la estructura de bandas electrónicas en un sólido (calculada, por ejemplo, con el modelo de amarre fuerte), el magnetismo proveniente del comportamiento colectivo de millones de espines (donde se reconoce el famoso modelo de Ising y sus múltiples variaciones), la condensación de Bose-Einstein y la superfluidez en sistemas cuánticos de muchas partículas, el auto-ensamblaje en materiales nanoestructurados y los procesos termodinámicos en sistemas astronómicos, entre muchos otros [11]. Con el paso del tiempo se descubrió que las propiedades estadísticas emergentes de tales sistemas también eran características de procesos biológicos y ecológicos como la morfogénesis (descrita usualmente con los sistemas de reacción-difusión), las oscilaciones y sincronizaciones en sistemas químicos, celulares y de grupos de animales, la dispersión y propagación de enfermedades, el funcionamiento de redes metabólicas, neuronales y de expresión genética, y muchos más [2,37]. En los últimos años, la ubicuidad de dichas propiedades emergentes en la Naturaleza ha sido utilizada en el campo de Sistemas Complejos para estudiar sistemas sociales basados en relaciones personales y colaboraciones profesionales, redes de transporte, comunicación y transferencia de información (entre las que destacan las redes de llamadas telefónicas, la Internet y la WWW), e incluso sistemas lingüísticos y semánticos [1,3]. Algunos de los fenómenos y procesos mencionados con anterioridad son analizados en detalle y desde esta perspectiva en el capítulo 3, por lo que por ahora nos restringiremos a describir las propiedades generales de los sistemas dinámicos no lineales.

Un *sistema dinámico continuo no lineal* se define formalmente a partir del conjunto de ecuaciones

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}_r(\vec{s}, t), \quad (1.23)$$

donde el vector $\vec{s} = \{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$ contiene las *variables de estado* o *campos* $s_i(t)$ del sistema (que codifican las propiedades dinámicas relevantes a estudiar)¹² y las componentes del vector $\vec{F}_r = \{F_1(\vec{s}, t; r), \dots, F_n(\vec{s}, t; r)\}$ son funciones no lineales que dictan la evolución temporal (o cinética) de las variables de estado de forma acoplada y en términos de un conjunto de parámetros $\{r\}$ que definen las posibles acciones externas sobre el sistema. Aunque estos sistemas de ecuaciones no lineales son en general imposibles de resolver y sus comportamientos cuantitativos y cualitativos sólo se han establecido en casos particulares, existen ciertas propiedades cualitativas universales que dan intuición sobre ellos. Para encontrarlas es necesario definir el *espacio de estados* o *espacio fase* del sistema, un espacio n-dimensional con un eje por cada variable de estado s_i (y por cada variable conjugada también), donde la trayectoria del sistema $\vec{s}(t)$ se visualiza de manera abstracta como un “flujo” por el espacio fase guiado por un “campo de velocidades” $d\vec{s}/dt = \vec{F}_r$, de manera similar a lo que sucede en un líquido. El tipo de trayectorias que dicho flujo describe define tres posibles comportamientos típicos del sistema, caracterizados por sus *atractores* asociados [8]:

- Los puntos \vec{s}_0 en el espacio fase tales que $d\vec{s}_0/dt = 0$ se conocen como *puntos fijos* o *singulares*, y representan los estados de equilibrio del sistema, donde el campo de velocidades es cero y por tanto las variables de estado no cambian con el tiempo. Si la trayectoria $\vec{s}(t)$ tiende a \vec{s}_0 conforme $t \rightarrow \infty$ para un conjunto $\{r\}$ dado \vec{s}_0 se conoce como un *punto fijo estable* (es un punto que “atrae” estados en un vecindad inmediata) mientras que en el caso contrario se conoce como un *punto fijo inestable*. La forma precisa en que $\vec{s}(t)$ tiende o se aleja de \vec{s}_0 define varios tipos de puntos fijos como los nodos, los nodos degenerados, los focos y los puntos silla, cuya definición precisa no nos concierne aquí.
- Las superficies conexas y cerradas que separan regiones del espacio fase y atraen o repelen trayectorias $\vec{s}(t)$ de acuerdo a la región donde se encuentren se denominan *ciclos límite*, y representan comportamientos oscilatorios del sistema sustentados a lo largo del tiempo. Según el teorema de Poincaré-Bendixson, las trayectorias en una región compacta de un espacio fase plano de dos dimensiones sólo pueden tender a puntos fijos o ciclos límite, lo cual es un resultado importante en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos continuos.

¹²Formalmente, el vector \vec{s} también contiene a las variables conjugadas de las variables de estado, lo cual permite definir correctamente el espacio fase del sistema, como se ve a continuación.

- Un conjunto de estados por los que $\vec{s}(t)$ pasa sin hacer repeticiones o parar se conoce como un *atractor extraño*, y caracteriza un comportamiento caótico del sistema donde estados inicialmente cercanos pueden alejarse de manera exponencial con el paso del tiempo (de acuerdo a los llamados exponentes de Liapunov [12]), lo cual limita bastante la predictibilidad en el modelo y en los fenómenos naturales asociados. Tomando en cuenta el teorema de Poincaré-Bendixson, el caos puede aparecer en espacios fase no planos o de dimensión mayor a dos, lo cual lo hace una característica bastante común en los sistemas dinámicos, y parte de su éxito como herramienta matemática de descripción de fenómenos reales.

Así, la distribución y tipo de atractores presentes en un espacio fase (que forman el llamado *retrato fase* del sistema) determinan la manera cualitativa en que las trayectorias $\vec{s}(t)$ se comportan a lo largo del tiempo. Cuando el espacio fase tiene puntos fijos estables solamente, el sistema tiene a un patrón estático sobre el espacio en el cual está definido. Si existen interacciones F_i y F_j que compiten entre sí, el sistema usualmente presenta muchos puntos fijos correspondientes a estados de equilibrio local que pueden no coincidir con los mínimos o máximos globales de un potencial definido en todo el espacio fase. Tal incapacidad de alcanzar los valores extremos de un potencial asociado a $\vec{s}(t)$ se conoce como *frustración* del sistema, y es común en estructuras físicas como los vidrios de espín. Por el otro lado, en presencia de ciclos límite las variables de estado $s_i(t)$ tienden a oscilar en el tiempo con amplitudes y fases determinadas, y la existencia de interacciones acopladas puede permitir que las partes del sistema se auto-organicen y sincronicen en una oscilación global, fenómeno conocido como un *fijamiento* de la amplitud y fase del sistema.

Estos dos comportamientos característicos (la formación de patrones espaciales y el fijamiento de amplitudes y fases) son ejemplos particulares de una de las propiedades universales de los sistemas de ecuaciones diferenciales con acoplamiento no lineal que los hacen especialmente aptos para describir sistemas complejos en la Naturaleza, el *rompimiento espontáneo de simetría*, en el cual la selección de valores críticos del conjunto de parámetros externos $\{r\}$ lleva al sistema a un estado de baja simetría muy robusto ante perturbaciones y cambios en las condiciones iniciales [6]. Esta situación es similar a la dictada por un principio presente en cualquier sistema físico conocido hasta la fecha, que relaciona el comportamiento dinámico del sistema con las simetrías de los campos que actúan sobre él¹³. El rompimiento espontáneo de simetría se debe a *bifurcaciones* en el espacio fase, las cuales aparecen cuando un cambio continuo en el conjunto de parámetros $\{r\}$ causa una modificación topológica en el retrato fase del sistema, es decir, cuando la estabilidad de los puntos fijos \vec{s}_0 cambia

¹³De manera más específica, el teorema de Noether nos dice que en cualquier sistema mecánico con un lagrangiano definido la presencia de una simetría continua y diferenciable de la acción indica la existencia de una ley de conservación, es decir, una variable del sistema que no cambia con el tiempo [12].

(las *bifurcaciones locales*, como la bifurcación de Hopf) o cuando ciclos límite y puntos fijos se unen para formar un atractor distinto (las *bifurcaciones globales*).

Un ejemplo habitual y muy socorrido de formación de patrones espaciales ocurre en algunos sistemas de ecuaciones diferenciales de reacción-difusión conocidos como *modelos de Turing*, en los cuales sustancias químicas denominadas morfógenos interactúan entre sí para formar patrones de concentración estacionarios y muy robustos ante perturbaciones externas [37]. En la ecuación (1.23) de un modelo de Turing típico, las variables de estado s_i son las concentraciones de los morfógenos considerados, y las funciones de interacción F_i contienen las leyes cinéticas de reacciones químicas y de difusión de componentes diluidos. Aunque un proceso difusivo tiende a crear estados de concentración uniforme, en un sistema de Turing la interacción de fenómenos de reacción y difusión puede causar el paso de estados altamente simétricos a estados con patrones estructurados estables. Este mecanismo de rompimiento de simetría, conocido como una “inestabilidad causada por la difusión” o simplemente como una inestabilidad de Turing, es un ejemplo de cómo las bifurcaciones en el espacio fase pueden generar cambios dinámicos considerables en el sistema.

Por el otro lado, un caso de fijamiento de fases ocurre en el *modelo de Kuramoto*, el cual describe un conjunto de osciladores de ciclo límite acoplados, donde las frecuencias naturales de cada uno siguen una distribución determinada [38]. Aquí las variables de estado s_i son las fases de los osciladores, mientras que las interacciones F_i involucran a las frecuencias naturales y ciertas funciones de acoplamiento entre las fases. Cuando la fuerza de acoplamiento excede un límite dado, el sistema presenta una transición de fase en la cual algunos de los osciladores se sincronizan de inmediato, mientras que otros permanecen incoherentes. En otras palabras, una bifurcación en el espacio fase genera un rompimiento espontáneo de simetría, como en el modelo de Turing. Estos dos sistemas se analizan con más detalle en el capítulo 3.

La presencia de bifurcaciones puede ilustrarse matemáticamente de forma sencilla, sin tener que considerar los detalles de un modelo en particular. Dado un sistema dinámico $\vec{s}(t)$ que sigue la ecuación (1.23) y se encuentra sobre un punto fijo \vec{s}_0 en su espacio fase, es razonable pensar que una pequeña perturbación de tal estado de equilibrio hará que el sistema responda de manera lineal, sin importar la estructura específica del vector de interacción \vec{F}_r . En otras palabras, para una perturbación $\vec{s}_0 + \epsilon \vec{u}$ con $\epsilon \sim 0$, el sistema (1.23) se puede sustituir por la ecuación

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \mathcal{L}_r \vec{u}, \quad (1.24)$$

donde \mathcal{L}_r es un operador lineal asociado a \vec{F}_r . Las soluciones a la ecuación (1.24) son de la forma

$\exp(\omega_n t)\vec{x}_n$, donde cada *modo normal* \vec{x}_n debe cumplir la ecuación de valores propios

$$\mathcal{L}_r \vec{x}_n = \omega_n \vec{x}_n, \quad (1.25)$$

y la cardinalidad del conjunto $\{n\}$ define la dimensión del espacio en el cual se expande linealmente la solución no perturbada $\vec{s}(t)$. La forma específica de los valores propios complejos $\omega_n = \Re(\omega_n) + i\Im(\omega_n)$ define el tipo de atractores posibles del sistema [6]:

- Para $\Re(\omega_n) > 0$ el modo \vec{x}_n es inestable.
- Para $\Re(\omega_n) \leq 0$ el modo \vec{x}_n es estable.
- Para $\Re(\omega_n) > 0$ y $\Im(\omega_n) \neq 0$ hay oscilaciones en el tiempo.
- Para $\Re(\omega_n) > 0$ y $\Im(\omega_n) = 0$ puede haber fluctuaciones espaciales.

De esta forma, la posición de los valores propios ω_n en el plano complejo determina el retrato fase del sistema $\vec{s}(t)$ en la cercanía del punto fijo \vec{s}_0 , y las bifurcaciones se presentan cuando un cambio del conjunto de parámetros externos $\{r\}$ hace que algún ω_n cruce el eje real o imaginario y por tanto modifique la dinámica del sistema.

1.3. Sistemas complejos

En las secciones anteriores se han introducido los conceptos de red y sistema dinámico, que se utilizan respectivamente para describir la estructura y la función de un sistema complejo. Esto nos permite definir dos formas extremas y opuestas de analizar la manera en que el fenómeno descrito cambia a lo largo del tiempo: podemos estudiar las características estáticas o dinámicas de una *estructura de red sin función*, o la forma en que la *función evoluciona en el tiempo en una estructura de red estática*. En el primer caso consideramos la estructura del sistema como una red de partes constitutivas e interacciones entre ellas (que cambian en el tiempo de acuerdo a ciertas reglas dadas por el modelo particular utilizado) e *ignoramos* la función de la red (ya que, por ejemplo, las variables de estado cambian en una escala de tiempo mayor a la considerada por la estructura), por lo que el análisis del sistema consiste en caracterizar cómo la red crece y evoluciona algún estado final, y posteriormente en relacionar tales estados finales con las condiciones iniciales y las reglas de evolución de la red. Este método (utilizado de manera fructífera para describir la generación y desarrollo de ciertas redes tecnológicas, de comunicación, sociales y lingüísticas [1]) ha llevado al estudio exhaustivo de las redes aleatorias, de mundo pequeño y libres de escala revisadas en el

capítulo 2, y es especialmente útil cuando nos interesa predecir la *estructura estática* final de una red (como la red eléctrica en una ciudad) a partir de sus reglas básicas de evolución (como la necesidad de conectar eficientemente cualquier zona de la ciudad a una central eléctrica).

Por el otro lado, podemos suponer que la red de interacciones del sistema está *fija* en la escala de tiempo considerada por el modelo, y preocuparnos tan sólo por la evolución temporal de la función de la red, es decir, estudiar el sistema dinámico asociado al fenómeno. En este caso el análisis del sistema consiste en relacionar el retrato fase, las posibles bifurcaciones y rompimientos de simetría con el tipo específico de red sobre el cual se define el sistema dinámico. Este segundo método (utilizado, entre otros, para describir procesos de difusión, propagación y sincronización en sistemas biológicos, ecológicos y sociales [2], algunos de los cuales se abordan en el capítulo 3) proporciona información acerca de la manera en que la red de un sistema puede afectar la transmisión de datos, bienes o enfermedades en ella, y por tanto es fundamental para determinar las estructuras de red necesarias para optimizar dichas transferencias (como en el caso del envío de datos entre computadoras) o disminuirlas al máximo (como, por ejemplo, al considerar la propagación de enfermedades infecciosas en una comunidad).

No obstante, existen situaciones en las cuales modelar al fenómeno solamente como una estructura sin función o como una función sin estructura no es suficiente, pues existe una *interacción explícita* entre la topología de la red y las variables de estado definidas sobre sus nodos. En el proceso de diferenciación celular en un sistema orgánico, por ejemplo, las redes genéticas contenidas en los cromosomas pueden seleccionar distintos pozos de atracción para expresar genes determinados de acuerdo a cambios en condiciones externas como la composición química del ambiente en el que se encuentra la célula o incluso la curvatura del tejido cercano [39,40]. En el proceso de formación de opinión en una comunidad humana, la forma en que cada individuo desarrolla su opinión respecto a un tema específico depende en gran medida de las personas con las cuales discute tal tema, y dicha red de amistades o conocidos cambia todo el tiempo debido a la propia dinámica de la comunidad social [41–45]. A fin de poder establecer una base más formal para estudiar este tipo de fenómenos en los cuales la coevolución entre estructura y función tiene un papel relevante, en este trabajo definimos un *sistema complejo* como el conjunto de ecuaciones

$$G = (\mathcal{N}(\{\vec{s}_i\}, t), \mathcal{E}(\{\vec{s}_i\}, t)),$$

$$\frac{d\vec{s}_i}{dt} = \vec{F}_i(G, \{\vec{s}_j\}, t; r), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1.26)$$

donde se retoma la notación establecida en las secciones 1.1 y 1.2, es decir, un sistema complejo

esta formado por una red G cuyos nodos y enlaces cambian por el paso del tiempo y la forma del conjunto de vectores de estado $\{\vec{s}_i\}$, y por sistemas dinámicos \vec{s}_i para cada nodo de G cuya evolución temporal depende de la red, el conjunto mismo de vectores de estado y el conjunto de parámetros externos $\{r\}$ ¹⁴. En otras palabras, la ecuación (1.26) nos dice que en un sistema complejo en general las variables dinámicas que describen el estado temporal de cada nodo (es decir, la función) hacen que la topología de la red (es decir, su estructura) cambie en el tiempo adaptándose a la función, y por tanto incluye de forma automática el concepto de coevolución.

Aunque la mayor parte de la literatura considera la evolución temporal de estructura y función por separado [1–8], existen ya algunos trabajos que implementan cierta interacción entre la topología de la red y el sistema dinámico definido sobre ella. En la referencia [46], los autores introducen un modelo evolutivo para describir las interacciones catalíticas entre poblaciones de distintas especies, las cuales cambian debido a mutaciones de las especies menos aptas. En éste se introducen dos tipos de variables dinámicas que interactúan entre sí; las variables *rápidas* que modelan la dinámica de las poblaciones de las especies, y las variables *lentas* que describen los enlaces en una gráfica dirigida, la cual representa a su vez las interacciones catalíticas entre especies diferentes. De esta forma, la dinámica definida sobre la red modifica su topología y viceversa, y la red puede pasar de un estado inicial aleatorio a uno altamente no aleatorio dependiendo de los valores tomados por los parámetros del modelo. Como otro ejemplo, en la referencia [47] se presenta un modelo matemático simple para describir la coordinación y agrupamiento de conjuntos de peces, animales e insectos, el crecimiento de colonias de bacterias, y en general la emergencia de movimiento auto-ordenado o sincronización en sistemas biológicos, en el cual las partículas se mueven con velocidad absoluta constante y en cada paso de tiempo toman la dirección de movimiento promedio de sus vecinas en cierta región con una perturbación aleatoria adicional. Variando el valor de la perturbación, los autores demuestran que existe una transición de fase de una velocidad promedio nula a un transporte neto finito a partir de un rompimiento espontáneo de la simetría rotacional. En otras palabras, la evolución del sistema se mapea a una red dinámica, donde los enlaces se agregan o quitan entre partículas que son vecinas o no, lo cual depende a su vez de la dinámica de cada partícula, es decir, de su variable de estado, y tal interacción entre dinámica y topología produce una propiedad emergente, el movimiento grupal en una dirección escogida de manera espontánea.

Existen trabajos más recientes [48–50] en los que se ha reconocido (aunque aún de manera intui-

¹⁴Claramente, esta definición se puede extender de manera inmediata para incluir una o varias redes no dirigidas, dirigidas o con pesos dependiendo de las necesidades particulares del modelo utilizado, aunque en lo que respecta a nuestro trabajo usualmente sólo consideraremos el caso más sencillo, es decir, una sola red no dirigida con vectores de estado de una entrada.

tiva y basada en ejemplos particulares) que la interacción entre estructura y función es fundamental para permitir la existencia de propiedades emergentes de los sistemas complejos tan relevantes como *la emergencia y segregación en comunidades de la red*, razón por la cual tal interacción ha recibido el nombre especial de coevolución, concepto básico sobre el cual se basa la presente investigación. Como en las referencias mencionadas con anterioridad y otros trabajos el estudio de la evolución de tales redes adaptativas tan sólo se realiza en casos particulares sin dar una importancia explícita a este concepto, en nuestra investigación se propone diseñar un marco teórico general que establezca la coevolución como parte de cualquier sistema complejo y la relacione directamente con sus propiedades emergentes (como se muestra en el capítulo 5) y se pretende ejemplificar su utilidad con el estudio de un caso particular en los capítulos 7 y 8, el modelo coevolutivo de formación de opinión en una red social.

Capítulo 2

Estructura: topología de redes

Como se establece en el capítulo anterior, los desarrollos teóricos alrededor del concepto de red se han utilizado de manera fructífera en los últimos años para describir la estructura de fenómenos naturales o sistemas reales, sus partes constitutivas y las interacciones entre ellas. Cuando se desprecia el efecto de las variables dinámicas definidas sobre los nodos de la red y sólo se toma en cuenta la estructura del sistema, podemos analizar la topología asociada a un tipo particular de fenómenos. Esto nos permite estudiar las causas (externas o internas) por las cuales el sistema tiene tal topología, lo cual posibilita (por ejemplo) buscar formas de modificar la red para eficientar procesos de transporte o comunicación dentro del sistema.

En el presente capítulo se hace una revisión breve de las estructuras de red más utilizadas y estudiadas de forma analítica en el campo de Sistemas Complejos: las gráficas ordenadas, aleatorias, de mundo pequeño y libres de escala. Las *redes ordenadas* (como las redes de Bravais, los árboles de Cayley y las redes exponenciales ordenadas) tienen una estructura simple producto de un algoritmo determinista (que puede ser recursivo o no), y son útiles para encontrar soluciones exactas a problemas dinámicos definidos sobre ellas. Las *redes aleatorias* son el caso más sencillo de redes desordenadas, donde los enlaces entre nodos se distribuyen al azar siguiendo una distribución de grado específica. Las *redes de mundo pequeño* son redes ordenadas donde un parámetro mide la cantidad de desorden introducido al sistema en la forma de enlaces “atajo” entre nodos lejanos, lo cual permite coeficientes de agrupamiento altos y longitudes características bajas. Finalmente, las *redes libres de escala* se basan en un proceso explícito de evolución temporal de la red que genera leyes de potencias en las distribuciones de grado. Tanto el efecto de mundo pequeño como la invariancia de escala son propiedades comúnmente observadas en redes reales, razón por la cual este tipo de topologías tienen un especial interés en el estudio de los sistemas complejos.

Junto con sus definiciones y ciertas notas históricas, se presentan algunos resultados numéricos y analíticos de las propiedades topológicas típicas de estas redes, como el coeficiente de agrupamiento C , la longitud característica L y la distribución de grado $P(k)$.

2.1. Redes ordenadas

De manera general, en una *red ordenada* los enlaces conectan nodos de acuerdo a una condición o algoritmo determinado que no tiene elementos aleatorios, y usualmente se asocia a una red geográfica donde los nodos se sitúan en puntos específicos de un espacio métrico. La clase más típica de redes ordenadas y utilizada como fundamento en la Física de Estado Sólido corresponde a las *redes cristalinas*, las cuales se construyen a partir de la infinita repetición de una unidad estructural de nodos, enlaces y coordenadas en el espacio (conocida como *base*) y normalmente se usan para modelar matemáticamente las estructuras periódicas de átomos y moléculas conocidas como cristales [9]. Formalmente, el conjunto de coordenadas \mathcal{C} asociado a una red cristalina en un espacio euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n está dado por

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i \vec{a}_i \mid u_i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (2.1)$$

donde $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n y sus componentes se conocen como los vectores fundamentales de traslación, pues combinaciones lineales de ellos generan traslaciones entre cualquier par de nodos en la red cristalina, y por tanto definen la simetría traslacional en n direcciones del sistema¹. Dependiendo de la dimensión n del espacio, existe un cierto número finito de redes que llenan completamente el espacio, las cuales también se conocen como *redes de Bravais*². Debido a su estructura relativamente simple, las redes de Bravais (como la red cuadrada bidimensional presentada en la figura (2.1a)) se pueden utilizar para encontrar soluciones exactas a modelos dinámicos definidos sobre ellas, lo cual ayuda al análisis de las propiedades de tales modelos y da una primera intuición acerca de su comportamiento en redes con topologías más complejas. De hecho, este procedimiento es utilizado por nosotros en el análisis de nuestro modelo coevolutivo en el capítulo 7, donde la dinámica se estudia tanto en redes cuadradas como en redes al azar.

Existen otros tipos de redes ordenadas cuya construcción se basa en una condición sobre alguna

¹A partir de esta definición, el concepto de red cristalina se puede extender de manera inmediata a espacios vectoriales arbitrarios sobre cualquier campo y a variedades diferenciales. Por otro lado, relajando la condición de una base única para la generación de la red, podemos preguntarnos por las posibles redes con múltiples bases que llenan completamente un espacio de dimensión dada, lo cual lleva a la llamada Teoría de Teselaciones.

²Para las dimensionalidades no triviales con relevancia física, $n = 2$ y $n = 3$, existen 5 y 14 redes de Bravais respectivamente. Dentro de la nomenclatura comúnmente utilizada en los estudios de cristalografía y estado sólido, las redes de Bravais en el caso $n = 3$ se generan combinando uno de los 7 sistemas de cristales (o sistemas axiales) con uno de los 4 centramientos de red [9].

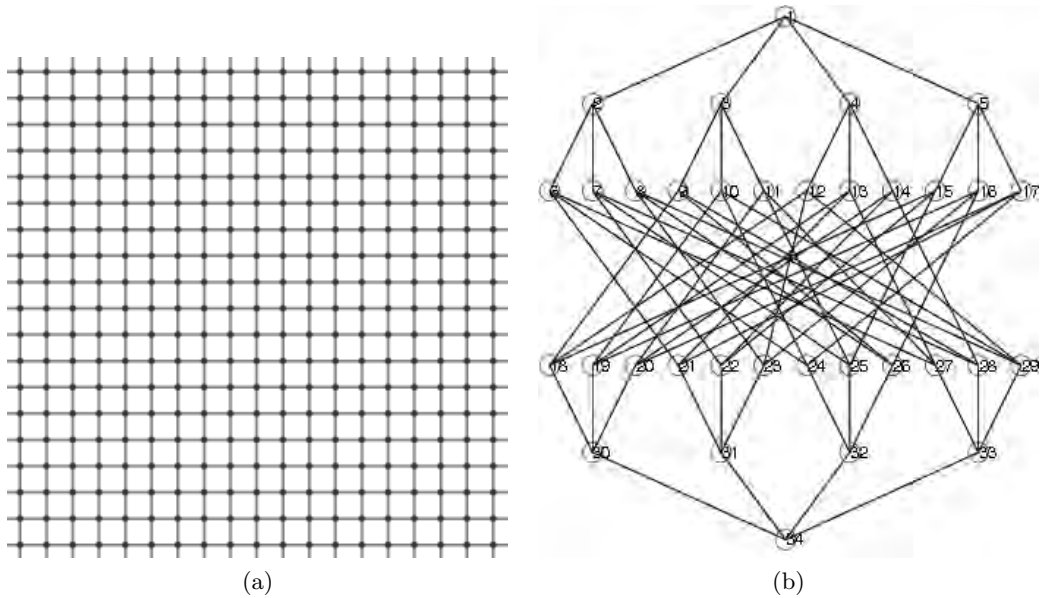


Figura 2.1: (a) Red cuadrada bidimensional con $N = 19^2$ nodos y (b) red exponencial ordenada con $N = 34$ nodos y grado $k = 4$, visualizada con el código presente en [51].

de las propiedades locales de la topología de la red. Por ejemplo, los *árboles* en Teoría de Gráficas son redes conexas sin ciclos en su interior [23], mientras que los *árboles de Cayley* (también conocidos como *redes de Bethe*³) son árboles donde todo nodo tiene el mismo grado constante k , excepto los nodos en la superficie del árbol (conocidos como *hojas*) que tienen conectividad igual a uno. En otras palabras, una red de Bethe está formada por $c + 1$ capas donde la primera capa tiene un solo nodo, los nodos en cada una de las $c - 1$ capas internas se conectan a $k - 1$ nodos en la capa siguiente y a uno en la capa anterior, y los nodos en la última capa (la superficie) sólo están conectados a un nodo en la capa anterior. A pesar de su simple estructura, una cualidad que hace a los árboles de Cayley interesantes es su pertenencia a la familia de objetos con dimensión infinita. Existen dos argumentos básicos para corroborar tal idea [1, 51]:

- Mientras que el volumen y la superficie de un objeto regular en \mathbb{R}^d con $d \in \mathbb{Z}$ (como la hipersfera en d dimensiones) obedecen la ley de escalamiento superficie \propto volumen ^{$1-1/d$} (y por tanto sólo en el límite $d \rightarrow \infty$ tenemos la relación superficie \propto volumen), en un árbol de Cayley con $k, c > 0$ dados el número de nodos en la superficie es $N_c = k(k - 1)^{c-1}$ y el número total de nodos en la red (el volumen) es⁴ $N = \sum_{i=0}^c N_i = [k(k - 1)^c - 2] / (k - 2)$, por lo que para c suficientemente grande tenemos $N_c \propto N$, es decir, la superficie del árbol es proporcional a su volumen y por tanto tenemos un objeto correspondiente al caso $d \rightarrow \infty$.

- Por otro lado, en las redes de Bravais definidas sobre \mathbb{R}^d el número de caminatas de una

³La aproximación de Bethe-Peierls para modelos de espines es de hecho exacta en un árbol de Cayley, de ahí el nombre alternativo.

⁴Claramente, la primera capa cumple $N_0 = 1$.

longitud dada crece mucho más rápido que el número de ciclos de la misma longitud conforme d aumenta, por lo que para $d \rightarrow \infty$ es mucho más probable encontrar caminatas que ciclos en la red. Como por definición un árbol de Cayley no tiene ciclos, éste corresponde al caso de infinita dimensionalidad $d \rightarrow \infty$.

Si las superficies de dos redes de Bethe con los mismos parámetros $k, c < \infty$ se unen de tal manera que los nodos sean topológicamente equivalentes⁵, se tiene una *red exponencial ordenada* [51, 52] como la que se muestra en la figura (2.1b), donde la palabra exponencial se deriva de la forma funcional de N_i con el número de capa i en cada árbol de Cayley que conforma la red. En las referencias anteriores se muestra que debido a su robustez ante ataques, el reducido tamaño de las geodésicas en términos del tamaño de la red y su estructura completamente determinista, las redes exponenciales ordenadas son útiles para encontrar soluciones analíticas a problemas de difusión y caminantes aleatorios como los que se estudian en redes al azar, y han sido utilizadas con éxito para simular redes de guías de onda que filtran frecuencias específicas y redes de neuronas.

No obstante, aunque las propiedades deterministas y de equivalencia de nodos presentes en las redes ordenadas en general proveen resultados interesantes en el estudio de sistemas dinámicos definidos sobre ellas, resulta fundamental estudiar el papel del desorden en estos sistemas, es decir, saber cómo la introducción de factores aleatorios en las estructuras de red puede afectar el comportamiento de las variables dinámicas a lo largo del tiempo, y si el orden o el desorden es un requerimiento básico para la presencia y sustentamiento de propiedades emergentes y colectivas en el sistema. Para cumplir tal propósito, en las siguientes secciones se hace una pequeña revisión de las estructuras de red con elementos aleatorios, empezando por las redes al azar de Erdős - Rényi.

2.2. Redes al azar: modelo de Erdős - Rényi

Con el fin original de estudiar las propiedades de las gráficas como función del número de enlaces aleatorios en ellas con métodos probabilísticos, en 1959 Paul Erdős y Alfréd Rényi iniciaron el estudio de las *redes al azar* o *redes aleatorias* $G_{N,E}^{er}$, definidas como las gráficas no dirigidas con N nodos conectados por E enlaces seleccionados de manera aleatoria entre los $N(N-1)/2$ posibles [25], es decir, el conjunto de $\binom{N(N-1)/2}{E}$ gráficas con N nodos y E enlaces que forman un espacio probabilístico (o ensamble estadístico) donde cada realización (una gráfica aleatoria específica) es igualmente probable [1]. Una forma alternativa de definir las redes aleatorias se basa en el modelo binomial, donde una gráfica al azar $G_{N,p}^{er}$ tiene N nodos y cada par de ellos está conectado

⁵En otras palabras, de forma tal que el ciclo mínimo al que pertenece cualquier nodo sea de la misma longitud y que los grados de todos los nodos sean iguales.

con una probabilidad $0 < p < 1$, por lo que el número de enlaces tiene un valor esperado de $\langle E \rangle = pN(N-1)/2$, y todas las redes $G_{N,p}^{er}$ forman un ensamble estadístico diferente donde las gráficas $G_{N,E}^{er}$ aparecen con probabilidad $p^E(1-p)^{N(N-1)/2-E}$. Los espacios probabilísticos correspondientes a estos dos procesos coinciden entre sí en el límite $N \rightarrow \infty$ al mantener el grado promedio $\langle k \rangle$ fijo [2, 53, 54]. Mientras que el primer proceso de construcción de redes al azar es pertinente en las simulaciones numéricas, el segundo proceso es más formal desde el punto de vista matemático y bastante útil para encontrar predicciones analíticas, algunas de las cuales se ven a continuación.

El grado promedio y el coeficiente de agrupamiento de una red al azar tienen una relación relativamente simple, utilizada más adelante en el análisis de campo medio de nuestro modelo coevolutivo. Por un lado, el valor esperado del número de enlaces en una red aleatoria y la relación general dada por la ecuación (1.7) se pueden combinar para encontrar que el grado promedio de $G_{N,p}^{er}$ está dado por $\langle k \rangle = 2 \langle E \rangle / N = p(N-1) \simeq pN$ para N grande. Por otro lado, según la ecuación (1.15), el coeficiente de agrupamiento local de un nodo con grado k es $C_i = 2n_i^\Delta / [k(k-1)] = p = C$, pues la probabilidad de tener un enlace entre cualquier par de vecinos de i es p (es decir, hay $pk(k-1)/2$ triángulos que contienen a i) y esto se cumple para cualquier nodo i . Así, las propiedades locales $\langle k \rangle$ y C en $G_{N,p}^{er}$ están relacionadas por

$$C = \frac{\langle k \rangle}{N}. \quad (2.2)$$

La longitud característica L en una red al azar también tiene una forma peculiar. Para encontrarla es útil definir $n_i^{(d)}$ como el número de d -avos vecinos del nodo i , es decir, el número de vértices cuya geodésica con i tiene longitud d . De esta forma, encontramos de manera inmediata que el número de primeros vecinos es $n_i^{(1)} = \langle k \rangle = pN$, pero para encontrar los valores de $n_i^{(d)}$ para $d > 1$ es necesario realizar ciertas aproximaciones. Como se ha visto en la sección 2.1, en un árbol de Cayley de grado k el número de d -avos vecinos del nodo central (es decir, el tamaño de la d -ava capa del árbol) es $N_d = k(k-1)^{d-1} \simeq k^d$, así que podemos aproximar $n_i^{(d)}$ por este valor siempre y cuando el número de ciclos en $G_{N,p}^{er}$ sea despreciable, pues la presencia de ciclos hace que algunos nodos contados en realidad tengan geodésicas con tamaño menor a d . En el límite $N \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$ tal que $pN = \langle k \rangle$ sea una constante esta condición se cumple⁶, así que podemos escribir $n_i^{(d)} \simeq \langle k \rangle^d$ con d cualquier distancia en la red. Por otro lado, tenemos la condición general⁷ $N = 1 + \sum_{d=1}^{d_{max}} n_i^{(d)}$

⁶Esto es especialmente claro en el caso de los segundos vecinos del nodo i , pues bajo la condición $N \rightarrow \infty$ con $\langle k \rangle$ constante y siguiendo la ecuación (2.2) tenemos $C \rightarrow 0$, lo cual nos dice que el número de triángulos (ciclos de longitud 3) que incluyen a i es despreciable.

⁷Por simplicidad, consideramos que $G_{N,p}^{er}$ es conexa, aunque estas consideraciones se pueden generalizar al caso disconexo.

(donde d_{max} es la longitud máxima de geodésica alcanzada desde i , también conocida como *diámetro*), una suma cuyos términos relevantes deben estar concentrados alrededor de $d = L$, pues L es la longitud promedio de las geodésicas en la red. De esta forma, despreciando los demás términos en la suma y tomando en cuenta la aproximación anterior podemos escribir $N \simeq \langle k \rangle^L$, es decir,

$$L \simeq \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}. \quad (2.3)$$

En otras palabras, la longitud característica de la red crece de forma logarítmica con el tamaño de ésta, por lo que para redes grandes tenemos distancias exponencialmente pequeñas entre sus nodos, lo cual se conoce como el *efecto de mundo pequeño* en las redes. Como se ve en la siguiente sección, las redes construidas según el modelo de Watts-Strogatz también poseen esta cualidad, pero la implementan con la posibilidad de tener un coeficiente de agrupamiento elevado, es decir, son redes con geodésicas pequeñas y muchos ciclos de longitud pequeña, lo cual no se encuentra en las redes aleatorias, como ya se ha constatado.

Para terminar esta pequeña revisión de las redes al azar de Erdős-Rényi consideramos la distribución de grado $P(k)$. Despreciando las posibles correlaciones entre los grados de los nodos en $G_{N,p}^{er}$ bajo la hipótesis de N suficientemente grande, para tener un nodo con grado k se requieren k conexiones con probabilidad p y $N - 1 - k$ ausencias de conexión con probabilidad $1 - p$, lo cual puede suceder de $\binom{N-1}{k}$ formas distintas, por lo que la distribución de grado es de hecho la *distribución binomial* $P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$, la cual está correctamente normalizada pues $\sum_{k=1}^{N-1} P(k) = [p + (1-p)]^{N-1} = 1$ [22]. En el ya conocido caso límite de $N \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$ con $pN = \langle k \rangle$ constante podemos aproximar tal expresión por una distribución de Poisson $(pN)^k \exp^{-pN} / k!$, es decir,

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^k \exp^{-\langle k \rangle}}{k!}, \quad (2.4)$$

razón por la que esta clase de redes aleatorias normalmente se conocen como *redes al azar de Poisson* [2, 5].

Las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) resumen las propiedades fundamentales de las redes al azar, las cuales resultan en una útil primera aproximación a cualquier red real con cierto grado de desorden debido a sus características analíticas simples y los reducidos requerimientos de su construcción. Sin embargo, en la descripción de muchos fenómenos naturales normalmente se encuentran redes que no tienen relaciones lineales entre $\langle k \rangle$ y C , o en las cuales la distribución de grado no es de tipo Poisson, sino posee una estructura auto-similar típica de las leyes de potencia o una forma altamente

no simétrica con colas alargadas, por lo que es necesario utilizar otro tipo de redes desordenadas que presenten esta clase de propiedades. En primer lugar se revisa un modelo de redes que presentan geodésicas característicamente pequeñas, las redes de mundo pequeño de Watts - Strogatz.

2.3. Redes de mundo pequeño: modelo de Watts - Strogatz

Como se menciona en la sección anterior, el fenómeno de mundo pequeño se presenta cuando las geodésicas entre nodos en una red son relativamente pequeñas a pesar del gran tamaño de ésta, lo cual usualmente se relaciona con la cantidad de desorden en la estructura de la red⁸. La primera evidencia real del efecto de mundo pequeño fue investigada por Stanley Milgram en el ámbito de las cadenas de conocidos en una red social [14, 55]. En este experimento fue requerido que personas en Nebraska hicieran llegar cartas a individuos en Boston con nombres, ocupaciones y direcciones determinadas, bajo la única condición de que las cartas fueran intercambiadas entre conocidos, es decir, entre personas que se hablaran por su primer nombre. Aunque se pensaba que el número de intercambios necesarios podría llegar a varios centenares, el resultado impresionante obtenido por Milgram fue que se necesitaba un número promedio de 6 pasos para alcanzar el objetivo final, es decir, a pesar del gran tamaño de la red (la población de Estados Unidos) las geodésicas entre conocidos tienen un tamaño muy pequeño. Con la motivación de este descubrimiento, en los años subsecuentes se encontraron y estudiaron muchas redes con el efecto de mundo pequeño en áreas sociales, biológicas, tecnológicas y semánticas [1–3], lo que en 1998 llevó a Duncan Watts y Steven Strogatz a proponer un modelo de *redes de mundo pequeño*, las cuales comparten valores pequeños de L (como las redes aleatorias) y valores altos de C (como las redes ordenadas) [33]. En la formulación original, una red de mundo pequeño $G_{N,E}^{mp}$ se genera a partir de un *anillo* de N nodos, donde cada vértice tiene enlaces con sus $2m$ vecinos más cercanos para dar un total de $E = mN$ enlaces. Después, los nodos se seleccionan individualmente y cada uno de sus enlaces se reconecta a un nodo al azar con probabilidad p , generando pmN conexiones de largo alcance (o *atajos*) no presentes en el anillo original. De esta forma, como se muestra en la figura (2.2a), tenemos una transición continua desde una red ordenada ($p = 0$) a una red al azar⁹ ($p = 1$) donde la región intermedia $0 < p < 1$ caracteriza a las redes de mundo pequeño debido a la presencia de tales atajos.

