



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO
EN ASTROFÍSICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :

JOSÉ JAVIER GÓMEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JUAN MANUEL ECHEVARRÍA ROMÁN

2009





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tesis de doctorado en Física:

Entrelazamiento Cuántico en Astrofísica

Nombre del estudiante:

José Javier Gómez López

Nombre del director de tesis:

Dr. Juan Manuel Echevarría Román

Entrelazamiento Cuántico en Astrofísica

Javier Gómez

Noviembre 2009

ÍNDICE GENERAL

1.. <i>Introducción</i>	2
2.. <i>Estructura de la mecánica cuántica</i>	7
2.1. Descripción matemática	10
2.2. Polarización de fotones	19
2.3. Sistemas compuestos	21
3.. <i>Entrelazamiento cuántico “EPR”</i>	26
3.1. Teorema de Bell	27
3.2. Pruebas experimentales	31
3.2.1. El experimento de Aspect, Dalibard y Roger	33
3.2.2. Experimentos posteriores	33
4.. <i>Pares de fotones entrelazados</i>	35
4.1. Emisión 2-fotones de cascadas atómicas <i>SPS</i>	35
4.2. Emisión espontánea de 2-fotones entrelazados del nivel $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno	37
4.3. Emisión del continuo en Nebulosas	40

4.4. El experimento de Novick	42
5. Tasa de emisión y coincidencias de 2-fotones en regiones ionizadas .	44
5.1. Número de fotones señal	47
5.2. Tasa del número de coincidencias de pares entrelazados	48
6. Detección de pares de fotones entrelazados en las regiones ionizadas	51
6.1. Región H II de la Nebulosa de Orión	52
6.2. Nebulosas Planetarias IC 2149 y NGC 7293.	53
6.3. Corona Solar	54
6.4. Diámetros mínimos para detectar coincidencias de pares entrelazados	59
7. Requerimientos para la detección de coincidencias	63
7.1. Efecto de la extinción en el estado 2-fotones proveniente de las Nebulosas Planetarias	64
7.2. Efecto de la extinción en el estado 2-fotones proveniente de la Nebulosa de Orión y las Nebulosas Planetarias	68
7.3. Identificación de los 2-fotones auténticos.	69
8. Conclusiones	75
Apéndice	83
A.. Notación	84

<i>B.. Ejemplos de no localidad en astrofísica</i>	<i>85</i>
<i>C.. Artículo arbitrado, aceptado y publicado en la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, Vol. 45, Núm. 2, Octubre 2009, pp. 179-189. “OPTICAL QUANTUM ENTANGLEMENT IN ASTROPHYSICS”, autores: Javier Gómez, Antonio Peimbert y Juan Echevarría</i>	<i>87</i>

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Experimento EPR para comprobar la violación de las desigualdades de Bell.	32
4.1. Emisividad del continuo de 2-fotones (tomada de Nussbaumer & Schmutz 1984). $\epsilon_\lambda = 4\pi j_\lambda / N_{2s^2S}$, donde N_{2s^2S} es la población de densidad de HII $2s^2S$. La línea gruesa corresponde a un ajuste de la ecuación 4.8), realizado por los autores, mientras que la línea delgada corresponde al ajuste analítico de Hummer & Seaton (1964).	41
5.1. Coordenadas Cónicas.	49
6.1. Distribución de la Probabilidad de la Transición de 2-Fotones en seg^{-1}	56
6.2. Emisión de 2-Fotones de la Corona Solar en fotones por segundo.	60
7.1. La emisión del continuo de Orión, donde ...: 2-fotones, ---: recombinación de HI, ----: recombinación de HeI y ---: total (véase la nota a pie de página de la página 70).	71

7.2. La emisión del continuo de IC 2149, donde ...: 2-fotones, ...: recombinación de HI,: recombinación de HeI y ...: total (véase la nota a pie de página de la página 70).	72
7.3. La emisión del continuo de NGC 7293, donde ...: 2-fotones, ...: recombinación de HI,: recombinación de HeI, ...: recombinación de HeII y ...: total (véase la nota a pie de página de la página 70).	73

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Notación de Dirac Equivalente para Vectores y Operadores. . .	14
5.1. Datos de Orión y Nebulosas Planetarias.	46
6.1. Diámetros Mínimos del Receptor para Obtener Una Coinci- dencia de 2-Fotones por Hora y por Año.	62
7.1. Enrojecimiento por extinción de IC 2149 y NGC 7293.	68

RECONOCIMIENTO

Quiero agradecer a Manuel Peimbert y a Rafael Costero por sus valiosas sugerencias con respecto a la fotoionización de la Nebulosa de Orión. A Antonio Peimbert por su importante colaboración en el artículo publicado; y también agradecer la ayuda y apoyo de los investigadores y personal del Instituto de Astronomía de la UNAM, en cuyas instalaciones hice grandes avances de la tesis. Así mismo quiero agradecer a mis asesores Rocío Jauregui y Sahen Hacyan por el cuidadoso análisis del fundamento cuántico óptico que realizaron y por sus también numerosas sugerencias para mejorar el contenido de esta tesis. Quiero agradecer en particular a Octavio Castaños por sus acertados comentarios y sugerencias para el mejoramiento de esta tesis; asimismo quiero agradecer especialmente a Christophe Morisset por haberme proporcionado, de manera generosa, las gráficas de la distribución del continuo de las Nebulosas en las figuras 7.1, 7.2, 7.3 para esta tesis y también por sus valiosos comentarios y sugerencias; y finalmente un agradecimiento muy especial a Juan Echevarría por su indomable entusiasmo y excelente guía, que sin lo cual hubiera sido imposible terminar este interesante proyecto.

1. INTRODUCCIÓN

La idea fundamental de esta tesis es conectar los fundamentos de la óptica cuántica y la astrofísica. Desde el famoso artículo de Einstein, Podolski y Rosen (1935) publicado en 1935 se abrió un tema importantísimo de la mecánica cuántica, la no localidad y el realismo. En éste artículo se presenta un experimento pensado de entrelazamiento cuántico para argumentar la incompletez de la mecánica cuántica. El gran impacto que ocasionó este artículo en los fundamentos de la mecánica cuántica le hizo acreedor al acrónimo que lleva las iniciales de los autores, a saber, EPR. Con este acrónimo definimos, a lo largo de esta tesis, a las partículas entrelazadas distantes. Explicaré en más detalle el entrelazamiento cuántico en el capítulo 3. Las consecuencias de ese artículo abrieron nuevos puntos de vista acerca del realismo y la no localidad en mecánica cuántica. Más adelante, Bohm (1951) presenta una variante del EPR usando solamente variables discretas las cuales utilizará Bell (1964) con la condición de localidad para probar si las consecuencias del argumento de EPR es cierto mediante la violación de ciertas desigualdades algebraicas, que no tienen que ver con la mecánica cuántica, que muestran cómo el fenómeno EPR

contradice el punto de vista estándar de la mecánica clásica. Clauser et al. (1969), Freedman (1972), entre otros proporcionaron los requisitos para que los experimentos relacionados con situaciones físicas EPR permitieran probar que las teorías de las variables ocultas locales no eran posibles al confirmar experimentalmente la violación de las desigualdades de Bell Shimony (1971), Clauser & Shimony (1978); pocos años después Aspect et al. (1982) fueron capaces de realizar el experimento que probó sin lugar a dudas que las teorías de variables ocultas locales no pueden existir; sin embargo, no es fácil de demostrar experimentalmente las violaciones de las desigualdades de Bell y aunque es poco probable que este experimento esté en desacuerdo con la mecánica cuántica, es importante señalar que actualmente no hay experimentos que estén libres de escapatorias para demostrar las violaciones de los principios de localidad y realismo, además de que dichas violaciones aparecen solamente a nivel estadístico. Los pares de partículas entrelazadas pueden producirse en el laboratorio mediante varios métodos, como lo son, la aniquilación del positronio, la dispersión de protón-protón, el decaimiento del pión que crea el par de positrón-electrón, $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$, los experimentos de cascadas de fotones, los experimentos de 2-fotones producidos por la transición prohibida del hidrógeno metastable $2^2S_{1/2} \rightarrow 1^1S_{1/2}$ (para la notación véase el apéndice) y la generación de 2-fotones por la conversión paramétrica descendente, Mandel & Wolf (1995). El proceso de entrelazamiento de dos partículas distantes que trataré en detalle en esta tesis, es el de la producción de 2-fotones, que es un proceso

muy importante que toca tanto a la óptica cuántica como a la astrofísica de regiones ionizadas. Este proceso es, desde el punto de vista de la astrofísica la forma de entrelazamiento cuántico más accesible de tratar. En general los posibles procesos de entrelazamiento arriba mencionados, serán discutidos someramente en el Apéndice B.

Maria Göpert-Mayer (1931) fué la primera en introducir la posibilidad de la transición de 2-fotones por medio de la teoría de perturbaciones de segundo orden de la transición dipolar eléctrica; Breit & Teller (1940) calcularon por primera vez la probabilidad de transición de 2-fotones del hidrógeno metastable. Spitzer y Greenstein (1951) consideraron la emisión simultánea de 2-fotones como una parte importante de la emisión del continuo de las nebulosas planetarias y calcularon con mayor exactitud la probabilidad de transición, a saber, $A_{2S,1S} = 8.227\text{sec}^{-1}$. En 1969 Novick, desde el punto de vista de la óptica cuántica experimental, presenta una revisión extensa de la producción de 2-fotones; en ese artículo Novick también muestra teórica y experimentalmente que la correlación angular entre las direcciones de propagación entre ambos fotones es proporcional a $(1 + \cos^2\theta)$, lo que muestra claramente que ambos fotones pueden emitirse en todas las direcciones de propagación entre ellos. Este resultado es muy importante para esta tesis pues permite, en principio, su detección en la astrofísica, al dejar que las direcciones de propagación de los fotones puedan ser en cualquier ángulo, incluyendo emisiones paralelas, lo que haría posible su detección en o cerca de la tierra.

Puesto que el hidrógeno es elemento más abundante en el Universo, la inmensa mayoría de los pares de fotones producidos de manera natural en astrofísica provienen del proceso de la transición del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es mostrar claramente que el proceso de transición del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno, estudiado ampliamente en condiciones de laboratorio, también ocurre naturalmente en la astrofísica, y el de presentar el primer estudio teórico del entrelazamiento cuántico en la astrofísica para establecer las posibilidades de su detección. En el capítulo 3 presentaré varios ejemplos de entrelazamiento producidos en ambientes astrofísicos y aclararé porqué la producción de los 2-fotones es el más factible de detectarse de todos los pares de partículas entrelazadas con un receptor puesto en la tierra o cerca de ella; también en ese capítulo presentaré en más detalle la producción de la transición $2S \rightarrow 1S$ del hidrógeno y su producción en diferentes ambientes astrofísicos, a saber: las regiones HII, las planetarias nebulosas y la corona solar, y también explicaré las dificultades de su detección. En el capítulo 6 presentaré el resultado de cálculos teóricos del número de 2-fotones que se podrían detectar provenientes de varios ambientes astrofísicos. En el capítulo 7 describiré los problemas que pudieran presentarse cuando los fotones que componen la transición 2-fotones se están propagando hacia el receptor en o cerca de la tierra y explicaré cómo se podrían identificar los fotones que componen la transición 2-fotones una vez que se reciben en o cerca de la tierra. Otro concepto que la teoría cuántica desafía es la *no-contextualidad* que consiste

en la suposición implícita de que la medición de un observable A (una propiedad de un sistema cuántico representado por un operador) debe tener el mismo valor independientemente de que se hayan o no realizado otras mediciones simultáneamente de otros operadores que conmutan con el observable A ; dicho conjunto de A con todos los demás operadores que conmutan con A se denomina el contexto de A . El teorema de Kochen-Specker que dice en esencia que cualquier teoría criptodeterminista en donde se atribuyera un resultado definido a cada medición cuántica y que aún reprodujera las propiedades estadísticas de la teoría cuántica sería inevitablemente *contextual* (Peres, 1995).

2. ESTRUCTURA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

La Teoría de la Mecánica Cuántica tiene una estructura matemática formal que contiene principios que regulan la preparación y observación de propiedades físicas de los sistemas cuánticos. La teoría cuántica es, en esencia, una serie de postulados y reglas que permiten el cálculo de *probabilidades* de los resultados de pruebas realizadas en sistemas cuánticos; de aquí se ve que la teoría cuántica es una teoría estocástica. A fin de cuentas el observador recolecta los resultados de las pruebas experimentales mediante los procedimientos de medición; para realizar una prueba es necesario llevar a cabo cierta preparación que permita, por ejemplo, seleccionar las características de las partículas involucradas en la prueba para obtener los resultados de las mediciones. La probabilidad que se utiliza es la del límite de la frecuencia relativa, es decir, la proporción entre el número de ocurrencias del resultado considerado de la prueba que sigue a la *misma* preparación y el número total de ensayos cuando éste último tiende a infinito. La medición en Mecánica Cuántica a diferencia de la física clásica es una interacción entre el aparato y el sistema cuántico; al medir una propiedad del sistema cuántico otras de sus propiedades se ven perturbadas; por lo que no es posible considerarlas como preexistentes antes de hacer la medición. Para hacer una medición es necesario que el aparato (sistema macroscópico) esté en interacción

con el sistema cuántico (por lo general microscópico, como electrones, protones, partículas o fotones). En el proceso de medición una propiedad del sistema estudiado afecta una propiedad correspondiente del aparato; por ejemplo en el caso de un termómetro la dilatación del mercurio es la propiedad correspondiente de la temperatura del sistema que se desea medir.

La física es una ciencia teórica y experimental donde las teorías se confirman mediante la predicción experimental de propiedades del sistema físico que se estudie. En la física cuántica también se aplica el método científico donde la confirmación de la teoría es mediante la medición estocástica de propiedades predichas por la teoría.

En Mecánica Cuántica es conveniente establecer el contexto y los métodos para extraer información de los sistemas que se estudien; para lo cual es necesario tener claro los conceptos de *preparación* y *prueba*, ya que algunos de los postulados contendrán estos conceptos. La preparación experimental es un procedimiento especificado completamente que permite llevar a cabo pruebas a un sistema cuántico en particular. Una prueba empieza como una preparación experimental pero que incluye un paso final donde se obtiene información específica del sistema cuántico que se estudia; por ejemplo la determinación de la dirección del espín de un átomo que ha pasado por un arreglo experimental de Stern-Gerlach. En algunos casos la preparación involucra hacer pruebas para seleccionar partículas con ciertas propiedades que se utilizarán para hacer pruebas. Otro ejemplo de preparación es el problema de la dispersión de un rayo de partículas con una energía definida (usualmente descritas mediante un paquete de ondas) provenientes de un acelerador que se dirigen mediante

blindaje, colimadores, imanes y otros equipos para lograr así un rayo de *proyectiles* que interactuarán con otro tipo de partículas en el blanco, de las que se desea inferir ciertas propiedades físicas. Las mediciones de la dispersión (en términos de la sección transversal diferencial) que sufren las partículas del rayo preparado serán los resultados de la prueba experimental.

Un sistema cuántico es aquel sistema que admite una descripción dinámica cerrada dentro de la teoría cuántica y viene caracterizado por una clase de equivalencia de preparaciones (Peres, 1995). Esta es la mejor manera de definir un sistema cuántico desde el punto de vista empirista donde se realiza una prueba seguida a una preparación.

Las probabilidades de los resultados de una prueba que se hace en un sistema cuántico se definen como los límites de las frecuencias relativas sobre el ensemble de un número infinito de réplicas donde se realizan un número infinito de pruebas donde se miden los resultados correspondientes del sistema cuántico. “Un estado cuántico viene caracterizado por las probabilidades de los resultados de cada prueba concebible”. Desde el punto de vista empirista es posible relacionar “al estado cuántico con un conjunto de procedimientos experimentales equivalentes”.

Un concepto muy importante para enunciar los postulados de la Mecánica Cuántica es el concepto de la *prueba máxima*, que a continuación se verá.

Una prueba se denominará prueba *máxima* o *completa* si se obtiene el número **máximo** de resultados que pueden obtenerse de un sistema cuántico dado, es decir que una prueba máxima consistirá del conjunto completo de observables que conmutan (definiendo asimismo el contexto de la prueba), y no debe

confundirse el término *completa* de poder incluir observables que no conmuten como sería el caso de espines de la partícula en la dirección x y en la dirección y , J_x y J_y . Por ejemplo en el caso del experimento de Stern-Gerlach es una prueba completa del valor de una componente del momento magnético del átomo donde se obtienen $(2s + 1)$ resultados diferentes para átomos de espín s . Una prueba es incompleta cuando algunos de los resultados aparecen amontonados, es decir, no es posible distinguir algunos resultados por falta de resolución experimental como sería el caso de las transiciones atómicas de los niveles finos e hiperfinos que no era posible resolver en el pasado.

2.1. Descripción matemática

Las transiciones cuánticas se describen mediante matrices unitarias $C_{\mu m}$ las cuales obedecen:

$$\sum_{\mu} \overline{C_{\mu m}} C_{\mu n} = \delta_{mn}, \quad (2.1)$$

donde $\overline{C_{\mu m}}$ denota la matriz conjugada compleja de $C_{\mu m}$.

El principio de superposición se puede establecer de una manera muy teórica que: “Cualquier vector complejo, con excepción del vector nulo, representa un estado puro realizable”, Peres (1995). Los estados puros corresponden a los resultados de una prueba máxima que son análogos a los vectores unitarios a lo largo de los ejes euclidianos ortogonales.

Por lo tanto las matrices que representan las transiciones cuánticas actuarán sobre los vectores complejos, cuyos vectores unitarios se denotan así: \mathbf{e}_m , \mathbf{e}_{μ} , etc,

que significarían los resultados de distintas pruebas máximas, cuya regla de transformación se expresa como:

$$\mathbf{e}_\mu = \sum_m C_{\mu m} \mathbf{e}_m. \quad (2.2)$$

En general un vector complejo se expresa como la siguiente combinación lineal:

$$\mathbf{v} := \sum_m v_m \mathbf{e}_m, \quad (2.3)$$

donde los coeficientes complejos v_m son las componentes del vector \mathbf{v} . De acuerdo con el principio de superposición cualquier vector complejo \mathbf{v} representa un estado puro.

La adición de vectores y la multiplicación por escalares se hace directamente en las componentes de los vectores involucrados. Así que los vectores forman un *espacio lineal*, es decir que si \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores y si a y b son números complejos, entonces $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ es otro vector, cuyas componentes son $w_k = av_k + bu_k$.

La norma de un vector se define como: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum |v_m|^2}$ y siempre es positiva; cuando es igual a 1 se dice que está normalizada.

El producto escalar entre dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} se define como: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \sum_m \overline{u_m} v_m$, también llamado producto interior; y la norma se puede expresar en términos del producto escalar de un vector por sí mismo: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \equiv \|\mathbf{v}\|^2$ y cuando el producto escalar entre dos vectores es cero se dice que los vectores son ortogonales.

La regla fundamental para calcular probabilidades de los resultados de pruebas dado el estado de preparación original del sistema cuántico viene expresado de la siguiente manera:

“Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores normalizados. La probabilidad de que un sistema cuántico preparado en el estado \mathbf{u} pase exitosamente una prueba para el estado \mathbf{v} es $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2$ ”, Peres (1995). Por lo que podemos denotar dicha probabilidad así:
 $P_{\mathbf{v}\mathbf{u}} = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2$.

Si se observa el valor de alguna cantidad física \mathbf{A} , representada por una matriz hermitiana (autoadjunta), es decir $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, de un sistema cuántico se llama *observable*; y puede tomar los valores reales a_1, a_2, \dots , solamente. El valor esperado del observable \mathbf{A} se calcula como:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \sum_j a_j |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle|^2 = \sum_j a_j |v_j|^2, \quad (2.4)$$

donde los $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \dots$, forman una base ortonormal del espacio vectorial complejo de la teoría cuántica. La ecuación (2.4) también puede expresarse en términos de los elementos de matriz como:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \sum_{mn} \bar{v}_m A_{mn} v_n = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle. \quad (2.5)$$

El *Proyector* $\mathbf{P}_\mathbf{v}$ es un observable que proyecta cualquier vector en dirección paralela al vector normalizado \mathbf{v} , y está definido como $\mathbf{P}_\mathbf{v} = \mathbf{v} \mathbf{v}^\dagger$ con las propiedades $\mathbf{P}_\mathbf{v}^2 = \mathbf{P}_\mathbf{v}$ y

$$\mathbf{P}_\mathbf{v} \mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{v}^\dagger \mathbf{u} = \mathbf{v} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle. \quad (2.6)$$

Si existe un número a y un vector no nulo \mathbf{u} tal que se cumple la ecuación $\mathbf{A} \mathbf{u} = a \mathbf{u}$, entonces a se conoce como el *eigenvalor* de \mathbf{A} y \mathbf{u} es el correspondiente *eigenvector*. La noción de eigenvalores y eigenvectores es de suma importancia en

Mecánica Cuántica pues el eigenvalor de un estado cuántico correspondería al valor que resultaría de un *observable* como podría ser el Hamiltoniano que representa la energía del sistema y que aparecería como el eigenvalor del Hamiltoniano (véase Schiff, 1949).

El *conmutador* de dos matrices A y B se define como

$$[A, B] := AB - BA, \quad (2.7)$$

Cuando $AB - BA = 0$ se dice que las matrices A y B conmutan; en particular, si se definen dos observables en una misma prueba máxima entonces conmutan y si A y B son Hermitianas y conmutan entonces es posible encontrar una base donde ambas matrices sean diagonales.

En general es muy difícil tener siempre pruebas máximas cuyos resultados sean estados puros, entonces se tiene un sistema no especificado por completo en un *estado mezclado* que se pueden expresar mediante una matriz de densidad, que se definirá a continuación. Si se preparan varios estados puros representados por vectores normalizados u_α con probabilidades correspondientes p_α , cuyos proyectores se expresan como: $\rho_\alpha = u_\alpha u_\alpha^\dagger$.

El valor esperado de un observable A del estado puro u_α es:

$$\langle A \rangle_\alpha = u_\alpha^\dagger A u_\alpha = \text{Tr}(\rho_\alpha A), \quad (2.8)$$

“Tr” significa la *traza* de la matriz que es la suma de los elementos que están en la diagonal. En el caso de tener una preparación estocástica donde los estados puros u_α ocurren con probabilidad p_α ; el valor esperado del observable A se expresa en

general así:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \mathbf{A} \rangle_{\alpha} = \text{Tr} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{A} \right) = \text{Tr} (\rho \mathbf{A}), \quad (2.9)$$

donde

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_{\alpha} \quad (2.10)$$

es la matriz de densidad también conocida como el operador estadístico del sistema cuántico que se trate y especifica completamente todas las propiedades del ensemble cuántico.

En esta tesis se utilizará la notación de Dirac (bra-c-ket) que se especifica en la siguiente tabla 2.1, tomada de Peres (1995),

Tab. 2.1: Notación de Dirac Equivalente para Vectores y Operadores.

