



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MODELO DE FLUJO BILINEAL CON TRANSFERENCIA INTERPOROSA TRANSITORIA

T E S I S

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO PETROLERO**

**P R E S E N T A:
ALEX RODRIGO VALDÉS PÉREZ**

**DIRECTOR DE TESIS:
M.I. HÉCTOR PULIDO BELLO**

México D.F., Enero de 2010





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*“...creo firmemente que la hora más preciada
de cualquier hombre
-el mayor logro de todo aquello que considera
importante -,
es cuando después de haber trabajado hasta
el cansancio
por una buena causa, se recuesta en el
campo de batalla agotado y,
¡victorioso!”*

Vince Lombardi

DEDICATORIA

A mi abuelo, Arturo Valdés Galán (q.e.p.d.), un triunfador, que hizo triunfadores, cuyo sabio consejo una mañana de diciembre de 2005 fue una de las grandes razones por las cuales hoy me encuentro en estas instancias.

A mis padres Ismael Valdés Maltos y Marta Pérez Suaste, cuyo ejemplo de integridad, valentía y coraje han sido mi inspiración y modelo a seguir para la consecución de todas mis metas.

A mis hermanos Karina e Iván, quienes han sabido apoyarme y orientarme incondicionalmente en momentos cruciales y difíciles de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A la parte de mi familia, de la cual recibí apoyo, en especial a mi abuela Josefina Maltos y a mis tíos Raúl, Florencio y Rosalinda Valdés Maltos, cuyo soporte y preocupación sentí real y sincero.

A uno de los mejores y más leales seres humanos que he conocido, Norma De Antuñano, quién me enseñó a ser feliz en el camino de la vida, sin esperar a llegar a una determinada instancia para comenzar a serlo; a los hermanos que me ha dado el destino, Adrián Serrano, Oguer Acevedo, Tania Muciño, Jaime Ramos y Alberto Inclán, por ayudarme a crecer a su lado y por las enseñanzas que directa e indirectamente recibí de ellos.

A la UNAM y a la Facultad de Ingeniería, mi Alma Máter, por abrirme sus puertas y proveerme de la mejor educación que se puede tener en toda América Latina (y quizá también en la península Ibérica), y por darme la oportunidad de conocer grandes amigos y profesores.

Al M.I. Héctor Pulido Bello, por el tema de tesis propuesto, por ser mi mentor y por ser de los pocos profesores que tuve, que mostraron ser fieles a sus ideales y principios; al Dr. Rafael Rodríguez Nieto, de los pocos profesores que realmente asumen la responsabilidad de forjar ingenieros con una formación integral; al M.I. José Ángel Gómez Cabrera, cuyas enseñanzas y reflexiones, me han permitido tener una visión crítica acerca de la industria petrolera nacional; al Ing. Ricardo Martínez, por los conocimientos adquiridos de él; a los ingenieros Guadalupe Galicia y Felipe Díaz, por su ayuda y comentarios acerca de la presente tesis; al Ing. Marco Aurelio Torres Herrera, por enseñarme el valor de las humanidades en la ingeniería y en la vida, así como la importancia de la palabra: "...los tiempos cambian, pero las formas de...".

A los grandes amigos que conocí en la FI-UNAM, Eder “Flaquita” Santamaría, Iván Pérez Hernández, Anabel Lorenzana, Jorge “Moby” García, Carlos Gallardo, Pamela “Choriza” Maldonado, Víctor “Juanito (o Pimpon)” López, Pablo “Panda” De La Torre, Julián “Gronda” Mata, cuya amistad me acompañó a lo largo de mi estancia en esta escuela, siempre contarán conmigo como incondicional soporte.

A mis sinodales, el Dr. Fernando Samaniego, el M.I. Héctor Pulido, el Dr. Rafael Rodríguez, el Ing. Israel Castro y el Dr. Erick Luna, por su tiempo en la revisión de esta tesis y por sus acertadas observaciones.

Finalmente, a los pésimos profesores que tuve (cuatro, para ser exacto), a veces por su carencia de conocimientos, otras por su arrogante personalidad y/u obtusa mentalidad, cuyos nombres no menciono por respeto, quienes me mostraron cómo no es la manera a la que quiero llegar a ser.

ÍNDICE

Lista de Figuras	iii
Objetivo	v
Resumen	vii
Introducción	1
Capítulo I. Conceptos básicos	5
Capítulo II. Revisión de la literatura	27
Capítulo III. Modelo propuesto	33
Capítulo IV. Validación del modelo propuesto	41
Capítulo V. Análisis de la presión en pozos fracturados	51
Capítulo VI. Conclusiones y recomendaciones	83
Nomenclatura	85
Bibliografía y referencias	87
Apéndice A. Funciones especiales	93
Apéndice B. Derivación y solución de la ecuación de difusión para flujo lineal	117
Apéndice C. Ecuación de difusión para flujo bilineal con transferencia interporosa libre	135
Apéndice D. Ecuación de difusión para flujo bilineal con transferencia interporosa pseudoestacionaria	159
Apéndice E. Modelado del daño interporoso	179
Apéndice F. Algoritmo de Stehfest	185

LISTA DE FIGURAS

Figura I.1. Volumen total de roca.	5
Figura I.2. Esquema de la zona dañada interporosa.	7
Figura I.3. Representación del sistema matriz-fractura.	19
Figura I.4. Comportamiento de la viscosidad contra la presión a temperatura constante.	24
Figura I.5. Comportamiento de la viscosidad contra la temperatura a presión constante.	25
Figura IV.1. Soluciones analíticas al modelo de Cinco-Ley y Samaniego.	48
Figura IV.2. Ajuste del modelo propuesto al modelo de Cinco-Ley y Samaniego.	49
Figura IV.3. Análisis de sensibilidad del daño S_{fb-df} , para p_{wD} contra t_D .	50
Figura IV.4. Análisis de sensibilidad del daño S_{fb-df} , para $\frac{dp_{wD}}{d \ln(t_D)}$ contra t_D .	50
Figura IV.5. Ajuste del análisis de sensibilidad con las soluciones de Cinco-Ley y Samaniego para p_{wD} contra t_D .	51
Figura V.1. Pozo que atraviesa una fractura vertical de conductividad finita penetrada totalmente.	54
Figura V.2. Gráfica log-log de los casos típicos para pozos fracturados.	56
Figura V.3. Períodos de flujo para un pozo fracturado verticalmente.	57
Figura V.4. p_{wD} vs $\sqrt[4]{t_{Dxf}}$ para un pozo con una fractura vertical que tiene conductividad finita.	60
Figura V.5. Tiempo adimensional para el final del período de flujo bilineal contra la conductividad adimensional de la fractura.	61
Figura V.6. Gráfica log-log de datos de presión para flujo bilineal.	63
Figura V.7. Gráfica para el análisis de la presión del flujo bilineal.	64
Figura V.8. Gráfica para flujo bilineal en una fractura con una restricción de flujo cerca de la vecindad del pozo.	65
Figura V.9. Efecto del almacenamiento en la gráfica del flujo bilineal.	66
Figura V.10. Curvas tipo para pozos verticalmente fracturados.	68

Figura V.11. Curva tipo para almacenamiento bajo condiciones de flujo bilineal.	72
Figura V.12. Ajuste de la curva tipo para datos de flujo bilineal y transitorio.	73
Figura V.13. Datos de presión para una recta en una gráfica log-log.	75
Figura V.14. Radio de drene efectivo contra la conductividad de una fractura vertical.	76
Figura V.15. Curva tipo para una fractura vertical con conductividad finita.	77
Figura V.16. Ajuste de la curva tipo para el pozo C.	79
Figura V.17. Gráfica semilog para el pozo C.	80
Figura A.1. Gráfica cartesiana de las funciones erf y erfc.	96
Figura A.2. Gráfica log-log de las funciones erf y erfc.	96
Figura A.3. Gráfica cartesiana de la Función Gamma.	102
Figura A.4. Gráfica log-log de la Función Gamma.	102
Figura A.5. Gráfica de la función Digamma	107
Figura A.6. Gráfica de la Función Bessel de primer tipo, $J(x)$, a diferentes órdenes.	112
Figura B.1. Flujo lineal en el volumen de control.	117
Figura B.2: Distribución de presión en un yacimiento.	123
Figura C.1. Volumen de control con fronteras horizontales impermeables (caras $\Delta x \cdot \Delta z$).	135
Figura C.2. Flujo bilineal en el volumen de control.	136
Figura D.1. Volumen de control para el desarrollo del modelo de Warren y Root.	159
Figura E.1. Esquema del flujo en una fractura dominante con aporte de la formación fracturada.	179
Figura E.2. Comportamiento de la Tangente Hiperbólica.	183

OBJETIVO

Los yacimientos naturalmente fracturados constituyen el tipo de yacimiento más común en todo el mundo: por otra parte, las operaciones de fracturamiento hidráulico se emplean comúnmente, creándose la necesidad de un mejor entendimiento del flujo cerca de los pozos en ambientes fracturados. El costo de las operaciones de fracturamiento y el impacto que tienen los yacimientos naturalmente fracturados en el ámbito petrolero incrementan la importancia de las herramientas de diagnóstico para analizar las fracturas presentes en los pozos y en los yacimientos.

Es propósito del presente trabajo analizar el comportamiento de un yacimiento en régimen transitorio con un pozo penetrado parcialmente una fractura vertical dominante de conductividad finita.

En los resultados generados aquí se espera proveer nuevas herramientas para el análisis y evaluación de los yacimientos naturalmente fracturados, así como en operaciones de fracturamiento.

RESUMEN

Se presenta un nuevo modelo para analizar datos de presión transitoria para pozos interceptados por una fractura vertical dominante con conductividad finita. Este modelo se basa en la teoría de flujo bilineal, la cual considera flujo lineal transitorio con aporte matricial en la fractura y flujo lineal sin fuentes ni sumideros en la formación, con un daño interporoso entre una formación fracturada y una fractura dominante.

Se demuestra que una gráfica de p_{wf} vs $t^{1/4}$ produce una línea recta, cuya pendiente es inversamente proporcional a $h_f (k_{df} b_{df})^{1/4}$.

El nuevo modelo considera un daño en la interfase matriz-fractura dominante y modelo toma como base principalmente los modelos propuestos por Warren y Root (1963) y Cinco y Samaniego (1981), para el modelado del flujo hacia pozos hidráulicamente fracturados. El tipo de sistemas que se estudian son soluciones particulares a las respuestas de la presión transitoria de los pozos produciendo a un gasto constante. En el análisis se demuestra bajo qué condiciones el modelo propuesto converge a los modelos de Warren y Root y Cinco y Samaniego.

Además, se discuten técnicas basadas en los datos obtenidos de pruebas de presión, las cuales tienen por finalidad obtener parámetros como la conductividad de la fractura, longitud media de la fractura, permeabilidad al aceite, así como los tiempos en los que inician y finalizan los períodos de flujo lineal en la formación, bilineal y pseudoradial.

En los diferentes apéndices se muestran las funciones matemáticas y el desarrollo de los modelos para el entendimiento de la presente tesis.

INTRODUCCIÓN

Panorama nacional

Al inicio del año 2009, México reportó una reserva probada de 10,404.2 millones de barriles de crudo, que lo ubica en el décimo séptimo lugar a nivel mundial (considerando condensados y líquidos del gas natural); de la reserva probada, 7,638.6 son reservas probadas desarrolladas. En el mismo año, Petróleos Mexicanos (PEMEX) a través de su portal electrónico el día 09 de septiembre, informó que su producción, en promedio ha sido de 2.989 millones de barriles diarios de aceite.

De acuerdo con los datos proporcionados por la paraestatal, sin considerar nuevas incorporaciones de reservas y considerando únicamente la reserva probada desarrollada, al 09 de septiembre de 2009, México cuenta con 7,052.7 millones de barriles de petróleo como reserva probada desarrollada. De seguir la tendencia, y haciendo las mismas consideraciones, el país podría comenzar el año 2010 con una reserva probada desarrollada de 6,547.6 millones de barriles de aceite crudo, lo que daría lo suficiente para seguir siendo productores durante seis años más aproximadamente. Por lo anterior, es necesaria la incorporación de reservas para sostener la producción de hidrocarburos.

Definición e impacto de las Caracterizaciones Estática y Dinámica de Yacimientos

De acuerdo con su definición, las reservas probadas dependen del precio de los hidrocarburos; dependen también en gran medida de datos geológicos y de ingeniería. Datos como la permeabilidad, porosidad, radios de drene, entre otros parámetros, influyen fuertemente para determinar la recuperación de los hidrocarburos. Los parámetros anteriores pueden ser determinados a través de las caracterizaciones estática y dinámica de yacimientos.

La caracterización estática de yacimientos (CEY) consiste en el análisis de información sísmica, geológica, núcleos y registros de pozo. Se le asigna el nombre de “estática”, porque los resultados son independientes de los procesos generados durante la explotación de un determinado yacimiento.

La caracterización dinámica de yacimientos (CDY) tiene por objetivo el determinar y evaluar los parámetros que controlan el movimiento de los fluidos dentro del yacimiento, con base en una caracterización estática preestablecida. La fuente principal generadora de información para la CDY, son los datos generados por las pruebas de presión (incremento, decremento, interferencia, *fall off*, etc.), historias de producción y presiones estática, de aforos, de cambios de intervalos, así como nuevos pozos de desarrollo, etc.

Importancia de la Caracterización Dinámica de Yacimientos en los Yacimientos Naturalmente Fracturados

Del total de reservas probadas desarrolladas, el 94.66 por ciento se encuentran en Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF), de ahí la necesidad del estudio de este tipo de yacimientos. Para realizar una caracterización de los YNF se utilizan mayoritariamente métodos pertenecientes a la CDY, pues como se mencionó anteriormente, la CEY se basa principalmente en la obtención de núcleos, mismos que en YNF tienen recuperaciones menores al 30 por ciento, lo que no puede proporcionarnos un valor representativo de características como la permeabilidad o la porosidad.

Por lo anterior, el desarrollo de herramientas que ayuden a la caracterización de un yacimiento a través de pruebas de presión, que sirvan para la definición de éstos y otros parámetros que coadyuven a tener un modelo, que se ajuste lo más posible a la realidad y de esta manera tener una simulación numérica de yacimientos adecuada y una mayor incorporación de reservas.

Importancia de la geometría de flujo bilineal

La geometría de flujo bilineal es recurrente en las fracturas, ya sean hidráulicas o las presentes en los YNF; dicha geometría no ha sido estudiada con tanta profundidad como debería, debido a su relevancia en éste tipo de yacimientos que son lo que tienen mayor presencia a nivel nacional (y mundial), así como su utilidad para la evaluación de operaciones de fracturamiento hidráulico.

Esta geometría de flujo se definirá y comentará con mayor detalle en el Capítulo I.

Resumen del modelo propuesto

El modelo que se presentará es una “conexión” entre los modelos de los flujos lineal y bilineal; se presenta el impacto que tiene el daño existente entre la formación fracturada y la fractura dominante en la caída de presión. Se demuestra que cuando dicho daño es cero el modelo se ajusta a la perfección al modelo de flujo bilineal y cuando tiende a ser muy grande, el modelo converge al modelo de flujo lineal.

CAPÍTULO I CONCEPTOS BÁSICOS

Para comprender plenamente la presente tesis, se definirán los conceptos, cuyo conocimiento previo es conveniente para ello.

POROSIDAD:

Para definir los conceptos de porosidad que se utilizarán en esta tesis, es necesario definir primero un volumen de roca:

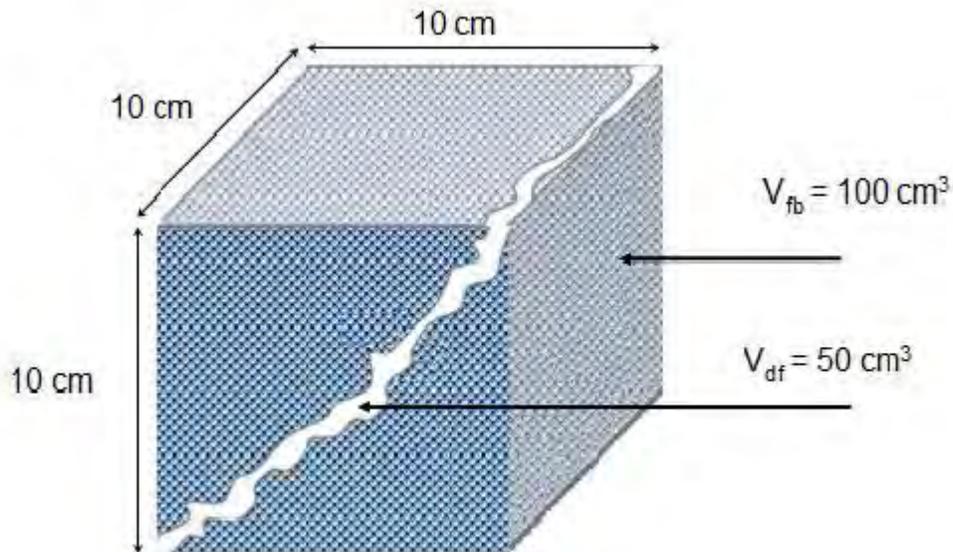


Figura I.1. Volumen total de roca.

Volumen total de roca: Está constituido por la suma de todos los elementos que conforman la roca, es decir, el volumen de sólidos (V_s), más el volumen de huecos (volumen poroso) de la formación fracturada (V_{fb}) más el volumen poroso de la fractura dominante (V_{df}):

$$V_{tr} = V_s + V_{fb} + V_{df}.$$

Para la **Figura I.1** el volumen total de roca es:

$$V_{tr} = L \times L \times L = 10 \times 10 \times 10 = 1,000 [cm^3],$$

por lo que el volumen de sólidos contenidos en ella es:

$$V_s = V_{tr} - V_{fb} - V_{df} = 1,000 - 100 - 50 = 850 [cm^3].$$

Porosidad total ϕ_t : es la relación del volumen total de huecos (poros) presentes en la roca entre el volumen total de la roca, representado en fracción:

$$\phi_t = \frac{\text{volumen total de huecos en la roca}}{\text{volumen total de roca}} = \frac{V_p}{V_r}.$$

Para la **Figura I.1**:

$$\phi_t = \frac{V_{fb} + V_{df}}{V_{tr}} = \frac{(100 + 50) [cm^3]}{1,000 [cm^3]} = 0.15.$$

La porosidad puede catalogarse en varios tipos, para efectos de esta tesis únicamente se consideran y definirán las porosidades primaria y secundaria.

Porosidad primaria (matricial): es la porosidad intergranular y controlada por depositación y litificación. Está altamente interconectada y usualmente puede ser correlacionada con la permeabilidad, pues es ampliamente dependiente de la geometría, distribución del tamaño, y distribución espacial de los granos. Este tipo de porosidad también es conocida como matricial. Para la presente tesis, se definirá como porosidad de la formación fracturada (ϕ_{fb}).

La porosidad de la formación fracturada para la **Figura I.1** es:

$$\phi_{fb} = \frac{V_{fb}}{V_{tr}} = \frac{100 [cm^3]}{1,000 [cm^3]} = 0.1.$$

Porosidad Secundaria (vúgulos y fracturas): está formada por fracturas, cabalgaduras y/o soluciones en el agua que circula, aunque puede ser modificarse por

un relleno como resultado de la precipitación. No está altamente interconectada y por lo regular no puede ser correlacionada con la permeabilidad. Los canales de solución o huecos vugulares se desarrollaron durante la erosión o sepultamiento en las bases sedimentarias autóctonas de los carbonatos como calizas o dolomías. Las fisuras que ocurren de manera masiva en formaciones extensas compuestas de lutitas, limolitas, esquistos, calizas o dolomías, son generalmente verticales y puede atribuirse a fallas durante deformaciones mecánicas (la permeabilidad asociada con este tipo de sistemas porosos, es a menudo isótropa). Las grietas son el resultado de un proceso químico (dolomitización) y no poseen alguna orientación recurrente. Este tipo de fracturas se conoce también como porosidad de fractura, y para esta tesis se le dará el nombre de porosidad de la fractura dominante (ϕ_{df}).

La porosidad de la fractura dominante para la Figura I.1 es:

$$\phi_{df} = \frac{V_{df}}{V_{tr}} \frac{50[cm^3]}{1,000[cm^3]} = 0.05.$$

Fractura: es toda ruptura en una roca, generando una superficie, a lo largo de la cual hay una pérdida de cohesión, con o sin desplazamiento. Estas rupturas son causadas por fuerzas tectónicas (tensión o compresión) o por cambios de temperatura por alargamiento o por lixiviación (proceso de lavado del suelo por filtración de agua) en el plano de estratificación.

Fractura dominante: debido a que en una formación pueden existir pequeñas rupturas y/o microfracturas, se define como fractura dominante, a una fractura de gran tamaño que es atravesada por un pozo.

Porosidad de la zona dañada interporosa (ϕ_d): considérese el esquema siguiente:

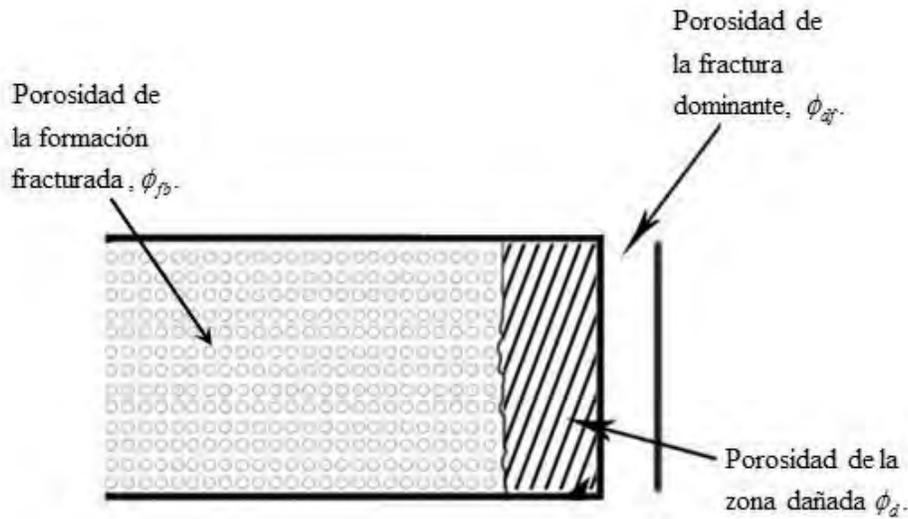


Figura I.2. Esquema de la zona dañada interporosa.

La porosidad de la zona dañada interporosa corresponde a una parte de la roca que ha sido afectada por algún agente, el cual altera sus propiedades. El término daño interporoso, es causado por mineralización, creando una película entre la formación fracturada y la fractura dominante. El rango de la porosidad en la zona interporosa dañada, considerando una disminución en el volumen poroso en dicha zona, deberá ser menor a las porosidades de la formación fracturada y la fractura dominante:

$$\phi_d \leq \phi_{df} \leq \phi_{fb}.$$

Permeabilidad: es la capacidad que tiene un medio poroso para permitir el flujo de fluido a través de él. Esta propiedad puede ser determinada a partir de la ley de Darcy, por ello sus unidades son los darcies $[D]$ o los milidarcies $[mD]$:

$$k = \frac{q\mu \Delta P}{A \Delta L}.$$

Al igual que con la porosidad, existen varios tipos de permeabilidad. Las permeabilidades que se utilizarán para esta tesis serán: permeabilidad de la fractura dominante (k_{df}) y permeabilidad de la formación fracturada (k_{fb}).

Permeabilidad de la fractura dominante k_{df} : es la capacidad que tiene la fractura dominante de un sistema para permitir el flujo de fluidos a través de ella.

Permeabilidad de la formación fracturada k_{fb} : es la capacidad que tiene la formación fracturada para permitir el flujo de fluido a través de ella.

Permeabilidad de la zona dañada interporosa k_d : es la capacidad que tiene la zona dañada interporosa para permitir el flujo de fluido a través de ella, véase **Figura I.2**.

Almacenamiento en el pozo: La práctica ha mostrado que el volumen finito del pozo y el fluido dentro del pozo, afectan las presiones medidas en el mismo.

Por ejemplo, si el pozo es cerrado en la superficie, el gasto en la cara de la formación, q_{sf} , no se detiene inmediatamente y el fluido continua entrando al agujero hasta que la presión ejercida por los fluidos almacenados sea suficientemente grande para detener efectivamente el flujo de la formación. Este efecto es conocido como almacenamiento en el pozo.

El almacenamiento de pozo es referido como una post-producción o una descarga, ambos términos son apropiados únicamente para especificar situaciones. La post-producción se refiere al flujo a través de la cara de la formación durante las condiciones de cierre, mientras que la descarga se refiere a una liberación del fluido durante el decremento.

Cuando un pozo se abre en la superficie, el gasto en la superficie, “ q ”, inicialmente es debido a la descarga del pozo. Como esa descarga gradualmente disminuye a cero, el flujo en la formación se incrementa de cero a “ q ”. Por consiguiente, un gasto constante en la superficie es la suma de dos gastos que cambian en sentidos opuestos, esto es, la descarga del pozo que disminuye más el flujo de la formación que aumenta.

El efecto de almacenamiento de pozo esta asociado con un gasto en la formación que varía continuamente.

La constante de almacenamiento, C , esta definida por:

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

de donde:

C = Constante de almacenamiento, b/psi.

ΔV = Cambio de volumen de fluido en el pozo, a las condiciones medias del pozo, barriles.

Δp = Es el cambio en la presión de fondo, psi.

El almacenamiento de pozo puede originarse de varias maneras. Los ejemplos más comunes son la compresión del fluido y el movimiento de una interfase gas-liquido. Estos dos efectos se verán a continuación con cierto detalle para entender la naturaleza fundamental de almacenamiento de pozo.

Si una parte del fluido producido en el cabezal del pozo se origina por la descarga del mismo, el resultado de la producción del fluido puede ser una caída del nivel del líquido en el espacio anular entre la tubería de producción y la tubería de revestimiento. Esta situación ocurre se abre a producción un pozo con bombeo mecánico sin empacador. El volumen del fluido descargado del espacio anular por unidad de caída de presión en la cara de la arena aproximadamente será constante, esto es:

$$C = \frac{V_u}{\frac{\rho g}{144 g_c}}, \quad (1.1)$$

la cual es una ecuación válida para columnas de liquido, subiendo o bajando (pozo llenándose o descargándose), de donde:

V_u = Capacidad volumétrica del pozo en *bls / pie*.

ρ = Es la densidad del fluido en el pozo en lbm / pie^3 .

g = Es la aceleración debida al a gravedad en pie / seg^2 .

g_c = Es una constante de conversión e igual a $32.17 \frac{lbm / pie}{lbf \cdot seg^2}$.

C = Es la constante de almacenamiento en bls / psi .

Si el pozo está completamente lleno de un líquido bajosaturado o gas (fluido en una fase), la producción del fluido producido del pozo por unidad de caída de presión aproximadamente también será constante,

$$C = V_w c, \quad (1.2)$$

donde V_w es el volumen total del pozo en barriles y c es la compresibilidad isotérmica del fluido en el pozo, en psi^{-1} .

Nótese que la compresibilidad del fluido debe ser evaluada a la temperatura media del pozo y no a la temperatura de la formación. En las ecuaciones (1.1) y (1.2) se señala que C es una constante. Realmente esto no es así, ya que la compresibilidad del fluido depende de la presión; la constante de almacenamiento puede variar con la presión. Afortunadamente, tal variación en la constante de almacenamiento solamente es importante en pozos de gas o en pozos con un nivel de líquido variable durante la prueba.

Frecuentemente el coeficiente de almacenamiento de un pozo no es constante a lo largo de una prueba de transmisión de presión. Los cambios repentinos en el coeficiente de almacenamiento son fáciles de visualizar y ocurren con relativa frecuencia. Cuando un pozo inyector con alta presión en la cabeza del pozo es cerrado para una prueba "falloff" la presión en la cabeza del pozo permanece alta inmediatamente después del cierre, sin embargo, unos minutos después, la presión de fondo cae por debajo de la presión hidrostática, el nivel comienza a caer y forma un vacío; cuando esto sucede, el coeficiente de almacenamiento se incrementa de un

coeficiente por compresión de fluido, ecuación (I.1) a otro por caída de nivel de líquido, ecuación (I.2).

El cambio puede ser por un factor de 100 o más. Una disminución del coeficiente de almacenamiento puede ocurrir durante una prueba de incremento de presión en un pozo productor con bombeo mecánico. Considérese un pozo productor con una, que puede causar una disminución en el coeficiente de almacenamiento. Mientras el pozo esta bombeando, el nivel del líquido es bajo inmediatamente después del cierre, pero sube cuando la presión aumenta. Cuando el nivel del líquido alcanza al empacador (ahí puede existir un pequeño amortiguador de gas), el coeficiente de almacenamiento cae de un valor relativamente grande por un nivel de líquido variable a un valor relativamente pequeño por compresión.

El almacenamiento en el pozo puede ser representarse por variables adimensionales (las cuales son comentadas con más detalle más adelante en este mismo capítulo) C_D , fue definido por Van Everdingen y Hurst como sigue:

$$C_D = \frac{c}{2\pi\phi h c_i r_w^2},$$

donde: c (pie^3/psi), ϕ (fracción), h (pie), c_i (psi^{-1}) y r_w (pie).

La ecuación anterior se transforma en la siguiente cuando se utiliza C en (b/psi).

$$C_D = \frac{5.615C}{2\pi\phi h c_i r_w^2}.$$

Para considerar los efectos del almacenamiento de pozos y del factor de daño, la ecuación de difusión debe resolverse modificando las condiciones de frontera apropiadas.

El problema matemático que debe resolverse es:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D},$$

con las condiciones siguientes:

condición inicial:

$$p_D(x_D, t_D = 0) = 0,$$

condiciones de frontera interna:

$$C_D = \frac{\partial p_{wD}}{\partial t_D} - \left[\frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right]_{x_D=1} = 1,$$

y

$$p_{wD} = \left[f_D - s \left(\frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right) \right]_{x_D=1},$$

y la condición de frontera externa es:

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} p_D(x_D, t) = 0.$$

Agarwal Al-Hussainy y Ramey confirmaron matemáticamente que, para tiempos muy cortos:

$$p_{wD}(C_D, t_D) = \frac{t_D}{C_D},$$

o en términos de variables reales:

$$\Delta p = \frac{qB\Delta t}{24C}.$$

La constante de almacenamiento, C , a partir de los datos de la prueba e independientemente del tipo de almacenamiento.

Los valores de Δp y Δt son leídos de un punto sobre la línea de pendiente unitaria. Para el caso de una prueba de incremento de presión, Δt corresponde al tiempo de cierre, para el caso de una prueba de decremento, Δt corresponde al tiempo de producción.

Los datos de presión para tiempos muy cortos, los cuales forman una línea recta de pendiente unitaria en la grafica log-log de p_D contra t_D están totalmente controlados

por el almacenamiento del pozo, ya que durante este tiempo toda la producción es debida a la descarga del pozo. Los datos de presión obtenidos durante este periodo de flujo no describen el comportamiento del yacimiento, y consecuentemente, estos datos no pueden ser analizados para evaluar las propiedades de la formación. Después de que termina la línea recta de pendiente unitaria, los datos de presión caen por debajo de la extrapolación de la recta con pendiente unitaria. Después de un tiempo suficientemente grande, los datos de presión interceptan una curva de $C_D = 0$ y un valor determinado de S_w (factor de daño).

Para valores de t_D menores de 1700, p_D es una función lineal de t_D y la pendiente es unitaria. Como se discutió anteriormente, el almacenamiento de pozo es el factor que controla los datos de presión en este intervalo de tiempo. Para valores de t_D mayores de 1700, p_D se desvía por debajo de la línea recta de pendiente unitaria. Finalmente, para un valor de $t_D = 9 \times 10^4$, el valor de p_D coincide con la curva de $C_D = 0$ y $S = 0$. Esto significa físicamente que para valores de t_D mayores de 9×10^4 los efectos de almacenamiento de pozo son despreciables y este tiempo corresponde al comienzo de la línea recta semilog usada, en los métodos convencionales de análisis. Los datos comprendidos en el intervalo de $1700 < t_D < 9 \times 10^4$, están afectados tanto por el almacenamiento de pozo como por el factor de daño.

El tiempo requerido para alcanzar el comienzo de la línea recta semilog, para pruebas de decremento de presión e inyectibilidad puede ser estimado de la ecuación:

$$t_D = C_D(60 + 3.5S), \quad (1.3)$$

o en términos de las variables reales:

$$t_D = \frac{602.9C(60 + 3.5S)}{\frac{kh}{\mu}}, \quad (1.4)$$

donde: t (hrs), C (pie^3 / psi), k (md), h (pie), y μ (cp). Mientras que para pruebas de incremento de presión y "fall off":

$$t_D = 50Ce^{0.14S}, \quad (1.5)$$

o en función de las variables reales:

$$t \geq \frac{30143Ce^{0.14S}}{\frac{kh}{\mu}}, \quad (1.6)$$

donde las unidades de las variables son las mismas que las de la ecuación (1.4).

Nótese en las ecuaciones (1.3) y (1.5), que el factor de daño influye mucho más en una prueba de incremento de presión (o en pruebas “fall off”) que en una prueba de decremento de presión (o que en una prueba de inyección). Estas ecuaciones son muy útiles en el diseño de una prueba de transmisión de presión para determinar el tiempo en horas para correr una prueba antes del comienzo de la convencional línea recta semilog. Si se desea un ciclo logarítmico de la línea recta, entonces será necesario correr la prueba por un periodo de tiempo igual a 10 veces el tiempo calculado por las ecuaciones (1.4) y (1.6).

Coefficiente de difusividad hidráulica η : se define como la rapidez con la que se transmiten los cambios de presión en un medio poroso, es directamente proporcional a la permeabilidad e inversamente proporcional al producto de la porosidad por la viscosidad por la compresibilidad total:

$$\eta = \frac{k}{\phi\mu c_t};$$

es importante distinguir que cada medio involucrado tendrá su propio coeficiente, el cual se distinguirá por el subíndice.

Coefficiente de difusividad adimensional de la formación fracturada η : se define como:

$$\eta_{fbD} = \frac{\eta_{fb}}{\eta_{df}},$$

donde, η_{fb} es la difusividad hidráulica de la formación fracturada y η_{df} es la difusividad hidráulica de la fractura dominante. Este parámetro relaciona que tan rápido ocurre la interacción formación fracturada-fractura dominante. A medida de que este parámetro

incrementa, la interacción entre la formación fracturada y la fractura dominante ocurre a tiempos más cortos.

Compresibilidad: se define como el cambio de un volumen con respecto a un cambio de presión, a temperatura constante. Las unidades que se utilizan en la industria son

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]^{-1} \text{ y } [\text{psi}]^{-1}:$$

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T.$$

Compresibilidad del aceite: La compresibilidad de los aceites bajosaturados es máxima para aceites ligeros, por la mayor cantidad de gas disuelto que poseen, además de la cantidad de gas disuelto y la presión, depende también de la temperatura.

Está dada por la ecuación:

$$c_o = -\frac{1}{V_o} \left(\frac{\partial V_o}{\partial p} \right)_T,$$

la ecuación previa puede ser escrita también como:

$$c_o = -\frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\partial \rho_o}{\partial p} \right)_T,$$

y

$$c_o = -\frac{1}{B_o} \left(\frac{\partial B_o}{\partial p} \right)_T.$$

A presiones por debajo de la presión de saturación debe agregarse un nuevo término a la ecuación anterior, para contar el volumen de gas involucrado:

$$c_o = -\frac{1}{B_o} \left[\left(\frac{\partial B_o}{\partial p} \right)_T - B_g \left(\frac{\partial R_s}{\partial p} \right)_T \right],$$

de la ecuación anterior se observa que la derivada parcial de R_s con respecto a la presión es cero, por arriba de la presión de saturación.

Compresibilidad del gas: es importante comprender que cuando se utiliza el término *compresibilidad* se hace referencia a éste, el coeficiente de compresibilidad isotérmica; mientras que el término *factor de compresibilidad* se hace referencia al *factor z*, el cual es el coeficiente de compresibilidad en la ecuación de estado de los gases reales, es importante recalcar que estos dos parámetros, no son equivalentes. El coeficiente de compresibilidad isotérmica del gas es:

$$c_g = -\frac{1}{V_g} \frac{\partial V_g}{\partial p}.$$

Compresibilidad de la formación: se define como el cambio de volumen de poros por unidad de abatimiento de presión. Dicho cambio ocurre cuando el fluido contenido por los poros de la roca es extraído debido a la explotación, el volumen total de roca disminuye, así como los poros y las partículas sólidas contenidas en ella aumentan.

$$c_f = -\frac{1}{\phi_t} \frac{\partial \phi_t}{\partial p}.$$

Compresibilidad del agua: al igual que la compresibilidad del aceite, depende de la presión, cantidad de gas disuelto y la temperatura, pero en menor medida, la compresibilidad del agua por encima de la presión de saturación es:

$$c_{wa} = -\frac{1}{V_{wa}} \left(\frac{\partial V_{wa}}{\partial p} \right)_T,$$

la ecuación anterior puede ser escrita también de las maneras siguientes:

$$c_{wa} = -\frac{1}{\rho_{wa}} \left(\frac{\partial \rho_{wa}}{\partial p} \right)_T,$$

y

$$c_{wa} = -\frac{1}{B_{wa}} \left(\frac{\partial B_{wa}}{\partial p} \right)_T,$$

y por debajo de dicha presión es:

$$c_{wa} = -\frac{1}{B_{wa}} \left[\left(\frac{\partial B_{wa}}{\partial p} \right)_T - B_g \left(\frac{\partial R_{swa}}{\partial p} \right)_T \right].$$

Compresibilidad total de la formación fracturada:

$$c_{ffb} = S_o c_o + S_{wa} c_{wa} + S_g c_g + c_f .$$

Compresibilidad de la fractura dominante:

$$c_{df} = - \frac{1}{V_{df}} \frac{dV_{df}}{\partial p} .$$

Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF): son aquellos yacimientos que están compuestos por dos sistemas de porosidad (matriz y fractura) con redes de fractura de alta permeabilidad. El adjetivo *Fracturados* hace referencia a la porosidad secundaria, pues dicha porosidad se forma posterior a la depositación, como el fracturamiento o la aparición de fallas debido al sometimiento de la roca a esfuerzos de gran magnitud.

Geometría de flujo lineal: el flujo lineal es el segundo régimen de flujo más comúnmente observado (siendo el primero el flujo radial). Se caracteriza por un flujo completamente paralelo en la formación o en algún otro medio poroso y puede resultar debido a la terminación del pozo, geometría de la trayectoria o por las fronteras externas del yacimiento, o bien por alguna combinación de ellas. Este régimen de flujo ocurre antes del régimen pseudo radial, su duración depende de la longitud media de la fractura, o en su caso la longitud del intervalo disparado en el pozo horizontal. Esto se puede observar en pozos ubicados entre fallas paralelas o en arenas alargadas tales como fluviales o canales marinos profundos. La geometría del flujo lineal es común en los campos de baja permeabilidad de gas, aunque puede también ocurrir en fracturas horizontales someras o en estratos delgados con alta permeabilidad. La ecuación que modela la caída de presión en el fondo un pozo con flujo lineal es:

$$\Delta p_{df}(r_w, t) = - \frac{2q\mu B_o}{Ak_{df}} \sqrt{t\pi\eta_{df}} .$$

Función error complementaria (*erfc*): La función error es la integral de la distribución normal, se define como:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

El desarrollo para obtener la función *erfc* se presenta en el apéndice A. La función *erfc* se presenta como parte de la solución a la ecuación de difusividad para flujo lineal, proporciona el comportamiento más probable de la presión, la construcción del modelo y desarrollo de la solución se muestra en el apéndice B:

$$\Delta p_{df}(x,t) = \frac{q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[2\sqrt{t\pi\eta_{df}} e^{-\frac{(x-r_w)^2}{4t\eta_{df}}} - \pi(x-r_w)erfc\left(\frac{x-r_w}{2\sqrt{t\cdot\eta_{df}}}\right) \right].$$

Geometría de flujo bilineal: este es un tipo de comportamiento de flujo que no ha sido considerado ampliamente en la literatura. Se le llama flujo bilineal porque ocurren dos flujos lineales de manera simultánea. Es un *flujo lineal incompresible* dentro de la *fractura* y el otro es un *flujo lineal compresible* en la *formación*, como se muestra en la **Figura I.3**. Existe un flujo bilineal, como se muestra en el apéndice C, siempre que la mayor parte de los fluidos que entran a la vecindad del pozo provengan de la formación y los efectos de la fractura no afecten aún el comportamiento del pozo.

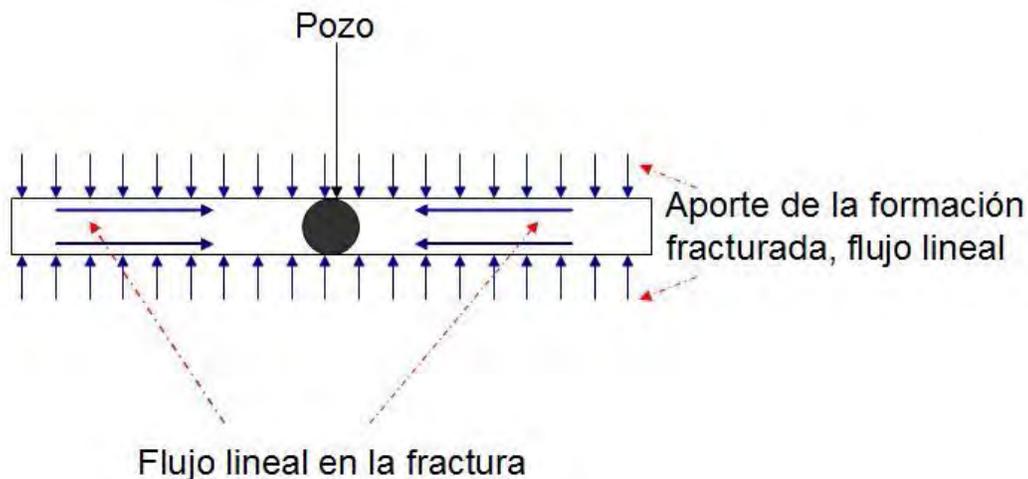


Figura I.3. Representación del sistema matriz-fractura.

Para el caso de los YNF, se puede definir que existe un sistema matriz-fractura, en el cual la formación tiene una mayor capacidad de almacenamiento, pero menor transmisibilidad, comparado con la fractura.

Daño: es una alteración en la permeabilidad del sistema poroso a través del cual fluyen los fluidos. El daño está ligado a varios factores como operaciones (perforación, terminación, etc.) y reacciones químicas en el medio poroso (depósitos orgánicos, minerales, etc.). La permeabilidad generalmente está alterada en las cercanías del pozo. Van Everdingen introdujo el parámetro adimensional S_w .

Factor de daño en el pozo S_w : es la forma en que se cuantificará el daño en la formación. Al incluir el factor de daño en la ecuación que modela la caída de presión en el fondo de un pozo con flujo lineal, ésta queda:

$$\Delta p_T(t) = \Delta p_{df}(r_w, t) + \Delta p_{S_w}(t) = \frac{2q\mu B_o}{Ak_{df}} \sqrt{t\pi\eta_{df}} + \Delta p_{S_w}(t), \quad (1.7)$$

$$\Delta p_{df}(t) = \frac{2q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[\sqrt{t\pi\eta_{df}} + 2S_w \right]. \quad (1.8)$$

Para determinar el valor de S_w se hace el procedimiento siguiente.