⁸Por ejemplo, en una red de Bravais hipercúbica en d dimensiones las longitudes de geodésica se escalan con el tamaño N de la red como $N^{1/d}$, mientras que en una red al azar, como se ha visto en la sección 2.2, la longitud característica L crece tan sólo de manera logarítmica con N . En otras palabras, típicamente las redes ordenadas presentan geodésicas más grandes que las redes desordenadas, aunque esto no sucede con las redes exponenciales ordenadas.

⁹Formalmente, la red al azar correspondiente a $p = 1$ tiene una constricción de grado mínimo $k_{min} = m$ para cada uno de sus nodos, es decir, conserva una cierta “memoria” de su proceso de construcción y por tanto no es una red aleatoria equivalente a la estudiada en la sección anterior.

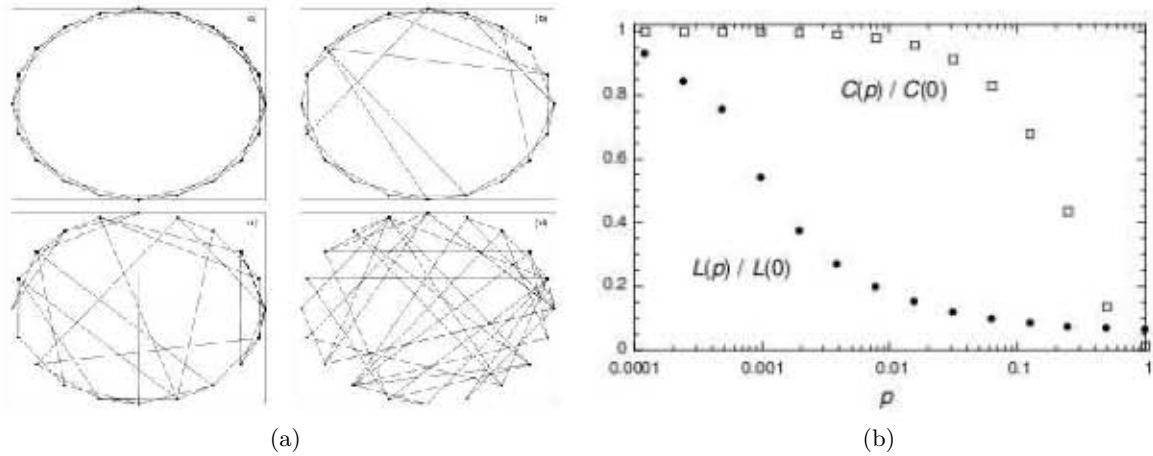


Figura 2.2: (a) Diagrama del proceso de generación de redes de mundo pequeño de Watts-Strogatz como función de p , con redes ordenadas para $p = 0$ (aa), redes de mundo pequeño para valores intermedios de p (ab-ac), y redes aleatorias para $p = 1$ (ad); tomado de [32]. (b) Longitud característica L y coeficiente de agrupamiento C como función de la probabilidad p en $G_{N,E}^{mp}$, normalizados por sus valores correspondientes en la red ordenada inicial, para $N = 1000$ y $\langle k \rangle = 10$; tomado de [33].

En la figura (2.2b) se presenta uno de los cálculos numéricos de [33] que compara la longitud característica L y el coeficiente de agrupamiento C de la red como función de p , y muestra claramente la “región de mundo pequeño” donde se cumplen las condiciones cualitativas [51]

$$\begin{aligned}
 L_{\text{ordenada}} &\gg L_{\text{mundo pequeño}} > L_{\text{azar}} \\
 C_{\text{ordenada}} &> C_{\text{mundo pequeño}} \gg C_{\text{azar}}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

para una región considerable de p . La formulación original del modelo de Watts - Strogatz (*con reconexiones*), aunque bastante intuitiva, presenta dos problemas fundamentales que dificultan su tratamiento analítico. Por un lado la reconexión de nodos puede provocar que alguna componente de la red se desconecte del resto, de tal manera que (siguiendo la ecuación (1.20)) la longitud característica para toda la red no sea finita y tengamos que hacer un análisis separado para cada componente. Por el otro, el hecho de que sólo una de las terminaciones de cada enlace sea reconectado al azar sin formar auto-enlaces o enlaces múltiples introduce una asimetría en el ensamble estadístico de $G_{N,E}^{mp}$ que dificulta el cálculo de promedios sobre él [5]. Para evitar tales situaciones, en [56] se propone una construcción alternativa (*sin reconexiones*) en la que atajos entre pares de nodos del anillo seleccionados al azar se introducen de acuerdo a un parámetro p , definido como la probabilidad por enlace del anillo inicial de que haya un atajo en algún lugar de la red. De esta forma el número de atajos es igual al caso anterior (pmN), $G_{N,E}^{mp}$ permanece conexa y su ensamble estadístico es

simétrico¹⁰.

Sin importar la formulación específica que se seleccione, podemos buscar formas aproximadas de las propiedades topológicas de la red como se hizo en el caso de las redes aleatorias. En cuanto al coeficiente de agrupamiento $C(p)$ en la formulación con reconexiones, se observa que para $p = 0$ (el anillo) el número de triángulos que incluyen a un nodo i cualquiera es $n_0^\Delta = 3m(m-1)/2$, por lo que $C(0) = 3(m-1)/[2(2m-1)]$. Para $p > 0$, la probabilidad de que dos vecinos de i conectados entre sí en $p = 0$ sigan siendo vecinos de i conectados entre sí es $(1-p)^3$ hasta términos del orden de $1/N$, por lo que el número promedio de enlaces entre los vecinos de i es $n_0^\Delta(1-p)^3 + \mathcal{O}(1/N)$. Ahora bien, si en vez de utilizar la expresión (1.16) del coeficiente de agrupamiento como un promedio de la razón usamos una razón de promedios (como el coeficiente de transitividad de la ecuación (1.14)), es decir, redefiniendo $\tilde{C}(p)$ como la razón entre el promedio de triángulos que contienen a i y el promedio del máximo número de triángulos que contienen a i , podemos escribir [2, 32]

$$C(p) \sim \tilde{C}(p) = \frac{3(m-1)}{2(2m-1)}(1-p)^3. \quad (2.6)$$

De forma alternativa, en el modelo sin reconexiones se puede derivar [5, 57] que

$$C(p) = \frac{3(m-1)}{2(2m-1) + 4mp(p+2)}. \quad (2.7)$$

Desde el trabajo inicial de Watts y Strogatz, gran parte del trabajo numérico y analítico en redes de mundo pequeño se concentró en la longitud característica L , y aunque aún no se tiene una solución general completa, se conocen varios resultados parciales, relaciones de escalamiento y aproximaciones. Sin entrar en detalles innecesarios, en [56] se realiza un tratamiento con el grupo de renormalización del modelo sin reconexiones para encontrar una relación de escalamiento de tamaño finito

$$L = \frac{N}{m} f(pmN), \quad (2.8)$$

donde la función $f(a)$ del número $a = pmN$ de atajos en la red (encontrada por un análisis de campo medio para valores extremos de a [58]) toma la forma

$$f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 2a}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{a+2}}. \quad (2.9)$$

¹⁰Como se explica al final de esta sección, en la formulación con reconexiones el grado promedio $\langle k \rangle = 2m$ es constante en el sentido que no depende de N y p . Por el otro lado, en la formulación sin reconexiones la adición de enlaces al azar hace que $\langle k \rangle$ ya no sea constante, como se puede derivar directamente de la ecuación (1.7), y tiene el valor $\langle k \rangle = 2mN(p+1)$.

Finalmente consideramos las distribuciones de probabilidad de grado $P(k)$. En la formulación con reconexiones, m de los $2m$ enlaces iniciales de cada nodo no se modifican, por lo que el grado del nodo i se puede escribir como $k_i = m + n_i$ donde $n_i \geq 0$ se puede dividir en dos partes: $n_i^1 \leq m$ enlaces que no se modifican con probabilidad $1 - p$ (y por tanto siguen una distribución binomial $P_1(n_i^1) = \binom{m}{n_i^1} (1-p)^{n_i^1} p^{m-n_i^1}$) y $n_i^2 = n_i - n_i^1$ enlaces que se reconectan hacia i con probabilidad p/N (es decir, siguen una distribución de Poisson $P_2(n_i^2) = [(pm)^{n_i^2}/n_i^2!] \exp(-pm)$ para N grande) por lo que la distribución de grado completa tiene la forma [32]

$$P(k) = \sum_{i=0}^{\min(k-m, m)} \binom{m}{i} (1-p)^i p^{m-i} \frac{(pm)^{k-m-i}}{(k-m-i)!} \exp(-pm) \quad (2.10)$$

para $k \geq m$, y es 0 en el caso contrario. En el modelo sin reconexiones tenemos un anillo con grado $2m$ más un conjunto de atajos distribuidos sobre él de manera binomial, por lo que la distribución de probabilidad toma la forma simple [5]

$$P(k) = \binom{N}{k-2m} \left(\frac{2pm}{N}\right)^{k-2m} \left(1 - \frac{2pm}{N}\right)^{N-k+2m} \quad (2.11)$$

para $k \geq 2m$, y es 0 en el caso contrario.

Para concluir esta sección podemos comentar algo más acerca de las diferencias entre las dos formulaciones de las redes de mundo pequeño. Como ya se ha mencionado, en la formulación con reconexiones los enlaces del anillo original se reconectan aleatoriamente y por tanto el grado promedio tiene el valor constante $\langle k \rangle = 2m$, pues no se agregan nuevos enlaces a la red. Sin embargo, para N grande y a orden p^{2m} (o más alto) existe una probabilidad finita de que una parte de la red se desconecte del resto y por tanto dé una contribución infinita a la longitud característica promedio. Por el otro lado, en la formulación sin reconexiones se agregan enlaces entre pares aleatorios de nodos, por lo que la longitud característica promedio se mantiene siempre finita y el análisis matemático es más sencillo. No obstante, la adición de nuevos enlaces a la red hace que el grado promedio tenga ahora el valor $\langle k \rangle = 2mN(p+1)$, el cual es en general más grande que el grado promedio del anillo inicial. Curiosamente, para N grande las dos formulaciones tienen la *misma* longitud característica hasta el orden p^{2m-1} [56].

2.4. Redes libres de escala: modelo de Barabási - Albert

Aunque las redes ordenadas y aleatorias logran describir algunas de las propiedades topológicas de las redes reales, su capacidad de descripción es esencialmente estática, pues no consideran ni

introducen en su estructura la evolución temporal de la topología de la gráfica. A fin de predecir las propiedades libres de escala encontradas de forma experimental en muchas redes tecnológicas, biológicas y sociales (como la Internet, la WWW, ciertas redes genéticas y de colaboración científica), el modelo de Albert-László Barabási y Réka Albert [26, 35] introduce de manera explícita dicha evolución temporal a través de dos procesos característicos: el *crecimiento* de la red y la *conexión preferencial* de nodos¹¹. A diferencia de las gráficas desordenadas analizadas con anterioridad, donde el número N de nodos está fijo y las conexiones entre ellos se introducen o reordenan de forma aleatoria, en las redes de Barabási - Albert el *crecimiento* implica que nuevos vértices se añaden a la red de acuerdo a una tasa específica durante todo su proceso de generación, mientras que la *conexión preferencial* nos dice que la probabilidad de conectarse a un nodo depende de alguna de sus características topológicas locales, como el grado¹². Estos dos procesos se incluyen específicamente para describir el desarrollo relativamente rápido de redes como la Internet y la WWW, donde nuevos routers y páginas web se introducen todo el tiempo, y sus conexiones generalmente se dirigen a routers y páginas web pre-existentes con cierta autoridad en la red debido a su gran número de enlaces. Formalmente, una *red libre de escala* de Barabási - Albert $G_{N,E}^{le}$ se inicia con un conjunto pequeño de N_0 nodos sin enlaces entre ellos, y en cada paso de tiempo un nuevo nodo se introduce con $E_0 \leq N_0$ enlaces (el crecimiento de la red), el cual se conecta a los viejos nodos i con una probabilidad $\Pi(k_i)$ proporcional al grado k_i de cada viejo nodo (la conexión preferencial), es decir,

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (2.12)$$

por lo que después de t pasos la red tiene $N = N_0 + t$ nodos y $E = E_0 t$ enlaces. A partir de simulaciones numéricas se puede ver [26] que este proceso lleva la red a un estado invariante de escala donde la distribución de grado es una *ley de potencias* $P(k) \propto k^{-\gamma}$ con un exponente característico $\gamma \sim 3$, de donde las redes de Barabási-Albert toman su nombre.

Existen diversos métodos analíticos para derivar la distribución de grado de $G_{N,E}^{le}$. La forma más sencilla e intuitiva es una teoría del continuo enfocada en la dinámica de los grados de los nodos de la red, desarrollada por Barabási y Albert junto con la presentación del modelo. En este caso k_i se

¹¹También podemos construir gráficas invariantes de escala sin una evolución temporal explícita, conocidas en la literatura como *redes libres de escala estáticas* [2]. Tales redes son simplemente una generalización de las redes aleatorias, donde se pide como restricción tener una ley de potencias en la distribución de grado en vez de una distribución de Poisson.

¹²El concepto de conexión preferencial tiene muchos antecedentes, como los procesos de Yule para explicar las relativas abundancias de especies y géneros en árboles taxonómicos en biología, el modelo de Simon en economía para describir las ganancias en una sociedad (normalmente conocido como el proceso en el cual “los ricos se hacen más ricos”, o como el “Efecto Mateo”), y el modelo de Price en redes de citas entre artículos científicos (donde la conexión preferencial se denomina *ventaja acumulativa*), por citar algunos ejemplos [5, 22].

considera una variable continua, y según la ecuación (2.12) su cambio en el tiempo está dado por

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = E_0 \Pi(k_i) = \frac{k_i}{2t}, \quad (2.13)$$

pues la suma de todos los grados en un tiempo dado es $\sum_j k_j = 2E_0 t$. Con la condición inicial $k_i(t_0) = E_0$ podemos integrar de manera inmediata y obtener

$$k_i(t) = E_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \quad (2.14)$$

es decir, los grados en la red siguen una ley de potencias con el tiempo. Con la ecuación (2.14) se observa que la probabilidad $P[k_i(t) < k]$ de que un nodo tenga grado menor a k es $P[k_i(t) < k] = P(t_0 > E_0^2 t / k^2)$, donde la distribución de tiempos t_0 tiene una densidad de probabilidad constante $P(t_0) = 1/N$ siempre y cuando los nodos se añadan a la red en intervalos de tiempo iguales. De esta forma podemos escribir

$$P\left(t_0 > \frac{E_0^2 t}{k^2}\right) = 1 - P\left(t_0 \leq \frac{E_0^2 t}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{N_0 + t} \frac{E_0^2 t}{k^2}, \quad (2.15)$$

pues $N = N_0 + t$, y sustituyendo la ecuación (2.15) en $P[k_i(t) < k]$ obtenemos

$$P(k) = \frac{\partial P[k_i(t) < k]}{\partial k} = \frac{2E_0^2 t}{N_0 + t} \frac{1}{k^3} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2E_0^2 k^{-3}, \quad (2.16)$$

por lo que asintóticamente $G_{N,E}^{le}$ tiene una distribución de grado libre de escala con exponente $\gamma = 3$ [1, 22]. Existen formas alternativas algo más rigurosas para derivar la distribución de grado de las redes de Barabási - Albert, basadas en ecuaciones maestras [4, 59] o en ecuaciones de tasas [60], las cuales son equivalentes a la teoría del continuo anterior en el límite asintótico $t \rightarrow \infty$ pero son más apropiadas para obtener resultados analíticos en sistemas libres de escala complicados, pues eliminan la hipótesis de grados continuos en la red.

Es interesante hacer notar que esta teoría del continuo también puede utilizarse para mostrar que el crecimiento y la conexión preferencial son requisitos indispensables para que $G_{N,E}^{le}$ sea una red libre de escala. Como se observa en [1, 26], en un modelo con crecimiento y una distribución $\Pi(k_i)$ constante (es decir, sin conexión preferencial) la distribución $P(k)$ decae exponencialmente con el grado, mientras que en un modelo sin crecimiento y con conexión preferencial (donde N permanece constante y en cada paso de tiempo un nodo se conecta a otro con probabilidad $\Pi(k_i)$ según la ecuación (2.12)) $P(k)$ fluctúa hasta alcanzar asintóticamente una distribución gaussiana.

De esta forma, siempre y cuando se mantengan estas dos características, el modelo de Barabási y Albert puede ser generalizado para que el exponente γ tenga otros valores, o para que el estado final de la gráfica presente propiedades más cercanas a las de la red real que se desea describir. Siguiendo esta filosofía se han diseñado varias extensiones al modelo de Barabási-Albert, donde el algoritmo de generación de la red se modifica para incluir parámetros de *aptitud* de los nodos en la expresión de $\Pi(k_i)$, para que los enlaces tengan su propia regla de crecimiento, o para que los nodos tengan una tasa de “desaparición” de la red, por ejemplo [5, 22].

A diferencia de las redes aleatorias donde el coeficiente de agrupamiento tiene la forma $C = \langle k \rangle N^{-1}$, o de las redes de mundo pequeño donde C es independiente de N , para $G_{N,E}^{le}$ el coeficiente C es aproximadamente cinco veces más grande que su equivalente en una red al azar y decrece con el tamaño de la red de acuerdo a la relación numérica $C \sim N^{-3/4}$ [1]. Como se ve en [61], un análisis de campo medio se puede llevar a cabo para mostrar que el coeficiente de agrupamiento local C_i no es tan homogéneo como en las otras redes desordenadas, y presenta desviaciones del coeficiente global especialmente para los nodos “viejos” (es decir, aquellos con $t_0 \ll t$). Más aún, en el caso de redes grandes ($t \gg 1$) y densas ($E_0 \gg 1$) se puede encontrar una expresión de campo medio de la forma

$$C = \frac{E_0^2(E_0 + 1)^2}{4(E_0 - 1)} \left[\ln \left(\frac{E_0 + 1}{E_0} \right) - \frac{1}{E_0 + 1} \right] \frac{[\ln t]^2}{t}, \quad (2.17)$$

que en este límite se puede aproximar por $C \sim (E_0 - 1)(\ln t)^2/8t$, es decir, el coeficiente de agrupamiento se escala como su equivalente en una gráfica aleatoria generalizada con una distribución de grado libre de escala como la de la ecuación (2.16)¹³. Finalmente, también se puede demostrar que tanto la longitud característica L [62] como el diámetro D [63] muestran un comportamiento de “ultra mundo pequeño”

$$L, D \sim \frac{\ln N}{\ln(\ln N)}, \quad (2.18)$$

con una doble corrección logarítmica a la dependencia logarítmica en N de las redes aleatorias.

2.5. Distribuciones de rango: la función tipo beta

Las leyes de potencias han sido comúnmente utilizadas para modelar un tipo especial de distribuciones de probabilidad conocidas como *distribuciones de rango*. Éstas dan la *frecuencia* relativa $p(r)$ con la cual los elementos de un sistema presentan un valor dado de una cierta propiedad medible,

¹³Formalmente, para realizar este análisis de campo medio es necesario suponer que la red inicial de $N_0 = E_0$ nodos está completamente conectada y que la probabilidad de conexión preferencial es $\Pi(k_i) = (E_0 k_i) / \sum_j k_j$, lo cual lleva a los mismos resultados de la teoría del continuo expresados en las ecuaciones (2.14) y (2.16).

como función de todos los valores de tal propiedad ordenados respecto a alguna regla de jerarquía, es decir, del *rango* r . Las distribuciones de rango son especialmente útiles para caracterizar sistemas formados por secuencias de símbolos, pues pueden describir la frecuencia de aparición de palabras o letras en un texto, de codones¹⁴ en genes, o de notas musicales en una composición, por ejemplo.

Uno de los resultados más famosos al respecto es la llamada *ley de Zipf*, desarrollada por el lingüista George Zipf en 1949 [64], la cual establece que la frecuencia relativa $p(r)$ de las palabras en un texto (el número de veces que una palabra aparece en el texto dividida entre el número total de palabras) como función del orden decreciente o rango $r = 1, \dots, R$ tiene la forma

$$p(r) = \frac{K}{r^\alpha}, \quad (2.19)$$

donde $r = 1$ corresponde a la palabra más abundante, $r = 2$ a la segunda, y así sucesivamente hasta la R -ésima palabra encontrada en el texto. K es una constante de normalización sin relevancia cualitativa. El exponente característico α define la magnitud de la pendiente negativa de la distribución en una escala logarítmica, como se muestra en la figura (2.3), lo cual se encuentra también en las distribuciones de grado libres de escala de la sección anterior.

Desde entonces, las leyes de potencias de la forma (2.19) han sido utilizadas con bastante éxito para ajustar distribuciones en sistemas físicos, sociales, tecnológicos, biológicos, económicos y lingüísticos [1, 2, 5]. Sin embargo, es común que las distribuciones reales se desvíen de la recta predicha por la ley de Zipf para rangos pequeños o grandes, que se conocen como las “colas” de la distribución [65, 66]. Esto es un efecto producido por el *tamaño finito* del sistema, el cual claramente no puede ser descrito por una distribución libre de escala como la ecuación (2.19).

Hasta donde sabemos, no existe aún una formulación teórica general que derive la distribución de rango de un sistema complejo a partir de principios básicos, es decir, que pueda explicar de forma satisfactoria la razón por la cual las colas de la distribución se alejan de una ley de potencias. Sin embargo, resulta coherente pensar que la naturaleza de tal formulación debe ser estadística, similar a la Mecánica Estadística de sistemas físicos de muchas partículas [10, 11], aunque las hipótesis deben ser corregidas para corresponder a las propiedades algo más generales de los sistemas complejos.

Como se menciona en la sección 1.1.2, podemos considerar la descripción de un fenómeno real como una *aproximación de orden cero* cuando la topología de la red está definida por un parámetro fijo (como el grado promedio en una red al azar), y como una *aproximación de primer orden* cuando existe una restricción sobre la distribución de grado del sistema (como en las redes libres de escala).

¹⁴Los codones son triplete de ácidos nucleicos que sirven para codificar aminoácidos.

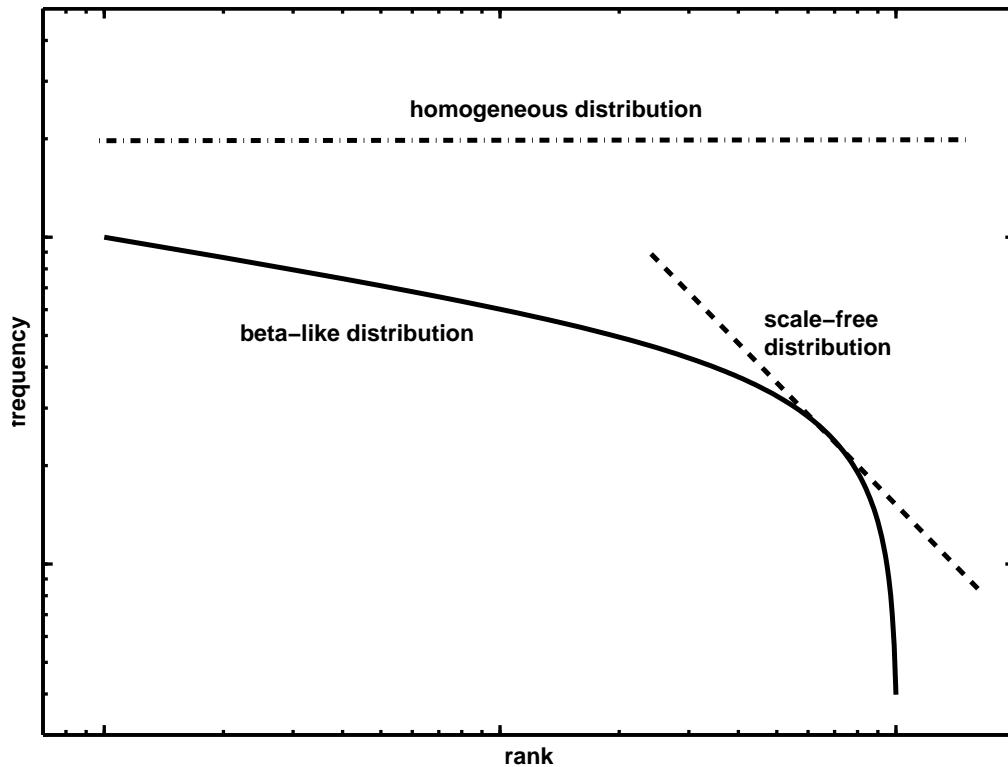


Figura 2.3: Representación esquemática de distintas distribuciones de rango en escala logarítmica, las cuales describen la forma en que los elementos de un sistema se distribuyen de acuerdo a su rango respecto a una propiedad dada. El rango es el valor medido de la propiedad para un elemento dado, mientras que la frecuencia es el número relativo de elementos del sistema que tienen un cierto rango. Se presentan tres distribuciones de rango: la distribución homogénea (líneas y puntos), la distribución libre de escala (línea punteada) y la distribución tipo beta (línea continua).

En cuanto a las distribuciones de rango, la aproximación de orden cero corresponde al caso en que los valores de la propiedad medida están uniformemente distribuidos sobre los elementos del sistema, por lo que la distribución de rango es homogénea y no se detecta una estructura en la red (observe la figura (2.3)). En la aproximación de primer orden existe una restricción sobre la distribución de rango, como la invariancia de escala. No obstante, en general los sistemas complejos presentan tres propiedades no consideradas por estas aproximaciones:

- *Existe una cantidad conservada.* De manera análoga a la energía en un sistema físico, se puede definir un parámetro cuyo valor no cambia con la dinámica del sistema complejo, como el valor máximo R del rango.
- *Existe una escala fija.* El tamaño N de la red fija una escala máxima para cualquier proceso dinámico dentro del sistema, por lo que se puede tener un conjunto de dinámicas que suceden a distintas escalas menores a ésta.

- *Las particiones existen, y no son arbitrarias.* El sistema complejo puede ser dividido en subsistemas que interactúan entre sí, pero la presencia de correlaciones indica que tales particiones no son arbitrarias, sino que dependen de la estructura y la función del sistema.

Tomemos ahora un sistema complejo que presenta estas tres propiedades, es decir, un sistema de tamaño N con rango máximo R y un conjunto de particiones no arbitrarias, dos en el caso más simple. Consideramos el subsistema formado por todos los elementos con rango menor o igual a $r < R$, cuyo número de microestados está dado por la función $\Omega(r)$. De manera análoga a lo que sucede en un sistema termodinámico en equilibrio, podemos suponer que el número de microestados se escala con el número de *grados de libertad* f del subsistema¹⁵, por lo que $\Omega(r) \sim r^f$. Como el rango máximo R es una cantidad conservada, el resto del sistema sólo puede tener un rango menor o igual a $r' = R - r$. Además, la presencia de correlaciones indica que el número de microestados del resto del sistema no puede tener la misma forma Ω , sino alguna otra función $\Omega'(r')$. Así, la probabilidad de que el subsistema tenga rango r cumple con la relación

$$p(r) \sim \Omega(r)\Omega'(R - r) \sim r^f(R - r)^{f'}, \quad (2.20)$$

donde f' es el número de grados de libertad del resto del sistema. En otras palabras, estamos analizando el caso más simple en que sólo hay dos escalas dinámicas en el sistema complejo, una para el subsistema con exponente característico f , y otra para el resto de la red con exponente f' .

Recientemente, una fórmula del tipo (2.20) se ha introducido de forma fenomenológica para ajustar las distribuciones de rango asociadas a ciertas composiciones musicales [67], los factores de impacto de revistas científicas [68], y diversos sistemas físicos, biológicos y sociales [65,66]. En estos trabajos se introduce la *función tipo beta*

$$p(r) = K \frac{(R + 1 - r)^b}{r^a}, \quad (2.21)$$

donde los exponentes a y b son ajustados a partir de los datos del sistema real, y la constante de normalización cumple la relación $K^{-1} = \sum_{r=1}^R [(R+1-r)^b/r^a]$. Esta distribución de dos parámetros, mostrada también en la figura (2.3), se ajusta muy bien en los valores extremos del rango donde las leyes de potencia dejan de funcionar, pues toma en cuenta un efecto de tamaño finito en el sistema.

Aunque la función de tipo beta ha sido ya derivada en un proceso estocástico multiplicativo

¹⁵Como se menciona de manera breve al final de esta sección, un problema teórico de esta derivación consiste en definir correctamente un grado de libertad en un sistema complejo.

como el límite asintótico de la distribución de rango de un producto sucesivo de números [66, 69], una derivación a partir de principios físicos básicos (como la que se acaba de sugerir) es un problema abierto de investigación. En particular, es necesario definir formalmente un grado de libertad en un sistema complejo. A diferencia de un sistema físico, donde los grados de libertad de una partícula tienen que ver con el espacio físico donde ésta reside, en un sistema complejo los grados de libertad de cada elemento no tienen que ser iguales, y pueden depender de la topología local de la red (como la conectividad del elemento). Tal definición sería útil para relacionar los exponentes teóricos f y f' de la ecuación (2.20) con los exponentes fenomenológicos a y b de la ecuación (2.21).

Capítulo 3

Función: dinámica sobre redes

Cuando la estructura de un fenómeno natural dado se establece con cierta topología de red, y considerando que la escala de tiempo en que tal red cambia es suficientemente grande como para que ésta pueda ser considerada estática, podemos analizar la *función* de sus elementos, es decir, la forma en que ciertas variables de estado definidas sobre los nodos de la red cambian en el tiempo de acuerdo a un sistema dinámico determinado. La evolución temporal de una variable de estado dependerá entonces de su ecuación de movimiento, el acoplamiento con las variables de estado de los elementos restantes, y la topología de red específica sobre la que se define el sistema dinámico. Como se presenta en la sección 1.2, el retrato fase de un sistema dinámico nos permite conocer el comportamiento cualitativo del fenómeno asociado, y la existencia de rompimientos espontáneos de simetría y bifurcaciones es fundamental para poder describir con éxito problemas tan diversos como la morfogénesis en procesos biológicos y ecológicos [37], las oscilaciones y sincronizaciones en sistemas químicos, celulares y de grupos de animales [38, 70, 71], la dispersión y propagación de enfermedades [27, 30, 72], el funcionamiento de redes metabólicas, neuronales y de expresión genética [2, 5], y muchos más.

En este capítulo se revisan tres dinámicas arquetípicas que se pueden definir sobre cualquier estructura de red: la *difusión* y el problema de caminantes aleatorios (cuyas características son especialmente claras y útiles en los modelos de reacción-difusión de Turing), los *procesos de propagación* de enfermedades (con los modelos básicos SIR y SIS), y la *sincronización* en sistemas oscilatorios (donde el ejemplo más representativo es el modelo de Kuramoto). Además de sus definiciones y propiedades básicas, se analizan las posibles bifurcaciones y transiciones de fase que estos modelos presentan, y la dependencia de sus valores críticos en la topología de la red subyacente.

3.1. Difusión y caminantes aleatorios

En 1828 el botánico Robert Brown hizo una serie de observaciones cuidadosas de la forma en que los pequeños granos de polen de una planta se mueven dentro de un recipiente con agua, aparentemente sin la necesidad de ningún movimiento macroscópico del fluido. La primera explicación teórica satisfactoria de este fenómeno (conocido como *movimiento browniano* en honor del botánico) fue iniciada por Albert Einstein en 1905¹, con una serie de artículos en los cuales adjudicó el movimiento de las partículas brownianas al choque incesante y aleatorio de éstas con las moléculas del fluido que las contiene, y estableció la base matemática de tal teoría en el “problema del caminante al azar”, uno de los primeros ejemplos de la relación entre procesos macroscópicos irreversibles y fluctuaciones microscópicas reversibles² [11].

Los elementos básicos del problema del caminante al azar se pueden apreciar considerando el caso lineal. Dada una red unidimensional donde los nodos (separados por una distancia característica l) representan las posibles posiciones $x(t)$ de una partícula browniana al tiempo t que se mueve debido a los impactos con las moléculas del fluido (que suceden en un tiempo característico τ) bajo la condición inicial $x(0) = 0$, podemos considerar que las probabilidades p_i, p_d de que un impacto dado mueva a la partícula a la izquierda o a la derecha son iguales, es decir, $p_i = p_d = 1/2$. Bajo esta condición, la probabilidad de que la partícula ocupe el nodo correspondiente a la posición x en el tiempo t es igual a la probabilidad de que después de $n = t/\tau$ saltos entre nodos la partícula haya tenido un desplazamiento neto $m = x/l$, o en otras palabras, la probabilidad de que haya $n_i = \frac{1}{2}(n - m)$ saltos a la izquierda y $n_d = \frac{1}{2}(n + m)$ a la derecha, por lo que tal probabilidad es una distribución binomial de la forma [11]

$$P_n(m) = \frac{n!}{n_i!n_d!} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (3.1)$$

de donde se obtiene inmediatamente que los primeros dos momentos de la distribución son $\langle m \rangle = 0$ y $\langle m^2 \rangle = n$, lo cual implica que el desplazamiento de la partícula tiene los valores promedio $\langle x(t) \rangle = 0$ y $\langle x^2(t) \rangle = l^2 t / \tau \propto t$. Esta proporción lineal entre el segundo momento y el tiempo es característica de los sistemas aleatorios y se presenta en muchos fenómenos naturales, en especial en aquellos donde la difusión es relevante [10]. Ahora bien, podemos utilizar la fórmula de Stirling

¹En 1906 Smoluchowski derivó los mismos resultados que Einstein, aunque usando un método matemático relativamente distinto basado en funciones generadoras.

²En general, las propiedades disipativas de un sistema (que generan procesos macroscópicos irreversibles) y las propiedades microscópicas en un estado de equilibrio (como las fluctuaciones de las variables estadísticas alrededor de sus valores promedio) se pueden relacionar formalmente a través de los *teoremas de fluctuación-disipación* en Mecánica Estadística.

$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ en el límite asintótico $n \rightarrow \infty$ para aproximar los factoriales en la ecuación (3.1) y escribir $P_n(m) \sim \sqrt{2/\pi n} \exp(-m^2/2n)$ en el régimen $m \ll n$, lo cual se puede expresar como la distribución gaussiana

$$p(x)dx = \frac{dx}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}, \quad (3.2)$$

considerando a x como una variable continua. En esta expresión el *coeficiente de difusión* D (una propiedad macroscópica) se escribe en términos de propiedades microscópicas del sistema (l y τ) a través de la relación de Einstein $D = l^2/2\tau$.

Para esclarecer esta relación fundamental entre las fluctuaciones microscópicas aleatorias (el movimiento del caminante al azar) y el comportamiento macroscópico del sistema, podemos analizar el movimiento de las partículas brownianas considerándolas en su conjunto como un fluido que se difunde. Si su densidad de número se denota por $n(\mathbf{r}, t)$ y su densidad de corriente por $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, podemos escribir la ley fenomenológica de Fick para la difusión de un fluido como $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -D\nabla n(\mathbf{r}, t)$ y la ecuación de continuidad como $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \partial n(\mathbf{r}, t)/\partial t = 0$, de donde se obtiene la *ecuación de difusión*

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 n(\mathbf{r}, t), \quad (3.3)$$

cuya solución típica bajo condiciones de frontera con simetría esférica es la expresión gaussiana

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-r^2/4Dt}, \quad (3.4)$$

con $N = \int_0^\infty n(\mathbf{r}, t)4\pi r^2 dr$ el número total de partículas brownianas en el fluido, que determina la constante de normalización de la expresión anterior. La ecuación (3.4) corresponde al caso tridimensional del resultado (3.2), y clarifica la estrecha relación entre los problemas de difusión y de caminantes aleatorios.

La ecuación de difusión (3.3) es un ejemplo simple y típico de la definición (1.23) de un sistema dinámico, $\partial s/\partial t = F_r(s, t)$, donde la evolución temporal de la única variable de estado $s = n(\mathbf{r}, t)$ es dictada por la función $F_r = r\nabla^2 s$ en términos del parámetro de bifurcación $r = D$. Aunque el operador laplaciano sólo está formalmente definido sobre espacios continuos diferenciables, su definición se puede aproximar para actuar sobre variables de estado s_i en posiciones discretas de una red como $\nabla^2 s_i = \sum_j (s_j - s_i) = \sum_j s_j - k_i s_i$ (donde el índice j corre sobre los primeros vecinos de i), lo cual es bastante útil para realizar simulaciones numéricas de procesos de difusión en la computadora. Un modelo que ejemplifica estas consideraciones se conoce como la *agregación limitada por difusión*, utilizado típicamente para describir procesos irreversibles de combinación de

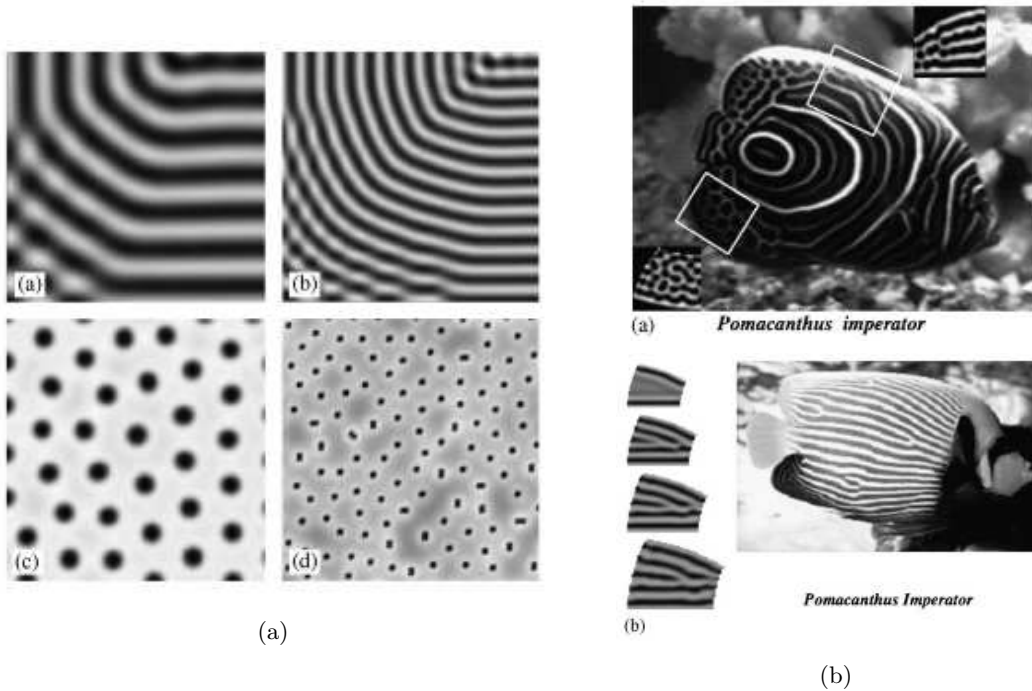


Figura 3.1: Algunos ejemplos básicos de patrones de Turing. En (a) se presentan soluciones numéricas del modelo BVAM con condiciones de frontera sin flujo, las cuales favorecen “rayas” si la interacción cúbica es fuerte (aa, ab), o “puntos” si la interacción cuadrática prevalece (ac, ad). En (b) se muestran imágenes del pez *Pomacanthus Imperator* en su forma juvenil (ba) y adulta (bb), con sus simulaciones numéricas correspondientes en dominios crecientes con la curvatura de la piel del pez. Tomado de [6].

materia que generan objetos aparentemente aleatorios como el polvo, el hollín y los crecimientos dendríticos [73]. En el juego que define este modelo una partícula se sitúa inicialmente en el centro de una red estática, y posteriormente partículas adicionales se agregan de manera sucesiva en la frontera de la red, las cuales se mueven como caminantes aleatorios hasta “depositarse” cerca de una partícula ya fija, formando finalmente un “agregado” comparable al tamaño de la red que presenta propiedades libres de escala. En otras palabras, la agregación limitada por difusión es una forma simple y prototípica de modelar el crecimiento fractal de procesos físicos como el depósito de partículas y la corrosión [22].