	\mathbb{R}^3	Vectores complejos	Notación de Dirac
Vector (columna, ket)	\mathbf{v}	\mathbf{v}	$ v\rangle$
Covector (renglón, bra)	$\mathbf{u} \cdot$	\mathbf{u}^{\dagger}	$\langle u $
Producto escalar	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$\mathbf{u}^{\dagger} \mathbf{v} \equiv \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	$\langle u v\rangle$
Diádica	$\mathbf{v} \mathbf{u} \cdot$	$\mathbf{v} \mathbf{u}^{\dagger}$	$ v\rangle \langle u $
Conjugado hermitiano	—	$\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}^{\dagger}$	$ v\rangle \leftrightarrow \langle v $
Operador lineal	$A \mathbf{v}$	$A \mathbf{v}$	$A v\rangle$
Covector (lineal en A , antilineal en u)	$\mathbf{u} A \cdot$	$\mathbf{u}^{\dagger} A$	$\langle u A$
Covector (antilineal en A y en u)	—	$(A \mathbf{u})^{\dagger} \equiv \mathbf{u}^{\dagger} A^{\dagger}$	$\langle Au \equiv \langle u \bar{A}$
Adjunto de operador	—	$(A \mathbf{u})^{\dagger} \mathbf{v} \equiv \mathbf{u}^{\dagger} A^{\dagger} \mathbf{v}$	$\langle Au v\rangle \equiv \langle u \bar{A} v\rangle$

Tabla 3-1 tomada de Peres (1995).

Mediante la notación de Dirac se puede formalizar la estructura del producto escalar y la métrica en Mecánica Cuántica.

Los sistemas cuánticos discretos finitos se pueden describir mediante el espacio de Hilbert, que coincide con los espacios vectoriales complejos de dimensión finita con producto escalar (interior) definido.

El espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión finita es equivalente a un espacio vectorial definido en los números complejos \mathbb{C} con un producto interior de dos elementos $|v\rangle$ y $|w\rangle$, llamados vectores con el producto interior $\langle v|w\rangle$ en los números complejos \mathbb{C} .

Una función $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en los \mathbb{C} es un producto interior si satisface los siguientes requisitos:

1. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ es lineal en el segundo argumento,

$$\langle v | \sum_j \lambda_j w_j \rangle = \sum_j \lambda_j \langle v | w_j \rangle, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad (2.11)$$

2. $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^*$
3. $\langle v|v\rangle \geq 0$; con la igualdad si y solamente si $|v\rangle = 0$; la norma del vector $|v\rangle$ se define como $\| |v\rangle \| \equiv \sqrt{\langle v|v\rangle}$.

Estados puros y estados mixtos.

Cuando un sistema cuántico se prepara de tal manera que se obtiene un resultado específico predecible mediante una prueba completa se dice que está en un **estado puro**; de lo contrario se dice que está en un **estado mezclado** como podría ser el estado de polarización de los fotones provenientes de una lámpara incandescente donde las polarizaciones de los fotones individuales es totalmente al azar y que cada estado de polarización de un fotón tiene la misma probabilidad que el estado de polarización contrario.

La forma más sencilla de preparar un sistema cuántico en un estado puro es mediante un procedimiento de selección o filtrado de tal manera que cuando se somete a una prueba completa se obtiene el resultado específico que define el estado puro. Cuando se tiene una preparación imperfecta el sistema estará en un estado mezclado y si se hace una prueba imparcial de los N posibles resultados cada uno tendrá la probabilidad N^{-1} .

Mediante el operador de densidad, también conocida como la matriz de densidad que es hermitiana es posible describir los sistemas puros y mezclados dentro del formalismo de la mecánica cuántica.

Un estado único se puede representar como una expansión en términos de una base de kets:

$|\psi\rangle = c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle + \dots + c_n|u_n\rangle$, que se conoce como superposición coherente de los estados $|u_i\rangle$ (McMahon, 2006).

Supongamos ahora que tenemos un conjunto de estados cuánticos $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, cuyas probabilidades correspondientes a cada uno de estos estados son p_1, p_2, \dots, p_n ; entonces se puede describir el estado mezclado de todos ellos mediante el operador de densidad:

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.12)$$

cuando el estado del sistema se conoce exactamente se dice que es un estado puro; sea $|\psi_j\rangle$ dicho estado, entonces la probabilidad $p_j = 1$ y $p_i = 0$ para $i \neq j$. Por lo tanto el operador de densidad para un estado puro puede representarse como:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (2.13)$$

el cual también representa un proyector y se cumple que $\rho^2 = \rho$ y $Tr(\rho^2) = 1$ dicha propiedad caracteriza a los estados puros, mientras que un estado mezclado es una colección de estados puros diferentes y cada uno ocurre con una cierta probabilidad y $Tr(\rho^2) < 1$.

El valor esperado de un operador A puede calcularse mediante $\langle A \rangle = Tr(\rho A)$, y se puede utilizar para obtener las predicciones de mediciones cuánticas. Por ejemplo, el resultado de una medición es m se puede representar mediante el proyector $P_m = |m\rangle\langle m|$, entonces la probabilidad de obtener el resultado m en la medición es

$$Tr(\rho P_m) = Tr(\rho |m\rangle\langle m|) = \langle m|\rho|m\rangle. \quad (2.14)$$

Un estado completamente mezclado puede representarse así: $\rho = \frac{1}{n}I$, cuya traza es $Tr(\rho^2) = \frac{1}{n}$; por lo tanto una medida de pureza de un estado cuántico se puede determinar mediante la desigualdad $\frac{1}{n} \leq Tr(\rho^2) \leq 1$, con 1 para un estado puro.

Sistemas de espectro continuo.

Todo el formalismo del algebra de los bra-kets puede generalizarse para los sistemas de espectro continuo mediante la integración. En esta sección seguiré la nomenclatura de McMahon, 2006.

Siempre se puede asociar un ket $|\psi\rangle$ a una función

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad (2.15)$$

que pertenezca al espacio de las funciones de onda, es decir que esté definida en todo el espacio, continua y que se infinitamente diferenciable, y que además sea cuadrado integrable, es decir,

$$\int |\psi|^2 dx < \infty. \quad (2.16)$$

La función de onda representada por 2.15 está en la representación de posición y cuya representación en momento es su transformada de Fourier

$$\bar{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle \quad (2.17)$$

las bases de espectro continuo se definen así,

para el espacio de posiciones:

$$\xi_{x_0} = \delta(x - x_0) \quad (2.18)$$

y para el espacio de momentos (mediante la transformada de Fourier del espacio de posiciones):

$$v_{p_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{v_0 x}{\hbar}}. \quad (2.19)$$

La ortonormalidad del espacio de posiciones se expresa como: $\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$, y la relación de completez así: $1 = \int |x\rangle\langle x|dx$; con resultados semejantes para el espacio de momentos: $\langle p|p'\rangle = \delta(p - p')$, $1 = \int |p\rangle\langle p|dp$.

El producto interior entre los espacios kets de posiciones y momentos es:

$$\langle x|p\rangle = \langle p|x\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}}. \quad (2.20)$$

Mediante la relación de completez se puede demostrar que el espacio de posiciones y de momentos están relacionados por la transformada de Fourier:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \langle x|1|\psi\rangle = \langle x|(\int |p\rangle\langle p|dp) = \int \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{i\frac{px}{\hbar}} \bar{\psi}(p) dp.$$

Esto se puede generalizar a cualquier base continua arbitraria $|\alpha\rangle$ y entonces se tiene $|\psi\rangle = \int c(\alpha)|\alpha\rangle d\alpha$; y ahora las componentes $c(\alpha) = \langle \alpha|\psi\rangle$ son funciones de α , con la relación de completez $1 = \int |\alpha\rangle\langle \alpha| d\alpha$.

Entonces el producto interior se generaliza, $\langle \phi|\psi\rangle = \int b(\alpha)^* c(\alpha) dx$; y el valor esperado de un operador \hat{A} se expresa $\langle \psi|A|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* A\psi(x) dx$.

2.2. Polarización de fotones

El contenido de esta sección se basa en la sección 3-5 de Peres (1995). Debido a que el tema central de esta tesis es el estado de entrelazamiento de dos fotones en sus polarizaciones es importante describir cuánticamente el estado de polarización de un *sólo* fotón. Los estados de polarización de un *sólo* pueden representarse mediante un espacio lineal, lo cual concuerda con el principio de superposición. Debido a la forma de medir la polarización de la luz, mediante polarizadores, puede ser de dos maneras, ya sea polarización lineal en la dirección horizontal y vertical, o de manera equivalente, circular positiva o circular negativa, por lo tanto el espacio lineal de polarización es de dos dimensiones. La manera de representar los estados de polarización es mediante vectores columna $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donde α y β son componentes complejas que obedecen la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Los resultados de una prueba máxima de polarización pueden representarse mediante la base del espacio lineal $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que se identificarían con polarizaciones lineales en las direcciones de los ejes x y y respectivamente. Cuando se hace una prueba de

polarización lineal a un ángulo θ con respecto al eje x , los fotones con estado de polarización $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ siempre pasan la prueba y los fotones con estado de polarización ortogonal $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ siempre fallan la prueba. Por lo tanto se puede expresar el estado de polarización de un fotón de manera general así:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

donde

$$c_1 = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

y

$$c_2 = -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

De lo anterior queda claro que $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ son las probabilidades de que un sólo fotón pase o falle la prueba, respectivamente y se cumple que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ puesto que ambos eventos son complementarios.

2.3. Sistemas compuestos

Cuando dos sistemas cuánticos interactúan forman un sistema compuesto. Los estados y observables de este sistema compuesto vienen representados por el producto tensorial de sus espacios correspondientes. El producto interior de un espacio de producto tensorial $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$, donde \mathcal{H}^A es el espacio de Hilbert del sistema A y el \mathcal{H}^B es el espacio de Hilbert del sistema B , se define en términos de los productos interiores de los espacios de cada uno de los sistemas individuales de la siguiente manera:

$$\langle v_i^A \otimes u_m^B | v_j^A \otimes u_n^B \rangle = \langle v_i^A | v_j^A \rangle \langle u_m^B | u_n^B \rangle. \quad (2.24)$$

Los operadores actúan de manera semejante en su correspondiente espacio, y se pueden escribir de la siguiente manera:

$$(O^A \otimes O^B)(v_i^A \otimes u_j^B) = O_A v_i^A \otimes O_B u_j^B. \quad (2.25)$$

El operador de densidad reducida es muy importante para describir los sistemas cuánticos compuestos. A continuación seguiré en detalle el libro de Nielsen y Chuang (2000).

Se tienen dos sistemas cuánticos A y B , cuyo estado se describe mediante un operador ρ^{AB} . El operador de densidad reducida para el sistema A se define por

$$\rho^A \equiv Tr_B(\rho^{AB}), \quad (2.26)$$

donde Tr_B es la traza parcial sobre el sistema cuántico B , y se define por:

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (2.27)$$

donde $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ son dos vectores en el espacio de A , y $|b_1\rangle$ y $|b_2\rangle$ son dos vectores en el espacio de B ; y $\text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_2|b_1\rangle$.

Se puede demostrar que el operador de densidad reducida para el sistema A representa la descripción del estado del sistema A y se puede saber por ejemplo si es puro o mezclado, y provee la estadística correcta para las pruebas hechas en el sistema A .

Por ejemplo supongamos que un sistema cuántico está en el estado producto $\rho^{AB} = \rho_1 \otimes \rho_2$ donde ρ_1 es el operador densidad del sistema A y ρ_2 es el operador densidad del sistema B ; entonces se tiene

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho_1 \otimes \rho_2) = \rho_1, \quad (2.28)$$

que era lo que se esperaba; de igual manera se obtiene $\rho^B = \rho_2$. Cuando sucede lo anterior se dice que se pueden separar los sistemas individuales y no están correlacionados. Sin embargo, existen otros sistemas compuestos que no se pueden separar y están correlacionados como sería por ejemplo el caso de un estado de Bell $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ (véase Nielsen y Chuang, 2000) en donde el estado compuesto de los dos qubits está en un estado puro y se conoce exáctamente, pero los estados por separado al realizar las trazas parciales se obtienen estados mezclados, es decir, un estado del cual no se tiene conocimiento completo; cuando se tiene un sistema compuesto donde ocurre lo anterior se dice que los sistemas individuales están **correlacionados**, o entrelazados.

En el libro de Peres (1995) se describe con gran detalle el entrelazamiento cuántico y el criptodeterminismo que tiene que ver con los estados entrelazados de los sistemas compuestos; también se explican varios casos de desigualdades de Bell. Aquí me basaré en los libros de Peres (1995) y en el artículo de Clauser y Shimony (1978).

Un sistema compuesto de dos partículas separadas puede describirse en mecánica cuántica utilizando el principio de superposición, a saber, “*Cualquier vector complejo, excepto el vector nulo, representa un estado puro realizable*”. Ahora veremos como se puede definir un estado puro de un sistema compuesto.

Cuando se tiene un sistema compuesto de dos partículas, cada una de ellas descrita en un espacio de Hilbert diferente, y se quiere describir su estado en términos de los estados de los componentes individuales es necesario hacer uso del *producto directo* o *tensorial* representado por el símbolo \otimes . Por ejemplo, cuando se tiene un protón en el estado u y un electrón en el estado v , el estado compuesto protón-electrón (no necesariamente un átomo de hidrógeno) puede representarse como $w = u \otimes v$.

Los sistemas compuestos tienen estados puros como los sistemas elementales y obedecen el principio de superposición también, es decir, que si se tienen dos posibles estados del protón, digamos u_1 y u_2 y dos posibles estados del electrón, digamos v_1 y v_2 , entonces un estado realizable posible del sistema compuesto protón-electrón puede expresarse como $w = a(u_1 \otimes v_1) + b(u_2 \otimes v_2)$. Es importante observar que ni el estado del protón ni del electrón están en un estado puro, sin embargo el estado compuesto sí se encuentra en un estado puro y se dice que el protón y el electrón están correlacionados. En este caso se puede

considerar una base ortonormal formada por $\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_2$ del sistema compuesto.

Un sistema compuesto de dos fotones llamado “2-fotones” se puede producir de distintas maneras, por ejemplo, en el caso de una transición de cascada atómica *SPS* (de un nivel *S* a un nivel *P* y finalmente a un nivel *S* inferior al primero) donde se emiten dos fotones uno después del otro, o el caso de una conversión paramétrica descendente (en inglés: “parametric down-conversion”) donde un fotón (llamado de bombeo) que incide en un medio transparente no lineal se descompone en dos fotones, uno llamado fotón señal y otro fotón complementario (en inglés: “idler”) cuya suma de frecuencias da por resultado la frecuencia del fotón incidente (Mandel y Wolf, 1995), o el caso central de esta tesis: la generación de dos fotones simultáneamente de la transición doble $2^2S \rightarrow 1^2S$ de 2-fotones del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno (Breit & Teller, 1940).

La producción de fotones se realiza mediante excitaciones elementales del campo electromagnético y que en algunos casos como las transiciones de cascadas atómicas se pueden representar como vectores en un espacio de Hilbert de dos dimensiones, como veremos a continuación.

La parte de polarización de la *función de onda* (estado cuántico) Ψ de un sistema compuesto 2-fotones que forman un singulete puede representarse en el espacio de sus polarizaciones lineales ortogonales de la manera siguiente (Clauser y Shimony, 1978):

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad (2.29)$$

donde $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representa la polarización en la dirección del eje \hat{x} y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ representa la polarización en la dirección del eje \hat{y} , y la primera columna del producto directo en ambos términos representa el estado de polarización del primero fotón y la segunda columna representa al del segundo fotón. Aquí se ve claramente que existe una correlación directa en las polarizaciones, es decir, cuando el primer fotón tiene una polarización en la dirección del eje \hat{x} el segundo fotón tiene una polarización en la misma dirección del eje \hat{x} y viceversa; asimismo, cuando el primer fotón tiene una polarización en la dirección del eje \hat{y} el segundo fotón tiene una polarización en la misma dirección del eje \hat{y} y viceversa, por lo que se dice que los estados de polarización de ambos fotones están entrelazados, o también se dice que ambos fotones están entrelazados en sus polarizaciones, formando un sistema compuesto “EPR”, siglas que indican *Einstein, Podolsky y Rosen* (1935), que caracterizan el famoso artículo de ellos que generó la controversia de los fundamentos de la Mecánica Cuántica sobre la no localidad.

3. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO “EPR”

En este capítulo describiré en detalle en que consiste el entrelazamiento cuántico de partículas EPR.

En el libro de Peres (1995) se describe con gran detalle el entrelazamiento cuántico y el criptodeterminismo (determinismo de variables ocultas); también se explican varios casos de desigualdades de Bell. Aquí me basaré en el libros de Peres (1995) y en el artículo de Clauser y Shimony (1978).

El artículo de Einstein, Podolsky y Rosen (1935) (de ahí el uso de las siglas *EPR*), cuyo título “¿Puede considerarse completa la descripción de la realidad física mediante la mecánica cuántica?” pone en tela de juicio el realismo y completez de la mecánica cuántica al presentar un caso de sistema compuesto descrito mediante una función de onda: $\psi = \delta(x_1 - x_2 - L)\delta(p_1 + p_2)$, donde x_1 y p_1 son la posición y el momento lineal de la partícula 1 y x_2 y p_2 son la posición y el momento lineal de la partícula 2, y L es la distancia que las separa. Cabe señalar que el símbolo δ no representa una delta de Dirac sino una función normalizable con un pico arbitrariamente alto y estrecho. En dicho artículo se presenta la situación de dos propiedades entrelazadas, a saber, la posición y el momento lineal, de dos partículas lejanas. La situación planteada por EPR es hacer que la mecánica cuántica presente una contradicción al medir por ejemplo

la posición de la partícula 1 se puede determinar, sin perturbar de ninguna manera a la partícula 2 su posición, de donde concluyen que esa es una propiedad real de la partícula 2, y si se midiera el momento lineal de la partícula 1 se podría determinar, sin perturbar a la partícula 2, su momento lineal, de donde concluyen que es una inconsistencia debido a que se pueden determinar dos variables complementarias al mismo tiempo, lo cual prohíbe la mecánica cuántica debido a que los observables correspondientes no conmutan.

Bohr responde con un artículo (Bohr, 1935) con el mismo nombre del artículo de EPR a la supuesta “paradoja”, que esencialmente explica que no se pueden medir al mismo tiempo las propiedades x_1 y p_1 de la partícula 1 sin perturbar al sistema, de donde se mantiene la complementariedad a distancia por lo tanto las propiedades x_2 y p_2 de la partícula 2 no podrían considerarse simultáneamente como “elementos de la realidad” de la partícula 2. Sin embargo, a pesar de la lógica del argumento de Bohr no produjo un efecto convincente en la comunidad de físicos de la época. Tuvieron que pasar más de 30 años hasta la formulación mediante *variables ocultas* de John Stuart Bell (1964) que permitiera demostrar mediante un experimento si la mecánica cuántica fuera completa o no.

3.1. Teorema de Bell

La forma de representar entrelazamiento utilizando valores discretos fue propuesta por Bohm (1951) para partículas espín $\frac{1}{2}$; que es el caso de sistemas de espín total cero, como en el caso de la desintegración del pión en un electrón y un positrón; también se puede incluir en esta representación el caso de un sistema entrelazado de dos-fotones como se muestra en la ecuación (4.2); el estado de

polarización representado por esta ecuación tiene simetría par bajo reflexiones, este es el caso de cascadas atómicas *SPS* o de transiciones de dos-fotones del átomo de hidrógeno $2^2S_{1/2} \rightarrow 1^1S_{1/2}$.

Bell desarrolla un modelo de variables ocultas en general, pero para un caso donde se conserva el momento angular, como podría ser el caso de cascadas atómicas *SPS*, de donde resultan unas desigualdades algebraicas de los valores involucrados en dicho modelo. El teorema de Bell se refiere precisamente a ese modelo general de variables ocultas, bajo la premisa de localidad, es decir que no existe ninguna influencia ni perturbación instantánea entre partículas separadas, y que deben obedecer cierta desigualdad, en otras palabras es independiente de la mecánica cuántica.

Lo interesante del desarrollo de Bell es que determina una cota superior para las correlaciones de eventos que obedecen la localidad de Einstein, es decir, que no puede haber transmisión instantánea a distancia. El modelo que presenta es mediante un observable de espín, como podría ser el caso de una cascada *SPS*. El observable que utiliza para cada partícula separada es de la forma: $\text{signo}(\alpha \cdot \mathbf{J}_1)$ para la partícula 1 y $\text{signo}(\beta \cdot \mathbf{J}_2)$ donde \mathbf{J}_1 y \mathbf{J}_2 son los momentos angulares y como se conserva el momento angular se tiene que $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1$ los resultados de las mediciones pueden ser solamente $a = \pm 1$ para la partícula 1 y $b = \pm 1$ para la partícula 2. Bell encuentra una desigualdad que obedecen las correlaciones de las coincidencias de las dos partículas detectadas, véase la siguiente figura 3.1, donde para evitar cualquier influencia entre las direcciones de los polarizadores se cambian al azar durante el viaje de los fotones de tal manera que el tiempo que se tardaría la información propagándose a la velocidad de la luz de una estación

a la otra sería mayor que el tiempo en que llegan los fotones a los detectores, y de esta manera preservar la localidad durante todo el experimento.

Cuando el experimento se repite N veces se pueden calcular los valores esperados de las mediciones, es decir, $\langle a \rangle = \sum_j a_j/N$ y $\langle b \rangle = \sum_j b_j/N$, también es posible medir el valor esperado de la correlación entre los dos, es decir,

$$\langle ab \rangle = \sum_j a_j b_j / N.$$

Cuando se tiene un estado singulete de dos partículas con espín $\frac{1}{2}$ 1 y 2 como el caso de dos fotones de una cascada *SPS*, $\psi = (x_1 x_2 + y_1 y_2) / \sqrt{2}$ y ψ^\dagger es el complejo hermitiano de ψ ; y los observables son $\alpha \cdot \sigma_1$ y $\beta \cdot \sigma_2$, donde los vectores unitarios α y β pueden elegirse arbitrariamente por los observadores que representan las direcciones de sus espines correspondientes y las σ_1 y σ_2 son las matrices de Pauli de las dos partículas. Los valores esperados que predice la mecánica cuántica de los resultados de la medición de a y b por separado son $\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$, y su correlación es

$$\langle ab \rangle = \psi^\dagger (\alpha \cdot \sigma_1) (\beta \cdot \sigma_2) \psi. \quad (3.1)$$

En un estado singulete se tiene que $\sigma_2 \psi = -\sigma_1 \psi$; y con ayuda de la identidad $(\alpha \cdot \sigma)(\beta \cdot \sigma) \equiv \alpha \cdot \beta + i(\alpha \times \beta) \cdot \sigma$, se obtiene

$$\langle ab \rangle = \psi^\dagger (\alpha \cdot \sigma_1) (\beta \cdot \sigma_2) \psi = -\cos\theta, \quad (3.2)$$

donde el ángulo θ es el ángulo entre α y β . Esta correlación siempre es más fuerte que la clásica que obedecería la no localidad.