La zona con permeabilidad alterada alcanza una longitud r_d , y tiene una permeabilidad de daño en el pozo k_{wd} . Si a la caída de presión en la zona dañada se le resta la caída de presión que se tendría en la misma zona con su permeabilidad original da como resultado la caída de presión debida exclusivamente al daño Δp_s . Entonces, utilizando la ecuación de darcy para flujo lineal, se tiene:

$$\Delta p_{S_w} = \frac{q\mu B_o \Delta L}{k_{wd} A} - \frac{q\mu B_o \Delta L}{k_{df} A} = \frac{q\mu B_o}{A} \left[\frac{1}{k_{wd}} - \frac{1}{k_{df}} \right] [r_d - r_w] = \frac{q\mu B_o}{A} \left[\frac{k_{df} - k_{wd}}{k_{wd} k_{df}} \right] [r_d - r_w],$$

$$\Delta p_{S_w} = \frac{q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[\frac{k_{df} - k_{wd}}{k_{wd}} \right] [r_d - r_w] = \frac{q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[\frac{k_{df}}{k_{wd}} - 1 \right] [r_d - r_w]. \quad (1.9)$$

Al sustituir (I.9) en (I.7) se obtiene:

$$\Delta p_T(t) = \frac{2q\mu B_o}{Ak_{df}} \sqrt{t\pi\eta_{df}} + \frac{q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[\frac{k_{df}}{k_{wd}} - 1 \right] [r_d - r_w],$$

arreglando:

$$\Delta p_T(t) = \frac{q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[2\sqrt{t\pi\eta_{df}} + \left[\frac{k_{df}}{k_{wd}} - 1 \right] [r_d - r_w] \right]. \quad (I.10)$$

Finalmente, igualando (I.8) y (I.10):

$$\frac{2q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[\sqrt{t\pi\eta_{df}} + 2S_w \right] = \frac{q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[2\sqrt{t\pi\eta_{df}} + \left[\frac{k_{df}}{k_{wd}} - 1 \right] [r_d - r_w] \right],$$

despejando S_w :

$$S_w = \left[\frac{k_{df}}{k_{wd}} - 1 \right] [r_d - r_w].$$

Considerando un yacimiento homogéneo, si el factor de daño es cero no existe alteración alguna en la permeabilidad; si éste es negativo el medio poroso está estimulado (es decir incrementó su permeabilidad), y por el contrario, si es positivo, el medio poroso está dañado (su permeabilidad disminuyó). En el caso de los YNF, la mayoría de éstos tienen un factor de daño negativo, per se. Por ello si el daño original de un yacimiento de este tipo es (suponiendo) -3, podríamos decir que si éste cambia a -1, el medio poroso está dañado, y por el contrario, si el daño es de -5, el medio poroso está estimulado.

Fracturamiento Hidráulico (FH): es un procedimiento al que son sometidos los yacimientos de aceite o gas de baja permeabilidad, cuya finalidad es que ésta incremente para obtener un aumento en la producción del pozo. El FH consiste en inyectar un gel a la formación a una presión que rebase la presión de fractura de la formación, causando fracturas verticales en la vecindad del pozo.

Factor de daño interporoso S_{fb-df} : En algunos YNF, las fracturas son parcialmente llenadas por minerales (mineralización), lo que reduce la interacción del flujo entre los medios porosos, para esta tesis, los medios porosos serán la formación fracturada y la fracturada dominante. El factor de daño se expresa como:

$$S_{fb-df} = \frac{l_d k_{fb}}{k_d H},$$

donde l_d es el espesor promedio de la mineralización y H es la altura de la formación fracturada.

El efecto del daño interporoso es retrasar la interacción entre la formación fracturada y la fractura dominante. Un valor grande de S_{fb-df} (restricción severa en la interacción formación fracturada-fractura dominante, el comportamiento de la presión solo puede ser descrito por dos parámetros: λ_{df} y ω_{df}).

Coefficiente de flujo interporoso λ_{df} : se define como:

$$\lambda_{df} = \frac{\sigma_{df} k_{fb} x_{df}^2}{k_{df}},$$

donde:

$$\sigma_{df} = \frac{x_{df} h}{V_b l_d},$$

es el factor forma, el cual refleja la geometría de los elementos de la formación fracturada. Los valores de λ_{df} varían entre 10^{-9} y 10^{-4} . Un valor grande de λ_{df} indica una interacción rápida entre la formación fracturada y la fractura dominante y viceversa. Este caso se refiere al modelo de flujo pseudoestacionario, o bien, al modelo de Warren y Root (1963).

Relación de almacenamiento de la fractura dominante ω_{df} : este parámetro es uno de varios que caracterizan el comportamiento de los modelos de doble porosidad; representa la capacidad de la expansión de la fractura dominante, se define como:

$$\omega_{df} = \frac{\phi_{df} C_{idf}}{\phi_{df} C_{idf} + \phi_{fb} C_{ifb}}.$$

En yacimientos bajosaturados, la ecuación anterior calcula cuánto aceite es producido de la fracturas, se expresa como una fracción del aceite total producido. Los valores típicos para este parámetro oscilan entre 0.001 y 0.5.

Variables adimensionales: Es la combinación de variables para formar grupos sin dimensiones. El uso de variables adimensionales permite eliminar la presencia de valores geométricos del yacimiento, generalizar y facilitar la solución, ya que el número de variables dependientes es reducido significativamente y tienen las características siguientes: Son directamente proporcionales a las variables reales; son definidas de tal manera que las soluciones adimensionales no contienen variables reales; Las variables adimensionales que se utilizan en el análisis de las pruebas de presión son: presión, tiempo, longitudes, conductividades y coeficiente de difusión hidráulica adimensional; facilidad de solución del modelo, por ejemplo al transformar éste al espacio de Laplace la ecuación diferencial ordinaria resultante resulta homogénea; para graficar no es necesario introducir valores geométricos del yacimiento.

Viscosidad: es la resistencia que presenta un fluido a ser deformado (o resistencia a fluir), las unidades que se utilizan en la industria son los centipoises [cp]. Un centipoise la equivale a $1 \left[\frac{g_{masa}}{100seg - cm} \right]$. Al tipo de viscosidad que nos referimos es a a viscosidad dinámica, se representa por la ecuación siguiente:

$$\mu = \frac{\tau}{dv/dy}, \quad (I.19)$$

en donde τ es el esfuerzo de corte y dv/dy es la relación de corte. Su relación con la viscosidad cinemática es la siguiente:

$$\text{viscosidad cinemática } \nu = \frac{\text{viscosidad dinámica } \mu}{\text{densidad } \rho_g} = \frac{\text{centipoise}}{\text{g/cc}},$$

la unidad de medida de la viscosidad cinemática son los stokes, pero son más utilizados los centistokes.

La viscosidad de un aceite afectada por el contenido de gas disuelto, la presión y la temperatura a la que éste se encuentra. Estos parámetros afectan a la viscosidad de la manera siguiente: A medida que la cantidad de gas disuelto disminuye, la viscosidad del aceite aumenta; un decremento en la presión causará un decremento en la viscosidad hasta llegar a la presión de saturación, al seguir el decremento de la presión por debajo de ese valor, la viscosidad incrementará (ver Figura I.4); finalmente cuando la temperatura incrementa, la viscosidad decrece (ver figura I.5);

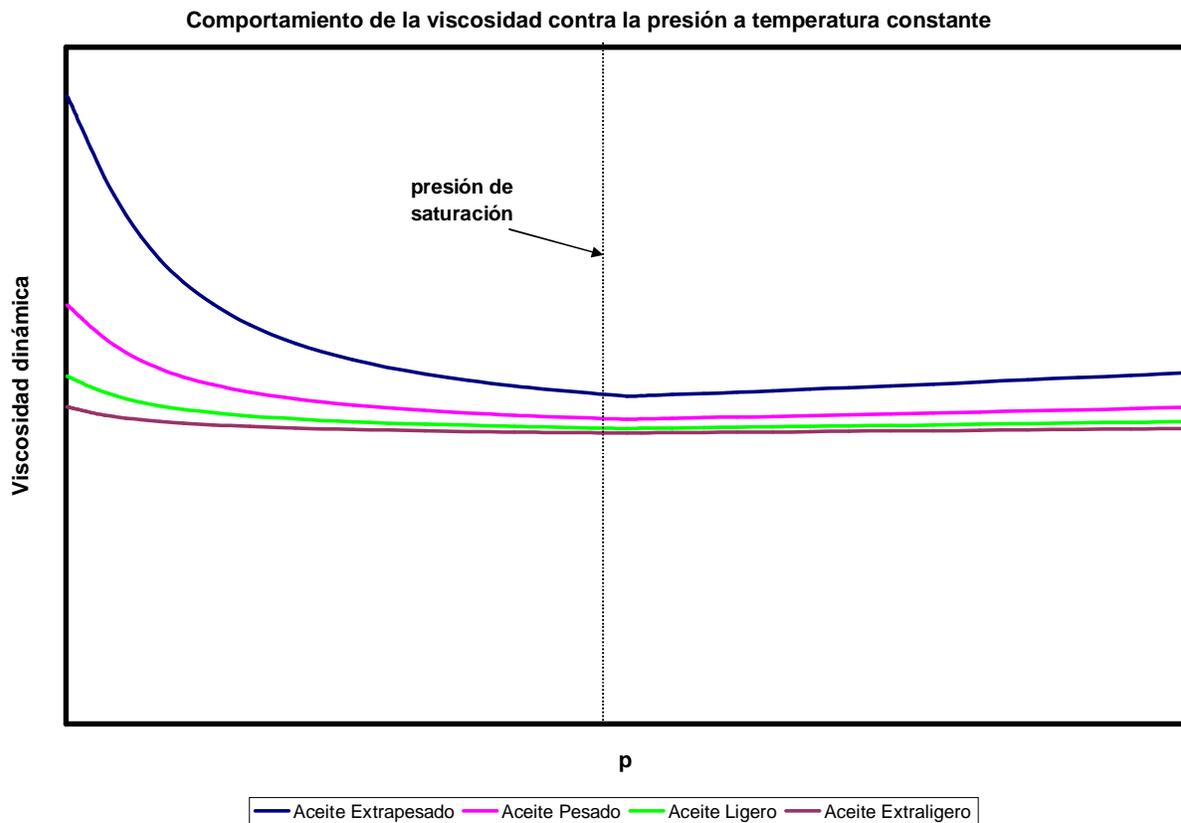


Figura I.4. Comportamiento de la viscosidad contra la presión a temperatura constante.

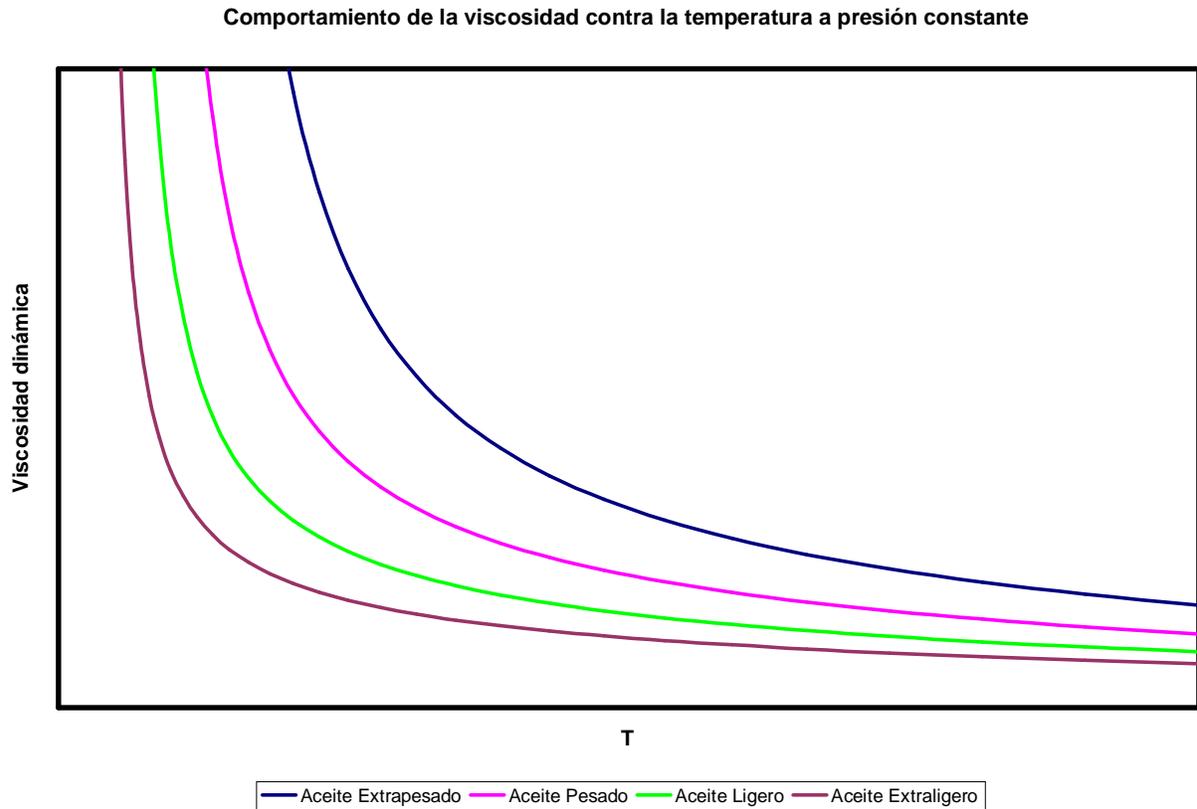


Figura I.5. Comportamiento de la viscosidad contra la temperatura a presión constante.

La viscosidad de un líquido está directamente relacionada con el tipo y tamaño de moléculas presentes en el fluido. La variación de la viscosidad del líquido con respecto a su estructura molecular no se sabe con exactitud, aunque las viscosidades de los líquidos de los líquidos pertenecientes a una serie homóloga, se sabe que varían de manera regular. Por ejemplo, una parafina pura muestra un incremento regular en la viscosidad a medida que el tamaño y la complejidad de las moléculas del hidrocarburo, aumenta.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Este capítulo corresponde a la revisión del estado del arte de este tema.

La efectividad del fracturamiento hidráulico en el incremento de la producción en pozos dañados o ubicados en yacimientos de baja permeabilidad ha sido reconocida por muchos años.

Se ha sabido por algún tiempo que los datos obtenidos de pruebas de pozos fracturados, reflejan las características del sistema pozo fracturado-yacimiento. De ahí que muchos estudios han sido tomados para proveer herramientas para el análisis de tales datos. Con ello se ayuda a la evaluación de los beneficios de las operaciones de fracturamiento.

Raghavan (1977) presentó una recopilación excelente del desarrollo de la historia de la teoría de las pruebas de presión para pozos fracturados. La serie de trabajos en fracturas de conductividad finita y el trabajo previo relevante del efecto de la conductividad se recopila en la discusión siguiente.

El efecto de la conductividad de la fractura en el comportamiento de un sistema yacimiento-pozo fracturado ya se conocía y fue reportado en el trabajo de van Pollen y colaboradores (1957), Dyes y colaboradores (1958), McGuire y Sikora (1960) y Prats (1961).

Los resultados transitorios concernientes al incremento de la productividad que un pozo podría experimentar después del fracturamiento fueron provistos por van Poolen y colaboradores, utilizando un modelo potenciométrico, por McGuire y Sikora, utilizando un análogo eléctrico, y posteriormente por Prats a través de procedimientos analíticos. Dyes y colaboradores, se interesaron mayormente en el efecto del fracturamiento en la entrada de agua. Su estudio fue conducido utilizando un modelo eléctrico.

Dentro de los trabajos subsecuentes que contemplan el comportamiento transitorio del pozo atravesando una fractura vertical, está el realizado por Scott (1963) quien utilizó una analogía de flujo de calor, y posteriormente Russell y Truitt (1964) utilizaron una formulación finita-diferencial del problema. Las fracturas totalmente penetradas de conductividad infinita fueron consideradas en estos estudios.

Gringarten y colaboradores (1974) obtuvieron una solución analítica al problema del flujo transitorio de fluidos hacia los pozos fracturados. Los resultados fueron presentados para los casos de pozos con conductividad infinita y flujo uniforme en fracturas verticales. El método aplicado para resolver estos problemas se basó en el uso de las funciones de Green y Fuente cuya utilidad en la solución de problemas transitorios de flujo han sido previamente documentados, Gringarten y Ramey (1973). Las curvas tipo del comportamiento de presión transitorio de pozo fracturados fueron provistos por su utilidad en los procedimientos de ajuste de curvas tipo en los datos de las pruebas de presión.

Inclusive fue posible un ajuste de los datos de las pruebas de presión con las soluciones de Gringarten y colaboradores, aunque fueron encontradas grandes inconsistencias con los datos del diseño de la fractura, en algunos casos. Resultaron fracturas extremadamente pequeñas del análisis de los datos de presión de pozos destinados a operaciones de fracturamiento diseñadas a proveer fracturas grandes. Motivado por éste problema, estudios del efecto de la conductividad de la fractura en la respuesta de presión de un pozo fracturado fueron iniciados por Barker (1977) y Mao (1977) en la Universidad de Stanford, bajo la dirección de R.J. Ramey Jr.

Barker utilizó un modelo de elemento finito para estudiar el comportamiento de flujo transitorio del sistema yacimiento-fractura finita, mientras que Mao, cuyos intereses se enfocaron en el comportamiento del estado estacionario en el sistema, usaron un modelo potenciométrico como un la formulación de un elemento finito para resolver este problema.

Varios artículos han sido publicados acerca del comportamiento de las fracturas verticales de conductividad finita.

El ajuste de curvas tipo ha sido propuesto como un método de análisis bajo estas condiciones; de cualquier forma, algunas regiones de las curvas tipo presentan problemas únicos en el análisis.

Barker y Ramey indicaron que el uso de las curvas tipo publicadas se hace práctico cuando se tienen disponibles datos de presión extensos.

Sawyer y colaboradores (1973) motivados por un problema diferente, simularon previamente el flujo de gas en el régimen transitorio hacia una fractura vertical conductiva. Se desarrolló un modelo de diferencias finitas que utilizaba alternadamente algoritmos de una y dos dimensiones para obtener la distribución de presiones en la fractura y el yacimiento, respectivamente, a diferentes tiempos. Se utilizaron características específicas del yacimiento y la fractura, además se presenta un análisis cualitativo de los resultados.

Antes de que los estudios realizados por Barker y Mao fueran concluidos, Cinco y colaboradores (1976) obtuvieron una solución semi-analítica al problema del flujo de fluidos transitorio hacia la fractura vertical finita-conductiva. Se consideró un pozo atravesando una fractura vertical finita conductiva totalmente penetrada en un yacimiento homogéneo y un yacimiento en bloque isótropo con fluido ligeramente compresible. La fractura y el yacimiento fueron considerados como dos medios porosos de diferentes características. Esta aproximación llevó a la formulación de dos problemas separados, los problemas del yacimiento y la fractura, ambos resueltos analíticamente mediante los métodos de Green y función fuente. Las soluciones de la fractura y el yacimiento fueron acopladas considerando condiciones de continuidad entre los dos medios para obtener una solución para la distribución del flujo a lo largo de la fractura. Esta solución fue del tipo integral. Las distribuciones de flujo a lo largo de la fractura

fueron determinadas numéricamente a diferentes tiempos, previo a los cálculos de las presiones en el sistema. Las curvas tipo de las presiones adimensionales contra el tiempo adimensional para diferentes valores de conductividades de la fractura adimensionales fueron provistas para el análisis de los datos de la prueba de presión. Se encontró que la fractura con una conductividad adimensional mayor o igual a 100π , se comportaban como fracturas conductivas infinitas.

Cinco y Samaniego (1977) extendieron el trabajo previo incluyendo los efectos de almacenamiento en la vecindad de pozo y daño en la fractura. Se encontró que el comportamiento del pozo era afectado significativamente por el daño a la fractura y que información importante en lo que respecta a las características de la fractura podrían perderse como resultado de los efectos de almacenamiento.

En el mismo año, los mismos autores, presentaron un método para obtener la orientación de una fractura vertical finita conductiva. El método se basó en el análisis de datos de presión transitoria, obtenidos en el pozo activo y dos pozos de observación. También fueron provistas curvas tipo para lograr dicha tarea.

El comportamiento de un pozo que atraviesa una fractura vertical de conductividad finita, al centro de un yacimiento cerrado fue estudiado por Barker y Ramey (1978) utilizando un modelo con elemento finito. Se encontró que la longitud y conductividad de la fractura tienen un pequeño efecto en el tiempo de desarrollo del periodo de flujo pseudo-estacionario. Se determinó también que el flujo pseudoradial que se desarrolla después del tiempo temprano transitorio podría no desarrollarse antes de la aparición del flujo pseudo-estacionario, cuando la relación entre la longitud media de la fractura y la longitud del yacimiento sea mayor que 0.5 y la conductividad adimensional de la fractura sea mayor que 1.

Una discusión cuidadosa del método para analizar pruebas de presión de pozos fracturados fue provista en trabajo posterior por Cinco y Samaniego (1978). Fue presentada una nueva solución para el estado transitorio: comportamiento de pozos

interceptados por fracturas de baja e intermedia conductividad a valores pequeños de tiempo. Esta solución contiene un periodo de flujo bilineal, en cual solo responden los efectos transitorios de la región de yacimiento cercano a la fractura. Se describió una técnica gráfica para analizar datos bajo las condiciones descritas. Fue presentada una nueva correlación para soluciones para fracturas finitas conductivas, las cuales establecieron una relación entre las diferentes soluciones para los periodos de flujo tempranos dentro de una sola curva. Con la nueva correlación fue posible una mejor definición del carácter de las diferentes soluciones.

Agarwal y colaboradores (1979) desarrollaron soluciones ajustables para el análisis de datos obtenidos de pozos de gas estimulados por operaciones de Fracturamiento Hidráulico Masivo (FHM). Para realizar este estudio, se presentó un modelo de diferencias finitas, en él se daban fracturas con conductividad finita. Se presentó un grupo de curvas tipo a presión constante para analizar pozos afectados por FHM, con una discusión del ajuste de las curvas tipo. Los rango de tiempo de Cinco y colaboradores (1976) fueron presentadas para aplicaciones en operaciones de FHM.

Guppy y colaboradores (1980) proveyeron soluciones analíticas para un pozo que produce a presión constante que intersecta a una fractura vertical de conductividad baja a intermedia a valores pequeños de tiempo. Los efectos del flujo no darciano dentro de la fractura vertical finita conductiva para la producción a presión constante fueron investigados también utilizando métodos semianalíticos. Se encontró que el flujo no darciano en la fractura causa un comportamiento del pozo equivalente a un flujo darciano con una conductividad de fractura que cambia continuamente con el tiempo. Se presentaron soluciones gráficas en forma de curvas tipo.

Bostic y colaboradores (1980) presentaron un método combinado entre los datos de producción postfracturamiento y los datos de la prueba de incremento. Este método es particularmente útil en el análisis de pozos de gas sometidos a FHM. El método permite el uso de datos de producción que contienen prolongados tiempos de cierre.

Los estudios discutidos hasta ahora han considerado un pozo interceptado por una fractura totalmente penetrada. Raghavan y colaboradores (1978) investigaron el efecto de una fractura parcialmente penetrada en el comportamiento de un pozo a presión transitoria. Se supuso un flujo uniforme a través de la fractura, para dicho caso es posible una solución analítica. Fue encontrada una solución aproximada para el comportamiento de presión transitoria de un pozo que intercepta una fractura infinita conductiva, parcialmente penetrada, evaluando la solución de flujo uniforme a una locación equivalente de fractura, que se supuso cedería la solución de conductividad de la fractura infinita. Esto fue una sola extensión de las relaciones entre las soluciones de flujo infinito y uniforme, previamente encontrado por Gringarten y colaboradores (1974) en el caso de una fractura vertical totalmente penetrada, y por Muskat (1946, p.273) para el caso de flujo en estado estacionario hacia el pozo parcialmente penetrado. La solución actual del problema de conductividad infinita podría ser requerir el uso de procedimientos semianalíticos.

CAPÍTULO III MODELO PROPUESTO

El modelo de flujo bilineal hacia la fractura dominante, es:

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} + \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{\partial p_{fbD}(0, t_D)}{\partial y_D} = \frac{1}{\eta_{dfD}} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}, \quad (\text{III.1})$$

cuyas condiciones inicial y de frontera son:

condición inicial: $p_{dfD}(x_D, 0) = 0,$

frontera interna, gasto constante: $\frac{\partial p_{dfD}(0, t_D)}{\partial x_D} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D},$

frontera externa, fractura infinita: $\lim_{x_D \rightarrow \infty} p_{dfD}(x_D, t_D) = 0.$

Por otro lado, el flujo lineal en la formación naturalmente fracturada es:

$$\frac{\partial^2 p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D^2} = \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}, \quad (\text{III.2})$$

con las condiciones siguientes:

condición inicial: $p_{fbD}(y_D, 0) = 0,$ (III.3)

frontera interna, acoplamiento:

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = p_{fbD}(y_D, t_D)_{\text{sup}} + 4S_{fb-dfD} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{fbD}(y, \tau)_{\text{sup}}}{\partial \tau} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_{fbD} [t_D - \tau]}{H_D^2}} d\tau,$$

frontera externa, yacimiento infinito: $\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, t_D) = 0.$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo en la formación, ecuación (III.18):

$$\frac{d^2 p_{fbD}(y_D, s)}{dy_D^2} = s\bar{p}_{fbD}(y_D, s) - p_{fbD}(y_D, 0).$$

Sustituyendo la ecuación (III.3), en la anterior, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{fbD}(y_D, s)}{dy_D^2} = s \bar{p}_{fbD}(y_D, s),$$

cuya solución general es:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = C_1 e^{y_D \sqrt{s}} + C_2 e^{-y_D \sqrt{s}}$$

Se aplica la transformada de Laplace a las condiciones de frontera en la ecuación de flujo en el yacimiento:

$$\bar{p}_{fbD}(0, s) = \bar{p}_{dfD}(x_D, s),$$

y

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, s) = 0.$$

Se aplica la condición de frontera externa en la solución general:

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, s) = C_1 \lim_{y_D \rightarrow \infty} e^{y_D \sqrt{s}} + C_2 \lim_{y_D \rightarrow \infty} e^{-y_D \sqrt{s}} = 0.$$

Evaluando:

$$C_1 [\text{valor}] + C_2 [0] = 0,$$

para satisfacer la condición de frontera externa se requiere que:

$$C_1 = 0.$$

Sustituyendo la constante C_1 en la solución general:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = C_2 e^{-y_D \sqrt{s}}. \quad (\text{III.4})$$

Se aplica la transformada de Laplace a la condición de frontera interna de la formación fracturada (acoplamiento), y resulta la expresión:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} s \left[\frac{H_D}{\sqrt{\eta_{fbD} s}} \tanh \left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD}}} \right) \right]}.$$

Aplicando la condición de frontera interna (acoplamiento), a la ecuación (III.4), se tiene:

$$p_{fbD}(0, s) = C_2 e^{-[0]\sqrt{s}} = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD} / H_D^2}} \right) \right]},$$

por lo tanto, la constante C_2 es:

$$C_2 = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD} / H_D^2}} \right) \right]}. \quad (III.5)$$

Se sustituye la ecuación anterior en la ecuación (III.4) y se obtiene la solución del yacimiento en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = \left[\frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD} / H_D^2}} \right) \right]} \right] e^{-y_D \sqrt{s}}.$$

En la ecuación de flujo en la fractura se requiere la derivada de la presión en el yacimiento:

$$\frac{d\bar{p}_{fbD}(y_D, s)}{dy_D} = -\sqrt{s} \left[\frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD} / H_D^2}} \right) \right]} \right] e^{-y_D \sqrt{s}}.$$

Evaluando en la interfase formación fracturada-fractura dominante:

$$\frac{d\bar{p}_{fbD}(0, s)}{dy_D} = -\sqrt{s} \left[\frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD} / H_D^2}} \right) \right]} \right]. \quad (\text{III.6})$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo en la fractura dominante:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} + \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{dp_{fbD}(0, s)}{dy_D} = \frac{1}{\eta_{dfD}} [s\bar{p}_{dfD}(x_D, s) - p_{dfD}(x_D, 0)].$$

Sustituyendo la condición inicial y (III.6) en la ecuación anterior:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - \frac{2\sqrt{s}}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD} / H_D^2}} \right) \right]} \right] = \frac{s}{\eta_{dfD}} \bar{p}_{dfD}(x_D, s),$$

arreglando:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - \left[\frac{2}{\sqrt{s}(k_{df} b_{df})_D \left(1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD} / H_D^2}} \right) \right] \right)} \right] + \frac{1}{\eta_{dfD}} s\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0 \quad (\text{III.7})$$

Re escribiendo la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - sg(s)\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0,$$

en donde:

$$g(s) = \frac{2}{\sqrt{s}(k_{df} b_{df})_D + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{mD} / H_D^2}} \right) \right]} + \frac{1}{\eta_{dfD}}. \quad (\text{III.8})$$

De acuerdo con el comportamiento de la tangente hiperbólica, se tienen los dos casos siguientes:

a) para $0 < \frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}} < 1$,

la función $g(s)$ es:

$$g(s) = \frac{2}{\sqrt{s}(k_{df} b_{df})_D + S_{fb-dfD} \frac{H_D^2 s}{2\eta_{fbD}}} + \frac{1}{\eta_{dfD}}.$$

b) para $1 \leq \frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}} < \infty$,

la función $g(s)$ es:

$$g(s) = \frac{2}{\sqrt{s}(k_{df} b_{df})_D + S_{fb-dfD} \frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}}} + \frac{1}{\eta_{dfD}}.$$

La solución general para la ecuación de flujo en la fractura dominante:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = C_3 e^{x_D \sqrt{sg(s)}} + C_4 e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}. \quad (\text{III.9})$$

Aplicando la transformada de Laplace a las condiciones de frontera para la fractura dominante:

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(0, s)}{dx_D} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s},$$

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0.$$

Aplicando la condición de frontera externa:

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = C_3 \lim_{x_D \rightarrow \infty} e^{x_D \sqrt{sg(s)}} + C_4 \lim_{x_D \rightarrow \infty} e^{-x_D \sqrt{sg(s)}} = 0,$$

en la ecuación previa puede observarse que:

$$0 = C_3[\text{valor}] + C_4[0],$$

por lo que se requiere que:

$$C_3 = 0. \quad (III.10)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (III.9):

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = C_4 e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}. \quad (III.11)$$

Derivando (III.11) con respecto a x_D :

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D} = -\sqrt{sg(s)} C_4 e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}.$$

Evaluando en la condición de frontera interna para la fractura dominante:

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(0, s)}{dx_D} = -\sqrt{sg(s)} C_4 e^{-[0]\sqrt{sg(s)}} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s}.$$

Despejando la constante:

$$C_4 = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s \sqrt{sg(s)}}.$$

Sustituyendo la constante C_4 en (III.11), se obtiene la solución del modelo en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s \sqrt{sg(s)}} e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}.$$

La solución en el pozo:

$$x_D = 0,$$

$$\bar{p}_{wD}(s) = \bar{p}_{dfD}(0, s).$$

Por lo que:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s \sqrt{sg(s)}}. \quad (III.12)$$

Sustituyendo la función $g(s)$:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s \sqrt{s \left[\frac{2}{\sqrt{s} (k_{df} b_{df})_D \left(1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{mD} / H_D^2}} \right) \right] \right) \right] + \frac{1}{\eta_{dfD}}} \right]}.$$

La solución puede escribirse:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{1}{\sqrt{s \left[\frac{2}{\sqrt{s} (k_{df} b_{df})_D \left(1 + S_{fb-dfD} \left[\frac{H_D \sqrt{s}}{\sqrt{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{s}{4\eta_{mD} / H_D^2}} \right) \right] \right) \right] + \frac{1}{\eta_{dfD}}} \right]} \right] \frac{1}{s^{3/2}}. \quad (III.13)$$

La ecuación anterior resulta muy complicada para ser invertida al espacio real analíticamente, por lo que se utiliza el algoritmo de Stehfest (el cual se presenta en el apéndice F) para tal fin.

Al considerar el daño en el pozo S_w , la ecuación (III.13) queda:

$$\bar{p}_{sD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{s}(k_{df} b_{df})_D \left(1 + S_{fb-dfD} H_D \left[\sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}} \tanh\left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}}\right)} \right] \right)} + \frac{1}{\eta_{dfD}}}} \right] \frac{1}{s^{3/2}} + \frac{S_w}{s},$$

o bien:

$$\bar{p}_{sD}(s) = \bar{p}_{wD}(s) + \frac{S_w}{s}. \quad (\text{III.14})$$

CAPÍTULO IV

VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Convergencia al modelo de flujo bilineal propuesto por Cinco-Ley y Samaniego

El modelo que se presenta en esta tesis es una extensión de las geometrías de flujo lineal y bilineal, las cuales se encuentran relacionadas por el daño que existe entre los medios porosos (formación fracturada y la fractura dominante). Para la validación considérese la ecuación (III.16), la cual es la condición de frontera interna (acoplamiento) en el espacio de Laplace, para el flujo lineal de la formación fracturada hacia la fractura dominante:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} s \left[\frac{H_D}{\sqrt{\eta_{fbD} s}} \tanh \left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD}}} \right) \right]}.$$

Sí existiese un flujo lineal libre de la formación hacia la fractura dominante, esto quiere decir que no existe ningún daño entre los medios porosos, es decir el daño S_{fb-dfD} sería cero. Al evaluar dicha condición en la ecuación anterior resulta:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + [0] s \left[\frac{H_D}{\sqrt{\eta_{fbD} s}} \tanh \left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD}}} \right) \right]},$$

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} = \bar{p}_{dfD}(x_D, s). \quad (\text{IV.1})$$

Al transformar la condición anterior a tiempo real, ésta coincide con la condición de frontera interna de la formación fracturada para flujo bilineal con transferencia interporosa libre, ecuación (C.21). Por esa razón, en caso de que el daño entre la formación fracturada y la fractura dominante no se presenciase ($S_{fb-dfD} = 0$), la solución del modelo propuesto converge a la solución del modelo de flujo bilineal con

transferencia interporosa libre, cuya solución se muestra en el apéndice C. He aquí las dos soluciones:

Solución al modelo de Cinco-Ley y Samaniego en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + \frac{1}{\eta_{dfD}}}} \right] \frac{1}{s^{3/2}}.$$

Solución al modelo propuesto sin considerar daño ni almacenamiento en el pozo, con $S_{fb-dfD} = 0$, en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{s}(k_{df} b_{df})_D \left(1 + [0] H_D \left[\sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}} \tanh \left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}} \right) \right] \right)} + \frac{1}{\eta_{dfD}}}} \right] \frac{1}{s^{3/2}},$$

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + \frac{1}{\eta_{dfD}}}} \right] \frac{1}{s^{3/2}}.$$

Por lo que se demuestra la convergencia del modelo propuesto de manera analítica al modelo de flujo bilineal de Cinco-Ley y Samaniego, siendo idénticos bajo la consideración de $S_{fb-dfD} = 0$, en el modelo propuesto.

Convergencia al modelo de flujo lineal

En la sección anterior, se demostró la convergencia del modelo propuesto cuando no existe daño interporoso, en contraparte, si el daño entre los medios porosos fuese tan

elevado que no permitiese el aporte de la formación fracturada a la fractura dominante, podría hablarse de un factor de daño, S_{fb-dfD} , que tiende a infinito por lo que al evaluar dicho límite en la ecuación (IIV.16) se obtiene:

$$\lim_{S_{fb-dfD} \rightarrow \infty} \bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} = \lim_{S_{fb-dfD} \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} s \left[\frac{H_D}{\sqrt{\eta_{fbD} s}} \tanh \left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD}}} \right) \right]},$$

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + [\infty] s \left[\frac{H_D}{\sqrt{\eta_{fbD} s}} \tanh \left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD}}} \right) \right]} = 0,$$

$$\bar{p}_{fbD}(y_D = 0, s)_{\text{sup}} = 0. \quad (\text{IV.II})$$

Al transformar la ecuación anterior al espacio real, resulta:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D = 0, t_D)_{\text{sup}} = 0,$$

por lo que al derivar la ecuación previa con respecto a y_D , y evaluando en $y_D = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y_D} \bar{p}_{fbD}(y_D = 0, t_D)_{\text{sup}} = 0. \quad (\text{IV.III})$$

Al sustituir la ecuación anterior en la ecuación de flujo en la fractura dominante (C.13) resulta:

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} + \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} [0] = \frac{1}{\eta_{dfD}} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D},$$

la cual se reduce a:

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \frac{1}{\eta_{dfD}} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}.$$

Solución al modelo de flujo lineal:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\pi \eta_{dfD} t_D}.$$

Modelo propuesto sin daño ni almacenamiento en el pozo, con $S_{fb-dfD} \rightarrow \infty$, en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{s}(k_{df}b_{df})_D \left(1 + [\infty]H_D \left[\sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}} \tanh\left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}}\right)} \right] \right)} + \frac{1}{\eta_{dfD}}}}} \right] \frac{1}{s^{3/2}},$$

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \left[\sqrt{\eta_{dfD}} \right] \frac{1}{s^{3/2}}.$$

al invertir la ecuación anterior a tiempo real se obtiene:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{2}{(k_{df}b_{df})_D} \sqrt{\pi \eta_{dfD} t_D}.$$

Por lo que se demuestra que al no existir un aporte por parte de la formación fracturada a la fractura dominante se obtiene un flujo lineal en ésta última.

Convergencia al Modelo Flujo Bilineal con Transferencia Interporosa Pseudoestacionaria

La convergencia del modelo de flujo bilineal con transferencia interporosa pseudoestacionaria indica en qué momento, el régimen de flujo transitorio pasa a ser pseudoestacionario. La importancia de la convergencia a este modelo radica el momento en que deja de existir un régimen pseudoestacionario, por lo que ya no es posible caracterizar la formación fracturada.

El valor de daño al cual se produce un régimen de flujo pseudoestacionario, análogo al trabajo realizado por Cinco-Ley es:

$$S_{fb-dfD} = 2 \frac{[1 - \omega_{df}]}{\lambda_{df}} \frac{\eta_{fbD}}{H_D^2}.$$

Despejando el parámetro λ_{df} :

$$\lambda_{df} = 2 \frac{[1 - \omega_{df}]}{S_{fb-dfD}} \frac{\eta_{fbD}}{H_D^2}.$$

Al sustituir la ecuación anterior en la condición de acoplamiento del modelo de flujo bilineal con transferencia interporosa pseudoestacionaria, en el espacio de Laplace, ecuación (D.32) se obtiene:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = \frac{\left[2 \frac{[1 - \omega_{df}]}{S_{fb-dfD}} \frac{\eta_{fbD}}{H_D^2} \right]}{[1 - \omega_{df}]s + \left[2 \frac{[1 - \omega_{df}]}{S_{fb-dfD}} \frac{\eta_{fbD}}{H_D^2} \right]} \bar{p}_{dfD}(y_D, s),$$

reescribiendo:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = \frac{1}{1 + S_{fb-dfD} \frac{sH_D^2}{2\eta_{fbD}}} \bar{p}_{dfD}(y_D, s),$$

La ecuación anterior corresponde a la condición de acoplamiento del modo propuesto en el espacio de Laplace, cuando los valores el valor del argumento de la tangente hiperbólica oscila entre 0 y 1.

Ejemplo:

Considérese un pozo productor de aceite, con radio $r_w = 0.25$ [pies], que penetra una fractura vertical dominante, en una formación fracturada, cuyos datos son los siguientes:

$$\begin{array}{llll} h = 49 \text{ [ft]} & b_f = 0.5 \text{ [ft]} & (k_{df} b_{df})_D = 6.283 & x_f = 88.9 \text{ [ft]} \\ k_{bf} = 2.07 \text{ [md]} & \mu = 0.8 \text{ [cp]} & \phi_t = 0.15 & \phi_f = 0.03 \end{array}$$

$$c_i = 1.76 \times 10^{-5} [\text{psi}^{-1}] \quad c_f = 8 \times 10^{-5} [\text{psi}^{-1}] \quad S_w = 0 \quad C_D = 0$$

Empleando las soluciones analíticas de Cinco-Ley y Samaniego (1981) se obtiene la grafica log-log de la **Figura IV.1** siguiente:

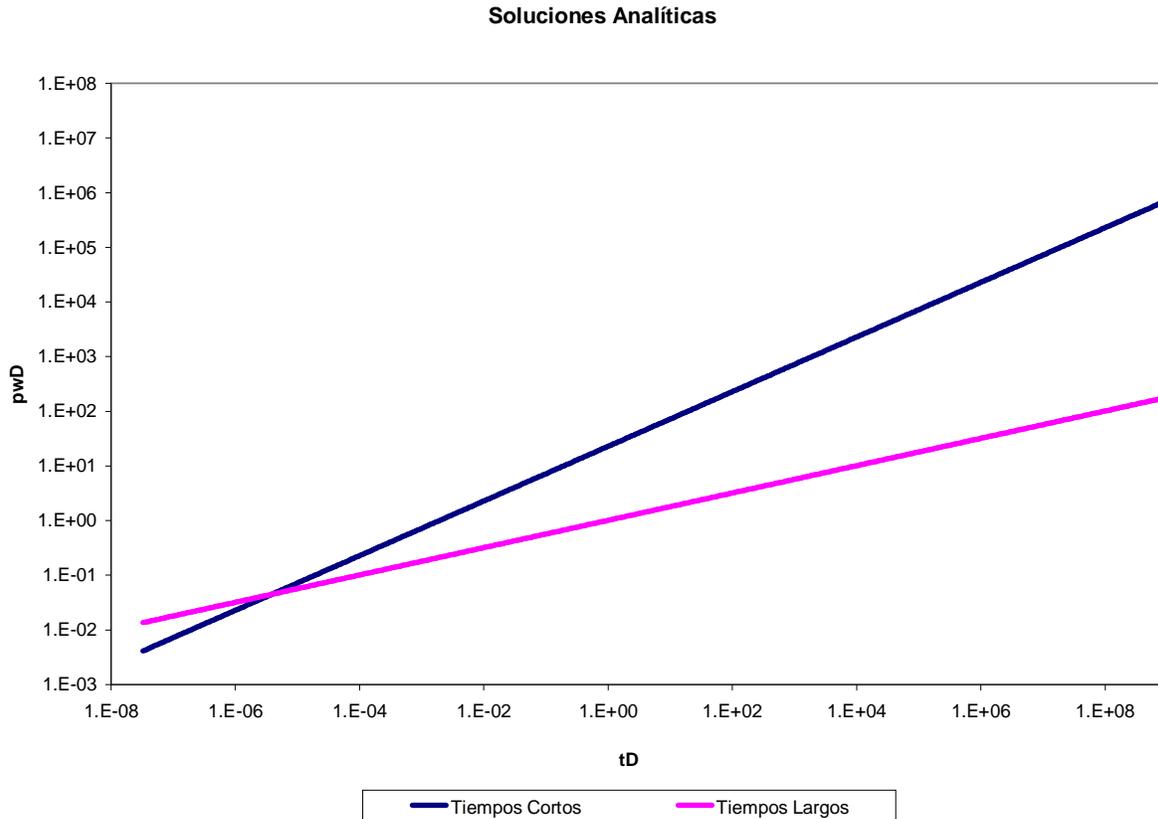


Figura IV.1. Soluciones analíticas al modelo de Cinco-Ley y Samaniego.