Como se menciona en el capítulo 1, otro ejemplo de cómo el proceso de difusión y los caminantes aleatorios se pueden utilizar para modelar procesos reales se encuentra en los sistemas de reacción-difusión de Turing. En 1952 el matemático Alan Turing propuso un modelo para describir la morfogénesis (la forma en que un huevo altamente simétrico toma una forma anatómica), en el cual estados uniformes que son estables en ausencia de difusión pueden volverse inestables en presencia de ésta y dar lugar a patrones espaciales estacionarios, conocidos como *patrones de Turing*. Este resultado es sorprendente, pues en general la difusión tiende a borrar toda estructura, y sin embargo en la bifurcación de Turing la difusión es la responsable de obtener estructura en un

medio homogéneo. Típicamente, un sistema de reacción-difusión generaliza la ecuación (3.3) con un conjunto de funciones no lineales $\{F_i\}$ que introduce la cinética de las reacciones químicas entre los morfógenos, es decir, está dado por ecuaciones de la forma [37]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \nabla^2 u_i + F_i(\{u_j\}, \{r_j\}), \quad (3.5)$$

donde u_i es la concentración del morfógeno i (la variable de estado) y D_i es el coeficiente de difusión correspondiente. En general el parámetro de bifurcación del sistema también depende del conjunto de parámetros $\{r_j\}$, los cuales están conectados con las constantes de reacción entre morfógenos. En el caso genérico de un sistema de dos morfógenos con concentraciones U y V cuya cinética química tiene un punto fijo en (U_0, V_0) , se puede expandir en serie de Taylor alrededor de tal punto fijo hasta tercer orden para obtener el denominado *modelo BVAM*³ [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D\delta \nabla^2 u + \alpha u(1 - r_1 v^2) + v(1 - r_2 u), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \delta \nabla^2 v + \beta v(1 + \frac{\alpha r_1}{\beta} uv) + u(\gamma + r_2 v), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $u = U - U_0$ y $v = V - V_0$ son las concentraciones respecto al punto fijo, δ es un factor de escala, D es la razón entre los coeficientes de difusión de los dos morfógenos, $r_{1,2}$ son parámetros de interacción que definen respectivamente la fuerza de las interacciones cúbica y cuadrática, y α , β y γ son parámetros generales que definen la porción del espacio fase a estudiar. Siguiendo a la ecuación de difusión, la ecuación (3.6) es un ejemplo algo más complicado de un sistema dinámico, donde las variables de estado u y v se acoplan de forma no lineal a través de $r_{1,2}$, y la variación de los parámetros α , β y γ define las posibles bifurcaciones del sistema.

Entre otros resultados correspondientes al modelo BVAM, se puede mostrar que bajo la condición $\alpha - 2\sqrt{\alpha D} > \beta D$ existe una región de Turing con patrones espaciales estacionarios (formados por “rayas” o “puntos” para interacciones cúbicas o cuadráticas fuertes respectivamente⁴, como se muestra en la figura (3.1a)), que el modelo presenta una bifurcación de Hopf, y que al relajar la condición $\alpha = -\gamma$ se pueden obtener soluciones de onda viajera, biestabilidad y solitones [6, 37]. Debido a esta riqueza de propiedades el modelo BVAM ha sido utilizado para describir numerosos fenómenos en la Naturaleza, entre los que se encuentran el desarrollo de los patrones en la piel de los peces *Pomacanthus* conforme éstos crecen (como se aprecia en la figura (3.1b)), el experimento de Faraday y su relación con la morfogénesis de los erizos de mar, la actividad eléctrica en corazones

³También conocido como el modelo Barrio-Varea-Aragón-Maini.

⁴Esto es válido para un espacio (u, v) plano sin flujo o con condiciones de frontera periódicas. En dimensiones mayores se pueden tener combinaciones más complicadas de estos patrones.

de mamíferos, algunos sistemas con difusión anómala, y mezclas de líquidos con interacciones no lineales [6]. También se han modelado los patrones en pieles de mantarrayas y bagres de agua dulce [74], en las alas duras de “lady bugs” [75], y en las alas de mariposas [76].

3.2. Procesos de propagación

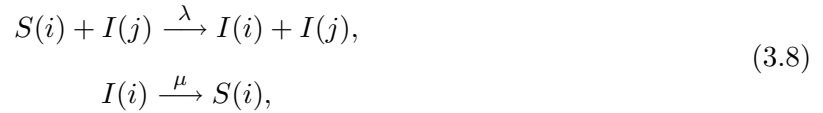
En términos generales, una *propagación epidémica* es el proceso por el cual una enfermedad infecciosa en particular se disemina por una población, y los modelos matemáticos asociados intentan describir su dinámica a fin de diseñar estrategias para controlar y erradicar la infección. Por el otro lado, en una *propagación de rumores* el fin consiste en favorecer la dispersión de “rumores” de la forma más eficiente posible, por lo que los modelos asociados se enfocan en diseñar dinámicas y encontrar estructuras de red que promuevan dicha diseminación [2]. Como el objetivo del presente capítulo consiste en analizar brevemente el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos en función de la topología de la red sobre la cual están definidos, por ahora sólo consideraremos algunos modelos arquetípicos de propagación epidémica, cuyas características generales son compartidas por la mayoría de los modelos de procesos de propagación.

Durante la segunda mitad del siglo XX el modelado matemático de los procesos de propagación epidémica se volvió una herramienta fundamental en el análisis de la dispersión y el posible control de enfermedades infecciosas, pues sus predicciones cuantitativas son bastante útiles en el diseño y optimización de programas de detección, prevención, terapia y control [77]. De manera adicional, desde la perspectiva de los físicos estos modelos resultan interesantes por su equivalencia con ciertos procesos de percolación, ya que entonces la estructura de la red sobre la cual se lleva a cabo la propagación epidémica es fundamental para determinar sus características dinámicas [27, 30, 72]. La forma usual de abordar teóricamente un proceso epidemiológico se basa en modelos compartimentales, es decir, modelos en los cuales los individuos se clasifican en grupos o clases de acuerdo a su estado de infección. En primer lugar se tiene la clase M de las personas nacidas con *inmunidad pasiva* y el grupo S de individuos *susceptibles* a la enfermedad. Cuando alguien de la clase S contrae la infección, entra al grupo *expuesto* E de las personas en estado latente, y eventualmente entra a la clase de *infecciosos* I pues ya puede transmitir la enfermedad. Finalmente, cualquier individuo que salga del periodo infeccioso al contraer inmunidad causada por la enfermedad (o muera), entra a la clase de *recuperados* (o *removidos*) R [77]. Así, podemos definir de manera inmediata dos modelos paradigmáticos de propagación epidémica al considerar tan sólo los grupos S, I y R: el *modelo susceptible-infeccioso-recuperado* (SIR) y el *modelo susceptible-infeccioso-susceptible* (SIS).

Como su nombre lo indica, en el modelo SIR los individuos sólo pueden estar en uno de tres estados, susceptible, infeccioso o recuperado. Las personas susceptibles se vuelven infecciosas con probabilidad λ si al menos uno de sus primeros vecinos en la red definida por el modelo está infectado, mientras que los individuos infecciosos se vuelven recuperados de forma espontánea con probabilidad μ . En otras palabras, para dos primeros vecinos i y j en la red del sistema el modelo SIR se resume esquemáticamente en las reglas dinámicas [2]



Por el otro lado, en el modelo SIS los individuos simplemente se mueven entre las clases de susceptibles e infecciosos, por lo que en este caso el parámetro λ regula la transferencia del grupo S al I, y el parámetro μ el paso de I a S. Así, el modelo SIS está definido por las reglas dinámicas [2]



donde, como antes, los nodos i y j son primeros vecinos en la red del sistema.

La primera simplificación de estos modelos que de hecho hace posible su escritura como sistemas dinámicos de la forma (1.23) se conoce en la literatura como *la hipótesis de la mezcla homogénea*, y presupone que los individuos infecciosos con los cuales un susceptible tiene contacto pueden ser escogidos al azar de la población entera. En otras palabras, esta hipótesis implica que la red del sistema es una red aleatoria sólo con constricciones sobre su distribución de grado⁵, y por tanto permite que las relaciones (3.7) y (3.8) se escriban como sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para las densidades de individuos en las clases S, I y R, denotadas por $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$ respectivamente. En el caso del modelo SIR, dicha homogeneidad topológica en la red nos permite escribir el sistema dinámico [2, 5, 27]

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\lambda \langle k \rangle i s, \\ \frac{di}{dt} &= \lambda \langle k \rangle i s - \mu i, \\ \frac{dr}{dt} &= \mu i, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $\langle k \rangle$ es el número de contactos con infecciosos por unidad de tiempo (constante para toda la población), y la condición de normalización $s(t) + i(t) + r(t) = 1 \forall t$ implica que el sistema (3.9) sólo

⁵Es decir, no tiene una estructura heterogénea y correlaciones en sus propiedades topológicas locales.

tiene dos ecuaciones independientes. Por el otro lado, el modelo SIS se puede escribir como [5]

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -\lambda \langle k \rangle i s + \mu i, \\ \frac{di}{dt} &= \lambda \langle k \rangle i s - \mu i.\end{aligned}\tag{3.10}$$

A diferencia del sistema (3.9), el modelo SIS no se puede resolver de manera exacta en una red específica⁶, pero el sistema (3.10) puede ser sustituido por una ecuación más sencilla en la aproximación de campo medio⁷. Si sólo nos interesa investigar el inicio de un estado epidémico en una red homogénea sin correlaciones, podemos no considerar términos de orden mayor y escribir una ecuación para la densidad de infecciosos en el régimen $i(t) \sim 0$, dada por⁸

$$\frac{di}{dt} = -i + \lambda \langle k \rangle i(1 - i),\tag{3.11}$$

donde el segundo término nos da la probabilidad en campo medio de la infección de un nuevo vértice, proporcional a la tasa de infección λ , a la probabilidad de que un nodo sea susceptible ($s = 1 - i$) y a la probabilidad de que haya un enlace entre un susceptible y un infeccioso (igual a $\langle k \rangle i$ en una red homogénea sin correlaciones) [27].

Uno de los resultados teóricos más interesantes en procesos de propagación es que, bajo la hipótesis de la mezcla homogénea (es decir, utilizando redes aleatorias), los modelos SIR y SIS presentan un umbral epidémico *distinto de cero* en función del parámetro $\sigma = \lambda/\mu$. En el caso del modelo SIR, existe un valor σ_c tal que para $\sigma > \sigma_c$ la infección se dispersa e infecta a una porción finita de la población, mientras que para $\sigma < \sigma_c$ el número total de individuos infectados⁹ $r_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$ es despreciable en el “límite termodinámico” de poblaciones muy grandes¹⁰. En el caso del modelo SIS bajo la aproximación de campo medio de la ecuación (3.11), el umbral epidémico es $\sigma_c = \lambda_c = \langle k \rangle^{-1}$, y define las regiones $\lambda < \lambda_c$ para la cual $i = 0$, y $\lambda \geq \lambda_c$ donde $i \sim (\lambda - \lambda_c)$ [2, 27]. Curiosamente, al sustituir la red aleatoria por una red libre de escala con o sin correlaciones y exponente característico $2 < \gamma \leq 3$ en el límite de redes muy grandes, el umbral epidémico *desaparece* para los modelos SIR y SIS [27, 72], lo cual implica que las propagaciones epidémicas son imposibles de evitar en redes reales libres de escala (como la Internet o ciertas redes de interacción sexual) bajo la aproximación de estos modelos.

⁶El modelo SIR tiene solución exacta en el límite de tiempos muy grandes.

⁷Como aquí también tenemos una condición de normalización, $s(t) + i(t) = 1 \forall t$, el sistema SIS sólo tiene una ecuación independiente.

⁸En este caso se supone $\mu = 1$ por simplicidad, siguiendo a la referencia [27].

⁹También conocido como *incidencia* o *prevalencia epidémica* [2, 27].

¹⁰Este fenómeno es de hecho equivalente a una transición de fase en un sistema físico, donde el umbral epidémico toma el lugar de un punto crítico y r_∞ es un parámetro de orden.

El estudio de la evolución temporal y el posible control de enfermedades puede extenderse al considerar una *propagación geográfica*, es decir, la forma en que una enfermedad infecciosa, el abuso de alguna droga o los rumores se dispersan en el tiempo y en el espacio. Para esto, generalizamos el modelo SIS al suponer que las poblaciones de susceptibles $S(x, t)$ e infecciosos $I(x, t)$ son funciones tanto del tiempo t como de la variable espacial x . Podemos modelar la dispersión espacial de S e I por una difusión simple de la forma (3.3) donde las dos poblaciones tienen el mismo coeficiente de difusión, y la dispersión temporal por las ecuaciones (3.8) y (3.10) que definen al modelo SIS. En este caso, nuestro interés reside en analizar la propagación *geotemporal* de una enfermedad en una población homogénea de susceptibles al introducir cierto número de infecciosos. Después de adimensionalizar las variables y parámetros del sistema, podemos escribir [78]

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -IS + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= IS - \sigma I + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde el único parámetro relevante es la *tasa de reproducción* $1/\sigma$, que mide el número de infecciones secundarias causadas por un infeccioso primario en una población de susceptibles. El parámetro σ también fija las dos escalas de tiempo relevantes en el problema: el tiempo de contagio de la enfermedad y la esperanza de vida de un infeccioso.

Como estamos interesados en la dispersión espacial de una onda de infección en una población uniforme de susceptibles, buscamos soluciones de onda viajera en el sistema (3.12) al exigir que se cumplan las condiciones

$$I(x, t) = I(z), \quad S(x, t) = S(z), \quad z = x - ct,\tag{3.13}$$

donde c es la *velocidad de propagación* a determinar. Esta solución representa un *frente de onda* de forma constante viajando en la dirección x positiva. Así, al sustituir las condiciones (3.13) en el sistema (3.12) obtenemos el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}I'' + cI' + I(S - \sigma) &= 0, \\ S'' + cS' - IS &= 0,\end{aligned}\tag{3.14}$$

donde la prima indica derivación con respecto a z . El problema de valores propios (3.14) implica encontrar los valores de σ para los cuales existe una solución con $c > 0$ y poblaciones S e I no negativas tales que se cumplan las condiciones de frontera $I(-\infty) = I(\infty) = 0$ y $0 \leq S(-\infty) <$

$S(\infty) = 1$. En otras palabras, el sistema (3.14) describe la situación en que un pulso de infecciosos se propaga en la población no infectada y produce un frente de onda epidémico que se mueve en la dirección espacial.

Sin entrar en detalles, la primera ecuación del sistema (3.14) se puede linealizar cerca del frente de onda (donde $S \rightarrow 1$ y $I \rightarrow 0$) para encontrar la relación de la velocidad de propagación [78]

$$c \geq 2(1 - \sigma)^{1/2}, \quad \sigma < 1, \quad (3.15)$$

que es la condición de existencia de soluciones de onda viajera en el sistema. La relación (3.15) tiene algunas consecuencias importantes para el control de una propagación epidémica. Por ejemplo, si $\sigma > 1$ no existe una solución de frente de onda y por tanto $\sigma_c = 1$ es el umbral epidémico de una propagación geográfica. Por el otro lado, una enfermedad muy fatal (para la cual el pulso de infecciosos se propaga rápidamente) de hecho disminuye la probabilidad de que haya una onda epidémica en la población, pues puede no cumplir con la condición (3.15).

3.3. Dinámicas colectivas y sincronización

Como último ejemplo de un grupo de dinámicas definidas sobre redes consideramos el asociado al fenómeno de *sincronización*, definido como un proceso por el cual muchos elementos (equivalente o no equivalentes) ajustan una propiedad de su movimiento debido a una configuración de acoplamiento adecuada, o por causa de un forzamiento externo [2]. En este caso, los elementos en movimiento (o cuyas propiedades varían en el tiempo) son representados por los nodos de la red, mientras que los enlaces entre nodos representan los acoplamientos en el sistema, es decir, la forma en que el movimiento de un elemento es influenciado por el de otro. Un ejemplo paradigmático de este fenómeno es la coordinación de los destellos producidos por luciérnagas, observada en algunos lugares del sur de Asia. En la noche conjuntos inmensos de luciérnagas pueden verse volando sobre los árboles, algunas de las cuales emiten luz de forma incoherente; sin embargo, después de un tiempo tales destellos se coordinan, generando un efecto visual impresionante [70, 71]. Los fenómenos naturales que presentan sincronización son innumerables, incluyendo las redes de células marcapasos en el corazón o en el núcleo supraquiasmático del cerebro, la sincronía metabólica en suspensiones de levadura, ciertos conjuntos de láseres, osciladores de microondas y juntas superconductoras [38], y muchos otros presentes en sistemas biológicos, químicos, físicos y sociales.

Históricamente, el proceso de sincronización fue observado por primera vez por el físico holandés

Christiaan Huygens en el siglo XVII, quién descubrió que las oscilaciones de fase de dos relojes de péndulo pueden sincronizarse perfectamente si están colgados de la misma viga, o si ambos se encuentran suficientemente cerca en una pared y por tanto están acoplados por las vibraciones en ésta [79]. Ya en el siglo XX, el tratamiento matemático de la sincronización fue desarrollado en términos de integrales de Fourier por Norbert Wiener, y posteriormente con un conjunto de osciladores de ciclo límite interactuantes por Arthur Winfree. Aunque ambas descripciones son prácticamente intratables de forma analítica, la segunda es bastante útil si consideramos que los osciladores son casi idénticos y los acoplamientos entre ellos relativamente débiles. Bajo esta aproximación el movimiento de cada elemento i del sistema se describe por su fase θ_i en el ciclo límite, y el efecto de los acoplamientos de tal oscilador con el resto de los $N - 1$ elementos del sistema se puede resumir en un sólo término¹¹, por lo que las ecuaciones de movimiento de tales *osciladores de fase* tienen la forma [38, 79]

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Z(\theta_i) \sum_{j=1}^N X(\theta_j), \quad (3.16)$$

donde ω_i es la frecuencia natural del oscilador i , $Z(\theta_i)$ es una función que representa la *sensibilidad* del elemento i respecto a la acción del resto del sistema, y $X(\theta_j)$ es una función que describe la *influencia* del oscilador j en todos los demás. A través de simulaciones numéricas y aproximaciones analíticas, Winfree encontró que la relación entre el ancho de la distribución de frecuencias naturales $g(\omega)$ y la fuerza del acoplamiento (que depende de las funciones de sensibilidad e influencia) determina el análogo temporal de una transición de fase entre dos comportamientos cualitativamente distintos del sistema: uno en el cual los elementos oscilan de forma incoherente siguiendo sus frecuencias naturales particulares, y otro en el cual un subconjunto de los osciladores fijan sus frecuencias y se mueven en sincronía. Esta idea básica de Winfree determina el arquetipo de los modelos matemáticos de procesos de sincronización, entre los cuales destaca el modelo de Kuramoto.

En 1975, Yoshiki Kuramoto utilizó un método perturbativo para promediar los términos de la ecuación (3.16), y considerando el caso más sencillo de una red completamente conectada donde los acoplamientos son equivalentes y tienen una forma sinusoidal, escribió el conocido *modelo de Kuramoto*,

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3.17)$$

donde $\epsilon \geq 0$ es la fuerza de acoplamiento (constante para todos los osciladores), el factor $1/N$

¹¹De manera similar a lo que sucede en las aproximaciones de campo medio en Física.

asegura un buen comportamiento del modelo en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$, y la distribución de frecuencias $g(\omega)$ es unimodal y simétrica respecto a su valor promedio ω_0 . La ecuación (3.17) es análoga al modelo XY en magnetismo¹². Este sistema presenta sincronización en términos de una transición de fase de segundo orden caracterizada por el parámetro de orden complejo

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (3.18)$$

es decir, el centroide de las fases, el cual puede interpretarse como el ritmo colectivo de la población entera. Aquí, el parámetro de orden $r(t)$ mide la coherencia de las fases y $\psi(t)$ la fase promedio, como se muestra en la figura (3.2a). Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.18) por $e^{-i\theta_i}$, igualando las partes imaginarias y sustituyendo en la ecuación (3.17), podemos escribir

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \epsilon r \sin(\psi - \theta_i), \quad (3.19)$$

una ecuación que muestra claramente la naturaleza de campo medio del modelo de Kuramoto, pues el oscilador i sólo interactúa con el resto a través de los parámetros de campo medio r y ψ . De acuerdo a este resultado, la fase θ_i se acerca a la fase promedio ψ , mientras que la proporcionalidad entre el acoplamiento efectivo ϵr y r crea una retroalimentación positiva entre tal acoplamiento y la coherencia del sistema: si una parte de la población es coherente, r crece y el acoplamiento efectivo aumenta, lo cual incluye más osciladores en el subconjunto sincronizado; en el caso contrario r disminuye y la sincronización se auto-limita. Así, el modelo de Kuramoto muestra de forma bastante evidente el mecanismo de sincronización espontánea presente en la ecuación de Winfree [8, 38].

Específicamente, la variación del parámetro de orden r nos permite pasar entre regiones sin o con sincronización en el sistema, es decir, muestra la transición de fase. En cuanto a los casos extremos, y de acuerdo a la ecuación (3.18), podemos ver que el valor $r = 0$ corresponde a una distribución aleatoria de las fases sobre todos sus posibles valores (es decir, alrededor del círculo unitario en el plano complejo) e implica por tanto una incoherencia completa, mientras que el valor $r = 1$ corresponde a una sincronía total del sistema. Kuramoto utilizó una condición de auto-consistencia para demostrar que, en las condiciones asintóticas $N \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow \infty$, el inicio de la sincronización (es decir, la transición de fase) se presenta con un valor crítico de la fuerza de acoplamiento $\epsilon_c = 2/\pi g(\omega_0)$. De hecho, mostró que para $\epsilon < \epsilon_c$ tenemos $r = 0$ y por tanto el sistema

¹²El modelo XY definido sobre una red ordenada de dos dimensiones *no* presenta una transición de fase de segundo orden, de acuerdo al teorema de Mermin-Wagner. Como el modelo de Kuramoto se define sobre una red completamente conectada, la dimensionalidad de la red es mucho mayor y por tanto sí puede existir una transición de fase.

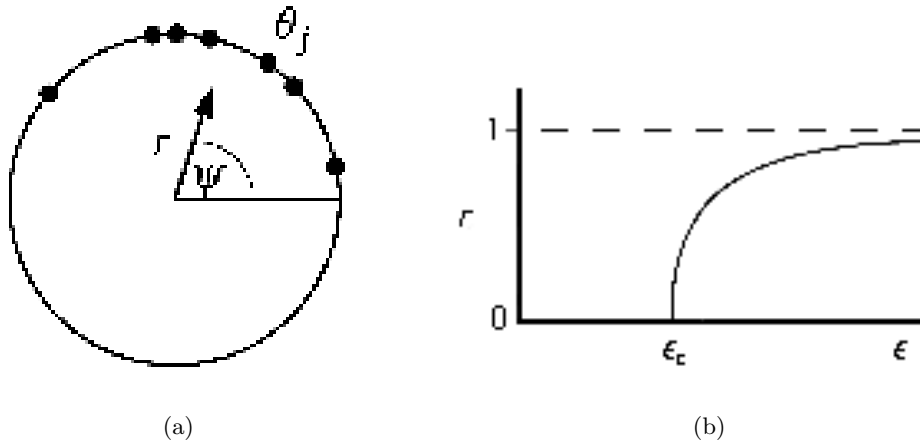


Figura 3.2: Algunas características del modelo de Kuramoto. En (a) se representa gráficamente el parámetro de orden complejo $re^{i\psi}$ (el centroide de las fases θ_j del sistema), donde r mide la coherencia de las fases y ψ es la fase promedio. En (b) se muestra el comportamiento asintótico del parámetro de orden r como función de la fuerza de acoplamiento ϵ .

no presenta sincronía, mientras que para $\epsilon \geq \epsilon_c$ el parámetro de orden se escala como $r \sim \sqrt{\epsilon - \epsilon_c}$ y un subconjunto de los elementos se sincroniza. Finalmente, cuando ϵ es muy grande el sistema completo entra en un estado de sincronización y $r \simeq 1$. Estos comportamientos se presentan de forma esquemática en la figura (3.2b).

De manera similar a lo que sucede con los modelos de propagación epidémica de la sección anterior, el comportamiento del modelo de Kuramoto puede cambiar drásticamente si sustituimos la red completamente conectada por redes desordenadas como las presentadas en el capítulo 2. Por ejemplo, en las referencias [79, 80] se estudian numérica y analíticamente las condiciones de sincronización del modelo de Kuramoto definido sobre redes ordenadas, aleatorias y de mundo pequeño, encontrando que la presencia de atajos aleatorios aumenta la sincronización en la red, y por tanto las redes al azar y de mundo pequeño son en general más eficientes en su proceso de sincronización que las redes ordenadas. Por el otro lado, en [81] se utilizan redes libres de escala, y se encuentra de forma numérica que el inicio de la sincronización en el sistema se da para un valor pequeño (pero distinto de cero) de la fuerza de acoplamiento, mientras que el punto crítico no depende del número de elementos N , a diferencia del modelo definido sobre la red completamente conectada.

Capítulo 4

Detección de comunidades

En los capítulos anteriores se ha analizado la estructura y función de diversas redes complejas a partir de la evolución dinámica de propiedades topológicas locales como el grado y el coeficiente de agrupamiento, las cuales dan información global al promediarlas sobre toda la red. Sin embargo, tales promedios son inservibles si queremos conocer las posibles correlaciones entre los nodos de una subgráfica dada, o la existencia de una estructura heterogénea en la red. En tal caso es útil el concepto de *comunidad*, definida de manera informal como una subgráfica $G' = (\mathcal{N}', \mathcal{E}')$ de la red $G_{N,E}$ donde los nodos en \mathcal{N}' y los enlaces en \mathcal{E}' comparten alguna propiedad en común. Dicha propiedad puede ser *estructural* si involucra características topológicas de G' como el número total de enlaces en ella (en cuyo caso la comunidad es un conjunto de nodos altamente conectado entre sí y poco conectado con el resto de la red), o *funcional* si se relaciona con las variables de estado definidas sobre los nodos y enlaces de G' (en cuyo caso la comunidad es un conjunto de nodos que poseen los mismos valores en sus variables de estado). La idea de comunidad fue formalizada matemáticamente por primera vez en las ciencias sociales, donde se utilizan herramientas para medir el número de comunidades en una red, así como su cohesión [14]. Las comunidades son una característica usual de las redes sociales, pues los individuos en ellas pueden formar parte de grupos altamente conectados (elites sociales), estar completamente aislados, o servir como “puentes” que conectan a estos grupos. Las comunidades sociales generalmente tienen sus propias normas, orientaciones y subculturas, por lo que su identificación y caracterización es fundamental si se desea analizar la identidad de una persona en la red [2]. Fuera del ámbito social, comunidades en las redes asociadas a la WWW pueden corresponder a grupos de páginas con temas similares [5], mientras que las comunidades encontradas en redes de software, neuronales, celulares, genéticas y metabólicas pueden indicar las unidades funcionales existentes en tales sistemas [82]. En econofísica, por citar un último ejemplo, las comunidades pueden identificar alianzas entre empresas.

Dentro de la investigación en sistemas complejos realizada en los últimos años, la presencia y segregación de comunidades en una red se ha considerado de forma intuitiva como un ejemplo arquetípico de las propiedades emergentes de ésta, es decir, de comportamientos o características del sistema que no pueden ser explicados a partir del análisis individual de sus partes. Como se menciona al final del capítulo 1, el propósito de este trabajo consiste en mostrar como la coevolución (es decir, la interacción entre las evoluciones temporales de la estructura y la función en un sistema complejo) tiene un papel fundamental en la descripción teórica de la aparición de propiedades emergentes, en particular de la segregación en comunidades. Sin embargo, antes de poder hacer esto es necesario formalizar el concepto de comunidad, y analizar algunos de los algoritmos computacionales requeridos para caracterizarlas.

A pesar de la cantidad de trabajos existentes en el problema de caracterización de comunidades [83–88] no existe un consenso aún en su definición, y por tanto la estructura de los algoritmos de detección y sus resultados pueden variar bastante, pues dependen de la definición de comunidad utilizada. El concepto básico utilizado para definir una comunidad es el *clique*, denotado ya en la sección 1.1.1 como una gráfica donde todos los nodos están conectados entre sí. Esta definición fuerte se cumple poco en redes ralas, por lo que es útil relajarla con el concepto de *n-clique*, una gráfica donde la geodésica mas larga entre dos nodos es n .¹ Por el otro lado, una comunidad se puede definir comparando el número de enlaces en su interior con el número de enlaces que la conectan con el resto de la red, lo cual nos da dos definiciones: las comunidades en el *sentido fuerte* (donde cada nodo en ella tiene más enlaces con la comunidad que con el exterior), y las comunidades en el *sentido débil* (donde la suma de todos los enlaces dentro de la comunidad es más grande que la suma de los enlaces conectándola con el resto de la gráfica)² [89].

Una vez seleccionada la definición apropiada de comunidad, los algoritmos de detección se construyen generalmente a partir de un proceso de mapeo entre la red y un árbol, también conocido como *dendograma*. En éste, la superficie (o última capa) corresponde a los nodos por separado de la red, mientras que cada elemento de las capas subsiguientes representa comunidades formadas por grupos de nodos de la capa anterior. Finalmente, la primera capa tiene un sólo nodo que representa a la comunidad formada por toda la red. Así, mientras más alta sea la capa mayor es la “importancia” de las comunidades representadas en ella, y por tanto el árbol construido representa

¹De esta forma, un clique es equivalente a un 1-clique. Estas definiciones se conocen como *auto-referidas*, pues la comunidad se define sólo en referencia a sí misma. Las definiciones auto-referidas son útiles para caracterizar comunidades ya conocidas, pero los algoritmos de detección basadas en ellas son usualmente muy costosos desde el punto de vista computacional [84].

²Estas definiciones se conocen como *comparativas*, y son las más utilizadas por su bajo costo computacional en la búsqueda de comunidades en redes grandes [84].

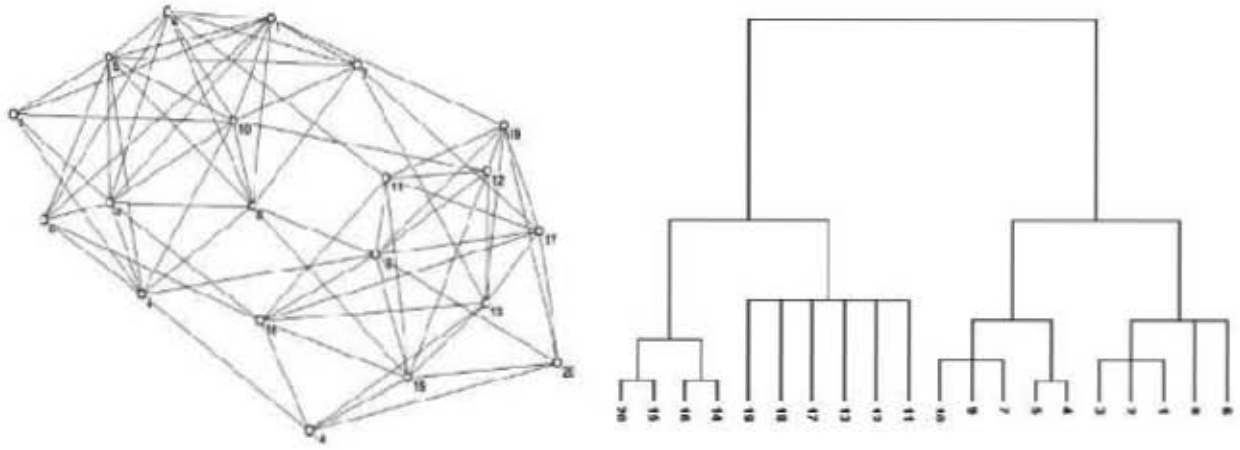


Figura 4.1: Una red con estructura heterogénea (izquierda) y su correspondiente dendrograma (derecha). El dendrograma representa una posible estructura jerárquica de comunidades en la red, donde cada capa del árbol constituye una partición de la red en comunidades, y la altura de la capa en el dendrograma nos da el nivel de la partición en la jerarquía. Tomado de [89].

una estructura jerárquica de comunidades en la red. Como se muestra en la figura (4.1), cada capa del dendrograma representa una *partición* de la red en comunidades, y la altura de tal capa en el árbol muestra su jerarquía. Dependiendo de la propiedad utilizada para definir las comunidades, el dendrograma resultante y las comunidades correspondientes pueden ser muy distintas, y la elección depende del tipo de análisis requerido para cada sistema complejo en particular. Una medida útil y relativamente básica para evaluar particiones es la *modularidad* introducida por Mark Newman y Michelle Girvan en [87]. Para definirla, es necesario considerar una partición particular de una red en N_c comunidades, y una matriz simétrica $N_c \times N_c$ denotada por \mathbf{e} cuya entrada e_{ij} es la fracción de todos los enlaces en la red que conectan a las comunidades i y j . La traza $\text{Tr } \mathbf{e} = \sum_i e_{ii}$ da entonces la fracción de enlaces que unen nodos en la misma comunidad, y las sumas $a_i = \sum_j e_{ij}$ dan la fracción de enlaces en la red que conectan con vértices en la comunidad i . De esta forma, en una red sin estructura donde los enlaces conectan nodos sin importar a qué comunidad pertenecen tenemos $e_{ij} = a_i a_j$, por lo que una medida de la presencia de comunidades en la red, o *modularidad*, puede calcularse como

$$Q = \sum_i (e_{ii} - a_i^2) = \text{Tr } \mathbf{e} - \|\mathbf{e}^2\|, \quad (4.1)$$

donde $\|\mathbf{e}^2\|$ indica la suma de los elementos de la matriz \mathbf{e}^2 . De acuerdo a la ecuación (4.1), la modularidad mide la fracción de enlaces que conectan nodos de la misma comunidad menos el valor esperado de tal cantidad en una red con la misma partición pero con enlaces aleatorios entre nodos. Así, para una red sin estructura tenemos $Q = 0$, mientras que para redes cada vez más heterogéneas podemos observar el comportamiento $Q \rightarrow 1$. Cabe mencionar que, en contra de

lo que puede indicar la intuición, es posible encontrar particiones en redes aleatorias de tamaño finito que produzcan valores relativamente altos de modularidad, por lo que las redes al azar (que aparentemente no tienen estructura) presentan de hecho estructura de comunidades debido a las fluctuaciones presentes en su proceso de construcción [2, 84].

Los algoritmos de detección de comunidades tradicionales se dividen en dos categorías: *aglomerativos* y *divisivos*. El ejemplo clásico de un algoritmo aglomerativo es el *agrupamiento jerárquico*, donde un peso w_{ij} se asocia a cada par de nodos i, j en una gráfica sin enlaces de acuerdo a cierta propiedad de la red original, y los enlaces (i, j) se agregan sucesivamente por orden de peso decreciente. Así, empezando por una red sin enlaces, comunidades cada vez más grandes se van formando hasta terminar con una sola comunidad idéntica a la red original. En cambio, los algoritmos divisivos revierten el proceso de construcción del dendograma asociado a la red: empezando por la gráfica original, uno corta sucesivamente enlaces para maximizar cierta cantidad (como la modularidad) y por tanto divide la red en gráficas más pequeñas desconectadas entre sí que se identifican como las comunidades de la red original [89]. Existen otros algoritmos que escapan de estas dos categorías, como aquellos basados en el análisis espectral de la red (donde la estructura de comunidades se determina por los valores y vectores propios de ciertas funciones de la matriz de conectividad \mathbf{A}), algoritmos basados en redes de resistencias, curvatura y caminatas al azar [84], e incluso en el modelo de q-Potts para un sistema de espines [90]. Una revisión exhaustiva de la investigación actual en detección de comunidades se presenta en la referencia [85].

Aunque la mayoría de estos algoritmos ya incluyen una estructura jerárquica de comunidades (es decir, la posibilidad de que ciertas comunidades estén formadas por otras más pequeñas), no consideran el caso en que varias comunidades compartan los mismos nodos, pues los dendogramas dividen a la red en grupos de nodos de forma exclusiva. En la referencia [91] los autores presentan un algoritmo para detectar comunidades tanto *jerárquicas* como *sobrepuestas* basado en la optimización local de una función de *aptitud* similar a la modularidad, el cual es utilizado por nosotros en la caracterización de comunidades en nuestro modelo coevolutivo. Por tal razón, presentamos a continuación un breve resumen de la estructura de dicho algoritmo.

4.1. El algoritmo de Lancichinetti - Fortunato - Kertész

Como se menciona con anterioridad, el algoritmo de detección de Lancichinetti - Fortunato - Kertész [91] identifica a las comunidades en una red particular a través de la maximización de una

propiedad de los nodos que la conforman denominada *aptitud*, la cual está dada por

$$f_{\mathcal{G}} = \frac{k_{in}^{\mathcal{G}}}{(k_{in}^{\mathcal{G}} + k_{out}^{\mathcal{G}})^{\alpha}}, \quad (4.2)$$

donde $k_{in}^{\mathcal{G}}$ y $k_{out}^{\mathcal{G}}$ son los *grados totales interno y externo* de los nodos de la comunidad \mathcal{G} (definidos respectivamente como el doble del número de enlaces en el interior de la comunidad, y el número de enlaces que la unen con el resto de la red), y $\alpha > 0$ es un parámetro que controla el tamaño de las comunidades. El propósito del algoritmo consiste en determinar de forma dinámica la subgráfica maximal empezando por un nodo i (que se identifica entonces como la *comunidad natural* de i en la red), en el sentido que la inclusión o exclusión de más nodos en \mathcal{G} disminuiría $f_{\mathcal{G}}$. Esto equivale a encontrar máximos locales de la aptitud para α dada, pues el máximo global corresponde trivialmente al caso $k_{out}^{\mathcal{G}} = 0$ en el que la comunidad natural de cualquier nodo es la red completa.

Para poder encontrar las comunidades naturales es necesario introducir también la *aptitud del nodo i* con respecto a la subgráfica \mathcal{G} para una aptitud dada, denotada por $f_{\mathcal{G}}^i$, la cual se define como la variación de $f_{\mathcal{G}}$ con y sin el nodo i , es decir,

$$f_{\mathcal{G}}^i = f_{\mathcal{G}+\{i\}} - f_{\mathcal{G}-\{i\}}, \quad (4.3)$$

donde $\mathcal{G} \pm \{i\}$ indica a la subgráfica \mathcal{G} con y sin el nodo i . Ahora bien, el proceso de búsqueda de la comunidad natural de i empieza con la identificación $\mathcal{G} = \{i\}$ (es decir, con $k_{in}^{\mathcal{G}} = 0$), a partir de lo cual se iteran los siguientes pasos:

1. Se realiza un ciclo sobre todos los primeros vecinos de los nodos de \mathcal{G} que no estén ya en \mathcal{G} .
2. El vecino con la aptitud de nodo más grande se agrega a \mathcal{G} , generando una subgráfica más grande \mathcal{G}' .
3. La aptitud de cada nodo de \mathcal{G}' se calcula nuevamente.
4. Si un nodo tiene aptitud negativa se remueve de \mathcal{G}' , creando una nueva subgráfica \mathcal{G}'' .
5. Si el paso 4 ocurre se repite desde el paso 3; en caso contrario se repite desde el paso 1 para la subgráfica \mathcal{G}'' .

