UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

K-TEORÍA ALGEBRAICA.
Elementos de torsión en K_3.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

José Antonio Arciniega Nevárez

DIRECTOR DE TESIS: Dr. José Luis Cisneros Molina

MÉXICO,D.F. Septiembre, 2009

Agradecimientos

Esta tesis la dedico a mis padres: Guillermina y Merced; a mis hermanos: María de Jesús, Daniel, Andrés y Carmen.

Agradezco a:

Guadalupe Espíritu. Tu amor y compañía hicieron más fácil todo.

José Luis Cisneros Molina. Gracias por la paciencia y la confianza depositadas en mi.

Mis amigos que no sólo fueron un apoyo moral durante mis estudios sino que, además, contribuyeron en parte con el desarrollo de esta tesis. Gracias Alma, Daniel, Gustavo, Magdalena, Ronald.

Timothy Gendron. Gracias por su disponibilidad y sugerencias.

Mis sinodales: Dr. Emilio Lluis-Puebla, Dr. Daniel Juan Pineda, Dra. Silvia Millan López, Dr. Francisco Marmolejo Rivas. Los comentarios, sugerencias y correcciones enriquecieron esta tesis haciéndola mejor.

Agradezco también el apoyo recibido por parte del CONACyT al otorgarme una beca por medio del proyecto J049048-F "Topología de Singularidades" y al PAPIIT por medio del proyecto 102208 "Métodos de Teoría K en Geometría."

Índice general

Introducción

La K-Teoría Algebraica tiene su origen en la década de los 50's del siglo XX, aunque debemos ser más precisos ya que la K-Teoría Algebraica tiene fundamentados sus conceptos y propiedades en la Topología Algebraica.

A finales del siglo XIX, estudios de Riemann (1857), Betti (1871) y Poincaré (1895), establecieron los cimientos de lo que ahora se conoce como Álgebra Homológica en el trabajo "Homology Numbers" escrito por los dos primeros cuya notación fué desarrollada con más rigor por Poincaré. En 1925, observaciones hechas por Emmy Noether permitieron aplicar técnicas algebraicas para calcular los "grupos de homología" de un espacio topológico. Aun así, la Homología se mantuvo como rama de la Topología hasta 1945.

En el periodo 1945-1955, las técnicas algebraicas, motivadas por la topología, fueron aplicadas para definir conceptos algebraicos como la "Homología de Grupos". Cartan y Eilenberg, cristalizaron estos conceptos completamente: usaron las "resoluciones proyectivas" e "inyectivas" de "módulos" para redefinir conceptos de la topología Algebraica. La búsqueda de generalizar este escenario llevó a la noción de categoría abeliana mientras que la búsqueda de ejemplos no triviales para "módulos proyectivos" llevó a la K-Teoría Algebraica clásica.

El primer artículo en el cual se habla de K-Teoría Algebraica es "Classes de faisceaux et Theorème de Riemann-Roch", completado de varias cartas de Grothendieck a Serre en 1957, en este artículo Grothendieck define por primera vez lo que en esta tesis denotaremos por $K_0(\mathbf{C})$, un grupo asociado a una categoría exacta pequeña $\mathbf{C}$, en donde también aparece la letra K. En relación a la elección de la letra K, Grothendieck en su carta del 9 de febrero de 1985 a Bruce Magurn dice:

"The way first visualized a K-group was as a group of 'classes of objects' of an abelian (or more generally, additive) category, such as coherent sheaves on an algebraic variety, or vector bundles, etc. I would presumably have called this group $C(X)$ (X being a variety or any other kind of 'space'), C the initial letter of 'class', but my past in functional analysis may have prevented this, as $C(X)$ designates also the space of continuous functions on X (when X is an topological space). Thus, I reverted to K instead of C, since my mother tongue is German, Class = Klasse (in German), and the sounds corresponding to C and K are the same."

La nota anterior fué tomada textualmente de [**1**]. Alexandre Grothendieck se hizo merecedor de la medalla Fields en 1966.

Basándose en la equivalencia estructural entre la categoría de haces vectoriales topológicos sobre un espacio compacto Hausdorff X y la categoría de módulos proyectivos sobre el anillo $C(X)$ se intentaron construir análogos a los K-grupos $K^{-n}(X)$ de la K-Teoría Topológica, para un anillo Λ. En un principio sólo se logró la construcción de dos "funtores" K_0 y K_1, los cuales se denominaron K-Teoría Algebraica. La definición de K_0 esta relacionada con el problema de Serre en el que se pregunta si todo "módulo proyectivo" sobre el anillo de polinomios (sobre un campo) es libre. Después de esto, uno de los principales problemas fue encontrar los K_n, es decir, construir $K_n(\Lambda)$ para toda $n \geq 0$.