La grafica anterior muestra el comportamiento de la presión adimensional contra el tiempo adimensional, modelado con las soluciones de Cinco-Ley y Samaniego (1981). De acuerdo con la validación antes mencionada, el modelo propuesto deberá ajustarse a estas soluciones cuando el daño entre los medios porosos, S_{fb-df} , sea igual a cero. La solución a la ecuación (III.29) se obtuvo mediante el algoritmo de Stehfest, con un valor $N=12$. El ajuste se muestra en la **Figura IV.2**

Ajuste del Modelo Propuesto al Modelo de Cinco-Ley y Samaniego

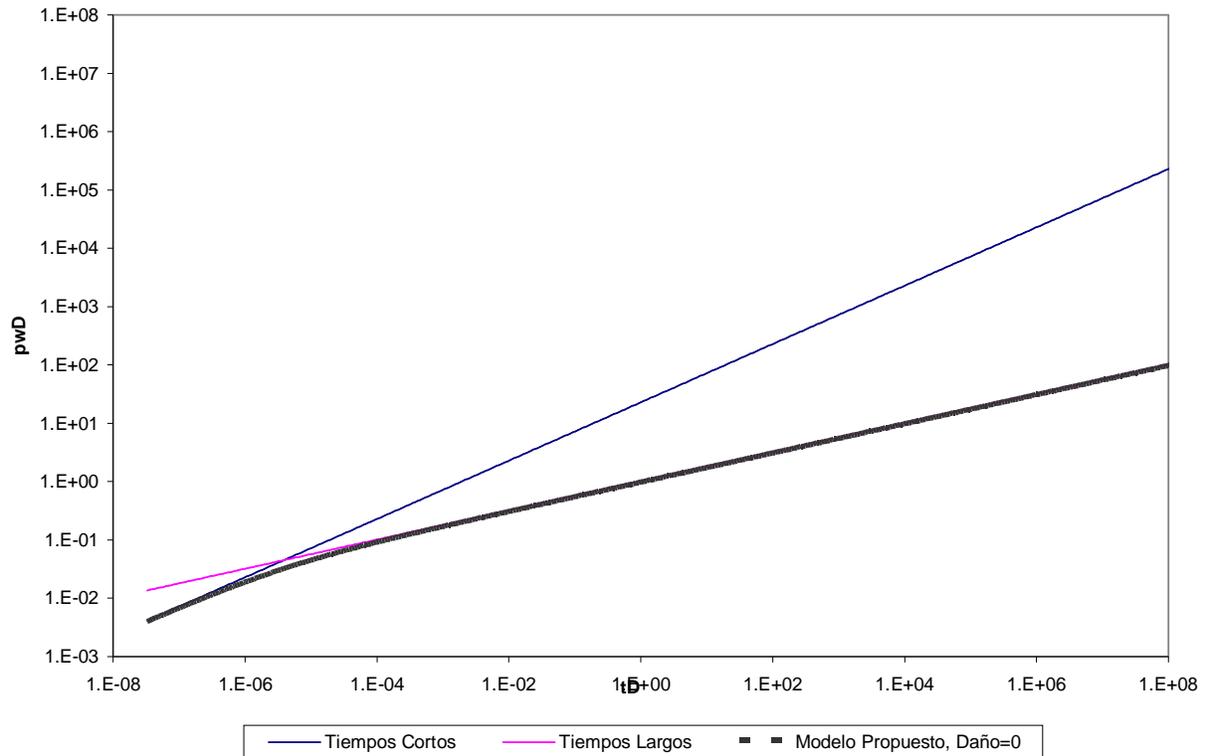


Figura IV.2. Ajuste del modelo propuesto al modelo de Cinco-Ley y Samaniego.

Con base en la figura anterior, se demuestra que cuando no existe daño interporoso, el modelo propuesto converge al modelo de flujo bilineal propuesto por Cinco-Ley y Samaniego.

La **Figura IV.3** y la **Figura IV.4** son un análisis de sensibilidad del daño interporoso para el ejemplo anterior:

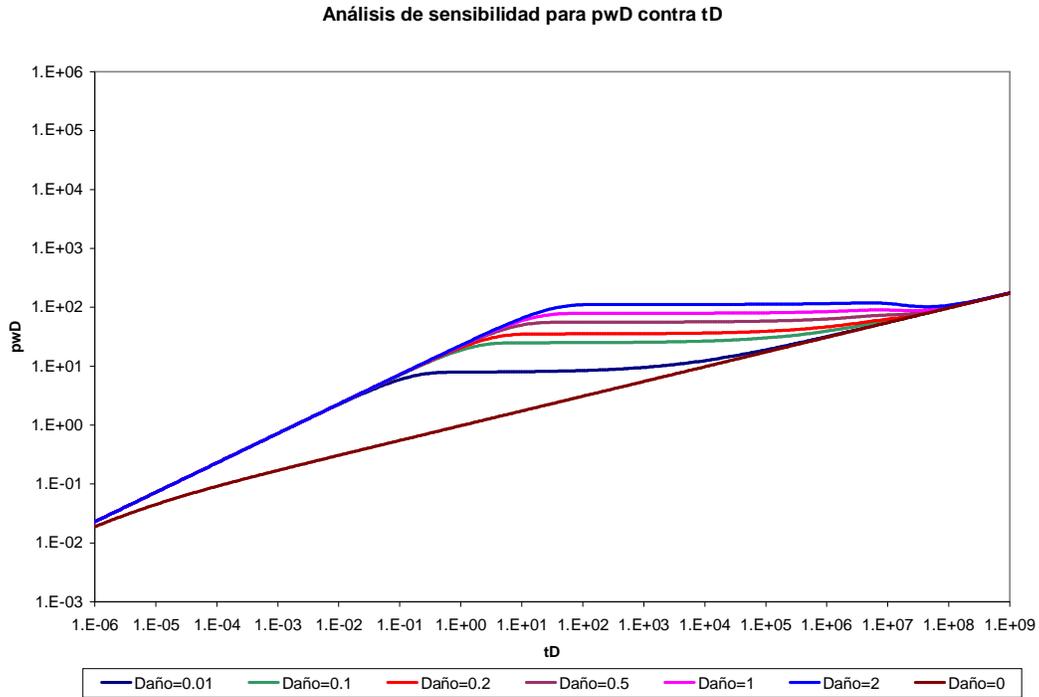


Figura IV.3. Análisis de sensibilidad del daño S_{fb-df} , para p_{wD} contra t_D .

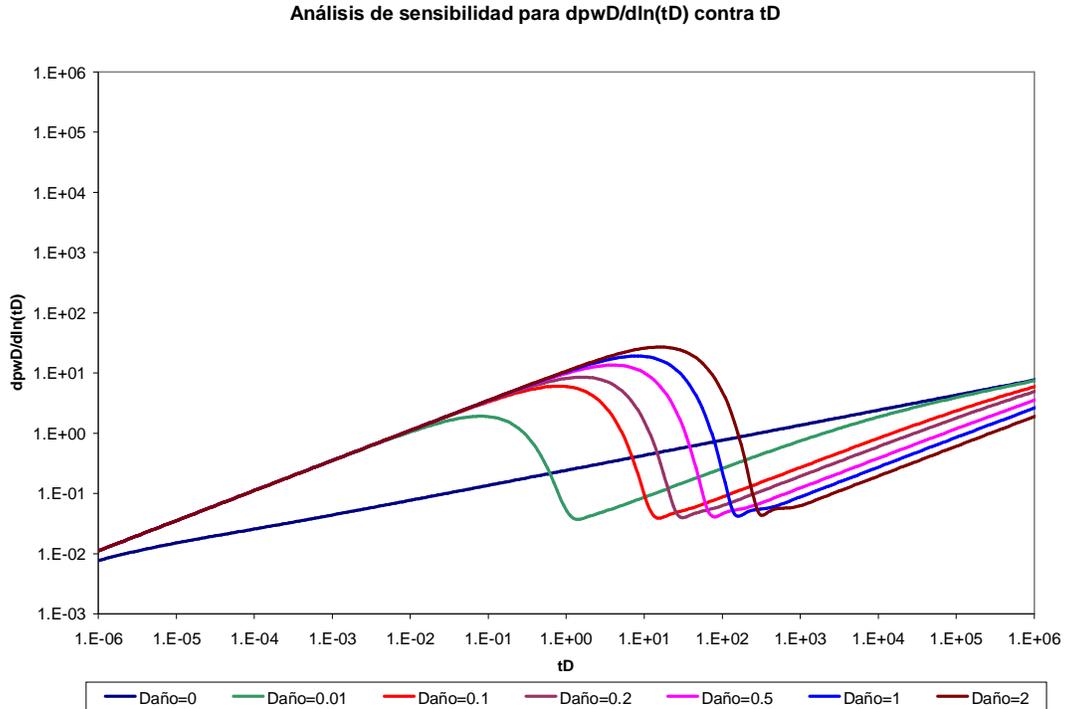


Figura IV.4. Análisis de sensibilidad del daño S_{fb-df} , para $\frac{dp_{wD}}{d \ln(t_D)}$ contra t_D .

Si a las gráficas anteriores se le añaden las soluciones analíticas, las gráficas resultan:

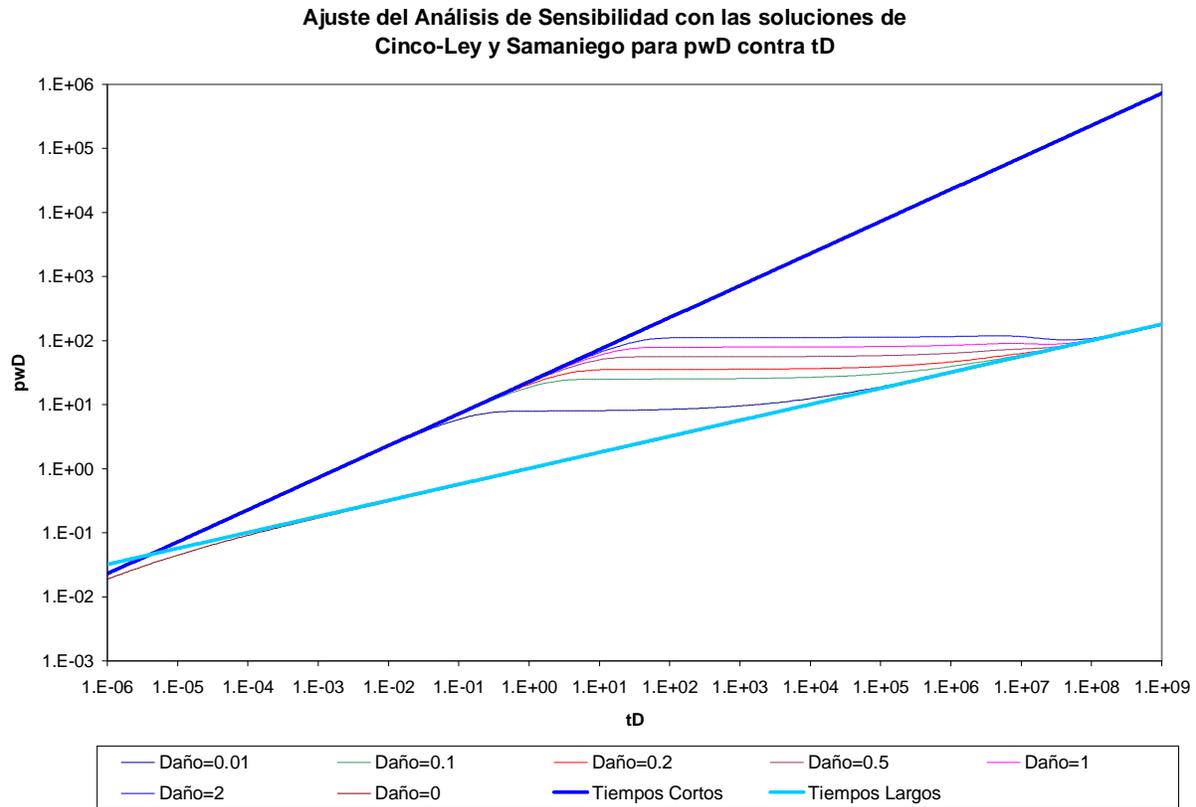


Figura IV.5. Ajuste del análisis de sensibilidad con las soluciones de Cinco-Ley y Samaniego para p_{wD} contra t_D .

De la **Figura IV.5** se observa que entre mayor sea el daño entre los medios porosos (fractura dominante y formación fracturada), el tiempo que tardará en desarrollarse al flujo bilineal, será mayor.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LA PRESIÓN EN POZOS FRACTURADOS

Comportamiento Transitorio de Presión en pozos fracturados.

Considere un pozo en una fractura vertical dominante produciendo a gasto constante, q , en un yacimiento infinito, isótropo, homogéneo y horizontal, que contiene un fluido ligeramente compresible, c , y viscosidad μ .

El yacimiento tiene una permeabilidad k_{fb} , porosidad ϕ_i , espesor h , compresibilidad total c_{ffb} y presión inicial p_i .

El pozo es interceptado por una fractura vertical dominante, indeformable, completamente penetrada de longitud media x_{df} , anchura b_{df} , permeabilidad k_{df} , porosidad ϕ_{df} y compresibilidad total c_{idf} (**Figura V.1**).

Las propiedades del yacimiento y la fractura son independientes de la presión y del flujo en todo el sistema, obedecen a la ley de Darcy. Es conveniente, suponer que los gradientes de presión son pequeños, los efectos gravitacionales son despreciables, y el flujo que entra a la vecindad del pozo entra sólo a través de la fractura.

Con base en estas suposiciones, el flujo transitorio en el sistema puede ser descrito por la ecuación de difusividad. Para detalles de las condiciones de frontera y la solución analítica de éste problema ver en el Apéndice C de esta tesis.

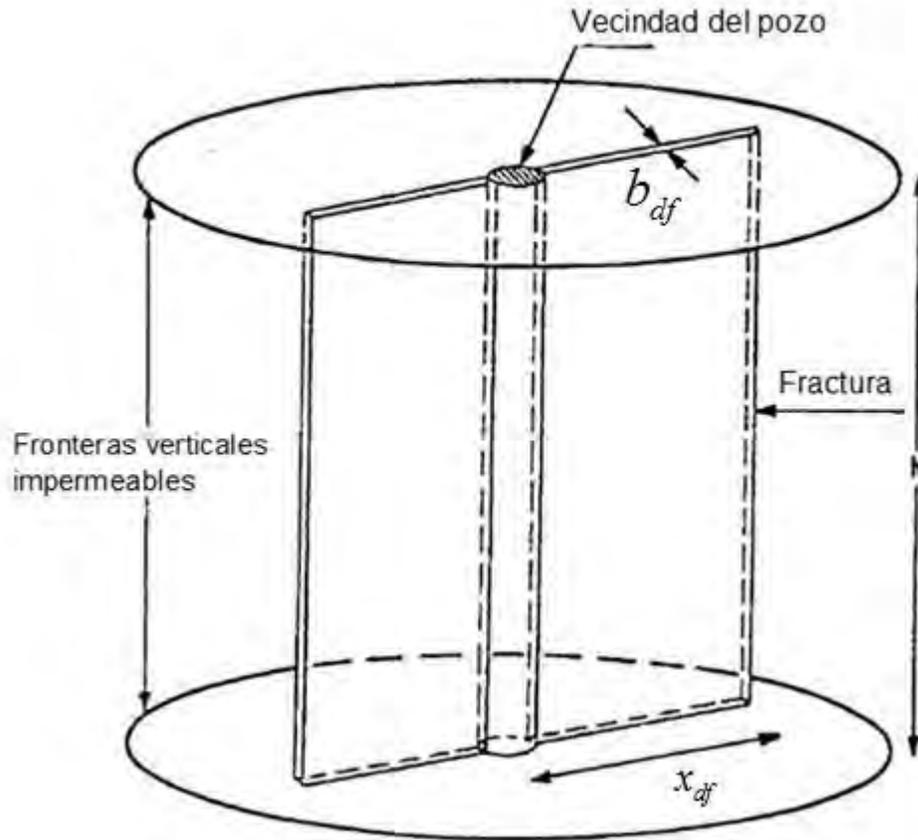


Figura V.1. Pozo que atraviesa una fractura vertical de conductividad finita penetrada totalmente.

La solución general para la presión de fondo fluyendo p_{wf} , para aceite, está dada por la ecuación:

$$p_{wD}(t_{Dx_{df}}, \eta_{dfD}, C_{fDdf}) = \frac{k_{fb} h (p_i - p_{wf})}{\alpha_o q B \mu} \quad (V.1)$$

en donde:

$$t_{Dx_{df}} = \frac{\beta k_{fb}}{\phi_t \mu c_{tbf} x_{df}^2} t \quad (V.2)$$

$$\eta_{dfD} = \frac{k_{df} \phi_t c_{fbt}}{k_{fb} \phi_{df} c_{dft}} \quad (V.3)$$

y

$$C_{fDf} = \frac{b_{df} \phi_{df} c_{dfi}}{\pi x_{df} \phi_t c_{fbt}} \quad (V.4)$$

p_{wD} representa la caída de presión adimensional; es una función del tiempo adimensional, $t_{Dx_{df}}$, difusividad hidráulica adimensional de la fractura η_{fD} , y de la capacidad de almacenamiento de la fractura dominante adimensional, $C_{fDf} \cdot \alpha_o$, α_g y β son unidades de conversión, de acuerdo con la Tabla 1.

Parámetro o variable	Unidades del SI	Unidades de campo
k	μm^2	md
h	m	pies
q _o	m ³ /d	bpd
μ	Pa*s	cp
B	m ³ /m ³	B@c.y/B@c.s
φ	fracción	fracción
c _t	Pa ⁻¹	psi ⁻¹
ρ	kPa	psi
t	horas	horas
α_o	1.842	141.2
β	3.6×10^{-9}	1,424
$\bar{\delta}_{bfo}$	34.97	44.1
$\bar{\delta}_{lfo}$	0.3918	8.128
C	m ³ /Pa	pies ³ /psi

Tabla V.1. Unidades de campo y en el SI.

Cinco-Ley y colaboradores (1978), mostraron que para valores prácticos de tiempo adimensional, el comportamiento de la presión depende de dos parámetros: el tiempo adimensional $t_{Dx_{df}}$, y de la conductividad adimensional de la fractura $(k_{df} b_{df})_D$. Lo anterior fue definido en la ecuación (V.2) y lo sucesivo puede ser obtenidote las ecuaciones (V.3) y (V.4). La conductividad adimensional de la fractura es:

$$(k_{df} b_{df})_D = \frac{k_{df} b_{df}}{k_{fb} x_{df}}$$

y está relacionada con C_{fDf} y η_{fD} , como a continuación se presenta:

$$(k_{df}b_{df})_D = \pi C_{fd} \eta_{dfD}$$

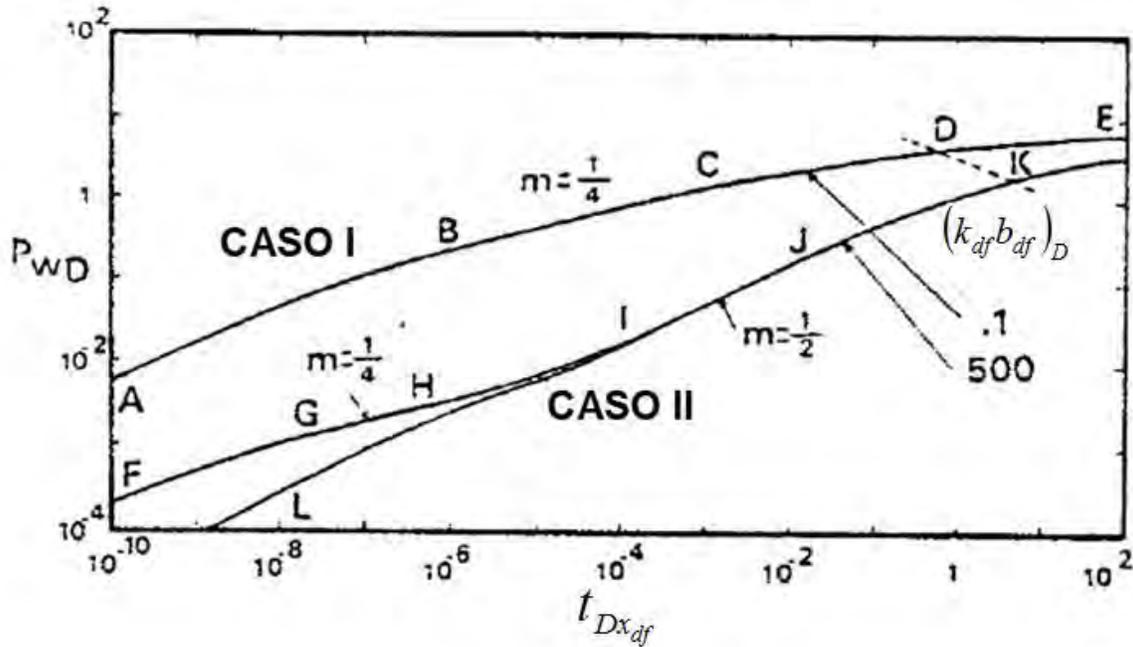


Figura V.2. Gráfica log-log de los casos típicos para pozos fracturados.

La **Figura V.2** muestra el comportamiento general de un pozo con una fractura vertical con conductividad finita. Allí, se muestra una gráfica log-log de presión adimensional en la vecindad del pozo, p_{wD} , contra el tiempo adimensional, $t_{Dx_{df}}$. Por simplicidad, sólo se presentan dos casos: el primer caso representa el comportamiento de una fractura de baja conductividad $(k_{df}b_{df})_D = 0.1$, mientras que el segundo caso considera una fractura altamente conductiva $(k_{df}b_{df})_D = 500$. Estos casos fueron seleccionados porque muestran todos los rasgos del comportamiento de presión transitoria para un pozo fracturado.

Períodos de flujo en un pozo fracturado

Mediante un análisis de la **Figura V.2** muestra que el comportamiento transitorio de un pozo con una fractura vertical con conductividad finita incluye varios periodos de flujo.

Inicialmente, hay un flujo lineal en la fractura caracterizado por una recta con pendiente $1/2$, después del periodo de flujo de transición el sistema podría o no mostrar un período de flujo bilineal, indicado por una recta con pendiente $1/4$. Cuando el tiempo incrementa, la formación podría desarrollar un periodo de flujo lineal. Eventualmente, en todos los casos el sistema alcanzará un periodo de flujo pseudoradial (ver **Figura V.3**).

Los puntos A, F, y L en la **Figura V.2**, representan el fin del periodo de flujo lineal en la fractura (recta con pendiente $1/2$). El período de flujo bilineal (recta con pendiente $1/4$) se define en los segmento BC y GH; éste comportamiento no se presenta cuando la fractura tiene una alta capacidad de almacenamiento y una alta conductividad (la curva de abajo en el caso 2).

El período de flujo lineal en la formación se muestra por la línea recta de pendiente $1/2$, entre los puntos I y J sólo se muestra en fracturas con altas conductividades $(k_{df}b_{df})_D \geq 300$. Los puntos D y K muestran el inicio del período de flujo pseudoradial.

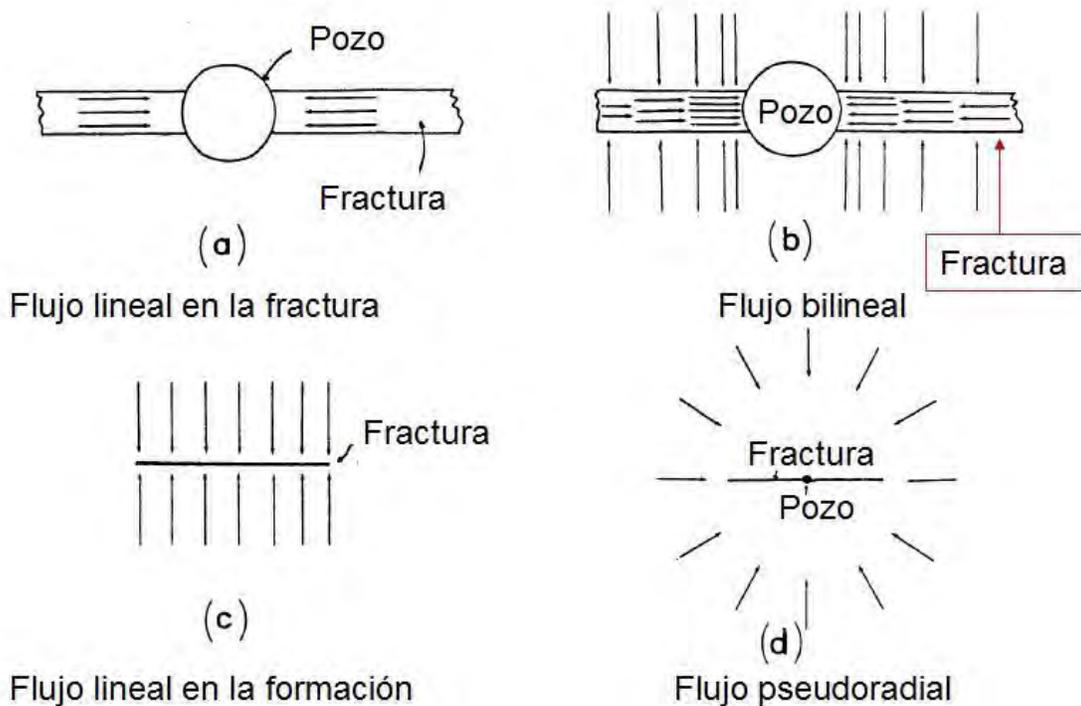


Figura V.3. Períodos de flujo para un pozo fracturado verticalmente.

Período de flujo lineal en la fractura

Este comportamiento ocurre a valores muy pequeños de tiempo adimensional y se muestra en todos los casos. Durante este periodo de flujo, la mayoría de los fluidos que entran a la vecindad del pozo provienen de la expansión del sistema dentro de la fractura y el flujo es esencialmente lineal, como se muestra en la **Figura V.3a**.

La respuesta de la presión adimensional en la vecindad del pozo está dada por:

$$P_{wD} = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\pi \eta_{dfD} t_{Dx_{df}}}$$

de ahí que, para aceite:

$$P_{wf} = P_i - \frac{\delta_{lfo} qB}{b_{df} h} \sqrt{\frac{\mu}{k_{df} \phi_{df} c_{df} t}}$$

en donde δ_{lfo} es una constante de conversión de unidades.

Estas ecuaciones indican que una gráfica log-log de presión contra tiempo, arroja una recta, cuyas pendientes son iguales a $\frac{1}{2}$. Una gráfica de presión o pseudopresión contra la raíz cuadrada del tiempo, también resultará en una recta, cuya pendiente dependerá de las características, excepto la longitud media de la fractura x_{df} .

El flujo lineal en la fractura dominante termina cuando:

$$t_{Dx_{df}} \cong \frac{0.01(k_{df} b_{df})_D^2}{\eta_{dfD}^2}$$

desafortunadamente, este periodo de flujo ocurre a un tiempo muy temprano para tener uso práctico.

Periodo de Flujo Bilineal

Examinemos ahora el comportamiento en una gráfica log-log de p_{wD} vs $t_{Dx_{df}}$ (**Figura V.2**). En el caso 1 $[(k_{df}b_{df})_D = 0.1]$, el flujo bilineal existe dentro de los puntos B y C después del periodo de flujo de transición, representado por el segmento AB. El comportamiento de la presión para el flujo bilineal muestra una línea recta, cuya pendiente es igual a $1/4$. La duración de estos periodos dependen de $(k_{df}b_{df})_D$ y C_{jDf} .

El segundo caso $[(k_{df}b_{df})_D = 500]$ puede o no presentar el periodo de flujo bilineal como se muestra en las curvas superiores e inferiores. La curva superior para el caso 2 corresponde a un valor bajo para C_{jDf} y muestra flujo bilineal durante un corto periodo de tiempo (segmento GH); sin embargo, la curva inferior corresponde a un valor alto de C_{jDf} , el cual no muestra el comportamiento del periodo de flujo bilineal, porque los efectos de la punta de la fractura se notan antes de que éste periodo aparezca (segmento LI).

La presión adimensional en la vecindad del pozo para flujo bilineal, está dada por:

$$p_{wD} = \frac{\pi}{\Gamma(1.25)\sqrt{2(k_{df}b_{df})_D}} t_{Dx_{df}}^{1/4} = \frac{2.45}{\sqrt{(k_{df}b_{df})_D}} t_{Dx_{df}}^{1/4} \quad (V.5)$$

esta ecuación indica que una gráfica p_{wD} vs $\sqrt[4]{t_{Dx_{df}}}$ produce una recta cuya pendiente será $\frac{2.45}{\sqrt{(k_{df}b_{df})_D}}$, interceptando en el origen, la **Figura V.4** presenta ese tipo de gráfica

para diferentes valores de $(k_{df}b_{df})_D$.

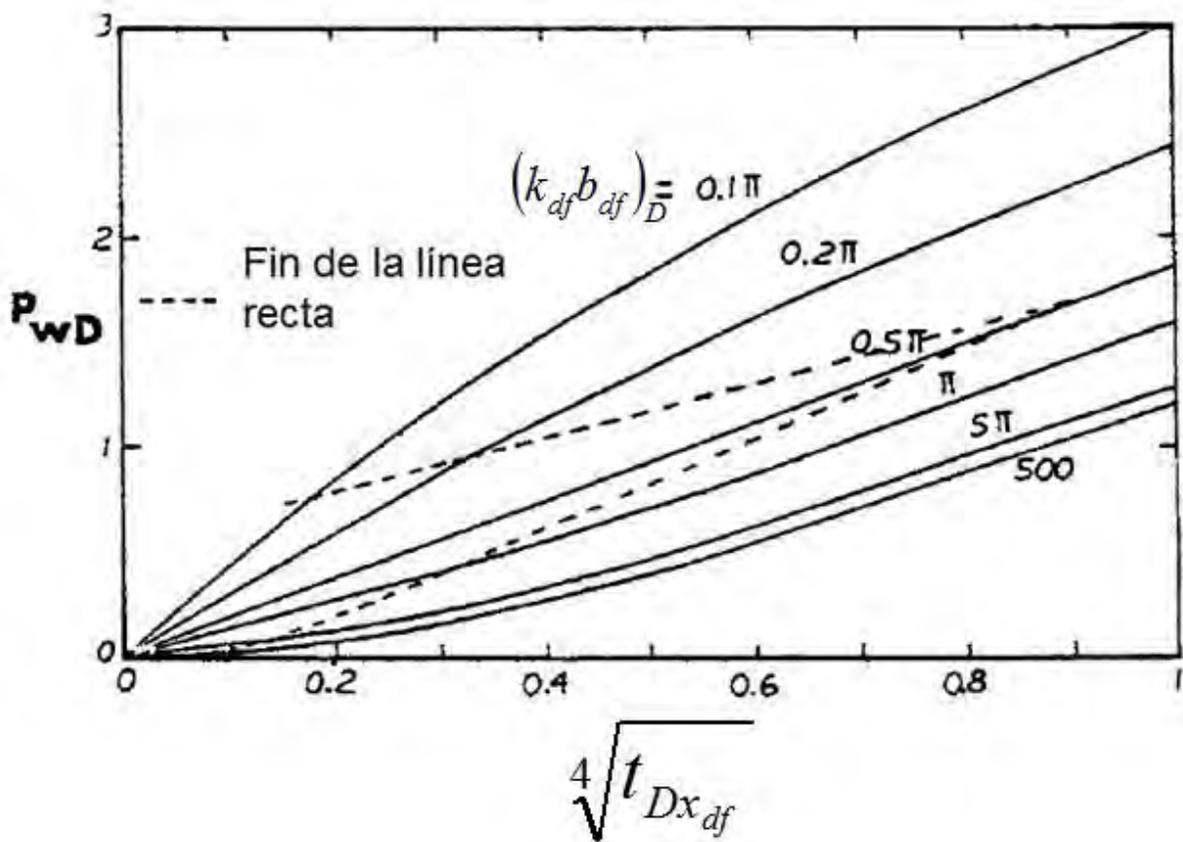


Figura V.4. P_{wD} vs $4\sqrt{t D x_{df}}$ para un pozo con una fractura vertical que tiene conductividad finita.

Un rasgo importante de esta gráfica es que después del periodo de flujo bilineal (porción de la línea recta), las curvas para $(k_{df} b_{df})_D \leq 1.6$ son cóncavas abajo y las curvas $(k_{df} b_{df})_D > 1.6$ son cóncavas arriba.

El final del período de flujo bilineal, depende de la conductividad de la fractura y puede ser expresada por:

$$t_{Debf} \cong \frac{0.01}{(k_{df} b_{df})_D^2}, \text{ para } (k_{df} b_{df})_D \geq 3 \quad (\text{V.6})$$

$$t_{Debf} \cong 0.0205[(k_{df} b_{df})_D - 1.5]^{-1.53}, \text{ para } 1.6 \leq (k_{df} b_{df})_D \leq 3 \quad (\text{V.7})$$

y

$$t_{Debf} \cong \left[\frac{4.55}{\sqrt{(k_{df} b_{df})_D}} - 2.5 \right]^{-4}, \text{ para } (k_{df} b_{df})_D \leq 1.6 \quad (V.8)$$

La **Figura V.5**, muestra una representación gráfica de estas ecuaciones.

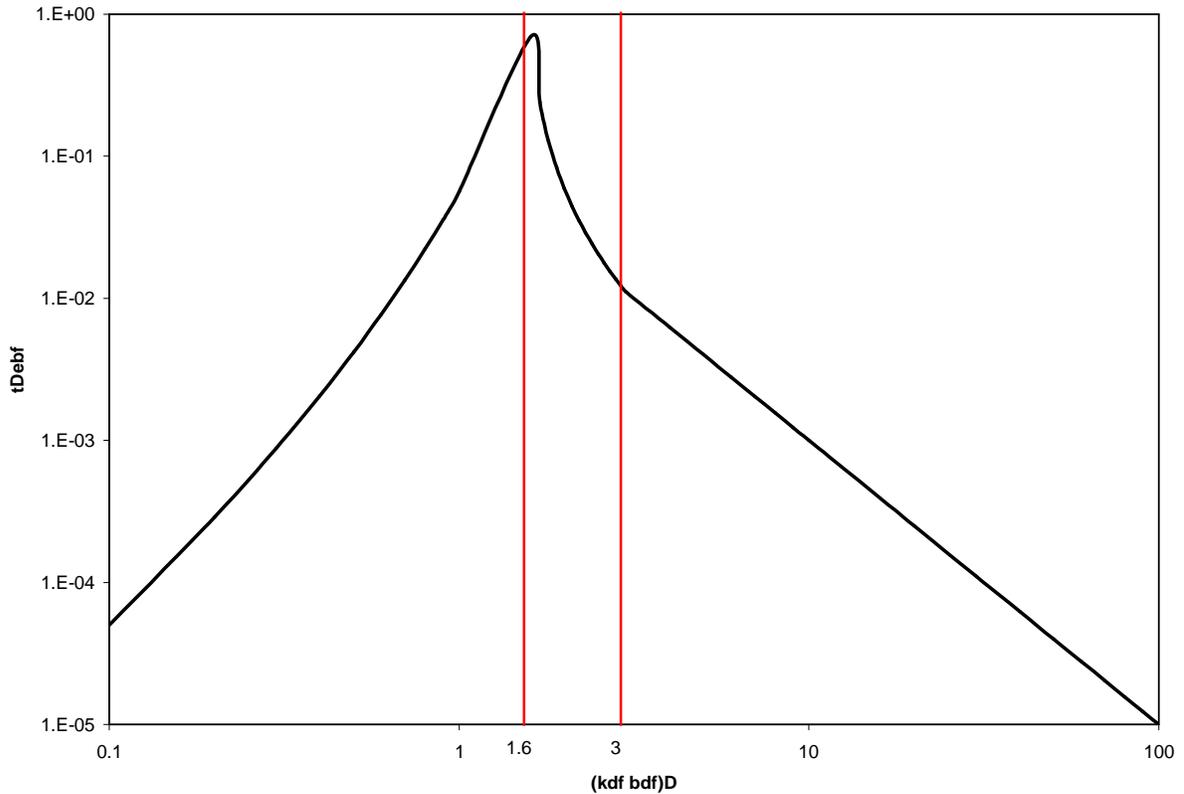


Figura V.5. Tiempo adimensional para el final del período de flujo bilineal contra la conductividad adimensional de la fractura dominante.

Análisis del flujo bilineal

El flujo bilineal se muestra por fracturas con conductividad finita con pequeñas capacidades de almacenamiento, C_{pdf} . Cualquier intento por analizar los datos de presión observados en este periodo de flujo utilizando métodos convencionales (p vs \sqrt{t} o p vs $\log t$) producirá resultados equivocados. A continuación se presenta el método de análisis apropiado, con base en la teoría de flujo bilineal.

Ecuaciones y Gráficas básicas

De la ecuación (V.5), la caída de presión para aceite, puede ser expresada como:

$$\Delta p = \frac{\delta_{bfo} q B \mu}{h(k_{df} b_{df})^{1/2} (\phi_i \mu c_i k_{fb})^{1/4}} \sqrt[4]{t} \quad (V.9)$$

en donde Δp es el cambio de la presión (pseudopresión) en una prueba. δ_{bfo} es una constante de conversión de unidades, está determinada en la Tabla 1.

La ecuación (V.9) indica que el cambio de la presión es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la conductividad de la fractura y directamente proporcional a la raíz cuarta del tiempo. De acuerdo con las mismas ecuaciones, una gráfica de Δp vs $\sqrt[4]{t}$ produce una línea recta que pasa a través del origen, cuya pendiente, $m_{bf} = 1/4$ (**Figura V.6**), puede ser usada como una herramienta de diagnóstico para la detección de flujo bilineal. Dicha pendiente está dada para aceite por:

$$m_{bf} = \frac{\delta_{bfo} q B \mu}{h(k_{df} b_{df})^{1/2} (\phi_i \mu c_{ifb} k_{fb})^{1/4}}$$

de ahí que el producto $h(k_{df} b_{df})^{1/2}$, pueda ser estimado, empleando las siguientes ecuaciones. Para aceite:

$$(k_{df} b_{df})^{1/2} = \frac{\delta_{bfo} q B \mu}{m_{bf} (\phi_i \mu c_{ifb} k_{fb})^{1/4}}$$

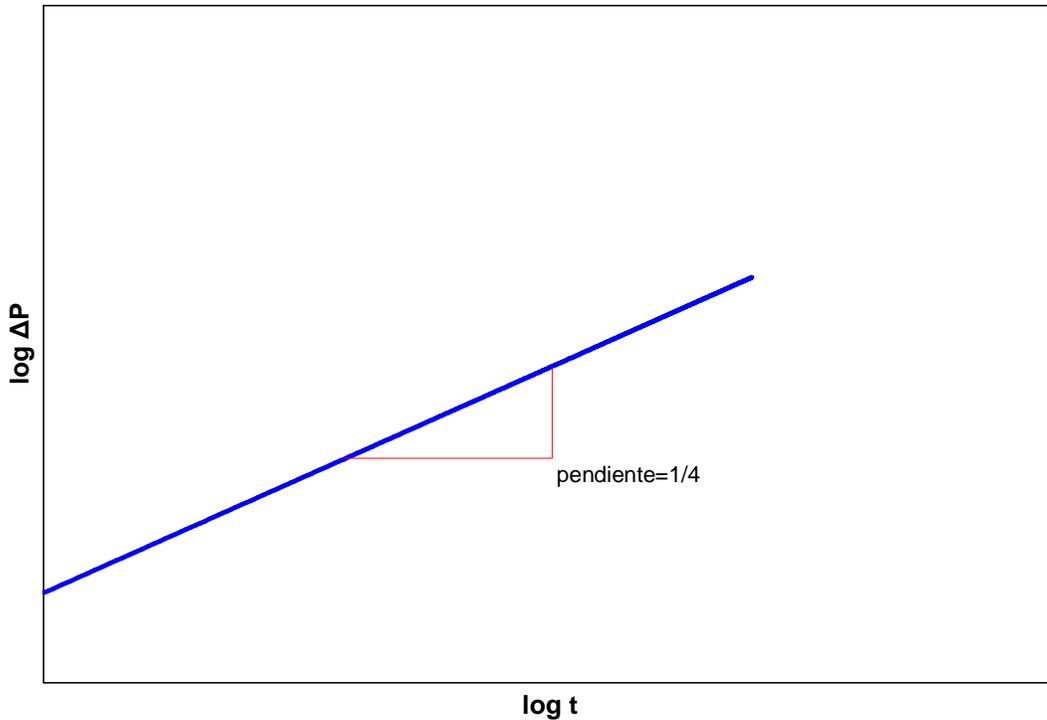


Figura V.6. Gráfica log-log de datos de presión para flujo bilineal.

Las ecuaciones anteriores indican que los valores de las propiedades del yacimiento deben estar disponibles para estimar el grupo $h(k_{df}b_{df})^{1/2}$. Nótese que esta técnica de análisis tiende a reducir el efecto del error introducido, cuando se utiliza información pobre de las propiedades del yacimiento (k_{fb} , ϕ_i y c_{fb}).

De las ecuaciones (V.5) a (V.8), sí $(k_{df}b_{df})_D \leq 3$, la caída de presión adimensional al final del periodo de flujo bilineal, esta dado por:

$$(p_{wD})_{ebf} \cong \frac{1.38}{(k_{df}b_{df})_D}$$

de ahí, la conductividad adimensional de la fractura puede ser estimada utilizando la ecuación siguiente:

$$(k_{df}b_{df})_D \cong \frac{1.38}{(p_{wD})_{ebf}}$$

$(p_{wD})_{ebf}$ puede ser calculada utilizando la ecuación (V.1); Δp_{ebf} de la gráfica de flujo bilineal.

Todos los comentarios acerca de la concavidad de las curvas en la **Figura V.4**, son válidos para las curvas de la **Figura V.7**.

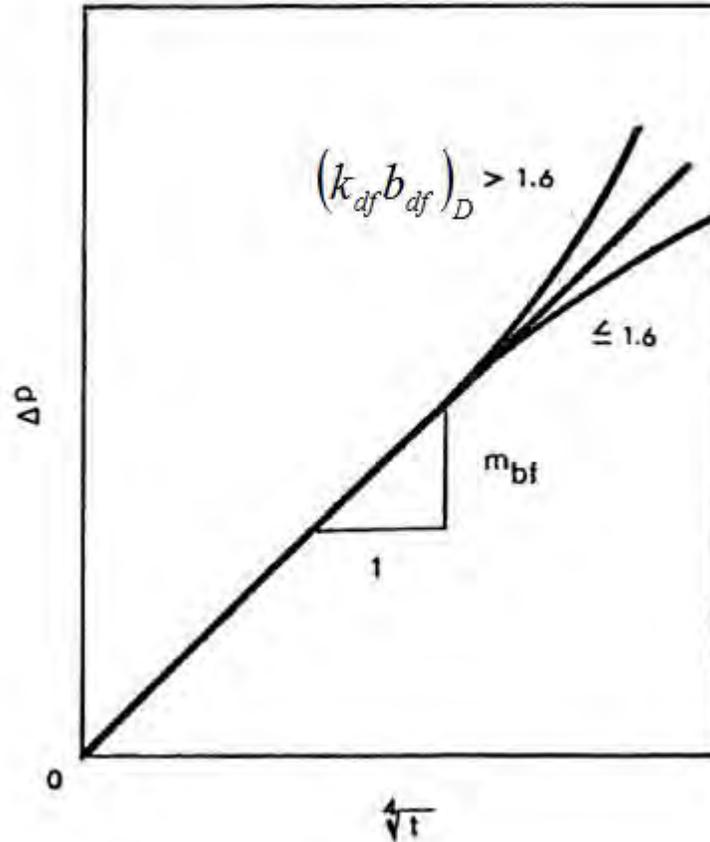


Figura V.7. Gráfica para el análisis de la presión del flujo bilineal.