Una forma de desigualdad de Bell puede obtenerse en el experimento de dos

fotones distantes cuando las direcciones de los ejes ópticos de los polarizadores que determinan la polarización del fotón incidente ya sea en la estación izquierda a y b , o derecha b y c , no exactamente como se muestra en la figura 3.1, con una dirección común a las dos estaciones b . Cuando se excluye la dirección común b de las estaciones, y ahora las direcciones del analizador de la estación de la izquierda son a y b y las del analizador de la estación derecha son c y d en el experimento, como se muestra en la figura 3.1 es posible obtener una desigualdad más fácil de comprobar que fue obtenida por Clauser, Horne, Shimony y Holt (1969) y de ahí que se refiera a ella como desigualdad *CHSH* de Bell y tiene la ventaja de ofrecer un límite superior de la correlación entre eventos distantes.

$$|\langle ab \rangle + \langle bc \rangle + \langle cd \rangle - \langle da \rangle| \leq 2, \quad (3.3)$$

Nuevamente si se tiene un singulete $\psi = (x_1x_2 + y_1y_2)/\sqrt{2}$ de fotones y viajan a estaciones diametralmente opuestas, y un observable definido por $O_\theta = (xx^\dagger - yy^\dagger)\cos 2\theta + (xy^\dagger - yx^\dagger)\sin 2\theta$, que es equivalente al doble del proyector en la dirección θ menos el operador identidad. Cuando los dos analizadores de polarización lineal orientados con los ángulos a y b , la correlación de los resultados resulta ser $\langle O_a \otimes O_b \rangle = \cos 2(a - b)$. Al substituir los valores de este caso especial en la desigualdad (3.3) se obtiene:

$$|\cos 2(a - b) + \cos 2(b - c) + \cos 2(c - d) - \cos 2(d - a)| \leq 2 \quad (3.4)$$

cuando se observan varias parejas de fotones.

Si por ejemplo se toma un ángulo entre las direcciones de 22.5° los primeros tres

cosenos valen $1/\sqrt{2}$ y el cuarto vale $-1/\sqrt{2}$ entonces el lado izquierdo de la ecuación (3.3) tendría un valor de $2\sqrt{2}$ lo que obviamente contradice la desigualdad; en otras palabras la mecánica cuántica viola la desigualdad de Bell en algunos casos (véase Peres, 1995).

3.2. Pruebas experimentales

En esta sección presento una síntesis de los experimentos que prueban la violación de la desigualdad de Bell. Estos experimentos comprueban que las teorías de variables ocultas locales no son válidas y que por lo tanto la teoría de la mecánica cuántica está completa y que la existencia de las partículas EPR es válida.

Es importante señalar que en los experimentos de cascadas de fotones se deben cumplir dos requisitos en un mismo experimento y son (i) la eficiencia de los detectores; con una eficiencia muy baja sería imposible detectar las direcciones de polarización, y (ii) que el sistema efectivamente se encuentre bajo estrictas condiciones de localidad; es decir, que no se permita transmisión de interacciones físicas durante el tiempo de viaje de los fotones antes de que estos lleguen a sus estaciones de observación correspondiente.

Se han realizado varios experimentos para probar la desigualdad de Bell; los primeros fueron realizados por Freedman & Clauser (1972); Fry & Thompson (1976); Laméhi-Rachti & Mittag (1976), sus resultados están en perfecto acuerdo con la mecánica cuántica.

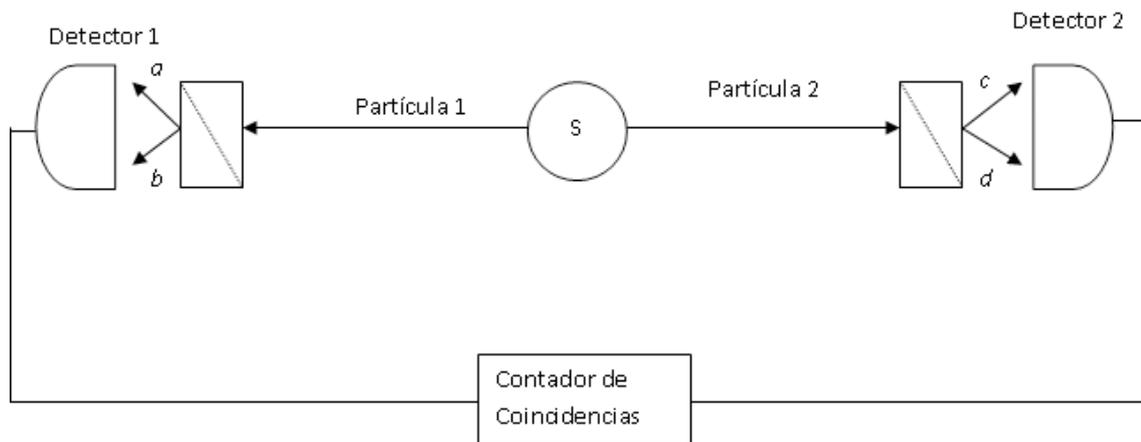


Fig. 3.1: Experimento EPR para comprobar la violación de las desigualdades de Bell.

3.2.1. El experimento de Aspect, Dalibard y Roger

El experimento que tuvo más impacto para comprobar la existencia de las partículas EPR fue realizado por Aspect, Dalibard, & Roger (1982), ver figura 3.1, en donde midieron las correlaciones (mediante coincidencias) de polarización lineal del par de fotones con analizadores que varían sus direcciones en el tiempo; para ángulos sólidos y eficiencias de polarización, la mecánica cuántica predice un valor de $S_{QM} = 0.112$ para una variable S que obedece la desigualdad de Bell *CHSH*: $-1 \leq S \leq 0$, donde S es:

$$S = \frac{N(\vec{a}, \vec{c})}{N(\infty_a, \infty_c)} - \frac{N(\vec{a}, \vec{d})}{N(\infty_a, \infty_d)} + \frac{N(\vec{b}, \vec{c})}{N(\infty_b, \infty_c)} + \frac{N(\vec{b}, \vec{d})}{N(\infty_b, \infty_d)} - \frac{N(\vec{b}, \infty_d)}{N(\infty_b, \infty_c)} - \frac{N(\infty_a, \vec{c})}{N(\infty_a, \infty_c)}. \quad (3.5)$$

S involucra las cuatro tasas de conteo de coincidencias $N(\vec{a}, \vec{c})$, $N(\vec{a}, \vec{d})$, etc., y donde el símbolo ∞_j significa que la medida es sin polarizador en el lado y salida correspondientes. Encontraron $S_{exp} = 0.101 \pm 0.020$ que viola la desigualdad de Bell por cinco desviaciones estándar. Puede afirmarse que hasta la fecha todos los datos experimentales indican que una teoría local de variables ocultas no puede describir el entrelazamiento cuántico.

3.2.2. Experimentos posteriores

En particular, debemos mencionar los resultados del experimento realizado por Kleinpoppen *et al.* (1998) utilizando el decaimiento del nivel metaestable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno; y el de Weihs *et al.* (1998), que demuestra que se cumple con los requerimientos de Bell, cuando la separación entre las mediciones de los dos fotones es tal, que la posible influencia de orientación de los polarizadores,

requeriría un tiempo de propagación mayor que la velocidad de la luz (el tiempo que emplearía una señal luminosa en propagarse entre los dos polarizadores), lo cual se denomina en el contexto relativista como *tipo-espacio*. Más de tres décadas de experimentos se ha acumulado hasta (Aspect 1999). El experimento más reciente, ha sido realizado entre las islas de La Palma y Tenerife, en las Islas Canarias (Fedrizzi *et al.* 2009), donde se confirma el entrelazamiento de fotones a una distancia de 144 km, a través de una atmósfera turbulenta y en el que, en particular, se miden correlaciones que violan la desigualdad de Bell del tipo *CHSH*.

4. PARES DE FOTONES ENTRELAZADOS

En este capítulo veremos en detalle el proceso de cascadas atómicas, en particular el continuo de dos fotones del hidrógeno y mencionaremos un experimento crucial de Novick (1969) que será clave en la posible detección de pares entrelazados provenientes de objetos astrofísicos.

4.1. Emisión 2-fotones de cascadas atómicas *SPS*

El entrelazamiento de polarización de dos-fotones provenientes de una cascada atómica *SPS* ha sido estudiada ampliamente y se ha utilizado en experimentos para demostrar la violación de las desigualdades de Bell (Clauser & Shimony, 1978; Aspect, Dalibard, & Roger, 1982; Peres, 1995). Se sabe que en el caso del singlete de dos-fotones producido por una cascada atómica *SPS*, por ejemplo, la cascada en el hidrógeno $2^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$.

Cuando se considera una cascada atómica $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$ (Clauser & Shimony, 1978) en la que no se intercambia momento angular con el núcleo y en la que las transiciones son dipolares eléctricas. Puesto que el átomo tiene momento angular total igual a cero tanto en el estado inicial como en el final, es decir $J = 0$, y como hay un cambio de paridad en cada transición, el par de fotones emitidos tiene momento angular total igual a cero y paridad par, por lo

que la componente angular (de espín) de la función de onda del sistema compuesto del par de fotones se puede expresar en términos de vectores esféricos (véase la notación en Akhiezer, & Berestetskii, 1962):

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}} [Y_{1,1}^1(\hat{\eta}_1) Y_{1,-1}^1(\hat{\eta}_2) - Y_{1,0}^1(\hat{\eta}_1) Y_{1,0}^1(\hat{\eta}_2) + Y_{1,-1}^1(\hat{\eta}_1) Y_{1,1}^1(\hat{\eta}_2)], \quad (4.1)$$

donde las $Y_{j,m}^1 = \sqrt{\frac{1}{2j+1}} Y_{j,j+1,m} + \sqrt{\frac{1+j}{2j+1}} Y_{j,j-1,m}$ son las funciones vectoriales de esféricos armónicos con momento angular total j , número cuántico magnético m y paridad -1 ; $Y_{j,j+1,m}$ y $Y_{j,j-1,m}$ son los vectores esféricos. Esta función también puede emplearse en el caso de la emisión de dos-fotones (que es otro tipo de cascada simultánea) del nivel metaestable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno; esto permite aplicar las propiedades bien conocidas de las cascadas atómicas *SPS* a la emisión de dos-fotones del hidrógeno (Biermann et al., 1997).

Si se considera un par de fotones producidos de una cascada *SPS* propagándose en direcciones opuestas en el eje z se obtendrá, al hacer las substituciones explícitamente de las funciones vectoriales de esféricos armónicos con los vectores esféricos $Y_{j,j+1,m}$ y $Y_{j,j-1,m}$ que a su vez se substituyen con armónicos esféricos $Y_{i,j}$ y estos con los espinores χ_i y los coeficientes de Clebsh-Gordan en la ecuación (4.1), la función de onda entrelazada de las polarizaciones de ambos fotones, que vimos en la sección 2.3, que repito aquí para facilitar la lectura:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad (4.2)$$

donde $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representa la polarización en la dirección del eje \hat{x} y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ representa la polarización en la dirección del eje \hat{y} , y la primera columna del producto directo en ambos términos representa el estado de polarización del primero fotón y la segunda columna representa al del segundo fotón.

4.2. Emisión espontánea de 2-fotones entrelazados del nivel

$2^2S_{1/2}$ del hidrógeno

El proceso de 2-fotones se puede explicar utilizando el Hamiltoniano no relativista de la interacción del electrón del átomo de hidrógeno con el campo electromagnético; usualmente el Hamiltoniano se divide en tres términos $H = H_0 + H_1 + H_2$ donde $H_0 \equiv \frac{p^2}{2m} - e\phi$, donde ϕ es el potencial coulombiano, $H_1 \equiv \frac{e}{2mc} [p \cdot A + A \cdot p] = \frac{e}{mc} A \cdot p$, es el término de interacción electrón-fotón (con gauge de Coulomb), p el momento y A el potencial vectorial, y finalmente $H_2 \equiv \frac{e^2}{2mc^2} A \cdot A$ que es la parte hamiltoniana que involucra a la transición de dos fotones. De acuerdo con las reglas de selección no es posible tener una transición dipolar eléctrica de un fotón del nivel $2S$ al $1S$ en el átomo de hidrógeno; debido a lo cual se considera la transición dipolar eléctrica de dos fotones mediante un nivel virtual P , tal que por conservación de energía se tiene $\hbar(\omega_1 + \omega_2) = E_{2S} - E_{1S}$. En este método se usa $l = 1$ para el estado virtual, de tal manera que se usa una transición dipolar eléctrica con $e^{-ik \cdot r} \approx 1$ en las “transiciones” $2S \rightarrow np$, seguida de $np \rightarrow 1S$, donde np denota el nivel virtual. En este método se toma el potencial vectorial $A = A_1 + A_2$ separado en dos partes correspondientes a cada fotón, 1 y 2, y se aplica el Hamiltoniano de interacción:

$H_{int} = \frac{e}{mc}(A_1 + A_2) \cdot p$ y mediante las reglas de transiciones radiativas, incluyendo la regla dorada de Fermi se obtiene la probabilidad de transición de 2-fotones (véase Mejía y Calvo, 2006):

$$\Gamma_{ab}(\omega_1) = \frac{\pi E_1^2 E_2^2 e^4}{8\hbar^4} \left| \sum_f \left[\frac{\langle b|r \cdot \hat{e}_2|f\rangle \langle f|r \cdot \hat{e}_1|a\rangle}{\omega_1 + \omega_{fa}} + \frac{\langle b|r \cdot \hat{e}_1|f\rangle \langle f|r \cdot \hat{e}_2|a\rangle}{\omega_2 + \omega_{fa}} \right] \right|^2 \times \delta(\omega_{ba} + \omega_1 + \omega_2) \quad (4.3)$$

donde \hat{e}_1 y \hat{e}_2 son los vectores de polarización de los fotones 1 y 2 respectivamente y los kets $|a\rangle$, $|b\rangle$ y $|f\rangle$ son los estados inicial, final y virtual respectivamente.

Novick (1969) presenta una extensa revisión de los primeros estudios de la emisión de 2-fotones del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno; en este artículo se señala la importancia de la no degeneración de los niveles atómicos $2^2S_{1/2}$ y $2^2P_{1/2}$ del hidrógeno que permite la metastabilidad del nivel $2^2S_{1/2}$ tal como Bethe lo concluyó. Esta metastabilidad se utiliza para explicar el comportamiento anómalo de las líneas de absorción de Balmer en astrofísica. Aunque Breit y Teller (1940) suponen que los niveles $2^2S_{1/2}$ y $2^2P_{1/2}$ son degenerados, calculan la probabilidad de transición de 2-fotones mediante la aplicación de la teoría de la transición de 2-fotones de Göpert-Mayer, y expresan la distribución de probabilidad en función de la frecuencia del fotón señal f_s :

$$A(\nu_s)d\nu_s = \frac{1024\pi^6 e^4 \nu_s^3 \nu_i^3}{h^2 c^6} \times \left(\left| \sum_{n''} \left[\frac{\langle n' | r \cdot \hat{\epsilon}_s | n'' \rangle \langle n'' | r \cdot \hat{\epsilon}_c | n \rangle}{\nu_{n''n} + \nu_c} + \frac{\langle n' | r \cdot \hat{\epsilon}_c | n'' \rangle \langle n'' | r \cdot \hat{\epsilon}_s | n \rangle}{\nu_{n''n} + \nu_s} \right] \right|^2 \right)_{av} d\nu_s; \quad (4.4)$$

y además se tiene $\nu_{nn'} \equiv \frac{E_n - E_{n'}}{h}$ donde n es el estado inicial de 2^2S , n' es el estado final de 1^2S y n'' es el estado intermedio virtual 2^2P . Aquí se denota la frecuencia y la polarización del *fotón señal* como ν_s y $\hat{\epsilon}_s$ respectivamente y la frecuencia y la polarización del *fotón complementario* como ν_c y $\hat{\epsilon}_c$ respectivamente; r es el vector de posición del electrón con respecto al núcleo. La distribución espectral es simétrica con respecto a $\nu_{nn'}/2$, donde por conservación de energía tenemos:

$$\nu_s + \nu_i = \nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{10.2\text{eV}}{h} = 1.46 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}, \quad (4.5)$$

donde el promedio se calcula sobre todas las direcciones de propagación de los fotones y sobre sus polarizaciones. Novick (1969) presenta los resultados teóricos y experimentales de la correlación angular entre las direcciones de ambos fotones que tienen la siguiente distribución angular normalizada que se obtiene al promediar (4.4) sobre las polarizaciones de ambos fotones:

$$H(\theta)d\theta d\phi = \frac{1}{6\pi^2}(1 + \cos^2\theta)d\theta d\phi, \quad (4.6)$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores de propagación de ambos fotones.

4.3. Emisión del continuo en Nebulosas

Spitzer & Greenstein (1951) consideran la emisión de 2-fotones en sus estudios del continuo de las Nebulosas Planetarias y calculan una probabilidad de $A_{2^2S,1^2S} = 8.227 \text{ seg}^{-1}$ para esta transición. En un trabajo más reciente, Nussbaumer & Schmutz (1984) encuentran la expresión analítica:

$$A(y) = C[y(1-y)(1-(4y(1-y))^\gamma) + \alpha(y(1-y))^\beta(1-(4y(1-y))^\gamma)], \quad (4.7)$$

donde C , α , β y γ son parámetros del ajuste. Asimismo expresan la emisividad, en la escala de longitud de onda como:

$$j_\lambda = \frac{1}{4\pi} \frac{hc}{\lambda^3} \lambda_0 A\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) N_{2s^2S}. \quad (4.8)$$

Nussbaumer & Schmutz encuentran que la emisividad en la escala de frecuencia, j_ν tiene un máximo en 1.853×10^{15} , equivalente a 1618 \AA , mientras que en la escala de longitud de onda tiene un máximo en 1420 \AA , como se muestra en la Figura 4.1 tomado de Nussbaumer & Schmutz).

Es importante señalar que la emisión del continuo de 2-fotones es una parte de otros procesos de emisión del continuo producido en átomos hidrogenoides, a fin de determinar si existen otros procesos que nos impidan detectar el primero.

Estos provienen fundamentalmente de procesos de recombinación que dan lugar a la emisión de un continuo de radiación que proviene de transiciones libre-ligado y libre-libre, tanto en el hidrógeno como en el helio. Los coeficientes de emisión $j_\nu(HII)$, $j_\nu(HeI)$, $j_\nu(HeII)$, así como $j_\nu(2q)$ han sido derivados en detalle para

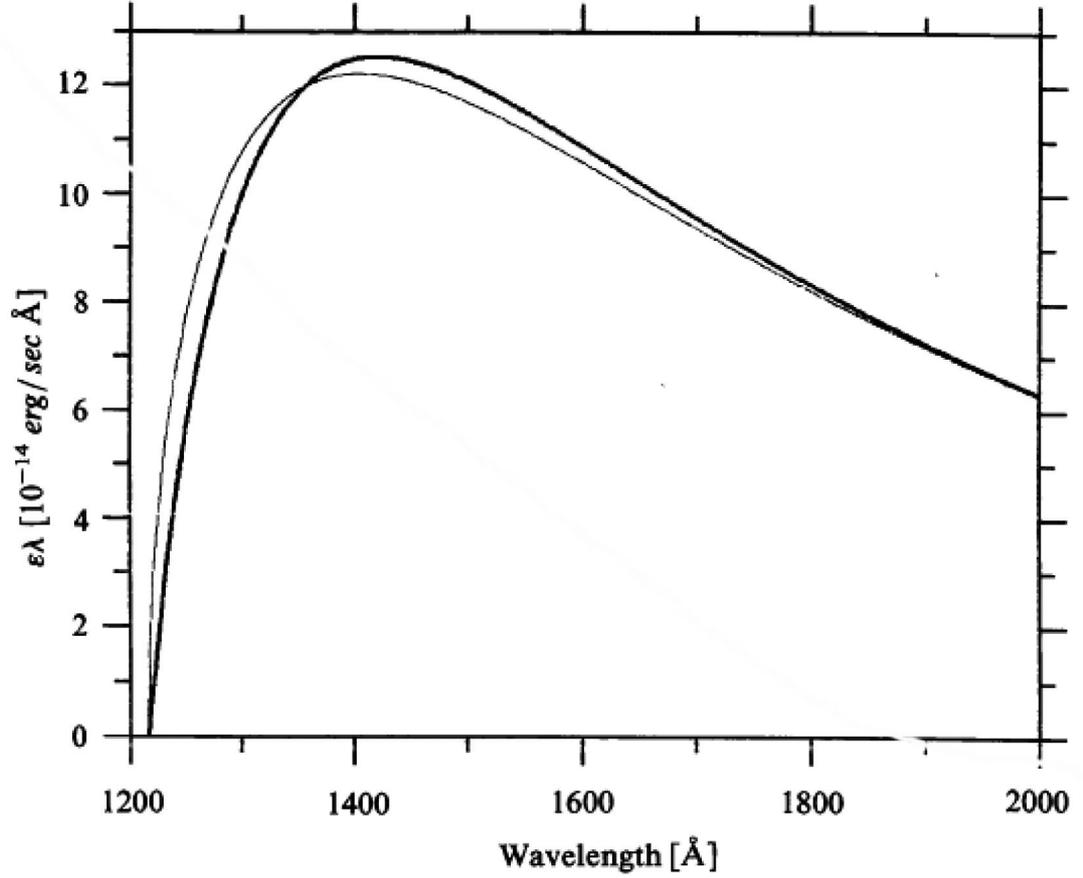


Fig. 4.1: Emisividad del continuo de 2-fotones (tomada de Nussbaumer & Schmutz 1984). $\epsilon_\lambda = 4\pi j_\lambda / N_{2s^2S}$, donde N_{2s^2S} es la población de densidad de HII $2s^2S$. La línea gruesa corresponde a un ajuste de la ecuación 4.8), realizado por los autores, mientras que la línea delgada corresponde al ajuste analítico de Hummer & Seaton (1964).

nebulosas gaseosas por Brown y Matthews (1970) ente otros (e.g. Osterbrock 1989, sección 4.3). En el capítulo 7 veremos cuales de estos procesos son importantes, para el Caso de Orión y las Nebulosas Planetarias.

4.4. *El experimento de Novick*

Los experimentos para detectar coincidencias de los fotones entrelazados de la emisión 2-fotones o de las cascadas atómicas de dos fotones llevados a cabo en laboratorio (donde las condiciones están controladas), se diseñan de forma que los dos fotones entrelazados proceden de una fuente y salgan en direcciones opuestas, es decir, sus direcciones de propagación forman un ángulo de 180° , de forma que es posible colocar los detectores (fotomultiplicadores) a cierta distancia entre sí; distancia que puede aumentarse de tal manera que inhiba la transmisión de información entre dichos fotones, información limitada por la velocidad de la luz. Dicho diseño instrumental tiene por objeto probar la violación de las desigualdades de Bell, como se muestra en Novick (1969), Aspect (2002), Aspect (1982), Kleinpoppen (1998), Duncan (1997) y Peres (1995) entre otros. Sin embargo, como se muestra en el artículo de Novick (1969,) es posible detectar las coincidencias de fotones entrelazados provenientes de la transición 2-fotones mediante un circuito electrónico que cuenta las coincidencias registradas durante el experimento, así como también las coincidencias en función del ángulo entre las direcciones de propagación de ambos fotones. En ese artículo se comprueba experimentalmente que la distribución angular entre las direcciones de propagación es:

$$H(\theta)d\theta d\phi = \frac{1}{6\pi^2}(1 + \cos^2\theta)d\theta d\phi, \quad (4.9)$$

de donde se ve que se tiene un máximo de probabilidad para las direcciones 0° y 180° ; cuyos fotones en ambos casos están entrelazados en sus polarizaciones como se explicó en el Capítulo 4. Este es un resultado importante desde el punto de vista observacional pues permite la recepción de fotones entrelazados cuyas direcciones de propagación sean casi paralelas, es decir, que formen un ángulo aproximadamente de 0° .