El proceso termina cuando todos los nodos examinados en el paso 1 tienen aptitud negativa, y por tanto la subgráfica analizada es la comunidad natural del nodo i . En este caso se redefine el concepto de *partición* como un conjunto de comunidades naturales tal que cada nodo de la

red está asignado *al menos* a una comunidad (es decir, las comunidades se pueden *sobreponer* y compartir los mismos nodos), y por tanto el resto del algoritmo se dedica a determinar tal partición de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Se selecciona un nodo i de forma aleatoria.
2. Se detecta la comunidad natural de i .
3. Se selecciona de forma aleatoria un nodo j que aún no esté asignado a alguna comunidad.
4. Se detecta la comunidad natural de j , explorando todos los nodos de la red sin que importe su posible pertenencia a otras comunidades.
5. Se repite desde el paso 3.

El algoritmo acaba cuando todos los nodos se han asignado al menos a una comunidad, y por tanto se tiene una partición de la red para un valor dado del parámetro α . El valor de α fija la escala en la cual estamos analizando la red: Para α grande el algoritmo tiende a encontrar comunidades pequeñas, mientras que para α pequeña se encuentran comunidades grandes. Una elección natural para empezar a examinar una red desconocida es $\alpha = 1$, pues en este caso f_G mide la razón entre el número de enlaces internos de la comunidad y el número total de enlaces en ella (internos y externos), y por tanto es una expresión matemática de la definición de comunidad en el sentido débil [89]. Al seleccionar un valor fijo de α se restringe la resolución del método y se obtiene un algoritmo similar a aquellos que optimizan la modularidad de Newman y Girvan [86–88], pero el parámetro se puede variar libremente para obtener una jerarquía de particiones que contienen comunidades de distintos tamaños, donde usualmente las comunidades grandes de una partición correspondiente a $\alpha = \alpha_1$ están formadas por comunidades pequeñas asociadas a la partición de $\alpha = \alpha_2 > \alpha_1$. Bajo esta idea, resulta coherente pensar que una buena partición es *estable* en el sentido que sólo cambios considerables en α la pueden destruir, y por tanto las particiones que dan más información relevante acerca de la estructura de comunidades en la red son aquellas que se recuperan por el algoritmo para un intervalo amplio de valores de α .

Parte II

Coevolución en Sistemas Complejos

Capítulo 5

Interacción entre estructura y función: el concepto de coevolución

En la Parte I de este trabajo se han introducido los conceptos básicos para analizar la estructura y la función de un sistema complejo, y se han estudiado con cierto detalle casos particulares en los que tal sistema se puede considerar como una *estructura sin función* o una *función sin estructura*, dependiendo de la escala de tiempo utilizada para observarlo. Si la evolución temporal de la función del sistema complejo es mucho más *lenta* que la de la estructura, podemos describirlo como una *estructura sin función* donde lo único que nos interesa es la dinámica de la topología de la red (que representa las partes e interacciones del sistema), lo cual nos lleva al estudio de estructuras determinadas como las redes ordenadas, aleatorias, de mundo pequeño y libres de escala revisadas en el capítulo 2. En cambio, si la dinámica de la función es más *rápida* que la de la estructura, el sistema puede ser visto como una *función sin estructura* y nuestro interés reside en analizar la forma en que un conjunto de variables de estado definidas sobre una red estática evoluciona en el tiempo, lo cual sirve para describir procesos de difusión, propagación y sincronización en sistemas biológicos, ecológicos y sociales como los que se abordan en el capítulo 3. Sin embargo, resulta más realista relajar las condiciones de tales casos extremos y considerar la situación intermedia en que *las escalas de tiempo para las dinámicas de estructura y función son similares*, y por tanto existe una retroalimentación explícita entre las evoluciones temporales de la topología de la red y de sus variables de estado que denominamos *coevolución*. Como se menciona en la sección 1.3, tal interacción entre estructura y función ya se reconoce de manera intuitiva como un ingrediente fundamental para analizar el comportamiento de algunos sistemas complejos y caracterizar la presencia de propiedades emergentes en ellos, como en el caso de las interacciones catalíticas entre poblaciones de distintas especies [46], la emergencia de movimiento auto-ordenado y sincronización

en sistemas biológicos [47], las redes adaptativas en Teoría de Juegos [50], y la formación de opinión en comunidades humanas [48, 49].

No obstante, la caracterización del proceso de coevolución en fenómenos particulares de la Naturaleza y sus consecuencias en los comportamientos de éstos no es suficiente, pues es sabido que la elección de la red compleja, en donde se dan la estructura y la función, depende fuertemente de las características o procesos específicos que se desean estudiar, y por tanto un mismo fenómeno natural puede ser asociado a muchas estructuras y funciones acopladas o no entre sí que pueden comportarse de manera abismalmente distinta. Esta particularidad de las redes complejas hace que la elección de cantidades básicas para su descripción general sea complicada o tal vez imposible (a diferencia de lo que pasa con los sistemas físicos, donde siempre existe un espacio físico común a todos ellos que puede ser descrito a través de su métrica y dimensionalidad), y por tanto es común que existan ambigüedades y definiciones informales en la proposición de ecuaciones dinámicas para modelar la estructura y la función del sistema. Para intentar resolver tal problema y dar un paso en la formalización abstracta de los sistemas complejos, proponemos considerar a la coevolución como el elemento fundamental que define a una red compleja, y después derivar el comportamiento y propiedades emergentes de ésta en función de los distintos tipos de interacción que pueden existir entre su estructura y su función [41, 42]. A continuación se presenta una descripción de este marco teórico.

5.1. El marco teórico de coevolución

Como se muestra en la ecuación (1.26), un *sistema complejo coevolutivo* se puede definir como

$$G = (\mathcal{N}(\{\vec{s}_i\}, t), \mathcal{E}(\{\vec{s}_i\}, t)), \quad (5.1)$$

$$\frac{d\vec{s}_i}{dt} = \vec{F}_i(G, \{\vec{s}_j\}, t; r), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

es decir, es un sistema con una estructura dada por la red G y una función descrita por el sistema dinámico $d\vec{s}_i/dt = \vec{F}_i$, donde el proceso de coevolución implica que las funciones \vec{F}_i actuando sobre los vectores de estado \vec{s}_i dependen de los nodos y enlaces de G , y de la misma forma los nodos y enlaces de la red cambian de acuerdo a los valores de los vectores \vec{s}_i definidos sobre cada elemento de G . Sin pérdida de generalidad y por simplicidad consideraremos de ahora en adelante que G es una red no dirigida y que los vectores de estado son de hecho escalares s_i definidos sólo sobre los nodos de la red. De esta forma, para cada variable de estado podemos escribir la *ecuación de*

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{\partial s_i}{\partial t} + \sum_j \hat{O}(s_i, s_j, g) A_{ij}, \quad (5.2)$$

donde $\hat{O}(s_i, s_j)$ son las componentes de un operador $\hat{\mathbf{O}}$ que cambia las entradas y el tamaño de la matriz de conectividad \mathbf{A} . En la ecuación (5.2) el término $\partial s_i / \partial t$ representa la *microdinámica* o *dinámica funcional* del sistema, es decir, la dinámica de s_i que sólo depende en forma explícita del conjunto de variables de estado y no de la red, mientras que el término $\sum_j \hat{O}(s_i, s_j, g) A_{ij}$ se refiere a la *macrodinámica* o *dinámica estructural* del sistema, es decir, a la forma en que s_i cambia explícitamente por la red G y no por el conjunto de variables de estado. Los prefijos micro y macro implican la existencia de dos escalas de tiempo características: una *rápida* (dt) para la dinámica de las variables de estado (el intercambio de información o *transacción* en la red), y una *lenta* (dT) para el cambio de nodos y enlaces en G (la modificación de la topología o *generación* de la red), las cuales están relacionadas por el *parámetro de coevolución* $g = dT/dt$ que controla el número de transacciones por generación, o en otras palabras, la *intensidad de la interacción entre las dinámicas estructurales y funcionales* en el sistema. De esta forma, el parámetro g delimita tres regiones con comportamientos cualitativamente distintos: el caso límite $g \rightarrow 0$ en que la dinámica de las variables de estado es irrelevante y por tanto tenemos un sistema complejo descrito tan sólo por su estructura (una *estructura sin función*), el otro caso límite $g \rightarrow \infty$ en el cual no existe una modificación de la topología de G y por tanto el sistema sólo tiene función (una *función sin estructura*), y el caso intermedio en el cual la estructura y la función interactúan coevolutivamente a través de la ecuación (5.2) para definir el comportamiento del sistema complejo en cuestión. En otras palabras, la ecuación de coevolución incluye dentro de la misma estructura teórica a las topologías de red y los sistemas dinámicos a través de la variación continua del parámetro g , y muestra así la existencia de una región intermedia donde se hace explícita su interacción.

Considerando solamente la *microdinámica* del sistema, el primer término de la ecuación (5.2) puede ser separado en términos que dependen del número de variables de estado que interactúan entre sí en un tiempo dado, ya sean interacciones por pares (“lineales”), por tríos (“cuadráticas”), etcétera, lo cual se puede ver como una expansión en serie de Taylor en términos de la complejidad de la interacción. Así, la microdinámica de la variable s_i alrededor de un estado estacionario se puede escribir como

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} = f_0 + \sum_j f_1(s_j) s_i + \sum_j \sum_k f_2(s_j, s_k) s_i^2 + \dots, \quad (5.3)$$

donde los coeficientes $f_0, f_1, f_2, \text{etc.}$, de la expansión dependen, en principio, de las variables de estado en toda la red, por lo que es posible definir interacciones de *corto alcance* (entre primeros o segundos vecinos, por ejemplo) e interacciones de *largo alcance* que se extiendan a lo largo de G , según las necesidades descriptivas del modelo. Según la expansión de la ecuación (5.3), el término f_0 es “constante” en el sentido que depende de todas las variables de estado excepto s_i y por tanto representa la acción externa del sistema sobre el nodo i ; el término $\sum_j f_1(s_j)s_i$ es lineal en s_i y entonces representa las interacciones por pares entre el nodo i y cualquier otro nodo en la red; el término $\sum_j \sum_k f_2(s_j, s_k)s_i^2$ es cuadrático en s_i y representa las interacciones por tríos centradas en i , y así sucesivamente. De esta manera la ecuación (5.3) incluye todas las posibles interacciones directas entre variables de estado que no dependen explícitamente de la estructura de la red.

Por el otro lado, la *macrodinámica* del sistema complejo está regida por el operador $\hat{\mathbf{O}}$, el cual actúa en cada generación de forma discreta y sólo puede modificar la red en cuatro formas básicas: agregando/eliminando nodos, o agregando/eliminando enlaces. Las operaciones compuestas llevan entonces a procesos importantes como la *reconexión* en la red, dada por la eliminación de un enlace seguida de la creación de otro, manteniendo un nodo en común. El proceso de reconexión se ha utilizado frecuentemente en redes adaptativas para describir la forma en que la topología de la red cambia en términos de juegos, autómatas celulares o las variables de estado definidas sobre los nodos, como en el caso del modelo de la referencia [50] donde la red de interacciones del sistema se adapta por reconexión al resultado de un juego espacial, o en la referencia [92] donde una red con un conjunto de reglas de reconexión (que definen su dinámica) se utiliza para describir un proceso de auto-organización en redes neuronales y redes regulatorias en el genoma. El operador $\hat{\mathbf{O}}$ sólo actúa sobre la matriz de conectividad \mathbf{A} en los tiempos específicos de generación (es decir, en tiempos t/dt múltiplos del parámetro de coevolución g), lo cual puede representarse matemáticamente por medio de funciones delta de Dirac, es decir,

$$\hat{\mathbf{O}}(s_i, s_j, g)\mathbf{A} = \mathbf{A}' \sum_n \delta(t/dt - ng), \quad (5.4)$$

donde \mathbf{A}' es la matriz de conectividad de G modificada después de cada tiempo de generación por el operador $\hat{\mathbf{O}}$ (que representan la forma específica en que se lleva a cabo el proceso de reconexión en la red) y $\sum_n \delta(t/dt - ng)$ es una suma de deltas de Dirac que representa la acción discreta de $\hat{\mathbf{O}}$. En otras palabras, la macrodinámica (5.4) describe la forma en que la topología de la red se modifica en cada generación por un conjunto de reglas lógicas que dependen del valor de las variables de estado, y a su vez esta variación en la topología cambia los términos en la ecuación de

microdinámica (5.3) que define la evolución temporal continua de las variables de estado. Así, la ecuación (5.2) desglosada en las expresiones (5.4) y (5.3) representa la forma más general en que un proceso de coevolución define la dinámica estructural y funcional de un sistema complejo.

Como se menciona en la sección 1.3, existen muchos sistemas complejos en los cuales la coevolución toma un papel relevante. En el proceso de formación de opinión en una sociedad humana, por ejemplo, la forma en que cada individuo desarrolla su opinión respecto a un tema específico depende en gran medida de las personas con las cuales discute tal tema, y dicha red de amistades o conocidos cambia todo el tiempo debido a la propia dinámica de la comunidad social [41–45]. En consecuencia, una correcta descripción de la evolución temporal de tal sistema debe incluir los efectos de la interacción entre su estructura y función, y por tanto las propiedades emergentes de éste (como la existencia de comunidades cuyos individuos comparten una opinión) deben presentarse para un valor *intermedio* de g , y su caracterización debe poder establecerse en términos de los parámetros que definen las dinámicas micro y macro del sistema social. Dedicamos los capítulos 7 y 8 a mostrar tales afirmaciones, es decir, a exponer la utilidad del marco teórico de coevolución descrito con anterioridad al describir un proceso de formación de opinión y caracterizar la emergencia de comunidades en él.

Antes de eso, necesitamos presentar algunos de los trabajos anteriores más relevantes en el estudio de tales sistemas sociales, a fin de tener una base más firme sobre la cual justificar la validez de las hipótesis de nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión. A esto dedicamos el siguiente capítulo.

Capítulo 6

El problema de formación de opinión en sistemas sociales

Un *sistema social* es una red donde los nodos representan individuos o grupos sociales y los enlaces describen los posibles tipos de interacciones que existen entre ellos, ya sean de amistad, compañerismo, estatus, sexualidad o política entre personas, de matrimonios entre familias, de negocios entre empresas, etcétera [2, 5], y han sido estudiadas desde hace tiempo en las ciencias sociales [14] a fin de determinar de forma cuantitativa ciertas características de la estructura de una sociedad dada o la relativa importancia de una persona en la red [15, 16]. Entre los trabajos más famosos en este campo se encuentran los experimentos de “mundo pequeño” de Stanley Milgram [55] descritos en la sección 2.3. En contra de lo esperado, sus resultados muestran que tan sólo un número promedio de 6 pasos es necesario para trasladar una carta entre cualquier par de personas, lo cual indica que las redes sociales pueden tener geodésicas pequeñas a pesar de su gran tamaño, y dio origen al concepto popular de los “seis grados de separación” entre individuos en una sociedad [5].

A pesar del ingenio de este tipo de estudios indirectos, la mayor parte del trabajo en redes sociales sufre de imprecisiones estadísticas por los tamaños pequeños de red utilizados, y tiene problemas asociados a la subjetividad de sus datos, pues éstos normalmente se obtienen a través de cuestionarios o entrevistas que completan los participantes del experimento. A fin de evitar estos obstáculos y realizar investigaciones más fructíferas en el campo de los sistemas sociales, en los últimos años se han utilizado las bases de datos presentes en la Internet, la WWW y otras redes tecnológicas de comunicación para obtener sistemas de tamaño considerablemente más grande donde las interacciones pueden ser cuantificadas de forma más simple y directa, como las redes de colaboración entre actores de cine, directores de compañías [1] o académicos [17], las redes de páginas

de internet o artículos de periódico similares, o la relación de amistad asociada al número y duración de llamadas telefónicas entre personas¹ [18, 19]. De manera adicional, se han estudiado redes que son un producto indirecto de la interacción social entre individuos, como las redes semánticas de lenguajes humanos donde las sílabas o palabras son los nodos y los sinónimos o reglas de sintaxis son los enlaces [2], o las redes de transmisión de agentes infecciosos [77] estudiadas con modelos de propagación como los presentados en el capítulo 3. Normalmente, gran parte del análisis de estos sistemas consiste en caracterizar la topología particular que posee la red social (ya sea aleatoria, de mundo pequeño o libre de escala), encontrar medidas de cercanía y proximidad para los individuos, y medir la asortatividad de la red [28].

En particular, el *problema de formación de opinión* considera la dinámica en que un conjunto de individuos poseen opiniones acerca de un tema de discusión controversial, como una pregunta política o la aceptación de un elemento de innovación en la sociedad, las cuales son influenciadas por las discusiones e intercambios de información con otras personas. Con el paso del tiempo tal problema ha atraído bastante atención en la comunidad científica y por tanto existen diversos modelos que han sido introducidos para intentar caracterizarlo y controlarlo [93]. Entre los casos más sencillos se pueden mencionar el *modelo del votante* [94] en el que la opinión de un nodo es una variable con dos estados que se modifica de acuerdo a una elección aleatoria de primeros vecinos, los modelos discretos de formación de opinión de Sznajd [95, 96] y Weidlich [97] donde el proceso de elección de una nueva opinión depende de más de dos nodos, y el *modelo multicultural* de Axelrod [98] para la difusión de cultura en una sociedad, todos los cuales son reminiscentes de un modelo de Ising para la interacción magnética en un sólido y por tanto predicen estados finales de consenso de la población (análogos al estado ferromagnético en un sólido). Estos modelos pueden ser estudiados en redes desordenadas (lo cual cambia de forma significativa la dinámica temporal de la transición de fase entre los dos tipos de consenso), o bajo la acción de un campo externo que describe la influencia de los medios de comunicación masiva en la sociedad, y también han sido extendidos al caso de más de dos opiniones posibles o al caso de opiniones continuas [99].

Sólo hasta hace poco un modelo explícitamente coevolutivo (en el cual la dinámica de las opiniones es mediada por una red de relaciones sociales y a su vez la red es influenciada por tal dinámica) ha sido introducido de forma particular para describir un proceso de formación de opinión con dinámicas continuas [43, 44] y discretas [45], en el cual la frecuencia relativa de los procesos de cambio de opinión y de reconexión de la red es un parámetro que define el tipo de consenso ob-

¹Aunque una red de llamadas telefónicas no representa directamente la dinámica de opinión de la comunidad social, su gran tamaño permite una descripción estadística satisfactoria, pues los efectos de tamaño finito y las fluctuaciones son menores que en un sistema pequeño.

tenido en la red y su topología final. A continuación se describen de forma breve algunos de estos modelos y sus resultados más relevantes, como un antecedente teórico a nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión.

6.1. Antecedentes del problema

En la formulación original del *modelo de consenso de opinión* de Sznajd [95, 96], los individuos o *agentes* de la dinámica forman una cadena unidimensional, y la variable de opinión discreta σ_i de cada uno de ellos puede tomar uno de los dos valores ± 1 , por lo que en ese sentido el modelo de Sznajd es análogo al modelo de Ising en Física. Inicialmente cada agente toma la opinión $+1$ con probabilidad p y la opinión -1 con probabilidad $1 - p$, y la dinámica se basa esencialmente en la idea de que dos amigos con la misma opinión tienen una alta probabilidad de *convencer* a otros conocidos de la misma opinión². En otras palabras, en el algoritmo de este modelo un par de nodos vecinos i e $i + 1$ se selecciona de forma aleatoria: si $\sigma_i = \sigma_{i+1}$ entonces los vecinos $i - 1$ e $i + 2$ toman la misma opinión σ_i ; en caso contrario cada agente del par impone su opinión en el vecino del otro, es decir, $\sigma_{i-1} = \sigma_{i+1}$ y $\sigma_{i+2} = \sigma_i$ [99]. El uso exclusivo de la primera regla lleva el sistema a un estado ferromagnético de *consenso* en el cual todos los individuos tienen la misma opinión, mientras que la inclusión de la segunda regla permite la existencia de estados antiferromagnéticos metaestables en los que hay configuraciones heterogéneas de opinión [100]. Muchos trabajos se han dedicado al estudio de este modelo, donde el análisis se concentra en diversas topologías de red (ordenadas, pseudo-fractales y libres de escala, entre otras) o en variaciones de las reglas de “convencimiento” de los agentes. Por ejemplo, el modelo de Sznajd con la primera regla en una red ordenada de dimensión mayor a uno presenta una transición de fase como función de la probabilidad p : para $p = 1/2$ la dinámica genera dos grupos de igual tamaño y opinión opuesta, mientras que para $p < 1/2$ ($p > 1/2$) el sistema alcanza un consenso con opinión -1 ($+1$). También se ha estudiado la transición de un estado de no consenso a uno de consenso total en redes de mundo pequeño y libres de escala (donde aparentemente un aumento del coeficiente de agrupamiento facilita el desarrollo de consenso en la red), y en redes libres de escala en crecimiento (donde un estado de consenso es imposible) [2].

Una generalización directa del modelo anterior al caso de opiniones continuas se logra con el modelo de Guillaume Deffuant y colaboradores [101], en el cual las opiniones son números reales $0 < \sigma_i < 1$. En cada paso del algoritmo, dos agentes i y j elegidos al azar comparan sus opiniones

²Esta simplificación de la dinámica de formación de opinión, conocida como *validación social* [96], está basada en el lema publicitario “United we stand, divided we fall” [100].

para ver si un intercambio de opinión es posible. Si $|\sigma_i - \sigma_j| > \epsilon$ (con $0 < \epsilon < 1$ un parámetro de umbral fijo conocido como el *límite de confianza*) las dos opiniones no cambian, mientras que si $|\sigma_i - \sigma_j| < \epsilon$ cada opinión se mueve en la dirección de la otra una cantidad $\mu|\sigma_i - \sigma_j|$, donde $0 < \mu \leq 1/2$ es un parámetro de convergencia para la simulación numérica³. Al terminar la dinámica, en el caso $\epsilon > 1/2$ todas las opiniones convergen al mismo valor central y se genera consenso, mientras que para $\epsilon < 1/2$ diversas opiniones sobreviven (y el número de éstas varía como $1/\epsilon$). El modelo de Deffuant se ha analizado en redes libres de escala estáticas y en crecimiento, con resultados similares a los del modelo original [2].

En los dos casos anteriores (como en la mayoría de los modelos de formación de opinión) se analiza la dinámica de un conjunto de opiniones sobre una red estática, es decir, se analiza una *función sin estructura*, donde el conjunto de variables de estado tiene una evolución temporal que no modifica la topología de la red, pues se considera que la escala de tiempo en la que ésta cambia es demasiado lenta como para ser tomada en cuenta. Sin embargo, es más realista considerar un proceso de *coevolución* entre estructura y función, pues normalmente la dinámica de formación de opinión en un individuo depende de su red de interacciones sociales, y a la vez tal red se modifica por la opinión particular que tiene el agente. En el modelo de formación de opinión de Balazs Kozma y Alain Barrat [43,44] se generaliza el modelo de Deffuant para incluir una red de interacciones entre agentes que cambia en la misma escala de tiempo que la dinámica de opiniones, y se analiza como la retroalimentación entre estructura y función afecta el tamaño y las propiedades topológicas de grupos de la misma opinión en la red, así como el tiempo de convergencia al estado final estable de la dinámica. Empezando por una red aleatoria con grado promedio $\langle k \rangle$, las opiniones de los nodos siguen una dinámica de Deffuant como la que se describe en el párrafo anterior. Con probabilidad w , en cada paso de tiempo dos nodos vecinos i y j se seleccionan al azar, y si $|\sigma_i - \sigma_j| > \epsilon$ entonces el enlace (i, j) entre ellos se rompe y se sustituye por (i, m) , donde m es un nodo elegido al azar. En cambio, con probabilidad $1 - w$ la dinámica de opiniones no se altera si éstas no se separan más que el límite de confianza ϵ . De esta forma el modelo considera dos procesos simultáneos: una convergencia local de opinión para los agentes cuyas opiniones son suficientemente cercanas, y un proceso de reconexión aleatoria para los agentes con opiniones que difieren más que el límite de confianza, donde el parámetro $w \in [0, 1]$ mide las frecuencias relativas de los dos procesos. Así, para $w > 0$ la dinámica termina cuando no hay enlaces entre nodos con opiniones distintas, y la red final consiste de un solo grupo con la misma opinión o varios que representan opiniones distintas⁴. En

³Estas reglas se pueden considerar como un caso especial de difusión, pues las opiniones dentro del límite de confianza tienden a compartir el mismo valor después de cierto tiempo.

⁴Claramente, el caso $w = 0$ corresponde al resultado clásico de Deffuant en el que agentes vecinos comparten la

estos trabajos, los autores muestran que la adaptación coevolutiva de la red promueve la formación de grupos al permitir la comunicación entre agentes con opiniones similares. Además se observa un cambio en la evolución temporal de las opiniones: mientras que para el modelo de Deffuant en redes estáticas ésta se determina por propiedades de percolación, en una red adaptativa la evolución temporal del sistema al principio y al final de la dinámica se define por el proceso de reconexión.

Para concluir nuestra breve revisión de la incipiente investigación en modelos coevolutivos de formación en opinión, en la siguiente sección se presenta con algo más de detalle otro modelo en el cual la distribución de opiniones en una población de agentes evoluciona al mismo tiempo que su red de interacciones, el *modelo de dispersión de opinión y segregación de agentes* de Damián Zanette y Santiago Gil [48, 49].

6.2. El modelo de Zanette - Gil

En el modelo de formación de opinión de Damián Zanette y Santiago Gil [48, 49], se tiene una red completamente conectada donde los N nodos representan agentes con opiniones dadas por las variables binarias $m_i = \pm 1$, y los enlaces describen las interacciones o discusiones entre ellos que posibilitan un cambio de opinión. En cada paso t de la dinámica se selecciona un par de agentes al azar: si sus opiniones son iguales no pasa nada, pero si son distintas un agente toma la opinión del otro con probabilidad p_1 . En el caso complementario $1 - p_1$ las opiniones no cambian, y con una probabilidad p_2 el enlace entre ellos se remueve, por lo que la red disminuye su conectividad⁵. De esta forma, una red que al inicio está completamente conectada y tiene una distribución uniforme de opiniones se separa por la dinámica en un conjunto de comunidades desconectadas entre sí formadas por agentes con la misma opinión. Aunque las probabilidades p_1 y p_2 determinan por separado las frecuencias de los procesos funcionales y estructurales en la dinámica (cambio de opinión y rompimiento de enlaces, respectivamente), las propiedades estadísticas del estado final del sistema están determinadas por un parámetro q dado por una combinación de tales probabilidades. Específicamente, si $p_-(t)$ es la fracción de enlaces que conectan agentes con opiniones distintas, la probabilidad de que un agente cambie de opinión es $\pi_1(t) = p_-(t)p_1$ y la probabilidad de que un enlace se rompa es $\pi_2(t) = p_-(t)(1 - p_1)p_2$, por lo que la probabilidad $\pi(t) = \pi_1(t) + \pi_2(t)$ de que exista un cambio en la red define la escala de tiempo de la dinámica. Así, el parámetro relevante

misma opinión o difieren en ellas más que el límite de confianza.

⁵ Así, el modelo de Zanette - Gil es una generalización del modelo del votante [94] sobre una red adaptativa.

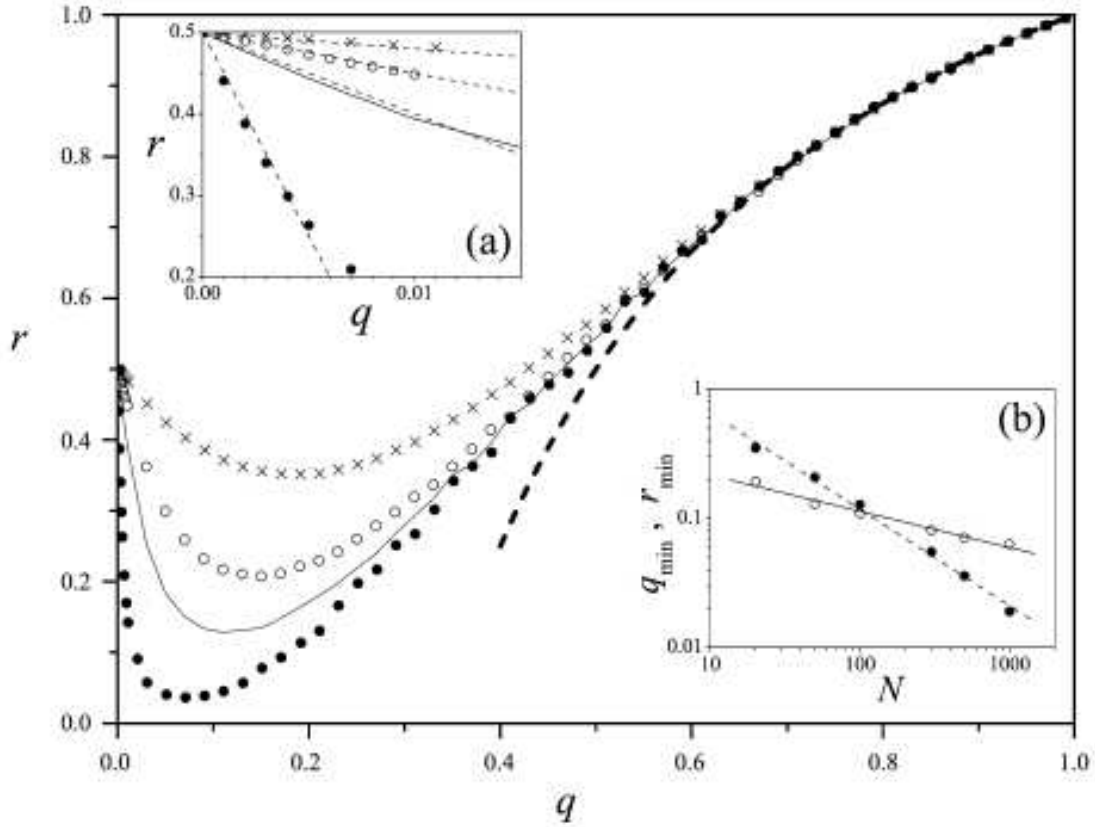


Figura 6.1: La fracción r de enlaces restantes en el modelo de Zanette - Gil como función del parámetro q , para redes con $N = 20$ (\times), 50 (\circ), 100 (-) y 500 (\bullet), donde cada punto se promedia entre 500 y 5×10^4 veces. La línea punteada (-) es la aproximación de campo medio (6.3) para q grande. En (a) se presenta un acercamiento para q pequeña con la aproximación de campo medio (6.2), donde $\beta = 0.89$. En (b) se muestra la posición q_{min} (\circ) y la profundidad r_{min} (\bullet) del mínimo de r como funciones de N , donde las líneas son ajustes por mínimos cuadrados. Tomado de [48].

para caracterizar estadísticamente el estado final es

$$q = \frac{\pi_1(t)}{\pi(t)} = \frac{p_1}{p_1 + (1 - p_1)p_2}, \quad (6.1)$$

pues una variación de p_1 y p_2 que mantenga q constante sólo cambia la escala de tiempo de la dinámica, sin generar estados finales estadísticamente diferentes.

El estado final de la dinámica como función de q puede caracterizarse a través de la fracción de enlaces restantes $r = 2P/N(N - 1)$, donde P es el número final de pares de agentes conectados. Como se observa en la figura (6.1), el valor final de r para los valores extremos de q se deduce fácilmente de las reglas de evolución: para $q = 0$ no hay cambios de opinión, y por tanto la red se separa en dos grupos desconectados entre sí de tamaños iguales y opiniones opuestas, lo cual implica $r = 1/2$. Por el otro lado, para $q = 1$ ningún enlace se rompe, y se alcanza un estado de

consenso total en el cual la red sigue completamente conectada, por lo que $r = 1$.⁶ A pesar de lo que puede indicar la intuición, la transición entre tales casos extremos no es monótona, y existe un mínimo (q_{min}, r_{min}) que tiende a cero conforme N crece, como se aprecia en el recuadro (b) de la figura (6.1).

Como se menciona en [48], la presencia del mínimo indica que en la transición entre dos comunidades del mismo tamaño ($q = 0$) a una del tamaño de la red ($q = 1$), uno de los grupos crece a expensas del otro, y cerca del mínimo existen generalmente comunidades muy pequeñas desconectadas de las dos más grandes. Comprobamos esta afirmación con una cantidad considerable de simulaciones numéricas en la región intermedia de q , donde observamos que la red final está formada por dos comunidades grandes muy conectadas en su interior y separadas entre sí, y un cierto número de comunidades mucho más pequeñas con pocos nodos y enlaces. Así, el modelo adaptativo de Zanette - Gil logra generar estados finales con más de dos comunidades (a diferencia de los modelos clásicos de Sznajd y Deffuant), pero falla en crear una distribución de tamaños de comunidad similar a la encontrada en redes sociales reales, donde la diferencia entre las comunidades más grandes y las más pequeñas no es tan drástica.

Como se muestra en [49], es posible hacer un análisis de campo medio para predecir el comportamiento de r como función de q en los casos extremos antes mencionados. Para valores intermedios de q el campo medio es inútil, pues la coevolución entre la distribución de opiniones y la red de interacciones crea correlaciones fuertes entre los estados individuales de los pares de agentes que quedan conectados. Una ecuación de evolución de campo medio se puede escribir en términos del número de enlaces que conectan agentes con opiniones iguales o distintas, denotado por $P_{\pm}(t)$. Al principio de la dinámica el número de enlaces que conectan a un agente dado con individuos de opinión igual o distinta es $2P_{\pm}(t)/N$, pero conforme el tiempo pasa la correlación entre las opiniones de los agentes conectados aumenta, y por tanto tales promedios no son válidos ya. Introduciendo un parámetro de campo medio β que considera el efecto de las correlaciones en estos promedios al escribir $2\beta P_{\pm}(t)/N$, es posible derivar el resultado aproximado

$$r \simeq \frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{8}qN, \quad (6.2)$$

para el caso extremo $q \gtrsim 0$, cuya comparación con los resultados numéricos se presenta en el recuadro (a) de la figura (6.1), donde se fija $\beta = 0.89$ para todas las curvas. En el límite opuesto $q \lesssim 1$ la evolución del número de agentes con cada opinión está determinado por fluctuaciones aleatorias, y

⁶Estos dos resultados son similares al estado final del modelo de Sznajd para redes ordenadas en los casos $p = 1/2$ y $p \neq 1/2$, respectivamente.

se puede derivar el resultado de campo medio

$$r \simeq 1 - \frac{1 - q}{2q}, \quad (6.3)$$

es decir, r es un valor independiente de N que se representa por la línea punteada en la figura (6.1).

En la figura (6.2) se presentan los resultados de nuestra propia simulación numérica del modelo de Zanette - Gil para algunas de las topologías de red introducidas en el capítulo 2 y diversos valores de N , donde cada punto se promedia sobre 1000 realizaciones. En (6.2a) se utilizan redes completamente conectadas equivalentes a las del modelo original, y los resultados para $N = 20, 50$ y 100 corresponden con los de la figura (6.1). En (6.2b) se usan redes exponenciales ordenadas [51, 52] como las descritas en la sección 2.1. En (6.2c) se utilizan redes aleatorias, y en (6.2d) se compara tal resultado con el modelo original, donde se observa que aunque el comportamiento cualitativo de r como función de q no cambia, el mínimo (q_{min}, r_{min}) se aleja más del origen.

Finalmente, en (6.2e) y (6.2f) se usan anillos con $N = 50$ y 100 respectivamente, y diversas conectividades. La conectividad en los anillos se mide a través de la variable $v = \langle k \rangle / 2$ con $\langle k \rangle = 2, 4, \dots, N - 2$, la cual mide la “lejanía” con la cual un nodo dado está conectado en la red. En otras palabras, empezando con un anillo simple ($v = 1$) en el cual cada nodo se conecta con sus dos vecinos inmediatos, un valor creciente de v implica que el nodo se conecta con pares de nodos cada vez más lejanos, hasta terminar con una red completamente conectada en la cual $v = N/2$.

Los resultados de la figura (6.2) extienden el trabajo preliminar de Zanette y Gil al indicar que el estado final de la dinámica entre los casos extremos de q es similar para casi cualquier topología de red utilizada (todas las curvas tienen un mínimo y los mismos valores extremos de r , excepto los anillos con $v = 1$). Además, nos permiten mencionar los siguientes puntos como un resumen del análisis de este modelo, y como una motivación para introducir nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión:

- *Posición del mínimo.* Para las redes exponenciales ordenadas, aleatorias y los anillos con $v \neq N/2$, la posición del mínimo se *aleja* del origen respecto a lo esperado para una red completamente conectada del mismo tamaño. Esto se debe a las diferencias en los grados iniciales. Para las redes completamente conectadas el grado inicial es máximo ($\langle k \rangle = N - 1$), por lo que en promedio es necesario hacer más cortes de enlaces que cambios de opinión para alcanzar el punto intermedio de la dinámica correspondiente al mínimo, lo cual implica un valor pequeño de q según la ecuación (6.1). En cambio, las otras redes tienen un valor inicial de $\langle k \rangle$ menor, y por tanto el valor de q necesario para alcanzar el mínimo es mayor.

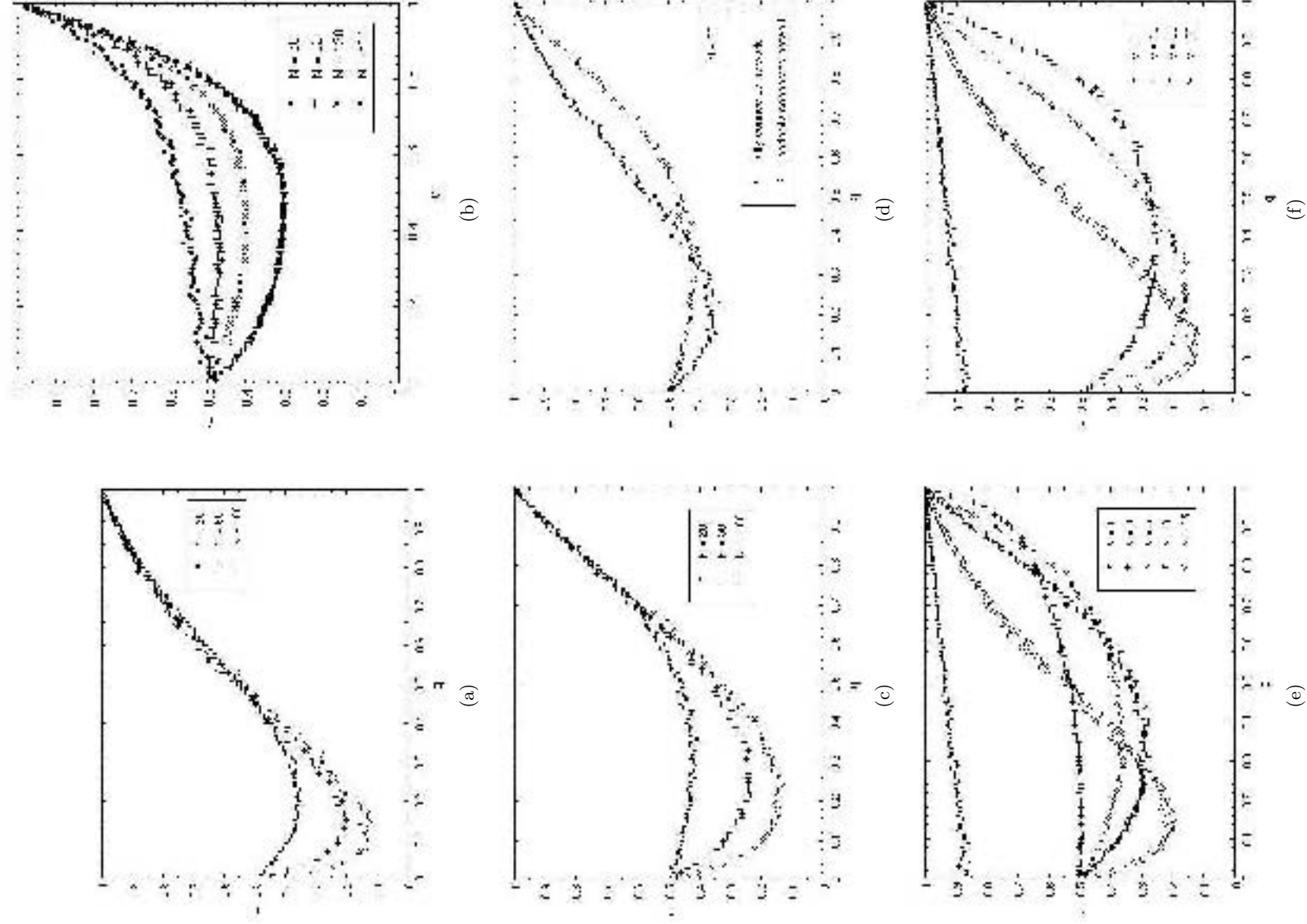


Figura 6.2: Simulación numérica del modelo de Zanette - Gil sobre redes completamente conectadas (a), exponenciales ordenadas (b), aleatorias (c) y anillos con $N = 50$ (e) y 100 (f). Se grafica la fracción r de enlaces restantes como función del parámetro q para distintos valores de N , y en (d) se comparan los resultados de redes completamente conectadas y aleatorias para $N = 20$. En los anillos, $v = \langle k \rangle / 2$ mide la conectividad de la red ordenada.