Extensiones y limitantes

La región afectada durante el flujo bilineal incluye sólo la fractura dominante y sus alrededores, porque ocurre a tiempos tempranos, incluso en un sistema de una fractura dominante parcialmente penetrada. Por eso, las ecuaciones y gráficas discutidas en la sección previa para flujo bilineal puede ser extendida para los casos en que la fractura dominante no penetra el espesor de la formación completamente. Esto es posible

usando simplemente la altura de la fractura dominante, h_{df} , en lugar del espesor de la formación h .

En casos en donde existe una restricción de flujo (baja conductividad, flujo turbulento), dentro de la fractura, en los alrededores de la vecindad del pozo, el flujo bilineal aún ocurre y el análisis de los datos de presión ya discutido puede ser aplicado (ver **Figura V.8**). Una caída de presión extra, Δp_s , es creada en este caso para que la porción de la recta no intercepte al origen. Estas situaciones deforman la porción de la recta en la gráfica log-log.

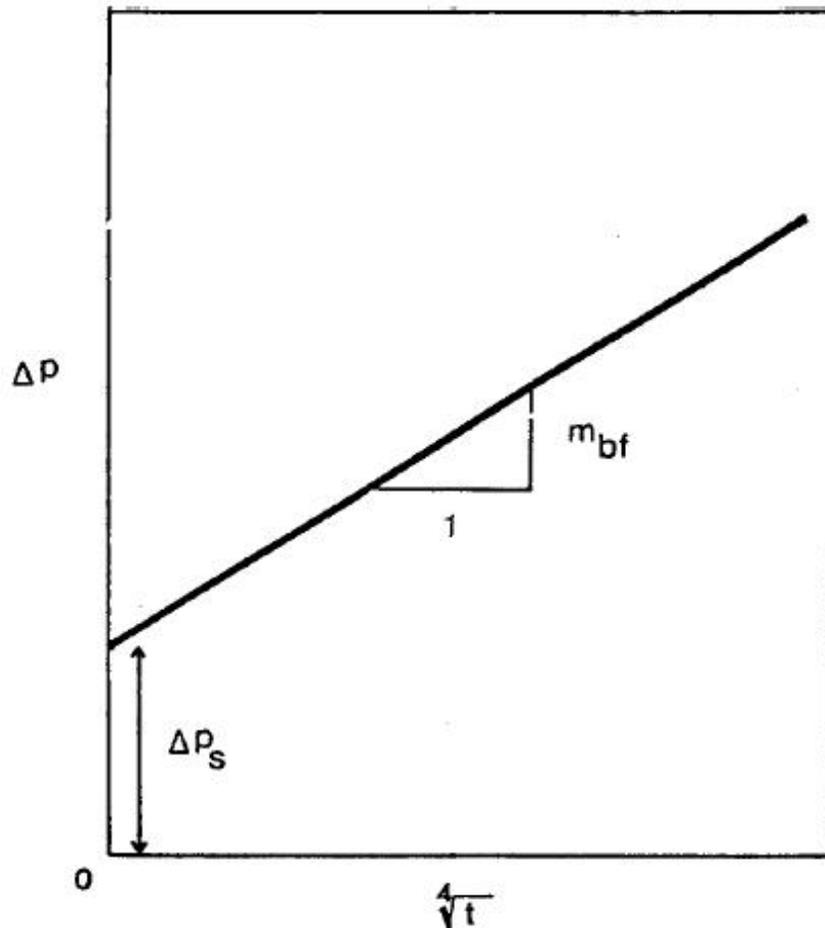


Figura V.8. Gráfica para flujo bilineal en una fractura con una restricción de flujo cerca de la vecindad del pozo.

Sí los efectos de almacenamiento en la vecindad del pozo afecta el sistema, el comportamiento de la presión del flujo bilineal puede ser ocultado, como se muestra en la **Figura V.9**, y los datos se hacen difíciles (o imposibles) de analizar, con los métodos de interpretación actuales.

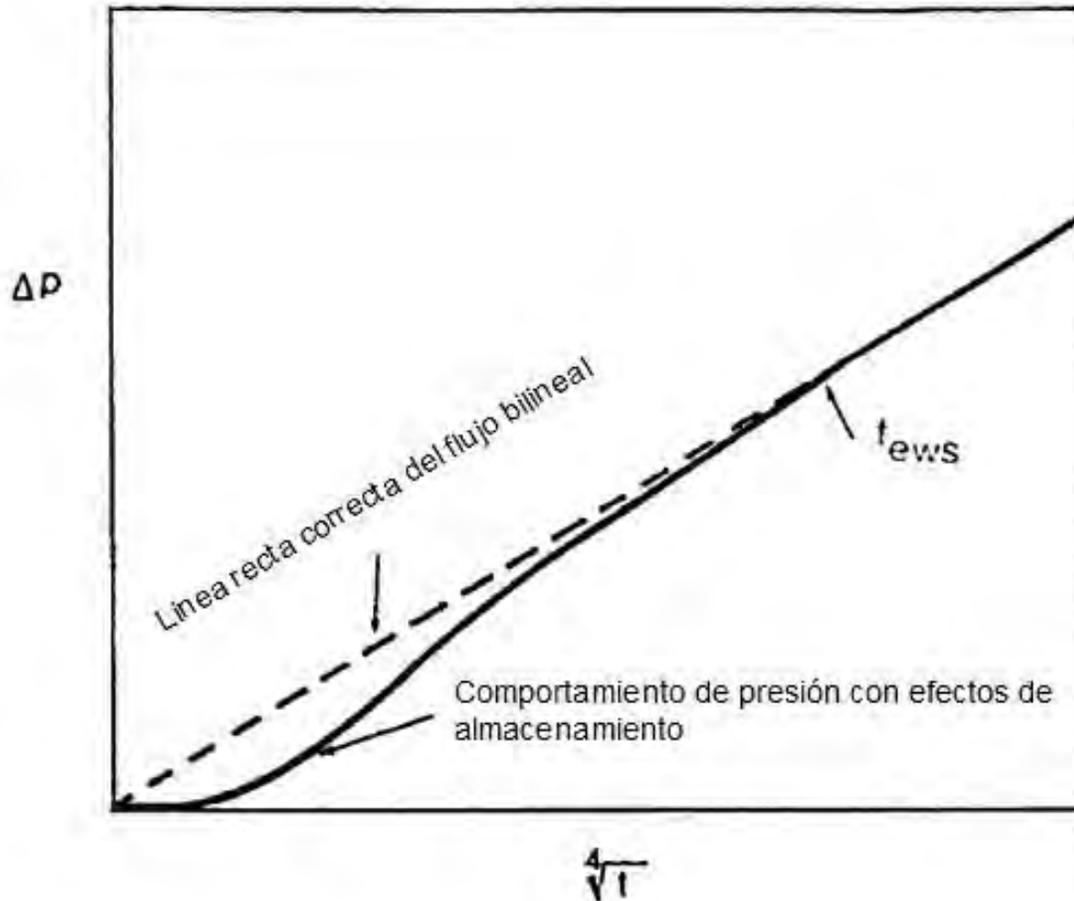


Figura V.9. Efecto del almacenamiento en la gráfica del flujo bilineal.

Identificación de régimen de flujo y curvas tipo

El comportamiento de la presión de un pozo fracturado podría mostrar varios periodos de flujo para valores prácticos de tiempo: flujo bilineal, flujo lineal en la formación y flujo pseudoradial.

Los datos de presión para cada período de flujo debe ser analizado utilizando un método de interpretación específico (p_w vs $\sqrt[4]{t}$, p_w vs \sqrt{t} y p_w vs $\log t$, para bilineal, lineal y pseudoradial, respectivamente).

La gráfica log-log ha sido utilizada comúnmente como herramienta de diagnóstico para detectar diferentes regímenes de flujo en una prueba de presión transitoria. El uso de curvas tipo en el análisis de los datos de presión para pozos fracturados, representa un gran avance en esa área. La primera curva tipo para pozos fracturados fue presentada por Gringarten y colaboradores (1975), Cinco-Ley y colaboradores (1978), mostraron que la solución de Gringarten y Ramey (1974), para una fractura vertical dominante con conductividad infinita, se comporta como la solución para una fractura vertical dominante con conductividad finita de $(k_{df} b_{df})_D \geq 300$; además, mostraron que el flujo vertical dominante uniforme, se comporta como una fractura vertical dominante con conductividad variable. El análisis de curvas tipo ofrece una ventaja sobre los métodos de análisis específicos ya mencionados, porque pueden ser aplicados para interpretar datos de una prueba de presión que corresponden a diferentes períodos de flujo. Además, el análisis de curvas tipo puede indicar cuando se aplican las diferentes técnicas gráficas.

Los comportamientos de los datos nos han mostrado, que en algunos casos, la aplicación de las curvas tipo disponibles para fracturas verticales dominantes con conductividad finita, no arrojan resultados únicos. Esto es debido a la forma de la curva del comportamiento de la presión es similar para diferentes valores de conductividad adimensional de la fractura sobre algunas regiones de las curvas tipo. Una inspección cercana de la **Figura V.2**, indica que un problema característico podría existir si los datos de presión por analizar ocurren en el periodo de flujo bilineal o pseudoradial.

Una presentación conveniente de las curvas tipo fue publicada por Cinco y colaboradores (1978), Ramey y colaboradores (1978) y Agarwal y colaboradores (1979) es presentada en la **Figura V.10**. Se muestra una gráfica de $\log[p_{wD}(k_{df} b_{df})_D]$ vs

$\log \left[t_{Dx_{df}} \left(k_{df} b_{df} \right)_D^2 \right]$. El rasgo principal de esta gráfica es que para todos los valores de $\left(k_{df} b_{df} \right)_D$ el comportamiento de los flujos bilineal (pendiente $\frac{1}{4}$) y lineal en la formación (pendiente $\frac{1}{2}$) está dado por una sola curva. Nótese que hay un periodo de transición entre los flujos bilineal y lineal. La línea generada en esta figura indica el comienzo aproximado del periodo de flujo pseudoradial (recta semilog). También se muestra el final del flujo bilineal y el inicio del flujo lineal en la formación; el tiempo para el final del flujo bilineal de la **Figura V.10**, concuerda con el resultado presentado en la Figura V.5. Los grupos de variables usados en la Figura V.10, fueron derivados en el apéndice B, de la referencia 8, en donde es mostrado, para algunos valores de conductividad de fractura, el flujo bilineal termina cuando los efectos de la punta de la fractura se presencian en la vecindad del pozo.

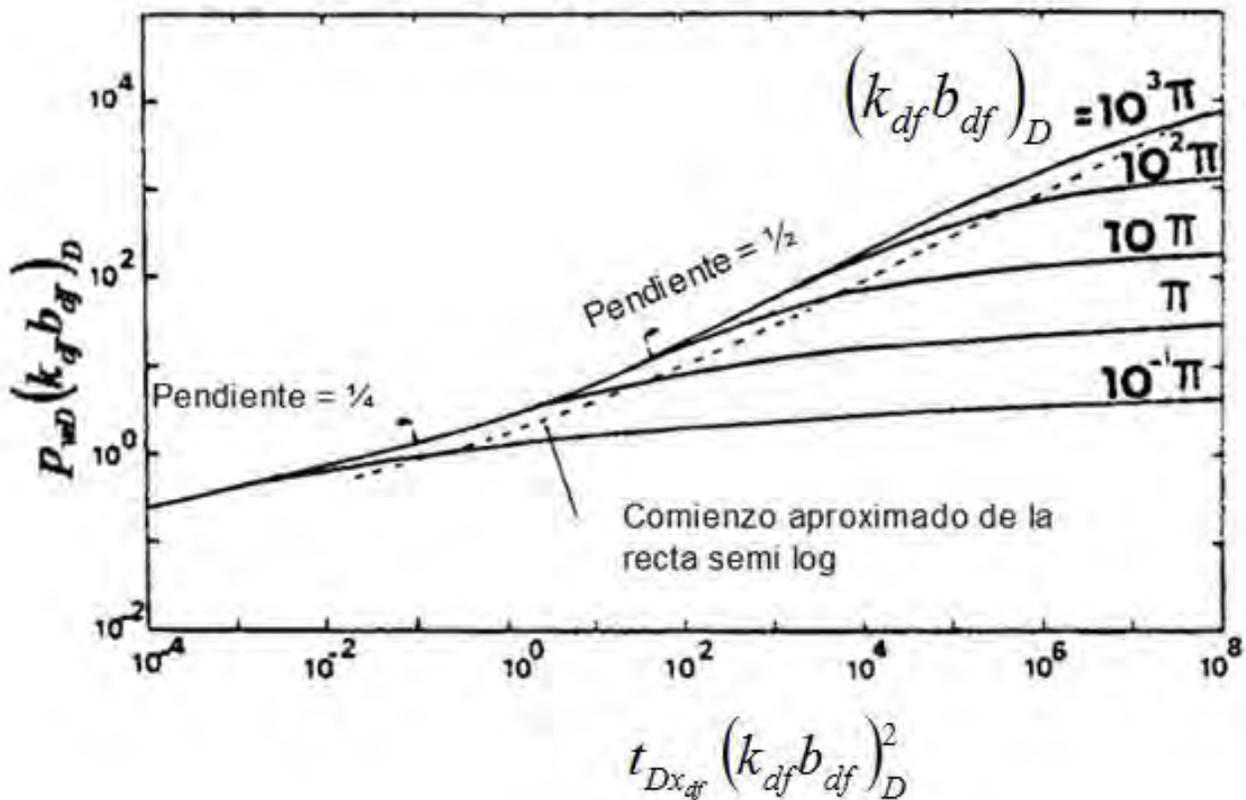


Figura V.10. Curvas tipo para pozos verticalmente fracturados.

Aunque algunas curvas se presentan para $(k_{df} b_{df})_D > 20\pi$, la forma de estas líneas es esencialmente la misma. La única diferencia es la duración del flujo lineal de la formación (pendiente $\frac{1}{2}$); esto es, la conductividad mayor de la fractura, el período de flujo lineal más largo.

El comienzo del flujo lineal en la formación ocurre a $t_{Dbf} (k_{df} b_{df})_D^2 \approx 10^2$, es decir:

$$t_{Dbf} \approx \frac{100}{(k_{df} b_{df})_D^2}$$

El final de este período de flujo está dado por:

$$t_{Def} \approx 0.016$$

De lo anterior, la conductividad de la fractura puede ser estimada por:

$$(k_{df} b_{df})_D \approx \frac{10}{\sqrt{t_{Dbf}}}$$

o bien,

$$(k_{df} b_{df})_D \approx 1.25 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{t_{elf}}{t_{blf}}} \quad (V.9.1)$$

estas ecuaciones pueden aplicarse cuando $(k_{df} b_{df})_D \geq 100$.

La **Figura V.10** puede ser utilizada como curva tipo para analizar datos de presión para un pozo fracturado. Los datos de presión en una gráfica de $\log \Delta p$ vs $\log t$ se ajustan a una curva tipo para determinar $(\Delta p)_M$, $[p_{wD} (k_{df} b_{df})_D]_M$, $(t)_M$, $[t_{Dx_{df}} (k_{df} b_{df})_D^2]_M$, $[(k_{df} b_{df})]_M$, $(t_{ebf})_M$, $(t_{blf})_M$ y $(t_{bssl})_M$. A partir de esta información, podemos estimar lo siguiente:

Conductividad adimensional de la fractura dominante:

$$[(k_{df} b_{df})_D]_M$$

Permeabilidad de la formación, para aceite:

$$k_o = \frac{\alpha_o q B \mu \left[p_{wD} (k_{df} b_{df})_D \right]_M}{h(\Delta p)_M \left[(k_{df} b_{df})_D \right]_M}$$

Longitud media de la fractura dominante:

$$x_{df} = \left[\frac{\beta k_{fb} (t)_M \left[(k_{df} b_{df})_M \right]^2}{\phi_t \mu c_{tfb} \left[t_{Dx_{df}} (k_{df} b_{df})_D \right]_M^2} \right]^{1/2}$$

Conductividad de la fractura dominante:

$$k_{df} b_{df} = k_{fb} x_{df} \left[(k_{df} b_{df})_D \right]_M$$

Fin del flujo bilineal:

$$(t_{ebf})_M$$

Comienzo del flujo lineal en la formación:

$$(t_{blf})_M$$

Comienzo de la línea recta semilog:

$$(t_{bssl})_M$$

Estos resultados pueden ser obtenidos sí existen varios datos de presión disponibles. Debe tenerse presente que el análisis específico de las gráficas debe ser utilizado para diferentes regímenes de flujo, para obtener una mejor estimado de los parámetros del yacimiento y la fractura.

Ahora se discutirán los casos en donde todos los datos de presión caen en una porción pequeña de la curva tipo y un grupo completo de información puede no ser obtenida.

Caso 1. Los datos de presión muestran una pendiente de un cuarto en una gráfica log-log (**Figura V.6**). De acuerdo con lo tratado en la sección previa, estos datos corresponden al período de flujo bilineal y no se puede obtener un ajuste único con la Figura V.10. El tipo de análisis del flujo bilineal es el único método disponible para este caso, para obtener información referente a $(k_{df}b_{df})$.

Un valor mínimo de la longitud media de la fractura x_{df} , puede ser estimado de las ecuaciones (V.6) a (V.8), para el final del flujo bilineal; esto es, para $(k_{df}b_{df}) \geq 3$, se tiene:

$$x_{df} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{10\beta(k_{df}b_{df})^2 t_{ebj}}{\phi_i \mu c_{fb} k_{fb}}}$$

Generalmente, el efecto de almacenamiento en la vecindad del pozo afecta a la prueba a tiempos tempranos, por eso, se espera tener datos de presión distorsionados debido a este efecto, causando una desviación de la recta de pendiente un cuarto, de este periodo de flujo. La **Figura V.11** puede ser aplicada para analizar los datos de presión para este caso, inclusive cuando la duración de la prueba no sea suficiente para alcanzar la porción de $\frac{1}{4}$ de pendiente de la recta. Es importante notar que el comportamiento de la presión en la **Figura V.11** para las porciones del efecto de almacenamiento en la vecindad del pozo y de flujo bilineal, está dado por una sola curva que elimina por completo el problema de ajuste. Los parámetros de correlación $F_1(p_{wD})$ y $F_2(t_{Dx_{df}})$ usados en esta figura, son derivados en el apéndice C y definidos en la **Figura V.11**.

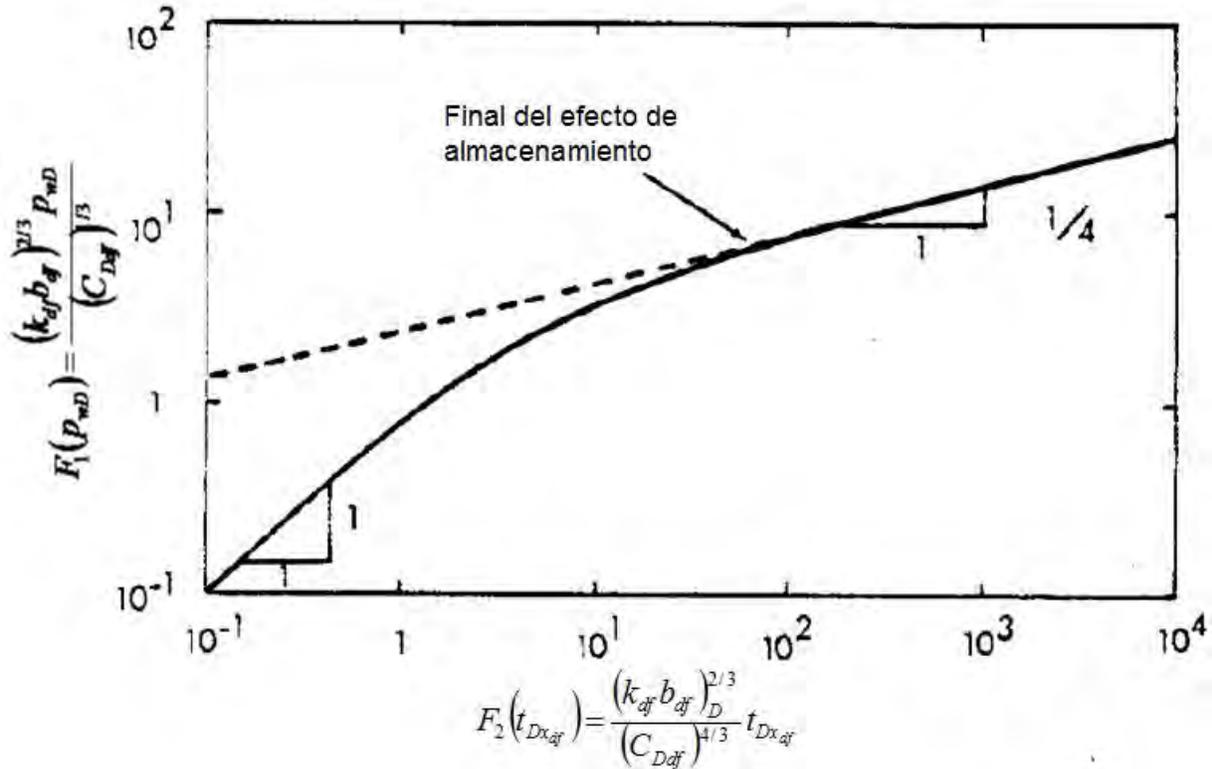


Figura V.11. Curva tipo para almacenamiento bajo condiciones de flujo bilineal.

El final del efecto de almacenamiento en la vecindad del pozo en la **Figura V.11**, ocurre cuando $F_2(t_{Dx_{df}}) \approx 2 \times 10^2$, que arroja:

$$t_{ews} \approx \frac{17.25}{\beta} \sqrt[3]{\frac{C^4}{(k_{df} b_{df})^2 h^4 \phi_i c_{fb} k_{fb}}}$$

De la observación de los resultados presentados en la **Figura V.11**, podemos ver que el final de los efectos de almacenamiento ocurre tres ciclos logarítmicos después del fin de la pendiente unitaria.

Este criterio es útil para determinar si la porción elegida de recta para el análisis de flujo bilineal es la adecuada (ver **Figura V.9**). Si la **Figura V.11** se utiliza como curva tipo, debería obtenerse la siguiente información: $[F_1(p_{wD})]_M$, $[F_2(t_{Dx_{df}})]_M$, $(\Delta p)_M$ y $(t)_M$.

Entonces se puede estimar lo siguiente:

Constante de almacenamiento en la vecindad del pozo, para aceite:

$$C = \frac{2\pi\alpha_o\beta qB\mu(t)_M [F_1(p_{wD})]_M}{(\Delta p)_M [F_2(t_{Dx_f})]_M}$$

Conductividad de la Fractura, para aceite:

$$k_{df}b_{df} = \frac{0.4}{h^2} \sqrt{\frac{C}{\phi_i c_{tfb} k_{fb}} \left\{ \frac{\alpha_o q B \mu [F_1(p_{wD})]_M}{(\Delta p)_M} \right\}^3}$$

Caso 2. Datos de presión ajustados parcialmente con la curva para el período de flujo de transición entre los flujos lineal y bilineal (**Figura V.12**). En este caso, la porción que resta de los datos podría corresponde al flujo lineal o bilineal y el ajuste con la curva tipo es único porque el período de transición tiene una forma característica. Este comentario es válido para conductividades de fractura adimensionales, $(k_{df}b_{df})_D \geq 5\pi$.

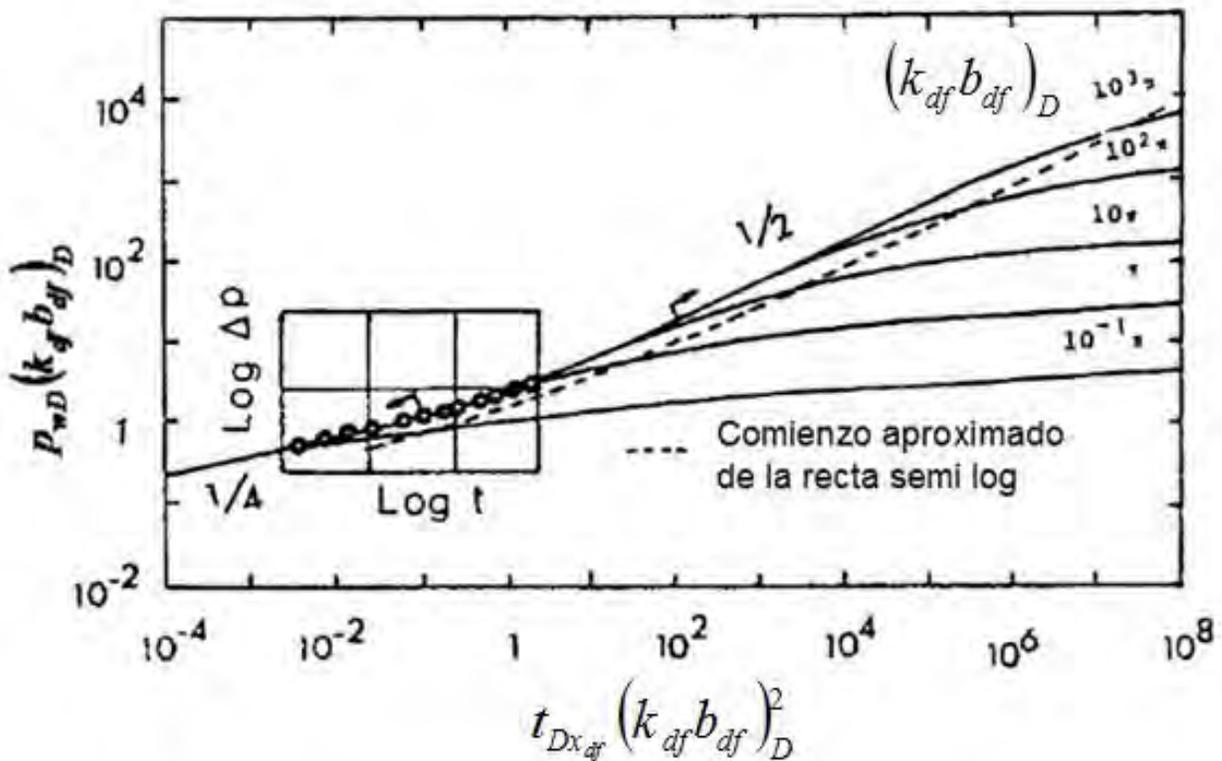


Figura V.12. Ajuste de la curva tipo para datos de flujo bilineal y transitorio.

Del ajuste de la curva tipo de datos de presión para este caso, en la **Figura V.10**, obtenemos $[p_{wD}(k_{df}b_{df})_D]_M$, $[t_{Dx_{df}}(k_{df}b_{df})_D^2]_M$, $(\Delta t)_M$ y $(\Delta p)_M$.

Entonces, para aceite:

$$\left(\frac{k_{df}b_{df}}{x_{df}}\right) = \frac{\alpha_o q B \mu}{h(\Delta p)_M} [p_{wD}(k_{df}b_{df})_D]_M \quad (V.10)$$

Longitud de fractura media y conductividad de fractura. Para aceite:

$$x_{df} = \left(\frac{k_{df}b_{df}}{x_{df}}\right) \sqrt{\frac{\beta(t)_M}{\phi_t \mu c_{fb} k_{fb} [t_{Dx_{df}}(k_{df}b_{df})_D^2]_M}}$$

y

$$k_{df}b_{df} = x_{df} \left(\frac{k_{df}b_{df}}{x_{df}}\right)$$

Desde que la permeabilidad de la formación es generalmente conocida por pruebas prefactura, la conductividad adimensional de la fractura puede ser estimada utilizando los resultados de la ecuación (V.10). Algunos de estos resultados también pueden ser obtenidos de métodos específicos de análisis correspondientes al período de flujo mostrado por datos más que por la región de flujo de transmisión (i.e. flujo bilineal, flujo lineal en la formación, como se discutió en la sección de análisis de flujo bilineal y en la referencia XX, Clark 1968).

Sí todos los datos de presión caen en el período de transición de la curva, el ajuste de la curva tipo (**Figura V.10**) en el único método de análisis disponible.

Caso 3. *Datos de presión que muestran un línea de pendiente 1/2 en una gráfica log-log.* Para este caso no hay un ajuste único con la **Figura V.10**; sin embargo, el análisis de flujo lineal presentado por Clark (1968) puede ser aplicado para obtener la longitud media de la fractura sí la permeabilidad e la formación es conocida. Además, se puede

estimar un valor mínimo de la conductividad adimensional de la fractura, $(k_{df}b_{df})_D$ utilizando la ecuación (V.9.1). Nótese que t_{bif} en la **Figura V.13** representa un valor máximo de tiempo de inicio del período de flujo lineal y t_{elf} representa un valor mínimo para el tiempo del final de pendiente $1/2$.

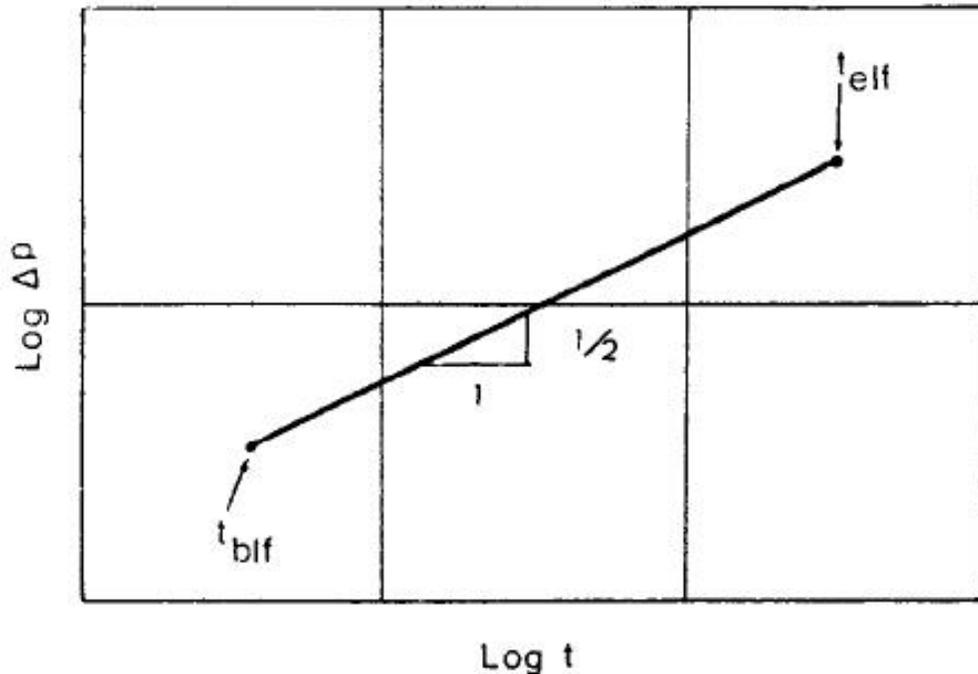


Figura V.13. Datos de presión para una recta en una gráfica log-log.

Sí los efectos del almacenamiento en la vecindad del pozo se presentan a tiempo tempranos en un prueba para este caso, el análisis puede ser hecho utilizando la curva tipo presentada por Ramey y Gringarten (1975).

Caso 4. *Datos de presión parcialmente ajustados con la curva para período de flujo pseudoradial.* Sí no se tiene disponibles suficientes datos de presión, podría no obtenerse un ajuste único utilizando la **Figura V.10**, porque las curvas para diferentes valores de conductividad de fractura tienen una forma similar para el período de flujo pseudoradial. Sin embargo, el comportamiento de presión transitoria mostrado en la **Figura V.10** puede ser correlacionado para analizar mejor estos casos.

Para el período de flujo pseudoradial, un pozo fracturado se comporta como un pozo no fracturado con un radio efectivo de drenaje como función de la conductividad adimensional de fractura, $(k_{df}b_{df})_D$. La **Figura V.14** presenta una gráfica de radio de drenaje efectivo, r_w' / x_{df} contra conductividad adimensional de fractura $(k_{df}b_{df})_D$. Nótese que para valores grandes de $(k_{df}b_{df})_D$ (>300), el radio de drenaje adimensional efectivo es 0.5, como lo mencionó Prats y colaboradores

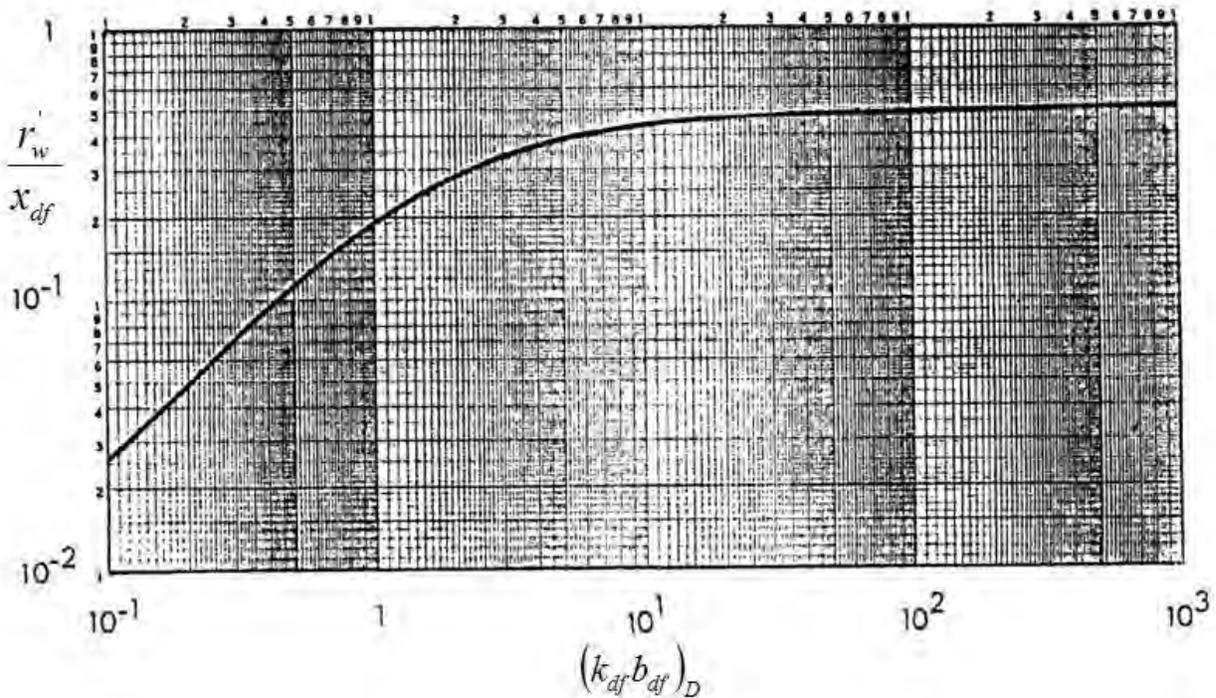


Figura V.14. Radio de drenaje efectivo contra la conductividad de una fractura vertical.

Si el tiempo adimensional es definido utilizando r_w' en lugar de x_{df} , una gráfica de p_{wD} vs t'_{Dr_w} provee una sola curva para el período de flujo pseudoradial para todos los valores de la conductividad adimensional de fractura (ver **Figura V.15**). Esta curva provee una herramienta excelente para el análisis de curvas tipo de datos de presión que caen parcialmente en el período pseudoradial, porque los datos remanentes deben seguir una de las curvas para conductividades de fractura diferentes. La **Figura V.14** debe ser usada como una curva auxiliar para determinar $(k_{df}b_{df})_D$ cuando se utiliza la **Figura V.15**.

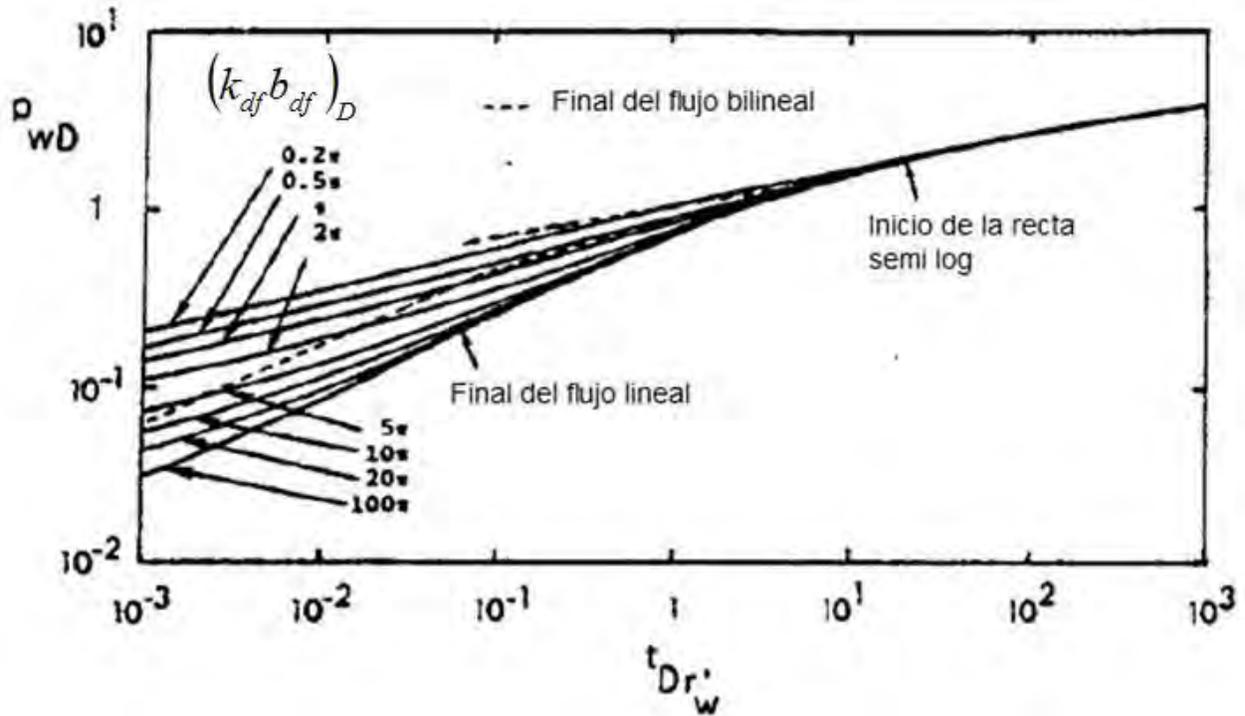


Figura V.15. Curva tipo para una fractura vertical con conductividad finita.

La **Figura V.15** se utiliza para ajustar los datos de presión, se provee $(p_{wD})_M$, $(t_{Dr_w})_M$, $(\Delta p)_M$, $(t)_M$ y $[(k_{df} b_{df})_D]_M$, de ahí se obtienen las siguientes ecuaciones:

Permeabilidad de la formación, para aceite:

$$k_{fb} = \frac{\alpha_o q B \mu}{h (\Delta p)_M} (p_{wD})_M \quad (V.11)$$

Radio de efectivo de drene:

$$r_w' = \sqrt{\frac{\beta k_{fb} (t)_M}{\phi_i \mu c_{fb} (t_{Dr_w})_M}} \quad (V.12)$$

Utilizando $[(k_{df} b_{df})_D]_M$ en la **Figura V.14**, se obtiene $(r_w' / x_{df})_{fig14}$, entonces:

$$x_{df} = \frac{r_w'}{(r_w' / x_{df})_{fig14}}$$

Los datos de presión que caen en el período de flujo pseudoradial, también deben ser analizados utilizando los método semilog, para estimar k_{fb} y r_w' .

La discusión en esta sección claramente indica (como mencionó Agarwal y colaboradores) que la precaución y la diligencia deben ser ejercitados para aplicar la técnica de ajuste de curvas tipo. Para emplear el tipo de análisis presentados en los cuatro casos, es necesario contar con información de pruebas prefractura.

Debe tenerse presente que la aplicación del análisis del método de curvas tipo, para pruebas de incremento de presión es apropiado cuando el tiempo de producción es largo.

Ejemplo de aplicación

A continuación se muestra un ejemplo que ilustra la aplicación de varios de los métodos y teoría discutida previamente.

Pozo C

Después de un tiempo de flujo de 1,890 horas, se corrió una prueba de incremento de presión en un pozo fracturado de aceite. La información para la prueba y el análisis de resultados se presentan en la Tabla 4. **La Figura V.20** muestra una gráfica de los datos de presión; de ésta gráfica podemos ver que ninguna pendiente de $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ se presenta por los datos. También se muestra en la **Figura V.16** que los datos de presión se ajustan con la curva para $(k_{df}b_{df})_D = 2\pi$ dada en la **Figura V.15**, y los últimos cinco puntos caen en una recta semilog.

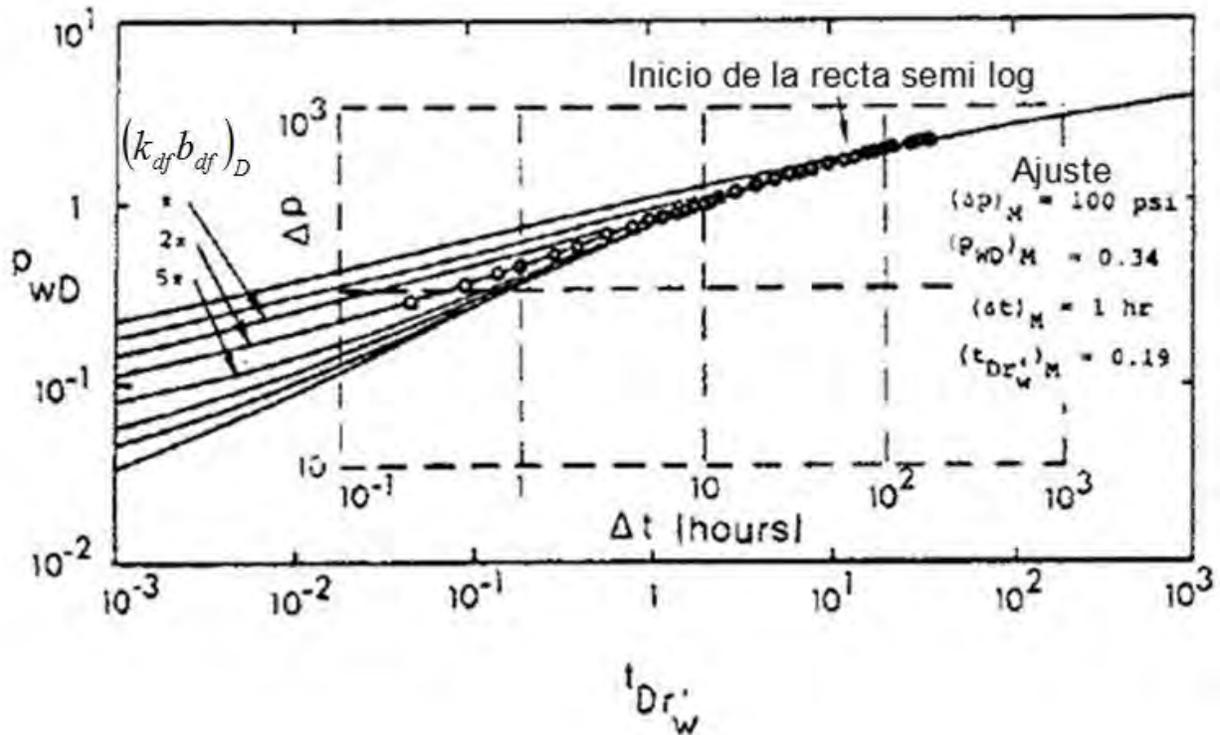


Figura V.16. Ajuste de la curva tipo para el pozo C.