Mediante las ecuaciones (4.1) y (4.2) se puede demostrar cuando los fotones f_s y f_c de la emisión de dos-fotones se emiten en direcciones opuestas, es decir formando un ángulo de 180° y en la misma dirección, es decir 0° (Kleinpoppen et al., 1998) están entrelazados en sus polarizaciones. Kleinpoppen et al. (1998) utilizaron la emisión dos-fotones del deuterio para realizar experimentos que demostraron la violación de las desigualdades de Bell. La función de onda de la polarización de los fotones viene dada por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle_s|x\rangle_c + |y\rangle_s|y\rangle_c), \quad (4.10)$$

donde $|x\rangle_s$ y $|y\rangle_s$ representan los estados de polarización de los fotones señal en las direcciones x y y respectivamente, y $|x\rangle_c$ y $|y\rangle_c$ representan los estados de polarización de los fotones complementarios en las direcciones x y y respectivamente.

5. TASA DE EMISIÓN Y COINCIDENCIAS DE 2-FOTONES EN REGIONES IONIZADAS

En este capítulo se presentan los métodos para calcular la tasa de emisión espontánea de pares de fotones entrelazados, R_{PP} , de la transición $2^2S \rightarrow 1^2S$ de 2-fotones del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno en tres regiones ionizadas importantes, a saber: la región H II de Orión, las Nebulosas Planetarias IC 2149 y NGC 7293, y la Corona Solar. Se consideran dichas regiones debido a su cercanía como en el caso de NGC 7293 (la Nebulosa Planetaria de la Hélice, que está a 680 años luz de distancia de la tierra Cahn et al., 1992) y la Corona Solar; o debido a la alta producción de fotones fotoionizantes por segundo, $Q(H^0)$, de la estrella principal, como es el caso de la nebulosa de Orión, gracias a que la estrella dominante O6 θ^1 Ori C produce $Q(H^0) = 2.19 \times 10^{49}$ photons s^{-1} ; también se ha elegido a la nebulosa planetaria IC 2149, que aunque está a una distancia de aproximadamente 10 veces la distancia a la Nebulosa Planetaria más cercana a la tierra (NGC 7293), debido a los estudios previos sobre la transición $2^2S \rightarrow 1^2S$ de 2-fotones publicados por Gurzadyan (1976). Una vez obtenida la tasa de producción de 2-fotones por segundo R_{PP} se puede calcular el número total de fotones emitidos en el continuo producidos por el objeto astrofísico en cuestión mediante la transición $2^2S \rightarrow 1^2S$, que se denomina $Q(2q) = R_{PP} \times 2$,

puesto que de cada emisión resultan dos fotones. La obtención de la R_{PP} dependerá del objeto astrofísico en cuestión. Para el caso de la Nebulosa de Orión y las Nebulosas Planetarias se utiliza la probabilidad de que dada una recombinación dé por resultado una transición de 2-fotones.

La probabilidad X de que ocurra una transición de 2-fotones por recombinación puede determinarse de las ecuaciones que expresan las condiciones de estado estacionario de los átomos que se encuentren en los estados $2^2S_{1/2}$ y 2^2P , y de la densidad de fotones Lyman-alfa. Si sólo ocurre autoabsorción del estado basal y todas las colisiones se ignoran con excepción a las que ocurren entre los estados $2^2S_{1/2}$ y 2^2P se tiene la expresión de la probabilidad X (Brown & Matthews, 1970):

$$X = \frac{S}{1 + n_e r} + \frac{f_s A_{2^2S,1^2S} n_e r (1 - S + n_e r)}{3 A_{Ly\alpha} (1 + n_e r)^2}, \quad (5.1)$$

donde $A_{Ly\alpha} = 6.265 \times 10^8 \text{s}^{-1}$ es la probabilidad por segundo de una emisión Lyman-alfa, S es la fracción de las recombinaciones a los niveles excitados que llegan al nivel $n = 2$ por primera vez al estado $2^2S_{1/2}$, n_e es la densidad electrónica, $r = q/A_{2^2S,1^2S}$, donde q es el coeficiente de la tasa total para las transiciones colisionales $2^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{(1/2,3/2)}$ para tanto los electrones como los protones y $A_{2^2S,1^2S} = 8.227 \text{s}^{-1}$ (Spitzer & Greenstein, 1951), es la probabilidad por segundo de la transición 2-fotones, f_s es el número promedio de desviaciones que sufre el fotón Lyman-alfa. La expresión X es correcta a primer orden en $A_{2^2S,1^2S}/A_{Ly\alpha}$; y es válida dadas $f_s \gg 1$ y $n_e \ll A/q \approx 10^{12} \text{cm}^3$. Para calcular el número total de fotones emitidos por segundo de la transición de 2-fotones $Q(2q)$ es necesario obtener primero $Q(H^0)$ y multiplicarlo por $2X$ (el factor de dos es

debido a que contamos con dos fotones por cada emisión); donde se aproxima X a primer orden en $1/(1 + n_e r)$ y defino ξ como $2X^1$, por lo tanto tenemos:

$$\xi = \frac{2S}{1 + n_e r}. \quad (5.2)$$

En la tabla 5.1 se presentan las propiedades físicas y las constantes asociadas con la Nebulosa de Orión y las Nebulosas Planetarias, así como también el número de fotones fotoionizantes por segundo $Q(H^0)$ que se calcularán en el capítulo 6.

Tab. 5.1: Datos de Orión y Nebulosas Planetarias.

Datos	Orión	IC 2149	NGC 7293
L [kpc]	0.414 ^g	1.585 ^a	0.157 ^a
$\log F(H\beta)$ [erg cm ⁻²]		-10.55 ^a	-9.37 ^a
T_e [K]	8 500 ^c	12 000 ^d	4600 ^b
n_e [cm ⁻³]	3.0×10^{3c}	3.2×10^{3d}	300 ^f
S^e	0.316	0.332	0.285
r^e [cm ³]	6.62×10^{-5}	6.28×10^{-5}	6.8×10^{-5}
ξ^h	0.53	0.55	0.57
$\alpha_B/\alpha_{H\beta}^{eff}$		8.55 ^c	8.55 ^c
c^\dagger	0.46 ⁱ	0.43 ^j	0.23 ^j
$Q(H^0)^*$ [fotones s ⁻¹]	2.19×10^{49}	3.41×10^{46}	3.43×10^{45}

^a Cahn *et al.* (1992); ^b Casassus *et al.* (2003); ^c Osterbrock & Ferland (2006);
^d Gurzadyan (1976); ^e Brown & Mathews (1970); ^f Warner & Rubin (1975); ^g Menten *et al.* (2007); ^h ecuación (5.2); ⁱ c (Método $H\beta$) Costero & Peimbert (1970); ^j c (Método de línea de Balmer) Cahn (1976); [†] c es la corrección logarítmica de enrojecimiento por extinción. * se obtendrán en el capítulo 6 de esta tesis.

Para la Nebulosa de Orión y las Nebulosa Planetarias se obtiene el cociente ξ de sus valores respectivos S y r de la Tabla 3 del artículo de Brown y Mathews

¹ Podría haberse partido de la suposición de que se tiene un gas diluido donde $n_e r \approx 0$ y se tendría simplemente $\xi = 2S$ en la ecuación (5.2), pero es conveniente presentar la teoría detrás.

(1970), (véase también la Tabla 5.1). Debido a que ξ representa la probabilidad de que ocurra una transición de 2-fotones por recombinación, se puede expresar $Q(2q)$ de la manera siguiente:

$$Q(2q) = \xi \cdot Q(H^0). \quad (5.3)$$

En el caso de las Nebulosas Planetarias, $Q(H^0)$ es proporcional a $F(H_\beta)$, la medición del flujo observacional $H\beta$.

5.1. Número de fotones señal

El número de fotones señal que llegan a la tierra por segundo por centímetro cuadrado z_{Ph_s} puede calcularse fácilmente y es:

$$z_{Ph_s} = \frac{Q(2q)}{8\pi L^2} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (5.4)$$

donde $Q(2q)$ es el número de fotones producidos de emisiones 2-fotones por segundo y L es la distancia del objeto en cuestión a la tierra en cm y que fueron obtenidos para los cuatro objetos astrofísicos estudiados en el capítulo anterior. Al multiplicar el área del detector ($\frac{\pi D^2}{4}$) por z_{Ph_s} se puede obtener el número de fotones señal por segundo que un receptor de diámetro D puede detectar:

$$Z_{Ph_s} = z_{Ph_s} \times \frac{\pi D^2}{4} = \frac{Q(2q)}{32 \cdot L^2} \times D^2 \text{ s}^{-1}; \quad (5.5)$$

Sí, por ejemplo, el diámetro del receptor fuera $D = 1 \text{ km} = 1 \times 10^5 \text{ cm}$, lo cual con la tecnología actual es muy difícil de lograr, se podrían detectar

$Z_{Ph_s} = 2.22 \times 10^{15}$ fotones señal por segundo para el caso de la Nebulosa de Orión, que representa una grandísima cantidad de fotones provenientes de una transición 2-fotones, lo cual servirá para calcular las coincidencias de pares entrelazados de fotones en el capítulo 6.

La distribución de los fotones señal será semejante a la distribución del coeficiente de emisión de 2-fotones:

$$j_{\nu}^{2p}(2q) = \frac{2hA(\nu_s/\nu_{Ly\alpha})(\nu_s/\nu_{Ly\alpha})X\alpha_B}{A_{2^2S,1^2S}} \text{ergs} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{seg}^{-1} \quad (5.6)$$

donde α_B es el coeficiente de recombinaciones y $A(\nu_s/\nu_{Ly\alpha})$ es la probabilidad de la transición de 2-fotones en función de la frecuencia del fotón señal ν_s , y $\nu_{Ly\alpha}$ es la frecuencia del fotón Lyman-alfa.

5.2. Tasa del número de coincidencias de pares entrelazados

Para calcular el número de coincidencias de 2-fotones C que se detectarían con un receptor de diámetro D a una distancia L del objeto astrofísico estudiado se debe considerar el ángulo que receptor subtiende desde el mismo, es decir,

$$\Theta = \frac{D}{L} \text{radianes.} \quad (5.7)$$

La probabilidad de que el *fotón complementario* f_c de un *fotón señal* f_s de una emisión de 2-fotones sea emitido dentro de un ángulo muy pequeño $\theta \leq \Theta$ se calcula por medio del cociente de integrales:

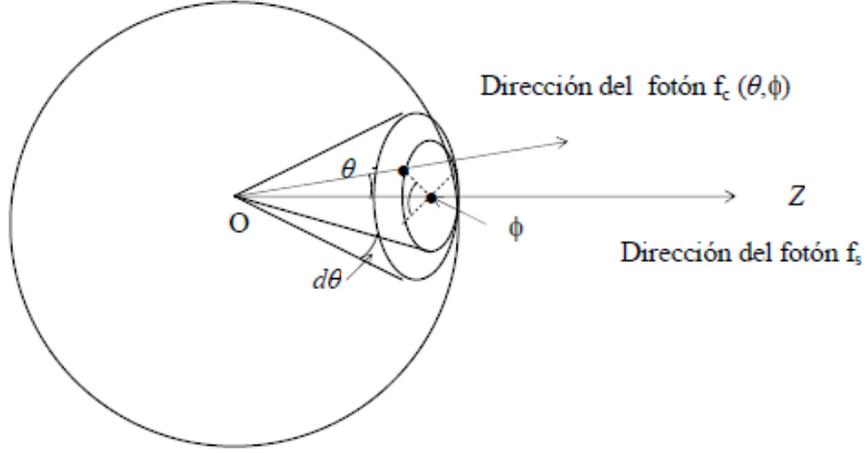


Fig. 5.1: Coordenas Cónicas.

$$\begin{aligned}
 P(\Theta) &= \frac{\int_0^\Theta \int_0^{2\pi} d\phi (1 + \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta}{2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} d\phi (1 + \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta} \approx \\
 &= \frac{2\pi \int_0^\Theta 2\theta d\theta}{4\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta} = \frac{\Theta^2}{8/3} \approx \frac{\Theta^2}{3},
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

donde se usan coordenadas cónicas (véase Figura 5.1) en las integrales.

Por lo tanto el número de coincidencias por segundo que llegan al receptor en la

Tierra será:

$$C(\Theta) = Z_{Ph_s} \times P(\Theta) = Z_{Ph_s} \frac{\Theta^2}{3}, \quad (5.9)$$

que resulta en la expresión general para el número de coincidencias de 2-fotones por segundo que pueden detectarse:

$$C(\Theta) = \frac{Q(2q)D^2}{8\pi L^2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{D}{L}\right)^2 = \frac{Q(2q)}{24\pi} \times \left(\frac{D}{L}\right)^4. \quad (5.10)$$

Aunque el número de fotones señal detectados por segundo se incrementa con el área del detector, el número de coincidencias de 2-fotones disminuye inversamente con la cuarta potencia de la distancia L al objeto astrofísico en cuestión.

De la ecuación anterior (5.10) se puede calcular el diámetro mínimo del detector que permitiría recibir $C(\Theta)$ coincidencias por segundo, a saber,

$$D_{min} = \left[\frac{24\pi \cdot C(\Theta)}{Q(2q)} \right]^{1/4} \times L. \quad (5.11)$$

6. DETECCIÓN DE PARES DE FOTONES ENTRELAZADOS EN LAS REGIONES IONIZADAS

Debido a la naturaleza diferente de los objetos astrofísicos estudiados en esta tesis, los métodos empleados para calcular el número de fotones de las transiciones 2-fotones $Q(2q)$ a partir del número de fotones fotoionizantes por segundo $Q(H^0)$ difieren entre sí. Para obtener $Q(H^0)$ en el caso de la Nebulosa de Orión me baso en el valor teórico de la producción de fotones fotoionizantes de la estrella dominante de la región H II, y de ahí obtener $Q(2p)$ al multiplicar por la probabilidad ξ , como se explicó en el capítulo anterior.

El método empleado para obtener $Q(H^0)$ en las Nebulosas Planetarias IC 2149 y NGC 7293 es mediante el flujo $H\beta$ observacional; esto permite estimar un mejor valor para $Q(H^0)$ del que se obtendría al hacer una estimación teórica solamente. La relación entre el flujo $H\beta$ y $Q(H^0)$, que involucra el cociente de los coeficientes de recombinación, está bien establecida y aparece en los libros de texto de astrofísica como en Osterbrock & Ferland (2006). Una vez obtenida $Q(H^0)$ se multiplica por la probabilidad ξ y se obtiene $Q(2q)$ como en el caso de la Nebulosa de Orión.

En el caso de la Corona Solar, dada su cercanía, se tienen modelos fenomenológicos donde tanto la densidad electrónica como la temperatura del gas

vienen expresadas en función de la distancia al Sol; lo cual permite introducir las directamente en la expresión del coeficiente de emisión de 2-fotones y así obtener directamente el número de fotones de las transiciones 2-fotones $Q(2q)$ sin necesidad de utilizar el número de fotones ionizantes del Sol $Q(H^0)$.

Como se explicó en el capítulo anterior una vez que se encuentra $Q(2q)$ se calcula el número de fotones señal que llegan a la tierra por segundo por centímetro cuadrado z_{Ph_s} .

En este capítulo también se obtienen los diámetros mínimos que debería tener un detector para poder observar la pareja de fotones entrelazados provenientes de una transición 2-fotones astrofísica.

6.1. Región H II de la Nebulosa de Orión

Con objeto de obtener el número total de fotones emitidos por segundo en el continuo producidos por la región H II de Orión mediante la transición $2^2S \rightarrow 1^2S$ del hidrógeno $Q(2q)$, es necesario saber el número de fotones fotoionizantes por segundo $Q(H^0)$, emitidos por las estrellas centrales de la nebulosa. Consideraré únicamente la contribución de la estrella dominante O6 θ^1 Ori C, y cuyo valor $Q(H^0) = 2.19 \times 10^{49}$ fotones s^{-1} puede obtenerse directamente de la Tabla 2.3 del libro de Osterbrock y Ferland (2006).

Dadas la temperatura y la densidad electrónica, mostradas en la Tabla 5.1 de la región H II de Orión, por medio de la Tabla 3 del artículo de Brown y Matthews (1970) se obtienen los valores correspondientes de $S = 0.316$ y $r = 6.62 \times 10^{-5} \text{ cm}^3$, y al substituirlos en la ecuación (5.2) se obtiene el valor de $\xi = 0.53$; y se calcula directamente $Q(2q) = 1.16 \times 10^{49}$ fotones s^{-1} mediante la

ecuación (5.3).

Con la distancia a la región H II de Orión $L = 414 \text{ pc} = 1.28 \times 10^{21} \text{ cm}$ Menten et al. (2007) se obtiene el número de fotones señal que llegan a la tierra por segundo por centímetro cuadrado provenientes de la Nebulosa de Orión

$$z_{Ph_s} = 2.83 \times 10^5 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ mediante la ecuación (5.4).}$$

6.2. Nebulosas Planetarias IC 2149 y NGC 7293.

Mediante la ecuación (5.3) se puede obtener también el número total de fotones emitidos por segundo de la transición $2^2S \rightarrow 1^2S$ del hidrógeno $Q(2q)$ producidos por las Nebulosas Planetarias. En este caso el número de fotones fotoionizantes por segundo $Q(H^0)$ es proporcional al flujo $H\beta$ observacional, y viene expresado por la ecuación (6.1) tomada de Osterbrock y Ferland (2006),

$$Q(H^0) = \frac{\alpha_B(H^0, T_e)}{\alpha_{H\beta}^{eff}(H^0, T_e)} \times \frac{L(H\beta)}{h\nu_{H\beta}} = \frac{\alpha_B}{\alpha_{H\beta}^{eff}} \times \frac{\pi F(H\beta)}{4\pi L^2 h\nu_{H\beta}}, \quad (6.1)$$

donde α_B es la tasa de recombinación efectiva al nivel $n = 2$ del hidrógeno y $\alpha_{H\beta}^{eff}$ es la tasa de producción efectiva de fotones $H\beta$ debido a recombinaciones, las cuales pueden obtenerse directamente de las Tablas 2.1 y 4.4 (para el caso B de Baker y Menzel, 1938, véase también Osterbrock y Ferland, 2006); $L(H\beta)$ es la luminosidad total $H\beta$, L es la distancia a la Nebulosa Planetaria en cuestión, T es su temperatura, h es la constante de Planck y $\nu_{H\beta}$ es la frecuencia del fotón $H\beta$. Como puede verse en la Tabla 5.1 el valor correspondiente para las Nebulosas Planetarias IC 2149 y NGC 7293 del cociente $\alpha_B/\alpha_{H\beta}^{eff} = 8.55$ para ambas Nebulosas Planetarias. Al substituir los valores numéricos en la ecuación

(6.1) se obtienen $Q(H^0) = 3.41 \times 10^{46}$ fotones fotoionizantes s^{-1} y

$Q(H^0) = 3.43 \times 10^{45}$ fotones fotoionizantes s^{-1} para IC 2149 y NGC 7293

respectivamente.

Dadas las temperaturas y las densidades electrónicas, mostradas en la Tabla 5.1 de las Nebulosas Planetarias IC 2149 y NGC 7293 es posible encontrar sus

valores correspondientes de $S = 0.332$ y $r = 6.28 \times 10^{-5} \text{ cm}^3$, y $S = 0.285$ y

$r = 6.8 \times 10^{-5} \text{ cm}^3$ respectivamente mediante la Tabla 3 del artículo de Brown y

Matthews (1970); y al substituirlos en la ecuación (5.2) se obtiene los valores de

$\xi = 0.55$ y $\xi = 0.57$ para IC 2149 y NGC 7293 respectivamente; y mediante la

ecuación (5.3) se obtienen $Q(2q) = 1.88 \times 10^{46}$ fotones s^{-1} y

$Q(2q) = 1.95 \times 10^{45}$ fotones s^{-1} para IC 2149 y NGC 7293 respectivamente.

Finalmente, considerando las distancias L , mostradas en la Tabla 5.1 de las

Nebulosas Planetarias, $L = 1585 \text{ pc} = 4.89 \times 10^{21} \text{ cm}$ y

$L = 157 \text{ pc} = 4.84 \times 10^{20} \text{ cm}$ para IC 2149 y NGC 7293 respectivamente,

mediante la ecuación (5.4) se obtiene el número de fotones señal que llegan a la

tierra por segundo por centímetro cuadrado $z_{Ph_s} = 3.12 \times 10^1 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ y

$z_{Ph_s} = 3.31 \times 10^2 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ para IC 2149 y NGC 7293 respectivamente.

6.3. Corona Solar

En el caso de la Corona Solar se obtiene directamente el número de fotones

señal emitidos por segundo, que es exactamente lo mismo que la tasa de

producción espontánea de pares de fotones entrelazados, o sea $R_{PP} = Q(2q)/2$.

La manera de obtener R_{PP} es mediante la integración del coeficiente de emisión

local, que varía con la temperatura y densidad electrónica de la Corona Solar, en

función de la distancia R desde el centro del Sol. El coeficiente de emisión de la Corona Solar se obtiene considerando el caso B de Baker y Menzel (1938) mediante la expresión del coeficiente de emisión $j_{\nu}^{2p}(R, y)$ del artículo de Kwok (2000):

$$j_{\nu}^{2p}(R, y) = \frac{1}{4\pi} \times \frac{n_e^2(R)\alpha_B [T_e(R)]}{A_{2S,1^2S}} h y A_{2p}(y), \quad (6.2)$$

Aquí supongo, sin pérdida de generalidad que el hidrógeno está completamente ionizado, es decir, $n_p = n_e$; $y = \nu/\nu_{Ly\alpha}$ es el cociente entre la frecuencia del fotón y la frecuencia del fotón Lyman-alfa o también se puede expresar como el cociente de longitudes de onda $y = \lambda_{Ly\alpha}/\lambda$; $A_{2p}(y)$ es la probabilidad de transición en función de y en unidades de energía, por unidades de volumen, por unidades de tiempo, por unidades de ángulo sólido, por unidad de frecuencia, y tiene su valor máximo en $y = 0.50$ y viene expresada aproximadamente (véase Nussbaumer & Schmutz, 1984, y Kwok, 2000):

$$A_{2p}(y) = 202.0s^{-1} \left\{ y(1-y) \left[1 - (4y \{1-y\})^{0.8} \right] + 0.88[y(1-y)]^{1.53} [4y(1-y)]^{0.8} \right\}, \quad (6.3)$$

y cuya gráfica se muestra en la Figura 6.1.