En 1966, Milnor logró la correcta definición de K_2 y con ello llegaron más e importantes aplicaciones. Por ejemplo las hechas a las formas cuadráticas y hermitianas, que a su vez fueron el origen de la K-Teoría de formas. (Tal vez sea relevante para el lector saber que existen diferentes tipos de K-Teoría, aquí ya mencionamos dos, K-Teoría Topológica, K-Teoría Algebraica, pero existen otras como la K-Teoría Analítica, KK-Teoría, entre otras. Se tienen algunas relaciones entre los diferentes tipos, pero en general son muy distintas).

La generalización de la K-Teoría Algebraica clásica fué hecha por Daniel Gray Quillen en la década los 70's. Quillen generalizó los grupos K_0, K_1 y K_2 pero, además, en 1972, generalizó el grupo $K_0(\mathbf{C})$ dado por Grothendieck, formulando la K-Teoría Algebraica de una categoría exacta pequeña $\mathbf{C}$ denotada por $K_n(\mathbf{C})$ para $n \geq 0$. Por estos trabajos y sus muchas aportaciones a la matemática, Quillen se hizo merecedor a la medalla Fields la cual obtuvo en 1978. A partir de entonces y con relativa rapidez, la K-Teoría Algebraica ha tenido múltiples e importantes aplicaciones en la solución de problemas que hasta entonces no se habían resuelto. En [**1**] se mencionan algunos de ellos. Además, la K-Teoría Algebraica, por sí sola, es un campo de estudio actual, en el que muchos matemáticos están trabajando y en el que hay mucho por hacer.

La K-Teoría Algebraica analiza los "objetos" de estudio de algunas áreas de la matemática asociándoles a dichos "objetos" un grupo al que se analizan sus propiedades algebraicas y luego se busca su interpretación en el área de la que procede. En otras palabras la K-Teoría Algebraica consiste de establecer un "funtor" entre una "categoría abeliana" y la "categoría de grupos". Una categoría consiste de una colección de objetos y un conjunto de morfismos los cuales satisfacen una ley de composición: cada vez que se tengan morfismos $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ entre los objetos A, B y C se tiene un morfismo $h = gf\colon A \to C$; cada objeto tiene asociado al menos el morfismo identidad $1_A\colon A \to A$. Un funtor entre dos categorías es un manera de asociar a cada objeto de la primera categoría uno de la segunda y a cada morfismo entre dos objetos uno en sus respectivas "imágenes". Estas nociones permiten estudiar un objeto desde diferentes perspectivas.

La K-Teoría Algebraica empezó estudiando una de las categorías abelianas más importantes, la categoría de módulos proyectivos, como ya se mencionó. Pero, ¿Qué es un módulo proyectivo? En primer lugar, dado un anillo Λ, un Λ-módulo es una pareja (M, μ), donde M es un grupo abeliano aditivo y $\mu\colon \Lambda \times M \to M$ es una función escrita $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ tal que los siguientes axiomas se cumplen:

I. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
II. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
III. $(\alpha\beta)x = (\alpha\beta x)$
IV. $1x = x$.

De estos Λ-módulos, tenemos dos tipos particulares, los Λ-módulos libres y los Λ-módulos proyectivos, los primeros son análogos a los espacios vectoriales, es decir, los Λ-módulos libres son los Λ-módulos que tienen una base, y por lo tanto se pueden escribir como sumas directas del anillo Λ, los sumandos de estos Λ-módulos son los llamados Λ-módulos proyectivos.

Un concepto más que juega un papel importante en la K-Teoría Algebraica es el grupo general lineal estable definido como sigue: Sea A una matriz en el grupo general lineal $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$, identifiquemos a A con la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos inclusiones $\mathrm{GL}_1 \subset \mathrm{GL}_2 \subset \cdots$, denotamos como $\mathrm{GL}(\Lambda)$ a

$$\mathrm{GL} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n(\Lambda),$$

llamado grupo general estable o infinito.