Del ajuste de la presión obtenido en la **Figura V.16** y la ecuación (V.11), se calcula:

$$k_{fb} = \frac{141.2 \times 220 \times 1.2 \times 0.8 \times 0.34}{49 \times 100} = 2.07 \text{ md}$$

Utilizando la información del ajuste del tiempo en la ecuación (V.12):

$$r_w' = \sqrt{\frac{2.637 \times 10^{-4} \times 2.07 \times 1}{0.15 \times 0.8 \times 17.6 \times 10^{-6} \times 0.19}} = 36.9 \text{ ft}$$

De la Figura V.14, $r_w' / x_{df} = 0.415$, entonces,

$$x_{df} = \frac{36.9}{0.415} = 88.9 \text{ ft}$$

El factor de daño se estima por:

$$s = \ln \frac{r_w}{r_w'} = \ln \frac{0.25}{36.9} = -4.99$$

La conductividad de la fractura es:

$$k_{df}b_{df} = (k_{df}b_{df})_D k_{fb}x_{df} = 2\pi \times 2.07 \times 88.9 = 1,156.2 \text{ md} - \text{ft}$$

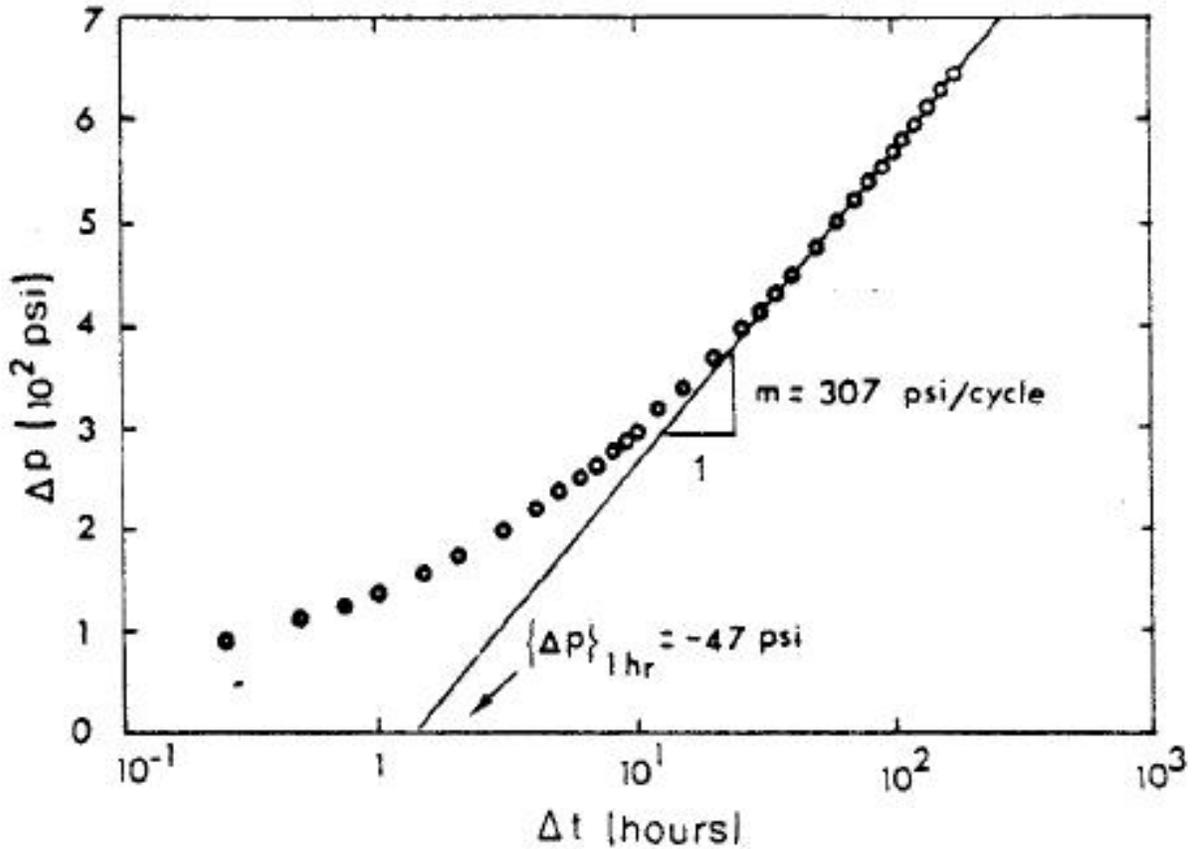


Figura V.17. Gráfica semilog para el pozo C.

La **Figura V.17** es una gráfica semilog para este ejemplo. La recta semilogarítmica tiene una pendiente $m = 307 \text{ psi/ciclo}$ ($\Delta p)_{hr} = -47 \text{ psi}$, entonces la permeabilidad de la formación puede ser calculada como:

$$k_{fb} = \frac{162.6qB\mu}{mh} = \frac{162.6 \times 220 \times 1.2 \times 0.8}{307 \times 49} = 2.28 \text{ md}$$

El factor de daño es:

$$s = 1.151 \left[\frac{(\Delta p)_{hr}}{m} - \log \left(\frac{k_{fb}}{\phi_i \mu c_{fb} r_w^2} \right) + 3.2275 \right]$$

$$s = 1.152 \left[-\frac{47}{307} - \log \left(\frac{2.28}{0.15 \times 0.8 \times 17.6 \times 10^{-6} \times (0.25)^2} \right) + 3.2275 \right] = -4.8$$

Finalmente, el radio efectivo del pozo es:

$$r_w' = r_w e^{-s} = 0.25 e^{4.8} = 30.37 \text{ ft}$$

Los resultados provistos por los análisis usando curvas tipo y semilog concuerdan muy bien. De estos ejemplos se demuestra que el análisis de curvas tipo, cuando se aplica apropiadamente, provee una excelente herramienta de diagnóstico y una técnica para estimar los parámetros del yacimiento y la fractura.

Con base en las metodologías mostradas, se puede hacer la observar que el comportamiento de flujo transitorio de un pozo en una fractura vertical podría mostrar cuatro períodos de flujo: (a) flujo lineal en la fractura, (b) flujo bilineal, (c) flujo lineal en la formación, y (d) flujo pseudoradial.

Incorporación del Almacenamiento en el Pozo

El gasto adimensional en la cara del pozo está dado por:

$$q_D(t_D) = e^{-\beta t_D},$$

donde:

$$\beta = \frac{\alpha \phi \mu c_i x_{df}^2}{k},$$

y

$$t_D = \frac{k}{\phi \mu c_i x_{df}^2};$$

en donde α es el parámetro determinado de presión en el pozo [1/hrs].

A un gasto constante y considerando el daño en el pozo, el gasto se expresa como:

$$q_{sD}(t_D) = 1 - q_D(t_D) = 1 - e^{-\beta t_D} . \quad (\text{III.15})$$

La presión adimensional en el pozo para un gasto variando continuamente es:

$$p_{wD}(t_D) = q_{sD}(0)p_{sD}(t_D) + \int_0^{t_D} \frac{dq_{sD}(t_D - \tau)}{d\tau} p_{sD}(\tau) d\tau . \quad (\text{III.16})$$

Al evaluar $t_D = 0$ en la ecuación (III.15), ésta queda:

$$q_{sD}(0) = 1 - e^{-\beta(0)} = 1 - 1 = 0 .$$

Sustituyendo $q_{sD}(0)$ en (III.16):

$$p_{wD}(t_D) = [0]p_{sD}(t_D) + \int_0^{t_D} \frac{dq_{sD}(t_D - \tau)}{d\tau} p_{sD}(\tau) d\tau = \int_0^{t_D} \frac{dq_{sD}(t_D - \tau)}{d\tau} p_{sD}(\tau) d\tau . \quad (\text{III.17})$$

Aplicando la transformada de Laplace a la convolución, se genera un producto de funciones en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{wD}(s) = s\bar{q}_{sD}(s)\bar{p}_{sD}(s) .$$

Al despejar $\bar{q}_{sD}(s)$, la ecuación anterior queda:

$$\bar{q}_{sD}(s) = \frac{\bar{p}_{wD}(s)}{s\bar{p}_{sD}(s)} . \quad (\text{III.18})$$

Si el almacenamiento es constante, el gasto es modelado como:

$$q_{sD}(t_D) = 1 - C_D \frac{dp_{wD}(t_D)}{dt_D} ,$$

aplicando la transformada de Laplace en la ecuación anterior, ésta queda:

$$\bar{q}_{sD}(s) = \frac{1}{s} - C_D [s\bar{p}_{wD}(s) - \bar{p}_{wD}(0)] ,$$

sustituyendo la condición inicial, la ecuación anterior queda:

$$\bar{q}_{sD}(s) = \frac{1}{s} - C_D s \bar{p}_{wD}(s).$$

Igualando (III.18) y la ecuación anterior se obtiene la expresión siguiente:

$$\frac{1}{s} - C_D s \bar{p}_{wD}(s) = \frac{\bar{p}_{wD}(s)}{s \bar{p}_{sD}(s)},$$

arreglando se obtiene la presión en la vecindad del pozo considerando daño y almacenamiento en la vecindad del pozo:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\bar{p}_{sD}(s)}{s^2 \bar{p}_{sD}(s) C_D + 1}.$$

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este modelo ayuda a predecir con mayor certeza el comportamiento de la presión en un pozo fracturado, pues considera el efecto del daño debido a la mineralización en las paredes de la fractura. La convergencia con los modelos lineal y bilineal, dependiendo del daño, avalan al modelo que aquí se presenta.

La convergencia del modelo propuesto al modelo de flujo en estado pseudoestacionario define a qué valor de S_{fb-df} el modelo alcanza dicho estado, convirtiéndose en un modelo pseudoestacionario. Al utilizar modelos de flujo pseudoestacionario no es posible caracterizar el medio fracturado (formación fracturada), (análisis del Apéndice D), por lo que existe una omisión en el reporte del aporte de la formación fracturada.

En la actualidad se utilizan programas de cómputo comerciales para la interpretación de las pruebas de presión y caracterización de yacimientos, los cuales se basan en modelos de flujo en estado pseudoestacionario, lo que propicia una disminución en la incorporación de reservas. Se recomienda el uso de modelos de flujo en estado transitorio para que la incorporación de reservas sea más aproximada, así como el desarrollo de software propio que considere estos modelos.

El flujo lineal es el más sencillo de todas las geometrías de flujo, pero es el flujo radial el más estudiado en la Facultad de Ingeniería de esta Universidad, pues es el que con mayor frecuencia se presenta en el campo; sin embargo, las demás geometrías de flujo deben ser estudiadas con mayor profundidad de lo que actualmente se hace, para tener una mejor y mayor capacidad de interpretación de los modelos.

NOMENCLATURA

C = constante de almacenamiento de pozo $[bls / psi]$

V_u = capacidad volumétrica del pozo $[bls / pie]$

ρ = densidad $\left[\frac{lbm}{pie^3} \right]$

g = constante gravitacional

g_c = constante de conversión $32.17 \left[\frac{lbm / pie}{lbf \times s^2} \right]$

c = compresibilidad $[psi^{-1}]$

ϕ = porosidad

h = espesor de la formación $[pies]$

r_w = radio del pozo $[pies]$

r_w' = radio efectivo del pozo $[pies]$

p = presión $[psia]$

x = longitud media, eje de referencia $[pies]$

t = tiempo $[hrs]$

q = gasto $[bpd]$

B_o = factor de volumen del aceite $\left[\frac{\text{barriles a c.y.}}{\text{barriles a c.s.}} \right]$

k = permeabilidad $[md]$

μ = viscosidad $[cp]$

η = coeficiente de difusividad

S = factor de daño

b = ancho de la fractura $[pies]$

Γ = función gamma

δ = constante de conversión de unidades

F_1, F_2 = factores de correlación para el almacenamiento en el pozo

m_{bf} = pendiente para el flujo bilineal

Subíndices:

i = inicial

D = adimensional

t = total

w = pozo

o = aceite

wa = agua

g = gas

f = formación

fb = formación fracturada

df = fractura dominante

tfb = total formación fracturada

tdf = total fractura dominante

wf = fondo fluyendo

w = en el pozo

bbf = inicio del flujo bilineal

ebf = fin del flujo bilineal

bfo = flujo bilineal para aceite

blf = inicio del flujo lineal

elf = fin del flujo lineal

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

"2009, las reservas de hidrocarburos de México, 1 de enero de 2009" Capítulo 4, pp.25-44.

Abramowitz, Milton y Stegun, Irene, "*Handbook of mathematical functions*", 9na reimpression, 1970.

Agarwal, R.G., Carter, R.D., y Pollock, C.B.: "*Evaluation and Prediction of Performance of Low Permeability Gas Wells Stimulated by Massive Hydraulic Fracturing*," Paper SPE 6838, presentado en the 52nd Annual Fall Technical Conference and Exhibition, SPE of AIME, Denver, Colorado, del 9 al 12 de Octubre de 1977. Presentado también en JPT, en marzo de 1979, 362.

Andrews, L., "*Special functions of mathematics for engineers*", 2da edición, SPIE, 1998.

Barker, B., y Ramey, H.J., JR.; "*Transient Flow to Finite Conductivity Vertical Fractures*", Paper SPE 7489, presentado en el 53rd Annual Fall Technical Conference and Exhibition, SPE of AIME, Houston, Texas, del 1 al 3 de octubre de 1978.

Bostic, N.J., Agarwal, R.G. y Carter, R.D.: "*Combined Analysis of Postfracturing Performance and Pressure Buildup Data for Evaluating MHF Gas Wells*," JPT, octubre de 1980, 1711.

Clark, K.K.: "*Transient Pressure Testing of Fractured Water Injection Wells*" JPT, junio de 1968, 639-643; Trans., AIME, 243.

Cinco Ley, H.: "*Well-Test Analysis for Naturally Fractured Reservoirs*", Distinguished Author Series, JPT, enero de 1996.

Cinco Ley, H. y Samaniego-V., F.: "*Effect of Wellbore Storage and Damage on the Transient Pressure Behavior of Vertically Fractured Wells*," Paper SPE 6752, presentado en el 52nd Annual Fall Technical Conference and Exhibition, AIME, Denver, Colorado, del 9 al 12 de octubre de 1977.

Cinco Ley, H. y Samaniego-V., F.: "*Determination of the orientation of a Finite Conductivity Vertical Fracture by Transient Pressure Analysis*," Paper SPE 6750, presentado en el 52nd Annual Fall Technical Conference and Exhibition, SPE del AIME, Denver, Colorado, del 9 al 12 de octubre de, 1977.

Cinco Ley, H. y Samaniego-V., F. y Domínguez, N.: "*Transient Pressure Behavior of a Well with a Finite-Conductivity Vertical Fracture*," SPE Paper 6014, 51st Fall Meeting, SPE of AIME, New Orleans, del 3 al 6 de octubre de 1976. Presentado también en SPE J. (Agosto de 1978), 253.

Cinco Ley, H. y Samaniego-V., F.: "*Transient Pressure Analysis for Fractured Wells*," Paper SPE 7490, presentado en el 53rd Annual Fall Technical Conference and Exhibition, AIME, Houston, Texas, del 1 al 3 de octubre de 1978. Presentado también en JPT, en septiembre de 1981m 1749.

Dyes, A.B., Kemp, C.E., y Caudle, B.H.: "*Effects of Fractures on Sweep-Out Pattern*," Trans.,AIME (1958), 213, 245.

Galicia Muñoz Susana, "*Geomecánica aplicada a yacimientos naturalmente fracturados para la determinación de compresibilidad de la formación*", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009.

Gringarten, A.C. y Ramey, H.J., Jr.: "*The Use of Source and Green's Functions in Solving Unsteady Flow Problems in Reservoirs*," SPE J., octubre de 1973, 285-296; Trans. ,AIME Vol. 255.

Gringaten, A.C., Ramey, H.J., Jr., y Raghavan, R.: "*Unsteady State Pressure Distributions Created by a Well with a Single Infinite Conductivity Vertical Fracture*," SPE J., agosto de 1974, 347.

Gringaten, A.C., Ramey, H.J., Jr.: "*Unsteady-State Pressure Distribution Created by a Well with a Single Horizontal Fracture, Partial Penetration or Restricted Entry*," - SPE J., agosto de 1974, 413.

Guppy, K.H., Cinco Ley, y Ramey, Jr.: "*Effect of Non-Darcy Flow on the Constant Pressure Production of Fractured Wells*," Paper SPE 9344, presentado en the Annual Fall Technical Conference and Exhibition, SPE of AIME, Dallas, Texas, del 21 al 24 de septiembre de 1980, presentado también en SPE J., en junio de 1981, 390.

Mao , M. L., "*Performance of Vertically-Fractured Wells with a Finite-Conductivity Fracture*," Tesis de doctorado, Stanford University, Stanford, California, mayo de 1977.

McGuire, W.J., y Sikora, V.J.: "*The Effect of Vertical Fractures on Well Productivity*," Trans., AIME 1960, 219, 401.

Morales Germán Gabriela, "*Caracterización del sistema matriz-fractura para flujo transitorio y pseudoestacionario para tamaño múltiple de bloque*", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009.

Muskat, M.: "*Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*", McGraw-Hill Book **Co.**, Inc., **New** York, 1937.

Prats, M.: "*Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior- Incompressible Fluid Case*," SPE J., Junio de 1961, 105.

Pulido, H. Samaniego, F., Rivera, J., Diaz, F., Galicia, G., "*Well Test Analysis for Naturally Fractured Reservoirs with Transient Interporosity Matrix, Microfractures and Fractures Flow*", presentado en la 31st Workshops on Geothermal Reservoir Engineering, Standford University, Standford, California, del 30 enero al 1 de febrero de 2006.

Raghavan, R., Uraiet, A., y Thomas, G.W.; "*Vertical Fracture Height: Effect on Transient Flow Behavior*," Paper SPE 6016, presentado en la 51st Annual Fall Technical Conference and Exhibition, SPE AIME, New Orleans, del 3 al 6 de octubre de 1976.

Raghavan, R.: "*Pressure Behavior of Wells Intercepting Fractures*," Proc., Invitational Well-Testing Symposium, Berkley, California, del 19 al 21 de octubre de 1977.

Russell, D.G., y Truitt, N.E.: "*Transient Pressure Behavior In Vertically Fractured Reservoirs*," JPT, octubre de 1964, 1159.

Sawyer, W.K., Locke, C.D.: "*Simulation of a Finite-Capacity Vertical Fracture in a Gas Reservoir*," Paper SPE 4593, presentado en 48th Annual Fall Fleeting, SPE of AIME, Las Vegas, Nevada, del 30 de septiembre al 3 de octubre de 1973.

Scott, J.O.: "*The Effect of Vertical Fractures on Transient Pressure Behavior of Wells*," JPT, diciembre de 1963, 1365.

Van Poollen, H.K., Tinsley, J.M., y Saunders, C.D.: "*Hydraulic Fracturing: Fracture Flow Capacity vs Well Productivity*," Trans., AIME (1958), 213, 91.

Warren, J.E., Y Root P.J.: "*The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs*", Trans., AIME (1963) 426.

Portales de Internet:

- <http://www.pemex.com/index.cfm?action=content§ionID=1&catID=11421>, 09 de septiembre de 2009.
- <http://www.glossary.oilfield.slb.com/Display.cfm?Term=hydraulic%20fracturing>, 21 de septiembre de 2009.

APÉNDICE A

FUNCIONES ESPECIALES:

1. Error (erf), 2. Error complementaria (erfc),
3. Gamma (Γ), 4. Gamma Incompleta ($\Gamma(\alpha, x)$), 5. Digamma (ψ),
6. Poligamma ($\psi^{(m)}$), 7. Funciones Bessel

Funciones error (erf) y error complementaria (erfc)

La función error es la integral de la distribución normal, la cual proporciona una fracción de un rango de la imagen de una función cuando el argumento varía entre cero e infinito. Surge al evaluar la integral siguiente:

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Al multiplicar la ecuación anterior por 2, elevándola al cuadrado y sacando raíz cuadrada:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \left[\left(2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Sí se desarrolla el cuadrado de la ecuación anterior y se escribe en forma de integral doble se obtiene:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \left(4 \left[\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right] \left[\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right] \right)^{1/2} = \left(4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right)^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Transformación a coordenadas polares

$$x = r \cos(\theta); \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad (\text{A.2})$$

$$y = r \sin(\theta); \quad 0 \leq y \leq \infty, \quad (\text{A.3})$$

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad 0 \leq r \leq \infty, \quad (\text{A.4})$$

$$\theta = \text{ang} \tan\left(\frac{y}{x}\right); \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Si se deriva y simplifica la ecuación anterior queda la expresión:

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Los valores establecidos de “x”, “y”, “r²” en la ecuación anterior, ésta queda:

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{r \cos(\theta)}{r^2}.$$

Arreglando:

$$r \frac{d\theta}{dy} = \cos(\theta).$$

De la ecuación (A.2), la derivada de “x” con respecto al radio es:

$$\frac{dx}{dr} = \cos(\theta).$$

Al igualar las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$r \frac{d\theta}{dy} = \frac{dx}{dr}.$$

Arreglando:

$$rd\theta dr = dx dy. \tag{A.5}$$

Sustituyendo (A.4) y (A.5) en (A.1):

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \left(4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \right)^{1/2}.$$

Completando la integral:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \left(\frac{4}{-2} \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right] d\theta \right)^{1/2}.$$

Integrando y evaluando los límites:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \left(-2 \int_0^{\pi/2} \left[e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\theta \right)^{1/2} = \left(-2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^0} \right] d\theta \right)^{1/2}.$$

Cancelando signos:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \left(2 \int_0^{\pi/2} d\theta \right)^{1/2} = (2[\pi/2 - 0])^{1/2} = \sqrt{\pi}.$$

El resultado es:

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

fraccionando la integral en intervalos:

$$\int_0^x e^{-\tau^2} d\tau + \int_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Arreglando:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = 1. \tag{A.6}$$

Entonces, la función error se define como:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau, \tag{A.7}$$

y la función error complementaria es:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau. \tag{A.8}$$

Se sustituye (A.7) y (A.8) en (A.6):

$$erf(x) + erfc(x) = 1. \tag{A.9}$$

Gráfica Cartesiana, Funciones error (erf) y error complementaria (erfc)

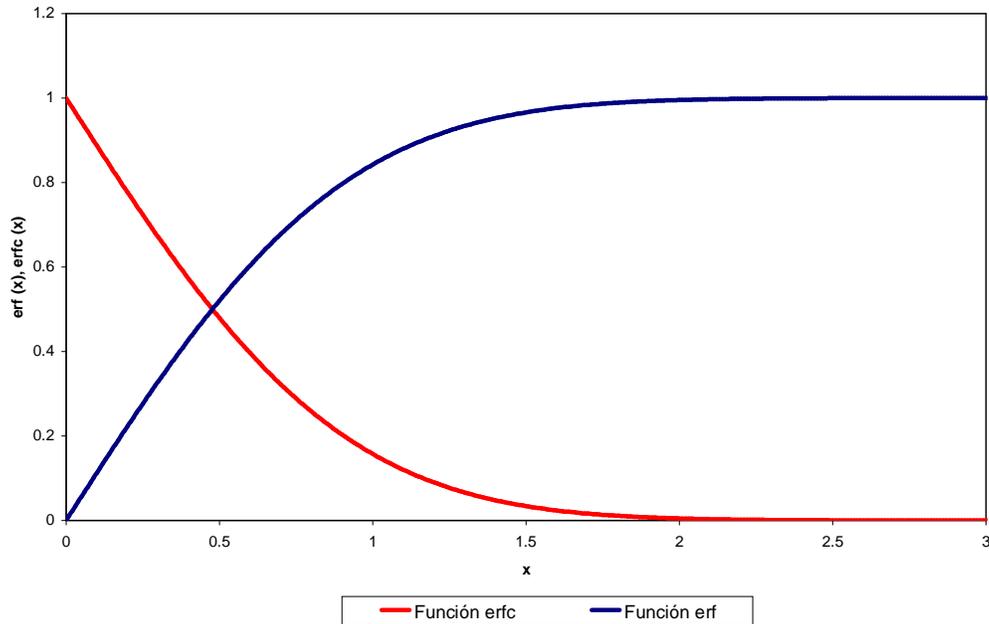


Figura A.1. Gráfica cartesiana de las funciones erf y erfc.

Gráfica log-log, Funciones error (erf) y error complementaria (erfc)

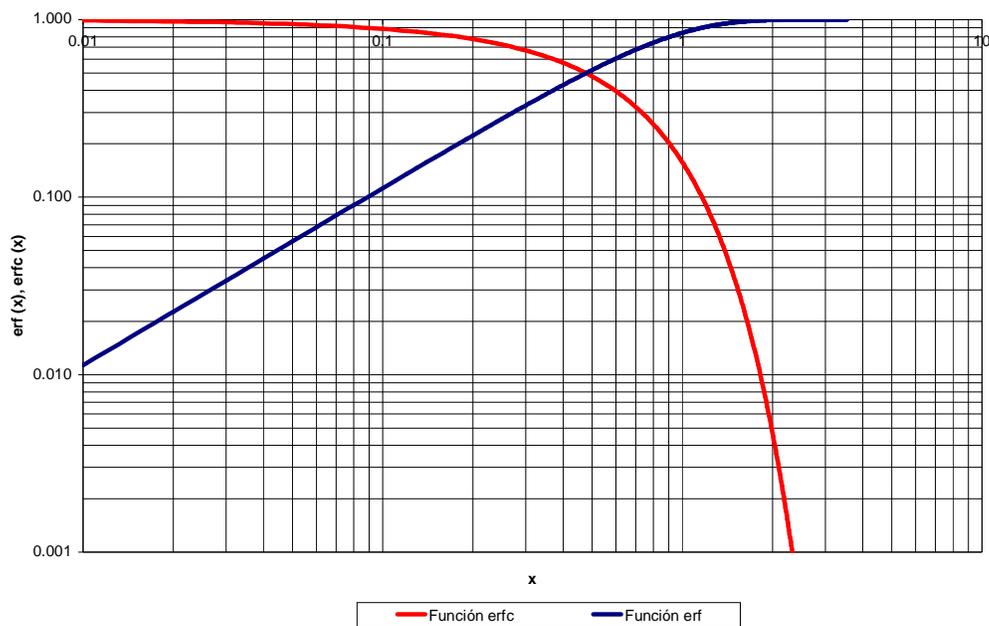


Figura A.2. Gráfica log-log de las funciones erf y erfc.

Obtención de la función Gamma (Γ)

Es una función no elemental definida por la integral:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0, \quad (\text{A.10})$$

donde $\alpha > 0$ es evidente al considerar:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^c e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (\text{A.11})$$

donde c es una constante positiva.

La segunda integral de la ecuación (A.11) existe para toda α .

En cambio la primera integral:

$$\int_0^c e^{-t} t^{\alpha-1} dt = k \int_0^c t^{\alpha-1} dt, \quad (\text{A.12})$$

de la ecuación 3:

$$k \int_0^c t^{\alpha-1} dt = k \left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right]_0^c.$$

En esta solución:

Sí $\alpha > 0$, entonces $t^{\alpha} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, por lo tanto la integral está definida.

Sí $\alpha < 0$, entonces $t^{\alpha} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$, y la integral no existe.

Para $\alpha = 0$, se tiene de la ecuación (A.12):

$$k \int_0^c t^{\alpha-1} dt = k [\log t]_0^c,$$

que tiende a infinito cuando t tiende a cero.

De lo anterior se concluye que la integral de la ecuación (A.10), sólo está definida para $\alpha > 0$.

De la definición de la función gamma se tiene que para el argumento $\alpha + 1$:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt .$$

Al integrar por partes:

$$u = t^{\alpha}, \quad dv = e^{-t} dt,$$

entonces:

$$du = \alpha \cdot t^{\alpha-1} dt, v = -e^{-t} .$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = -e^{-t} t^{\alpha} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt ,$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = -e^{-t} t^{\alpha} \Big|_0^{\infty} + \alpha \cdot \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0 .$$

Pero:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{\alpha}}{e^t} = 0 .$$

Utilizando el teorema de L'Hopital:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\alpha}}{e^t} = 0 ,$$

$$\text{por lo que: } -e^{-t} t^{\alpha} \Big|_0^{\infty} = 0 ,$$

así:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0 . \tag{A.13}$$

Sí $\alpha = n$ y n es un número entero:

$$\Gamma(\alpha + 1) = n[\Gamma(n)] = n[(n-1)\Gamma(n-1)] = n(n-1)(n-2)..(3)(2)(1)\Gamma(1),$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = n!\Gamma(1) .$$

Por definición:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} -e^{-t} dt,$$

$$\Gamma(1) = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1,$$

por lo que

$$\Gamma(n+1) = n = 0, 1, 2. \tag{A.14}$$

Definiendo la función gamma cuando el argumento α es negativo, de la ecuación (A.14) se tiene:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} (\Gamma(\alpha + 1)) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha + 1} \right) = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 3)}{\alpha + 2} \right),$$

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n)}, \quad \alpha \neq 0, -1, -2. \tag{A.15}$$

El numerador de esta ecuación se puede obtener de la definición de la función gamma para $\alpha < 0$, pero de tal manera que $\alpha + n + 1 > 0$.

Así es posible calcular $\Gamma(\alpha)$, para $\alpha < 0$, pero $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$

Ejemplo:

Aplicando la primera parte de la ecuación (A.6):

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + x + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{-\frac{1}{2}}.$$

A continuación se demostrará que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \frac{2u \cdot du}{u} = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du,$$

haciendo:

$$t = u^2,$$

$$dt = 2u \cdot du ,$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \cdot \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dudv .$$

$$u = r \cos \theta ,$$

$$v = r \sin \theta ,$$

$$dA = r dr d\theta ,$$

para:

$$0 < r < \infty ,$$

$$0 < \theta < \pi/2 .$$

Entonces:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 4 \left[\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right] ,$$

$$n = -r^2 ,$$

$$dn = -2r dr .$$

$$\therefore \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4 \left[\frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr (-2r dr) \right] = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} ,$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = -\pi \left[\frac{1}{e^{\infty^2}} - 1 \right] = \pi ,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} .$$

La función gamma se relaciona con la transformada de Laplace, en la forma siguiente:

si:

$$f(t) = t^{\alpha} ,$$

$$L\{t^\alpha\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt,$$

definiendo:

$$t = \frac{x}{s},$$

$$dt = \frac{dx}{s},$$

sustituyendo:

$$L\{t^\alpha\} = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^\alpha \frac{dx}{s},$$

$$L\{t^\alpha\} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx,$$

recordando que:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx = \Gamma(\alpha+1),$$

$$L\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},$$

y si "n" es un número entero:

$$L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

$$L\{s-\alpha\} = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(st)} [e^{\alpha t}] f(t) dt.$$

De este modelo:

$$L\{s-\alpha\} = L\{e^{\alpha t} f(t)\},$$

$$L\{e^{\alpha t} f(t)\} = f(s-\alpha),$$

$$L\{e^{\alpha t} f(t)\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-\alpha)^\alpha + \omega^2}.$$

Función Gamma (cartesiana)

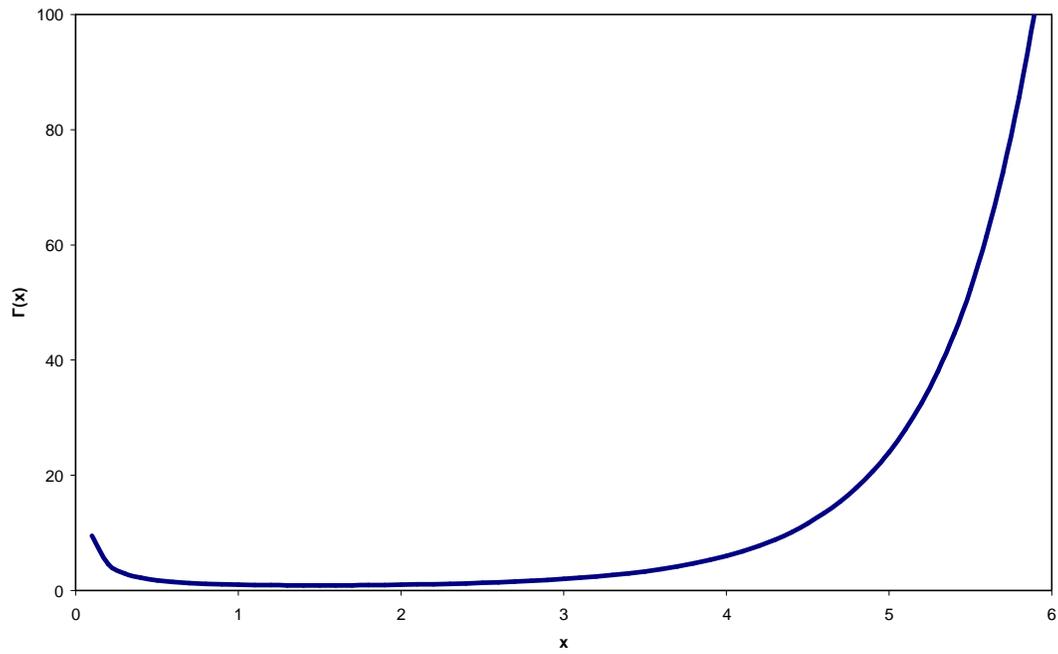


Figura A.3. Gráfica cartesiana de la Función Gamma.

Función Gamma (logarítmica)

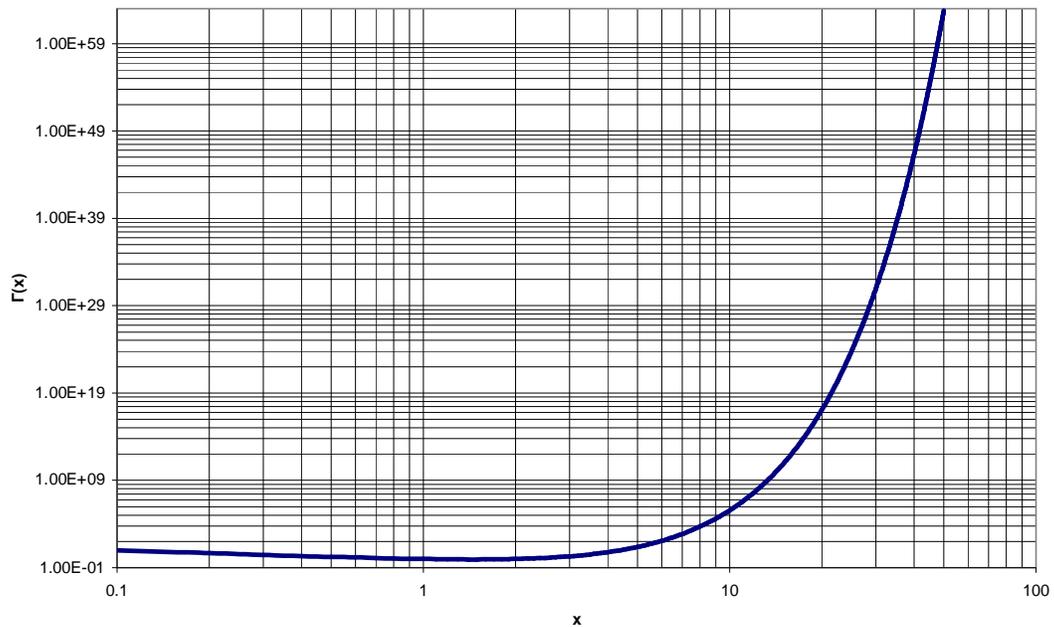


Figura A.4. Gráfica log-log de la Función Gamma.

Obtención de la función Gamma Incompleta

Al generalizar la ecuación (A.10), se introduce la función relacionada

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad a > 0, \quad (\text{A.16})$$

que recibe el nombre de función Gamma Incompleta. Dicha función es muy común en la teoría de probabilidades, particularmente, aquellas aplicaciones involucradas en la distribución chi cuadrado. Es habitual también para introducir la función acompañada:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt, \quad a > 0, \quad (\text{A.17})$$

la cual es conocida como la función Gamma Incompleta Complementaria. Por ello se tiene que:

$$\gamma(a, x) + \Gamma(a, x) = \Gamma(a). \quad (\text{A.18})$$

Debido a la relación tan estrecha entre éstas dos funciones, la decisión de utilizar $\gamma(a, x)$ o $\Gamma(a, x)$ es únicamente cuestión de conveniencia.

Si se sustituye la representación en serie de e^{-t} en la ecuación (A.16), se obtiene:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+a-1} \right] dt.$$

El paso siguiente es aplicar la integral a la ecuación anterior, la cual queda:

$$\gamma(a, x) = x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)}, \quad a > 0.$$

La ecuación anterior se sustituye en (A.18), con lo que se obtiene:

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+a)}.$$

Serie asintótica

Al integrar por partes la ecuación (A.17) se obtiene:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = -e^{-t} t^{a-1} \Big|_x^{\infty} + (a-1) \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-2} dt,$$

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^{a-1} + (a-1) \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-2} dt.$$

Se integra por partes nuevamente:

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^{a-1} + (a-1)e^{-x} x^{a-2} + (a-1)(a-2) \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-3} dt.$$

Se puede observar que la integración se realiza sucesivamente, por ello se genera la serie asintótica siguiente:

$$\Gamma(a, x) \approx e^{-x} x^{a-1} \left[1 + \frac{\alpha-1}{x} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^2} + \dots \right], \quad x \rightarrow \infty,$$

la cual puede ser expresada como:

$$\Gamma(a, x) \approx \Gamma(a) \cdot e^{-x} \cdot x^{a-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)x^k}, \quad \alpha > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Si se establece $\alpha = n+1$, ($n=0,1,2,\dots$) en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Gamma(n+1, x) = n! x^n e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^{-k}}{\Gamma(n-k)!},$$

de donde, para $k > n$, la serie se trunca, pues se tiene la expresión: $1/\Gamma(n+1-k) = 0$. Al realizar el cambio de variable $j = n-k$, la ecuación anterior queda de la manera siguiente:

$$\Gamma(n+1, x) = n! e^{-x} \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!},$$

o bien:

$$\Gamma(n+1, x) = n!e^{-x}e_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde e_n denota los primeros $n+1$ términos de la serie de Maclaurin para e^x . Para un análisis similar, puede mostrarse que:

$$\gamma(n+1, x) = n! \left[1 - e^{-x}e_n(x) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Función Digamma

La función Digamma está relacionada muy de cerca con la función Gamma, pues es la derivada logarítmica de ésta. Está definida como:

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{A.19})$$

Para encontrar una representación de $\psi(x)$, primero considérese el producto infinito de Weierstrass:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x/n}.$$

El paso siguiente es aplicar el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación:

$$-\ln(\Gamma(x)) = \ln x + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right], \quad x > 0.$$

La ecuación anterior se multiplica por menos y se deriva con respecto a x :

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right). \quad (\text{A.20})$$

La ecuación anterior puede reescribirse:

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right), \quad x > 0. \quad (\text{A.21})$$

La restricción $x > 0$ obedece a la ecuación (A.19). Es digno de mencionarse el valor especial siguiente:

$$\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma.$$

Por otro lado, la expresión $\Gamma'(1)$ está dada por:

$$\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt.$$

Con base en la ecuación (A.19) es claro que la función Digamma tiene el mismo dominio que la función Gamma. Tiene características un poco diferentes a las de la función Gamma, pues está relacionada con la derivada de $\Gamma(x)$. Por ejemplo, a diferencia de $\Gamma(x)$, la función $\psi(x)$, si cruza el eje x . De hecho contiene ceros infinitos, correspondientes a los extremos de $\Gamma(x)$, es decir, en los puntos en que $\Gamma'(x) = 0$. Para valores positivos el único extremo de la función Gamma ocurre en $x_0 = 1.4616\dots$ Debido a que x_0 corresponde a un mínimo de $\Gamma(x)$, de ahí que $\Gamma'(x)$ y $\psi(x)$ sean negativos en el intervalo $0 < x < x_0$ y positivos en $x > x_0$. Para valores grandes de x , la función Gamma es igual aproximadamente al $\ln x$. Las características generales de $\psi(x)$ para valores positivos y negativos de x se muestra en la figura siguiente:

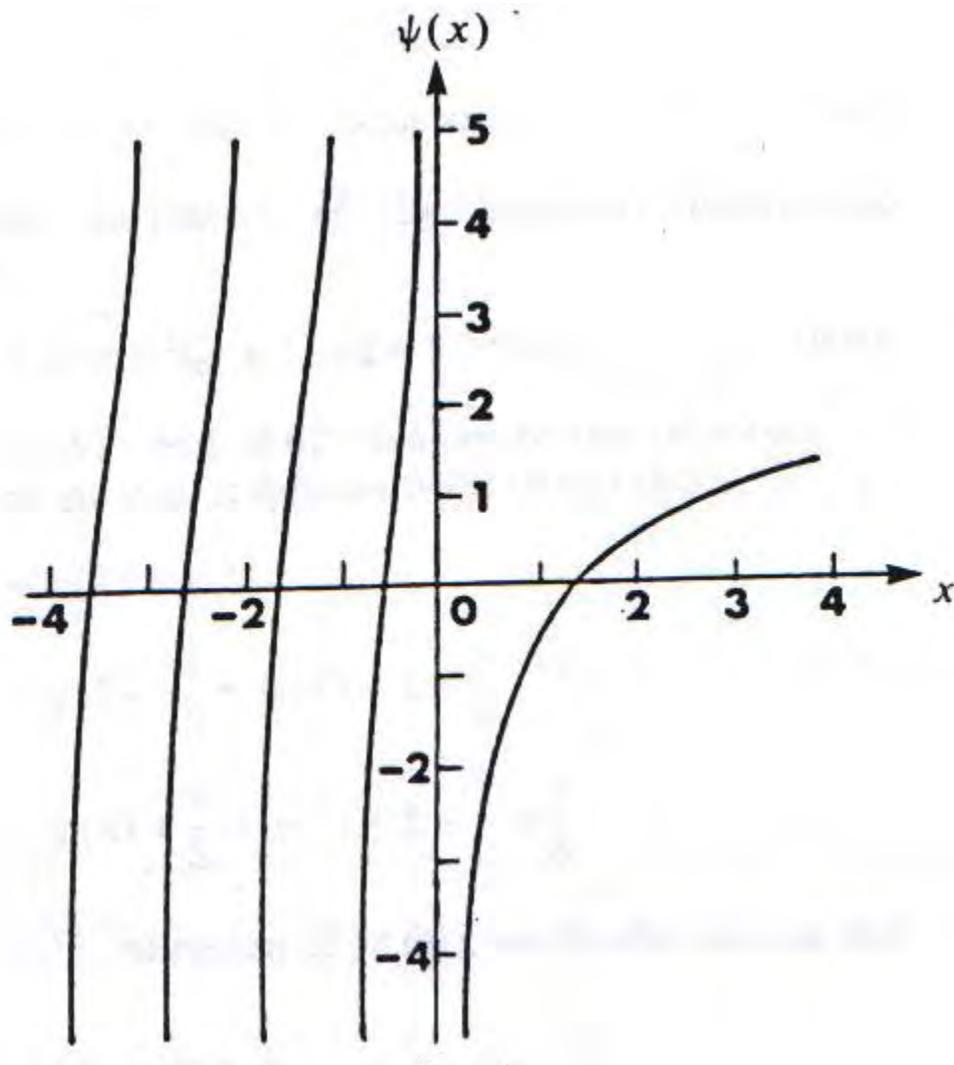


Figura A.5. Gráfica de la función Digamma.