Del libro de Lang (1999) es posible obtener la temperatura y la densidad electrónica como funciones de la distancia R desde el centro del Sol mediante la variable $\zeta = R/R_{\odot}$, donde $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10}$ cm es el radio solar; a continuación se muestra la densidad de la Corona Solar:

para $1 \leq \zeta \leq 3.83$

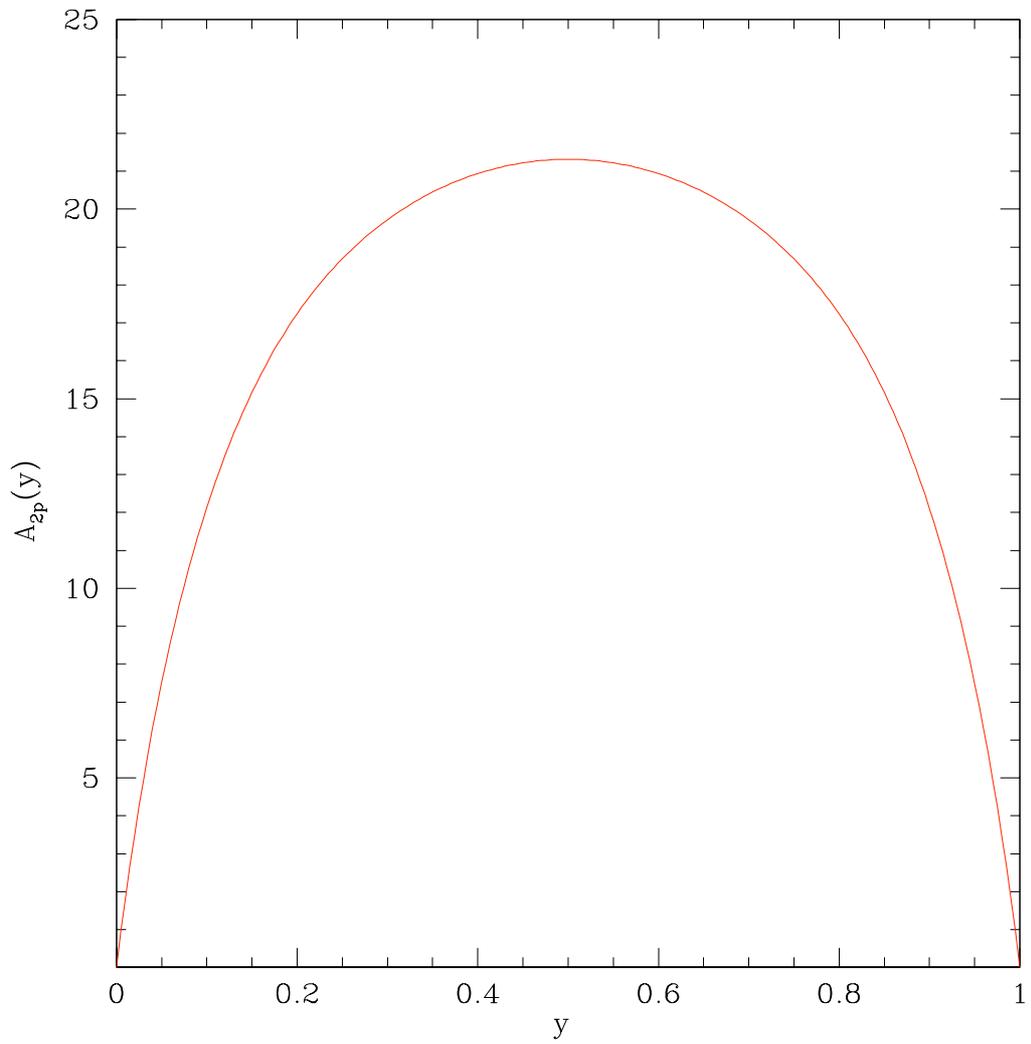


Fig. 6.1: Distribución de la Probabilidad de la Transición de 2-Fotones en seg^{-1} .

$$n_e(\zeta) = 1.55 \times 10^8 \zeta^{-6} \times (1 + 1.93 \times \zeta^{-10}) \text{ cm}^{-3}, \quad (6.4)$$

y para $\zeta > 3.83$

$$n_e(\zeta) = 7.2 \times 10^5 \zeta^{-2} \text{ cm}^{-3}; \quad (6.5)$$

la expresión de la temperatura electrónica de la Corona Solar como función de ζ es:

$$T_e(\zeta) = \zeta^{-2/7} \times 10^6 \text{ K}. \quad (6.6)$$

Para densidades menores a la densidad electrónica crítica la transición $2^2S \rightarrow 1^2S$ de 2-fotones del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno empieza a ser dominante en la expresión del coeficiente de emisión local debido al aumento en las colisiones electrónicas y protónicas y puede obtenerse por medio del coeficiente de la tasa de transición colisional, como se explica en el libro de Osterbrock y Ferland (2006), y cuyo valor es $n_{e \text{ crit}} = 1.645 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$; este valor será útil y se introduce en el factor de corrección dado por: $F_e(\zeta) = (n_{e \text{ crit}} / (n_e(\zeta) + n_{e \text{ crit}}))$; por ejemplo cuando la densidad electrónica es $n_e(\zeta) = n_{e \text{ crit}}$, el factor de corrección $F_e(\zeta) = 1/2$, y cuando la densidad electrónica es $n_e(\zeta) \gg n_{e \text{ crit}}$, $F_e(\zeta) \approx 0$, lo que permite evitar contribuciones en la integral de R_{PP} de emisiones 2-fotones debido a densidades electrónicas mucho mayores que la densidad electrónica crítica. En la expresión (6.2) aparece también la tasa de recombinación efectiva al nivel $n = 2$ del hidrógeno para el caso B, tomada del artículo de Brown y Mathews (1970), en función de la variable $t \equiv 10^{-4} T_e(\zeta)$, donde $T_e(\zeta)$ es la temperatura electrónica de la Corona Solar en función de ζ ,

$$\alpha_B(t) = 1.627 \times 10^{-13} t^{-1/2} (1 - 1.657 \log t + 0.584 t^{1/3}) \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}. \quad (6.7)$$

Con ayuda de (6.4), (6.5) y (6.6) se puede expresar la ecuación anterior en función de ζ :

$$\begin{aligned} \alpha_B(\zeta) = & 1.627 \times 10^{-13} (\zeta^{-2/7} \times 10^2)^{-1/2} \times \\ & \left[1 - 1.657 \log_{10}(\zeta^{-2/7} \times 10^2) + 0.584 (\zeta^{-2/7} \times 10^2)^{1/3} \right] \\ & \text{cm}^3 \text{ s}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Que es aproximada al menos 1% para $0.5 \leq t \equiv 10^{-4} T_e \leq 10$; a temperaturas más altas deja de ser tan aproximada. Ahora todo está listo para introducirse en la expresión (6.2) y realizar la integración para obtener el número de fotones señal producidos por segundo por la Corona Solar R_{PP} . La integral de la contribución total de fotones señal se lleva a cabo al substituir (6.4) y (6.5) multiplicada por el factor de corrección $F_e(\zeta) = (n_{e \text{ crit}} / (n_e(\zeta) + n_{e \text{ crit}}))$ desde $\zeta = 1$ (la superficie del Sol) hasta un cierto valor $\zeta = \zeta_l$ se obtiene:

$$R_{PP} = \int_{0.5}^1 \int_0^{4\pi} \int_{\zeta=1}^{\zeta=\zeta_l} \frac{4\pi R_{\odot}^3}{4\pi h\nu} \times F_e(\zeta) \times \left(\frac{\zeta^2 n_e^2(\zeta) \alpha_B(\zeta)}{A_{2^2S, 1^2S}} \times h\nu A_{2p}(y) \right) dy d\Omega d\zeta. \quad (6.9)$$

Al ver la gráfica el número de fotones por segundo en función de la distancia al Sol $Q_{2q}(\zeta) = Q(2q)$ que resultan de las emisiones 2-fotones de la Corona Solar en la Figura 6.2 se aprecia claramente que la mayor contribución proviene de la

región cercana al Sol, es decir que la contribución de emisiones de 2-fotones $R_{PP} = Q(2q)/2$ aumenta rápidamente a distancias cercanas al Sol. Cuando se integra $R_{PP} = Q(2q)/2$ hasta una distancia de una unidad astronómica ($\approx \zeta_l = 215$) se obtiene $R_{PP} = 1.46 \times 10^{16}$ emisiones $\cdot s^{-1}$, cuando se integra hasta 10 radios solares ($\zeta_l = 10$) se tiene un valor de $R_{PP} = 1.39 \times 10^{16}$ emisiones $\cdot s^{-1}$ que es aproximadamente un 95 % de toda la contribución total de emisiones de 2-fotones; por lo tanto si consideramos las contribuciones de emisiones de 2-fotones hasta un valor de $\zeta_l = 10$ se puede considerar a la Corona Solar como un objeto lejano de igual manera que los otros objetos astrofísicos considerados en las secciones anteriores y se puede emplear el mismo tratamiento para obtener el valor del número de fotones señal que llegan a la tierra por segundo por centímetro cuadrado z_{Ph_s} , puede calcularse fácilmente mediante la ecuación 5.4; donde en este caso L es una unidad astronómica (1.50×10^{13} cm) y $Q(2q) = 2R_{PP} = 2.78 \times 10^{16}$ fotones $\cdot s^{-1}$; al substituir estos valores en (5.4) se obtiene $z_{Ph_s} = 4.92 \times 10^{-12}$ cm $^{-2}$ s $^{-1}$, que es 17 órdenes de magnitud menor que el valor correspondiente de fotones señal que llegan a la tierra por segundo por centímetro cuadrado de la Nebulosa de Orión.

6.4. Diámetros mínimos para detectar coincidencias de pares entrelazados

El número de coincidencias de fotones entrelazados en la emisión de la radiación de 2-fotones del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno en tres regiones fotoionizadas importantes, a saber: la Región H II de Orión, las Nebulosas Planetarias NGC 7293 y IC 2149, y la Corona Solar; el criterio para seleccionar

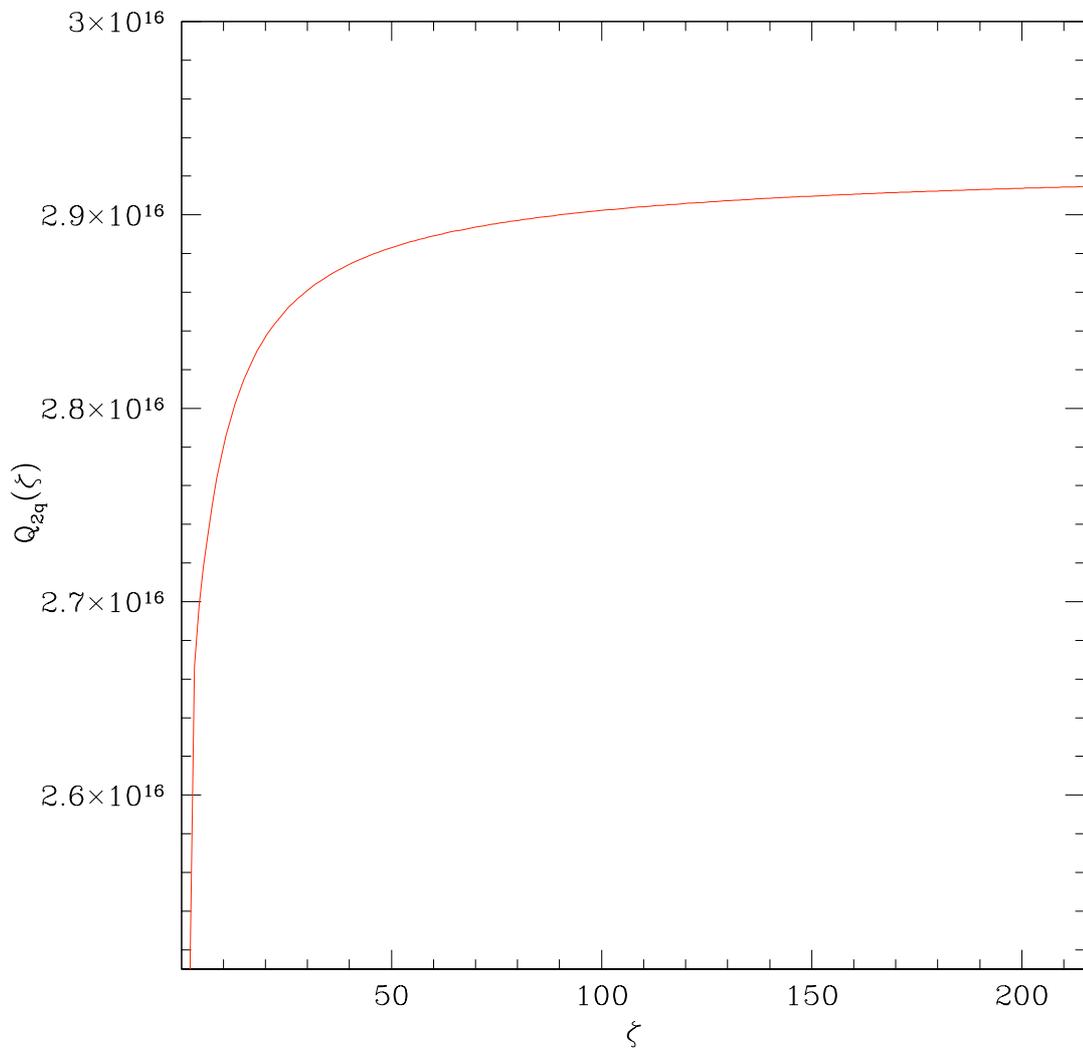


Fig. 6.2: Emisión de 2-Fotones de la Corona Solar en fotones por segundo.

los objetos antes mencionados es por una parte su cercanía como en el caso de la Nebulosa Planetaria NGC 7293 y la Corona Solar, por otra parte por su enorme producción de pares de 2-fotones entrelazados como en el caso de la Nebulosa de Orión y finalmente seleccioné la Nebulosa Planetaria IC 2149, que aunque no es tan cercana (a 1 585 parsecs) como las otras regiones, su espectro de 2-fotones se presenta en un artículo de Gurzadyan (1976). Como se verá a continuación el diámetro mínimo del receptor que puede detectar un número de coincidencias de pares de fotones entrelazados de la emisión 2-fotones en la unidad de tiempo es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia del objeto astrofísico a la tierra.

En la Tabla 6.1 se muestran los diámetros mínimos para detectar una coincidencia por hora ($C(\Theta) = 2.78 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$) y una coincidencia por año ($C(\Theta) = 3.17 \times 10^{-8} \text{s}^{-1}$) para los objetos astrofísicos estudiados en este capítulo; por ejemplo, en el caso de la Nebulosa de Orión se puede calcular el diámetro mínimo $D = 272$ km para detectar una coincidencia de 2-fotones al año.

En el caso de las Nebulosas Planetarias estudiadas, de la ecuación (5.11) se requerirían los diámetros mínimos $D = 5\,200$ km y $D = 906$ km para IC 2149 y NGC 7293 respectivamente como se muestran en la Tabla 6.1. Para la Corona Solar se obtiene asimismo un diámetro mínimo de $D = 457$ km para detectar una coincidencia de 2-fotones al año; éste diámetro es aproximadamente el doble del diámetro mínimo (272 km) correspondiente para la Nebulosa de Orión debido a que ésta produce 10^{32} veces más fotones de la emisión de 2-fotones que la Corona Solar aunque ésta está mucho más cerca de la Tierra.

Tab. 6.1: Diámetros Mínimos del Receptor para Obtener Una Coincidencia de 2-Fotones por Hora y por Año.

Objeto	L	$Q(2q)$ fotones s^{-1}	$D[1/hora]$ km	$D[1/año]$ km
Nebulosa de Orión	414 pc	1.16×10^{49}	2 630	272
IC 2149	1 585 pc	1.88×10^{46}	50 300	5 200
NGC 7293	157 pc	1.95×10^{45}	8 770	906
Corona Solar	1 U.A.	2.78×10^{16}	4 420	457

7. REQUERIMIENTOS PARA LA DETECCIÓN DE COINCIDENCIAS

La decoherencia de un estado cuántico entrelazado ocurre cuando uno de los componentes del estado entrelazado interactúa con otro sistema físico y la función de onda colapsa; lo cual también ocurre cuando una de las partículas entrelazadas interactúa con un aparato de medición, que aunque es macroscópico se considera asimismo como un sistema cuántico. Cuando ocurre la decoherencia en el sistema de estudio se pierde el entrelazamiento de las propiedades de las partículas.

Se conoce que los fotones no sufren decoherencia a menos que sean dispersados o absorbidos por alguna otra partícula o átomo que esté en su paso. El caso más favorable para estudiar el entrelazamiento es el de los pares de fotones. Como lo hacen ver Fedrizzi et al. (2009), los fotones no sufren decoherencia al propagarse grandes distancias incluso en una atmósfera turbulenta.

El medio interestelar es el responsable de producir decoherencia en el sistema entrelazado de 2-fotones; basta que uno de los fotones sea dispersado o absorbido, que sería equivalente a realizar una medición en el fotón, el estado 2-fotones automáticamente colapsa rompiéndose el entrelazamiento; es por eso que a continuación se presenta un análisis del efecto de extinción en los fotones del estado 2-fotones. Es importante destacar que en el caso de las Nebulosas

Planetarias a pesar de haberse partido del flujo $H\beta$ observacional para hacer los cálculos de los diámetros mínimos del detector que permitiría detectar coincidencias de fotones del estado 2-fotones, será necesario hacer las correcciones de dichos diámetros debido a la extinción diferencial que prevalece como enrojecimiento; y resulta muy ilustrativo considerar la extinción relativa que sufren los fotones del par cuando viajan a la tierra. Por otro lado, dada la cercanía a la tierra de la Corona Solar no es necesario considerar el efecto del medio interestelar en los fotones del estado 2-fotones; por lo tanto sólo es necesario incluir la extinción del medio interestelar en la Nebulosa de Orión que modificará el diámetro mínimo del receptor de coincidencias de 2-fotones. Otro problema importante es la identificación de los fotones que forman el par, en este capítulo se esbozará también un posible método que facilite dicha identificación.

7.1. Efecto de la extinción en el estado 2-fotones proveniente de las Nebulosas Planetarias

En esta sección explicaré, basándome en Osterbrock & Ferland (2006), de que manera la extinción del medio interestelar puede afectar la recepción de por lo menos uno de los fotones del par 2-fotones que viajan en la dirección del receptor ya sea en la tierra o en un satélite. Presentaré el cociente de las intensidades observadas de los fotones que componen un estado 2-fotones para las dos nebulosas planetarias tratadas en los capítulos anteriores.

Para el caso de las nebulosas planetarias IC 2149 y NGC 7293 consideraré el cociente estándar entre la extinción total y selectiva $R \approx 3.1$; y para la nebulosa

de Orión $R \approx 5.5$ que es como se observa en la línea visual hacia ella.

De los tres casos de objetos astrofísicos en los que hemos estudiado la recepción de los 2-fotones la corona solar es donde tendríamos menos extinción debido a la cercanía; debido a que la extinción es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

La extinción del medio interestelar sobre los fotones del par 2-fotones afectará más al fotón de mayor frecuencia, que denominaré “fotón azul” que al fotón de menor frecuencia del par que denominaré “fotón rojo”; esto es debido a que la extinción interestelar absorbe o dispersa más a los fotones de alta frecuencia por las características del polvo del medio interestelar. A continuación presentaré las ecuaciones de la extinción del medio interestelar tal como se explica en el libro de Osterbrock & Ferland (2006).

La intensidad que se recibe en la tierra es I_λ y la intensidad que se recibiría si no hubiera materia interestelar es $I_{\lambda 0}$; estas intensidades dependen de la longitud de onda y de la profundidad óptica τ_λ ,

$$I_\lambda = I_{\lambda 0} \exp(-\tau_\lambda), \quad (7.1)$$

Debido a que las características del material interestelar son casi homogéneas; y después de muchas observaciones realizadas se ha llegado a concluir que la profundidad óptica se puede expresar como una función de la longitud de onda,

$$\tau_\lambda = C f(\lambda). \quad (7.2)$$

Donde la constante C depende de las propiedades de las estrellas centrales de las

Nebulosas Planetarias, como su distancia a la tierra y su flujo H_{β} , y se ha encontrado que la función $f(\lambda)$ es aproximadamente la misma para la mayoría de las estrellas de la Galaxia.

Cuando se considera la emisión de líneas de distinta longitud de onda provenientes de una nebulosa planetaria se tiene la siguiente expresión del cociente de intensidades observadas,

$$\frac{I_{\lambda_1}}{I_{\lambda_2}} = \frac{I_{\lambda_1 0}}{I_{\lambda_2 0}} \exp[-(\tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2})], \quad (7.3)$$

y mediante el uso de (7.2) podemos expresar el cociente de intensidades como,

$$\frac{I_{\lambda_1}}{I_{\lambda_2}} = \frac{I_{\lambda_1 0}}{I_{\lambda_2 0}} \exp\{-C[f(\lambda_1) - f(\lambda_2)]\}. \quad (7.4)$$

Estas dos ecuaciones anteriores se pueden aplicar a su vez a la Nebulosa de Orión también, con la diferencia de que el valor del cociente de extinción total con respecto a la extinción selectiva R es 5.5 en lugar de 3.1, que es el valor para las Nebulosas Planetarias. No se utilizarán para la Corona Solar pues dada su cercanía a la tierra la extinción es prácticamente nula.

Cabe señalar sin embargo que el cociente de intensidades si no hubiera medio interestelar es uno en el caso de emisión de 2-fotones puesto que se emiten simultáneamente con las mismas probabilidades.

Cuando el cociente entre las intensidades de emisión de dos líneas se expresa en base 10 se utiliza la constante c que es una medida de la cantidad de extinción y se relaciona con la constante C así $c = 0.434C$ tal como viene explicado en Osterbrock & Ferland (2006). Los valores de la constante C dependen de las

propiedades de las estrellas centrales de las Nebulosas Planetarias. Utilizaré los valores de la constante c (obtenidas mediante el método de línea de Balmer) para las dos nebulosas planetarias que he analizado en esta tesis, IC 2149 y NGC 7293, y que aparecen en las tablas del artículo de Cahn (1976). También se puede obtener la constante c de la Nebulosa de Orión. Como la Corona Solar está muy cerca de la tierra la extinción del medio interestelar es prácticamente nula, por lo que no se tomará en cuenta.

Una vez que se conoce la constante c se puede determinar la profundidad óptica mediante la expresión (7.2) y de ahí la función $f(\lambda)$. Utilizaré la tabla 7.1 en Osterbrock & Ferland (2006) de la curva estándar para interpolar los valores correspondientes a las longitudes de onda del fotón azul y del fotón rojo del estado 2-fotones (se puede utilizar la función analítica directamente, pero las diferencias serían de menos del 5%); y al substituir en la ecuación (7.4) obtendré el cociente de intensidades recibidas entre el fotón azul y el fotón rojo; lo que nos indicará asimismo la probabilidad de recibir los dos fotones entrelazados del estado 2-fotones. Para esta estimación del cociente de intensidades consideraré como fotón azul el que tiene la longitud de onda donde ocurre el máximo del coeficiente de emisión del estado 2-fotones (6.2);

$\lambda_{azul} = 1618\text{\AA}$ y el fotón rojo complementario $\lambda_{rojo} = 4894\text{\AA}$; cuyos valores recíprocos correspondientes son: $x_{azul} = 6.180\mu\text{m}^{-1}$ y $x_{rojo} = 2.043\mu\text{m}^{-1}$.