De este grupo tenemos un subgrupo normal importante que es el grupo elemental lineal estable o infinito definido como

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n(\Lambda),$$

donde $\mathrm{E}_n(\Lambda)$ es el subgrupo de $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ que consta de matrices elementales e_{ij}^{λ}, $i \neq j$, es decir, matrices que difieren de la identidad por un elemento $\lambda \in \Lambda$ fuera de la diagonal y que corresponde a operaciones elementales por renglón o por columna a alguna matriz.

Los módulos y el grupo general lineal son los elementos básicos para poder asociar a cada anillo Λ los grupos $K_0(\Lambda)$, $K_1(\Lambda)$ y $K_2(\Lambda)$ a lo que se le denomina K-Teoría Algebraica clásica. El propósito de esta tesis es entender las construcciones hechas por Quillen para los grupos de K-Teoría Algebraica superior K_n para anillos y para categorías exactas y mostrar la relación que tiene esta construcción con los trabajos previos de la llamada K-Teoría Algebraica clásica. Para ello, en los dos primeros capítulos, introduciremos la herramienta elemental necesaria como: la Teoría de Categorías, Módulos, Álgebra Homológica y Homología de Grupos, esto concerniente al Álgebra; Homología Singular, Homotopía y Espacios Clasificantes concernientes a la Topología.

Los funtores de K-Teoría Algebraica clásica fueron definidos de manera netamente algebraica, por ejemplo $K_0(\Lambda)$ es el llamado grupo de Grothendieck del monoide de clases de isomorfismo de Λ-módulos proyectivos finitamente generados, K_1 se puede ver como $H_1(\mathrm{GL}(\Lambda),\mathbb{Z})$, el primer grupo de homología del grupo $\mathrm{GL}(\Lambda)$ y K_2 lo podemos ver como $H_2(\mathrm{E}(\Lambda),\mathbb{Z})$. Estos funtores y su relación con la Homología de Grupos los abordaremos con detalle en el capítulo III.

Los funtores K_0, K_1, K_2 y hasta K_3 tienen una definición netamente algebraica pero intentos por generalizar la K-Teoría de esta manera siguen hasta la actualidad sin mucho éxito. Fue Quillen quien, utilizando herramienta fuerte de la Topología Algebraica, logró la generalización. Quillen tomó el espacio clasificante $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)$ de $\mathrm{GL}(\Lambda)$ (un espacio topológico cuyo grupo fundamental es $\mathrm{GL}(\Lambda)$ y es el único grupo de homotopía no trivial). A partir de este espacio, construyó otro espacio topológico $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+$ adjuntándole celdas de dimensión 2 y 3 a $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)$. El espacio $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+$ tiene la misma homología que $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)$ y grupo fundamental $\mathrm{GL}(\Lambda)/\,\mathrm{E}(\Lambda)$. Quillen definió $K_n(\Lambda) = \pi_n(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+)$ para $n \geq 1$. A esta manera de obtener $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+$ a partir de $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)$ se le conoce como "construcción +". Quillen probó que para $n = 1, 2$ su construcción coincidía de manera natural con los funtores de la K-Teoría Algebraica clásica, además el mismo Quillen probó que $K_3(\Lambda) = H_3(\mathrm{St}(\Lambda),\mathbb{Z})$ donde $\mathrm{St}(\Lambda)$ es cierto grupo relacionado con $\mathrm{E}(\Lambda)$, una razón más por lo que muchos han intentado generalizar la K-Teoría de manera algebraica. Además, dado que $K_0(\Lambda)$ había sido definido también para categorías exactas, Quillen generalizó la K-Teoría Algebraica para categorías exactas mediante un proceso llamado "construcción Q" el cual también involucra fuertemente a la Topología Algebraica. Estos hechos están a detalle en el capítulo IV.

En el último capítulo daremos una probadita del tipo de investigación que se realiza en K-Teoría Algebraica. Siguiendo los resultados de Jones y Westbury [**11**] , daremos elementos explícitos en el subgrupo de torsión de $K_3(\mathbb{C})$. En dicho artículo Jones y Westbury observan que representaciones (homomorfismos de grupos) del grupo fundamental de n-esferas homológicas (variedades topológicas que tienen los mismos grupos de homología que $\mathbb{S}^n$) en $\mathrm{GL}(\Lambda)$, dan lugar a elementos en los grupos de K-Teoría Algebraica $K_n(\Lambda)$. Se afirma que, considerando 3-esferas homológicas de Brieskorn denotadas por $\Sigma(p,q,r)$, los elementos obtenidos mediante representaciones $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ son elementos de torsión y, cada elemento de torsión se puede ver con esta construcción.