- *Número y tamaño de comunidades.* El uso de distintas topologías de red *no* afecta cualitativamente el número y tamaño de comunidades en el estado final del sistema, pues en el régimen coevolutivo de q intermedia siempre se obtienen dos comunidades grandes con una multitud de comunidades mucho más pequeñas. Esto es probablemente consecuencia de la simplicidad de las reglas del modelo, que es en sí un modelo de Ising definido sobre una red adaptativa. Por tanto, es necesario introducir reglas dinámicas más complicadas que ayuden a obtener otras distribuciones de tamaño de las comunidades, más cercanas a lo observado en sistemas sociales reales.
- *Interacción entre estructura y función.* En el modelo de Zanette - Gil la *coevolución* entre las variables de opinión y la topología la red se introduce al cortar enlaces entre agentes con opinión distinta. Sin embargo, estos cambios se realizan de forma aleatoria y el modelo no posee un mecanismo de creación de enlaces (lo que correspondería a la generación de nuevas relaciones en una red social), por lo que resulta pertinente utilizar una dinámica más determinista y un acoplamiento entre procesos de creación y destrucción de enlaces. Como se ve en los siguientes dos capítulos, nuestro modelo coevolutivo introduce estas ideas bajo la misma estructura teórica, y las utiliza para crear estructuras de red notablemente parecidas a las esperadas en un sistema real.

Capítulo 7

El modelo coevolutivo de formación de opinión

Con los antecedentes en el estudio de sistemas sociales presentados en el capítulo 6, los cuales incluyen resultados experimentales y modelos teóricos para describirlos, se puede establecer que las redes sociales presentan en general tres características que las distinguen de otros sistemas complejos, las cuales son el centro de atención de la construcción y análisis de nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión:

- La longitud característica L es *pequeña* en comparación con el tamaño N de la red, por lo que es usual encontrar geodésicas particularmente cortas en redes sociales muy grandes. Desde el punto de vista teórico introducido en el capítulo 2, las redes aleatorias de Erdős - Rényi [25] presentan este efecto gracias a la relación asintótica $L \simeq \ln N / \ln \langle k \rangle$ con $\langle k \rangle$ el grado promedio, mientras que la presencia de atajos en las redes de mundo pequeño de Watts - Strogatz [33] permite la coexistencia de valores pequeños de L (como en las redes al azar) y valores altos del coeficiente de agrupamiento C (como en las redes ordenadas). Las redes exponenciales ordenadas también presentan geodésicas pequeñas en relación a N [51, 52].
- La conectividad de las redes sociales también es *pequeña* en relación a su tamaño, es decir, $\langle k \rangle \ll N$. Según el antropólogo británico Robin Dunbar, existe un límite cognitivo al número de personas con las cuales un individuo puede mantener relaciones sociales estables, debido a la capacidad de procesamiento neocortical de los humanos. Este valor, conocido como el *número de Dunbar* y cercano a 150, fue deducido a partir de un estudio de las correlaciones en los tamaños de grupos sociales de primates [102, 103].
- Existen *comunidades sociales*, definidas como subgráficas de la red que tienen una interacción

estrecha entre sus miembros y están débilmente ligadas al resto de la sociedad. Las comunidades son una característica usual de las redes sociales, pues los individuos en ellas pueden formar parte de grupos altamente conectados (elites sociales que comparten normas, orientaciones y subculturas), estar completamente aislados, o servir como “puentes” que conectan a estos grupos [2]. Dentro de un modelo teórico, las comunidades pueden ser definidas de forma estructural (si se considera la topología de la subgráfica) o de manera funcional (si se toman en cuenta las variables de estado de sus nodos), por lo que resulta lógico pensar que su presencia en redes sociales reales debe ser influenciada por procesos de coevolución.

A pesar de que los modelos de formación de opinión de Kozma - Barrat [43, 44] y de Zanette - Gil [48, 49] (descritos en el capítulo 6) incluyen a la coevolución entre función y estructura como un elemento fundamental de la evolución temporal del sistema, las dinámicas de estos elementos son algo idealizadas y por tanto no parecen corresponder a un proceso de interacción social realista: por un lado la función del sistema (es decir, el conjunto de opiniones de los agentes) evoluciona de manera similar a un modelo de Ising con variables de estado continuas o discretas, y por el otro la estructura (es decir, la topología de la red) se modifica por un proceso de reconexión puramente aleatorio que no toma en cuenta correlaciones entre las opiniones de los individuos. En cambio, en la siguiente sección se propone un nuevo modelo de formación de opinión [41, 42] que aplica directamente el marco teórico de coevolución (introducido en el capítulo 5) a partir de hipótesis sociales más válidas para la microdinámica de cambio de opinión y la macrodinámica de reconexión en la red. De esta forma, se pretende construir y analizar un modelo que genere dinámicamente las tres propiedades de las redes sociales descritas con anterioridad, y que muestre la utilidad general del marco teórico de coevolución a partir de un caso particular.

7.1. Descripción del modelo

Consideremos un sistema de formación de opinión en el cual una pregunta *simple*¹ se presenta a un conjunto de N individuos. La población de agentes se considera *homogénea* en el sentido que todos tienen atributos similares en su trasfondo cultural, educación, etcétera, y en que inicialmente no tienen una opinión completamente definida respecto al tema de la pregunta. Entonces, el proceso de formación de opinión permite que los agentes discutan e intercambien sus puntos de vista con sus conocidos preferidos o amigos por cierto tiempo, después de lo cual ciertas discusiones se interrumpen y otras nuevas se crean. La opinión de los agentes cambia continuamente como resultado

¹En el sentido que sólo admite *sí* o *no* como posibles respuestas.

de su interacción social con las demás personas, pero el tiempo en que la gente decide renovar sus discusiones es mayor. En cualquier momento un agente puede decidir “fijar” su opinión entre dos límites irrevocables de *acuerdo* o *desacuerdo total*. Al tomar una opinión irrevocable el agente puede seguir discutiendo e influenciando a otros, pero ya no puede cambiar de opinión. Así, el proceso acaba cuando la población entera ha fijado su opinión, o cuando existe un subconjunto pequeño formado por agentes que ya no pueden decidirse. Se observa que el objetivo del proceso no es alcanzar un estado de consenso (como en muchos de los modelos de formación de opinión analizados en el capítulo 6), sino permitir que cada agente utilice la red social de interacciones a su alrededor para clarificar su punto de vista respecto a la pregunta propuesta a través del intercambio de información.

Con esto en mente, el sistema puede ser descrito por una red $G(t)$ donde los nodos corresponden a los agentes y los enlaces representan las interacciones por pares o *discusiones* entre ellos. A cada individuo i se le asocia una variable de estado dependiente del tiempo $x_i(t) \in [-1, 1]$ que mide la inclinación instantánea u *opinión* del agente respecto a la pregunta propuesta, y las interacciones entre individuos se representan por los elementos $A_{ij}(t)$ de la matriz de conectividad que indican la presencia ($A_{ij}(t) = 1$) o la ausencia ($A_{ij}(t) = 0$) de discusiones entre los agentes i y j en un momento dado t . De esta forma, los valores extremos $x_i = \pm 1$ corresponden a los estados de acuerdo o desacuerdo total mientras que los valores intermedios $|x_i| < 1$ representan estados de indecisión gradual², y la topología de la red dada por la matriz $\mathbf{A}(t)$ define las discusiones que existen en un momento dado, las cuales cambian cuando a los agentes se les permite cambiar su red de interacciones. Como condición inicial de la estructura se toma una red al azar con grado promedio $\langle k_0 \rangle$ y tamaño N dados, y como condición inicial de la función se considera una distribución uniforme o gaussiana $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), \dots, x_i(0), \dots, x_N(0)]$ de opiniones iniciales sobre todo el intervalo $[-1, 1]$. Si se selecciona la distribución gaussiana, la homogeneidad de la población de agentes implica un ancho $\epsilon \leq 1$ y una media igual a cero.

En cuanto a la evolución dinámica del sistema, asumimos la *hipótesis coevolutiva* presentada en la sección 5.1, es decir, que la variable de estado x_i del nodo i depende de los enlaces de la red, y a la vez los enlaces de la red cambian de acuerdo a los valores de la variable de estado de cada nodo. Estos procesos mutuamente dependientes pueden ser descritos en general con una ecuación dinámica de la forma (5.2), la cual incorpora dos escalas de tiempo separadas. De esta manera consideramos que existen muchas discusiones entre los agentes antes de que haya un cambio en la

²En este sentido, nuestro modelo es similar a aquellos que incluyen opiniones continuas y un parámetro de límite de confianza, como el modelo de Deffuant [101] y el de Kozma - Barrat [43, 44].

estructura de la red, es decir, la escala de tiempo para cada discusión o intercambio de información (una “transacción”) es dt , mientras que la escala de tiempo para un cambio de enlaces en la red (una “generación”) es $dT = gdt$. Como ya se menciona en la sección 5.1, el parámetro de coevolución g fija el número de transacciones por generación y describe así la separación entre las escalas de tiempo de *transacciones rápidas* y *generaciones lentas*. Como se ve en las siguientes secciones, g es el único parámetro necesario para caracterizar la emergencia de comunidades en la red.

A continuación se presentan las ecuaciones de movimiento y reglas lógicas que definen las dinámicas micro y macro de nuestro modelo requeridas por el marco teórico coevolutivo, las cuales están basadas en hipótesis sencillas y reconocidas de las ciencias sociales.

7.1.1. La microdinámica de formación de opinión

La microdinámica del sistema considera la forma en que los agentes cambian su opinión individual, la cual se cuantifica por la variable de estado $x_i(t)$. El valor de la opinión cambia continuamente en una escala de tiempo rápida dt debido a las dinámicas internas en el cerebro del agente y por la influencia e interacciones con otros individuos, por lo que su evolución temporal es descrita por la ecuación (5.3). Al considerar que la población es homogénea en su trasfondo cultural, podemos ignorar las dinámicas internas (pues son similares para todos los agentes), y por tanto sólo debemos tomar en cuenta las diversas formas en que un agente puede interactuar con otros para cambiar su opinión. Éstas incluyen interacciones *directas* (de corto alcance) como las discusiones entre las personas que constituyen la red, e interacciones *indirectas* (de largo alcance) como la percepción individual de la opinión del resto de la sociedad. El efecto de tal percepción global en la opinión del agente i se mide por el *parámetro de actitud* α_i , cuyas características se describen más adelante. Así, los agentes considerados por este modelo son *homogéneos* en su trasfondo cultural pero *no uniformes* en su actitud respecto a la opinión de las masas.

Según la descripción de la microdinámica de un sistema complejo incluida en la sección 5.1, los términos de la expansión en serie de Taylor de la ecuación (5.3) pueden definir interacciones de corto o largo alcance entre los agentes de la red. Las *interacciones de corto alcance* representan las discusiones directas entre dos individuos, y por tanto describen la influencia en la opinión de un agente resultado del intercambio de información con sus amigos o compañeros más cercanos. Si las discusiones son *constructivas*, es razonable pensar que si los agentes i y j comparten la misma inclinación (es decir, si x_i y x_j tienen el mismo signo), entonces ambos puntos de vista son reforzados (es decir, ambos agentes terminan más cerca de un estado de opinión irrevocable). En caso contrario (si los individuos tienen inclinaciones opuestas), ambos tienden a estar menos seguros

de sus convicciones originales, y por tanto terminan más lejos de un estado de decisión irrevocable ($x_i = \pm 1$) después de la discusión. Además, se reconoce que una persona no sólo discute con sus amigos más cercanos (es decir, con sus primeros vecinos en G), sino que puede tener discusiones con amigos de amigos o incluso con conocidos aún más lejanos en la red de interacciones, los cuales son en general menos relevantes en la formación de opinión del individuo.

Por el otro lado, las *interacciones de largo alcance* representan la influencia del resto de los agentes distantes en la opinión de un individuo, y por tanto existen sin un contacto directo entre agentes. Debido a esto, en una primera aproximación las interacciones de largo alcance se pueden modelar como un campo medio que describe la influencia promedio del resto de la red sobre un agente particular i , es decir, la percepción individual de la opinión del resto de la sociedad. Tal influencia debe disminuir con la distancia respecto a i y ser modulada por la actitud personal α_i , y por tanto cada agente siente un campo medio distinto. Así, cada agente reacciona de forma *positiva* ($\alpha_i > 0$) o *negativa* ($\alpha_i < 0$) a la inclinación promedio de la mayoría descrita por el campo medio, dependiendo de si su personalidad los obliga a “seguir a las masas” o a “llevar la contraria”, respectivamente. Debido a lo anterior, se observa que el campo medio puede tener fluctuaciones locales considerables y por tanto no es equivalente a un potencial global sobre el sistema. De esta forma, podemos introducir también un *campo externo* h_i que represente la tendencia o predisposición personal del agente i creada por los medios masivos de comunicación en la sociedad, como el radio, la televisión y los periódicos.

Bajo todas estas consideraciones, la *microdinámica de formación de opinión* de nuestro modelo está dada por la expansión en serie de Taylor de la ecuación (5.3) hasta el término lineal en x_i , es decir,

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \alpha_i f_0(\{x_j\}) + f_1(\{x_j\})x_i + h_i, \quad (7.1)$$

donde, como hemos dicho ya, α_i mide la actitud ante la percepción de la opinión de las mayorías, y h_i mide la predisposición ante la opinión sustentada por los medios masivos de comunicación. Es relevante mencionar que los agentes también podrían tener actitudes distintas ante las discusiones directas, lo cual introduciría otro parámetro de actitud en el segundo término de la ecuación (7.1). En cambio podemos considerar a α_i como un parámetro relativo de actitud. Los términos de interacción

de corto y largo alcance en la expresión (7.1) están dados por

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \text{sign}(x_i) \sum_{n=1}^m \frac{1}{\ell(n)} \sum_j x_j(n), \\
 f_0 &= \sum_{n=m+1}^{m_{max}} \frac{1}{\ell(n)} \sum_j x_j(n),
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

donde las sumas sobre j se restringen a los nodos tales que $L_{ij} = n$, es decir, a los agentes j que están separados una distancia n de i . El parámetro m define la extensión de la interacción de corto alcance, m_{max} es el máximo valor de L_{ij} para nodos j arbitrarios, y $\ell(n)$ es un factor de normalización para cada “capa” de vecinos n de i . Así, la microdinámica de una opinión x_i está dada por un término completamente independiente de las variables de estado (la propaganda), un término de largo alcance independiente de x_i que mide la opinión promedio de las personas “lejanas” tomando en cuenta su distancia, y un término de corto alcance que promedia las interacciones por pares o discusiones entre el agente y sus vecinos cercanos. Como condición inicial se toma una distribución aleatoria uniforme en el intervalo $[-1, 1]$ para las constantes α_i , y los parámetros m , h y $\ell(n)$ se fijan para una dinámica dada.

De esta forma se determina y analiza la dinámica de las variables de estado, la cual depende fuertemente de la topología de la red en cada generación. Por tanto, a continuación describimos las maneras en que tal dinámica dicta los cambios y la evolución de los enlaces en G .

7.1.2. La macrodinámica de reconexión de la red

La macrodinámica del sistema toma en cuenta las formas en que la topología de la red de interacciones se modifica a causa del proceso de formación de opinión. Si consideramos que la duración total de tal proceso es suficientemente pequeña como para ignorar el nacimiento y muerte de individuos, y que el tiempo que cada agente dedica a las discusiones es limitado y relativamente constante a lo largo del fenómeno, podemos suponer que el tamaño N de la red se mantiene constante y que los individuos no eliminan o crean enlaces de manera excesiva, sino que siguen un proceso de reconexión en el cual dejan de discutir con alguien (por tener diferencias irreconciliables respecto al tema controversial) para empezar a hablar con un agente nuevo, el cual presuntamente los ayudará a alcanzar un estado de opinión irrevocable en menos tiempo. Como se menciona en la sección 5.1, el proceso de reconexión de la macrodinámica se da en intervalos regulares según una escala de tiempo lenta y discreta dT , y está determinado por reglas y tendencias sociales basadas en los valores de las variables de estado, a diferencia de los modelos coevolutivos del capítulo 6 donde la reconexión

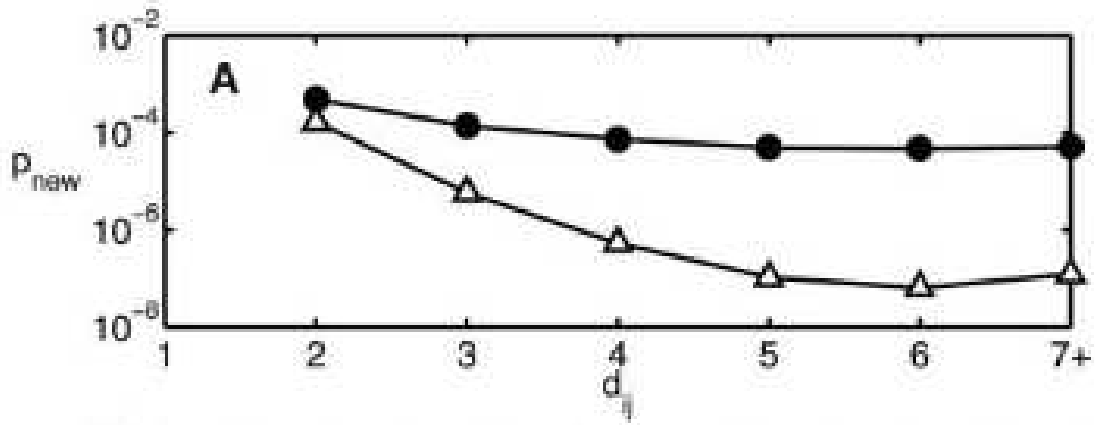


Figura 7.1: Probabilidad empírica diaria promedio p_{new} de un nuevo enlace entre dos individuos en la red social analizada en [104] como función de su geodésica d_{ij} , que en nuestra notación es L_{ij} . Los círculos (●) corresponden a pares de agentes que tienen un atributo en común, y por tanto describen a la cerradura focal. En cambio, los triángulos (△) corresponden a pares sin atributos en común, y por tanto se refieren a la cerradura cíclica. Tomado de [104].

se realiza de forma aleatoria.

La acción de *cortar enlaces* es una decisión selectiva, y la situación más clara en la cual los agentes i y j deben dejar de discutir entre ellos se da cuando sus opiniones son incompatibles. Así, la probabilidad de eliminar el enlace (i, j) debe ser proporcional al valor absoluto $|x_i - x_j|/2$, pues lo único que importa es la magnitud de la diferencia de opiniones.

El proceso de *crear enlaces* es más elaborado, pues en una red social con $\langle k \rangle \ll N$ normalmente existen más opciones para generar una nueva conexión que para destruir una antigua. Es coherente pensar que un individuo deseoso de formar un nuevo enlace seleccionará un agente cuya opinión es similar a la suya, y por tanto la probabilidad de realizar tal acción debe ser proporcional a $1 - |x_i - x_j|/2$. En nuestro sistema, este mecanismo es equivalente a la *cerradura focal* introducida en el estudio empírico de redes sociales reales de Gueorgi Kossinets y Duncan Watts [104], en el cual se describen las propiedades estadísticas de una red formada por alumnos, investigadores y trabajadores en una universidad, e inferida por la comunicación a través de correos electrónicos, las afiliaciones y los atributos de cada individuo. En este trabajo, la cerradura focal corresponde a la probabilidad de que un individuo se relacione con gente que posee los mismos atributos (ya sean actividades, gustos, o en nuestro caso, opiniones). Como se muestra en la figura (7.1), la probabilidad de hacer nuevos amigos por cerradura focal no disminuye mucho con la distancia entre personas en la red, y por tanto debe ser el proceso fundamental detrás de la creación de enlaces cuando la distancia L_{ij} es grande.

Por el otro lado, un ritual social bastante establecido para conocer nuevas personas se da cuando

un amigo común “presenta” a dos individuos. Como el agente que realiza la “presentación” conoce a los otros dos y por tanto tiene enlaces con ellos en la red, esta acción social tiene como consecuencia la generación de un *triángulo*, lo que le da el nombre de *cerradura triádica* o *cerradura 3-cíclica* [104]. Tal proceso se puede generalizar a una cerradura n -cíclica donde dos agentes con geodésica $L_{ij} = n$ se conocen gracias a la cadena de amigos que los une, pero como se observa en la figura (7.1), la probabilidad de este evento decae rápidamente con la distancia y por tanto es razonable considerar tan sólo a la cerradura triádica. Así, en nuestro modelo se considera que un agente puede iniciar discusiones con “el amigo de un amigo” (es decir, con un segundo vecino en G) si éste le ayuda a alcanzar un estado de opinión irrevocable, por lo que la probabilidad de crear un enlace entre los segundos vecinos i y j debe ser proporcional a $|x_i + x_j|/2$.

Como se puede inferir de la descripción de la macrodinámica de un sistema complejo presentada en la sección 5.1, la ecuación (5.4) es altamente no lineal y complicada, y generalmente sólo admite solución numérica, por lo que en vez de dar una expresión analítica del operador $\hat{\mathbf{O}}$, la macrodinámica puede ser descrita con un algoritmo fácilmente incorporable a una simulación numérica. De esta forma, y tomando en cuenta todas las consideraciones mencionadas en los párrafos anteriores, cuando la dinámica alcanza un tiempo de generación $t = ng$ con $n \in \mathbb{Z}$, para cada agente i se calculan las probabilidades

$$p_{ij} = A_{ij} \frac{|x_i - x_j|}{2} = p_{ij}(\mathbf{A})p_{ij}(\mathbf{x}), \quad (7.3)$$

y los enlaces (i, j) se ordenan de acuerdo a ellas. Así, los agentes j con probabilidad p_{ij} más alta se desconectan de i , siempre y cuando un número igual de agentes k se conecten después con el nodo i . La creación de enlaces se realiza por cerradura focal con probabilidad y y por cerradura triádica con probabilidad $1 - y$, donde el parámetro y mide las cantidades relativas de nuevos enlaces que se producen con cada cerradura, y se fija para toda la dinámica. En el caso de la cerradura triádica, se calculan las probabilidades

$$q_{ik} = (1 - A_{ik}) \Theta[(A^2)_{ik}] \frac{|x_i + x_k|}{2} = q_{ik}(\mathbf{A})q_{ik}(\mathbf{x}), \quad (7.4)$$

donde el término $\Theta[u] = \sum_{l=1}^{N-2} \delta_{l,u}$ identifica a los segundos vecinos de i ($L_{ik} = 2$), y en el caso de la cerradura focal se calculan las probabilidades

$$r_{ik} = (1 - A_{ik}) (1 - \Theta[(A^2)_{ik}]) \left(1 - \frac{|x_i - x_k|}{2}\right) = r_{ik}(\mathbf{A})r_{ik}(\mathbf{x}). \quad (7.5)$$

Con esto, los enlaces (i, k) se ordenan nuevamente de acuerdo a sus valores de q_{ik} o r_{ik} , y aquellos

agentes k con probabilidad q_{ik} o r_{ik} más alta se conectan a i , de tal forma que el número de enlaces destruidos y generados sea igual para cada agente i , y por tanto la macrodinámica esté efectivamente formada por un proceso de reconexión. Así, el proceso de creación de un enlace entre los nodos i y k está regido por la relación $yr_{ik} + (1 - y)q_{ik}$. Las identidades $q_{ik}(\mathbf{A}) = (1 - A_{ik}) \Theta[(A^2)_{ik}]$ y $q_{ik}(\mathbf{x}) = |x_i + x_k|/2$ en la ecuación (7.4), y $r_{ik}(\mathbf{A}) = (1 - A_{ik}) (1 - \Theta[(A^2)_{ik}])$ y $r_{ik}(\mathbf{x}) = 1 - |x_i - x_k|/2$ en la ecuación (7.5) se incluyen para presentar a las probabilidades de corte y conexión en términos de factores que dependen tanto de la topología de la red (la matriz de conectividad \mathbf{A}) como del conjunto de variables de estado (el vector de opiniones \mathbf{x}), lo cual muestra explícitamente la interacción coevolutiva de la ecuación de macrodinámica (5.4).

7.2. Cálculos numéricos

Una vez establecida la estructura del modelo, las ecuaciones de movimiento y las reglas lógicas que definen la evolución temporal del sistema, se utiliza el algoritmo incluido en el apéndice A para realizar simulaciones computacionales en las cuales la microdinámica se integra numéricamente en la escala de tiempo rápida dt , mientras que la macrodinámica sigue la escala de tiempo lenta y discreta dT . Como ya se ha mencionado, las condiciones iniciales estructurales son N y $\langle k_0 \rangle$, mientras que las funcionales son las componentes del vector $\mathbf{x}(0)$. Los parámetros del modelo son g , m , h , $\ell(n)$ y y , por lo que debemos explorar la dinámica en todo el espacio definido por ellos para caracterizar el comportamiento completo del sistema.

Después de explorar exhaustivamente el espacio de parámetros del sistema con un número considerable de simulaciones numéricas, encontramos que el fenómeno de *emergencia de comunidades* depende tan sólo del parámetro g y las condiciones iniciales N y $\langle k_0 \rangle$, por lo que los resultados presentados en esta sección corresponden a simulaciones donde el resto de los parámetros tienen los valores fijos típicos $m = 1$, $h_i = 0$, $\ell(n) = n$ y $y = 0$.³ El efecto de y en el estado final del sistema (que mide la proporción de eventos de cerradura focal a través de la relación $yr_{ik} + (1 - y)q_{ik}$) es fácilmente explicable a partir de las reglas de la dinámica descritas en las secciones anteriores⁴, mientras que un análisis detallado del efecto de los parámetros m , h_i y $\ell(n)$ se reserva para futuras

³Esto implica que las interacciones de corto alcance o discusiones sólo se realizan con los primeros vecinos, que no existe un campo externo y por tanto ignoramos los efectos globales sobre la red, que la influencia de cada “capa” de la gráfica se pesa de forma lineal con la distancia, y que la introducción de nuevos enlaces en la red se realiza por cerradura triádica solamente.

⁴Para $N = 400$, $\langle k_0 \rangle = 4$, $g = 100$ y y entre 0 y 1, el coeficiente de agrupamiento promedio se mantiene prácticamente constante excepto para $y \approx 1$, donde decae. La longitud característica promedio se reduce cuando y aumenta, lo cual es de esperarse pues la cerradura focal produce atajos de gran longitud en la red de la misma forma que el desorden genera el efecto de mundo pequeño en un anillo (véase la sección 2.3). Finalmente, el grado promedio aumenta un poco con y , lo cual se puede explicar con la misma razón.

investigaciones.

El parámetro de coevolución $g = dT/dt$ determina el tiempo característico en el que las variables de estado evolucionan por sí solas antes de que haya un cambio de generación y la red se modifique. Las opiniones x_i pueden fluctuar caóticamente o acercarse de manera exponencial a los valores $x_i = \pm 1$ de opinión irrevocable, pero una vez que alcanzan tales límites su microdinámica se detiene a propósito y la opinión se fija en ± 1 (es decir, los valores $|x_i| > 1$ no tienen sentido y por tanto se excluyen de la dinámica), pues se intenta describir un estado de decisión irrevocable en la cual el individuo ya ha tomado su posición respecto al tema controversial, aunque pueda seguir discutiendo e influenciando a otros.

Así, como se puede apreciar en el apéndice A, la simulación numérica es un proceso de dos pasos. En el primer paso la dinámica de transacciones descrita por la ecuación (7.1) se integra numéricamente con un método de Euler simple, en el cual el paso de tiempo $dt = 10^{-4}$ asegura la estabilidad de la simulación. Manteniendo los parámetros fijos, el sistema evoluciona durante g pasos de tiempo hasta alcanzar el segundo paso del proceso, es decir, la reconexión de la red descrita en la sección anterior. Tal proceso de dos pasos se itera hasta alcanzar el estado final del sistema, donde la mayoría de los individuos se encuentran en un estado de opinión irrevocable y no hay cambios nuevos en la estructura de la red⁵. Es importante resaltar que la reconexión de la red se realiza de forma *paralela*, no secuencial, por lo que las reconexiones de dos vecinos pueden provocar la creación o destrucción neta de un enlace, como se analiza con detalle en la sección 8.2.

Hemos encontrado que la forma en que el sistema se aproxima a su estado final tiene dos regímenes, los cuales pueden ser analizados al medir el número promedio de reconexiones por generación $\langle n_g(t) \rangle$ en el sistema como función del tiempo t de la dinámica. El primer régimen presenta un decaimiento exponencial de $\langle n_g(t) \rangle$ donde el número de agentes que cambian su opinión y el número de enlaces reconectados es alto. Este decaimiento rápido da paso a un régimen muy lento después de que la mayoría de los agentes ha alcanzado alguna de las opiniones irrevocables $x_i = \pm 1$, donde $\langle n_g(t) \rangle$ cambia poco y es cercano a 0. Durante tal decaimiento lento la estructura de la red no cambia significativamente, pues sólo se observa un conjunto pequeño de enlaces frustrados que intentan obtener posiciones óptimas y de agentes indecisos que intentan hacer converger sus opiniones a los valores extremos ± 1 .

Analizamos el estado final de la red a través de la medición del grado promedio $\langle k \rangle$, el coeficiente

⁵Se observa que, en general, el estado final del sistema puede tener un número pequeño de agentes indecisos con fluctuaciones mínimas en sus variables de estado, y pares de agentes que crean y destruyen los mismos enlaces en las últimas generaciones de la dinámica. Afortunadamente, estos procesos son irrelevantes en la caracterización estadística del estado final del sistema.

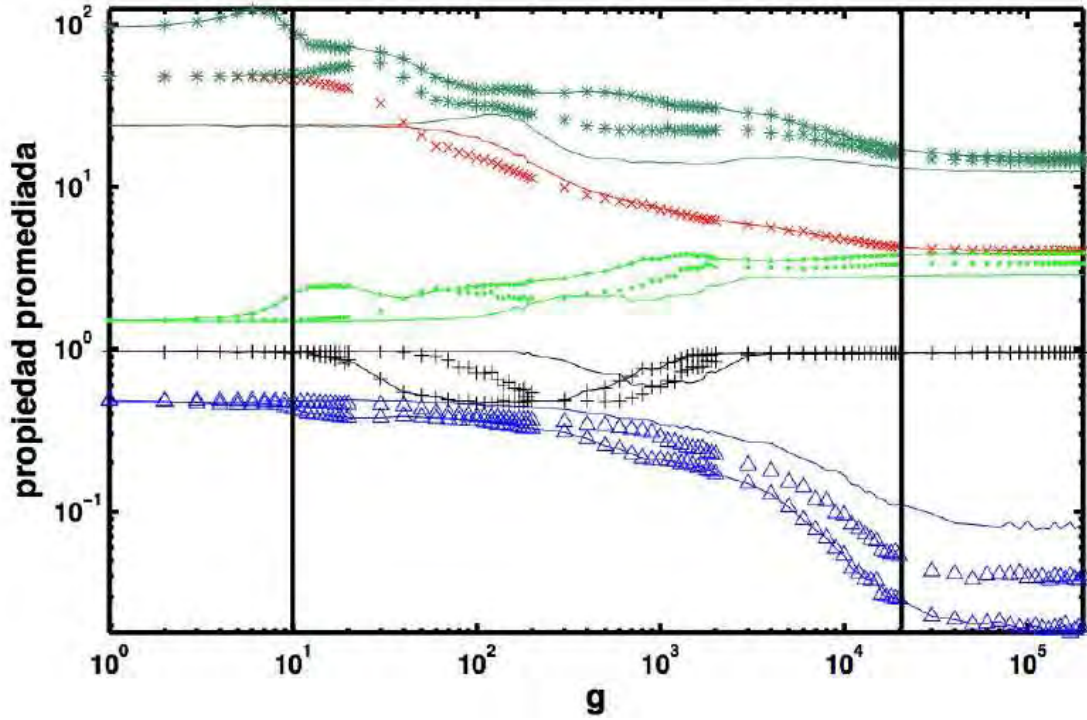


Figura 7.2: El grado promedio $\langle k \rangle$ (\times), el coeficiente de agrupamiento promedio $\langle C \rangle$ (Δ), el número de segundos vecinos promedio $\langle n^{(2)} \rangle$ ($*$), el tamaño de cúmulo promedio normalizado $\langle s^* \rangle / N$ ($+$) y la longitud característica promedio $\langle L \rangle$ (\bullet) como funciones del parámetro de coevolución g para $\langle k_0 \rangle = 4$ y redes de tamaños $N = 50$ (líneas continuas), 100 (símbolos) y 200 (líneas y símbolos). Los puntos en la figura se promedian sobre 100 realizaciones. Las líneas verticales indican aproximadamente los intervalos extremos de g donde tales cantidades casi no varían como función de g . Tomado de [41].

de agrupamiento promedio $\langle C \rangle$, el número de segundos vecinos promedio $\langle n^{(2)} \rangle$, el tamaño de cúmulo promedio normalizado⁶ $\langle s^* \rangle / N$ y la longitud característica promedio $\langle L \rangle$, y lo representamos gráficamente con el software de visualización de redes Himmeli⁷ a fin de comparar con la red aleatoria inicial.

En la figura (7.2) se presentan gráficas de las propiedades topológicas de la red antes mencionadas como funciones del parámetro de coevolución g para $\langle k_0 \rangle = 4$ y varios tamaños de red, $N = 50, 100$ y 200. También se incluyen líneas verticales para indicar aproximadamente los intervalos extremos de g donde estas propiedades topológicas casi no varían como función de g . En la figura (7.3) se muestran de nuevo varias propiedades del estado final de la red para $\langle k_0 \rangle = 4$ y $N = 200$. En este caso el tamaño de cúmulo promedio se sustituye por la susceptibilidad promedio de la Teoría de Percolación [105] definida como $\langle s \rangle = \sum_s n_s s^2 / \sum_s n_s s$, donde n_s es el número de cúmulos en la red con s nodos⁸. La figura (7.3) incluye flechas que indican los valores de g donde $\langle s \rangle$ cambia

⁶Un cúmulo es una subgráfica disconexa de G , que puede ser considerado como el caso más extremo de una comunidad, pues no comparte enlaces con el resto de la red.

⁷El código fuente y documentación de tal software se puede encontrar en www.finndiane.fi/software/himmeli/.

⁸El segundo momento $\langle s \rangle$ difiere del tamaño promedio $\langle s^* \rangle$ pues en su suma se excluye el *componente gigante*, es

drásticamente, y visualizaciones de la red para $N = 400$ y $g = 5, 10^3$ y 10^5 .

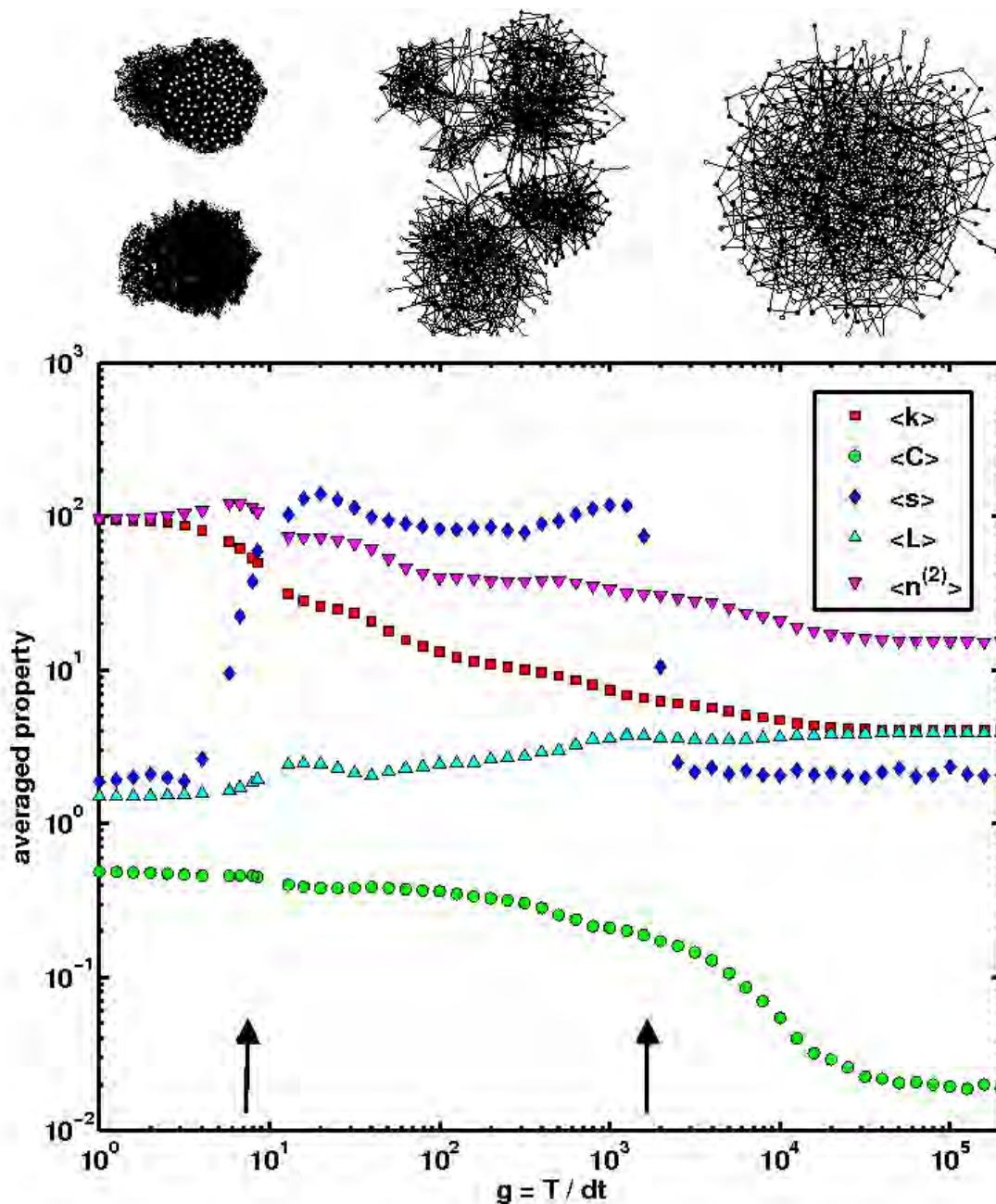


Figura 7.3: Varias propiedades del estado final de la red como funciones del parámetro de coevolución g para $\langle k_0 \rangle = 4$ y una red de tamaño $N = 200$. Los puntos en la figura se promedian sobre 100 realizaciones. Las flechas indican los valores de g donde la susceptibilidad $\langle s \rangle$ cambia drásticamente. Las gráficas en la parte de arriba son ejemplos del estado final de una red con $N = 400$ y $g = 5, 10^3$ y 10^5 , que presentan tres configuraciones distintas del sistema. Su código de color es: blanco ($x_i = 1$), negro ($x_i = -1$), rojo ($0.1 \leq x_i < 1$), azul ($-1 < x_i \leq -0.1$) y gris ($|x_i| < 0.1$). Tomado de [42].