En la siguiente tabla se muestran los resultados del cociente de intensidades entre fotón azul y fotón rojo.

Tab. 7.1: Enrojecimiento por extinción de IC 2149 y NGC 7293.

Nebulosa	Distancia	c	λ_{azul}	λ_{rojo}	τ_{azul}	τ_{rojo}	$I_{\text{azul}}/I_{\text{rojo}}$
IC 2149	1585 pc	0.43	1618Å	4894Å	2.532	1.143	0.25
NGC 7293	157 pc	0.23	1618Å	4894Å	1.354	0.612	0.48

7.2. Efecto de la extinción en el estado 2-fotones proveniente de la Nebulosa de Orión y las Nebulosas Planetarias

Con respecto a la absorción y dispersión debida al polvo del medio interestelar, el tamaño del polvo interestelar es por lo general muy pequeño y tendrá un efecto mayor en la radiación ultravioleta que en las otras que son menos energéticas. Sin necesidad de hacer un análisis muy detallado, como el hecho en la sección 7.1 de la forma de la función de enrojecimiento, y suponiendo que $A(\lambda) \propto \lambda^{-1}$ (véase Osterbrock & Ferland, 2006), la extinción de un fotón de longitud de onda 2432 Å es $A(2432) \approx 2A_V$, donde $A_V = -2.5cf(V)$ donde c es la corrección logarítmica de enrojecimiento y $f(V)$ es la función de profundidad óptica. Con objeto de detectar una coincidencia es necesario que ambos fotones sobrevivan al polvo del medio interestelar; en un par donde cada fotón tiene aproximadamente una mitad de energía cada uno sufriría una extinción igual a $A(\lambda) \approx 2A_V$; entonces la probabilidad de sobrevivencia de ambos fotones es equivalente a tener un sólo fotón atravesando dos veces el polvo del medio interestelar, esto es, el par de fotones sufriría una extinción equivalente a $4A_V$. Si se considera un par entrelazado de fotones con longitudes de onda diferentes se encuentra que la extinción total que sufre el par no cambia mucho y permanece cerca de $4A_V$; por lo tanto aún en el caso de una extinción moderada puede ser importante y

aumentaría el tamaño mínimo requerido del receptor por un factor de 10^c debido a que un factor de 4 multiplica a A_V se cancela con la potencia de 4 asociada con el diámetro mínimo calculado del receptor y debido a que $f(V) \approx 1$. Por lo tanto para la Nebulosa de Orión, cuyo valor de c es 0.46 (Costero & Peimbert, 1970) el diámetro mínimo para detectar una coincidencia al año se incrementará de 272 km a 785 km; y para la misma situación de una coincidencia al año en las Nebulosa Planetarias, el diámetro mínimo para IC 2149 aumentaría de 5 200 a 14 000 km y para NGC 7293 de 906 a 1 540 km; de donde se ve que la Corona Solar en donde se requiere un diámetro del detector de 457 km es el mejor candidato para observar coincidencias dado que los fotones provenientes de ella no sufren extinción del medio interestelar y se requeriría un diámetro de aproximadamente la mitad del tamaño correspondiente al de la Nebulosa de Orión.

7.3. *Identificación de los 2-fotones auténticos.*

En esta tesis se ha tratado la generación, la permanencia y la recepción de los pares de 2-fotones. Lo que falta por abordar es el problema de su identificación, ya que, aunque se emiten un enorme número de 2-fotones por segundo, estos compiten con el continuo emitido por las regiones fotoionizadas, que provienen fundamentalmente de transiciones libre-ligado y libre-libre (Bremsstrahlung), tanto en el hidrógeno como en el helio (véase la sección 4.3).

En las figuras 7.1, 7.2 y 7.3 se muestran las gráficas¹ de la emisión del continuo para la Nebulosa de Orión y las Nebulosas Planetarias IC 2149 y NGC 7293, donde se puede apreciar que la emisión del continuo de 2-fotones es dominante para $\lambda < 2500 \text{ \AA}$, que es la región donde la emisión 2-fotones tiene su máxima probabilidad. Se puede uno basar en el artículo de Brown & Mathews (1970) para calcular el cociente de la emisión 2-fotones con respecto a la emisión total del continuo $C(2q)$ de las nebulosas, dependiendo de la temperatura y la densidad electrónica para una longitud de onda específica de la manera siguiente:

$$C(2q) = \frac{\gamma(2q)}{\gamma(2q) + \gamma(HI) + 0.10 \times \gamma(HeI)}, \quad (7.5)$$

donde la $\gamma(HeII)$ es insignificante y no aparece en la ecuación, y

$$\gamma(2q) = \frac{g(\nu)S\alpha_B}{1 + n_e r}; \quad (7.6)$$

además se considera que la población de helio con respecto al hidrógeno es 10 % (véase Osterbrock & Ferland, 2006). Por ejemplo para el caso de Orión

($T_e \approx 8000\text{K}$ y $n_e = 3.0 \times 10^3 \text{cm}^{-3}$) y $\lambda = 2600\text{\AA}$ se encuentran los valores

$$S\alpha_B = 1.53 \times 10^{-13} \text{cm}^3 \text{seg}^{-1}, \quad r = 6.79 \times 10^{-5} \text{cm}^3$$

$$g(2600\text{\AA}) = 8.07 \times 10^{-27} \text{erg Hz}^{-1}, \quad \gamma(HI) = 4.93 \times 10^{-40} \text{erg cm}^3 \text{seg}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{ y}$$

¹ Elaboradas por Christophe Morisset mediante un programa basado en los cálculos de Ercolano (2006) para la recombinación; las α_B las tomó de Péquignot (1991). Los flujos están normalizados con respecto a las intensidades de líneas de recombinación: $H\beta$ para la recombinación de H, el libre-libre y el 2-fotones, la línea de HeI 4471 \AA para la recombinación de He+ y HeII 4686 \AA para la recombinación de He++. Las intensidades de las líneas se tomaron de O'Dell (1998) para la Hélice, de Feibelman (1994) para IC 2149 y para Orión. La contribución de HeII sólo es importante para la Hélice, donde se ve que el continuo tiene un pico en 2000 \AA . El libre-libre es despreciable para éstas longitudes de onda, aunque sí se calculó.

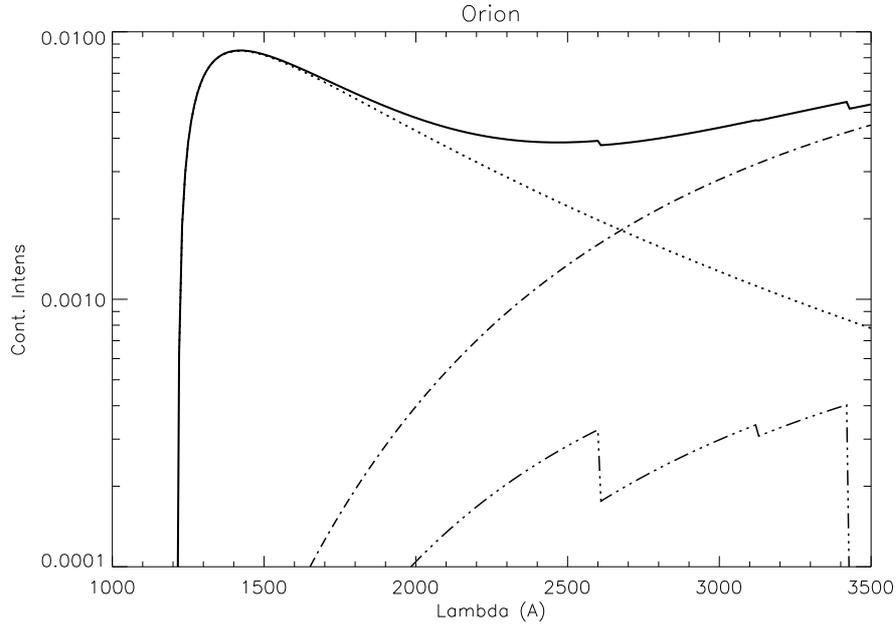


Fig. 7.1: La emisión del continuo de Orión, donde ...: 2-fotones, ----: recombinación de HI, -.-.-.: recombinación de HeI y ---: total (véase la nota a pie de página de la página 70).

$\gamma(HeI) = 13.61 \times 10^{-40} \text{erg cm}^3 \text{seg}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ de las tablas 1, 3, 4 y 5 del artículo de Brown & Mathews (1970) de donde resulta:

$\gamma(2q) = 6.60 \times 10^{-40} \text{erg cm}^3 \text{seg}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ y $C(2q) = 0.51$, es decir que la parte del continuo correspondiente a la emisión 2-fotones es del 51%. Todo lo anterior indica que si es factible distinguir los 2-fotones de las emisiones del continuo de las nebulosas para longitudes de onda suficientemente pequeñas. Sería conveniente investigar cual sería la distribución de la emisión del continuo en la Corona Solar para poder concluir que es posible distinguir las emisiones de 2-fotones del resto de fuentes del continuo.

El problema técnico de identificación podría resolverse de manera semejante a

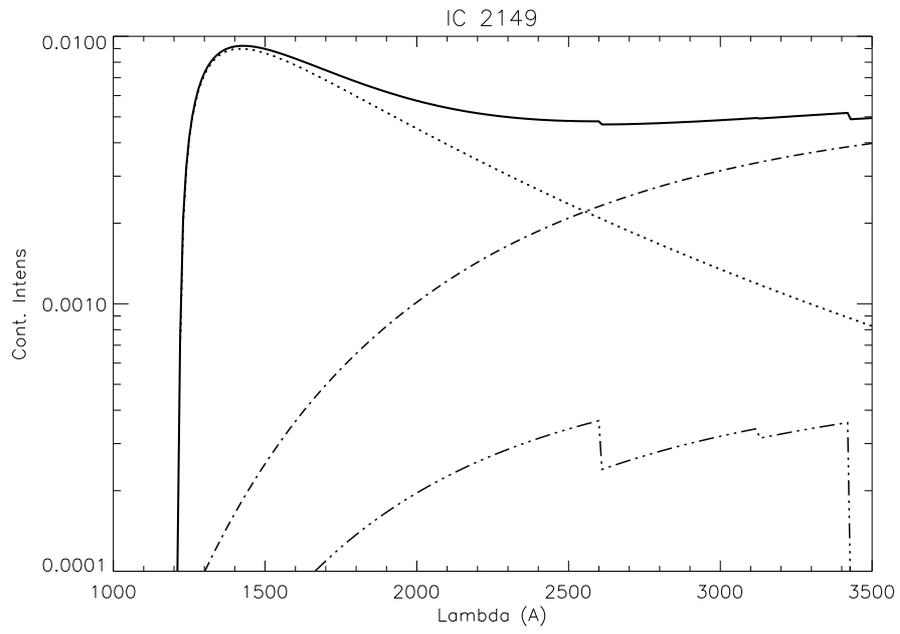


Fig. 7.2: La emisión del continuo de IC 2149, donde ...: 2-fotones, -.-.: recombinación de HI, -.-.-.: recombinación de HeI y ---: total (véase la nota a pie de página de la página 70).

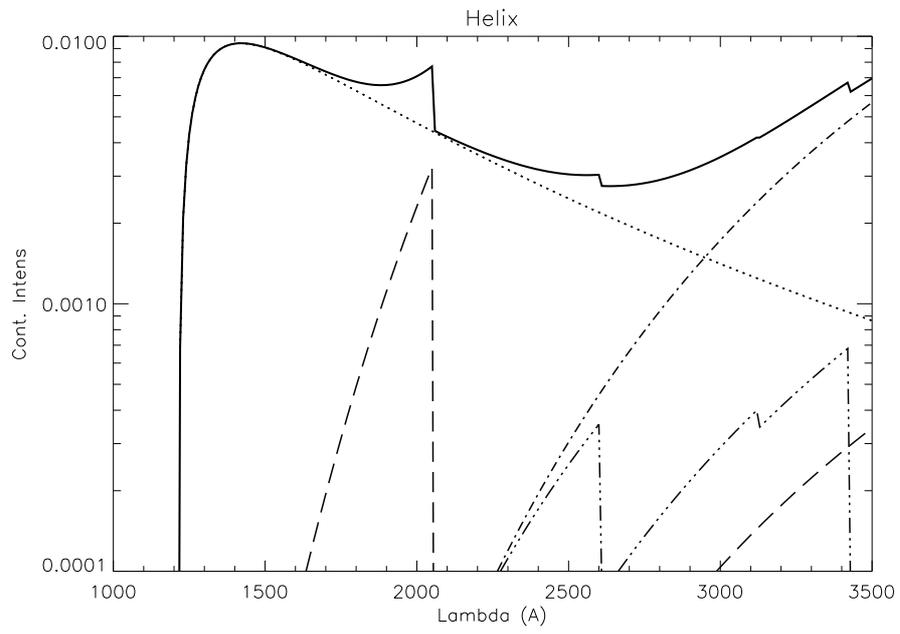


Fig. 7.3: La emisión del continuo de NGC 7293, donde: 2-fotones, - - -: recombinación de HI, - - - - -: recombinación de HeI, - . - . -: recombinación de HeII y ---: total (véase la nota a pie de página de la página 70).

como se muestra en el artículo de Fedrizzi et al. (2009), donde se detectan los pares entrelazados de fotones que viajan largas distancias en la misma dirección mediante un sistema de divisores de haz, divisores polarizadores de haz, analizadores de polarización y un aparato acoplador de carga (CCD) que les permite medir coincidencias entre los detectores con objeto de probar la violación de la desigualdad *CHSH* de Bell que indica que se ha detectado un par entrelazado. En el caso contemplado en esta tesis los fotones tienen frecuencias complementarias que también ayudaría a identificar el par de fotones entrelazados; por lo tanto en el proceso de identificación tendríamos tres partes, a saber, i) los fotones del par deben llegar simultáneamente por lo que la incertidumbre en el tiempo debe aproximarse a cero, ii) sus frecuencias son complementarias, lo cual podría analizarse mediante un sistema espectrográfico de rejillas de difracción, y finalmente iii) una combinación de divisores de haz, analizadores de polarización y un CCD para probar la violación de la desigualdad *CHSH* de Bell.

8. CONCLUSIONES

El tipo más factible de entrelazamiento cuántico que puede detectarse en el Universo es el de la transición espontánea 2-fotones del nivel metaestable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno; el par de fotones; el par de fotones conserva su entrelazamiento durante su viaje a menos que uno de los fotones se mida o interactúe con otra partícula o átomo del medio interestelar.

Se han obtenido por métodos diferentes las tasas de emisión R_{PP} de cuatro regiones astrofísicas, a saber: la Nebulosa de Orión, dos Nebulosas Planetarias cercanas IC 2149 y NGC 7293, y la Corona Solar. Sus valores correspondientes son 5.80×10^{48} , 9.39×10^{45} , 9.77×10^{44} , y 1.46×10^{16} pares de fotones por segundo respectivamente.

La Nebulosa de Orión, aunque está a una distancia de 414 pc, sería el mejor candidato para recibir coincidencias de 2-fotones debido a la enorme cantidad de fotoionizaciones producidas en el gas hidrógeno; sin embargo, debido a la presencia del medio interestelar las posibilidades de que al menos uno de los fotones del par entrelazado interactúe con una partícula son mayores que en el caso de la Corona Solar cuyos 2-fotones prácticamente no sufren extinción del medio interestelar; por lo que se puede concluir que la Corona Solar es el mejor candidato para detectar pares de 2-fotones.

Se calcularon los tamaños mínimos de los diámetros de los receptores D para cada uno de los objetos astrofísicos considerados para poder una coincidencia al año se obtuvieron, sin tomar en cuenta la extinción del medio interestelar, 272 km y 457 km para la Nebulosa de Orión y la Corona Solar respectivamente, y 906 y 5 200 km para las Nebulosas Planetarias NGC 7293 y IC 2149 respectivamente. Cuando se incluye la extinción solamente será afectado el diámetro mínimo correspondiente a la Nebulosa de Orión debido a que se partió de consideraciones teóricas a diferencia de las Nebulosas Planetarias que se tomó directamente el flujo $H\beta$, y la Corona Solar no es afectada por el medio interestelar. El diámetro mínimo correspondiente a la detección de coincidencias provenientes de la Nebulosa de Orión debe aumentarse por un factor de 10^c , de un diámetro mínimo de 272 km a 785 km. Los cálculos indican por lo tanto que el mejor objeto astrofísico para detectar coincidencias 2-fotones es la Corona Solar, además de permitir la posibilidad de colocar los receptores más cerca del Sol y asimismo poder observar la región desde diferentes ángulos, lo que eliminaría la restricción de $\alpha \approx 0^\circ$ en el análisis presentado de los objetos astrofísicos. Debido al tipo de radiación de interés está en la región del ultravioleta es conveniente contemplar la recepción mediante satélites. Aunque se ha explorado la posibilidad de observar la detección de 2-fotones no parece algo realizable lograr esos diámetros tan grandes en un futuro próximo.

Otro aspecto interesante es la relación entre el entrelazamiento cuántico y la información cuántica (véase Nielsen & Chuang, 2000, y Peres, 1995) con objeto de utilizar estos sistemas entrelazados de fotones que se producen naturalmente sería necesario explorar el tipo de entrelazamiento que tendrían receptores

separados por enormes distancias del orden de parsecs.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Akhiezer, A. I, & Berestetskii, V. B., 1962, *Elements of Quantum Electrodynamics* (London: Oldbourne Press)
- [2] Aspect, A., Dalibard, J., & Roger, G., 1982, *Phys. Rev. Lett.* 49, 1804
- [3] Aspect, A., 2002, *Bell's Theorem: The Naïve View Of An Experimentalist in Quantum [Un]speakables - From Bell to Quantum Information*, ed. By Bertlmann, A and Zeilinger, A. (Springer)
- [4] Baker, J. G. & Menzel, D. H., 1938, *Ap. J.* 88, 52
- [5] Bell, J. S., 1964, *Physics* 1, 1965
- [6] Bethe, H., & Salpeter, E., 1957, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (New York: Academic Press)
- [7] Biermann, S., Scully, M.O. & Toor, A.H., 1997, *Phys. Scr.* T72, 45
- [8] Bohm, D., 1951, *Quantum Theory* (New York: Prentice-Hall)
- [9] Bohr, N., 1935, *Phys. Rev.* 48, 696

-
- [10] Breit, G., & Teller, E., 1940, *Ap. J.* 91, 215
- [11] Brown, R. L., and Mathews, W. G., 1970, *Ap. J.*, 160, 939
- [12] Cahn, J. H., 1976, *Astron. J.*, 81, 407
- [13] Cahn, J. H. et al., 1992, *Astron. Astrophys.* 94, 399
- [14] Casassus, S. et al., 2003, *astro-ph/0312021v1*
- [15] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., & Holt, R. A. 1969,
Phys. Rev. Lett. 23, 880
- [16] Clauser, J. F., & Shimony, A., 1978, *Rep. Prog. Phys.* 41, 1881
- [17] Costero, R., & Peimbert, M., 1970, *BOTT.* 34, 229C
- [18] Duncan, A. J., Sheikh, Z. A., Beyer, H. J., & Kleinpoppen, H.
1997, *Mol. Opt. Phys.* 30, 1347
- [19] Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. 1935, *Phys. Rev.* 47, 777
- [20] Ercolano, B., Storey, P. J., 2006, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 372,
1875-1878
- [21] Fedrizzi, A. et al., 2009, *Nat. Phys.* 5, 389
- [22] Fitzpatrick, E. L., 1999, *PASP* 111, 63
- [23] Feibelman, W. A., Hyung, Z., & Aller, L. H., 1994, *AJ* 426,
653-663
- [24] Feynmann, R., 1965, *The Feynmann Lectures on Physics, Vol. III*
(Reading: Addison -Wesley)

-
- [25] Freedman, S. J., & Clauser, J. F., 1972, *Phys. Rev. Lett.* 28, 938
- [26] Fry, E. S., & Thompson, R. C., 1976, *Phys. Rev. Lett.* 37, 465
- [27] Göpert-Mayer, M., 1931, *Ann. Phys.* 9, 273
- [28] Gurzadyan, G. A., 1976, *PASP*, 88, 891
- [29] Hummer, D.G., & Seaton, M.J., 1964. *MNRAS*, 127, 217.
- [30] Kleinpoppen, H., Duncan, A. J., Beyer, H. J., & Sheikh, Z. A., 1998, *ARI* 51, 41
- [31] Kwok, S., 2000, *The Origin and Evolution of Planetary Nebulae* (Cambridge Univ. Press)
- [32] Lang, K. R., 1999 *Astrophysical Formulae, Volumes I and II*, 3rd Edition, (Springer-Verlag)
- [33] McMahon, D., 2006, *Quantum Mechanics Demystified* (New York: McGraw-Hill)
- [34] Mandel, L., & Wolf, E., 1995, *Optical Coherence and Quantum Optics* (New York: Cambridge University Press)
- [35] Mejía, C. & Calvo, B., 2006, *Rev. Col. Fís.* 38, 407
- [36] Menten, K. M. et al., 2007, *Astron. Astrophys.* 474, 515
- [37] Nielsen, M., & Chuang, I. L., 2000, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge: Cambridge University Press)

-
- [38] Novick, R., 1969, *Physics of One and Two-Electron Atoms*, ed Bopp, F., Kleinpoppen, H., (Amsterdam: North Holland)
- [39] Nussbaumer, H. & Schmutz, W., 1984, *Astron. Astrophys.* 138, 495-496
- [40] O'Dell, C. R., 1998, *AJ* 116, 1346-1356
- [41] Osterbrock, D.E., 1989. *Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei*, (University Science Books)
- [42] Osterbrock, D.E. & Ferland, G.J., 2006. *Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei*, 2nd. ed. (Cambridge University Press)
- [43] Péquignot, D., Petitjean, P., & Boisson, C., 1991, *Astron. Astrophys.* 251, 680-688
- [44] Peres, A., 1995, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Dordrecht: Kluwer)
- [45] Seaton, M. J., 1979, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 187, 785-795
- [46] Seaton, M. J., 1979, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 187, *Short Communication*, 73P-76P
- [47] Schiff, L., 1949, *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill)
- [48] Shimony, A., 1971, *Foundations of Quantum Mechanics* (New York: Academic Press)

-
- [49] Spitzer, L., & Greenstein, J., 1951, *Ap. J.* 114, 407
- [50] Warner, J. W., & Rubin, V. C., 1975, *Ap. J.*, 198, 593
- [51] Wheeler, J., & Zurek, W., 1983, *Quantum Theory and Measurement*, ed Wheeler, J. & Zurek, (Princeton: Princeton University Press)
- [52] Weihs, G. et al., 1998, *Phys. Rev. Lett.* 81, 5039

APÉNDICE

A. NOTACIÓN

La notación espectroscópica estándar que utilizo es la siguiente: $N^{2s+1} L_j$ donde N es el número cuántico principal, s es el número cuántico de spin total, número total de estados de spin $2s + 1$; L es el número cuántico de momento angular orbital l representado por las letras: S, P, D, F, \dots correspondiendo a $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ respectivamente y j es el número cuántico del momento angular total del átomo de hidrógeno. En el caso de la transición de 2-Fotones se puede describir así: $2^2 S_{1/2} \rightarrow 1^1 S_{1/2}$, pasando por un estado $2^2 P_{1/2}$ virtual intermedio.