La función $\psi(x)$ satisface las relaciones análogas de alguna manera a aquellas para $\Gamma(x)$, las cuales pueden ser derivadas aplicando las derivadas logarítmicas de éstas. Como ejemplo, considérese la fórmula:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

al aplicar el logaritmo natural, se tiene:

$$\ln(\Gamma(x+1)) = \ln x + \ln \Gamma(x).$$

El paso siguiente es derivar la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x+1)) = \frac{1}{x} + \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x),$$

por ello:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}. \tag{A.22}$$

De igual forma, la derivada logarítmica de:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi \csc \pi x,$$

resulta en la identidad:

$$\psi(1-x) - \psi(x) = \pi \cot \pi x.$$

Finalmente la derivada logarítmica de la fórmula de duplicación de Legendre, resulta en:

$$\psi(x) + \psi\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 = 2\psi(2x).$$

Sí n denota un entero positivo, de la ecuación (A.22) se obtiene:

$$\psi(2) = \psi(1) + 1,$$

$$\psi(3) = \psi(2) + \frac{1}{2} = \psi(1) + 1 + \frac{1}{2},$$

$$\psi(4) = \psi(3) + \frac{1}{3} = \psi(1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

y así sucesivamente. De la aplicación sucesiva de la ecuación (A.20), puede deducirse:

$$\psi(n+1) = \psi(1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Debido a que $\psi(1) = -\gamma$, la ecuación previa puede escribirse como:

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Función Poligamma

De la ecuación (A.20) se forma la familia de funciones Poligamma:

$$\psi^{(m)}(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \ln \Gamma(x), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

De la ecuación (A.21), se determina la ecuación siguiente:

$$\psi^{(m)}(x) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{m+1}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Es de especial interés la ecuación previa, cuando $x = 1$:

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m+1}} = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m+1}}. \quad (\text{A.23})$$

La ecuación anterior puede reescribirse también, de la forma siguiente:

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{A.24})$$

de donde:

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1.$$

es la función zeta de Riemann. La evaluación de $\psi^{(m)}(x)$ para otros valores de x , lleva también de la función zeta. Aunque las ecuaciones (A.20) y (A.23) son representaciones válidas para $\psi(x)$ y $\psi^{(m)}(x)$, respectivamente, para valores de x , excepto $x = 0, -1, -2, \dots$, no son las series más convenientes para propósitos de cálculos, particularmente para valores cercanos a $x = 1$. En su lugar es preferible tener extensiones de serie de potencia.

Para comenzar, se considera una serie de potencia de la forma:

$$\ln \Gamma(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (\text{A.25})$$

de donde se eligió $\ln \Gamma(x+1)$, en lugar de $\ln \Gamma(x)$, así que se puede expandir para $x = 0$.

Las constantes en las expansiones de Maclaurin están definidas por:

$$c_0 = \ln \Gamma(x+1) \Big|_{x=0} = \ln \Gamma(1) = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$c_1 = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) \Big|_{x=0} = \psi(1) = -\gamma, \quad (\text{A.27})$$

y para $n \geq 2$:

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \ln \Gamma(x+1) \Big|_{x=0} = \frac{1}{n!} \psi^{(n-1)}(1),$$

la cual de la forma de (A.24), se convierte:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{A.28})$$

De ahí que al sustituir las ecuaciones (A.26), (A.27) y (A.28) en (A.25) se obtiene:

$$\ln(\Gamma(x+1)) = -\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1, \quad (\text{A.29})$$

donde se muestra el intervalo de convergencia.

Al derivar con respecto a x la ecuación anterior, se obtiene:

$$\psi(x+1) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1},$$

o bien, al realizar un cambio en los índices:

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Esta última serie ya no converge en $x=1$ como en (A.29). Al continuar derivando la ecuación anterior, finalmente se obtiene la ecuación siguiente:

$$\psi^{(m)}(x+1) = (-1)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m+n)!}{n!} \zeta(m+n+1) x^n, \quad -1 < x < 1,$$

la cual converge también para el intervalo $-1 < x < 1$.

Funciones Bessel

La solución de una gran variedad de problemas físicos (Vibración de sartas, difusión de calor o presión en cilindros, vibración de membranas, etc.) requieren el uso de

funciones no elementales llamadas funciones Bessel. Estas funciones son soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden y pueden ser representadas por medio de series infinitas.

Por la importancia de sus aplicaciones, han sido tabuladas y pueden ser usadas como simples funciones trigonométricas y de ahí sus propiedades son conocidas. En este escrito se deriva la solución general de la ecuación de Bessel y sus propiedades mas frecuentes necesarias en la practica.

La ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden con coeficientes variables:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0,$$

es llamada *ecuación de Bessel de orden ν* y cualquier función que la satisfaga se denomina *función Bessel de orden ν* . El número ν es limitado a valores reales.

Relación de recurrencia para derivados de la función Bessel tipo $J_\nu(x)$

La expresión de la serie para la función Bessel de primer tipo:

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}, \quad (\text{A.30})$$

permite la derivación de relaciones entre $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$, $J_{\nu-1}(x)$ y las derivadas de $J_\nu(x)$.

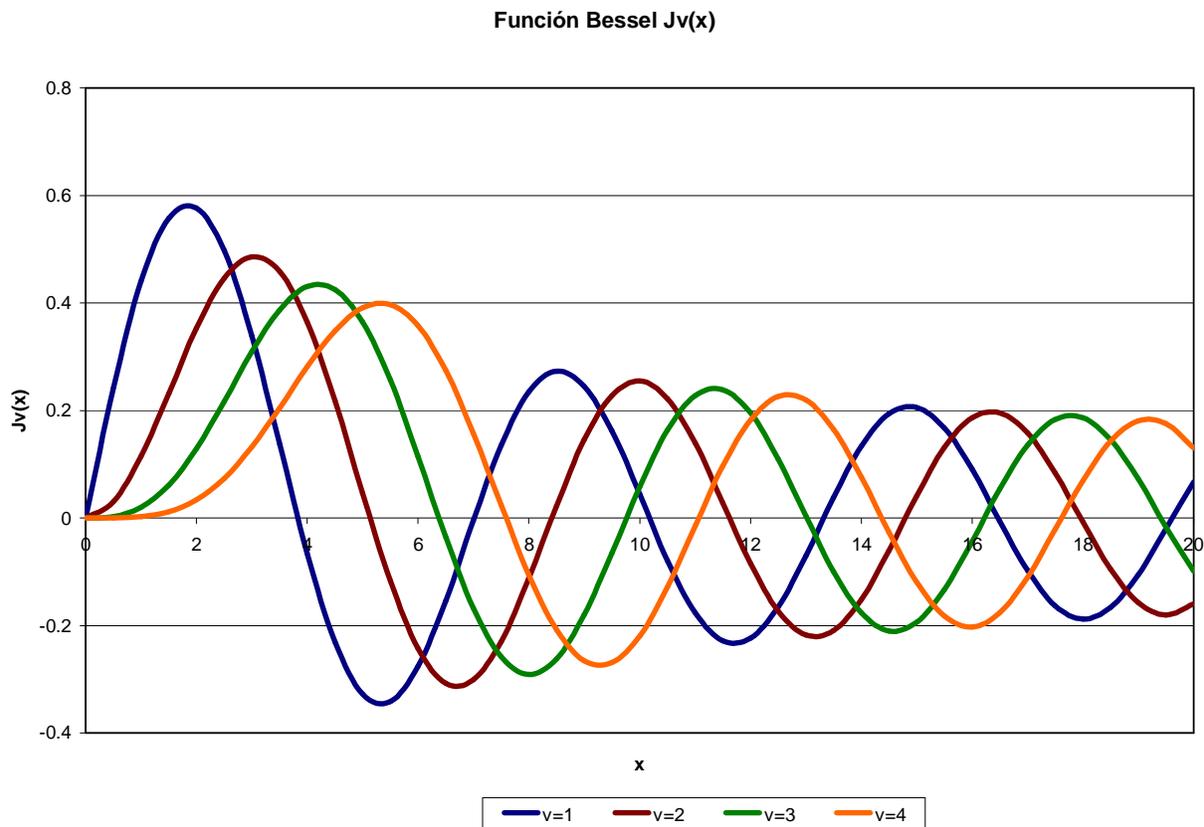


Figura A.6. Gráfica de la Función Bessel de primer tipo, $J(x)$, a diferentes órdenes.

Diferenciando la ecuación (A.30), término por término, se obtiene:

$$J'_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2r + \nu) \cdot x^{2r+\nu-1}}{2^{2r+\nu} r! \Gamma(\nu + r + 1)},$$

desarrollando:

$$J'_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2r \cdot x^{2r+\nu-1}}{2^{2r+\nu} r! \Gamma(\nu + r + 1)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \nu \cdot x^{2r+\nu-1}}{2^{2r+\nu} r! \Gamma(\nu + r + 1)}.$$

Arreglando la ecuación anterior se tiene:

$$J'_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2r \cdot x^{2r+\nu-1}}{2^{2r+\nu} r! \Gamma(\nu + r + 1)} + \frac{\nu}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+\nu-1}}{2^{2r+\nu} r! \Gamma(\nu + r + 1)}. \tag{A.31}$$

La primera serie en el tercer término de esta ecuación indica que el primer término ($r=0$) debido a que se tiene una r en el numerados y $r!$ en el denominador, y por definición $0!=1$. Entonces, dividiendo el numerador y denominador entre $2r$ se tiene:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2r \cdot x^{2r+v-1}}{2^{2r+v} r! \Gamma(v+r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+v-1}}{2^{2r+v} (r-1)! \Gamma(v+r+1)}.$$

Sustituyendo r por $r-1+1$ la sumatoria queda:

$$J'_v(x) = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} x^{2(r-1)+v+1}}{2^{2(r-1)+v+1} (r-1)! \Gamma(v+r-1+2)},$$

y sabiendo que $k=r-1$, se tiene:

$$J'_v(x) = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+v+1}}{2^{2k+v+1} k! \Gamma(v+k+2)},$$

arreglando la ecuación anterior:

$$J'_v(x) = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2(r-1)+v+1}}{2^{2k+v+1} k! \Gamma(v+1+k+1)} = -J_{v+1}(x).$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación (A.30) con v cambiada por $v+1$, la serie de la ecuación (A.31) se tiene:

$$J'_v(x) = \frac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x). \tag{A.32}$$

De manera similar, añadiendo y sustrayendo v del factor $(2r+v)$ de la expansión de la serie de $J'_v(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned} J'_v(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2(r+v) \cdot x^{2r+v-1}}{2^{2r+v} r! \Gamma(v+r+1)}, \\ J'_v(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2(r+v) \cdot x^{2r+v-1}}{2^{2r+v} r! \Gamma(v+r+1)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r v \cdot x^{2r+v-1}}{2^{2r+v} r! \Gamma(v+r+1)}, \\ J'_v(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2(r+v) \cdot x^{2r+v-1}}{2^{2r+v} r! \Gamma(v+r+1)} - \frac{v}{x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+v-1}}{2^{2r+v} r! \Gamma(v+r+1)}. \end{aligned}$$

Recordando que:

$$\frac{\Gamma(v+r+1)}{(v+r)} = \Gamma(v+r) = \Gamma[(v-r)+r+1],$$

entonces:

$$J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x), \quad (\text{A.33})$$

sumando las ecuaciones (A.32) y (A.33) y dividiendo entre dos, se tiene:

$$J'_v(x) = \frac{\frac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x) + J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x)}{2},$$

$$J'_v(x) = \frac{J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x)}{2},$$

$$J'_v(x) = \frac{1}{2} [J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x)]. \quad (\text{A.34})$$

Las ecuaciones (A.32), (A.33) y (A.34) permiten la evaluación de $J'_v(x)$ mediante las tablas de valores de $J_v(x)$, $J_{v+1}(x)$, $J_{v-1}(x)$.

Restando la ecuación (A.32) a la (A.33) y multiplicándola por $\frac{x}{2 \cdot v}$, se obtiene:

$$\frac{x}{2v} [J'_v(x) - J'_v(x)] = \frac{x}{2v} \left[\frac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x) - \left[J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x) \right] \right],$$

$$0 = \frac{x}{2v} \left[\frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x) + J_{v-1}(x) \right].$$

Despejando a $J_v(x)$, se tiene:

$$J_v(x) = \frac{x}{2v} [J_{v+1}(x) - J_{v-1}(x)];$$

despejando $J_{v+1}(x)$, se tiene:

$$J_{v-1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x).$$

La ecuación anterior es una fórmula de recurrencia que permite la evaluación de una función Bessel de orden superior mediante tablas, de la función Bessel de orden menor.

Multiplicando la ecuación (A.32) por x^{-v} :

$$x^{-v} J'_v(x) = x^{-v-1} v J_v(x) - x^{-v} J_{v+1}(x),$$

y pasando el término $x^{-v-1} v J_v(x)$ a la izquierda, se tiene:

$$x^{-v} J'_v(x) - x^{-v-1} v J_v(x) = -x^{-v} J_{v+1}(x). \quad (\text{A.35})$$

Ahora como:

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} J_v(x)] = x^{-v} J'_{v+1}(x) - x^{-v-1} v J_v(x),$$

sustituyendo la ecuación anterior en (A.35):

$$\frac{d}{dx} [x^{-v} J_v(x)] = -x^{-v} J_{v+1}(x).$$

De manera similar, multiplicando la ecuación (A.33) por x^v :

$$x^v J'_v(x) = x^v \left[J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x) \right],$$

$$x^v J'_v(x) = x^v J_{v-1}(x) - x^{v-1} v J_v(x).$$

Pasando el término $-x^{v-1} v J_v(x)$ del lado izquierdo de la ecuación, se tiene:

$$x^v J'_v(x) + x^{v-1} v J_v(x) = x^v J_{v-1}(x), \quad (\text{A.36})$$

y como:

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = x^v J'_v(x) + x^{v-1} v J_v(x).$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la (A.36), se tiene:

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = x^v J'_v(x) + x^{v-1} v J_v(x).$$

Estas ecuaciones son útiles en la solución de los valores de los límites de un problema para establecer las propiedades de la función Bessel y sus derivadas.

$$\frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x),$$

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x).$$

APÉNDICE B

CONSTRUCCIÓN Y SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN PARA FLUJO LINEAL EN LA FRACTURA DOMINANTE

Considere un volumen de control $V_c = \Delta x \Delta y \Delta z$, el cual simulará una fractura vertical dominante finita con fronteras horizontales y verticales impermeables (sin aporte de fluidos), en el cual ocurre un flujo lineal únicamente en la dirección de x , entra un flujo másico $\dot{m}_e = \rho v_x$ en la cara $\Delta y \Delta z$; sale un gasto másico $\dot{m}_s = \rho v_x + \Delta(\rho v)_x$.

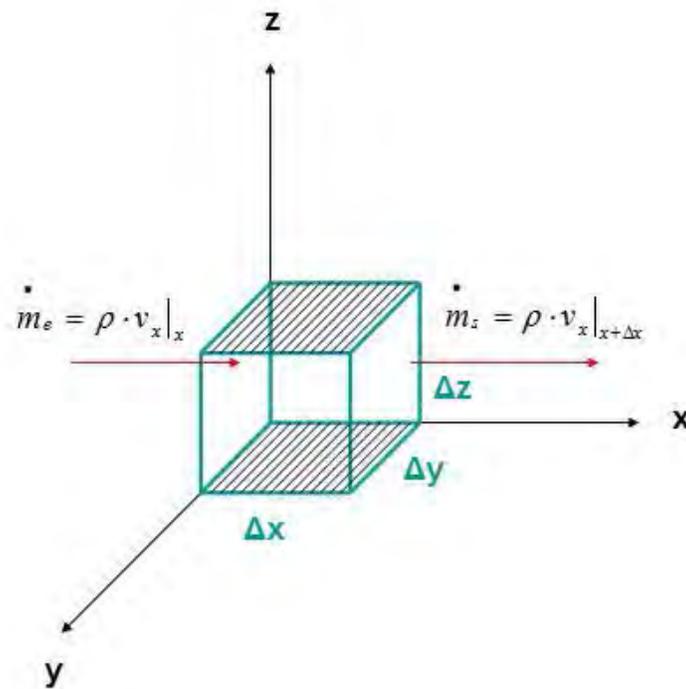


Figura B.1. Flujo lineal en el volumen de control.

Sí la masa que entra es diferente a la masa que sale al transcurrir un intervalo de tiempo, se acumula cierta cantidad de masa en el espacio disponible, la cual está dada por la ecuación:

$$\text{masa}_{\text{entra}} - \text{masa}_{\text{sale}} = m_{\text{acumulada}},$$

$$\dot{m}_a = [\rho v_x] - [\rho v_x + \Delta(\rho v)_x] = -\Delta(\rho v)_x.$$

La cantidad de masa acumulada en función del espacio, se multiplica por el flujo másico por unidad del área, además de multiplicarla por el intervalo de tiempo Δt .

$$m_a = [-\Delta(\rho v)_x] \Delta y \Delta z \Delta t. \quad (\text{B.1})$$

Al realizar el análisis dimensional se obtiene:

$$m_a [M] = -\Delta \left(\rho \left[\frac{M}{L^3} \right] v_x \left[\frac{L}{T} \right] \right) \Delta y [L] \Delta z [L] \Delta t [T].$$

Por otro lado, la masa acumulada también está en función del tiempo. A un tiempo inicial t se tendrá una masa:

$$m_1 = \phi_{df} S_o \rho \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Después que pase algún tiempo (una Δt), se tendrá una masa distinta, la cual habrá cambiado debido al tiempo, la cual está dada por:

$$m_2 = [\phi_{df} S_o \rho + \Delta(\phi_{df} S_o \rho)] \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Por lo tanto, la masa acumulada, en función del tiempo estará dada por la ecuación: masa acumulada = masa después del cambio del tiempo - masa al tiempo inicial ,

$$m_a = [\phi_{df} S_o \rho + \Delta(\phi_{df} S_o \rho)] \Delta x \Delta y \Delta z - [\phi_{df} S_o \rho] \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta(\phi_{df} S_o \rho) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (\text{B.2})$$

Realizando el análisis dimensional:

$$m_a [M] = \Delta \left(\phi_{df} [1] S_o [1] \rho \left[\frac{M}{L^3} \right] \right) \Delta x \Delta y \Delta z [L^3].$$

El siguiente paso en el desarrollo es igualar las ecuaciones (B.1) y (B.2):

$$[-\Delta(\rho v_x)] \Delta y \Delta z \Delta t = \Delta(\phi_{df} S_o \rho) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Si dividimos la ecuación anterior entre $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, se obtiene:

$$-\frac{\Delta}{\Delta x}(\rho v_x) = \frac{\Delta}{\Delta t}(\phi_{df} S_o \rho).$$

Al hacer tender Δx y Δt a cero, se aplica la definición de la derivada para ambos miembros de la ecuación, quedando la siguiente expresión:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_{df} S_o \rho).$$

Sí se considera un solo fluido saturante en el volumen de control, $S_o = 1$, entonces la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{df} \rho). \quad (\text{B.3})$$

La ecuación de movimiento para flujo newtoniano, llamada ley de Darcy, es:

$$v_x = \frac{q}{A} \frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x}.$$

Se sustituye la ecuación anterior en (B.3):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_{df} \rho}{\mu} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{df} \rho).$$

La permeabilidad de la fractura dominante k_{df} y la viscosidad μ pueden considerarse constantes, por lo que es posible sacarlas de la derivada parcial de la presión respecto a x :

$$\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{df} \rho). \quad (\text{B.4})$$

La fórmula para derivar un producto:

$$\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Sí $u = \rho$ y $v = \frac{\partial p_{df}}{\partial x}$ para el miembro izquierdo y $u = \rho$ y $v = \phi_{df}$ para el miembro

derecho, la ecuación (B.4) queda:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right) \right] = - \left[\phi_{df} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi_{df}}{\partial t} \right]. \quad (B.5)$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ y $\frac{\partial \phi_{df}}{\partial t}$ pueden ser expresada por la regla de la cadena de la manera siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial p_{df}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}}, \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}}, \quad (B.7)$$

$$\frac{\partial \phi_{df}}{\partial t} = \frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}}. \quad (B.8)$$

Se sustituyen (B.6), (B.7) y (B.8) en (B.5):

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \right) \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right) \right] = - \left[\phi_{df} \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \right) + \rho \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right) \right],$$

$$\frac{k_{df} \rho}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] = - \phi_{df} \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} + \frac{1}{\phi_{df}} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right] \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}. \quad (B.9)$$

Las compresibilidades de la fractura dominante y del aceite están definidas mediante las ecuaciones:

$$c_{df} = - \frac{1}{\phi_{df}} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}},$$

y

$$c_o = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial p_{df}}.$$

Se sustituyen las dos ecuaciones anteriores en (B.9):

$$\frac{k_{df} \rho}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] = \phi_{df} \rho [c_o + c_{df}] \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}.$$

Hasta ahora se ha manejado la densidad ρ a condiciones de yacimiento. Si se divide la ecuación previa entre la densidad a condiciones estándar, ésta ecuación queda:

$$\frac{k_{df} \rho}{\mu \rho_s} \left[\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\phi_{df} \rho c_{idf}}{\rho_s} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}, \quad (\text{B.10})$$

de donde:

$$c_{idf} = c_o + c_{df}.$$

El factor de volumen del aceite puede representarse con la expresión siguiente:

$$B_o = \frac{\rho_s}{\rho}.$$

Sustituyendo el factor de volumen en (B.10):

$$\frac{1}{B_o} \frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\phi_{df} c_{idf}}{B_o} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}.$$

Si despejamos la permeabilidad de la fractura dominante k_{df} y la viscosidad μ la ecuación anterior, ésta queda:

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right)^2 = \frac{\mu \phi_{df} c_{idf}}{k_{df}} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}. \quad (\text{B.11})$$

La constante de difusividad hidráulica para la fractura dominante es:

$$\eta_{df} = \frac{k_{df}}{\phi_{df} c_{idf} \mu}.$$

Por lo que al sustituir la difusividad hidráulica de la fractura en (B.11) se obtiene la ecuación de difusión para flujo lineal:

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\eta_{df}} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}.$$

El gradiente de presión tiende a ser muy pequeño, comparado con los demás elementos por lo que se desprecia. Sí se hace la consideración anterior, se obtiene la ecuación de difusión para flujo lineal en la fractura:

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta_{df}} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}. \quad (B.12)$$

Solución a la ecuación de difusión para flujo lineal, considerando el radio del pozo (r_w)

La ecuación de difusión para flujo lineal, sin considerar fuentes ni sumideros está dada por la ecuación (B.12). Para obtener su solución se consideran las condiciones siguientes:

Condición inicial, distribución uniforme de presión:

$$p_{df}(x,0) = p_i.$$

Condición de frontera interna, gasto constante (ley de Darcy):

$$\frac{\partial p_{df}(r_w, t)}{\partial x} = \frac{q \cdot \mu \cdot B_o \cdot \pi}{A \cdot k_{df}}.$$

Condición de frontera externa, yacimiento infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{df}(x, t) = p_i.$$

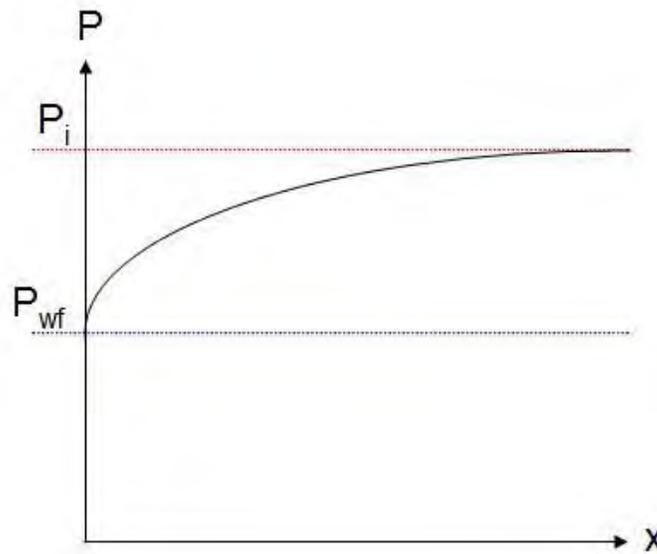


Figura B.2: Distribución de presión en un yacimiento.

Solución

Se requiere que la condición inicial sea homogénea para que el espacio de Laplace la ecuación diferencial obtenida sea homogénea, por ello se transforma el problema en términos de la función ΔP :

$$\Delta p_{df}(x,t) = p_i - p_{df}(x,t). \quad (\text{B.13})$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a x :

$$\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial \Delta p_{df}(x,t)}{\partial x}.$$

Se obtiene la segunda derivada, respecto a x :

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Delta p_{df}(x,t)}{\partial x^2}.$$

Derivando la ecuación (B.13) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta p_{df}(x,t)}{\partial t}. \quad (\text{B.14})$$

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la (B.12) y cancelando los signos, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_{df}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta_{df}} \frac{\partial \Delta p_{df}(x,t)}{\partial t}. \quad (\text{B.15})$$

Las condiciones inicial y de frontera requieren ser expresadas en términos de ΔP . La condición inicial queda de la manera siguiente:

$$\Delta p_{df}(x,0) = p_i - p_{df}(x,0) = 0.$$

Para evaluar la frontera interna, se utiliza la ecuación (B.14), evaluándose en $x = 0$:

$$\frac{\partial p_{df}(r_w,t)}{\partial t} = - \frac{\partial \Delta p_{df}(r_w,t)}{\partial t}.$$

Por lo tanto la condición de frontera interna queda:

$$\frac{\partial \Delta p_{df}(r_w,t)}{\partial x} = - \frac{q\mu B_o \pi}{Ak_{df}}.$$

Para determinar la condición de frontera externa en términos de Δp , se aplica el límite al infinito a la ecuación (B.13) y se sustituye la condición de frontera externa, como se muestra a continuación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta p_{df}(x,t) = \lim_{x \rightarrow \infty} p_i - \lim_{x \rightarrow \infty} p_{df}(x,t) = p_i - p_i = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta p_{df}(x,t) = 0.$$

La transformada de Laplace tiene la forma siguiente:

$$\frac{df(t)}{\partial t} = s\bar{f}(s) - f(0).$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (B.15) (en ambos lados de la ecuación) queda:

$$\frac{d^2 \Delta \bar{p}_{df}(x, s)}{dx^2} = \frac{1}{\eta_{df}} [s \Delta \bar{p}_{df}(x, s) - \Delta p_{df}(x, 0)].$$

Sustituyendo la condición inicial en términos de Δp , en la ecuación anterior se obtiene una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden:

$$\frac{d^2 \Delta \bar{p}_{df}(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{\eta_{df}} \cdot \Delta \bar{p}_{df}(x, s) = 0. \quad (\text{B.16})$$

La ecuación característica asociada es:

$$m^2 - \frac{s}{\eta_{df}} = 0.$$

Cuyas raíces son:

$$m_1 = \sqrt{s / \eta_{df}},$$

y,

$$m_2 = -\sqrt{s / \eta_{df}},$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación (B.16) es:

$$\Delta \bar{p}_{df}(x, s) = C_1 e^{x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}} + C_2 e^{-x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}}$$

Aplicando la transformada de Laplace a las condiciones de frontera:

$$\frac{d \Delta \bar{p}_{df}(r_w, s)}{dx} = \frac{q \mu B_o \pi}{A k_{df} s},$$

y,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta \bar{p}_{df}(x, s) = 0.$$

Aplicando la condición de frontera externa a la solución general se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta \bar{p}_{df}(x, s) = C_1 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}} + C_2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}} = C_1 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}} + C_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}}} = 0, \quad (\text{B.17})$$

de donde puede observarse que:

$$C_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e^{x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}}} \right] = 0,$$

por lo que la ecuación (B.17) se reduce a:

$$C \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}} + 0 = 0.$$

De la ecuación anterior se observa que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}} \neq 0,$$

entonces, para satisfacer la condición, se requiere la condición siguiente:

$$C_1 = 0.$$

Al sustituir la constante C_1 en la solución general, se obtiene, la solución acotada:

$$\Delta \bar{p}_{df}(x, s) = C_2 e^{-x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}}.$$

Para aplicar la condición de frontera interna se deriva la solución acotada:

$$\frac{d\Delta \bar{p}_{df}(x, s)}{dx} = C_2 \left[-\sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}} \right] e^{-x \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}}.$$

Si $x = r_w$ entonces la ecuación anterior queda de la manera siguiente:

$$\frac{d\Delta \bar{p}_{df}(r_w, s)}{dx} = -C_2 \left[\sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}} \right] e^{-[r_w] \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}}.$$

Ahora, sustituyendo el valor de la frontera interna, en términos de Δp en el espacio de Laplace:

$$-\frac{q\mu B_o \pi}{Ak_{df} s} = -C_2 \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}} e^{-[r_w] \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}},$$

despejando C_2 :

$$C_2 = \frac{\sqrt{\eta_{df}} q\mu B_o \pi}{s^{3/2} Ak_{df}} e^{[r_w] \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}}.$$

La solución al problema en el espacio de Laplace se obtiene al sustituir la constante C_2 en la solución acotada:

$$\Delta \bar{p}_f(x, s) = \frac{q\mu B_o \pi \sqrt{\eta_{df}}}{Ak_{df}} e^{r_w \sqrt{\frac{s}{\eta_{df}}}} \left[\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{\eta_{df}} \sqrt{s}}}}{s^{3/2}} \right],$$

por lo que su transformada inversa, según la ecuación 29.3.85 del Manual de Fórmulas Matemáticas de Abramowitz es:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{3/2}} e^{-k\sqrt{s}} \right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - k \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} \right),$$

se puede observar que:

$$k = \frac{x}{\sqrt{\eta_{df}}}.$$

Si se aplica la transformada inversa a la solución en el espacio de Laplace, con el valor de k ya establecido, la solución en el espacio real queda:

$$\Delta p_{df}(x, t) = \frac{q\mu B_o \pi \sqrt{\eta_{df}}}{Ak_{df}} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{(x-r_w)/\sqrt{\eta_{df}}}{4t}} - \frac{x-r_w}{\sqrt{\eta_{df}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{(x-r_w)/\sqrt{\eta_{df}}}{2\sqrt{t}} \right) \right],$$

$$\Delta p_{df}(x, t) = \frac{q\mu B_o}{Ak_{df}} \left[2\sqrt{t\pi\eta_{df}} e^{-\frac{(x-r_w)^2}{4t\eta_{df}}} - \pi(x-r_w) \operatorname{erfc} \left(\frac{x-r_w}{2\sqrt{t\eta_{df}}} \right) \right]. \quad (\text{B.18})$$

Transformación a variables adimensionales

Para obtener la solución a la ecuación de difusión en variables adimensionales se considerarán las las siguientes variables:

$$x_D = \frac{x}{x_{df}}, \quad (B.19)$$

$$t_D = \frac{k_{fb} t}{\phi_i \mu c_{fb} x_{df}^2}, \quad (B.20)$$

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_{df}(x, t)]}{q B_o \mu}. \quad (B.21)$$

El primer paso es derivar las ecuaciones (B.19), (B.20) y (B.21), con respecto a x , t y $p(x, t)$, respectivamente. Dichas ecuaciones quedan de la forma siguiente:

$$\frac{dx_D}{dx} = \frac{1}{x_{df}}, \quad (B.22)$$

$$\frac{dt_D}{dt} = \frac{k_{df}}{\phi_{df} \mu c_{df} x_{df}^2}, \quad (B.23)$$

$$\frac{dp_{df}(x, t)}{dp_{dfD}(x_D, t_D)} = -\frac{q \mu B_o}{k_{df} h}. \quad (B.24)$$

La primera derivada en espacio utilizando la regla de la cadena se define como:

$$\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x} = \frac{dp_{df}(x, t)}{dp_{dfD}(x_D, t_D)} \frac{dx_D}{dx} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D}.$$

Sustituyendo (B.22) y (B.24) en la ecuación anterior, queda la siguiente expresión:

$$\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x} = \left[-\frac{q \mu B_o}{k_{df} h} \right] \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D} = -\frac{q \mu B_o}{k_{df} x_{df} h} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D}. \quad (B.25)$$

La segunda derivada en espacio:

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{q \mu B_o}{k_{df} x_{df} h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right) \left[\frac{dx_D}{dx} \right].$$

Sustituyendo (B.22) en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{q\mu B_o}{k_{df} x_{df} h} \left(\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} \right) \left[\frac{1}{x_{df}} \right] = -\frac{q\mu B_o}{k_{df} h x_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2}. \quad (\text{B.26})$$

La primera derivada con respecto al tiempo se puede expresar como:

$$\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} = \frac{dt_D}{dt} \frac{dp_{df}(x,t)}{dp_{dfD}(x_D, t_D)} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}.$$

Al sustituir (B.23) y (B.24) en la ecuación previa, se obtiene:

$$\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df} h} \right] \left[\frac{k_{df}}{\phi_{df} \mu c_{df} x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D} = -\frac{q\mu B_o}{\phi_{df} \mu c_{df} x_{df}^2 h} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (\text{B.27})$$

Se sustituyen (B.26) y (B.27) en (B.12):

$$\left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df} h x_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} \right] = \frac{1}{\eta_{df}} \left[-\frac{q\mu B_o}{\phi_{df} \mu c_{df} x_{df}^2 h} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D} \right].$$

Al simplificar se obtiene la ecuación de difusión para Flujo Lineal adimensional en una fractura vertical dominante:

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (\text{B.28})$$

El siguiente paso es convertir las condiciones inicial y de fronteras a variables adimensionales:

La condición inicial en variables adimensionales ($t = 0$) se determina mediante la ecuación:

$$p_{dfD} \left(x_D = \frac{x}{x_{df}}, t_D = \frac{k_{df} [0]}{\phi_{df} \mu c_{df} x_{df}^2} \right) = \frac{k_{df} h [p_i - p(x,0)]}{q_0 \mu B_o} = \frac{k_{df} h [p_i - p_i]}{q_0 \mu B_o} = 0$$

La conversión de la condición de frontera interna, se obtiene al evaluar $x = r_w$ en la ecuación (B.25):

$$\frac{\partial p_{df}(r_w, t)}{\partial x} = -\frac{q_0 \mu B_o}{k_{df} h} \frac{\partial p_{dfD} \left(x_D = \frac{[r_w]}{x_{df}}, t_D \right)}{\partial x_D},$$

o bien:

$$\frac{\partial p_{dfD}(r_w, t_D)}{\partial x_D} = -\frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} \frac{\partial p(r_w, t)}{\partial x}.$$

Se sustituye la condición de frontera interna en variables reales en la ecuación anterior, para obtener la condición de frontera interna en variables adimensionales:

$$\frac{\partial p_{dfD}(r_w, t_D)}{\partial x_D} = -\frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} \left[\frac{q_0 \mu B_o \pi}{k_{df} h} \right] = -\pi.$$

La condición de frontera externa en variables adimensionales se obtiene aplicando el límite cuando x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD} \left(\frac{[x]}{x_{df}}, \frac{\eta_{df} [t]}{x_{df}^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k_{df} A [p_i - p(x, t)]}{q_0 \mu B_o} = \frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} p_i - \lim_{x \rightarrow \infty} p(x, t) \right],$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD} \left(\frac{x}{x_{df}}, \frac{\eta_{df} t}{x_{df}^2} \right) = \frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} [p_i - p_i] = 0.$$

Solución

El primer paso es aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (B.28):

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} = [s p_{dfD}(x_D, s) - p_{dfD}(x_D, 0)].$$

Al aplicar la condición inicial adimensional, la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - s p_{dfD}(x_D, s) = 0. \quad (\text{B.29})$$

La ecuación característica asociada:

$$m^2 - s = 0 ,$$

cuyas raíces son:

$$m_1 = \sqrt{s} ,$$

y,

$$m_2 = -\sqrt{s} ,$$

por lo tanto, la solución general de la ecuación (B.28) es:

$$p_{dfD}(x_D, s) = C_1 e^{-x_D \sqrt{s}} + C_2 e^{x_D \sqrt{s}} .$$

Para obtener la solución en el espacio de Laplace, se transforman las condiciones de frontera a dicho espacio:

Condición de frontera interna adimensional en el espacio de Laplace:

$$\frac{dp_{dfD}\left(\frac{r_w}{x_{df}}, s\right)}{dx_D} = -\frac{\pi}{s} ,$$

condición de frontera externa adimensional en el espacio de Laplace:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD}(x_D, s) = \frac{0}{s} = 0 .$$

Se aplica la condición de frontera externa adimensional en el espacio de Laplace en la solución general:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD}(x_D, s) = C_1 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x_D \sqrt{s}} + C_2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x_D \sqrt{s}} = C_1 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_D \sqrt{s}}} + C_2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x_D \sqrt{s}} = 0 , \quad (\text{B.30})$$

puede observarse que:

$$C_1 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e^{\sqrt{s} \cdot x_D}} \right] = 0 ,$$

por lo que la ecuación (B.30) se reduce a:

$$C_2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{s} \cdot x_D} + 0 = 0 .$$

De la ecuación anterior se observa que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x_D \sqrt{s}} \neq 0,$$

por lo que para satisfacer la condición, se requiere que:

$$C_1 = 0.$$

Se sustituye la constante C_2 en la solución general, resultando la solución acotada:

$$p_{dfD}(x_D, s) = C_1 e^{-x_D \sqrt{s}}.$$

Para obtener el valor de C_1 , se requiere derivar la solución acotada:

$$\frac{dp_{dfD}(x_D, s)}{dx_D} = -C_1 \sqrt{s} e^{-x_D \sqrt{s}}.$$

Se aplica la condición de frontera interna adimensional en el espacio de Laplace:

$$\frac{dp_{dfD}\left(\frac{r_w}{x_{df}}, s\right)}{dx_D} = -C_1 \sqrt{s} e^{-\left[\frac{r_w}{x_{df}}\right] \sqrt{s}} = -\frac{\pi}{s},$$

se despeja la constante C_1 :

$$C_1 = \frac{\pi}{s^{3/2}} e^{\frac{r_w \sqrt{s}}{x_{df}}}.$$

Se sustituye C_1 en la solución acotada:

$$p_{dfD}(x_D, s) = \frac{\pi}{s^{3/2}} e^{\frac{r_w \sqrt{s}}{x_{df}}} e^{-\sqrt{s} x_D} = \frac{\pi}{s^{3/2}} e^{\left(\frac{r_w}{x_{df}} - x_D\right) \sqrt{s}},$$

por lo que su transformada inversa, según la ecuación 29.3.85 del Manual de Fórmulas Matemáticas de Abramowitz es:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}} e^{-k \sqrt{s}}\right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - k \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right),$$

se observa que:

$$k = x_D - \frac{r_w}{x_{df}} = \frac{x}{x_{df}} - \frac{r_w}{x_{df}}.$$

Si se aplica la transformada inversa a la solución en el espacio de Laplace, con el valor de k ya establecido, la solución en el espacio real queda:

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = 2\sqrt{\pi t_D} e^{-\frac{\left(x_D - \frac{r_w}{x_{df}}\right)^2}{4t_D}} - \pi \left(x_D - \frac{r_w}{x_{df}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D - \frac{r_w}{x_{df}}}{2\sqrt{t_D}}\right),$$

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = 2\sqrt{\pi t_D} e^{-\frac{(x-r_w)^2}{4t_D x_{df}^2}} - \pi \left(\frac{x-r_w}{x_{df}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x-r_w}{2x_{df}\sqrt{t_D}}\right). \quad (\text{B.31})$$

Para obtener la presión en el fondo del pozo: $x = r_w$, por lo que la ecuación de la presión se reduce a:

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = 2\sqrt{\pi t_D}. \quad (\text{B.32})$$

APÉNDICE C

ECUACIÓN DE DIFUSIÓN PARA FLUJO BILINEAL CON TRANSFERENCIA INTERPOROSA LIBRE

Considere un volumen de control $V_c = \Delta x \Delta y \Delta z$, el cual simulará una fractura vertical finita con fronteras horizontales impermeables (sin aporte de fluidos):

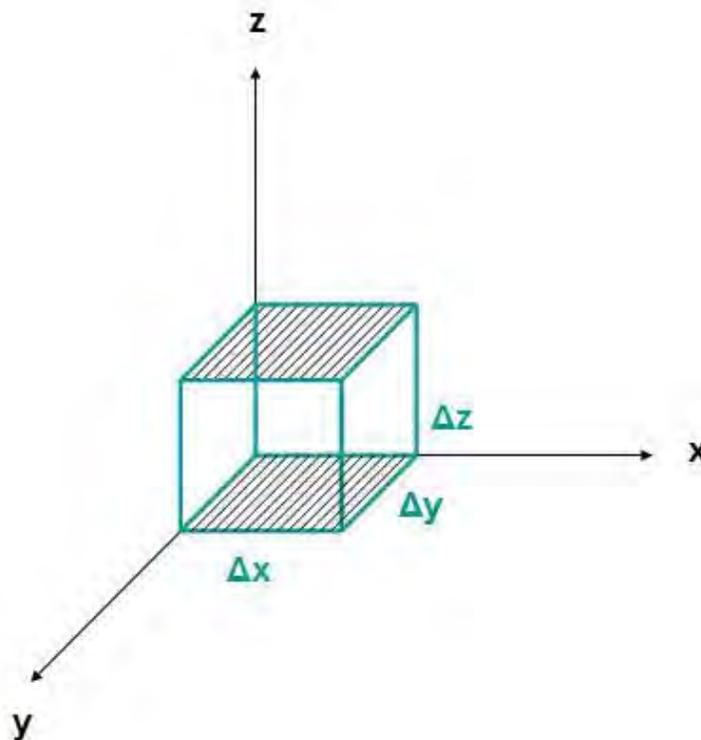


Figura C.1. Volumen de control con fronteras horizontales impermeables (caras $\Delta x \Delta z$).