Las líneas verticales de la figura (7.2) (o las flechas de la figura (7.3)) separan tres regiones cualitativamente distintas para el comportamiento del sistema de formación de opinión. Para $g \lesssim 10$ decir, el cúmulo más grande de la red.

la dinámica de las opiniones es irrelevante pues las reconexiones se hacen demasiado seguido, por lo que la evolución de la topología de la red es aleatoria y favorece la creación de triángulos (véase la ecuación (7.4)). En consecuencia el estado final de la red corresponde a dos cúmulos de igual tamaño con opiniones opuestas, completamente conectados en su interior y desconectados entre sí (como se ve en las figuras (7.3) y (7.4a)), lo cual reproduce el resultado de los sistemas de formación de opinión no coevolutivos basados en el modelo de Ising (y descritos en el capítulo 6), que son a fin de cuentas, *estructuras de red sin función*.

Cuando $g \gtrsim 10^4$ (es decir, g más grande que el número promedio de iteraciones necesario para alcanzar el estado final) el sistema prácticamente se desarrolla dentro de una sola generación, por lo que no hay reconexiones y las opiniones evolucionan sobre una red fija. Esto implica que el estado final es una red aleatoria (idéntica a la inicial, como se ve en las figuras (7.3) y (7.4b), y por tanto regida por las ecuaciones (2.2) y (2.3)) con una distribución no trivial de opiniones sobre ella, que claramente corresponde al estado final de un sistema dinámico definido sobre una estructura de red estática (es decir, una *función sin estructura*)⁹.

Finalmente, en la región intermedia de g la interacción entre los procesos rápido y lento de la dinámica produce un resultado revelador: **la coevolución entre estructura y función en escalas de tiempo similares produce una propiedad emergente**: la red ya no está completamente conectada ni es aleatoria, sino que posee una estructura heterogénea con subconjuntos de nodos altamente conectados entre sí y poco conectados con el resto de ella, que identificamos como *comunidades sociales* y se muestran en las figuras (7.3) y (7.4c). Como se observa en la segunda imagen, las comunidades que se reconocen de forma visual (y son producto del algoritmo de minimización del software de visualización Himmeli) corresponden con las comunidades jerárquicas y sobrepuestas del algoritmo de detección de Lancichinetti - Fortunato - Kertész [91], el cual fue implementado numéricamente de acuerdo a las reglas descritas en la sección 4.1 (con el parámetro de resolución $\alpha = 0.9$). Cabe mencionar que la emergencia de comunidades de este estilo no ha sido encontrada en modelos de formación de opinión anteriores, aunque se reconoce como una característica típica de las sociedades humanas [18, 19].

⁹Tal distribución no trivial de opiniones cobra sentido sobre una red cuadrada. Como se muestra en la figura (7.7), existen grupos de nodos con la misma opinión que se identifican como comunidades funcionales derivadas sólo de la microdinámica de formación de opinión.

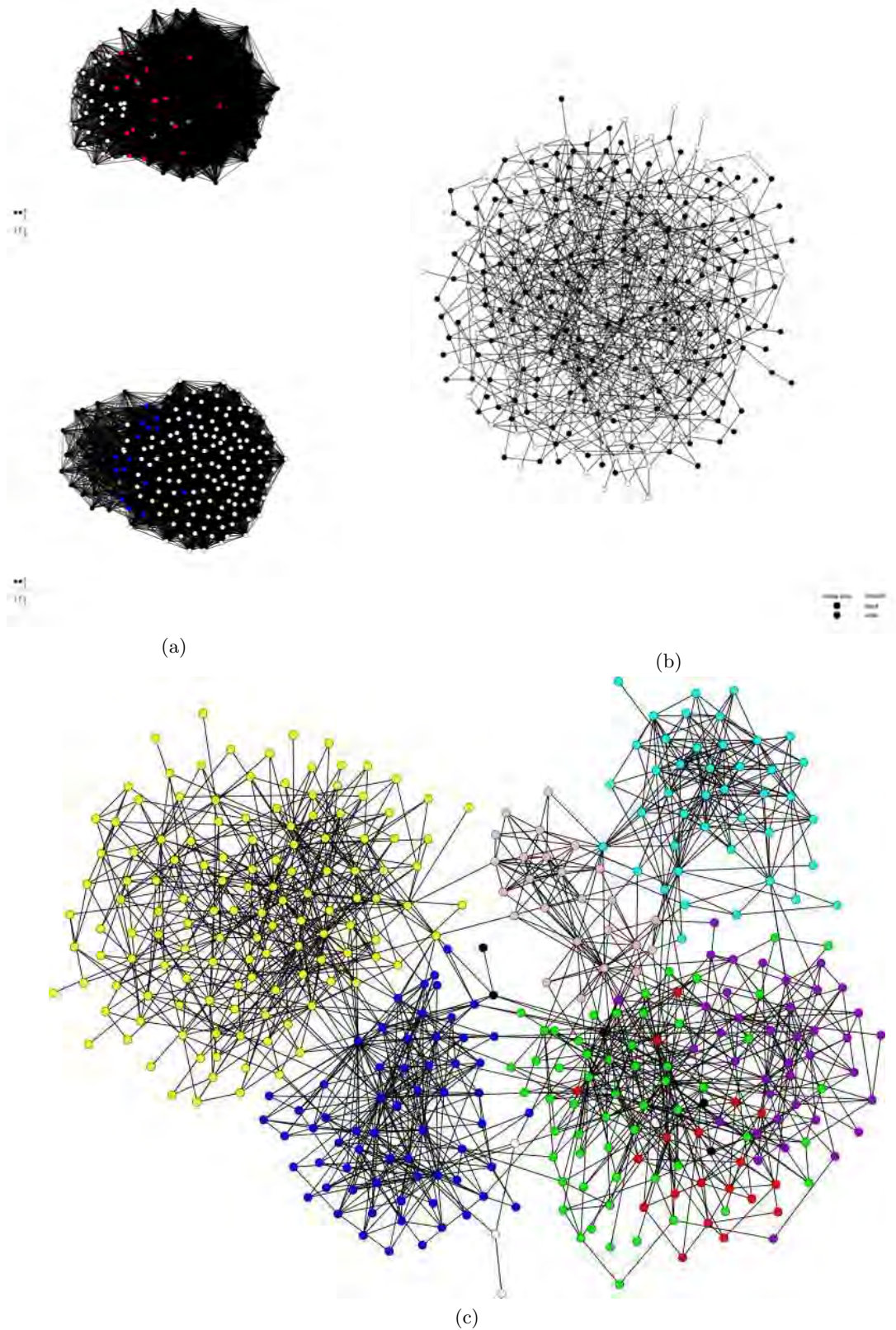


Figura 7.4: El estado final de una red con $N = 400$ y $\langle k_0 \rangle = 4$ para $g = 5$ (a), 10^5 (b) y 10^3 (c). El código de color para (a) y (b) es como el de la figura (7.3). Las comunidades en la red heterogénea (c), coloreadas para su fácil identificación, se encontraron con el algoritmo de detección [91] y corresponden con las comunidades del software de visualización Himmeli. Los nodos de cada comunidad comparten la misma opinión irrevocable 1 ó -1 .

Mientras que en la parte superior central de la figura (7.3) la optimización de Himmeli permite que el ojo distinga 5 comunidades, en la figura (7.4c) el algoritmo [91] separa la red en 7 comunidades. Esto implica que, aunque hay en general una buena correspondencia entre las dos particiones, el algoritmo de detección logra encontrar una sub-estructura no capturada por Himmeli o el ojo humano. Además, es importante notar que en cada comunidad detectada (por cualquiera de los dos algoritmos) *todos los nodos comparten la misma opinión*, por lo que las comunidades generadas por nuestro modelo cumplen con los requisitos estructurales y funcionales introducidos de forma heurística al principio del capítulo 4. **Hasta donde sabemos, la similitud de atributos entre agentes no ha sido utilizada aún para definir comunidades** [85].

Además, las curvas en la figura (7.2) comprueban que las propiedades de las redes sociales descritas al principio de este capítulo aparecen de forma dinámica para los mismos valores intermedios de g . En primer lugar, se cumple la relación $\langle k \rangle \ll N$, por lo que *la conectividad promedio en la red es considerablemente más pequeña que su tamaño*, y se puede encontrar un valor de g en el cual *coincide* con el número de Dunbar [102, 103], pues $\langle k \rangle$ varía continuamente con g entre los valores altos de las redes completamente conectadas y los valores bajos de las redes aleatorias. En segundo lugar, se tiene un *coeficiente de agrupamiento promedio* $\langle C \rangle$ *alto* (cercano al de una red completamente conectada) y una *longitud característica promedio* $\langle L \rangle$ *pequeña* (con un valor intermedio entre los correspondientes a las redes completamente conectadas y aleatorias), por lo que el sistema presenta el *efecto de mundo pequeño* [33].

La figura (7.5) presenta el escalamiento de varias propiedades del estado final de la red con el tamaño N para $\langle k_0 \rangle = 4$ y $g = 1000$. Nótese que la susceptibilidad $\langle s \rangle$ presenta el mayor cambio como función de N , lo cual implica que la fluctuación drástica de $\langle s \rangle$ en la región coevolutiva de g que se observa en la figura (7.3) (donde la susceptibilidad aumenta dos órdenes de magnitud para g entre 10 y 10^3) se escala fuertemente con el tamaño de la red. Las otras propiedades topológicas presentan comportamientos más graduales como funciones de g , y por tanto su escalamiento con N es más débil. Un análisis detallado del escalamiento de nuestro sistema de formación de opinión también se propone como un tema de investigación futura.

Los valores de $\langle k \rangle$ y $\langle C \rangle$ encontrados en el estado final de la red para g intermedia son una consecuencia de la emergencia de comunidades. Si existen aproximadamente X comunidades de tamaño n en la red entonces $N \sim Xn$, y si las comunidades son subgráficas aleatorias entonces cada una cumple con $\langle k \rangle / \langle C \rangle \sim n$ (es decir, la ecuación (2.2)). Por lo tanto, la región intermedia de g donde $\langle k \rangle / \langle C \rangle$ es constante corresponde a redes formadas por comunidades de tamaño N/X .

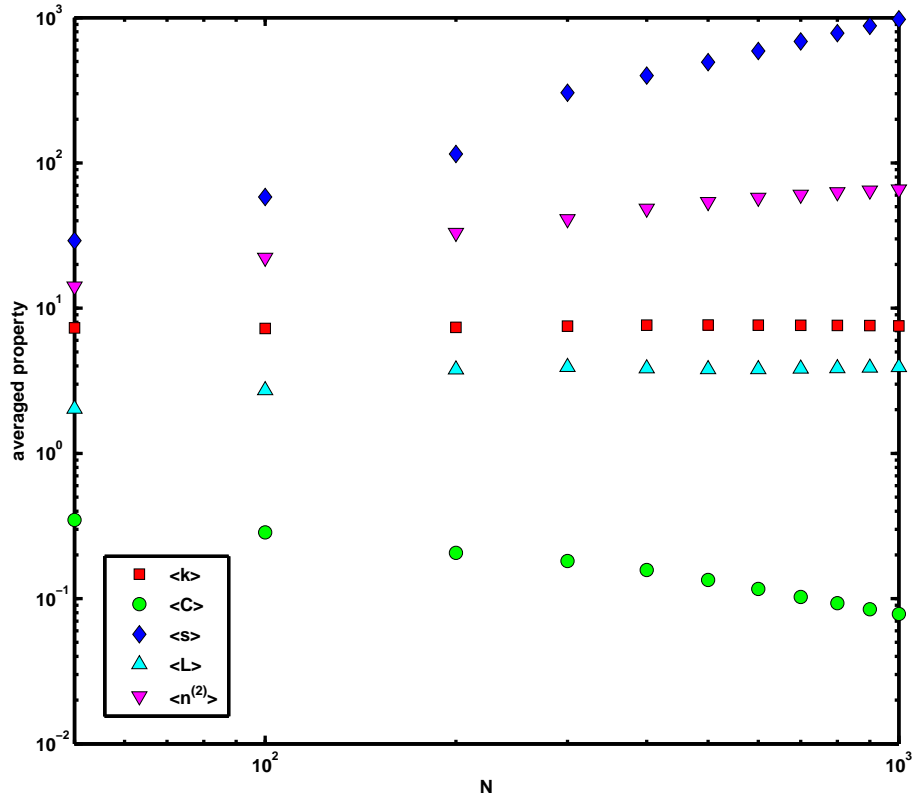


Figura 7.5: Escalamiento de varias propiedades del estado final de la red con el tamaño N para $\langle k_0 \rangle = 4$ y $g = 1000$. Los puntos en la figura se promedian sobre 1000 realizaciones.

En la figura (7.6) se muestra esta razón como función de g para sistemas con distintos valores de N , y en el recuadro se grafica X como función de N para $g = 1000$, lo cual muestra que el número de comunidades crece con el tamaño de la red, y que la tasa de cambio de X disminuye conforme N aumenta¹⁰. Resulta relevante mencionar que esta predicción de campo medio para una red con $N = 400$ nos indica que el sistema tiene aproximadamente 8 comunidades, lo cual concuerda satisfactoriamente con las 7 comunidades encontradas por el algoritmo de detección [91] en la red de la figura (7.4c).

Las simulaciones numéricas muestran que el parámetro de actitud personal α_i tiene un papel importante en la emergencia de comunidades de aproximadamente el mismo tamaño. En una red formada por puros agentes con α_i *positiva* la dinámica del sistema alcanza un consenso de opinión rápidamente (sin que se genere una estructura de comunidades), mientras que en una red donde todos los agentes tienen α_i *negativa* el estado final del sistema está formado por dos cúmulos con

¹⁰Aunque no hemos analizado redes con tamaños mayores a $N = 1000$ por la lentitud de las simulaciones numéricas asociadas, es posible que X llegue a un “régimen termodinámico” donde ya no dependa de N , lo cual implicaría que el número de Dunbar asociado a cierto valor de g no varía con el tamaño de la sociedad, y por tanto respaldaría los resultados al respecto [102, 103] dentro de un modelo.

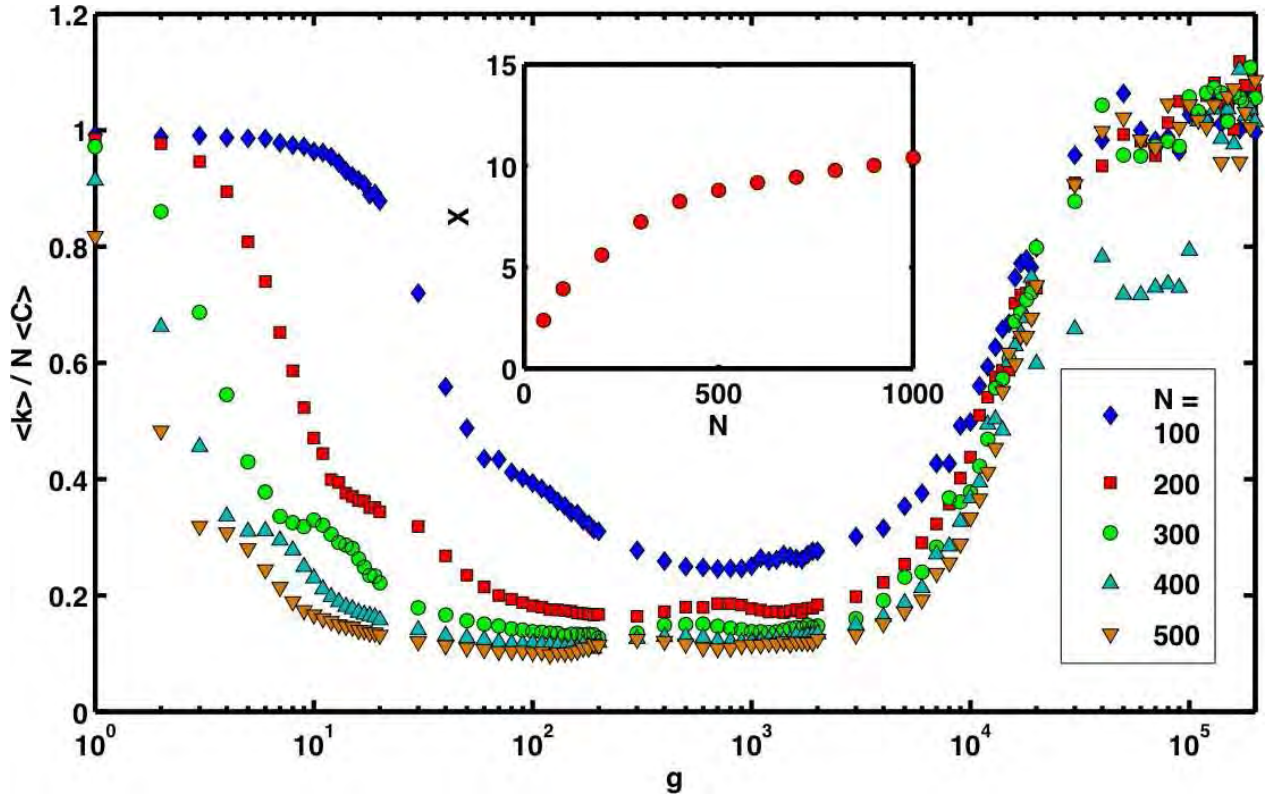


Figura 7.6: (a) La razón $\langle k \rangle / [N \langle C \rangle]$ como función de g para distintos valores de N . Cada punto corresponde a un promedio sobre 100 realizaciones de los cálculos numéricos. El recuadro muestra el número de comunidades X como función de N para $g = 1000$ y promediado sobre 1000 realizaciones. Tomado de [42].

opiniones opuestas¹¹. Sin embargo, al tomar una distribución aleatoria de los valores de α_i (como en todos los cálculos numéricos presentados en esta sección) se introduce *frustración* en el sistema, y por tanto la red tiende a estructurarse.

Con esto en cuenta, resulta interesante analizar con algo más de detalle cómo se distribuyen los valores de α_i en las comunidades del estado final de la red. Para valores pequeños de g , cuando el proceso de reconexión es muy rápido y se forman dos cúmulos de opiniones opuestas, los parámetros de actitud no tienen un papel importante en la dinámica, por lo que las distribuciones de α_i en cada cúmulo son uniformes en el intervalo $[-1, 1]$ y similares entre sí. No obstante, en el régimen coevolutivo de valores intermedios de g la situación es distinta. Tómese por ejemplo la red de la parte superior central de la figura (7.3), que representa la configuración típica encontrada para valores intermedios de g : dos comunidades grandes de opiniones opuestas y un cierto número de comunidades más pequeñas, en este caso tres. Se ha observado que las comunidades más pequeñas tienen una distribución de α_i relativamente estrecha donde la mayoría de las α_i son negativas,

¹¹En la interpretación social del modelo, el primer límite corresponde al caso en que todas las personas “siguen la opinión de la mayoría” y por tanto forman una sola comunidad uniforme, y el segundo límite corresponde al caso en que todos los individuos “se oponen a la opinión de la mayoría” y en consecuencia se obtienen dos comunidades de opinión opuesta sin enlaces entre ellas.

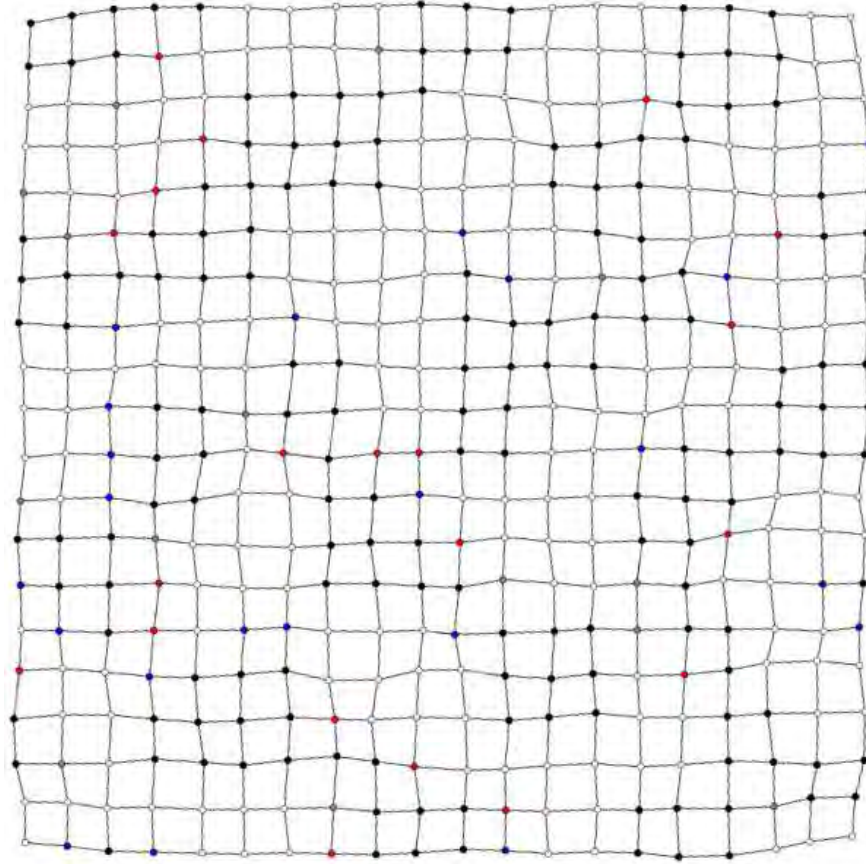
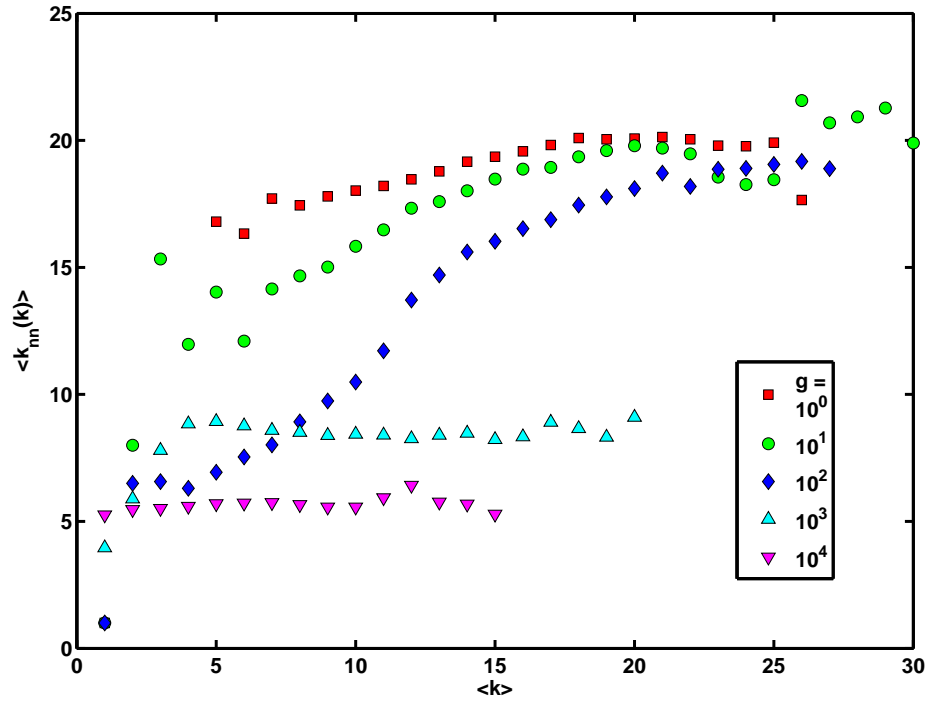


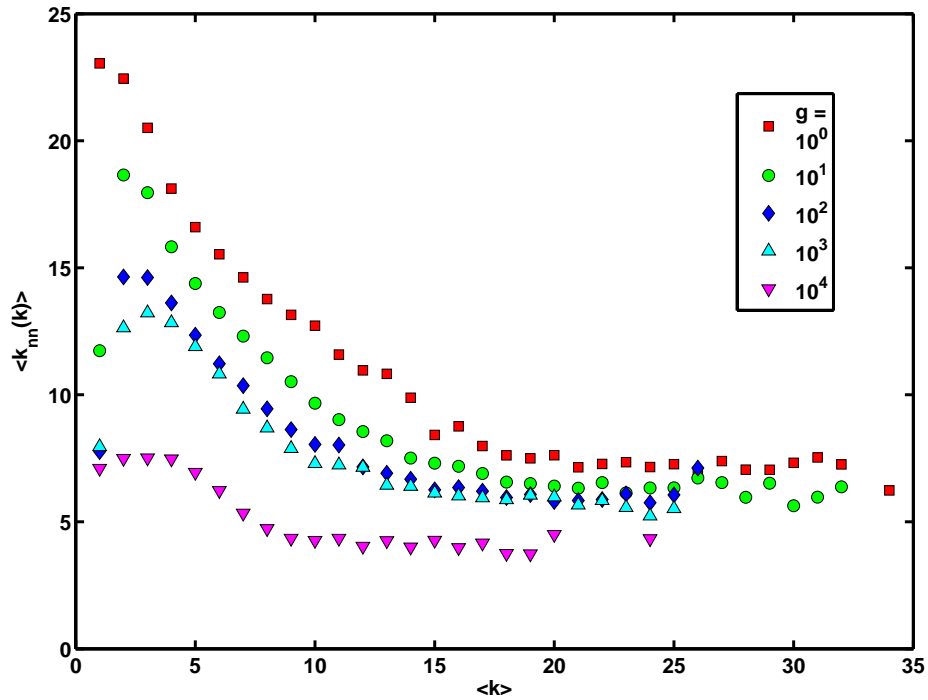
Figura 7.7: Estado final de la microdinámica de formación de opinión sobre una red cuadrada de tamaño $N = 400$. El código de color es como el de la figura (7.3). Aunque no haya reconexión en el sistema, la dinámica produce comunidades con la misma opinión, algunas veces separadas por agentes indecisos.

mientras que en las dos comunidades más grandes las distribuciones son más anchas y favorecen valores positivos de α_i . En otras palabras, los agentes con α_i negativa no se sienten a gusto dentro de una comunidad grande y homogénea, y prefieren formar comunidades más pequeñas. Es interesante que la actitud personal de los agentes tenga un papel tan importante en la estructura final de la red a pesar de que no esté definida como una tendencia a cierta opinión, sino como la habilidad o intención de un agente para ajustarse o no a la opinión mayoritaria del resto de los individuos en el sistema.

Para finalizar esta sección se presentan dos resultados más. En primer lugar, podemos estudiar las *funciones sin estructura* del caso extremo $g \gtrsim 10^4$ al utilizar como condición inicial una red cuadrada, y observar como la microdinámica de formación de opinión genera por sí sola una distribución de opiniones no trivial sobre la red. Como se muestra en la figura (7.7), la red cuadrada con $N = 400$ tiene comunidades bien definidas de agentes con la misma opinión irrevocable (los nodos blancos o negros), separados en ocasiones por agentes en diferentes estados de indecisión gradual (los nodos rojos, azules o grises, según el código de color de la figura (7.3)).



(a)



(b)

Figura 7.8: El grado promedio de los vecinos más cercanos $\langle k_{nn}(k) \rangle$ como función del grado promedio $\langle k \rangle$, en el estado final de un sistema con $N = 50$ y $\langle k_0 \rangle = 4$ para varios valores de g . Los puntos se promedian sobre 100 realizaciones. La red es (a) *asortativa* si se usan las ecuaciones (7.3) y (7.4) en el proceso de reconexión, y (b) *disasortativa* si en tales ecuaciones se intercambian los factores $p_{ij}(\mathbf{x})$ y $q_{ik}(\mathbf{x})$.

Esto implica que nuestro modelo también puede generar comunidades puramente funcionales derivadas de la microdinámica de las variables de estado, además de las comunidades coevolutivas que se han mostrado a lo largo de este capítulo.

En segundo lugar, hemos calculado el grado promedio de los vecinos más cercanos $\langle k_{nn}(k) \rangle$ (introducido en la ecuación (1.13)), el cual presenta *asortatividad* en el régimen coevolutivo de g . Como se puede notar en la figura (7.8a), en el estado final del sistema los agentes de cierto grado están conectados con agentes de grado similar, como es usual en las redes sociales reales [28].

Si modificamos la ecuación (7.3) al sustituir $|x_i - x_j|$ por $|x_i + x_j|$ y la ecuación (7.4) al cambiar $|x_i + x_k|$ por $|x_i - x_k|$ (es decir, favorecemos el corte de enlaces entre agentes con la misma opinión y la creación de enlaces locales entre agentes con opiniones distintas), la red final presenta en cambio un comportamiento *disasortativo* en el régimen intermedio de g , como se puede apreciar en la figura (7.8b). Esto implica que las reglas de reconexión introducidas en la sección (7.1.2) son fundamentales para reproducir la asortatividad encontrada en sistemas sociales reales. De manera adicional, en ambos casos se observa que la red es esencialmente *no asortativa* en el caso extremo $g \gtrsim 10^4$, lo cual indica la relevancia de la interacción coevolutiva en la aparición de asortatividad en la red.

En resumen, se ha mostrado de manera cuantitativa y cualitativa que *nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión genera de forma dinámica redes con las mismas características observadas empíricamente en redes sociales*, al incluir a la interacción entre estructura y función como un elemento fundamental de la evolución temporal (lo cual sucede para valores intermedios de g). Cuando la coevolución no es relevante (es decir, para valores extremos de g), los estados finales corresponden a topologías triviales que no representan redes sociales reales, como las redes completamente conectadas y las redes aleatorias.

Capítulo 8

Análisis de campo medio

A fin de completar el análisis de nuestro modelo coevolutivo de formación de opinión, se presenta un análisis de campo medio para algunos casos particulares. Como sucede con el modelo de Zanette - Gil [48, 49], una descripción de campo medio para nuestro modelo en el régimen intermedio de g resulta inútil, pues la coevolución entre la distribución de opiniones y la red de interacciones crea correlaciones fuertes entre los estados individuales de los pares de agentes que están conectados. Esta particularidad del sistema hace que una caracterización analítica explícita del proceso de coevolución sea muy difícil o tal vez imposible, por lo que en esta sección tan sólo se presenta un análisis de campo medio para los casos extremos de g en que tenemos una *función sin estructura* o una *estructura sin función*. En otras palabras, consideramos los casos $g \rightarrow \infty$ (donde sólo la microdinámica de formación de opinión es relevante) y $g \rightarrow 0$ (donde sólo se toma en cuenta la macrodinámica de reconexión de la red).

8.1. Campo medio para la microdinámica de formación de opinión

En esta sección describimos el análisis de campo medio para la dinámica de las variables de estado x_i en el límite $g \rightarrow \infty$, a fin de estudiar la rapidez con la que los agentes alcanzan una opinión irrevocable, es decir, la forma en que el número de agentes decididos (o indecisos) varía en función del tiempo al principio de la dinámica, cuando $t \approx 0$.

De acuerdo a las ecuaciones (7.1) y (7.2), la evolución temporal de x_i sigue la relación

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \text{sign}(x_i)x_i \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \sum_j x_j(n) + \alpha_i \sum_{n=m+1}^{m_{max}} \frac{1}{n} \sum_j x_j(n) + h_i, \quad (8.1)$$

donde, como se menciona en la sección (7.1.1), la suma sobre j se restringe a los n -ésimos vecinos

del agente i . Como el campo externo constante h_i sólo acelera la forma en que la variable se acerca a alguno de los estados de opinión irrevocable o *estados fijos* $x_i = \pm 1$, su efecto en la dinámica de x_i es relativamente simple y por tanto no será considerado en este análisis. Así, con $h_i = 0$ no hay términos en la ecuación (8.1) que favorezcan un estado fijo $|x_i| = 1$ sobre el otro, por lo que el sistema es simétrico respecto al signo de x_i . Por tal simetría se toma $x_i(0) \equiv x_i^0 \in [0, 1]$ como la condición inicial de la variable de estado del agente i , es decir, sólo consideramos las opiniones iniciales *positivas*.

Entonces, tomando en cuenta que $x_j \in [-1, 1] \forall j$, algunos de los términos en cada suma $\sum_j x_j(n)$ para n dada se cancelarán entre sí, manteniendo a las sumas sobre j esencialmente en el mismo orden de magnitud para una red arbitraria¹. En esta situación, la expresión para $\partial x_i / \partial t$ es una serie sobre n donde cada término se escala como $1/n$, así que en una primera aproximación podemos despreciar todos los términos para $n > m$ y por tanto eliminar el segundo término en la ecuación (8.1). De esta forma, con $\gamma_i(t) \equiv \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \sum_j x_j(n)$ tenemos

$$\frac{dx_i}{dt} = \gamma_i(t)x_i,$$

donde consideramos una dependencia total $x_i \equiv x_i(t)$ por simplicidad, y partiendo de la hipótesis de que en este caso la topología de la red es estática y por tanto no influye dinámicamente en las variables de estado. Integrando tal ecuación obtenemos

$$\ln \frac{x_i}{x_i^0} = \int_0^t \gamma_i(\tau) d\tau \equiv \Gamma_i(t) - \Gamma_i(0), \quad (8.2)$$

con $\Gamma_i(t)$ tal que $\gamma_i(t) = d\Gamma_i(t)/dt$. Con esto podemos expandir $\Gamma_i(t)$ en una serie de Taylor alrededor del estado inicial $t = 0$, es decir, escribir

$$\Gamma_i(t) - \Gamma_i(0) = \left. \frac{d\Gamma_i}{dt} \right|_{t=0} t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\Gamma_i}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots,$$

donde

$$\left. \frac{d\Gamma_i}{dt} \right|_{t=0} = \gamma_i(0) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \sum_j x_j^0(n) \equiv \gamma_i^0.$$

¹Aquí, una red arbitraria se refiere a aquella donde la presencia de ciclos mantiene al número de n -ésimos vecinos en el mismo orden de magnitud para $n \leq m_{max}$. Esto no es cierto cuando la topología de la red tiene cierto orden; en un árbol de Cayley, por ejemplo, el número de n -ésimos vecinos crece exponencialmente con n , por lo que las sumas sobre j pueden variar mucho en magnitud incluso con la cancelación de términos debido a la simetría de signo en las variables de estado x_j .

Al considerar sólo términos de primer orden y sustituir en la ecuación (8.2), obtenemos

$$x_i = x_i^0 e^{\gamma_i^0 t}, \quad (8.3)$$

lo cual se puede generalizar directamente al caso $x_i^0 \in [-1, 1]$.

En otras palabras, en esta aproximación de campo medio el primer término de la ecuación (8.1) lleva a x_i de forma exponencial al estado fijo $x_i = 1$ o a $x_i = 0$ dependiendo del signo de γ_i^0 con una tasa proporcional a su magnitud, donde γ_i^0 es una suma pesada por “capas” de las condiciones iniciales para las variables de estado de los vecinos de i con geodésicas menores o iguales a m . Por tanto, un cambio en el signo de x_i sólo puede deberse al segundo término en la ecuación (8.1) o al campo externo h_i , pues éstos no son proporcionales a x_i .

Para entender un poco más la ecuación (8.3) analizamos ahora el comportamiento de la tasa γ_i^0 . Asumiendo que las condiciones iniciales x_j^0 son variables aleatorias independientes que siguen una distribución de probabilidad con media η y varianza σ^2 , la tasa γ_i^0 está regida por una distribución con media y varianza dadas por

$$\langle \gamma_i^0 \rangle = \eta \sum_{n=1}^m \frac{n_i^{(n)}}{n} \quad \text{y} \quad (\Delta \gamma_i^0)^2 = \sigma^2 \sum_{n=1}^m \frac{n_i^{(n)}}{n^2},$$

donde $n_i^{(n)}$ es el número de n -ésimos vecinos del agente i . Entonces, de acuerdo a la desigualdad de Chebychev en Teoría de Probabilidad [29], para un parámetro de tiempo $t_i > 0$ en una red finita con $\Delta \gamma_i^0 < \infty$ podemos escribir

$$P(|\gamma_i^0 - \langle \gamma_i^0 \rangle| > t_i \Delta \gamma_i^0) \leq \frac{1}{t_i^2},$$

es decir, conforme el tiempo aumenta, la probabilidad de que γ_i^0 se aleje más de t_i desviaciones estándar de la media es siempre menor que $1/t_i^2$. Esto implica que el intervalo de confianza para la tasa γ_i^0 correspondiente al nodo i es

$$\gamma_i^0 \in \left[\langle \gamma_i^0 \rangle - \frac{\Delta \gamma_i^0}{t_i}, \langle \gamma_i^0 \rangle + \frac{\Delta \gamma_i^0}{t_i} \right].$$

Ahora bien, debe existir un nodo i_{min} para el cual la longitud de tal intervalo sea mínima y por tanto su tasa esté más definida, por lo que podemos usar los límites de su intervalo de confianza como

la aproximación de campo medio de todas las tasas de la red. Explícitamente, tomamos entonces

$$\gamma_i^0 t = \langle \gamma_{min}^0 \rangle t \pm \Delta \gamma_{min}^0 \frac{t}{t_{max}} \quad \forall i, \quad (8.4)$$

donde $\langle \gamma_{min}^0 \rangle$ es el valor promedio de la tasa del nodo i_{min} , $\Delta \gamma_{min}^0$ es la desviación estándar correspondiente y t_{max} el valor más grande adquirido por su parámetro de tiempo, es decir, el tiempo máximo requerido por un nodo para alcanzar el estado fijo $x_i = 1$ o $x_i = 0$. Como en esta aproximación de campo medio la ecuación (8.1) es simétrica respecto al signo de x_i , es válido suponer que $\langle \gamma_{min}^0 \rangle \sim 0$ y por tanto tal cantidad puede ser despreciada. Además, por la definición del nodo i_{min} la desviación estándar $\Delta \gamma_{min}^0$ es pequeña, y el tiempo t_{max} es típicamente un número muy grande que en principio debe depender de g y N . En consecuencia, el exponente $\gamma_i^0 t$ de la ecuación (8.3) se puede aproximar por t/τ , con τ un parámetro de campo medio muy grande ajustado con las simulaciones numéricas. Este exponente de campo medio es utilizado al final de esta sección en la derivación de la densidad promedio de agentes indecisos al tiempo t .

Como se menciona antes, en la aproximación de campo medio el signo de γ_i^0 determina el estado final alcanzado por x_i , ya sea $x_i = 1$ o $x_i = 0$. Como la distribución del vector inicial de opiniones $\mathbf{x}(0)$ es simétrica alrededor de 0, en promedio $N/2$ agentes cumplen $x_i > 0$. Entre todos estos, sólo los agentes con $\gamma_i^0 > 0$ alcanzarán eventualmente el punto fijo $x_i = 1$, y en una primera aproximación tal número es del orden de $N/4$. En los siguientes párrafos sólo consideramos tales nodos, para los cuales el exponente de campo medio cumple con $\tau > 0$.