B. EJEMPLOS DE NO LOCALIDAD EN ASTROFÍSICA

Aunque el fenómeno EPR puede ocurrir con más de dos partículas, es más fácil obtener todas las variables relevantes, para los procesos donde solamente se producen dos partículas. El caso de dos partículas entrelazadas del tipo discreto de Bohm, descritas con anterioridad, llamados sistemas singuletes de espín que se describen en Peres (1995). Existen muchos mecanismos e interacciones que producen pares de partículas entrelazadas; a continuación presento algunos ejemplos que podrían presentarse en astrofísica:

1. Aniquilación del positronio.

El proceso de la aniquilación del positronio (Feynmann, 1965), en donde se produce un par de fotones γ entrelazados ocurre en interiores estelares, en coronas estelares o en los rayos cósmicos.

2. Decaimiento del pión sin espín $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$.

El decaimiento del pión sin espín $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$ (Peres, 1995), que ocurre en algunas reacciones nucleares en interiores estelares o en los rayos cósmicos.

3. Dispersión protón-protón.

La dispersión protón-protón (Clauser & Shimony, 1978), que puede ocurrir en atmósferas estelares o en el medio interestelar.

4. Cascadas atómicas *SPS* 2-fotones.

Las cascadas atómicas *SPS* ($J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$) como el caso de los pares de fotones con longitudes de onda $\lambda 5513 \text{ \AA}$ y $\lambda 4227 \text{ \AA}$ del átomo de calcio (Clauser and Shimony, 1978), que puede ocurrir en atmósferas estelares.

5. Emisión del continuo de 2-fotones del nivel metaestable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno en regiones ionizadas.

La emisión de dos-fotones del nivel metaestable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno que ocurren en grandes cantidades en las regiones H II y en las Nebulosas Planetarias, se observa como parte de la emisión del continuo. De todos los posibles procesos de formación de pares de partículas entrelazadas que se presentan en astrofísica este es el caso más factible de observarse dada la abundancia de hidrógeno en el universo y la cantidad moderada de energía involucrada en el proceso.

C. ARTÍCULO ARBITRADO, ACEPTADO Y PUBLICADO
EN LA REVISTA MEXICANA DE ASTRONOMÍA Y
ASTROFÍSICA, VOL. 45, NÚM. 2, OCTUBRE 2009, PP.
179-189. “OPTICAL QUANTUM ENTANGLEMENT IN
ASTROPHYSICS”, AUTORES: JAVIER GÓMEZ,
ANTONIO PEIMBERT Y JUAN ECHEVARRÍA

OPTICAL QUANTUM ENTANGLEMENT IN ASTROPHYSICS

Javier Gómez,^{1,2} Antonio Peimbert,² and Juan Echevarría²

Received 2009 June 2; accepted 2009 July 24

RESUMEN

Las teorías del entrelazamiento cuántico entre dos partículas lejanas, que claramente confirman la naturaleza no local de la Mecánica Cuántica, se aplican a las partículas producidas naturalmente en los objetos astrofísicos. Estudiamos la producción y la recepción del caso de entrelazamiento cuántico más factible de observarse: la transición espontánea de dos-fotones del nivel metastable $2^2S_{1/2}$ del hidrógeno, componente conocido del espectro del continuo de las regiones ionizadas. Obtenemos la tasa de emisión de dos-fotones para cuatro objetos astrofísicos: la Nebulosa de Orión, dos nebulosas planetarias cercanas IC 2149 y NGC 7293, y la corona solar. La producción de pares entrelazados por segundo es de 5.80×10^{48} , 9.39×10^{45} , 9.77×10^{44} y 1.46×10^{16} , respectivamente. La distribución de las direcciones de propagación de ambos fotones emitidos no se anula para ningún ángulo; por lo que es posible observar el par entrelazado a ángulos $\theta \approx 0^\circ$. Debido a que el número de coincidencias de dos-fotones va como el cociente entre el tamaño del detector y la distancia al objeto astrofísico elevado a la cuarta potencia, las coincidencias son escasas; para su detección se requiere de receptores de un tamaño mucho mayor que los que existen en la actualidad.

ABSTRACT

The theories of quantum entanglement between two distant particles, which clearly confirm the non-local nature of Quantum Mechanics, are applied to naturally produced particles in astrophysical objects. We study the production and reception of the cases of optical quantum entanglement most feasible to be observed: the two-photon spontaneous transition of the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level, which is known to be one of the components of the continuous spectra of ionized regions. We obtain the two-photon emission rate for four astrophysical objects: the Orion Nebula, two nearby planetary nebulae IC 2149 and NGC 7293, and the solar corona. The production of entangled pairs per second is 5.80×10^{48} , 9.39×10^{45} , 9.77×10^{44} , and 1.46×10^{16} respectively. The distribution of the propagation directions of both emitted photons does not vanish at any angle; therefore it is possible to observe the entangled pair at angles $\theta \approx 0^\circ$. Because the number of two-photon coincidences goes as the fourth power of the ratio between the detector size and the distance from the astrophysical object, coincidences are scarce; for its detection we require receivers much larger than those currently available.

Key Words: HII regions — planetary nebulae: individual (IC 2149, NGC 7293) — Sun: corona

1. INTRODUCTION

Einstein, Podolski, & Rosen (1935) wrote a crucial paper about the fundamentals of Quantum Mechanics (hereinafter QM), where they presented a quantum entanglement *Gedankenexperiment* to argue about the

¹Department of Physics, The Citadel, USA.

²Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico.

incompleteness of QM. The great impact of the Einstein et al. (1935) paper in questioning the foundations of QM, granted the EPR acronym to the meaning of *a pair of separated entangled particles*; the implications contained in this work are also known as the EPR Paradox. The consequences of this paper opened new points of view about realism and non-locality in QM. The theories in which it is assumed that QM is incomplete and require additional variables to explain the statistical predictions of QM are called *Hidden Variable Theories*. Later, Bohm (1951) approached the problem with a variant of the EPR, using discrete variables only; an approach which Bell (1964) also used (with the assumption of a locality condition) to establish a test to check whether or not the EPR argument is valid. These are his famous inequalities which were deduced only under the assumption of the traditional physical interpretation of realism and locality (without any contribution of QM); these inequalities would be the consequence of the validity of the local *Hidden Variable Theories*. Clauser et al. (1969), Shimony (1971), Clauser & Shimony (1978, and references therein), established the requirements to make a real experiment to disprove the local *Hidden Variable Theories* by confirming the violation of the Bell's inequalities; thus showing that the EPR argument is incorrect. A variety of entangled pairs of particles can be produced in the laboratory by different methods, such as positronium annihilation, proton-proton scattering, decay of $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$, cascade-photon experiments and two-photon experiments of the hydrogen metastable forbidden transition $2^2S \rightarrow 1^2S$ (e.g. Feynmann 1965; Clauser & Shimony 1978; Peres 1995; Kleinpoppen et al. 1998; Mandel & Wolf 1995). Several experimental tests of local hidden-variable theories were performed by Freedman & Clauser (1972), Fry & Thompson (1976), Laméhi-Rachti & Mittig (1976), their results being in good agreement with QM. The conclusive experiment was performed by Aspect, Dalibard, & Roger (1982), who measured the linear polarization correlations of pairs of photons with time-varying analyzers; for their solid angles and polarizer efficiencies, QM predicts $S_{\text{QM}} = 0.112$, (the S variable is defined therein). They found that the average of their two runs yields $S_{\text{exp}} = 0.101 \pm 0.020$ violating the Shimony-Holt inequality $S \leq 0$ (an equivalent of Bell's inequality) by 5 standard deviations, which effectively disproved the existence of local hidden variables theories. In particular, an experiment to test the EPR non-locality has been performed using the decay of the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level by Kleinpoppen et al. (1998); their results are also in excellent agreement with QM. Weihs et al. (1998) show an experiment which complies with Bell's requirements for a strict relativistic separation between measurements. For further discussion and analysis of almost three decades of experiments see Aspect (1999). Fedrizzi et al. (2009) show a recent experiment performed between La Palma and Tenerife, in the Canary Islands, with a transmission of entangled photons along 144 km through a turbulent atmosphere and measure de violation of CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt) Bell's inequality (see Clauser et al. 1969).

The possibility to observe this quantum effect in a naturally occurring astrophysical object seems particularly interesting, since not only it would be observed outside of laboratory conditions, but the distance associated with the non-locality of such an entanglement would be unprecedented.

Of the previously mentioned physical processes, we will focus on the two-photon decay process of the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level, as this is the most accessible quantum entanglement process from the astrophysical point of view. The possibility of the existence of the two-photon transition was first introduced by Maria Göpert-Mayer (1931). Breit & Teller (1940) obtained the first calculation of the two-photon transition probability for metastable hydrogen, while Spitzer & Greenstein (1951), considering that the simultaneous two-photon emission could be an important source of the continuous emission of planetary nebulae, provided an accurate value for its transition probability: $A_{2^2S,1^2S} = 8.227 \text{ sec}^{-1}$. Novick (1969) presented an extensive review of the previous work on two-photon productions, and showed (both theoretically and experimentally) that the angular correlation between the propagation directions between both photons is proportional to $(1 + \cos^2 \theta)$, which clearly shows that both photons can be emitted in all directions with respect to each other. This is an important result since for astrophysical detection it is convenient that the direction of propagation of the two-photon pair has to be nearly parallel. The main goal of this paper is to make clear that this entangled two-photon decay process of the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level, well studied in laboratory conditions, occurs naturally and widely in astrophysics, as well as to make a first theoretical study of quantum entanglement in astrophysics to establish the possibility of its detection. In § 2 we present examples of entanglement that could be produced in astrophysical environments, and argue that two-photon production is the one most likely to be detected with a receiver mounted on or near the earth. In § 3 we discuss more specifically the two-photon production from the hydrogen $2^2S \rightarrow 1^2S$ transition, and review its production in different astrophysical

environments: H II regions, planetary nebulae (hereinafter PNe), and the Solar Corona; we also discuss here the difficulties of its detection. The causes of annihilation of one of the photons of the two-photon pair of photons due the interstellar medium (ISM) are discussed in § 4, while the results and conclusions are presented in § 5.

2. EXAMPLES OF NON-LOCALITY IN ASTROPHYSICS

Although the EPR phenomena can occur with more than two particles, it is easier to obtain all the relevant variables, for processes where only two particles are produced. The case of two entangled particles of the EPR Bohm's kind, called spin system singlets is discussed by Peres (1995). There are many mechanisms to produce entangled pairs of particles; examples relevant in astrophysics are: (i) the annihilation of the positronium (Feynmann 1965), which produces a pair of entangled γ photons (a process that occurs spontaneously in stellar interiors, stellar coronae, or cosmic rays); (ii) the decay of a spinless particle $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$ (Peres 1995), which happens in some nuclear reactions in stellar interiors or in cosmic rays; (iii) the proton-proton scattering (Clauser & Shimony 1978), which may occur in stellar atmospheres or in the ISM; (iv) the two-photon atomic SPS cascades such as the case of observed $\lambda 5513 \text{ \AA}$ and $\lambda 4227 \text{ \AA}$ pairs produced in the calcium atom (Clauser & Shimony 1978), which may occur in stellar atmospheres; and (v) the two-photon emission in the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level that occurs in large quantities in H II regions and PNe, which is observable as part of their whole continuum emission. From all these kinds of EPR systems of entangled particles, the most feasible to be detected is the latter. This is due to the abundance of hydrogen in the universe and to the moderate amount of energy involved in this process.

The EPR phenomena associated to the decay of the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level have been studied by Kleinpoppen et al. (1998) in experiments that confirm the violation of Bell's inequalities. It is known that in the case of the two-photon singlet state, produced by a SPS atomic cascade (e.g. the hydrogen cascade $3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$), the initial and final states of the atom have zero total angular momentum and even parity, i.e., $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$, while the angular momentum of the combined state can be expressed in terms of the spherical vector function:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}} [Y_{1,1}^1(\hat{\eta}_1) Y_{1,-1}^1(\hat{\eta}_2) - Y_{1,0}^1(\hat{\eta}_1) Y_{1,0}^1(\hat{\eta}_2) + Y_{1,-1}^1(\hat{\eta}_1) Y_{1,1}^1(\hat{\eta}_2)], \quad (1)$$

where $Y_{j,m}^1$ is the spherical harmonic vector function with total angular momentum j , magnetic quantum number m , and parity -1 (Clauser & Shimony 1978). This is important because the similarities between the wavefunctions of the atomic cascade and the two-photon emission in the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level allow the SPS atomic cascade well-known entanglement properties and its theory to be applied to the two-photon hydrogen emission (Biermann, Scully, & Toor 1997).

It is well known that part of the overall continuum radiation from the regions studied in this paper results from the two-photon emission in the hydrogen 2^2S metastable level, i.e. a pair of two entangled photons. We will denote one of these photons the *signal photon*: Ph_s , and the other one the *idle photon*: Ph_i ; adopting the analogy notation of the parametric down-conversion process in Mandel & Wolf (1995). The corresponding frequencies of both photons ν_s , and ν_i are complementary, i.e., $\nu_0 = \nu_s + \nu_i$, by conservation of energy.

3. DISCUSSION OF THE TWO-PHOTON SPONTANEOUS EMISSION

A review of early studies of the two-photon emission in the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level is presented by Novick (1969); in this paper the relevance of the nondegeneracy of the $2^2S_{1/2}$ and $2^2P_{1/2}$ hydrogen atomic levels is pointed out, to allow for the metastability of the $2^2S_{1/2}$ level as Bethe had concluded. This metastability is used to explain the anomalous behavior of the Balmer absorption lines observed in astrophysics. Breit & Teller (1940) calculated the two-photon transition probability even though they assumed the degeneracy of the $2^2S_{1/2}$ and $2^2P_{1/2}$ levels; they used the Göpert-Mayer two-photon transition theory to obtain the probability distribution as a function of the frequency of Ph_s :

$$A(\nu_s)d\nu_s = \frac{1024\pi^6 e^4 \nu_s^3 \nu_i^3}{h^2 c^6} \times \left(\left| \sum_{n''} \left[\frac{\langle n' | r \cdot \hat{\epsilon}_s | n'' \rangle \langle n'' | r \cdot \hat{\epsilon}_i | n \rangle}{\nu_{n''n} + \nu_i} + \frac{\langle n' | r \cdot \hat{\epsilon}_i | n'' \rangle \langle n'' | r \cdot \hat{\epsilon}_s | n \rangle}{\nu_{n''n} + \nu_s} \right] \right|^2 \right)_{av} d\nu_s, \quad (2)$$

where n is the initial state of 2^2S , n' is the final state of 1^2S , and n'' is the 2^2P intermediate state. We will denote the frequency and the polarization of the *signal photon* as ν_s and $\hat{\epsilon}_s$ respectively, and the frequency and the polarization of the *idle photon* as ν_i and $\hat{\epsilon}_i$ respectively; r is the position vector of the electron with respect to the nucleus. The spectral distribution is symmetric about $\nu_{nn'}/2$; by conservation of energy we have,

$$\nu_s + \nu_i = \nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{10.2\text{eV}}{h} = 1.46 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}, \quad (3)$$

where the average is taken over all the directions of propagation of the photons and over all their polarizations. Novick (1969) presents theoretical and experimental results for the angular correlation between the propagation directions of both photons, finding for the angular distribution:

$$P(\theta)d\theta d\phi = \frac{1}{6\pi^2}(1 + \cos^2 \theta)d\theta d\phi. \quad (4)$$

It is commonly known (e.g., Kleinpoppen et al. 1998) that the emitted photons Ph_s , and Ph_i are entangled in their polarizations when the angle between their propagation directions is 180° , i.e., when they are emitted in opposite directions, as is the standard experimental set-up in the Aspect-like experiments to test the Bell inequalities (Duncan et al. 1997); however, for our astrophysical detection purposes we require that both photons are emitted approximately in the same direction, i.e., when the azimuthal angle is $\phi \approx 0^\circ$ in spherical coordinates.

When both entangled photons propagate in the same direction, i.e. $\hat{\eta}_s = \hat{\eta}_i = +\hat{x}$ (both with the same azimuthal angles $\phi_s = \phi_i = 0$, on the plane of the polar angle $\theta = \pi/2$), equation (1) can be expressed as:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|y\rangle_s|y\rangle_i + |z\rangle_s|z\rangle_i), \quad (5)$$

where $|y\rangle_s$ and $|z\rangle_s$ represent the polarization states of the *signal photon* in the y and z directions respectively, and $|y\rangle_i$ and $|z\rangle_i$ represent the polarization states of the *idle photon* in the y and z directions respectively. This is the form of the entangled polarization wavefunction for two photons within an angle close to zero.

Regarding the emission of the two-photon radiation from the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level we now study three different astrophysical objects with ionized regions: H II regions, PNe, and stellar coronae. As we will see later the efficiency to detect the pairs of photons from a two-photon emission is inversely proportional to the fourth power of their distances; therefore we will focus our attention on some of the closest objects: the Orion Nebula, NGC 7293, the solar corona, and IC 2149, another PN that, though not as close as the other objects, has a well-studied two-photon spectrum (Gurzadyan 1976).

In the following sections we will estimate for our selected astrophysical examples: R_{PP} , the production rate of entangled pairs of photons; $Q(2q) = R_{PP} \times 2$, the total number of continuum emitted photons produced by the object via the $2^2S \rightarrow 1^2S$ decay; z_{Ph_s} , the number of signal photons per second per square centimeter that arrive on earth in each case; as well as $C(\Theta)$, the number of two-photon coincidences that can be detected with our receiver of diameter D at a distance L from the particular region, which depends on the angle subtended by the receiver:

$$\Theta = \frac{D}{L} \text{ radians}. \quad (6)$$

4. IONIZED REGIONS

We obtain $Q(2q)$ for three different types of ionized regions: H II regions, planetary nebulae and the solar corona. For the first two types, we have selected, in particular, the Orion Nebula, IC 2149 and NGC 7293, since these are some of the closest and brightest objects of their kind. In order to find $Q(2q)$ for the Orion Nebula we need: the number of photoionizing photons per second $Q(H^0)$, (which can be obtained directly from Table 2.3 in Osterbrock & Ferland 2006); and the probability that the recombination results in a two-photon decay (Brown & Matthews 1970):

$$X = \frac{S}{1 + n_e r} + \frac{f_s A_{2^2S,1^2S} n_e r (1 - S + n_e r)}{3A(1 + n_e r)^2}, \quad (7)$$

TABLE 1
ORION AND PLANETARY NEBULAE DATA

Data	Orion	IC 2149	NGC 7293
L [kpc]	0.414 ^g	1.585 ^a	0.157 ^a
$\log F(H\beta)$ [erg cm ⁻²]		-10.55 ^a	-9.37 ^a
T_e [K]	8500 ^c	12000 ^d	4600 ± 1200 ^b
n_e [cm ⁻³]	3.0 × 10 ^{3c}	3.2 × 10 ^{3d}	300 ^f
S^e	0.316	0.332	0.285
r [cm ³] ^e	6.62 × 10 ⁻⁵	6.28 × 10 ⁻⁵	6.8 × 10 ⁻⁵
ξ^h	0.53	0.55	0.57
$\alpha_B/\alpha_{H\beta}^{\text{eff}}$		8.55 ^c	8.55 ^c
c^\dagger	0.46 ⁱ	0.43 ^j	0.23 ^j
$Q(H^0)$ [photons s ⁻¹]	2.19 × 10 ⁴⁹	3.41 × 10 ⁴⁶	3.43 × 10 ⁴⁵

^aCahn, Kaler, & Stanghellini (1992). ^bCasassus et al. (2003). ^cOsterbrock & Ferland (2006). ^dGurzadyan (1976). ^eBrown & Mathews (1970). ^fWarner & Rubin (1975). ^gMenten et al. (2007). ^hEquation (8). ⁱ $c(H\beta)$ method Costero & Peimbert (1970). ^j $c(\text{Balmer} - \text{line})$ method Cahn (1976). [†] c is the reddening logarithmic correction.

where S is the fraction of the recombinations to the excited levels which enter the $n = 2$ level for the first time into the $2^2S_{1/2}$ state, n_e is the electron density, $r = q/A_{2^2S_{1/2}}$, where q is the total rate coefficient for $2^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{(1/2, 3/2)}$ collisional transitions by both electrons and protons and $A_{2^2S_{1/2}} = 8.227\text{s}^{-1}$ (Spitzer & Greenstein 1951), is the total probability per second of a two-photon transition, f_s is the mean number of scatterings that a Lyman-alpha photon experiences in the nebula and $A = 6.265 \times 10^8\text{s}^{-1}$ is the probability per second for a Lyman-alpha emission transition. The expression for X is correct to first order in $A_{2^2S_{1/2}}/A$; and X is valid, provided $f_s \gg 1$ and $n_e \ll A/q \approx 10^{12}\text{cm}^3$.

In order to find out the total number of two-photon emitted photons per second $Q(2q)$ we multiply $Q(H^0)$ by $2X$ (the factor of two is due to the fact we have two photons), where we approximate X to the first order in $1/(1 + n_e r)$ and define ξ as $2X$; therefore we take:

$$\xi = \frac{Q(2q)}{Q(H^0)} = \frac{2S}{1 + n_e r}. \quad (8)$$

We obtain the ratio ξ for the Orion Nebula and the PNe from their corresponding values of S and r in Table 3 from Brown & Mathews (1970) (see also Table 1). In general we will adopt

$$Q(2q) = \xi \cdot Q(H^0). \quad (9)$$

In the case of the PNe, $Q(H^0)$ is proportional to $F(H\beta)$, the observational $H\beta$ flux measurement. The number of photoionizations is:

$$Q(H^0) = \frac{\alpha_B(H^0, T)}{\alpha_{H\beta}^{\text{eff}}(H^0, T)} \times \frac{L(H\beta)}{h\nu_{H\beta}} = \frac{\alpha_B}{\alpha_{H\beta}^{\text{eff}}} \times \frac{\pi F(H\beta)}{4\pi L^2 h\nu_{H\beta}}, \quad (10)$$

where α_B is the effective recombination rate to $n = 2$ hydrogen level, $\alpha_{H\beta}^{\text{eff}}$ is the effective $H\beta$ photon production rate due to recombinations, which can be obtained from the tables on Osterbrock & Ferland (2006), $L(H\beta)$ is the total $H\beta$ luminosity and L is the distance to the object.