En el volumen de control ocurre un flujo lineal en la dirección de x , entra un flujo másico $\dot{m}_e = \rho v_x$ en la cara $\Delta y \Delta z$; sale un gasto másico $\dot{m}_s = \rho v_x + \Delta(\rho v)_x$. Existen dos aportes matriciales $\dot{q} = q\rho$ en la dirección “ y ”, pues las caras $\Delta x \Delta z$, son permeables y se considera que proporcionan el mismo aporte de fluidos en ambas:

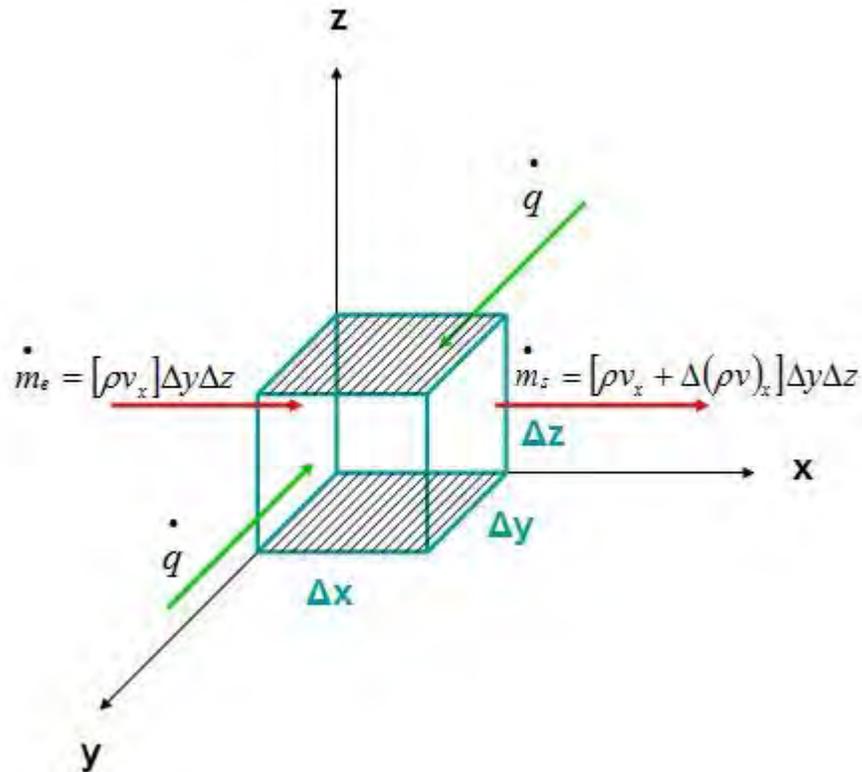


Figura C.2. Flujo bilineal en el volumen de control.

Como la masa que entra no es la misma que sale, podemos hablar de cierta cantidad de masa acumulada en función del espacio, la cual está dada por la ecuación:

masa que entra - masa que sale + aporte de la formación fracturada = masa acumulada ,

$$\dot{m}_a = [\rho v_x] \Delta y \Delta z - [\rho v_x + \Delta(\rho v)_x] \Delta y \Delta z + 2[q\rho].$$

Para obtener la cantidad total de masa que fluye a través de la cara $\Delta y \Delta z$ del volumen de control, ésta se multiplica por el intervalo de tiempo Δt , el aporte de la formación fracturada es multiplicado también por éste último, la ecuación queda:

$$m_a = [-\Delta(\rho v_x)] \Delta y \Delta z \Delta t + 2q\rho \Delta t. \quad (C.1)$$

Si se realiza el análisis dimensional, se obtiene:

$$m_a[M] = -\Delta \left(\rho \left[\frac{M}{L^3} \right] v_x \left[\frac{L}{T} \right] \right) \Delta y [L] \Delta z [L] \Delta t [T] + 2q \left[\frac{L^3}{T} \right] \rho \left[\frac{M}{L^3} \right] \Delta t [T].$$

Por otro lado, la masa acumulada también está en función del tiempo. A un tiempo inicial t se tendrá una masa $m_1 = \phi_{df} S_o \rho$. Después que pase algún tiempo (una Δt), se tendrá una masa distinta, la cual habrá cambiado debido al tiempo, la cual está dada por $m_2 = \phi_{df} S_o \rho + \Delta(\phi_{df} S_o \rho)$. Por lo tanto, la masa acumulada, en función del tiempo estará dada por la ecuación:

masa acumulada = masa después del cambio del tiempo - masa al tiempo inicial .

Para igualar la ecuación de la masa acumulada en función del espacio con la masa acumulada en función del tiempo, es menester que ésta última sea multiplicada por el volumen de control V_c , por lo que la ecuación queda:

$$\begin{aligned} m_a &= [\phi_{df} S_o \rho + \Delta(\phi_{df} S_o \rho)] V_c - [\phi_{df} S_o \rho] V_c, \\ m_a &= \Delta(\phi_{df} S_o \rho) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Realizando el análisis dimensional:

$$m_a [M] = \Delta \left(\phi_{df} \left[\frac{L^3}{L^3} \right] S_o \left[\frac{L^3}{L^3} \right] \rho \left[\frac{M}{L^3} \right] \right) V_c [L^3].$$

El siguiente paso en el desarrollo es igualar las ecuaciones (C.1) y (C.2):

$$[-\Delta(\rho v_x)] \Delta y \Delta z \Delta t + 2q \rho \Delta t = \Delta(\phi_{df} S_o \rho) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Al dividir la ecuación anterior entre $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, obtenemos:

$$-\frac{\Delta}{\Delta x} (\rho v_x) + 2 \frac{q \rho}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\Delta}{\Delta t} (\phi_{df} S_o \rho).$$

Al hacer tender Δx y Δt a cero, podemos aplicar la definición de la derivada para ambos miembros de la ecuación, quedando la expresión siguiente:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + 2 \cdot \frac{q\rho}{V_c} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_{df} S_o \rho).$$

Como se considera que solo existe un fluido saturante en el volumen de control, podemos considerar $S_o = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + 2 \frac{q\rho}{V_c} = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{df} \rho). \quad (C.3)$$

De la ley de Darcy, las siguientes expresiones se obtienen:

$$q = \frac{kA}{\mu} \frac{\partial p}{\partial L},$$

o bien:

$$v = \frac{q}{A} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial L}.$$

Para sustituir las ecuaciones anteriores en la (C.3), se realiza una permutación de la L , por y y x , debido a la dirección del flujo. También debe considerarse el medio por el que fluyen, por lo que aparecerán los subíndices df (fractura dominante) y fb (formación fracturada). Finalmente, el área por la cual fluye el aporte de la formación fracturada está determinado dado por $A = \Delta x \Delta z$, las ecuaciones quedan de la forma siguiente:

$$q = \frac{k_{fb} \Delta x \Delta z}{\mu} \frac{\partial p_{fb}}{\partial y},$$

$$v_x = \frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial p_{df}}{\partial x}.$$

Se sustituyen las dos ecuaciones anteriores en (C.3) y recordando que $V_c = \Delta x \Delta y \Delta z$, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_{df} \rho}{\mu} \frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right] + 2 \left[\frac{k_{fb} \Delta x \Delta z \rho}{\mu} \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi_{df} \rho).$$

La permeabilidad de la fractura dominante k_{df} y la viscosidad μ pueden considerarse constantes, por lo que es posible sacarlas de la derivada parcial de la presión respecto a x :

$$\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right] + 2 \left[\frac{k_{fb} \rho}{\mu \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi_{df} \rho). \quad (C.4)$$

La fórmula para derivar un producto:

$$\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Sí $u = \rho$ y $v = \frac{\partial p_{df}}{\partial x}$ para el miembro izquierdo y $u = \rho$ y $v = \phi_{df}$ para el miembro derecho, la ecuación (C.4) queda:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p_{df}}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right) \right] + 2 \left[\frac{k_{fb} \rho}{\mu \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = - \left[\phi_{df} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi_{df}}{\partial t} \right]. \quad (C.5)$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ y $\frac{\partial \phi_{df}}{\partial t}$ pueden ser expresadas por la regla de la cadena de la manera siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial p_{df}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}}, \quad (C.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}}, \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial \phi_{df}}{\partial t} = \frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}}. \quad (C.8)$$

Se sustituyen (C.6), (C.7), (C.8) en (C.5):

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \right) \frac{\partial p_{df}}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right) \right] = - \left[\phi_{df} \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \right) + \rho \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right) \right],$$

$$\frac{k_{df} \rho}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] = - \phi_{df} \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} + \frac{1}{\phi_{df}} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right] \frac{\partial p_{df}}{\partial t}. \quad (C.9)$$

Las compresibilidades de la formación y del aceite están definidas mediante las ecuaciones:

$$c_{df} = - \frac{1}{\phi_{df}} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}}, \quad (C.10)$$

$$c_o = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}}. \quad (C.11)$$

Se sustituyen (C.10) y (C.11) en (C.9):

$$\frac{k_{df} \rho}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left[\frac{k_{fb} \rho}{\mu \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \phi_{df} \rho [c_o + c_{df}] \frac{\partial p_{df}}{\partial t}.$$

Hasta ahora se ha manejado la densidad ρ a condiciones de yacimiento. Sí se divide la ecuación previa entre la densidad a condiciones estándar, ésta ecuación queda:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\rho}{\rho_s} \left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2}{\rho_s} \left[\frac{k_{fb} \rho}{\mu \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \frac{\phi_{df} \rho c_{idf}}{\rho_s} \frac{\partial p_{df}}{\partial t},$$

reescribiendo:

$$\frac{\rho}{\rho_s} \frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \frac{\rho}{\rho_s} \left[\frac{k_{fb}}{\mu \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \phi_{df} c_{idf} \frac{\rho}{\rho_s} \frac{\partial p_{df}}{\partial t} \quad (C.12)$$

de donde:

$$c_{idf} = c_o + c_{df}.$$

El factor de volumen del aceite puede representarse con la expresión siguiente:

$$B_o = \frac{\rho_s}{\rho}.$$

Sustituyendo el factor de volumen en (C.12):

$$\frac{1}{B_o} \frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \frac{1}{B_o} \left[\frac{k_{fb}}{\mu \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \frac{\phi_{df} c_{idf}}{B_o} \frac{\partial p_{df}}{\partial t},$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left[\frac{k_{fb}}{\mu \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \phi_{df} c_{idf} \frac{\partial p_{df}}{\partial t}.$$

Sí despejamos la permeabilidad de la fractura dominante k_{df} y la viscosidad μ la ecuación anterior queda:

$$\left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left[\frac{1}{k_{df}} \right] \left[\frac{k_{fb}}{\Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \frac{\mu \phi_{df} c_{idf}}{k_{df}} \frac{\partial p_{df}}{\partial t}. \quad (C.13)$$

La constante de difusividad hidráulica para la fractura dominante es:

$$\eta_{df} = \frac{k_{df}}{\phi_{df} c_{idf} \mu}.$$

Por lo que al sustituir la difusividad hidráulica de la fractura en (C.13) se obtiene la ecuación de difusión para flujo bilineal:

$$\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\frac{k_{fb}}{k_{df} \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \frac{1}{\eta_{df}} \frac{\partial p_{df}}{\partial t}.$$

Generalmente, el gradiente al cuadrado tiende a ser muy pequeño comparado con los demás términos, por lo que se desprecia; si se hace dicha consideración, la ecuación de difusión para flujo bilineal queda:

$$\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + 2 \left[\frac{k_{fb}}{k_{df} \Delta y} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \frac{1}{\eta_{df}} \frac{\partial p_{df}}{\partial t}. \quad (C.14)$$

Para obtener la solución a la ecuación anterior se utilizan las condiciones inicial y de frontera siguientes:

condición inicial ($t = 0$), distribución uniforme de presión: $p_{df}(x,0) = p_i$, (C.15)

frontera interna, gasto constante (ley de Darcy): $\frac{\partial p_{df}(x=0,t)}{\partial x} = \frac{q\mu B_o \pi}{k_{df} b_{df} h}$, (C.16)

frontera externa, fractura dominante infinita: $\lim_{x \rightarrow \infty} p_{df}(x,t) = p_i$. (C.17)

Además, debe considerarse el flujo lineal en la formación fracturada:

$$\frac{\partial^2 p_{fb}(y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta_{fb}} \frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t}, \quad (C.18)$$

cuyas condiciones son:

condición inicial ($t = 0$), distribución uniforme de presión: $p_{fb}(y,0) = p_i$, (C.19)

frontera interna, acoplamiento, ($y = 0$): $p_{fb}(0,t) = p_{df}(x,t)$, (C.20)

frontera externa, yacimiento infinito: $\lim_{y \rightarrow \infty} p_{fb}(y,t) = p_i$. (C.21)

Transformación a Variables Adimensionales del Modelo de Flujo Bilineal con Transferencia Interporosa Libre

Considérese un pozo que atraviesa una fractura vertical de conductividad finita conductiva, como el que se muestra en la Figura III.1. Para utilizar la ecuación (C.14), considerando un pozo como se muestra en dicha figura, es necesario adaptar el volumen de control al volumen de la fractura. Para ello únicamente se permuta Δy por b_{df} . Queda la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + 2 \left[\frac{k_{fb}}{k_{df} b_{df}} \right] \frac{\partial p_{fb}}{\partial y} = \frac{1}{\eta_{df}} \frac{\partial p_{df}}{\partial t}. \quad (C.22)$$

Para facilidad de cálculos, se transforma la ecuación anterior a variables adimensionales, las cuales se definen a continuación:

$$x_D = \frac{x}{x_{df}}, \quad (C.23)$$

$$y_D = \frac{y}{x_{df}}, \quad (C.24)$$

$$t_D = \frac{\eta_{fb}}{x_{df}^2} t = \frac{k_{fb} t}{\phi_i \mu c_{fb} x_{df}^2}, \quad (C.25)$$

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_{df}(x, t)]}{qB_o \mu}, \quad (C.26)$$

$$p_{fbD}(y_D, t_D) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_{fb}(y, t)]}{qB_o \mu}. \quad (C.27)$$

De acuerdo con la ecuación (C.23), la derivada de x_D , con respecto a x es:

$$\frac{dx_D}{dx} = \frac{1}{x_{df}}.$$

De la ecuación (C.24), se deriva y_D , con respecto a y :

$$\frac{dy_D}{dy} = \frac{1}{x_{df}}.$$

Derivando t_D con respecto a t , de la ecuación (C.25), se tiene:

$$\frac{dt_D}{dt} = \frac{k_{fb}}{\phi_i \mu c_{fb} x_{df}^2}.$$

Despejando $p_{df}(x, t)$ de la ecuación (C.26), se tiene:

$$p_{df}(x, t) = p_i - \frac{qB_o \mu p_{dfD}(x_D, t_D)}{k_{fb} h}. \quad (C.28)$$

Derivando $p_{df}(x, t)$ con respecto a $p_{dfD}(x_D, t_D)$, se tiene:

$$\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)} = -\frac{qB_o \mu}{k_{fb} h}.$$

Despejando $p_{fb}(y, t)$ de la ecuación (C.27), se tiene:

$$p_{fb}(y, t) = p_i - \frac{q\mu B_o p_{fbD}(y_D, t_D)}{k_{fb} h}. \quad (C.29)$$

Derivando $p_{fb}(y, t)$ con respecto a $p_{fbD}(y_D, t_D)$, se tiene:

$$\frac{\partial p_{fb}(y, t)}{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)} = -\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h}.$$

La primera derivada con respecto al espacio, $\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x}$, empleando la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)} \left[\frac{dx_D}{dx} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D} = \left[-\frac{qB_o \mu}{k_{fb} h} \right] \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \left[\frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right];$$

de la ecuación anterior se deduce que:

$$\frac{\partial p_{df}(x=0, t)}{\partial x} = -\frac{qB_o \mu}{k_{fb} x_{df} h} \frac{\partial p_{dfD}(x_D=0, t_D)}{\partial x_D}. \quad (C.30)$$

La segunda derivada respecto al espacio:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)} \frac{dx_D}{dx} \frac{dx_D}{dx} \frac{\partial}{\partial x_D} \left[\frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right].$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x, t)}{\partial x^2} = \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h} \right] \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2},$$

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h x_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2}. \quad (C.31)$$

Análogamente, la primera derivada con respecto al tiempo, $\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}$, empleando la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)} \frac{dt_D}{dt} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}.$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} &= \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h} \left[\frac{k_{fb}}{\phi_t \mu c_{fjb} x_{df}^2} \right] \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}, \\ \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} &= \left[-\frac{qB_o}{h \phi_t c_{fjb} x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}. \end{aligned} \quad (C.32)$$

La primera derivada con respecto al espacio, $\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial y}$, empleando la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial y} = \frac{\partial p_{df}(y,t)}{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)} \frac{dy_D}{dy} \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D}.$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial y} = \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h} \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \right] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D} = -\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h x_{df}} \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D},$$

de la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{\partial p_{fb}(y=0,t)}{\partial y} = -\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h x_{df}} \frac{\partial p_{fbD}(y_D=0, t_D)}{\partial y_D} \quad (C.33)$$

La segunda derivada de $p_{fb}(y,t)$ respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial y} \right) = \frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)} \frac{dy_D}{dy} \frac{dy_D}{dy} \frac{\partial}{\partial y_D} \left[\frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D} \right].$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{df}(y,t)}{\partial y^2} &= \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{fb}h} \right] \left[\frac{1}{y_{df}} \right] \left[\frac{1}{y_{df}} \right] \frac{\partial^2 p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D^2}, \\ \frac{\partial^2 p_{df}(y,t)}{\partial y^2} &= -\frac{q\mu B_o}{k_{fb}hx_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D^2}. \end{aligned} \quad (C.34)$$

Finalmente, la primera derivada de $p_{fb}(y,t)$ con respecto a t , empleando la regla de la cadena, es:

$$\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)} \frac{dt_D}{dt} \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}.$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t} &= \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{fb}h} \right] \left[\frac{k_{fb}}{\phi_t \mu c_{fcb} x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}, \\ \frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t} &= -\frac{qB_o}{h\phi_t c_{fcb} x_{df}^2} \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}. \end{aligned} \quad (C.35)$$

Para obtener la ecuación de difusión para flujo bilineal en variables adimensionales, se sustituyen las ecuaciones (C.31), (C.32) y (C.33) en (C.14):

$$\begin{aligned} \frac{k_{df}}{\mu} \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df}hx_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{fd}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} \right] + 2 \frac{k_{fb}}{b_{df}\mu} \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df}hx_{df}} \frac{\partial p_{dfD}(0, t_D)}{\partial y_D} \right] = \\ = \left[\phi c_{idf} \right] \left[-\frac{qB_o}{h\phi_t c_{idf} x_{df}^2} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D} \right] \end{aligned}$$

La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial^2 p_{fD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} + 2 \left[\frac{x_{df} k_{fb}}{b_{df} k_{df}} \right] \frac{\partial p_{fbD}(0, t_D)}{\partial y_D} = \frac{\mu \phi_{df} c_{idf}}{k_{df}} \left[\frac{k_{fb}}{\mu \phi_t c_{tfb}} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D} \right]. \quad (C.36)$$

La constante de difusividad hidráulica adimensional de la fractura se define como:

$$\eta_{dfD} = \frac{\eta_{df}}{\eta_{fb}} = \left[\frac{k_{df}}{\phi_{df} \mu c_{idf}} \right] \frac{\phi_t \mu c_{tfb}}{k_{fb}},$$

y la conductividad adimensional de la fractura dominante:

$$(k_{df} b_{df})_D = \frac{b_{df} k_{df}}{x_{df} k_{fb}},$$

por lo que la ecuación (C.36) se puede reescribir:

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} + \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{\partial p_{fbD}(0, t_D)}{\partial y_D} = \frac{1}{\eta_{dfD}} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D}; \quad (C.37)$$

de esta manera se obtiene la ecuación de difusión para flujo bilineal en variables adimensionales.

El siguiente paso es convertir las condiciones inicial y de fronteras a variables adimensionales correspondientes a la ecuación anterior, ecuaciones (C.15), (C.16) y (C.17).

La transformación de la condición inicial ($t = 0$), ecuación (C.15), a variables adimensionales se determina evaluando $t = 0$ en la ecuación (C.26):

$$p_{dfD} \left(x_D = \frac{x}{x_{df}}, t_D = \frac{k_{fb}}{\phi_t \mu c_{tfb} x_{df}^2} [0] \right) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_{df}(x, t = 0)]}{q B_o \mu},$$

sustituyendo (C.15) en la ecuación anterior se tiene:

$$p_{dfD}(x_D, 0) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_i]}{q_0 B_o \mu} = 0$$

La transformación de la condición de frontera interna (gasto constante en la fractura dominante), se obtiene a partir de la ecuación de Darcy, ecuación (C.16):

$$\frac{\partial p_{df}(x=0,t)}{\partial x} = \frac{q\mu B_o \pi}{k_{df} b_{df} h}.$$

Al igualar la ecuación anterior con (C.20) se tiene:

$$-\frac{qB_o \mu}{k_{fb} x_{df} h} \frac{\partial p_{dfD}(0,t_D)}{\partial x_D} = \frac{q\mu B_o \pi}{k_{df} b_{df} h},$$

arreglando:

$$\frac{\partial p_{dfD}(0,t_D)}{\partial x_D} = -\pi \frac{k_{fb} x_{df}}{k_{df} b_{df}},$$

De acuerdo con la definición de la conductividad adimensional, la ecuación previa se reduce a:

$$\frac{\partial p_{dfD}(0,t_D)}{\partial x_D} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D}.$$

La condición de frontera externa en variables adimensionales se obtiene aplicando el límite cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD} \left(x_D = \frac{[x]}{x_{df}}, t_D = \frac{\eta_{df}}{x_{df}^2} t \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k_{fb} h [p_i - p_{df}(x,t)]}{q_0 \mu B_o} = \frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} p_i - \lim_{x \rightarrow \infty} p_{df}(x,t) \right],$$

sustituyendo (C.17) en la ecuación anterior se obtiene la condición de frontera externa en variables adimensionales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD}(x_D, t_D) = \frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} [p_i - p_i] = 0.$$

La ecuación de flujo lineal en la formación fracturada en variables adimensionales se obtiene al sustituir las ecuaciones (C.34) y (C.35) en (C.18):

$$\left[-\frac{q\mu B_o}{k_{fb} h x_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D^2} \right] = \frac{1}{\eta_{fb}} \left[-\frac{qB_o}{h \phi_i c_{fb} x_{df}^2} \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D} \right],$$

la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2 p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D^2} = \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (C.38)$$

La transformación de las condiciones inicial y de frontera a variables adimensionales, correspondientes a la ecuación de difusión de flujo lineal en la formación fracturada, ecuaciones (C.19), (C.20) y (C.21) se obtiene de la manera siguiente:

La transformación de la condición inicial ($t = 0$), ecuación (C.19), a variables adimensionales se determina evaluando $t = 0$ en la ecuación (C.27):

$$p_{fbD} \left(y_D = \frac{y}{x_{df}}, t_D = \frac{k_{fb}}{\phi_i \mu c_{fb} x_{df}^2} [0] \right) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_{fb}(y, t = 0)]}{q B_o \mu},$$

sustituyendo (C.19) en la ecuación anterior se tiene:

$$p_{fbD}(y_D, 0) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_i]}{q_0 B_o \mu} = 0$$

La condición de frontera interna en variables adimensionales, se obtiene al evaluar $y = 0$ en la ecuación (C.29):

$$p_{fb}(y = 0, t) = p_i - \frac{q \mu B_o p_{fbD} \left(y_D = \frac{[0]}{x_{df}}, t_D \right)}{k_{fb} h}.$$

El paso siguiente es igualar la ecuación anterior con la ecuación (C.28):

$$p_i - \frac{q B_o \mu p_{dfD}(x_D, t_D)}{k_{fb} h} = p_i - \frac{q \mu B_o p_{fbD} \left(y_D = \frac{[0]}{x_{df}}, t_D \right)}{k_{fb} h},$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$p_{fbD}(0, t_D) = p_{dfD}(x_D, t_D).$$

Por último, la transformación a variables adimensionales de la condición de frontera externa, ecuación (C.21), se obtiene aplicando el límite cuando y tiende a infinito en la ecuación (C.27):

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, t_D) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{k_{fb} h [p_i - p_{fb}(y, t)]}{q_0 \mu B_o} = \frac{k_{fb} h}{q_0 \mu B_o} \left[\lim_{y \rightarrow \infty} p_i - \lim_{y \rightarrow \infty} p_{fb}(y, t) \right],$$

sustituyendo (C.21) en la ecuación anterior se obtiene la condición de frontera externa en variables adimensionales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, t_D) = \frac{k_{fb} h}{q_0 \mu B_o} [p_i - p_i] = 0.$$

En resumen:

El flujo en la fractura dominante con aporte perpendicular está dado por la ecuación (C.37):

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} + \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{\partial p_{fbD}(0, t_D)}{\partial y_D} = \frac{1}{\eta_{dfD}} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D},$$

con las condiciones:

$$\text{condición inicial: } p_{dfD}(x_D, 0) = 0, \quad (\text{C.39})$$

$$\text{frontera interna, gasto constante: } \frac{\partial p_{dfD}(0, t_D)}{\partial x_D} = - \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D}, \quad (\text{C.40})$$

$$\text{frontera externa, fractura dominante infinita: } \lim_{x_D \rightarrow \infty} p_{dfD}(x_D, t_D) = 0. \quad (\text{C.41})$$

El flujo lineal en la formación fracturada está dado por la ecuación (C.38):

$$\frac{\partial^2 p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial y_D^2} = \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D},$$

cuyas condiciones son:

$$\text{condición inicial: } p_{fbD}(y_D, 0) = 0, \quad (\text{C.42})$$

$$\text{frontera interna, acoplamiento: } p_{fbD}(0, t_D) = p_{dfD}(x_D, t_D), \quad (\text{C.43})$$

$$\text{frontera externa, yacimiento infinito: } \lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, t_D) = 0. \quad (\text{C.44})$$

Solución al Modelo de Flujo Bilineal con Transferencia Interporosa Libre

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo lineal en la formación fracturada, ecuación (C.38):

$$\frac{d^2 p_{fbD}(y_D, s)}{dy_D^2} = s\bar{p}_{fbD}(y_D, s) - p_{fbD}(y_D, 0).$$

Sustituyendo la ecuación (C.42), en la anterior:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{fbD}(y_D, s)}{dy_D^2} = s\bar{p}_{fbD}(y_D, s).$$

La solución general es:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = C_1 e^{y_D \sqrt{s}} + C_2 e^{-y_D \sqrt{s}}.$$

Se aplica la transformada de Laplace a las condiciones de frontera en la ecuación de flujo en la formación fracturada:

$$\bar{p}_{fbD}(0, s) = \bar{p}_{dfD}(x_D, s),$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, s) = 0.$$

Se aplica la condición de frontera externa, ecuación (C.44) en la solución general:

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fbD}(y_D, s) = C_1 \lim_{y_D \rightarrow \infty} e^{y_D \sqrt{s}} + C_2 \lim_{y_D \rightarrow \infty} e^{-y_D \sqrt{s}} = 0,$$

evaluando:

$$C_1 [\text{valor}] + C_2 [0] = 0,$$

para satisfacer la condición de frontera externa se requiere que:

$$C_1 = 0.$$

Sustituyendo la constante C_1 en la solución genera, se obtiene la solución acotada:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = C_2 e^{-y_D \sqrt{s}}. \tag{C.45}$$

Aplicando la condición de frontera interna (acoplamiento):

$$p_{fbD}(0, s) = C_2 e^{-[0]\sqrt{s}} = \bar{p}_{dfD}(x_D, s).$$

Por lo tanto, la constante C_2 es:

$$C_2 = \bar{p}_{dfD}(x_D, s). \quad (C.46)$$

Se sustituye la constante C_2 en la solución acotada y se obtiene la solución para la formación fracturada en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = [\bar{p}_{dfD}(x_D, s)] e^{-y_D \sqrt{s}}.$$

En la ecuación de flujo en la fractura se requiere la derivada de la presión en el yacimiento:

$$\frac{d\bar{p}_{fbD}(y_D, s)}{dy_D} = -\sqrt{s} [\bar{p}_{dfD}(x_D, s)] e^{-y_D \sqrt{s}}.$$

Evaluando en la interfase formación fracturada-fractura dominante:

$$\frac{d\bar{p}_{fbD}(0, s)}{dy_D} = -\sqrt{s} [\bar{p}_{dfD}(x_D, s)]. \quad (C.47)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo en la fractura dominante, ecuación (C.38):

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} + \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{dp_{fbD}(0, s)}{dy_D} = \frac{1}{\eta_{dfD}} [s \bar{p}_{dfD}(x_D, s) - p_{dfD}(x_D, 0)].$$

Sustituyendo la condición inicial, ecuación (C.39), y la ecuación (C.47), en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - \frac{2\sqrt{s}}{(k_{df} b_{df})_D} \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = \frac{s}{\eta_{dfD}} \bar{p}_{dfD}(x_D, s),$$

arreglando:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - \left[\frac{2\sqrt{s}}{(k_{df} b_{df})_D} + \frac{s}{\eta_{dfD}} \right] \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0.$$

Re escribiendo la ecuación anterior:

$$\frac{d^2 p_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - sg(s) \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0, \quad (C.48)$$

en donde:

$$g(s) = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + \frac{1}{\eta_{dfD}}. \quad (C.49)$$

La solución general para la ecuación de flujo en la fractura dominante:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = C_3 e^{x_D \sqrt{sg(s)}} + C_4 e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}. \quad (C.50)$$

Aplicando la transformada de Laplace a las condiciones de frontera para la fractura dominante:

condición de frontera interna:

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(0, s)}{dx_D} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s},$$

condición de frontera externa:

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0.$$

Aplicando la condición de frontera externa:

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = C_3 \lim_{x_D \rightarrow \infty} e^{x_D \sqrt{sg(s)}} + C_4 \lim_{x_D \rightarrow \infty} e^{-x_D \sqrt{sg(s)}} = 0,$$

evaluando:

$$0 = C_3 [\text{valor}] + C_4 [0],$$

se requiere que:

$$C_3 = 0. \quad (C.51)$$

Sustituyendo el valor de la constante C_3 anterior en la solución general para la ecuación de flujo en la fractura dominante, ecuación (C.50), se obtiene la solución acotada:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = C_4 e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}. \quad (C.52)$$

Derivando (C.52) con respecto a x_D :

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D} = -\sqrt{sg(s)} C_4 e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}.$$

Evaluando en la condición de frontera interna para la fractura dominante:

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(0, s)}{dx_D} = -\sqrt{sg(s)} C_4 e^{-[0]\sqrt{sg(s)}} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s},$$

despejando la constante:

$$C_4 = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s \sqrt{sg(s)}}.$$

Sustituyendo la constante C_4 en la solución acotada de la fractura dominante, se obtiene la solución del modelo en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s \sqrt{sg(s)}} e^{-x_D \sqrt{sg(s)}}.$$

La solución en el pozo:

$$x_D = 0,$$

$$\bar{p}_{wD}(s) = \bar{p}_{dfD}(0, s).$$

Por lo que:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s \sqrt{sg(s)}}, \quad (C.53)$$

sustituyendo la función $g(s)$:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s \sqrt{s \left[\frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + \frac{1}{\eta_{dfD}} \right]}}.$$

La solución puede escribirse:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + \frac{1}{\eta_{dfD}}}} \right] \frac{1}{s^{3/2}} = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{\sqrt{\eta_{dfD}}}{\sqrt{\frac{2\sqrt{\eta_{dfD}}}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + 1}} \right] \frac{1}{s^{3/2}}. \quad (C.54)$$

Invirtiendo a tiempo real se obtiene la solución:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\eta_{dfD}}}{(k_{df} b_{df})_D} \int_0^{t_D} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\eta_{dfD} t_D}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{t_D - t'_D}}\right)}{\sqrt{t'_D}} dt'_D.$$

Solución analítica aproximada a tiempos cortos:

$$t_D \rightarrow 0 \qquad s \rightarrow \infty$$

Aplicando el límite en (C.49):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + \frac{1}{\eta_{dfD}} \right] = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{[\infty]}} + \frac{1}{\eta_{dfD}} = \frac{1}{\eta_{dfD}}.$$

Sustituyendo el resultado anterior en (C.53) se tiene:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s^{3/2}} \sqrt{\eta_{dfD}}.$$

La inversión de la ecuación anterior a tiempo real es:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{\pi \sqrt{\eta_{dfD}}}{(k_{df} b_{df})_D} \left[\frac{2\sqrt{t_D}}{\sqrt{\pi}} \right] = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\pi \eta_{dfD} t_D}. \quad (C.55)$$

En variables reales:

$$p_{wf} = p_i - \frac{2q\mu}{k_{df} b_{df} h} \sqrt{\frac{\pi k_{df}}{\mu \phi_{df} c_{idf}}} t_D^{1/2}.$$

La derivada logarítmica:

$$\frac{dp_{wD}(t_D)}{d \ln t_D} = \frac{\sqrt{\pi \eta_{dfD}}}{(k_{df} b_{df})_D} t_D^{1/2}.$$

Solución analítica aproximada a tiempos largos:

$$g(s) = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}} + \frac{1}{\eta_{dfD}} - \frac{1}{\eta_{dfD}} = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D \sqrt{s}}.$$

Se sustituye el resultado anterior en (C.53):

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D s \sqrt{\frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} s^{1/4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2(k_{df} b_{df})_D} s^{5/4}}.$$

Invirtiendo a tiempo real mediante tablas, la solución a tiempo largos es:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{\pi}{\sqrt{2(k_{df} b_{df})_D} \Gamma(5/4)} \frac{t_D^{1/4}}{t_D^{5/4}} = \frac{2.54}{\sqrt{(k_{df} b_{df})_D}} t_D^{-3/4}.$$

Derivando con respecto al tiempo, regresando a variables adimensionales:

$$\frac{dp_{wD}(t_D)}{dt_D} = \frac{2.54}{4\sqrt{(k_{df} b_{df})_D}} t_D^{-3/4},$$

su derivada logarítmica:

$$\frac{dp_{wD}(t_D)}{d \ln t_D} = \frac{0.6125}{\sqrt{(k_{df} b_{df})_D}} t_D^{1/4}.$$

RESUMEN:

t_D	s	$\bar{p}_{wD}(s)$	$p_{wD}(t_D)$	$\frac{dp_{wD}(t_D)}{d \ln t_D}$
$t_D \rightarrow 0$	$s \rightarrow \infty$	$\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s^{3/2}} \sqrt{\eta_{dfD}}$	$\frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\pi \eta_{dfD} t_D}$	$\frac{\sqrt{\pi \eta_{dfD} t_D}}{(k_{df} b_{df})_D} t_D^{1/2}$
		$\frac{\pi}{\sqrt{2(k_{df} b_{df})_D} s^{5/4}}$	$\frac{2.54}{\sqrt{(k_{df} b_{df})_D}} t_D^{1/4}$	$\frac{0.6125}{\sqrt{(k_{df} b_{df})_D}} t_D^{1/4}$

APÉNDICE D

ECUACION DE DIFUSION PARA FLUJO BILINEAL CON TRANSFERENCIA INTERPOROSA PSEUDOESTACIONARIA

El modelo de Warren y Root considera que la transferencia de un medio poroso a otro, ocurre en forma pseudoestacionaria.

Para desarrollar la ecuación el modelo de Warren y Root, se considera el flujo en la fractura dominante y un aporte matricial.

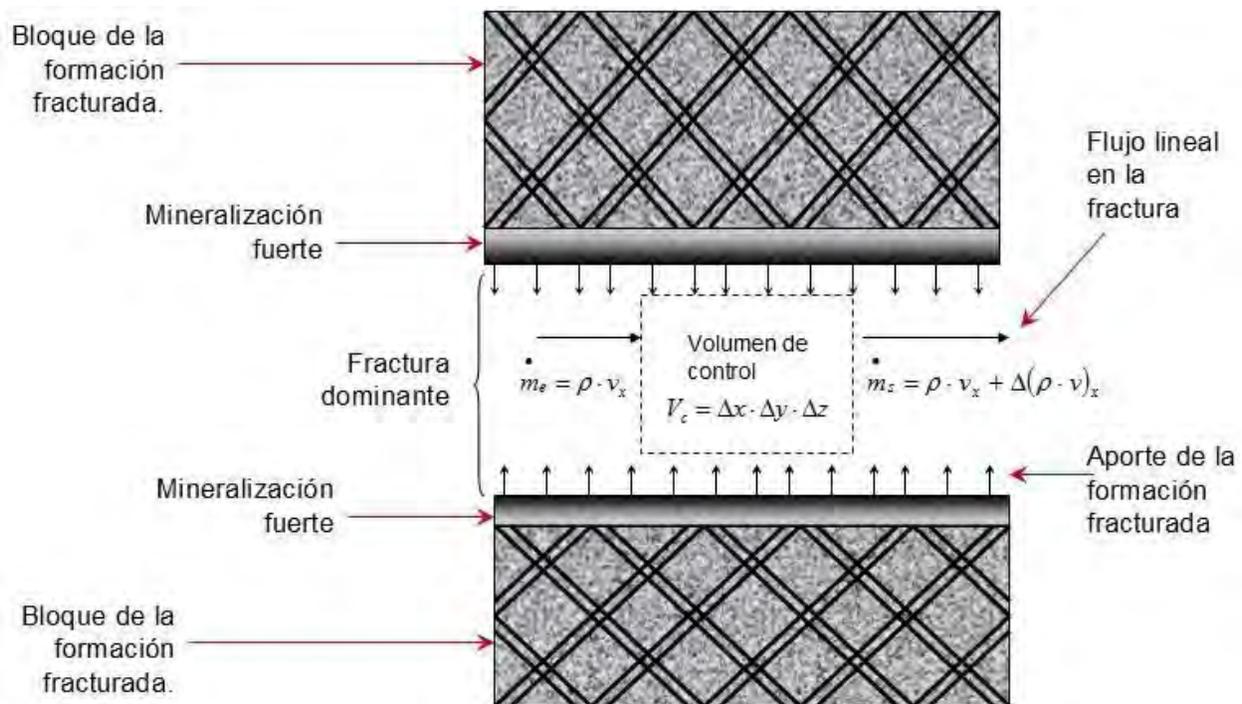


Figura D.1. Volumen de control para el desarrollo del modelo de Warren y Root.