Las esferas homológicas de Brieskorn están dadas por

$$\Sigma(p,q,r) = \{(z_1,z_2,z_3) | z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0\} \cap \mathbb{S}^5 \subset \mathbb{C}^3.$$

El grupo fundamental $\pi_1(\Sigma(p,q,r))$ tiene una presentación de la forma

$$\langle h, x_1, x_2, x_3 | [x_i, h] = 1, x_1^p = h^{-b_1}, x_2^q = h^{-b_2}, x_3^r = h^{-b_3}, x_1x_2x_3 = h^{-b_0}\rangle,$$

donde

$$-pqrb_0 + qrb_1 + prb_2 + pqb_3 = 1.$$

Jones y Westbury además, dieron un elemento explícito, un generador del subgrupo de torsión de $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d))$, donde $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ es la extensión de $\mathbb{Q}$ por ζ_d la d-ésima raíz primitiva de la unidad, utilizando una representación $\alpha\colon \Sigma(2,3,d) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, dicha representación está dada por

$$\begin{aligned} \alpha(h) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \alpha(x_1) &= (-I)^{b_0+1}(\alpha(x_2)\alpha(x_3)), \\ \alpha(x_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha(x_3) &= \begin{pmatrix} -\zeta_d & 0 \\ \zeta_d^{-1} & -\zeta_d^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otra parte Cisneros-Molina [**6**] utilizó las representaciones

$$u_n\colon \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{C}),$$
$$v_n\colon \mathrm{GL_n}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}),$$

donde u_n es la inclusión y, si $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$, entonces $A = Re(A) + iIm(A)$ y

$$v_n(A) = \begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix}$$

Se afirma que las representaciones $v_2 \circ \alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$, dan lugar a elementos de torsión en $K_3(\mathbb{R})$. Cisneros-Molina deja abierto el problema de encontrar un elemento generador del subgrupo de torsión de $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$, donde $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$ es el máximo subcampo real de $\mathbb{Q}(\zeta_d)$.

En este capítulo daremos un primer paso para encontrar la respuesta al problema planteado por Cisneros-Molina. Para ello, se observó que si F es un campo y $[F(z) : F] = 2$ entonces todo elemento en $F(z)$ se puede escribir de manera única como $a + bz$. De esta manera tenemos dos funciones $R, I\colon F(z) \to F$ dadas por $R(a + bz) = a$ e $I(a + bz) = b$. Estas funciones generalizan a las funciones $Re, Im\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, parte real y parte imaginaria. Con estas funciones damos origen a una representación $\nu_n\colon \mathrm{GL_n}(F(z)) \to \mathrm{GL}_{2n}(F)$ dada de la siguiente manera, si $A = (a_{ij})$ es una matriz en $\mathrm{GL}_n(F(z))$ entonces definimos dicha representación por

$$\nu_n^z(A) = \begin{pmatrix} R(A) & z^2 I(A) \\ I(A) & R(A) \end{pmatrix},$$

donde $R(A) = (R(a_{ij}))$ e $I(A) = (I(a_{ij}))$.

En particular, $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ es una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$ por el elemento $z_0 = \sqrt{\zeta_d^2 + \zeta_d^{-2} - 2}$. Así la representación

$$\nu_2^{z_0} \circ \alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(\zeta_d)) \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$$

da un elemento del subgrupo de torsión de $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES ALGEBRAICOS

En este capítulo estudiaremos los conceptos algebraicos necesarios en el estudio de la K-Teoría Algebraica. Introduciremos el lenguaje de la *Teoría de Categorías* y el del *Álgebra Homológica*. Este lenguaje es bastante general, tanto que se ha utilizado en el estudio del Álgebra y de otras áreas como la Topología, la Geometría y el Análisis, entre otras. Esto nos permitirá desarrollar este trabajo con la terminología introducida en este capítulo.

También introduciremos los "objetos" de estudio, los *módulos*, una categoría que ha tenido su auge con la aparición del la K-Teoría Algebraica.

1. Categorías y funtores

En esta primera sección veremos, como ya se mencionó, la terminología de la Teoría de Categorías. En cada concepto veremos algunos ejemplos, la mayoría de ellos se suponen conocidos para el lector, y será a partir de ellos que comience el desarrollo del trabajo.

Empezaremos con la definición de categoría y funtor, conceptos que estarán apareciendo continuamente, ya que el propósito de este trabajo es estudiar funtores entre categorías, por ejemplo, el funtor de homología, el funtor de homotopía y, claro está, los funtores de K-Teoría Algebraica.