Para tiempos tempranos de la dinámica, el número de agentes que ya han alcanzado la opinión irrevocable $x_i = 1$ (denotado por N_1) es pequeño, y por tanto la probabilidad de tener un subsistema de N_1 agentes en un “baño térmico” de N es de la forma canónica [10, 11]

$$P_1(N_1) = \frac{1}{z'} e^{-\mu' N_1},$$

donde el “potencial químico” μ' debe fijar el valor promedio $\langle N_1 \rangle$ y z' normaliza la distribución. Como la probabilidad de tener un subsistema de nodos con cierta x_i es de la misma forma para cualquier valor de x_i , y el sistema tiene la relación de conservación $N = N_0 + N_1$ con N_0 el número de agentes indecisos al tiempo t , la probabilidad de tener N_0 nodos con $x_i \neq 1$ es $P_0(N_0) = e^{-\mu N_0}/z$, donde la “función de partición” z asociada a los agentes indecisos es la serie geométrica [29]

$$z = \sum_{N_0=0}^N e^{-\mu N_0} = \frac{1 - e^{-\mu(N+1)}}{1 - e^{-\mu}}.$$

Después de un poco de álgebra podemos escribir tal relación como

$$z = e^{-\frac{\mu N}{2}} \frac{\sinh\left(\frac{\mu(N+1)}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\mu}{2}\right)}. \quad (8.5)$$

Ahora bien, si se denota por $n_0 \equiv N_0/N$ a la densidad de número correspondiente (es decir, a la fracción promedio de *agentes indecisos* que aún no alcanzan un estado de opinión irrevocable), la ecuación (8.5) implica que el valor promedio de n_0 está dado por

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{z} \sum_{N_0=0}^N \frac{N_0}{N} e^{-\mu N_0} = -\frac{1}{N} \frac{\partial \ln z}{\partial \mu}.$$

El potencial químico μ es difícil de calcular incluso dentro de una aproximación de campo medio, pues tiene que ver con las correlaciones introducidas al sistema por la interacción entre estructura y función. Sin embargo, siguiendo la discusión de la ecuación (8.4), podemos considerar a μ como un parámetro ajustable de la forma t/τ , donde τ es un número grande que se obtiene a partir de las simulaciones numéricas. Entonces, tomando en cuenta ambos valores de $\text{sign}(x_i^0)$, podemos derivar respecto a μ la expresión de z dada por la ecuación (8.5) y simplificar para obtener

$$\langle n_0 \rangle = 1 - \frac{N+1}{N} \coth\left(\frac{N+1}{2} \frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{N} \coth\left(\frac{t}{2\tau}\right) = 1 - B\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad (8.6)$$

es decir, *la densidad de número promedio de variables de estado fuera de los puntos fijos* $|x_i| = 1$ (o en otras palabras, *la fracción promedio de agentes indecisos*) *decae en el tiempo siguiendo una función de Brillouin* $B(x)$, similar a la utilizada para describir la magnetización de un material paramagnético ideal en Física [9–11].

En la figura (8.1) se muestra la comparación entre la predicción de campo medio de la ecuación (8.6) y las simulaciones numéricas correspondientes a sistemas de distintos tamaños y $g = 10^5$. El parámetro τ se ajustó con una técnica de mínimos cuadrados al valor $\tau \approx gN/40$. Sin embargo, para $N \geq 50$ la ecuación (8.6) es prácticamente indistinguible de su límite clásico de Langevin, $\langle n_0 \rangle \approx 1 - \coth(t/\tau) + \tau/t$, y en tal caso el parámetro de campo medio se puede ajustar como $\tau \approx g/20$, que es independiente de N . En otras palabras, el tiempo característico que le toma a un agente alcanzar una opinión irrevocable es del orden de $g/20$, por lo que en el caso extremo $g = 10^5$ casi todos los nodos del sistema han obtenido una opinión definitiva antes de la primera reconexión de la red.

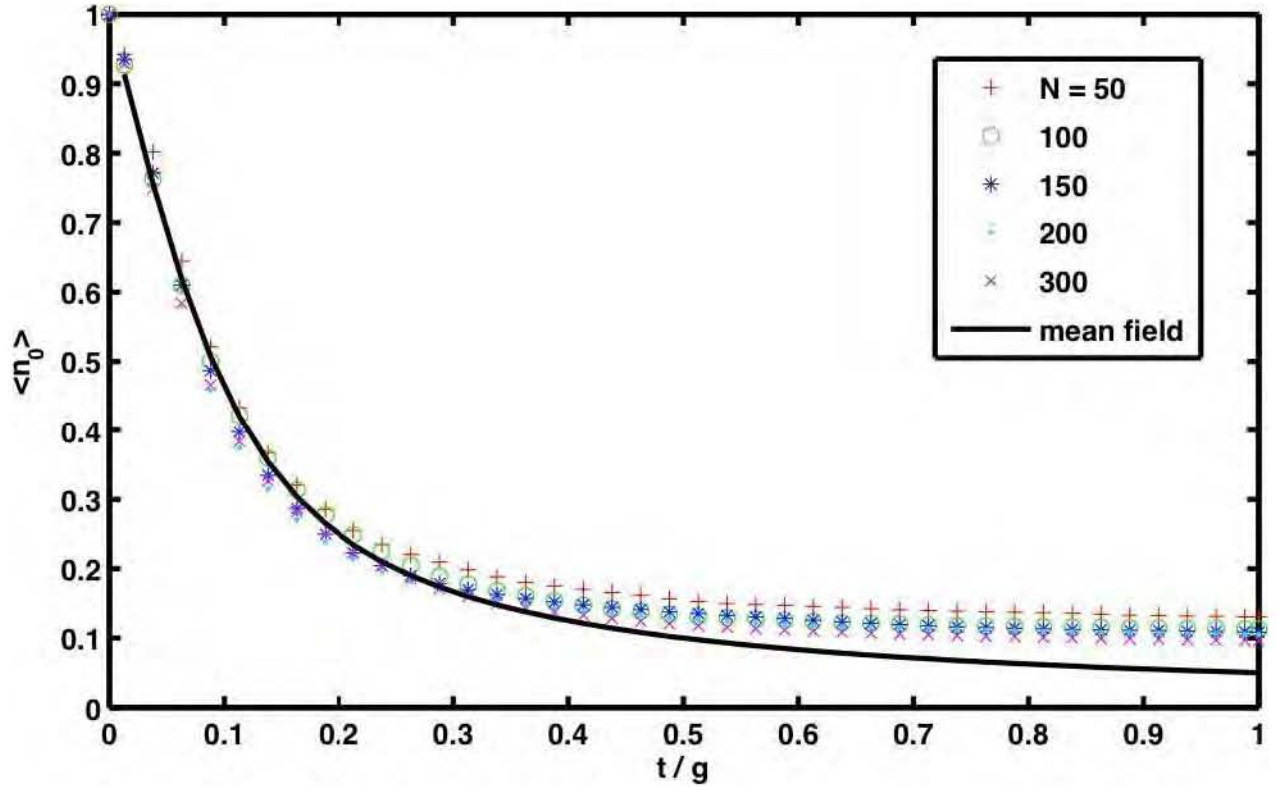


Figura 8.1: Fracción promedio de agentes indecisos $\langle n_0 \rangle$ como función del tiempo normalizado t/g para $g = 10^5$ y distintos valores de N , durante la primera generación de la dinámica. Los puntos se promedian sobre 1000 realizaciones. Se incluye la aproximación de campo medio de la ecuación (8.6) para $\tau \approx gN/40$, que en el límite clásico de Langevin corresponde a $\tau \approx g/20$. Tomado de [42].

Este resultado prácticamente no depende del tamaño N y el ajuste es muy bueno para tiempos pequeños, pero aparece una desviación significativa y sistemática para tiempos más grandes. En la simulación numérica hay de hecho más agentes indecisos que los predichos por el campo medio de la ecuación (8.6). Esto es de esperarse, pues no hemos tomado en cuenta los efectos de *frustración* producidos por la distribución de los parámetros de actitud α_i . De hecho, la diferencia entre la predicción de campo medio (8.6) y el valor real de $\langle n_0 \rangle$ puede ser utilizado como una medida de la cantidad de frustración existente en el sistema, la cual se vuelve relevante en generaciones posteriores de la dinámica.

8.2. Campo medio para la macrodinámica de reconexión de la red

Finalmente, esta sección se dedica al análisis de campo medio del proceso de reconexión de la red por cerradura triádica ($y = 0$) en el límite $g \rightarrow 0$. En este caso resulta interesante comparar las desviaciones que nuestro modelo genera en ciertas propiedades de las redes aleatorias del capítulo 2, como $\langle k \rangle = \langle C \rangle N$. Según las reglas de reconexión introducidas en la sección 7.1.2, en nuestro modelo $\langle k \rangle$ debería ser constante a primer orden, pues cada vez que un enlace es cortado se crea

uno nuevo. Sin embargo, después de una generación la red puede tener un cambio neto $\langle \Delta k \rangle$ en la conectividad promedio, que se debe a las reconexiones simultáneas realizadas por vecinos en la red. La aproximación de campo medio de esta sección se enfoca en cuantificar tal cambio en el grado promedio del sistema.

Según las ecuaciones (7.3) y (7.4), el *número de primeros y segundos vecinos* de un nodo i se pueden definir como las cardinalidades $n_i^{(1)} = |N_i^{(1)}|$ y $n_i^{(2)} = |N_i^{(2)}|$ respectivamente, donde

$$N_i^{(1)} = \{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\} \mid p_{ij}(\mathbf{A}) = 1\} \quad \text{y} \quad N_i^{(2)} = \{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\} \mid q_{ij}(\mathbf{A}) = 1\},$$

con \mathcal{N} el conjunto de nodos de G . Como se describe en la sección 7.1.2, para realizar el proceso de reconexión asociado al agente i es necesario construir los conjuntos

$$P_i = \{j \in N_i^{(1)} \mid p_{ij}(\mathbf{x}) > 0\}, \quad \text{y} \quad Q_i = \{j \in N_i^{(2)} \mid q_{ij}(\mathbf{x}) > 0\},$$

después ordenar sus elementos del más grande al más pequeño de acuerdo a las cantidades $p_{ij}(\mathbf{x})$ y $q_{ij}(\mathbf{x})$ respectivamente, y por último encontrar el mínimo de sus cardinalidades, es decir,

$$n_i = \min(|P_i|, |Q_i|), \tag{8.7}$$

que es el número de enlaces destruidos y creados en la reconexión del nodo i .

De esta forma, los n_i primeros vecinos $\{j\}$ con probabilidad $p_{ij}(\mathbf{x})$ más grande (que conforman el subconjunto reducido $\tilde{P}_i \subseteq P_i$) se desconectan del nodo i , y los n_i segundos vecinos $\{j'\}$ con probabilidad $q_{ij'}(\mathbf{x})$ más grande (que forman a su vez el conjunto reducido $\tilde{Q}_i \subseteq Q_i$) se conectan a i , de tal forma que *el cambio en el grado del agente i resultado de su propio proceso de reconexión es cero*: $\Delta_i k_i = -n_i + n_i = 0$. En otras palabras, la conectividad de la red se conserva *localmente* (es decir, para cada nodo), pero un efecto no local que modifica el grado promedio de G puede aparecer debido a la interacción entre las reconexiones de agentes cercanos. Este fenómeno, que denotamos *interferencia de reconexiones*, se describe con detalle a continuación.

8.2.1. Interferencia de reconexiones

La reconexión del agente i puede *interferir* con la de otro nodo cercano, lo cual resulta en la creación o destrucción neta de un enlace en la red. Ahora revisamos cada situación por separado.

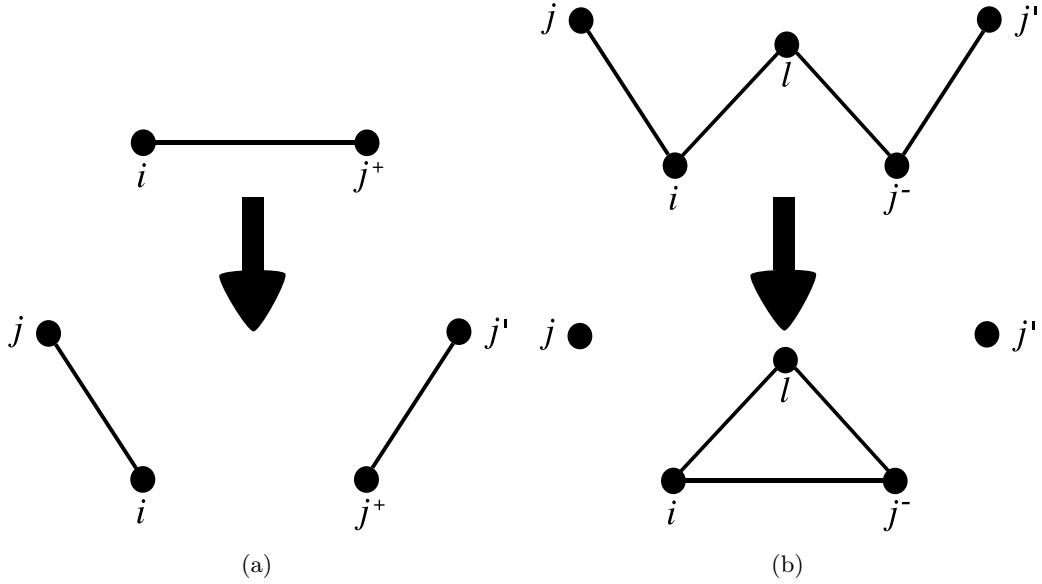


Figura 8.2: (a) Creación de un enlace en la red. El enlace (i, j^+) se rompe dos veces por los primeros vecinos i y j^+ ; a fin de conservar sus grados locales se crean los enlaces (i, j) y (j^+, j') , incrementando en uno el número de enlaces en la red. (b) Destrucción de un enlace en la red. El enlace (i, j^-) se genera dos veces por los segundos vecinos i y j^- , formando un triángulo con el agente l ; para conservar sus conectividades locales se eliminan los enlaces (i, j) y (j^-, j') , disminuyendo en uno el número de enlaces en la red.

Creación de un enlace. Respecto al primer caso, se considera la reconexión de un primer vecino de i , denotado por j^+ . Si $j^+ \in \tilde{P}_i$ y $i \in \tilde{P}_{j^+}$, entonces ambos nodos i y j^+ deciden cortar el mismo enlace (i, j^+) en sus respectivas reconexiones, y luego crean enlaces con ciertos agentes j y j' tales que $j \in \tilde{Q}_i$ y $j' \in \tilde{Q}_{j^+}$, a fin de mantener $\Delta_i k_i = 0$ y $\Delta_{j^+} k_{j^+} = 0$. Sin embargo, como un solo enlace $((i, j^+))$ ha sido destruido y dos enlaces $((i, j)$ y $(j^+, j'))$ han sido creados, se obtiene un cambio neto $\Delta_{i+j^+} E = +1$ en el número de enlaces E de la red. Esta situación se muestra esquemáticamente en la figura (8.2a).

Destrucción de un enlace. En el segundo caso se considera la reconexión de un segundo vecino de i , el agente j^- . Si $j^- \in \tilde{Q}_i$ y $i \in \tilde{Q}_{j^-}$ entonces ambos nodos i y j^- deciden crear el mismo enlace (i, j^-) en sus respectivas reconexiones, pero también cortan sus enlaces con ciertos agentes j y j' (tales que $j \in \tilde{P}_i$ y $j' \in \tilde{P}_{j^-}$) a fin de mantener $\Delta_i k_i = 0$ y $\Delta_{j^-} k_{j^-} = 0$. Así, como sólo un enlace $((i, j^-))$ ha sido creado y dos enlaces $((i, j)$ y $(j^-, j'))$ han sido destruidos, se obtiene un cambio neto $\Delta_{i+j^-} E = -1$ en el número de enlaces en la red. Este proceso se muestra en la figura (8.2b), donde se observa que el resultado de la interferencia de reconexiones es un *triángulo*, la estructura básica de una comunidad social.

En resumen, la interferencia de reconexiones puede aumentar o disminuir el número de enlaces en la red, aunque cada agente i intente mantener su grado k_i constante en su propio proceso de

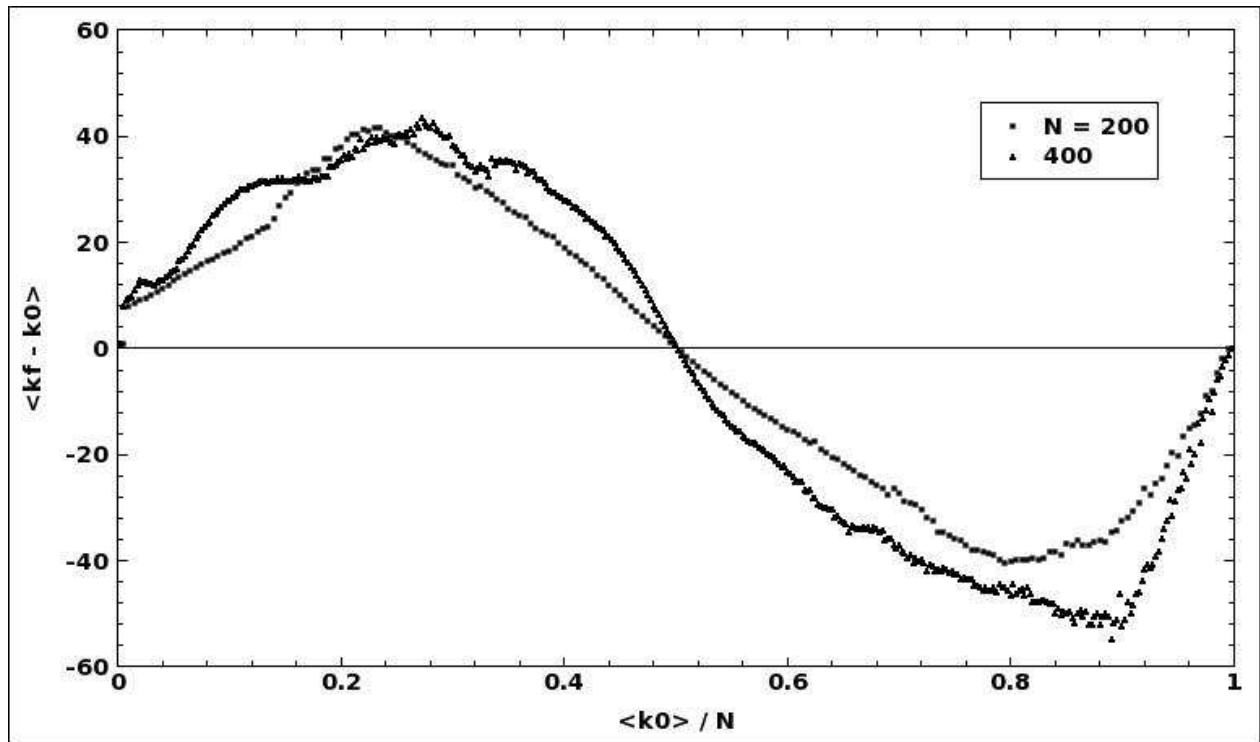


Figura 8.3: Cambio total final promedio $\langle \Delta k_f \rangle = \langle k_f - k_0 \rangle$ en la conectividad de la red, como función del grado promedio inicial normalizado $\langle k_0 \rangle / N$ para redes de tamaño $N = 200$ (■) y 400 (▲). Los puntos se promedian sobre 100 realizaciones para $g = 100$.

reconexión. Explícitamente, el *cambio total* en el número de enlaces de G después de una generación es

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \Delta_{ij} E,$$

donde se agrega el factor $1/2$ pues la simetría $\Delta_{ij} E = \Delta_{ji} E$ implica que los enlaces creados o destruidos se cuentan dos veces en esta suma. Siguiendo a la ecuación (1.7), el grado promedio $\langle k \rangle = (1/N) \sum_{i=1}^N k_i$ se puede escribir como

$$\langle k \rangle = \frac{2}{N} E \quad \rightarrow \quad \langle \Delta k \rangle = \frac{2}{N} \Delta E,$$

por lo que, después de una generación, los *cambios totales* y *locales* en la conectividad de la red cumplen las relaciones

$$\langle \Delta k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \Delta_{ij} E \neq 0, \quad \text{y} \quad \Delta_i k_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (8.8)$$

donde la igualdad $\langle \Delta k \rangle = \Delta_i k_i = 0 \forall i$ sólo se cumple cuando no hay interferencia de reconexiones en la red, o cuando los efectos de las interferencias se cancelan entre sí. En la figura (8.3) se muestra el cambio total final promedio $\langle \Delta k_f \rangle = \langle k_f - k_0 \rangle$ en la conectividad de la red, como función del grado

promedio inicial normalizado $\langle k_0 \rangle / N$ para redes de distintos tamaños y g fija². Como se observa aquí, la condición inicial estructural $\langle k_0 \rangle$ define tres estados finales distintos para $\langle \Delta k_f \rangle$:

- Con $\langle k_0 \rangle \sim 0$, $\langle k_0 \rangle \sim N/2$ y $\langle k_0 \rangle \sim N$, el grado promedio de G casi no cambia respecto a su correspondiente valor en la red aleatoria inicial y $\langle \Delta k_f \rangle \sim 0$.
- Con $0 \ll \langle k_0 \rangle \ll N/2$, la interferencia de reconexiones provoca un *aumento* significativo en la conectividad de G , por lo que el proceso fundamental en este caso es la creación de enlaces de la figura (8.2a).
- Con $N/2 \ll \langle k_0 \rangle \ll N$, sucede el caso inverso en el que hay una *disminución* en la conectividad de la red por la destrucción de enlaces mostrada en la figura (8.2b).

Es notable la aparente simetría entre las regiones de creación y destrucción de enlaces, lo cual indica que el mismo análisis de campo medio puede ser utilizado para describir ambas situaciones.

De esta forma, para encontrar una expresión del cambio $\langle \Delta k \rangle$ en la aproximación de campo medio, es útil definir cantidades que midan la cantidad relativa de términos positivos y negativos en la suma de la ecuación (8.8), es decir, que determinen los momentos de la dinámica en que existe un aumento o una disminución en la conectividad de la red.

8.2.2. Los factores f

Consideremos la interferencia de reconexiones entre los agentes i y j , donde $j \in \tilde{P}_i$ (o $j \in \tilde{Q}_i$) y $i \in \tilde{P}_j$ (o $i \in \tilde{Q}_j$). Para i dado, se denota por $F_i \subseteq \tilde{P}_i \cup \tilde{Q}_i$ al conjunto de nodos $\{j\}$ cuyas reconexiones interfieren con la del agente i . Como se ha visto en la sección anterior, existen dos tipos de nodos en F_i : los agentes $j^+ \in \tilde{P}_i$ que ayudan a incrementar $\langle k \rangle$ (y que forman el subconjunto denotado por F_i^+), y los agentes $j^- \in \tilde{Q}_i$ que ayudan a disminuir $\langle k \rangle$ (y que forman el subconjunto denotado por F_i^-), de tal forma que $F_i = F_i^+ \cup F_i^-$ y $F_i^+ \cap F_i^- = \emptyset$. Con esto definimos las *fracciones de reconexiones positivas y negativas* f_i^\pm como

$$f_i^+ = \frac{|F_i^+|}{|F_i|} \in [0, 1] \quad \text{y} \quad f_i^- = \frac{|F_i^-|}{|F_i|} = 1 - f_i^+, \quad (8.9)$$

pues $|F_i| = |F_i^+| + |F_i^-|$. Como sus nombres lo indican, para un nodo i dado f_i^+ es la fracción de la interferencia de reconexiones que produce un cambio neto positivo en $\langle k \rangle$ después de una generación, mientras que f_i^- es la fracción que provoca un cambio neto negativo. Podemos promediar

²Claramente, el cambio total $\langle \Delta k_f \rangle$ es la suma de los cambios parciales $\langle \Delta k \rangle$ de la ecuación (8.8) durante todas las generaciones de la dinámica.

las expresiones de la ecuación (8.9) sobre todos los nodos de la red para encontrar los *factores* f , dados por

$$f^\pm = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^\pm, \quad (8.10)$$

que en la aproximación de campo medio representan una medida del *aumento* ($f^+ > 1/2$ y $f^- < 1/2$) o *disminución* ($f^+ < 1/2$ y $f^- > 1/2$) sistemática de la conectividad de G después de la modificación de su topología realizada al final de cada generación³.

En esta notación, el punto fijo $\langle \Delta k \rangle = 0$ en el cual la conectividad promedio de G no cambia se determina por la condición

$$f^+ = f^- = \frac{1}{2} \quad (\langle \Delta k \rangle = 0). \quad (8.11)$$

Debido a esta identidad, podemos evitar la indeterminación $|F_i| = |F_i^\pm| = 0$ (es decir, cuando no hay interferencia de reconexiones para el agente i , y por tanto no hay cambio en $\langle k \rangle$ por su causa) al definir también

$$f_i^+ = f_i^- = \frac{1}{2} \quad (|F_i| = 0). \quad (8.12)$$

Esto se debe a que, en la aproximación de campo medio donde las únicas variables relevantes son $\langle \Delta k \rangle$ y los factores f , la ausencia de una interferencia de reconexiones y la cancelación de sus efectos sobre $\langle k \rangle$ son equivalentes. El punto fijo $\langle \Delta k \rangle = 0$ entre dos generaciones caracteriza los últimos momentos de la dinámica, pues en tales tiempos ya no hay un cambio en el grado promedio de la red. Así, las ecuaciones (8.11) y (8.12) nos dicen que en el final de la dinámica la red cumple con la condición de campo medio $f^+ = f^- = 1/2$.

8.2.3. Notación matricial

Podemos expresar todos los resultados anteriores en forma matricial con las siguientes definiciones, las cuales sirven bastante para implementar los cálculos numéricos de la aproximación de campo medio en el algoritmo del apéndice A. Sean \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{R} las *matrices de corte, conexión y*

³Para simplificar la escritura de las siguientes ecuaciones se obvia la notación del promedio sobre toda la red en los factores f , es decir $\langle f^\pm \rangle = (1/N) \sum_{i=1}^N f_i^\pm \equiv f^\pm$.

reconexión respectivamente, cuyos elementos están dados por

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= \begin{cases} -1 & \text{si } j \in \tilde{P}_i \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}, \\
 Q_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \tilde{Q}_i \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}, \\
 R_{ij} &= P_{ij} + Q_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

En otras palabras, el i -ésimo renglón en \mathbf{P} (\mathbf{Q}) contiene los índices de los nodos j que son desconectados de (conectados con) el agente i en su proceso de reconexión. A partir de la ecuación (8.13), se observa que \mathbf{P} (\mathbf{Q}) no tiene traza y que $P_{ij} = P_{ji} = -1$ ($Q_{ij} = Q_{ji} = 1$) si y sólo si hay interferencia entre las reconexiones de i y j , pues ésta condición es equivalente a $j \in \tilde{P}_i$ y $i \in \tilde{P}_j$ ($j \in \tilde{Q}_i$ y $i \in \tilde{Q}_j$).

Más aún, se tiene la relación

$$\sum_{j=1}^N R_{ij} = \sum_{j=1}^N [P_{ij} + Q_{ij}] = -|\tilde{P}_i| + |\tilde{Q}_i| = -n_i + n_i = \Delta_i k_i = 0,$$

es decir,

$$\Delta_i k_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} = 0, \tag{8.14}$$

lo cual es equivalente a la segunda parte de la ecuación (8.8), y nos dice que la nulidad de los renglones de \mathbf{R} implica la conservación local del grado de cada nodo.

Siguiendo este resultado, uno podría pensar que $\langle \Delta k \rangle$ es proporcional a la suma de los cambios locales $\Delta_i k_i$, pero como $\Delta_i k_i = 0 \forall i$ esto implicaría que $\langle k \rangle$ no cambia después de cada generación, lo cual no sucede en general, como se puede apreciar en la figura (8.3). De hecho, en tal argumento estaríamos considerando la reconexión como un *proceso de un cuerpo*, en el que el cambio total de una propiedad del sistema es la suma de los cambios de tal propiedad en los componentes del sistema. Este caso, que se puede tomar como una aproximación de primer orden a $\langle \Delta k \rangle$, es de hecho lo que sucede en el sistema cuando ninguna pareja i y j cumple las condiciones

$$\begin{cases} P_{ij} = P_{ji} = -1 \\ Q_{ij} = Q_{ji} = 1 \end{cases},$$

es decir, cuando *no* hay interferencia de reconexiones. En tal situación la reconexión de cada agente se puede considerar por separado y la conectividad promedio de G no cambia.

En el caso más usual en que *sí* hay interferencia de reconexiones, tenemos que considerar por tanto correlaciones de dos cuerpos y calcular una aproximación de segundo orden para $\langle \Delta k \rangle$. Esto es similar a lo que sucede con las funciones de densidad de probabilidad [29], donde las propiedades de una distribución dada pueden analizarse al calcular sus momentos sucesivos. Siguiendo tal analogía, nos concentramos ahora en los segundos momentos de las matrices de reconexión, \mathbf{P}^2 , \mathbf{Q}^2 y \mathbf{R}^2 .

A partir de la ecuación (8.13), los elementos diagonales de \mathbf{P}^2 son

$$(P^2)_{ii} = \sum_{j=1}^N P_{ij}P_{ji} \quad \text{donde} \quad P_{ij}P_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \tilde{P}_i \text{ y } i \in \tilde{P}_j \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases},$$

por lo que de hecho

$$(P^2)_{ii} = |F_i^+|. \quad (8.15)$$

De forma similar podemos encontrar que

$$(Q^2)_{ii} = |F_i^-|. \quad (8.16)$$

Más aún, en cuanto a \mathbf{R} ,

$$(R^2)_{ii} = \sum_{j=1}^N (P+Q)_{ij}(P+Q)_{ji} = \sum_{j=1}^N [P_{ij}P_{ji} + Q_{ij}Q_{ji} + P_{ij}Q_{ji} + Q_{ij}P_{ji}],$$

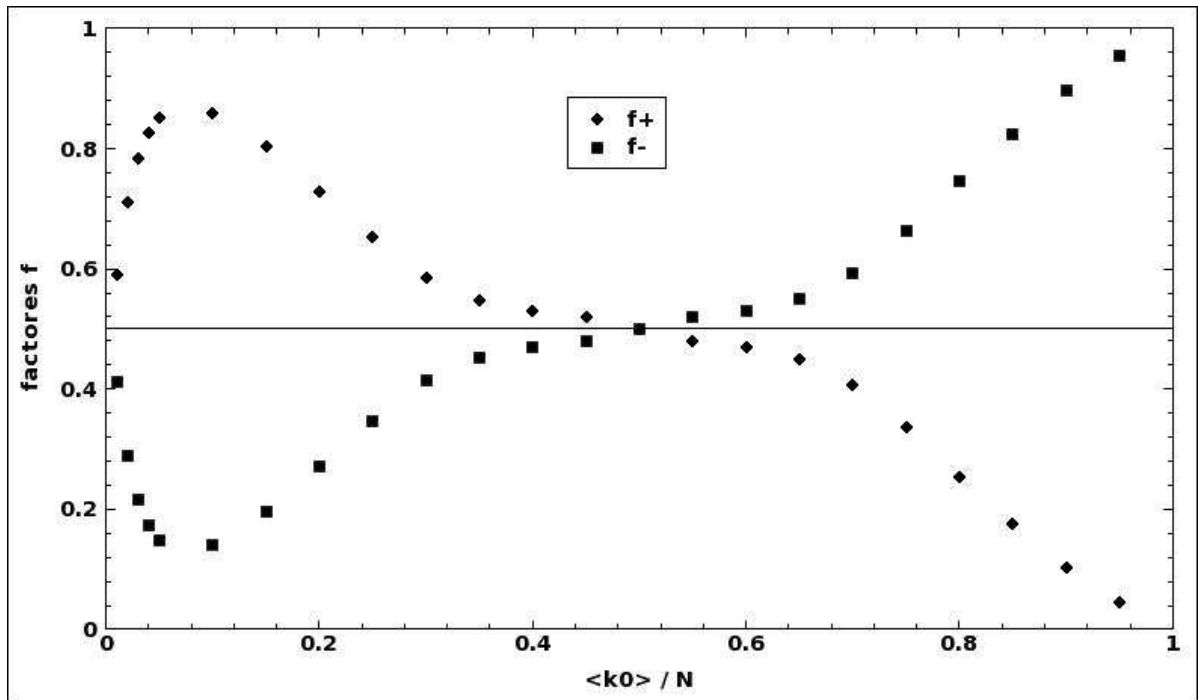
donde los términos cruzados cumplen $P_{ij}Q_{ji} = Q_{ij}P_{ji} = 0$ pues las condiciones $j \in \tilde{P}_i$ y $i \in \tilde{Q}_j$ ($j \in \tilde{Q}_i$ y $i \in \tilde{P}_j$) son mutuamente exclusivas $\forall i, j = 1, \dots, N$. Por lo tanto, con las ecuaciones (8.15) y (8.16) tenemos que

$$(R^2)_{ii} = \sum_{j=1}^N [P_{ij}P_{ji} + Q_{ij}Q_{ji}] = |F_i^+| + |F_i^-| = |F_i|,$$

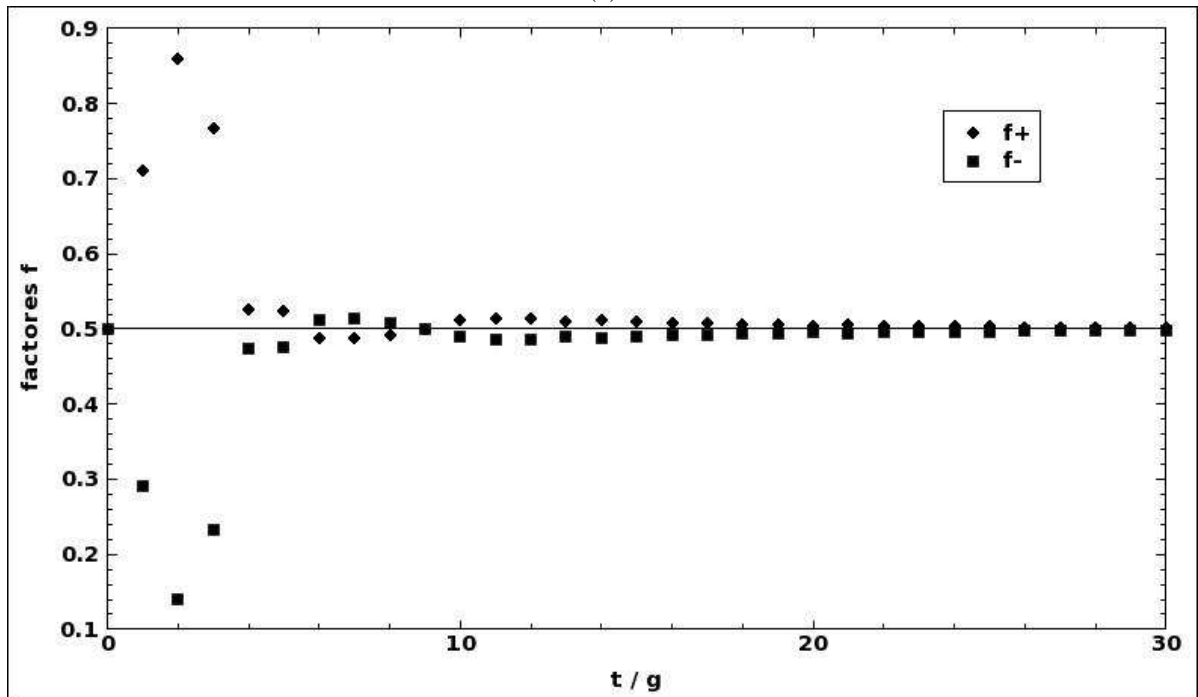
es decir,

$$(R^2)_{ii} = |F_i|.$$

A partir de la última expresión y las ecuaciones (8.15) y (8.16), podemos ver que las fracciones de reconexiones positivas y negativas para el agente i en forma matricial están dadas por



(a)



(b)

Figura 8.4: (a) Los factores f^+ (\blacklozenge) y f^- (\blacksquare) al final de la primera generación de la dinámica ($t = g$) como función del grado promedio inicial normalizado $\langle k_0 \rangle / N$ para $N = 200$ y $g = 100$. (b) Los factores f ahora como función del tiempo normalizado t/g de la dinámica para $\langle k_0 \rangle = 4$ y los mismos valores de N y g . Los resultados numéricos se promedian sobre 100 realizaciones.

$$f_i^+ = \frac{(P^2)_{ii}}{(R^2)_{ii}} \quad \text{y} \quad f_i^- = \frac{(Q^2)_{ii}}{(R^2)_{ii}} \quad \text{con} \quad (R^2)_{ii} = (P^2)_{ii} + (Q^2)_{ii} \quad \forall i, \quad (8.17)$$

donde los valores especiales de las ecuaciones (8.11) y (8.12) aplican de la misma manera.

En la figura (8.4a) se presentan los cálculos numéricos de los factores f al final de la primera generación de la dinámica ($t = g$) como función del grado promedio inicial normalizado $\langle k_0 \rangle / N$ para $N = 200$ y $g = 100$. En esta gráfica se observa que los factores f resumen la información del cambio total final $\langle \Delta k_f \rangle = \langle k_f - k_0 \rangle$ dada por la figura (8.3): en la región en que $\langle \Delta k_f \rangle > 0$ tenemos las relaciones $f^+ > 1/2$ y $f^- < 1/2$, mientras que cuando $\langle \Delta k_f \rangle < 0$ se tiene en cambio $f^+ < 1/2$ y $f^- > 1/2$. Esto implica que una contribución importante a $\langle \Delta k_f \rangle$ se realiza durante la primera generación.

De hecho, como se observa en la figura (8.4b) (donde se grafican los factores f como función del tiempo normalizado t/g de la dinámica para $\langle k_0 \rangle = 4$, $N = 200$ y $g = 100$), los factores f evolucionan en el tiempo de forma *cuasiperiódica*: en las primeras generaciones oscilan entre valores altos cercanos a 1, y conforme el tiempo pasa los máximos y mínimos de tales oscilaciones disminuyen, hasta que cerca del final de la dinámica casi no hay oscilaciones y los factores f tienden al valor $f^+ = f^- = 1/2$, que corresponde al punto fijo $\langle \Delta k \rangle = 0$ entre dos generaciones expresado en las ecuaciones (8.11) y (8.12). En otras palabras, durante las primeras generaciones la interferencia de reconexiones en el sistema presenta un comportamiento oscilatorio en que produce aumentos y disminuciones intercaladas del grado promedio de G , y el resultado neto de esto se observa en el cambio total final $\langle \Delta k_f \rangle = \langle k_f - k_0 \rangle$.⁴ Con esto en consideración, nuestro propósito ahora es utilizar a los factores f como parámetros de campo medio para encontrar una aproximación analítica a $\langle \Delta k \rangle$.

8.2.4. Aproximación de campo medio para $\langle \Delta k \rangle$

En esta sección, nuestro objetivo consiste en encontrar una expresión para $\langle \Delta k \rangle$ en la aproximación de campo medio en términos de los factores f . Para lograr esto nos concentramos en la primera parte de la ecuación (8.8), donde las dos sumas sobre los nodos de G se pueden considerar por separado. En otras palabras, para un agente i dado agrupamos los términos de interferencia de reconexiones $\Delta_{ij}E$ para todo j en un solo término Δk_i dependiente de i , y luego promediamos sobre i :

$$\langle \Delta k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta k_i. \quad (8.18)$$

Ahora, como ya hemos visto con detalle, todas las interferencias de reconexión para el agente i pueden separarse en las que aumentan k_i y las que disminuyen k_i , por lo que

$$\Delta k_i = \Delta k_i^+ - \Delta k_i^-. \quad (8.19)$$

⁴La evolución cuasiperiódica de los factores f parece ser importante para el desarrollo de la dinámica del sistema, y su análisis se propone también como un punto de investigación futura.