Con base en la figura anterior, se establece que la masa acumulada en el volumen de control, en función del espacio está dada por la ecuación:

$$(\text{masa que entra} - \text{masa que sale})_x = \text{masa acumulada} ,$$

$$m_{e-s} = [(\rho v_x) - (\rho v_x) + \Delta(\rho v)_x] \Delta y \Delta z \Delta t ,$$

$$m_{e-s} = \Delta(\rho v_x) \Delta y \Delta z \Delta t . \tag{D.1}$$

Al realizar el análisis dimensional, se obtiene:

$$m_{e-s}[M] = -\Delta \left(\rho \left[\frac{M}{L^3} \right] v_x \left[\frac{L}{T} \right] \right) \Delta y [L] \Delta z [L] \Delta t [T].$$

La masa acumulada está en función del tiempo:

$$m_a = [\phi_{df} S_o \rho + \Delta(\phi_{df} S_o \rho)] V_c - [\phi_{df} S_o \rho] V_c = \Delta(\phi_{df} S_o \rho) V_c. \quad (D.2)$$

Realizando el análisis dimensional:

$$m_a [M] = \Delta \left(\phi_{df} \left[\frac{L^3}{L^3} \right] S_o \left[\frac{L^3}{L^3} \right] \rho \left[\frac{M}{L^3} \right] \right) V_c [L^3].$$

El paso siguiente en el desarrollo es igualar las ecuaciones (D.1) y (D.2):

$$-\Delta(\rho v_x) \Delta y \Delta z \Delta t = \Delta(\phi_{df} S_o \rho) V_c.$$

Dividiendo entre $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$:

$$-\frac{\Delta}{\Delta x} (\rho v_x) = \frac{\Delta}{\Delta t} (\phi_{df} S_o \rho).$$

Aplicando el límite de Δx , Δy y Δt , tendiendo a cero y sustituyendo $S_o = 1$, debido a que se está considerando un fluido saturante al cien por ciento, resulta la ecuación de continuidad en una dirección:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_{df} \rho). \quad (D.3)$$

De la ley de Darcy se tienen las expresiones siguientes:

$$v_x = -\frac{k_{dfx}}{\mu} \frac{\partial p_{df}}{\partial x}.$$

Se sustituyen las dos ecuaciones anteriores en (D.3):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left[\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right] \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_{df} \rho).$$

Como las permeabilidades y la viscosidad se consideran constantes, la ecuación anterior se reescribe:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left[\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right] \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_{df} \rho).$$

Al aplicar las derivadas, con la fórmula de producto:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \left[\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right] + \rho \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} \right] = \phi_{df} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi_{df}}{\partial t}. \quad (D.4)$$

Las derivadas parciales de la densidad y la porosidad con respecto al espacio y al tiempo pueden ser expresada por la regla de la cadena, por lo que la ecuación anterior se expresa:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\left[\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \right] \frac{\partial p_{df}}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} \right] = \phi_{df} \left[\frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} \right] + \rho \left[\frac{\partial p_{df}}{\partial t} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right].$$

al factorizar la derivada parcial con respecto al tiempo:

$$\rho \frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} \right] = \left[\phi_{df} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} + \rho \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right] \frac{\partial p_{df}}{\partial t},$$

$$\rho \frac{k_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} + c_o \left(\frac{\partial p_{df}}{\partial x} \right)^2 \right] = \left[\phi_{df} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} + \rho \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right] \frac{\partial p_{df}}{\partial t}.$$

Como el gradiente cuadrático tiende a ser muy pequeño para el aceite, comparado con los demás términos, se desprecia resultando la expresión siguiente:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\rho \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} \right] = \left[\phi_{df} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} + \rho \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right] \frac{\partial p_{df}}{\partial t}.$$

Al factorizar el miembro derecho de la ecuación se tiene:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \left[\rho \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} \right] = \phi_{df} \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} + \frac{1}{\phi_{df}} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right] \frac{\partial p_{df}}{\partial t}.$$

De esta manera, la densidad queda constante en ambos miembros de la ecuación por lo que puede cancelarse, además la expresión $\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_{df}} + \frac{1}{\phi_{df}} \frac{\partial \phi_{df}}{\partial p_{df}} \right]$ corresponde a la compresibilidad total de la fractura dominante, entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} = \phi_{df} c_{idf} \frac{\partial p_{df}}{\partial t}.$$

Hasta el momento únicamente se ha considerado el flujo en la fractura dominante. Para añadir el flujo de la formación fracturada, éste se considera una fuente y se adiciona en el término acumulativo, por lo que a la ecuación anterior se le añade el término q_{fb-df}^* en el lado derecho de la ecuación:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} = \phi_{df} c_{idf} \frac{\partial p_{df}}{\partial t} + q_{fb-df}^* \tag{D.5}$$

El término q_{fb-df}^* es el gasto de la formación fracturada a la fractura dominante por unidad de volumen de roca:

$$q_{fb-df}^* = \frac{q_{fb}}{V_r}, \tag{D.6}$$

en el cual se consideran los efectos de expansión:

$$q_{fb} = \phi_{fb} c_{fb} V_r \frac{\partial p_{fb}}{\partial t}. \tag{D.7}$$

De la ecuación anterior puede observarse, que el gasto q_{fb} representa una expansión del sistema poroso en la formación fracturada por unidad de tiempo, mismo

que resulta en un aporte a la fractura dominante por parte de la formación fracturada. Al sustituir la ecuación (D.7) en (D.6) se obtiene:

$$q_{fb-df}^* = \phi_{fb} c_{fb} \frac{\partial p_{fb}}{\partial t}, \quad (D.8)$$

y al sustituir ésta última ecuación en (D.5) se obtiene el modelo de flujo lineal con término fuente, adaptado por Pulido y Valdés en la presente tesis, considerando una sola fractura dominante:

$$\frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} = \phi_{df} c_{idf} \frac{\partial p_{df}}{\partial t} + \phi_{fb} c_{fb} \frac{\partial p_{fb}}{\partial t}. \quad (D.9)$$

Las condiciones inicial y de frontera en variables reales, para la obtener la solución de la ecuación anterior son las siguientes:

condición inicial ($t = 0$), distribución uniforme de presión: $p_{df}(x,0) = p_i$, (D.10)

frontera interna, gasto constante (ley de Darcy): $\frac{\partial p_{df}(x=0,t)}{\partial x} = \frac{q\mu B_o \pi}{k_{df} b_{df} h}$, (D.11)

frontera externa, fractura dominante infinita: $\lim_{x \rightarrow \infty} p_{df}(x,t) = p_i$. (D.12)

Obtención de la Ecuación de Transferencia Formación Fracturada-Fractura Dominante en Forma Pseudoestacionaria

El gasto de la formación fracturada a la fractura dominante debido al gradiente de presión en la formación fracturada es:

$$q_{fd-df} = -\frac{k_{fb} A_{fd-df}}{\mu} \frac{\Delta p_{fb-df}}{\Delta L} = -\frac{k_{fd} x_{df} h}{\mu} \frac{\Delta p_{fb-df}}{\Delta L}. \quad (D.13)$$

El gasto de la formación fracturada a la fracturada dominante debido al gradiente de presión por cada unidad de volumen de roca es:

$$q_{fb-df}^* = \frac{q_{fd-df}}{V_b} = -\frac{k_{fb} x_{df} h}{\mu V_b} \left[\frac{p_{fb}(x, y, t) - p_{df}(x, y, t)}{l_d} \right]. \quad (D.14)$$

El factor forma de la fractura dominante refleja la geometría de los elementos de la formación fracturada y está dado por:

$$\sigma_{df} = \frac{x_{df} h}{V_b l_d}. \quad (D.15)$$

Al sustituir el factor forma de la fractura dominante en la ecuación del gasto de la formación fracturada a la fracturada dominante, se obtiene:

$$q_{fb-df}^* = -\frac{k_{fb} \sigma_{df}}{\mu} [p_{fb}(x, y, t) - p_{df}(x, y, t)]. \quad (D.16)$$

Al igualar la ecuación anterior con la ecuación (D.8) se obtiene la ecuación de transferencia formación fracturada-fractura dominante en forma pseudoestacionaria:

$$-\frac{k_{fb} \sigma_{df}}{\mu} [p_{fb}(x, y, t) - p_{df}(x, y, t)] = \phi_{fb} c_{fb} \frac{\partial p_{fb}}{\partial t}. \quad (D.17)$$

La ecuación (D.17) está sujeta a la condición inicial ($t = 0$), distribución uniforme de presión:

$$p_{fb}(y, 0) = p_i, \quad (D.18)$$

Transformación a Variables Adimensionales del Modelo de Flujo Bilineal con Transferencia Interporosa Pseudoestacionaria

Se definen la variables adimensionales siguientes:

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = \frac{k_{df} h [p_i - p_{df}(x, t)]}{q B_o \mu}, \quad (D.19)$$

$$p_{fbD}(y_D, t_D) = \frac{k_{df} h [p_i - p_{fb}(y, t)]}{q B_o \mu}, \quad (D.20)$$

$$t_D = \frac{k_{fb} t}{(\phi c_t)_i \mu x_{df}^2}, \quad (D.21)$$

donde:

$$(\phi c_t)_t = \phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb};$$

$$x_D = \frac{x}{x_{df}}, \quad (D.22)$$

$$y_D = \frac{y}{x_{df}}. \quad (D.23)$$

La conductividad adimensional de la fractura dominante se define como:

$$(k_{df} b_{df})_D = \frac{b_{df} k_{df}}{x_{df} k_{fb}} \quad (D.24)$$

El tamaño de bloque adimensional se define como:

$$H_D = \frac{H}{x_{df}}$$

El parámetro del almacenamiento de la fractura dominante, ω_{df} :

$$\omega_{df} = \frac{\phi_{df} c_{idf}}{\phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb}},$$

$$1 - \omega_{df} = \frac{\phi_{fb} c_{ifb}}{\phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb}}.$$

De acuerdo con la ecuación (D.22), la derivada de x_D , respecto a x es:

$$\frac{dx_D}{dx} = \frac{1}{x_{df}}.$$

Derivando t_D respecto a t , de la ecuación (D.21), se tiene:

$$\frac{dt_D}{dt} = \frac{k_{df}}{(\phi c_t)_t \mu x_{df}^2}.$$

Despejando $p_{df}(x, t)$ de la ecuación (D.19), se tiene:

$$p_{df}(x, t) = p_i - \frac{q\mu B_o p_{dfD}(x_D, t_D)}{k_{df} h}. \quad (D.25)$$

Derivando $p_{df}(x, t)$ respecto de $p_{dfD}(x_D, t_D)$, se tiene:

$$\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)} = -\frac{q\mu B_o}{k_{df} h}.$$

La primera derivada con respecto al espacio $\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x}$, empleando la regla de la

cadena es:

$$\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)} \left[\frac{dx_D}{dx} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D} = \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df} h} \right] \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D},$$

$$\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x} = -\frac{q\mu B_o}{k_{df} h x_{df}} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D},$$

de la ecuación anterior se deduce que:

$$\frac{\partial p_{df}(x=0, t)}{\partial x} = -\frac{qB_o \mu}{k_{fb} x_{df} h} \frac{\partial p_{dfD}(x_D=0, t_D)}{\partial x_D}. \quad (D.26)$$

La segunda derivada respecto al espacio:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial p_{df}(x, t)}{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)} \frac{dx_D}{dx} \frac{dx_D}{dx} \frac{\partial}{\partial x_D} \left[\frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D} \right].$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x, t)}{\partial x^2} = \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df} h} \right] \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \left[\frac{1}{x_{df}} \right] \frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2},$$

$$\frac{\partial^2 p_{df}(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{q\mu B_o}{k_{df} h x_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2}. \quad (D.27)$$

Análogamente, la primera derivada con respecto al tiempo $\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t}$, empleando la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial p_{dfD}(x_D,t_D)} \frac{dt_D}{dt} \frac{\partial p_{dfD}(x_D,t_D)}{\partial t_D}.$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} &= \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df} h} \right] \left[\frac{k_{df}}{(\phi c_t)_t \mu x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D,t_D)}{\partial t_D}, \\ \frac{\partial p_{df}(x,t)}{\partial t} &= \left[-\frac{k_{df} q\mu B_o}{k_{df} h (\phi c_t)_t \mu x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D,t_D)}{\partial t_D}. \end{aligned} \quad (D.28)$$

La primera derivada con respecto al tiempo $\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t}$, empleando la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial p_{fbD}(y_D,t_D)} \frac{dt_D}{dt} \frac{\partial p_{fbD}(y_D,t_D)}{\partial t_D}.$$

Despejando $p_{fb}(y,t)$ de la ecuación (D.20), se tiene:

$$p_{fb}(y,t) = p_i - \frac{q\mu B_o p_{fbD}(y_D,t_D)}{k_{df} h}. \quad (D.29)$$

Derivando $p_{fb}(y,t)$ respecto a $p_{fbD}(y_D,t_D)$, se tiene:

$$\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial p_{fbD}(y_D,t_D)} = -\frac{q\mu B_o}{k_{df} h}.$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t} = \left[-\frac{q\mu B_o}{k_{df} h} \right] \left[\frac{k_{df}}{(\phi c_t)_t \mu x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{fbD}(y_D,t_D)}{\partial t_D},$$

$$\frac{\partial p_{fb}(y,t)}{\partial t} = \left[-\frac{k_{df} q \mu B_o}{k_{df} h(\phi c_t)_t \mu x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (D.30)$$

Dividiendo (D.9) entre $[\phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb}]$, se obtiene la igualdad:

$$\frac{1}{[\phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb}]} \frac{k_{df}}{\mu} \frac{\partial^2 p_{df}}{\partial x^2} = \omega \frac{\partial p_{df}}{\partial t} + [1 - \omega_{df}] \frac{\partial p_{fb}}{\partial t}.$$

Sustituyendo (D.27), (D.28) y (D.30) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[\phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb}]} \frac{k_{df}}{\mu} \frac{q \mu B_o}{k_{df} h x_{df}^2} \frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} &= \omega_{df} \left[-\frac{k_{df} q \mu B_o}{k_{df} h(\phi c_t)_t \mu x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D} + \\ + [1 - \omega_{df}] &\left[-\frac{k_{df} q \mu B_o}{k_{df} h(\phi c_t)_t \mu x_{df}^2} \right] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}. \end{aligned}$$

Al simplificar se obtiene el modelo de flujo lineal con término fuente en la fractura dominante:

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \omega_{df} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D} + [1 - \omega_{df}] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (D.31)$$

El paso siguiente es transformar las condiciones inicial y de fronteras a las que está sujeta la ecuación anterior.

La transformación de la condición inicial ($t = 0$), ecuación (D.10), a variables adimensionales se determina evaluando $t = 0$ en la ecuación (D.19):

$$p_{dfD} \left(x_D = \frac{x}{x_{df}}, t_D = \frac{k_{fb}}{\phi_t \mu c_{ifb} x_{df}^2} [0] \right) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_{df}(x, t = 0)]}{q B_o \mu},$$

sustituyendo (D.10) en la ecuación anterior se tiene:

$$p_{dfD}(x_D, 0) = \frac{k_{fb} h [p_i - p_i]}{q_0 B_o \mu} = 0$$

La transformación de la condición de frontera interna (gasto constante en la fractura dominante), se obtiene a partir de la ecuación de Darcy, ecuación (D.11):

$$\frac{\partial p_{df}(x=0,t)}{\partial x} = \frac{q\mu B_o \pi}{k_{df} b_{df} h}.$$

Al igualar la ecuación anterior con (D.25) se tiene:

$$-\frac{qB_o \mu}{k_{fb} x_{df} h} \frac{\partial p_{dfD}(0,t_D)}{\partial x_D} = \frac{q\mu B_o \pi}{k_{df} b_{df} h},$$

arreglando:

$$\frac{\partial p_{dfD}(0,t_D)}{\partial x_D} = -\pi \frac{k_{fb} x_{df}}{k_{df} b_{df}},$$

de acuerdo con la definición de la conductividad adimensional, ecuación (D.24), la ecuación previa se reduce a:

$$\frac{\partial p_{dfD}(0,t_D)}{\partial x_D} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D}.$$

La condición de frontera externa en variables adimensionales se obtiene aplicando el límite cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD} \left(x_D = \frac{[x]}{x_{df}}, t_D = \frac{\eta_{df}}{x_{df}^2} t \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k_{fb} h [p_i - p_{df}(x,t)]}{q_0 \mu B_o} = \frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} p_i - \lim_{x \rightarrow \infty} p_{df}(x,t) \right],$$

sustituyendo (D.12) en la ecuación anterior se obtiene la condición de frontera externa en variables adimensionales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_{dfD}(x_D, t_D) = \frac{k_{df} h}{q_0 \mu B_o} [p_i - p_i] = 0.$$

Al dividir la ecuación (D.15) entre $[\phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb}]$ se obtiene:

$$-\frac{k_{fb} \sigma_{df}}{\mu} \frac{\partial p_{fb}}{\partial t} = \frac{\phi_{fb} c_{fb}}{[\phi_{df} c_{idf} + \phi_{fb} c_{ifb}]} [p_{fb}(x,y,t) - p_{df}(x,y,t)],$$

$$-\frac{k_{fb}\sigma_{df}}{[\phi_{df}c_{idf} + \phi_{fb}c_{ifb}]\mu} [p_{fb}(x, y, t) - p_{df}(x, y, t)] = [1 - \omega_{df}] \frac{\partial p_{fb}}{\partial t}.$$

Al sustituir las ecuaciones (D.25), (D.29) y (D.30), en la ecuación anterior, se obtiene la transferencia interporosa restringida:

$$\frac{\sigma_{df}k_{fb}x_{df}^2}{k_{df}} [p_{fbD}(y_D, t_D) - p_{dfD}(x_D, t_D)] = [1 - \omega_{df}] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D},$$

la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\lambda_{df} [p_{fbD}(y_D, t_D) - p_{dfD}(x_D, t_D)] = [1 - \omega_{df}] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (D.27)$$

donde:

$$\lambda_{df} = \frac{\sigma_{df}k_{fb}x_{df}^2}{k_{df}}.$$

La transformación de la condición inicial ($t = 0$), de la ecuación (D.27) a variables adimensionales se obtiene evaluando $t = 0$ en la ecuación (D.29):

$$p_{fbD} \left(y_D = \frac{y}{x_{df}}, t_D = \frac{k_{fb}}{\phi_t \mu c_{ifb} x_{df}^2} [0] \right) = \frac{k_{fb}h[p_i - p_{fb}(y, t = 0)]}{qB_o\mu},$$

sustituyendo (D.18) en la ecuación anterior se tiene:

$$p_{fbD}(y_D, 0) = \frac{k_{fb}h[p_i - p_i]}{q_0B_o\mu} = 0$$

En Resumen:

El *flujo en la fractura dominante* está dado por la ecuación (D.31):

$$\frac{\partial^2 p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial x_D^2} = \omega_{df} \frac{\partial p_{dfD}(x_D, t_D)}{\partial t_D} + [1 - \omega_{df}] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D},$$

con las condiciones:

$$\text{condición inicial:} \quad p_{dfD}(x_D, 0) = 0, \quad (D.28)$$

frontera interna, gasto constante:

$$\frac{\partial p_{dfD}(0, t_D)}{\partial x_D} = -\frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D}, \quad (D.29)$$

frontera externa, fractura dominante infinita:

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} p_{dfD}(x_D, t_D) = 0. \quad (D.30)$$

La *transferencia interporosa restringida*, está dado por la ecuación (D.27):

$$\lambda_{df} [p_{fbD}(y_D, t_D) - p_{dfD}(x_D, t_D)] = [1 - \omega_{df}] \frac{\partial p_{fbD}(y_D, t_D)}{\partial t_D},$$

cuya condición inicial es:

$$p_{fbD}(y_D, 0) = 0. \quad (D.31)$$

Solución al Modelo de Flujo Bilineal con Transferencia Interporosa Pseudoestacionaria

Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación de transferencia interporosa pseudoestacionaria de la formación fracturada-fractura dominante, ecuación (D.27):

$$[1 - \omega_{df}] s [\bar{p}_{fbD}(y_D, s) - p_{fbD}(y_D, 0)] = \lambda_{df} [\bar{p}_{dfD}(x_D, s) - \bar{p}_{fbD}(y_D, s)].$$

Se sustituye la condición inicial de la formación fracturada (D.31) en la ecuación anterior:

$$[1 - \omega_{df}] s \bar{p}_{fbD}(y_D, s) = \lambda_{df} \bar{p}_{dfD}(x_D, s) - \lambda_{df} \bar{p}_{fbD}(y_D, s).$$

La solución de la presión adimensional en la formación fracturada es:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s) = \frac{\lambda_{df}}{[1 - \omega_{df}]s + \lambda_{df}} \bar{p}_{dfD}(x_D, s). \quad (D.32)$$

Se aplica la transformada de Laplace en la ecuación de flujo lineal en la fractura dominante:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - [1 - \omega_{df}] [s \bar{p}_{fbD}(y_D, s) - p_{fbD}(y_D, 0)] = \omega_{df} [s \bar{p}_{dfD}(x_D, s) - p_{dfD}(x_D, 0)].$$

Se sustituyen las condiciones iniciales (D.28) y (D.31) en la ecuación previa:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - [1 - \omega_{df}] s \bar{p}_{fbD}(y_D, s) = \omega_{df} s \bar{p}_{dfD}(x_D, s). \quad (D.33)$$

Se sustituye (D.32) en (D.33), y factorizando queda la expresión:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - \left[\frac{[1 - \omega_{df}] \lambda_{df}}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}} + \omega_{df} \right] s \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0, \quad (D.34)$$

arreglando:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - \left[\frac{\lambda_{df} s - \omega_{df} \lambda_{df} s + \omega_{df} s^2 - \omega_{df}^2 s^2 + \lambda_{df} \omega_{df} s}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}} \right] \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0,$$

$$\frac{d^2 \bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - \left[\frac{\lambda_{df} - \omega_{df} \lambda_{df} + \omega_{df} s - \omega_{df}^2 s + \lambda_{df} \omega_{df}}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}} \right] s \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0, \quad (D.35)$$

de donde se puede definir la función de transferencia:

$$f(s) = \frac{\lambda_{df} + \omega_{df} [1 - \omega_{df}] s}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}}. \quad (D.36)$$

La ecuación (D.35) queda:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{dx_D^2} - sf(s) \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0.$$

La solución general del flujo lineal en la fractura dominante es:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = A e^{x_D \sqrt{sf(s)}} + B e^{-x_D \sqrt{sf(s)}}. \quad (D.37)$$

Se aplica la transformada de Laplace a las condiciones de frontera:

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(0, s)}{dx_D} = -\frac{\pi}{s} \frac{1}{(k_{df} b_{df})_D},$$

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{dfD}(x_D, s) = 0.$$

Se aplica la condición de frontera externa a la solución general, por lo que se requiere que:

$$A = 0.$$

Al sustituir la constante A en la solución general, ecuación (D.37), se obtiene una solución acotada:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = B e^{-x_D \sqrt{sf(s)}}. \quad (D.38)$$

Se aplica la condición de frontera interna a la solución acotada:

$$\frac{d\bar{p}_{dfD}(0, s)}{dx_D} = -\sqrt{sf(s)}B = -\frac{\pi}{s} \frac{1}{(k_{df} b_{df})_D},$$

al despejar B:

$$B = \frac{1}{s\sqrt{sf(s)}} \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D}.$$

Al sustituir la constante B en la solución acotada, ecuación (D.38), se obtiene la solución al problema en el espacio de Laplace:

$$\bar{P}_{dfD}(x_D, s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s\sqrt{sf(s)}} e^{-x_D \sqrt{sf(s)}}.$$

La presión en el pozo es:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \bar{p}_{dfD}(x_D = 0, s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{e^{-[0]\sqrt{sf(s)}}}{s\sqrt{sf(s)}} = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s\sqrt{sf(s)}}.$$

Arreglando se obtiene la presión en el pozo para flujo lineal con término fuente:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{f(s)}}. \quad (D.39)$$

Solución Analítica Aproximada a Tiempos Adimensionales Cortos:

$$t_D \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty$$

El límite de la función transferencia para tiempos cortos es:

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda_{df} + \omega_{df} [1 - \omega_{df}] s}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{\lambda_{df}}{s} + \omega_{df} [1 - \omega_{df}]}{[1 - \omega_{df}] + \frac{\lambda_{df}}{s}} = \frac{0 + \omega_{df} [1 - \omega_{df}]}{[1 - \omega_{df}] + 0} = \omega_{df}.$$

Se sustituye la ecuación anterior en (D.39):

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{df}}}.$$

Al aplicar la transformada inversa a la ecuación anterior, se obtiene la solución de la ecuación a tiempos cortos:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t_D}{\omega_{df}}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(k_{df} b_{df})_D} \left(\frac{t_D}{\omega_{df}} \right)^{1/2},$$

Su derivada logarítmica:

$$\frac{d\bar{p}_{wD}(t_D)}{d \ln t_D} = \frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df} b_{df})_D} (t_D \omega_{df})^{1/2}.$$

Solución Analítica aproximada a Tiempos Intermedios:

La función transferencia es:

$$f(s) = \frac{\lambda_{df} + \omega_{df} [1 - \omega_{df}] s}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}},$$

se resta el tiempo corto a la función de transferencia:

$$f(s) = \frac{\lambda_{df} + \omega_{df} [1 - \omega_{df}] s}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}} - \omega_{df} = \frac{[1 - \omega_{df}] \lambda_{df}}{[1 - \omega_{df}] s + \lambda_{df}}.$$

Se sustituye la ecuación anterior en (D.39) y queda la expresión siguiente:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{[1-\omega_{df}] \lambda_{df}}{[1-\omega_{df}] s + \lambda_{df}}}} = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{s^{3/2}} \frac{\sqrt{[1-\omega_{df}] s + \lambda_{df}}}{\sqrt{[1-\omega_{df}] \lambda_{df}}}.$$

Caso 1: $[1-\omega_{df}] s \gg \lambda_{df}$.

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{\sqrt{[1-\omega_{df}] s}}{\sqrt{[1-\omega_{df}] \lambda_{df}} s^{3/2}} = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{df}} s}.$$

La solución para tiempos intermedios, se obtiene al aplicar la transformada inversa a la ecuación anterior y resulta la ecuación:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{df}}}$$

La derivada es:

$$\frac{d\bar{p}_{wD}(t_D)}{d \ln t_D} = 0.$$

Caso 2: $[1-\omega_{df}] s = \lambda_{df}$.

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{\sqrt{\lambda_{df} + \lambda_{df}}}{\sqrt{[1-\omega_{df}] \lambda_{df}} s^{3/2}} = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{\sqrt{2\lambda_{df}}}{\sqrt{[1-\omega_{df}] \lambda_{df}} s^{3/2}} = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\frac{2}{[1-\omega_{df}]}} \frac{1}{s^{3/2}},$$

La solución para tiempos intermedios, se obtiene al aplicar la transformada inversa a la ecuación anterior y resulta la ecuación:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\frac{2}{[1-\omega_{df}]}} \frac{2\sqrt{t_D}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\frac{8}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}.$$

La derivada logarítmica es:

$$\frac{d\bar{p}_{wD}(t_D)}{d \ln t_D} = \frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\frac{2}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}.$$

Caso 3: $[1-\omega]s \ll \lambda_{df}$.

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{\sqrt{\lambda_{df}}}{\sqrt{[1-\omega_{df}]}\sqrt{\lambda_{df}} s^{3/2}} = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{\sqrt{[1-\omega_{df}]}} s^{3/2},$$

la solución en el tiempo real, se obtiene al aplicar la transformada inversa a la ecuación anterior y resulta la ecuación:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{\pi}{(k_{df} b_{df})_D} \frac{1}{\sqrt{[1-\omega_{df}]}} 2\sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = \frac{2}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\frac{\pi}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}.$$

La derivada logarítmica es:

$$\frac{d\bar{p}_{wD}(t_D)}{d \ln t_D} = \frac{1}{(k_{df} b_{df})_D} \sqrt{\frac{\pi}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}.$$

El punto de inflexión del valle:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{df}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t_D}}{\sqrt{[1-\omega_{df}]}} ,$$

$$t_D = \frac{\pi [1-\omega_{df}]}{4 \lambda_{df}}.$$

Solución analítica aproximada a tiempos muy largos

$$s \rightarrow 0, t_D \rightarrow \infty$$

El límite para la función transferencia para tiempos largos es:

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda_{df} + \omega_{df} [1-\omega_{df}] s}{[1-\omega_{df}] s + \lambda_{df}} = \frac{\lambda_{df} + 0}{0 + \lambda_{df}} = 1.$$

Se sustituye la ecuación anterior en (D.39) y que la solución para tiempos largos en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \frac{1}{s\sqrt{s}}.$$

Al aplicar la transformada inversa en la ecuación previa se tiene el comportamiento de la presión a tiempos largos:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} 2\sqrt{\frac{t_D}{\pi}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} (t_D)^{1/2}.$$

Su derivada es:

$$\frac{dp_{wD}(t_D)}{d \ln t_D} = \frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} (t_D)^{1/2}.$$

RESUMEN:

t_D	s	$\bar{p}_{wD}(s)$	$p_{wD}(t_D)$	$\frac{dp_{wD}(t_D)}{d \ln t_D}$
$t_D \rightarrow 0$	$s \rightarrow \infty$	$\frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \frac{1}{s^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{df}}}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} \left(\frac{t_D}{\omega_{df}}\right)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} (t_D \omega_{df})^{1/2}$
	$s > \frac{\lambda_{df}}{[1-\omega]}$	$\frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{df}} s}$	$\frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{df}}}$	0
	$s = \frac{\lambda_{df}}{[1-\omega]}$	$\frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \sqrt{\frac{2}{[1-\omega_{df}]}} \frac{1}{s^{3/2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} \sqrt{\frac{8}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} \sqrt{\frac{2}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}$
	$s < \frac{\lambda_{df}}{[1-\omega]}$	$\frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \frac{1}{\sqrt{[1-\omega_{df}]}} s^{3/2}$	$\frac{2}{(k_{df}b_{df})_D} \sqrt{\frac{\pi}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}$	$\frac{1}{(k_{df}b_{df})_D} \sqrt{\frac{\pi}{[1-\omega_{df}]}} t_D^{1/2}$
$t_D \rightarrow \infty$	$s \rightarrow 0$	$\frac{\pi}{(k_{df}b_{df})_D} \frac{1}{s\sqrt{s}}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} (t_D)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{(k_{df}b_{df})_D} (t_D)^{1/2}$

APÉNDICE E

MODELADO DEL DAÑO INTERPOROSO

La restricción al flujo de un medio poroso a otro se incorpora por medio de un daño. La presión de la formación fracturada y la de la fractura dominante pueden ser relacionadas con el análisis siguiente:

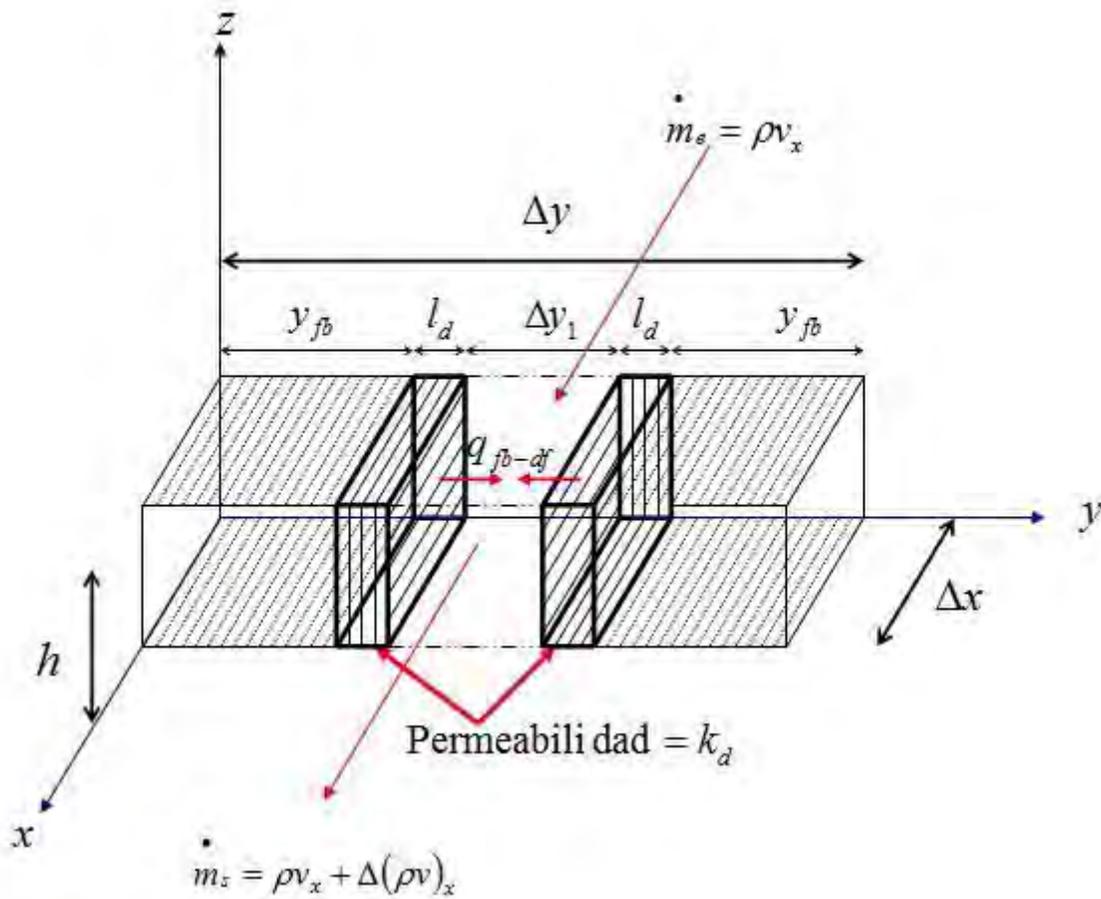


Figura E.1. Esquema del flujo en una fractura dominante con aporte de la formación fracturada.

Cuando existe un daño entre los medios porosos, el flujo en esta región ocurre bajo condiciones pseudoestacionarias; es decir, los cambios de presión son instantáneos y la capacidad de almacenamiento es despreciable. Se utiliza flujo tipo Darcy, la caída de presión en la formación fracturada es función de la caída de presión en la fractura dominante y ésta es función del tiempo; el *gradiente de presión* también es función del tiempo y están relacionadas con la ecuación:

$$q_{fb-df} = \frac{k_d A_{sup}}{\mu} \frac{\partial p(y, t)_{sup}}{\partial y} = \frac{k_d A_{sup}}{\mu} \left[\frac{p_{fb}(y, t)_{sup} - p_{df}(x, t)}{l_d} \right], \quad (E.1)$$

donde:

k_d = permeabilidad de la zona dañada, md ,

l_d = espesor de la zona dañada,

b_f = abertura de la fractura dominante .

Al utilizar la presión de yacimiento de referencia, y dividir ambos lados de la ecuación entre el volumen de roca, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{q_{fb-df}}{V_b} = \frac{k_d A_{df}}{V_b \mu} \left[\frac{[p_i - p_{df}(x, t)] - [p_i - p_{fb}(y, t)_{sup}]}{l_d} \right] = \frac{k_d A_{df}}{V_b \mu} \left[\frac{\Delta p_{df}(x, t) - \Delta p_{fb}(y, t)_{sup}}{l_d} \right]. \quad (E.2)$$

La expresión q_{fb-df}/V_b se le conoce como el gasto de transferencia de fluido por unidad de roca, y se denota como q_{fb-df}^* . Por otro lado, se divide el área de la fractura dominante entre el volumen de roca: $A_{dfb} = A_{df}/V_b$, por lo que la ecuación (E.2) se puede reescribir de la manera siguiente:

$$q_{fb-df}^* = \frac{k_d A_{dfb}}{\mu} \left[\frac{\Delta p_{df}(x, t) - \Delta p_{fb}(y, t)_{sup}}{l_d} \right]. \quad (E.3)$$

Si se despeja la *caída de presión en la fractura dominante* se obtiene:

$$\Delta p_{df}(x, t) = q_{fb-df}^* \frac{\mu l_d}{k_d A_{dfb}} + \Delta p_{fb}(y, t)_{sup}. \quad (E.4)$$

Por otro lado, q_{fb-df}^* se expresa de también de la forma siguiente:

$$q_{fb-df}^* = \int_0^t \frac{\partial p_{fb}(\tau)}{\partial \tau} \frac{q_{fb}(t-\tau)}{V_b} d\tau. \quad (E.5)$$

El gasto de la formación con flujo lineal, q_{fb} , está dado por la expresión:

$$q_{fb}(t) = \frac{k_d A_{df}}{\mu} \frac{\partial p_{fb}(y, t)_{\text{sup}}}{\partial y}.$$

Sustituyendo el gasto de la formación para flujo lineal dentro de la convolución, ecuación (E.5), se obtiene:

$$q_{fb-df}^* = \int_0^t \frac{\partial p_{fb}(y, \tau)}{\partial \tau} \frac{k_{fb} A_{df}}{\mu} \left[\frac{\partial p_{fb}(y, t - \tau)}{\partial y} \right] d\tau = \frac{k_{fb} A_{df}}{\mu} \int_0^t \frac{\partial p_{fb}(y, \tau)}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p_{fb}(y, t - \tau)}{\partial y} \right] d\tau. \quad (\text{E.6})$$

De acuerdo con lo propuesto por de Swaan y Najurieta, la derivada parcial de la presión con respecto a y , considerando a la matriz y fracturada un estrato (flujo lineal) se puede expresar como:

$$\frac{\partial \Delta p_{fb}(y, t)_{\text{sup}}}{\partial y} = \frac{4}{h} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k_{fb}(\phi_{df} c_{idf})_i r_w^2 (2n+1)\pi^2 t_D}{k_{fb}(\phi_i c_{ifb})_i h^2}}. \quad (\text{E.7})$$

Al sustituir las ecuaciones (E.6) y (E.7) en (E.4), y expresándola en términos adimensionales, se obtiene:

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = p_{fbD}(y_D, t_D)_{\text{sup}} + 4 \frac{k_{fb} l_d}{k_d h} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{fbD}(y, \tau)_{\text{sup}}}{\partial \tau} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k_{fb}(\phi_{df} c_{idf})_i r_w^2 (2n+1)\pi^2 [t_D - \tau]}{k_{fb}(\phi_i c_{ifb})_i h^2}} d\tau. \quad (\text{E.8})$$

La difusividad hidráulica adimensional por unidad de área de la formación fracturada se define como:

$$\frac{\eta_{fbD}}{H_D^2} = \frac{k_{fb} \phi_{df} c_{idf} r_w^2}{k_{df} \phi_i c_{ifb} h^2}. \quad (\text{E.9})$$

El daño entre la formación fracturada y la fractura dominante en forma adimensional se expresa como:

$$S_{fb-dfD} = \frac{l_d k_{fb}}{k_d h}. \quad (\text{E.10})$$

Con base en las dos expresiones anteriores, le ecuación (E.8) se reescribe:

$$p_{dfD}(x_D, t_D) = p_{fbD}(y_D, t_D)_{\text{sup}} + 4S_{fb-dfD} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{fbD}(y, \tau)_{\text{sup}}}{\partial \tau} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_{fbD} [t_D - \tau]}{H_D^2}} d\tau. \quad (\text{E.11})$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = \bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} + \bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} 4S_{fb-dfD} s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_{fbD} [t_D - \tau]}{H_D^2}}. \quad (\text{E.12})$$

Factorizando la presión en la formación naturalmente fracturada:

$$\bar{p}_{dfD}(x_D, s) = \bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} \left[1 + 4S_{fb-dfD} s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_{fbD} [t_D - \tau]}{H_D^2}} \right]. \quad (\text{E.13})$$

Despejando la presión de la formación naturalmente fracturada:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{\text{sup}} = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + 4S_{fb-dfD} s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_{fbD} [t_D - \tau]}{H_D^2}}}. \quad (\text{E.14})$$

De Gradshteyn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \eta_{fbD} [t_D - \tau]}{H_D^2}} = \frac{1}{4} \frac{H_D}{\sqrt{\eta_{fbD} s}} \tanh \left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{4\eta_{fbD}}} \right). \quad (\text{E.15})$$

Comportamiento de la Tangente Hiperbólica

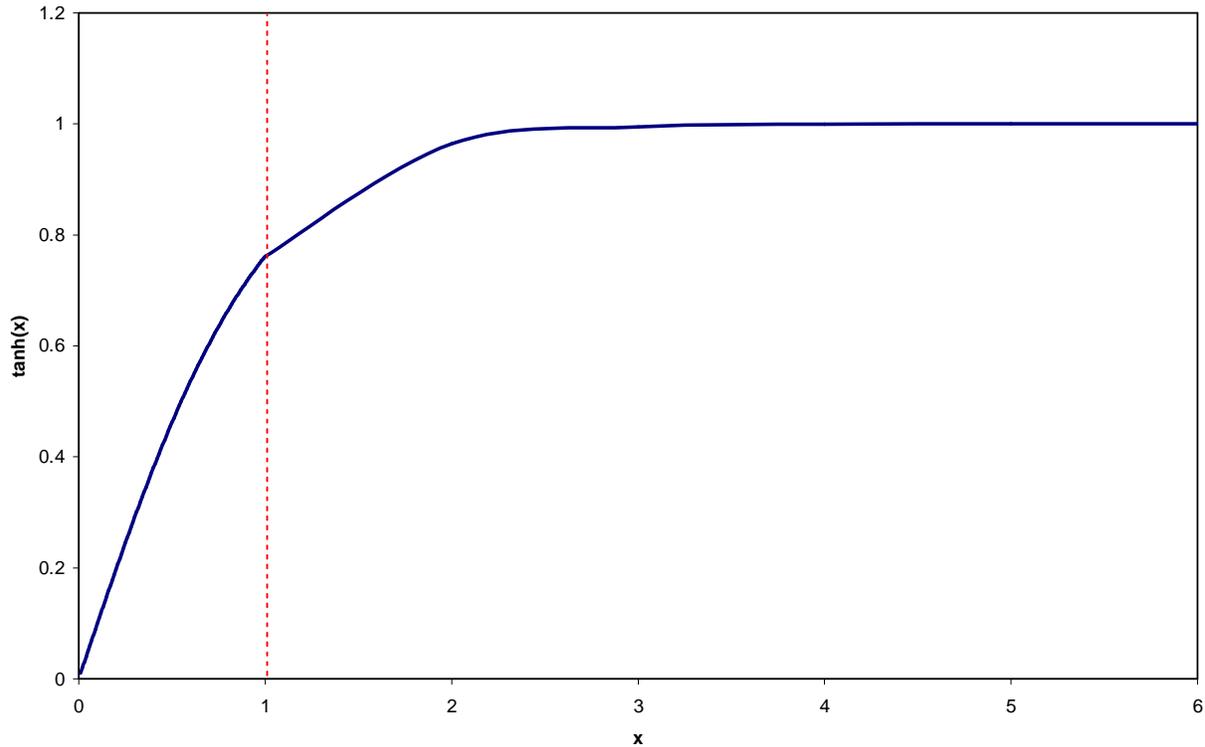


Figura E.2. Comportamiento de la Tangente Hiperbólica.

De la **Figura E.3.**, puede observarse que el comportamiento de la función tangente hiperbólica es el siguiente:

- a) $\tanh\left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}}\right) \approx \frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}}$; $0 < \frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}} < 1.$
- b) $\tanh\left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}}\right) \approx 1$; $1 \leq \frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}} < \infty.$

Al sustituir (E.15) en (E.14), ésta última queda:

$$\bar{p}_{fbD}(y_D, s)_{sup} = \frac{\bar{p}_{dfD}(x_D, s)}{1 + S_{fb-dfD} s \left[\frac{H_D}{\sqrt{\eta_{fbD} s}} \tanh\left(\frac{H_D}{2} \sqrt{\frac{s}{\eta_{fbD}}}\right) \right]}. \quad (E.16)$$

APÉNDICE F

ALGORÍTMO DE STEHFEST

El algoritmo de Stehfest proporciona una aproximación de la transformada inversa de Laplace para un valor dado en el espacio real. Es decir, sea una función $\bar{p}_{wD}(s)$ en el espacio de Laplace, el algoritmo proveerá un valor en el tiempo real $\bar{p}_{wD}(a)$, para un valor t_D establecido. La aproximación está dada por la expresión siguiente:

$$p_{wD}(a) = \frac{\ln 2}{t_D} \sum_{i=1}^N V_i p\left(\frac{\ln 2}{t_D} i\right) \quad (\text{F.1})$$

de donde $\frac{\ln 2}{t_D} i$ en $p\left(\frac{\ln 2}{t_D} i\right)$ hará las veces de s , el parámetro de la transformada de

Laplace. El valor N es un parámetro de convergencia, es el límite superior de la suma y su valor deberá corresponder a un número par, el cual dependerá del grado de precisión utilizado en el cálculo numérico.

Por otro lado, el valor V_i está definido por:

$$V_i = (-1)^{N/2+1} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-1)!} \quad (\text{F.2})$$

de donde el límite superior de la sumatoria, $\min(i, N/2)$, implica que para cada caso, el número que deberá seleccionarse tendrá que ser menor entre i y $N/2$; k representa el límite inferior de la suma y se determina utilizando enteros aritméticos.

Para utilizar el algoritmo de Stehfest es necesario seleccionar una N . Como las V_i únicamente dependen de N , necesitan ser calculadas sólo una vez para cada valor de N seleccionado. Entre mayor sea el valor de N , la solución numérica invertida será más exacta. Sin embargo, N está limitada por errores de truncamiento. Los valores absolutos de V_i aumentan conforme N lo hace. Es recomendable utilizar varios valores de N para

comprobar si se obtiene el mismo resultado en todos los casos. A continuación se muestran los valores de V_i para valores desde $N=2$, hasta $N=18$:

	N=2	N=4	N=6	N=8	N=10
V_1	2	-2	1	-3.333333×10^{-1}	8.333333×10^{-2}
V_2	-2	26	-49	4.833333×10^1	-3.208333×10^1
V_3	---	-48	366	-9.060000×10^2	1.279000×10^3
V_4	---	24	-858	5.464666×10^3	-1.562366×10^4
V_5	---	---	810	-1.437666×10^4	8.424416×10^4
V_6	---	---	-270	1.873000×10^4	-2.369575×10^5
V_7	---	---	---	-1.194666×10^4	3.759116×10^5
V_8	---	---	---	2.986666×10^3	-3.400716×10^5
V_9	---	---	---	---	1.640625×10^5
V_{10}	---	---	---	---	-3.281250×10^4

	N=12	N=14	N=16
V_1	-1.666666×10^{-2}	$2.7777777777 \times 10^{-3}$	$-3.968253968253968 \times 10^{-4}$
V_2	1.601666×10^1	$-6.4027777777 \times 10^0$	$2.133730158730159 \times 10^0$
V_3	-1.247000×10^3	9.2405000000×10^2	$-5.51016666666667 \times 10^2$
V_4	2.7554333×10^4	$-3.4597927777 \times 10^4$	$3.35001611111111 \times 10^4$
V_5	-2.6328083×10^5	5.4032111111×10^5	$-8.1266511111111 \times 10^5$
V_6	1.3241387×10^6	$-4.3983463666 \times 10^6$	$1.00761837666667 \times 10^7$
V_7	-3.8917055×10^6	2.1087591777×10^7	$-7.32413829777778 \times 10^7$
V_8	7.0532863×10^6	$-6.39449130444 \times 10^7$	$3.390596320730159 \times 10^8$
V_9	-8.0053365×10^6	$1.27597579550 \times 10^8$	$-1.05253953627857 \times 10^9$
V_{10}	5.5528305×10^6	$-1.70137188083 \times 10^8$	$2.259013328583333 \times 10^9$
V_{11}	-2.1555072×10^6	$1.50327467033 \times 10^8$	$-3.39970198443333 \times 10^9$
V_{12}	3.5925120×10^5	$-8.45921615000 \times 10^7$	$3.582450461700000 \times 10^9$
V_{13}	---	$2.74788847666 \times 10^7$	$-2.59149408136667 \times 10^9$
V_{14}	---	$-3.92555496666 \times 10^6$	$1.227049828766667 \times 10^9$
V_{15}	---	---	$-3.42734555428571 \times 10^8$
V_{16}	---	---	$4.284181942857143 \times 10^7$

	N=18
V_1	$4.960317460317460 \times 10^{-5}$
V_2	$-6.095734126984128 \times 10^{-1}$
V_3	$2.745940476190476 \times 10^2$
V_4	$-2.630695674603174 \times 10^4$
V_5	$9.572572013888889 \times 10^5$
V_6	$-1.735869484583333 \times 10^7$
V_7	$1.824212226472222 \times 10^8$
V_8	$-1.218533288309127 \times 10^9$
V_9	$5.491680025283035 \times 10^9$
V_{10}	$-1.736213111520684 \times 10^{10}$
V_{11}	$3.945509690352738 \times 10^{10}$
V_{12}	$-6.526651698517500 \times 10^{10}$
V_{13}	$7.873006832822083 \times 10^{10}$
V_{14}	$-6.855644419612083 \times 10^{10}$
V_{15}	$4.198434347505357 \times 10^{10}$
V_{16}	$-1.716093471183929 \times 10^{10}$
V_{17}	$4.204550039102679 \times 10^9$
V_{18}	$-4.671722265669643 \times 10^8$