The number of signal photons z_{Ph_s} which arrive on the earth per cm² per second would be:

$$z_{Ph_s} = \frac{Q(2q)}{8\pi L^2} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}, \quad (11)$$

where L is the distance to the object in cm. The number of signal photons that can be detected by a receiver of diameter D will be:

$$Z_{Ph_s} = z_{Ph_s} \times \frac{\pi D^2}{4} = \frac{Q(2q)}{32 \cdot L^2} \times D^2 \text{ s}^{-1}, \quad (12)$$

The probability that the corresponding *idle photon* to a *signal photon* from a two-photon emission will be emitted within the very small angle $\theta \leq \Theta$, from equation (4) is:

$$P(\Theta) = \frac{\Theta^2}{3}; \quad (13)$$

therefore, the number of coincidences per second that arrive at the receiver on the earth will be:

$$C(\Theta) = Z_{Ph_s} \times P(\Theta) = Z_{Ph_s} \frac{\Theta^2}{3}, \quad (14)$$

which gives a general expression for the number of two-photon coincidences per second that can be detected:

$$C(\Theta) = \frac{Q(2q)D^2}{8\pi L^2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{D}{L}\right)^2 = \frac{Q(2q)}{24\pi} \times \left(\frac{D}{L}\right)^4. \quad (15)$$

For the solar corona we use a different approach to find the total number of emitted signal photons $Q(2q)/2$ per second and the observed two-photon coincidences C_\odot . In this case we integrate the local emission coefficient, taking into account the variations of temperature and density as a function of the distance from the surface of the Sun. To calculate the emission coefficient of the solar corona we consider only the Baker & Menzel (1938) Case B. From Kwok (2000) we have:

$$j_\nu^{2p}(L, y) = \frac{1}{4\pi} \times \frac{n_e^2(L) \alpha_B [T(L)]}{A_{2S,1^2S}} h y A_{2p}(y), \quad (16)$$

where $j_\nu^{2p}(L, y)$ is the local emission coefficient at a distance L from the center of the Sun, with its maximum value when $y = 0.75$, in units of energy per unit volume per unit time per unit solid angle per unit frequency. We assume that hydrogen is completely ionized i.e., $n_p = n_e$. The variable y is the ratio of the photon frequency to the Lyman-alpha frequency $\nu/\nu_{Ly\alpha}$; here $A_{2p}(y)$ is the two-photon transition probability distribution for which Kwok (2000) gives an approximated algebraic expression:

$$A_{2p}(y) = 202.0 \text{ s}^{-1} \left\{ y(1-y) \left[1 - (4y \{1-y\})^{0.8} \right] + 0.88 [y(1-y)]^{1.53} [4y(1-y)]^{0.8} \right\}. \quad (17)$$

Its corresponding curve is shown in Figure 1.

We apply the solar corona model for the electron density and temperature from Lang (1999) as a function of the distance L from the solar center with the variable $\zeta = L/R_\odot$, where $R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$ cm is the solar radius. We use the following expressions for the solar corona's electron density, for $1 \leq \zeta \leq 3.83$

$$n_e(\zeta) = 1.55 \times 10^8 \zeta^{-6} \times (1 + 1.93 \times \zeta^{-10}) \text{ cm}^{-3}, \quad (18)$$

and for $\zeta > 3.83$

$$n_e(\zeta) = 7.2 \times 10^5 \zeta^{-2} \text{ cm}^{-3}, \quad (19)$$

according to Lang (1999). The critical electron density can be obtained by using the total collisional transition rate coefficient from Osterbrock & Ferland (2006), $n_{e \text{ crit}} = 1.645 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$; for the solar corona's electron temperature we use the following expression:

$$T_e(\zeta) = \zeta^{-2/7} \times 10^6 \text{ K}. \quad (20)$$

The total recombination coefficient for case B (Brown & Mathews 1970) is:

$$\alpha_B(t) = 1.627 \times 10^{-13} t^{-1/2} (1 - 1.657 \log t + 0.584 t^{1/3}) \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}, \quad (21)$$

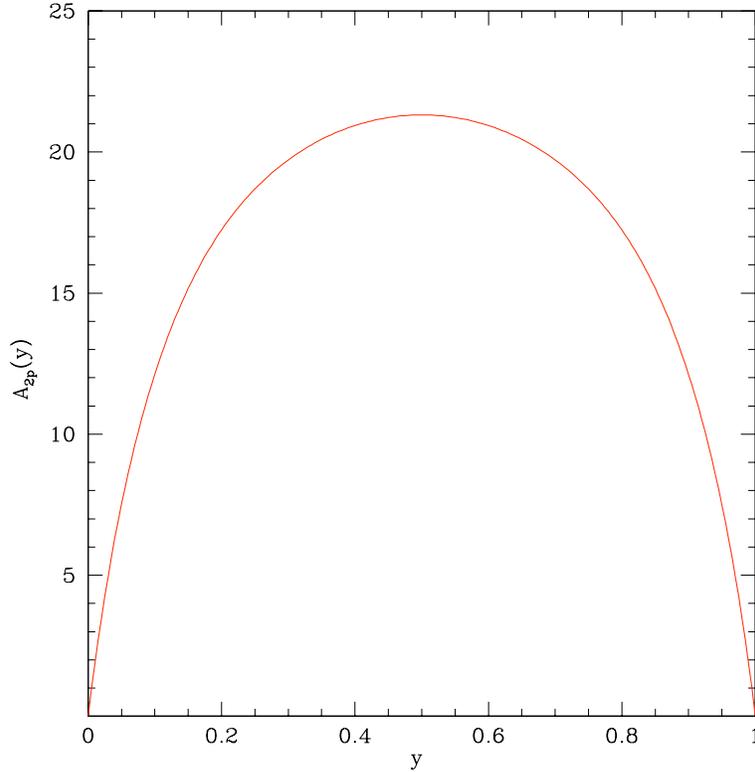


Fig. 1. Two-photon distribution for excited hydrogen. $A_{2p}(y)$ is the two-photon transition probability distribution, while y is the ratio of the photon frequency to the Lyman-alpha frequency.

where $t \equiv 10^{-4}T_e(\zeta)$. We use equation (21), with the help of equations (18), (19), and (20) and obtain

$$\alpha_B(\zeta) = 1.627 \times 10^{-13} (\zeta^{-2/7} \times 10^2)^{-1/2} \times \left[1 - 1.657 \log_{10}(\zeta^{-2/7} \times 10^2) + 0.584(\zeta^{-2/7} \times 10^2)^{1/3} \right] \text{cm}^3 \text{s}^{-1}. \quad (22)$$

The number of signal photons produced per second by the solar corona $Q(2q)/2$ can be obtained with the help of equations (16), and (22). We integrate the total contribution of signal photons by using equations (18) and (19) multiplying them by the electron density correction factor $F_e(\zeta) = (n_{e \text{ crit}} / (n_e(\zeta) + n_{e \text{ crit}}))$ from $\zeta = 1$ (surface of the sun) to a certain value of $\zeta = \zeta_l$. We obtain:

$$Q(2q) = 2 \int_{0.5}^1 \int_0^{4\pi} \int_{\zeta=1}^{\zeta=\zeta_l} \frac{4\pi R_\odot^3}{4\pi h\nu} \times F_e(\zeta) \times \left(\frac{\zeta^2 n_e^2(\zeta) \alpha_B(\zeta)}{A_{2^2S,1^2S}} \times hy A_{2p}(y) \right) dy d\Omega d\zeta. \quad (23)$$

When we integrate up to 1 A.U. ($\approx \zeta = 215$) we obtain $Q(2q) = 2.92 \times 10^{16} \text{photons} \cdot \text{s}^{-1}$. As we can see in Figure 2 the contribution of two-photon emission increases quickly at a distances close from the Sun's surface, at 10 radii from the Sun's surface we have about 95% of the total solar corona two-photon contribution and it slowly approaches the total value of $Q(2q) = 2.78 \times 10^{16}$. Therefore, for practical purposes we will integrate up to the limit value of $\zeta = 10$ in order to consider the solar corona as a distant object similarly as we have treated other ionized regions, and use equation (12) to obtain the minimum diameter of the detector on the surface of the earth.

5. RESULTS

For our calculations, we consider that the main contribution of photoionizing photons in the Orion H II region arises from the dominant O6 star θ^1 Ori C. From Osterbrock & Ferland (2006; see their Table 2.3) we obtain

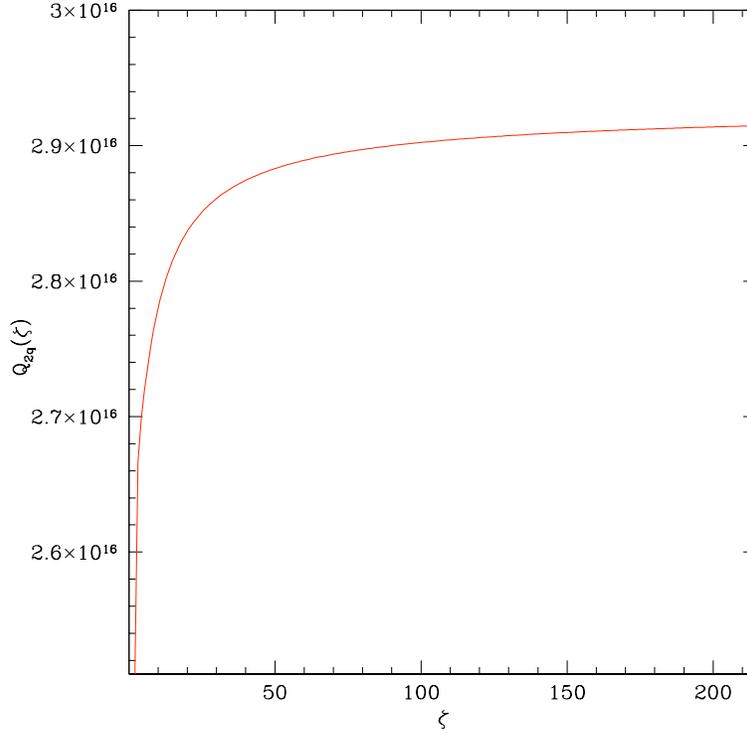


Fig. 2. Contribution of the two-photon emission as a function of ξ , the radii from the Sun's surface.

$Q(H^0) = 2.19 \times 10^{49}$ photoionizing photons s^{-1} . Taking $\xi = 0.53$ from Table 1, we obtain from equation (9), $Q(2q) = 1.16 \times 10^{49}$ photons s^{-1} . Adopting a distance to the Orion H II region of $L = 414 \text{ pc} = 1.28 \times 10^{21} \text{ cm}$ (Menten et al. 2007), we obtain $z_{Ph_s} = 2.83 \times 10^5 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. If, for example, the diameter of the receiver were $D = 1 \text{ km} = 1 \times 10^5 \text{ cm}$, we would be able to collect $Z_{Ph_s} = 2.22 \times 10^{15}$ signal photons per second. Although the number of detected signal photons per second will increase with the area of the detector, the number of two photon coincidences will decrease with the fourth power of the distance to the object. For the case of the Orion Nebula we estimate, from equation (15) that, in order to detect one two-photon coincidence per year we need a receiver of an approximate diameter of $D = 272 \text{ km}$.

In the case of the PNe we derive $Q(H^0)$ basically from the observed $H\beta$ flux measurements and the distance to the objects, using equation (10). The fraction ξ is obtained as before, from equation (8) for IC 2149 and NGC 7293. Table 1 shows the relevant astrophysical data for the PNe, and their calculations of $Q(H^0)$, obtained from equation (10), $Q(H^0)[\text{IC 2149}] = 3.41 \times 10^{46}$ photoionizing photons s^{-1} and $Q(H^0)[\text{NGC 7293}] = 3.43 \times 10^{45}$ photoionizing photons s^{-1} . Taking $\xi[\text{IC 2149}] = 0.55$ and $\xi[\text{NGC 7293}] = 0.57$ from Table 1; we obtain from equation (9), $Q(2q)[\text{IC 2149}] = 1.88 \times 10^{46}$ photons s^{-1} and $Q(2q)[\text{NGC 7293}] = 1.95 \times 10^{45}$ photons s^{-1} ; taking their distances from Table 1 we obtain their number of signal photons z_{Ph_s} which arrive on the earth per cm^2 per second, $z_{Ph_s}[\text{IC 2149}] = 3.12 \times 10^1 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ and $z_{Ph_s}[\text{NGC 7293}] = 3.31 \times 10^2 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. For the case of the PNe we estimate, from equation (15) that, in order to detect one two-photon coincidence per year, we need a receiver of an approximate diameters of $D = 5\,200 \text{ km}$ and $D = 906 \text{ km}$ for IC 2149 and NGC 7293 respectively as is shown in Table 2.

From equation (12) is easy to find a diameter of $D = 457 \text{ km}$ for the receiver that we would need to detect one coincidence per year from the solar corona, i.e., $C_{\odot}(\Theta) = 3.171 \times 10^{-8}$ per sec; this diameter is much larger than the one we have obtained for the Orion H II region (272 km) due to the fact that the Orion Nebula produces about 10^{32} times more two-photon emissions than the solar corona, although the latter is closer to the earth.

TABLE 2
RECEIVER DIAMETERS FOR ONE TWO-PHOTON COINCIDENCE
PER HOUR AND PER YEAR

Object	L	R_{PP} pairs s^{-1}	$D[1/y]^a$ km	$D[1/y]^b$ km	$D[1/hr]^b$ km
Orion Nebula	414 pc	5.8×10^{48}	272	785	7590
IC 2149	1585 pc	9.39×10^{45}	5200	14000	135000
NGC 7293	157 pc	9.77×10^{44}	906	1540	14900
Solar Corona	1 A.U.	1.46×10^{16}	457	457	4420

^aNo extinction.

^bSee text in § 6.

6. BASIC REQUIREMENTS FOR TWO-PHOTON COINCIDENCE DETECTION

In order to detect the coincidence of a pair of photons arising from a particular two-photon emission it is required that both photons not interact with anything during their travel towards us and that, once they arrive on the receiver, we be able to identify the actual two-photon pair, as distinct from spurious complementary pairs of photons (those which do not arise from the same two-photon pair). There are in total four required elements in the the two-photon detection: (i) production of the two-photon pair, (ii) permanence of the pair of photons, (iii) reception of the two-photon pairs, and (iv) identification of the two-photon pair. In the previous sections we have discussed (i) and (iii). With respect to the permanence of the entanglement of the two-photon pair, we can consider two causes of annihilation of at least one photon from a traveling two-photon pair of photons are: (a) line absorption from the ISM and (b) absorption and scattering by dust by the ISM.

Regarding the line absorption from a continuous emission from $\lambda = 1216 \text{ \AA}$ to $\lambda \rightarrow \infty$, we can safely conclude by looking into any UV, optical or IR spectrum that the line absorptions from the ISM will not be more than 10% of the total emission intensity. Therefore, it will be an irrelevant effect in the reception of the two-photon pairs. With respect to the absorption and scattering by dust in the ISM, the size of the interstellar grains is, in general, very small and will affect more the UV radiation than other, less energetic, ones. Without going into extreme detail as to the shape of the reddening function (i.e. assuming $A(\lambda) \propto \lambda^{-1}$), the extinction for a 2432 \AA photon $A(2432) \approx 2A_V$, where $A_V = -2.5c f(V)$ where c is the reddening logarithmic correction, and $f(V)$ is the optical depth function. In order to detect a coincidence both photons are required to “survive” the dust. In a pair where each photon has approximately half the energy each one would face an extinction $A(\lambda) \approx 2A_V$; the probability of “survival” of both is equivalent to having a single photon going through twice the amount of dust, that is: the pair is facing the equivalent of $4A_V$. If we consider an entangled pair of photons with non-identical wavelengths we will find that the total extinction the pair has to face does not change much, remaining close to $4A_V$. Therefore, even a moderate extinction can become important and would increase the required size of the receiver by a factor of 10^c , because $f(V) \approx 1$ (notice that the factor of 4 that multiplies A_V , will cancel with the power of 4 associated with the receiver’s diameter). Therefore. the photons that were produced from the Orion Nebula and PNe will be affected by a noticeable amount, while those from the solar corona are largely unaffected. Also, the required sizes for the receivers for the extra solar objects will need to be larger by at least a factor of 2 making the solar corona the best object to detect coincidences.

One great advantage in considering entangled photons is that they do not undergo decoherence and they can travel over free space for long distances keeping their entanglement as is mentioned in Fedrizzi et al. (2009).

We have discussed the production, permanence, and reception of the two-photon pair; what remains to be discussed is the identification of the actual pair. The problem of the identification of the entangled pair, although a difficult task due the huge number of arriving photons, could be solved by a similar set-up (on a larger scale) as shown in Fedrizzi et al. (2009), where they detect the entangled pair of photons that travel long distances in the same direction by using a system of beam splitters, polarizing beam splitters, polarization analyzers, and a charge coupled device (CCD), which allow to measure the coincidences between detectors in order to test the violation of CHSH Bell’s inequality that indicates the detection of an entangled pair.

In our case we have the complementarity of frequencies of the photon pair which helps also to identify a genuine entangled pair; therefore we have three stages in the process of entanglement identification: (a) the pair of photons should arrive simultaneously (very narrow time uncertainty), (b) their frequencies should be complementary, which can be analyzed by a system of diffraction gratings (spectrographs), and finally (c) a combination of beam splitters, polarization analyzers, and a CCD should be used to test the violation of CHSH Bell's inequality.

7. CONCLUSIONS

The most feasible kind of quantum entanglement that can be detected in the Universe is the two-photon spontaneous transition of the hydrogen $2^2S_{1/2}$ metastable level; the pair of photons keep their entanglement during their travel unless at least one of them is measured or interacts with another atom or dust particle from the ISM.

We have obtained, by different methods, the two-photon emission rate R_{PP} from of four astrophysical objects: the Orion Nebula, two nearby PNe (IC 2149 and NGC 7293), and the solar corona. Their corresponding values are 5.80×10^{48} , 9.39×10^{45} , 9.77×10^{44} , and 1.46×10^{16} pairs of photons per second respectively. The Orion Nebula, even though it is at a distance of 414 pc, would be the best candidate to receive the two-photon coincidences due to the huge amount of photoionizations produced in the hydrogen gas; however, because of the presence of ISM the chances that at least one of the photons of the entangled pair interacts with a particle are higher than in the case of the solar corona for which there is practically no extinction; therefore the solar corona is the best object to detect the entangled pair of photons.

We calculated the the minimum sizes of the receiver diameters D for each of the two-photon coincidence detection astrophysical objects; for one coincidence per year and without extinction we obtained 272 km and 457 km for the Orion Nebula and the solar corona respectively and 906 and 5 200 km for NGC 7293 and IC 2149 respectively. When we include the ISM extinction the diameters are increased by a 10^c factor except for the solar corona due its closeness to the earth and to the low density of the ISM surrounding the earth. Such calculations demonstrate that the best astrophysical object to detect two-photon coincidences is the solar corona. Also the possibility exists of placing receivers closer to the Sun that can observe the object from different angles, which would remove the restriction we have that $\alpha \approx 0^\circ$ for most other astronomical objects. Because the kind of radiation that we are mostly interested is in the UV region, we have considered space receivers. Although we have explored the possibilities of two-photon detection, we do not think that the proposed size level (about 457 km for the solar corona) could be realistically reached even in the foreseeable future.

We would like to thank the anonymous referee for a careful review of this paper, which has resulted in a much improved version. We would also like to thank Manuel Peimbert and Rafael Costero for their expert advice regarding the photoionization from the Orion Nebula, and also many colleagues of the Instituto de Astronomía, for their invaluable advice and suggestions.

REFERENCES

- Aspect, A. 1999, *Nature*, 398, 189
 Aspect, A., Dalibard, J., & Roger, G. 1982, *Phys. Rev. Lett.*, 49, 1804
 Baker, J. G., & Menzel, D. H. 1938, *ApJ*, 88, 52
 Bell, J. S. 1964, *Physics*, 1, 195
 Biermann, S., Scully, M. O., & Toor, A. H. 1997, *Phys. Scr.*, T72, 45
 Bohm, D. 1951, *Quantum Theory* (New York: Prentice-Hall)
 Breit, G., & Teller, E. 1940, *ApJ*, 91, 215
 Brown, R. L., & Mathews, W. G. 1970, *ApJ*, 160, 939
 Cahn, J. H. 1976, *AJ*, 81, 407
 Cahn, J. H., Kaler, J. B., & Stanghellini, L. 1992, *A&AS*, 94, 399
 Casassus, S., Readhead, A. C. S., Pearson, T. J., Nyman, L. A., Shepherd, M. C., & Bronfman, L. 2003 (*astro-ph/0312021v1*)
 Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., & Holt, R. A. 1969, *Phys. Rev. Lett.*, 23, 880
 Clauser, J. F., & Shimony, A. 1978, *Rep. Prog. Phys.*, 41, 1881
 Costero, R., & Peimbert, M. 1970, *Bol. Obs. Tonanzintla y Tacubaya*, 5, 229
 Duncan, A. J., Sheikh, Z. A., Beyer, H. J., & Kleinpoppen, H. 1997, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 30, 1347
 Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. 1935, *Phys. Rev.*, 47, 777
 Fedrizzi, A., et al. 2009, *Nature Phys.*, 5, 389

- Feynmann, R. 1965, *The Feynmann Lectures on Physics*, Vol. III (Reading: Addison-Wesley)
- Freedman, S. J., & Clouser, J. F. 1972, *Phys. Rev. Lett.*, 28, 938
- Fry, E. S., & Thompson, R. C. 1976, *Phys. Rev. Lett.*, 37, 465
- Göpert-Mayer, M. 1931, *Ann. Phys.*, 9, 273
- Gurzadyan, G. A. 1976, *PASP*, 88, 891
- Kleinpoppen, H., Duncan, A. J., Beyer, H. J., & Sheikh, Z. A. 1998, *An International Journal for Physical and Engineering Sciences*, 51, (Berlin: Springer), 41
- Kwok, S. 2000, *The Origin and Evolution of Planetary Nebulae* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Lamehi-Rachti, M., & Mittig, W. 1976, *Phys. Rev. D*, 14, 2543
- Lang, K. R. 1999, *Astrophysical Formulae*, Vols. I & II (3rd ed.; Berlin: Springer-Verlag)
- Mandel, L., & Wolf, E. 1995, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Menten, K. M., Reid, M. J., Forbrich, J., & Brunthaler, A. 2007, *A&A*, 474, 515
- Novick, R. 1969, *Physics of One and Two-Electron Atoms*, ed. F. Bopp, & H. Kleinpoppen (Amsterdam: North Holland), 296
- Osterbrock, D. E., & Ferland, G. J. 2006, *Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei* (2nd. ed.; Cambridge: Cambridge Univ. Press)
- Peres, A. 1995, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Dordrecht: Kluwer)
- Shimony, A. 1971, *Foundations of Quantum Mechanics*, ed. B. d'Espagnat (New York: Academic Press), 182
- Spitzer, L., & Greenstein, J. 1951, *ApJ*, 114, 407
- Warner, J. W., & Rubin, V. C. 1975, *ApJ*, 198, 593
- Weihs, G., Jennewein, T., Simon, C., Weinfurter, H., & Zeilinger, A. 1998, *Phys. Rev. Lett.*, 81, 5039