En cuanto a Δk_i^+ , las interferencias de reconexión que aumentan k_i se realizan con una fracción f_i^+ de los $n_i^{(1)} = k_i$ primeros vecinos del agente i , es decir,

$$\Delta k_i^+ = f_i^+ k_i. \quad (8.20)$$

Por el otro lado, como las interferencias de reconexión que disminuyen k_i se realizan con algunos de los $n_i^{(2)}$ segundos vecinos del agente i , en primer lugar tenemos que calcular $n_i^{(2)}$ para una red arbitraria. Los valores máximos posibles de $n_i^{(2)}$ se encuentran en los árboles de la sección 2.1, entre los que se encuentran los árboles de Cayley o redes de Bethe. De manera explícita, cuando *no* hay ciclos en la red tenemos

$$n_i^{(2)} = \sum_j (k_j - 1) \quad (\text{red sin ciclos}), \quad (8.21)$$

donde el índice j corre sobre los primeros vecinos del agente i . Entonces, al considerar una red *con* ciclos, podemos primero calcular $n_i^{(2)}$ como si la gráfica alrededor de i fuera de hecho un árbol, y luego sustraer los segundos vecinos *ficticios* que aparecen por la presencia de ciclos. En cuanto a los tipos de ciclos, tenemos que tomar en cuenta *triángulos* y *cuadrados*, pues tales ciclos son los únicos que pueden reducir el número de segundos vecinos dado por la ecuación (8.21). A continuación revisamos cada situación por separado.

Presencia de triángulos. Considere la estructura de la red alrededor del agente i mostrada en la figura (8.5b), donde existe un triángulo entre los nodos i , j_1 y j_2 . Si sustituimos tal gráfica por un árbol similar al presentado en la figura (8.5a) y calculamos el número de segundos vecinos con la ecuación (8.21), estamos tomando a los nodos j_1 y j_2 como segundos vecinos de i cuando claramente son primeros vecinos, por lo que tenemos que sustraer *dos* veces el número de triángulos del resultado de la ecuación (8.21) para obtener el número correcto de segundos vecinos de i . En otras palabras,

$$n_i^{(2)} = \sum_j (k_j - 1) - 2n_i^\Delta \quad (\text{con triángulos}),$$

donde $n_i^\Delta = \frac{1}{2}(A^3)_{ii}$ es el número de triángulos con el agente i como uno de sus vértices.

Presencia de cuadrados. Si ahora tenemos un cuadrado entre los agentes i , j_1 , j_2 y l , como se muestra en la figura (8.5c), y usamos la ecuación (8.21) para calcular $n_i^{(2)}$, estamos considerando a l como un segundo vecino del agente i dos veces (pues es un primer vecino tanto de j_1 como de j_2). Como sólo tenemos que contar al nodo l una vez, el número de cuadrados n_i^\square debe ser sustraído del

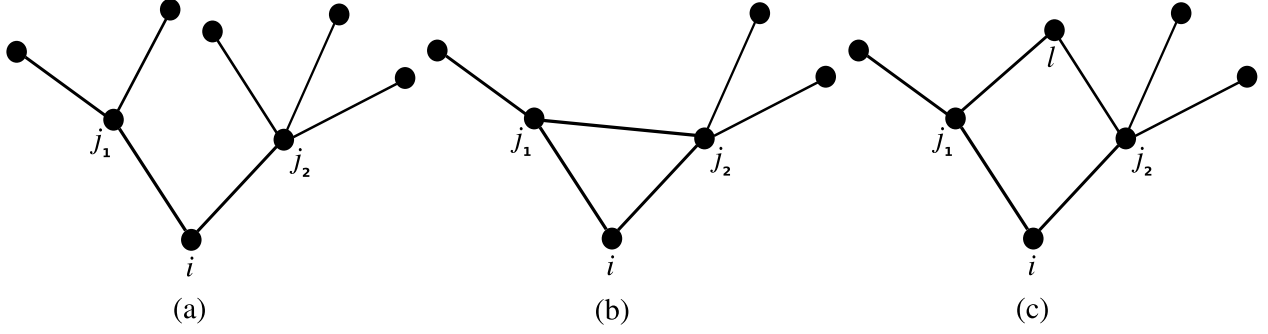


Figura 8.5: (a) Estructura de árbol en la vecindad del agente i . (b) La presencia de un triángulo reduce el número de segundos vecinos en 2 con respecto al árbol correspondiente. (c) La presencia de un cuadrado reduce el número de segundos vecinos en 1 con respecto al árbol correspondiente.

resultado de la ecuación (8.21) para calcular $n_i^{(2)}$ correctamente, es decir,

$$n_i^{(2)} = \sum_j (k_j - 1) - n_i^\square \quad (\text{con cuadrados}).$$

Se observa que si el enlace (i, l) existiera entonces l sería un primer vecino del agente i y por tanto no contribuiría a $n_i^{(2)}$. Entonces, sólo los cuadrados formados por dos primeros vecinos y un segundo vecino de i son tomados en cuenta en n_i^\square .

Uniendo los últimos dos resultados encontramos que el número de segundos vecinos en una red arbitraria está dado por

$$n_i^{(2)} = \sum_j (k_j - 1) - 2n_i^\Delta - n_i^\square,$$

lo cual generaliza correctamente la ecuación (8.21).

Entonces, las interferencias de reconexión que disminuyen k_i se realizan con una fracción f_j^- de los primeros vecinos de cada nodo j de una fracción f_i^- de los primeros vecinos del agente i , menos una fracción f_i^- del doble del número de triángulos y del número de cuadrados para i . Explícitamente,

$$\Delta k_i^- = f_i^- \left(\sum_j (f_j^- k_j - 1) - 2n_i^\Delta - n_i^\square \right). \quad (8.22)$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (8.20) y (8.22) en la ecuación (8.19) y tal expresión en la ecuación (8.18), obtenemos

$$\langle \Delta k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[f_i^+ k_i - f_i^- \left(\sum_j (f_j^- k_j - 1) - 2n_i^\Delta - n_i^\square \right) \right], \quad (8.23)$$

el cual, como la ecuación (8.18), es todavía un resultado exacto, pero no tan tratable analíticamente

como para poder ser comparado con los resultados numéricos.

Afortunadamente, la aproximación de campo medio nos permite realizar ciertas simplificaciones útiles que no disminuyen la capacidad de predicción de esta ecuación:

- En primer lugar podemos considerar que, en promedio, los grados k_j y las fracciones f_j^\pm de los primeros vecinos j del agente i son similares a k_i y f_i^\pm respectivamente, por lo que $\sum_j (f_j^- k_j - 1) \simeq k_i (f_i^- k_i - 1)$. Además podemos suponer que, como un cuadrado es una estructura más complicada que un triángulo (pues exige más correlaciones entre sus nodos), es menos común en promedio y por tanto puede ser despreciado.
- En segundo lugar, según la ecuación (1.15) el número de triángulos n_i^Δ y el coeficiente de agrupamiento C_i están relacionados por la expresión

$$C_i = \frac{2n_i^\Delta}{k_i(k_i - 1)}.$$

- Finalmente, cualquier reconexión en la red que contribuye a $\langle \Delta k \rangle$ se realiza entre un par de agentes indecisos que aún no fijan sus opiniones a algún valor irrevocable, y la densidad de tales pares es proporcional a $\langle n_0 \rangle^2$ según la ecuación (8.6).

Aplicando todas estas consideraciones en la ecuación (8.23) obtenemos

$$\langle \Delta k \rangle = \langle n_0 \rangle^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f_i^+ k_i - f_i^- k_i (f_i^- k_i - 1) + f_i^- C_i k_i (k_i - 1)].$$

Ahora bien, con el operador $(1/N) \sum_{i=1}^N$ podemos promediar los tres términos en la última suma por separado, pero para promediar los factores en los productos es necesario ignorar todas las posibles correlaciones entre ellos, es decir, tomar

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f^\pm k \rangle = \langle f^\pm \rangle \langle k \rangle \\ \langle f^- C k \rangle = \langle f^- \rangle \langle C \rangle \langle k \rangle \\ \langle (f^-)^2 k^2 \rangle = \langle f^- \rangle^2 \langle k \rangle^2 \\ \langle f^- C k^2 \rangle = \langle f^- \rangle \langle C \rangle \langle k \rangle^2 \end{array} \right. ,$$

donde se usa la notación explícita $\langle \bullet \rangle$ para los promedios sobre toda la red. Eliminando esta notación en los factores f por simplicidad, podemos escribir

$$\langle \Delta k \rangle = \langle n_0 \rangle^2 [f^+ \langle k \rangle - f^- \langle k \rangle (f^- \langle k \rangle - 1) + f^- \langle C \rangle \langle k \rangle (\langle k \rangle - 1)], \quad (8.24)$$

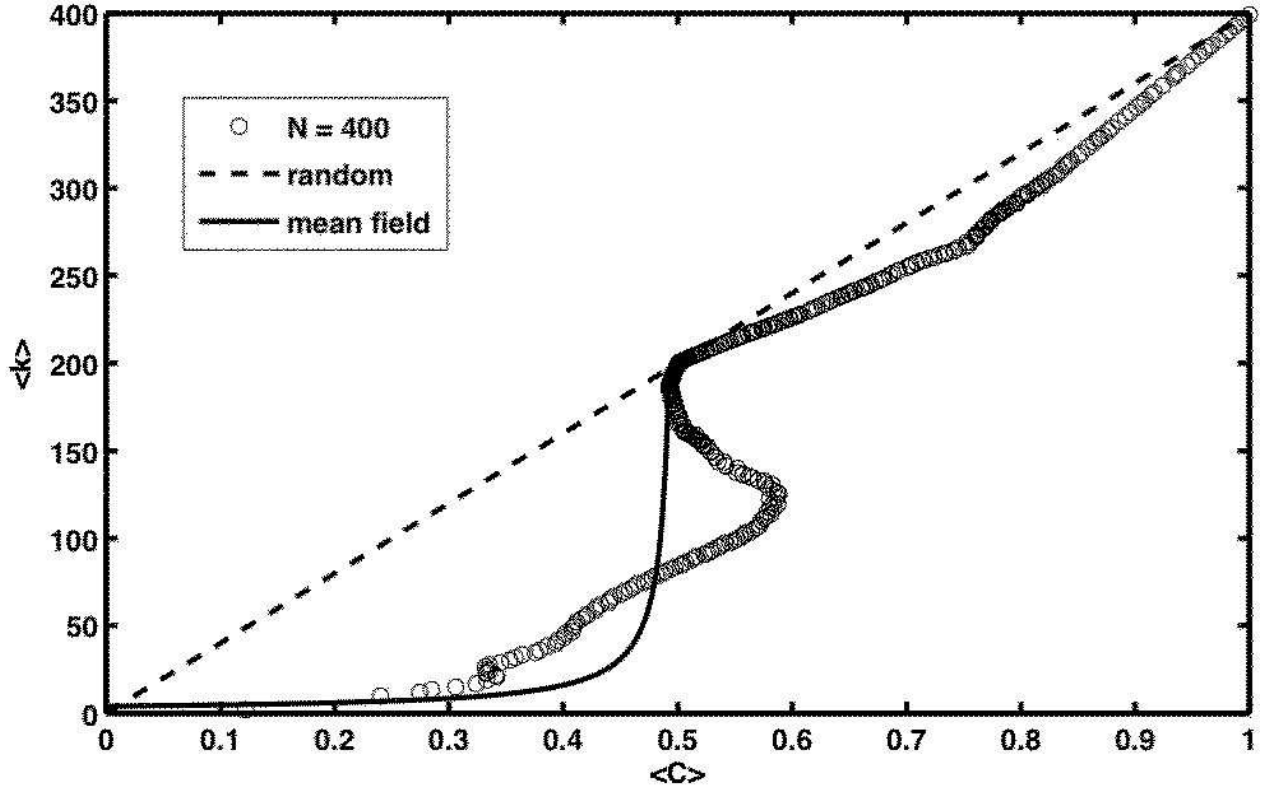


Figura 8.6: (a) Estado final $(\langle C_f \rangle, \langle k_f \rangle)$ del sistema para distintos valores del grado inicial promedio $\langle k_0 \rangle$, con $N = 400$ y $g = 100$ (\circ). Cada punto se promedia sobre 100 realizaciones. La predicción (2.2) para una red al azar se muestra con la línea punteada, y el resultado de campo medio (8.25) se incluye con una línea continua. Tomado de [42].

que es la *aproximación de campo medio* para el cambio total promedio $\langle \Delta k \rangle$ en la conectividad de la red entre dos generaciones.

Considerando el punto fijo $\langle \Delta k \rangle = 0$ que se alcanza en las últimas generaciones de la dinámica, la relación (8.24) se convierte en una ecuación de segundo grado para la conectividad promedio final $\langle k_f \rangle$, por lo que ignorando la solución trivial $\langle k_f \rangle = 0$ y utilizando la segunda parte de la ecuación (8.9), encontramos que $\langle k_f \rangle$ cumple con

$$\langle k_f \rangle = \frac{1 - f^- \langle C_f \rangle}{f^- (f^- - \langle C_f \rangle)}, \quad (8.25)$$

donde $\langle C_f \rangle$ es el coeficiente de agrupamiento promedio al final de la dinámica.

En la figura (8.6) se grafica el resultado de la ecuación (8.25) con $f^- = 1/2$ (la línea continua)⁵ y se compara con los resultados numéricos para $N = 400$ y $g = 100$ (los círculos abiertos) y con la dependencia lineal en una red aleatoria predicha por la ecuación (2.2) (la línea punteada). Resulta interesante notar que para cualquier grado promedio $\langle k \rangle$ los coeficientes de agrupamiento para el

⁵Como se aprecia en la ecuación (8.11) y en los resultados numéricos de la figura (8.4b), el factor f^- converge rápidamente al valor $1/2$ y por tanto esta igualdad es válida en las últimas generaciones de la dinámica.

campo medio y los resultados numéricos son más grandes que el correspondiente a la red al azar, y que para $\langle k \rangle = N/2$ todos los coeficientes de agrupamiento se encuentran en el valor $1/2$.

También quisiéramos señalar que la aproximación de campo medio tiene un comportamiento cualitativo similar al de los cálculos numéricos, aunque en su derivación sólo se hayan considerado algunos de los efectos de segundo orden presentes en el sistema. De manera particular, la aproximación de campo medio es considerablemente buena para valores de $\langle C \rangle$ y $\langle k \rangle$ bajos, es decir, cuando la red es muy rala y por tanto las suposiciones de la ecuación (8.25) son válidas, pero deja de funcionar cuando la gráfica está más conectada, pues en ese caso hay más ciclos y correlaciones entre nodos que inhabilitan las aproximaciones discutidas con anterioridad.

En principio, los factores f deberían poder expresarse en términos de la aproximación de campo medio para la fracción de agentes indecisos $\langle n_0 \rangle$ de la ecuación (8.6), o de alguna otra variable relevante en la microdinámica de formación de opinión, lo cual haría que la relación (8.24) fuera una aproximación analítica que no requiere un parámetro de campo medio ajustado con las simulaciones numéricas. Sin embargo, las correlaciones fuertes entre los estados individuales de los pares de agentes conectados cuando hay una coevolución explícita entre la distribución de opiniones y la red de interacciones hace que éste trabajo sea relativamente complicado, y lo sitúa fuera del alcance de la presente investigación.

Parte III

Conclusiones y Apéndices

Conclusiones

En este trabajo se intenta dar una breve revisión de la manera en que el formalismo de sistemas complejos ha sido utilizado últimamente para describir el comportamiento de fenómenos naturales pertenecientes a diversas disciplinas bajo un mismo conjunto de conceptos: una o varias estructuras de red y un conjunto de sistemas dinámicos definidos sobre ellas para describir sus funciones. Al considerar la estructura y función de un sistema complejo, resulta fundamental analizar la retroalimentación entre sus dinámicas a fin de poder describir la emergencia de propiedades en el sistema. El marco teórico de coevolución presentado en este trabajo, y respaldado por su aplicación en un proceso de formación de opinión, es el intento de un primer paso en el camino de la formalización del estudio abstracto y general de los sistemas complejos, y abre posibles caminos en el futuro. Por un lado es interesante preguntar si somos capaces de seguir un estudio analítico del marco teórico sin entrar en detalles particulares de un fenómeno dado, y por el otro es igualmente importante aplicar tal marco a sistemas fuera del régimen social para descubrir la importancia de la coevolución en diversas áreas del conocimiento científico. Lo único que sabemos con total seguridad hasta el momento es que el campo de sistemas complejos es un reto fascinante, actual y prometedor, y que tiene bastantes esperanzas de ampliar la perspectiva del conocimiento humano en un futuro cercano.

A continuación se presentan de manera puntual los objetivos alcanzados por nuestro trabajo, así como algunas posibles líneas de investigación en el futuro cercano:

- Se presentaron los conceptos y nociones básicas utilizadas con frecuencia en el campo de Sistemas Complejos, con especial énfasis en la forma en que éstos se utilizan para describir la estructura y función de un fenómeno en la Naturaleza. La estructura de un sistema complejo se modela por una red donde los nodos representan las partes del sistema y los enlaces las posibles interacciones entre dichas partes, por lo que el formalismo matemático asociado es la Teoría de Gráficas. Por el otro lado, la función de un sistema complejo se describe por la forma en que ciertas variables de estado definidas sobre los nodos de la red cambian en el tiempo de

acuerdo a un sistema dinámico determinado, los cuales usualmente presentan características no lineales. La estructura se caracteriza estadísticamente a partir de la matriz de conectividad y ciertas propiedades topológicas locales como el grado, el coeficiente de agrupamiento y la longitud característica, mientras que la función se analiza a partir del retrato fase del sistema dinámico asociado, el cual puede tener propiedades relevantes como el rompimiento espontáneo de simetrías a través de bifurcaciones.

- Se remarcó que existen dos formas extremas y opuestas de analizar un sistema complejo, dependiendo de la escala de tiempo utilizada para observar el fenómeno asociado: como una estructura sin función o una función sin estructura. Si la evolución temporal de la función del sistema complejo es mucho más lenta que la de la estructura, podemos describirlo como una estructura sin función donde lo único que nos interesa es la dinámica de la topología de la red. En este caso se analizaron con detalle estructuras arquetípicas como las redes ordenadas, aleatorias, de mundo pequeño y libres de escala. En cambio, si la dinámica de la función es más rápida que la de la estructura, el sistema puede ser visto como una función sin estructura y nuestro interés reside en analizar la forma en que un conjunto de variables de estado definidas sobre una red estática evoluciona en el tiempo. En este caso se describió el modelado matemático de ciertos procesos de difusión, propagación y sincronización en sistemas biológicos, ecológicos y sociales.
- En la situación intermedia en que las escalas de tiempo para las dinámicas de estructura y función son similares, existe una retroalimentación explícita entre las evoluciones temporales de la topología de la red y de sus variables de estado que se denomina coevolución. Tal interacción entre estructura y función se ha reconocido de manera intuitiva en la literatura como un ingrediente fundamental para analizar el comportamiento de algunos sistemas complejos y caracterizar la presencia de propiedades emergentes en ellos, pero no se ha considerado de manera formal y abstracta desde un punto de vista general. Por lo tanto, en este trabajo se propuso un marco teórico general para estudiar la dinámica de redes basada en el concepto de coevolución. En éste, un parámetro de coevolución fija las escalas de tiempo de las dos dinámicas que interactúan entre sí para definir el estado del sistema complejo: la microdinámica o dinámica funcional que sólo depende en forma explícita del conjunto de variables de estado y no de la red, y la macrodinámica o dinámica estructural que cambia explícitamente por la red y no por el conjunto de variables de estado. Se propusieron ecuaciones generales para tales dinámicas que incluyen tanto procesos de reconexión en la red como interacciones de corto y

largo alcance entre las variables de estado. Además, se mostró que este marco teórico permite describir simultáneamente a las estructuras sin función, las funciones sin estructura y a los sistemas complejos coevolutivos con las mismas ecuaciones a partir de la variación continua del parámetro de coevolución.

- A fin de exponer la utilidad del marco teórico de coevolución con un ejemplo particular, se describió un proceso de formación de opinión en un sistema social, con el objetivo de caracterizar dinámicamente la emergencia de tres propiedades comunes en las redes sociales: el efecto de mundo pequeño, una conectividad promedio baja, y la presencia de comunidades en la red. El modelo se construyó utilizando hipótesis de las ciencias sociales para definir los términos de las ecuaciones de coevolución, y a través de una gran cantidad de simulaciones numéricas se mostró que para una extensa región del parámetro de coevolución existe la emergencia de propiedades esperada, mientras que en las regiones extremas se recuperan las estructuras sin función y las funciones sin estructura asociadas al modelo. Además, se construyeron aproximaciones de campo medio para predecir analíticamente las características de tales casos extremos, en particular, la fracción promedio de agentes indecisos en la red y el cambio total promedio en la conectividad de la red entre dos generaciones. La validez de nuestro modelo se sustentó con un estudio detallado de los antecedentes en modelos de formación de opinión y algoritmos de detección de comunidades.
- Como un posible camino para continuar la investigación iniciada en este trabajo, se propone hacer un análisis de las propiedades del marco teórico de coevolución sin considerar un modelo particular, es decir, encontrar los tipos de sistemas complejos que pueden ser descritos bajo tal marco, y las propiedades emergentes que existen en ellos sólo cuando se incluye la interacción coevolutiva en la definición del sistema complejo. Además, la aproximación de campo medio del modelo coevolutivo de formación de opinión se puede mejorar al encontrar relaciones analíticas entre los parámetros de campo medio. Finalmente, se planea comprobar las predicciones teóricas de nuestro modelo (y, en forma indirecta, las del marco teórico de coevolución) a través de un experimento donde se simule la interacción social estudiada, es decir, la formación de opinión en los individuos de un grupo social a través de discusiones y el cambio de personas con las que se discute.

Apéndice A

Algoritmo para el modelo coevolutivo de formación de opinión

Las simulaciones numéricas del modelo coevolutivo de formación de opinión desarrollado en el capítulo 7 se realizaron con un código en C, el cual es demasiado grande como para ser presentado en este apéndice. Por lo tanto, a continuación se incluye el algoritmo informal sobre el que se basa el código, a fin de explicar en forma concisa cómo se implementan numéricamente las ecuaciones de movimiento y reglas lógicas presentadas en la sección 7.1:

1. Se fijan los valores de los parámetros y constantes utilizadas en el programa.
2. Se inicia un ciclo sobre la condición inicial o el parámetro a estudiar, ya sea N , $\langle k_0 \rangle$ o g .
3. Se inicia un ciclo para promediar los resultados de la dinámica.
4. Se inicializan las componentes del vector de opiniones $\mathbf{x}(0)$ de acuerdo a una distribución de probabilidad uniforme o gaussiana.
5. Se fijan los parámetros α_i según una distribución de probabilidad uniforme.
6. Se construye la matriz de conectividad \mathbf{A} asociada a la red aleatoria inicial.
7. Mientras la mayor parte de los agentes está indecisa se realiza el siguiente ciclo sobre el tiempo de la dinámica t :
 - a) Se actualizan las opiniones $x_i(t)$ de los agentes indecisos según las ecuaciones (7.1) y (7.2).
 - b) Si para algún agente i se tiene $|x_i(t)| > 1$, se fija su variable de estado a la opinión irrevocable correspondiente ($x_i = \pm 1$) por el resto de la dinámica.

- c) En cada tiempo de generación $t = ng$ con $n \in \mathbb{Z}$, se realiza el proceso de reconexión de la red descrito en la sección 7.1.2, y se actualiza la matriz de conectividad \mathbf{A} de acuerdo a su resultado.
8. Se visualiza el estado final de la red con Himmeli.
 9. Se repiten los pasos 4-8 hasta terminar el ciclo de los promedios.
 10. Se repiten los pasos 3-9 hasta finalizar el ciclo de las condiciones iniciales o parámetros.
 11. Se calculan las propiedades estadísticas del vector final de opiniones $\mathbf{x}(0)$, como $\langle n_0 \rangle$.
 12. Se calculan las propiedades estadísticas de la matriz de conectividad \mathbf{A} , como $\langle k \rangle$, $\langle C \rangle$, $\langle n^{(2)} \rangle$, $\langle s^* \rangle$, $\langle s \rangle$ y $\langle L \rangle$.

Bibliografía

- [1] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.
- [2] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, “Complex networks: Structure and dynamics,” *Physics Reports*, vol. 424, no. 4-5, pp. 175–308, 2006.
- [3] L. F. Costa, O. Oliveira Jr., G. Travieso, F. A. Rodrigues, P. R. V. Boas, L. Antiqueira, M. P. Viana, and L. E. C. da Rocha, “Analyzing and Modeling Real-World Phenomena with Complex Networks: A Survey of Applications,” e-print arXiv:0711.3199v3 [physics.soc-ph], 2007.
- [4] S. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, “Evolution of networks,” *Advances In Physics*, vol. 51, no. 4, pp. 1079–1187, 2002.
- [5] M. E. J. Newman, “The Structure and Function of Complex Networks,” *SIAM Review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [6] R. A. Barrio and C. Varea, “Non-linear systems,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 372, no. 2, pp. 210–223, 2006.
- [7] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, New York, 1994.
- [8] S. H. Strogatz, “Exploring complex networks,” *Nature*, vol. 410, no. 6825, pp. 268–276, 2001.
- [9] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, New York, 1996.
- [10] L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. World Scientific, 2000.
- [11] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1996.
- [12] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1980.

- [13] F. Schweitzer, “Multi-Agent Approach to the Self-Organization of Networks,” e-print arXiv:0704.2533v1 [nlin.AO], 2007.
- [14] S. Wasserman and K. Faust, *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [15] L. C. Freeman, “A set of measures of centrality based on betweenness,” *Sociometry*, vol. 40, no. 1, pp. 35–41, 1977.
- [16] L. C. Freeman, “Centrality in social networks: Conceptual clarification,” *Social Networks*, vol. 1, no. 3, pp. 215–239, 1979.
- [17] M. E. J. Newman, “Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results,” *Physical Review E*, vol. 64, no. 1, p. 016131, 2001.
- [18] J.-P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, D. Lazer, K. Kaski, J. Kertész, and A.-L. Barabási, “Structure and tie strengths in mobile communication networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 104, no. 18, pp. 7332–7336, 2007.
- [19] J.-P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, M. A. de Menezes, K. Kaski, A.-L. Barabási, and J. Kertész, “Analysis of a large-scale weighted network of one-to-one human communication,” *New Journal of Physics*, vol. 9, no. 6, p. 179, 2007.
- [20] B. Bollobás, *Graph Theory: An Introductory Course*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [21] B. Bollobás, *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.
- [22] G. Caldarelli, *Scale-Free Networks: Complex Webs in Nature and Technology*. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [23] R. Diestel, *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [24] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd ed., 2001.
- [25] P. Erdős and A. Rényi, “On random graphs,” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 6, pp. 290–297, 1959.
- [26] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of Scaling in Random Networks,” *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.

- [27] M. Boguñá, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, *Epidemic Spreading in Complex Networks with Degree Correlations*, vol. 625 of *Lecture Notes in Physics*, ch. 8, pp. 127–147. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [28] M. E. J. Newman, “Assortative mixing in networks,” *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 20, p. 208701, 2002.
- [29] E. Zeidler, ed., *Oxford Users’ Guide to Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [30] M. Boguñá and R. Pastor-Satorras, “Epidemic spreading in correlated complex networks,” *Physical Review E*, vol. 66, no. 4, p. 047104, 2002.
- [31] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani, “Dynamical and correlation properties of the internet,” *Physical Review Letters*, vol. 87, no. 25, p. 258701, 2001.
- [32] A. Barrat and M. Weigt, “On the properties of small-world network models,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 547–560, 2000.
- [33] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *Nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442, 1998.
- [34] A. Barrat, M. Barthélemy, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, “The architecture of complex weighted networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 101, no. 11, pp. 3747–3752, 2004.
- [35] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási, “Error and attack tolerance of complex networks,” *Nature*, vol. 406, no. 6794, pp. 378–382, 2000.
- [36] V. Latora and M. Marchiori, “Efficient Behavior of Small-World Networks,” *Physical Review Letters*, vol. 87, no. 19, p. 198701, 2001.
- [37] R. A. Barrio, “Turing Systems: A General Model for Complex Patterns in Nature,” in *Physics of Emergence and Organization* (I. Licata and A. Sakaji, eds.), ch. 11, pp. 267–296, World Scientific, 2008.
- [38] S. H. Strogatz, “From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 143, no. 1-4, pp. 1–20, 2000.

- [39] A. H. Machado, R. A. Barrio, and C. Varea, “Cell differentiation problem.” Unpublished.
- [40] R. Sablowski, “Flowering and determinacy in *Arabidopsis*,” *Journal of Experimental Botany*, vol. 58, pp. 899–907, 2007.
- [41] G. Iñiguez and R. A. Barrio, “Coevolución en redes sociales,” in *Educación Química: 8ª Convención Nacional y 1ª Internacional de Profesores de Ciencias Naturales*, vol. XX, pp. 272–279, 2009.
- [42] G. Iñiguez, J. Kertész, K. K. Kaski, and R. A. Barrio, “Opinion and community formation in co-evolving networks,” e-print arXiv:0908.1068 [physics.soc-ph], 2009. Accepted for publication in *Physical Review E*.
- [43] B. Kozma and A. Barrat, “Consensus formation on adaptive networks,” *Physical Review E*, vol. 77, p. 016102, 2008.
- [44] B. Kozma and A. Barrat, “Consensus formation on coevolving networks: groups’ formation and structure,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 41, p. 224020, 2008.
- [45] C. Nardini, B. Kozma, and A. Barrat, “Who’s Talking First? Consensus or Lack Thereof in Coevolving Opinion Formation Models,” *Physical Review Letters*, vol. 100, p. 158701, 2008.
- [46] S. Jain and S. Krishna, “Autocatalytic Sets and the Growth of Complexity in an Evolutionary Model,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 25, pp. 5684–5687, 1998.
- [47] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, “Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 6, pp. 1226–1229, 1995.
- [48] S. Gil and D. H. Zanette, “Coevolution of agents and networks: Opinion spreading and community disconnection,” *Physics Letters A*, vol. 356, no. 2, pp. 89–94, 2006.
- [49] D. H. Zanette and S. Gil, “Opinion spreading and agent segregation on evolving networks,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 224, no. 1-2, pp. 156–165, 2006.
- [50] M. G. Zimmermann, V. M. Eguíluz, and M. San Miguel, “Coevolution of dynamical states and interactions in dynamic networks,” *Physical Review E*, vol. 69, no. 6, p. 065102, 2004.
- [51] I. Rozada, “Propiedades físicas de redes exponenciales ordenadas.” Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2004. Tesis de Licenciatura.

- [52] I. Rozada and R. A. Barrio, “Coherent neuron response in ordered exponential networks,” in *Statistical Physics and Beyond: 2nd Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics*, vol. 757, pp. 181–189, AIP, 2005.
- [53] J. Berg and M. Lässig, “Correlated Random Networks,” *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 22, p. 228701, 2002.
- [54] J. Park and M. E. J. Newman, “Statistical mechanics of networks,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 6, p. 066117, 2004.
- [55] S. Milgram, “The small world problem,” *Psychology Today*, vol. 2, no. 1, pp. 60–67, 1967.
- [56] M. E. J. Newman and D. J. Watts, “Renormalization group analysis of the small-world network model,” *Physics Letters A*, vol. 263, no. 4-6, pp. 341–346, 1999.
- [57] M. E. J. Newman, “The structure and function of networks,” *Computer Physics Communications*, vol. 147, no. 1-2, pp. 40–45, 2002.
- [58] M. E. J. Newman, C. Moore, and D. J. Watts, “Mean-Field Solution of the Small-World Network Model,” *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 14, pp. 3201–3204, 2000.
- [59] S. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. Samukhin, “Structure of Growing Networks with Preferential Linking,” *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 21, pp. 4633–4636, 2000.
- [60] P. L. Krapivsky, S. Redner, and F. Leyvraz, “Connectivity of Growing Random Networks,” *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 21, pp. 4629–4632, 2000.
- [61] A. Fronczak, P. Fronczak, and J. A. Hołyst, “Mean-field theory for clustering coefficients in Barabási-Albert networks,” *Physical Review E*, vol. 68, no. 4, p. 46126, 2003.
- [62] A. Fronczak, P. Fronczak, and J. A. Hołyst, “Average path length in random networks,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 5, p. 56110, 2004.
- [63] B. Bollobás and O. Riordan, “The Diameter of a Scale-Free Random Graph,” *Combinatorica*, vol. 24, no. 1, pp. 5–34, 2004.
- [64] G. Zipf, *Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology*. Addison-Wesley Press, Cambridge/Massachusetts, 1949.
- [65] G. Martínez-Mekler, R. A. Martínez, M. Beltrán del Río, R. Mansilla, P. Miramontes, and G. Cocho, “Universality of Rank-Ordering Distributions in the Arts and Sciences,” *PLoS ONE*, vol. 4, no. 3, p. e4791, 2009.

- [66] G. G. Naumis and G. Cocho, “Tail universalities in rank distributions as an algebraic problem: The beta-like function,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387, no. 1, pp. 84–96, 2008.
- [67] M. Beltrán del Río, G. Cocho, and G. G. Naumis, “Universality in the tail of musical note rank distribution,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387, no. 22, pp. 5552–5560, 2008.
- [68] R. Mansilla, E. Köppen, G. Cocho, and P. Miramontes, “On the behavior of journal impact factor rank-order distribution,” *Journal of Informetrics*, vol. 1, no. 2, pp. 155–160, 2007.
- [69] G. G. Naumis and G. Cocho, “The tails of rank-size distributions due to multiplicative processes: from power laws to stretched exponentials and beta-like functions,” *New Journal of Physics*, vol. 9, no. 8, p. 286, 2007.
- [70] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, “The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 77, no. 1, pp. 137–185, 2005.
- [71] C. J. Pérez, A. Corral, A. Díaz-Guilera, K. Christensen, and A. Arenas, “On self-organized criticality and synchronization in lattice models of coupled dynamical systems,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 10, no. 10, pp. 1111–1151, 1996.
- [72] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Epidemic Spreading in Scale-Free Networks,” *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 14, pp. 3200–3203, 2001.
- [73] T. A. Witten and L. M. Sander, “Diffusion-limited aggregation,” *Physical Review B*, pp. 5686–5697, 1983.
- [74] R. A. Barrio, R. E. Baker, B. Vaughan, Jr., K. Tribuzy, M. R. de Carvalho, R. Bassanezi, and P. K. Maini, “Modeling the skin pattern of fishes,” *Physical Review E*, vol. 79, no. 3, p. 031908, 2009.
- [75] S. S. Liaw, C. C. Yang, R. T. Liu, and J. T. Hong, “Turing model for the patterns of lady beetles,” *Physical Review E*, vol. 64, no. 4, p. 041909, 2001.
- [76] T. Sekimura, A. Madzvamuse, and P. K. Maini, “Pigmentation Pattern Formation in Butterfly Wings: Global Patterns on Fore-and Hindwing,” in *Mathematical Modeling of Biological Systems* (A. Deutsch, L. Bruschi, H. Byrne, G. de Vries, and H. Herzel, eds.), vol. I of *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, ch. 12, pp. 142–148, Springer, 2007.

- [77] H. W. Hethcote, “The Mathematics of Infectious Diseases,” *SIAM review*, vol. 42, no. 4, pp. 599–653, 2000.
- [78] J. D. Murray, *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [79] D. J. Watts, *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton University Press, 1999.
- [80] M. Barahona and L. M. Pecora, “Synchronization in small-world systems,” *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 5, p. 054101, 2002.
- [81] Y. Moreno and A. F. Pacheco, “Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks,” *Europhysics Letters*, vol. 68, no. 4, pp. 603–609, 2004.
- [82] E. Ravasz, A. L. Somera, D. A. Mongru, Z. Oltvai, and A.-L. Barabási, “Hierarchical organization of modularity in metabolic networks,” *Science*, vol. 297, no. 5586, pp. 1551–1555, 2002.
- [83] L. Danon, A. Díaz-Guilera, J. Duch, and A. Arenas, “Comparing community structure identification,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2005, no. 09, p. P09008, 2005.
- [84] L. Danon, J. Duch, A. Arenas, and A. Díaz-Guilera, “Community structure identification,” in *Large Scale Structure and Dynamics of Complex Networks* (G. Caldarelli and A. Vespignani, eds.), ch. 5, pp. 93–114, World Scientific, 2007.
- [85] S. Fortunato, “Community detection in graphs,” e-print arXiv:0906.0612v1 [physics.soc-ph], 2009.
- [86] M. E. J. Newman, “Detecting community structure in networks,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 38, no. 2, pp. 321–330, 2004.
- [87] M. E. J. Newman and M. Girvan, “Finding and evaluating community structure in networks,” *Physical Review E*, vol. 69, p. 026113, 2004.
- [88] M. E. J. Newman, “Modularity and community structure in networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 103, no. 23, pp. 8577–8582, 2006.
- [89] F. Radicchi, C. Castellano, F. Cecconi, V. Loreto, and D. Parisi, “Defining and identifying communities in networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 101, no. 9, pp. 2658–2663, 2004.

- [90] J. M. Kumpula, J. Saramäki, K. Kaski, and J. Kertész, “Limited resolution in complex network community detection with Potts model approach,” *The European Physical Journal B: Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 56, no. 1, pp. 41–45, 2007.
- [91] A. Lancichinetti, S. Fortunato, and J. Kertész, “Detecting the overlapping and hierarchical community structure of complex networks,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 3, p. 033015, 2009.
- [92] S. Bornholdt and T. Rohlf, “Topological evolution of dynamical networks: Global criticality from local dynamics,” *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 26, pp. 6114–6117, 2000.
- [93] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, “Statistical physics of social dynamics,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 2, pp. 591–646, 2009.
- [94] R. A. Holley and T. M. Liggett, “Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model,” *The Annals of Probability*, vol. 3, no. 4, pp. 643–663, 1975.
- [95] K. Sznajd-Weron and J. Sznajd, “Opinion evolution in closed community,” *International Journal of Modern Physics C - Physics and Computer*, vol. 11, no. 6, pp. 1157–1165, 2000.
- [96] K. Sznajd-Weron, “Sznajd Model and Its Applications,” *Acta Physica Polonica B*, vol. 36, no. 8, pp. 2537–2547, 2005.
- [97] W. Weidlich, “Physics and social science - The approach of synergetics,” *Physics Reports*, vol. 204, no. 1, pp. 1–163, 1991.
- [98] R. Axelrod, “The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization,” *Journal of Conflict Resolution*, vol. 41, no. 2, pp. 203–226, 1997.
- [99] S. Fortunato, “The Sznajd consensus model with continuous opinions,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 16, no. 1, pp. 17–24, 2005.
- [100] F. Slanina and H. Lavička, “Analytical results for the Sznajd model of opinion formation,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 279–288, 2003.
- [101] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, and G. Weisbuch, “Mixing beliefs among interacting agents,” *Advances in Complex Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 87–98, 2000.
- [102] R. I. M. Dunbar, “Neocortex size as a constraint on group size in primates,” *Journal of Human Evolution*, vol. 22, pp. 469–493, 1992.

- [103] R. I. M. Dunbar, “Co-evolution of neocortex size, group size and language in humans,” *Behavioral and brain sciences*, vol. 16, no. 4, pp. 681–735, 1993.
- [104] G. Kossinets and D. J. Watts, “Empirical analysis of an evolving social network,” *Science*, vol. 311, no. 5757, pp. 88–90, 2006.
- [105] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis, London, U. K., 1994.