Las categorías representan a los "objetos" de estudio de diferentes áreas de las matemáticas, como por ejemplo, en Topología los espacios topológicos y las funciones continuas y en Álgebra los grupos y los homomorfismos de grupos, etc. Los funtores son relaciones entre estos objetos de estudio, que permiten estudiar problemas de un área en términos de otra, por ejemplo, el funtor del grupo fundamental que nos permite decir cuando dos espacios topológicos no son homeomorfos estudiando los grupos asociados por el funtor.

También definiremos algunas propiedades importantes que, de manera particular, la categoría de módulos satisface. Terminaremos los ejemplos con categorías que serán parte de nuestro estudio, como la categoría Δ, que nos permitirá definir los objetos simpliciales (ver Subsección 1.5).

1.1. Categorías

DEFINICIÓN 1.1. Una *categoría* $\mathbf{C}$ consta de:

I. Una clase de *objetos* A, B, C, que denotaremos también como $\mathbf{C}$

II. para cada par de objetos $A, B \in \mathbf{C}$ un conjunto $\mathbf{C}(A, B)$ cuyos elementos se llaman *morfismos* de A en B, si $f \in \mathbf{C}(A, B)$ lo denotaremos como $f\colon A \to B$,
III. para cada terna de objetos $A, B, C \in \mathbf{C}$, una ley de composición de morfismos $\circ\colon \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \to \mathbf{C}(A, C)$ dada por $(f, g) \longmapsto g \circ f$, en ocasiones $g \circ f$ se denota también por gf. La ley de composición satisface los siguientes axiomas:
   a) $\mathbf{C}(A, B) = \mathbf{C}(D, E)$ si, y sólo si, $A = D$, $B = E$,
   b) si $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$, entonces $h(gf) = (hg)f$,
   c) para todo objeto $A \in \mathbf{C}$ existe un morfismo $1_A\colon A \to A$ tal que para cualesquiera $f\colon A \to B$ y $g\colon C \to A$, se tiene que $f1_A = f$ y $1_A g = g$.

Una categoría cuyos objetos forman un conjunto se dice que es una *categoría pequeña*. En ocasiones se usa el símbolo "$\in$" para indicar que algún objeto "pertenece" a una categoría aunque no necesariamente se hable de un conjunto, no se tiene ningún problema cuando la categoría es pequeña.

Ejemplo 1.2. Una categoría que consta de un sólo objeto se llama *monoide*. Por el contexto no habrá confusión con la palabra monoide como categoría y monoide como conjunto con una operación binaria asociativa.

Ejemplo 1.3. Es fácil demostrar que: si consideramos a los conjuntos como objetos y a las funciones entre conjuntos como morfismos, estos forman una categoría, denotada por **Conj**. También son categorías:

I. Los Monoides junto con los homomorfismos entre monoides denotada por **Mon**,
II. los grupos junto con los homomorfismos de grupos denotada por **Grp**,
III. los grupos abelianos junto con los homomorfismos de grupos denotada por **Ab**,
IV. los anillos con 1 junto con los homomorfismos de anillos denotada por **An**,
V. los anillos conmutativos con 1 junto con los homomorfismos de anillos denotada por **AC**,
VI. los espacios vectoriales sobre un campo F y las transformaciones lineales denotada por $\mathbf{Vec}(F)$ y
VII. los espacios topológicos y aplicaciones continuas denotada por **Top**.

Ahora, veamos ejemplos de categorías menos conocidas y que usaremos en este trabajo.

Ejemplo 1.4. Tenemos la categoía $\mathbf{Top}_R$ definida como sigue: los objetos son parejas (X, A) donde X es un espacio topológico y $A \subset X$, llamaremos a (X, A) *pareja de espacios topológicos*. Los morfismos $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ son aplicaciónes continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(A) \subset B$ a las que llamaremos *aplicaciones continuas de parejas*.

Las categorías **Top** y $\mathbf{Top}_R$ definen a su vez otras categorías, $\mathbf{Top}_*$ y $\mathbf{Top}_{R_*}$. En la primera los objetos son parejas de la forma (X, x_0) con

$x_0 \in X$ llamados *espacios punteados* y los morfismos entre espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) son funciones continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(x_0) = y_0$ llamadas *aplicacióones punteadas*, denotadas como $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Mientras que $\mathbf{Top}_{R_*}$ sus objetos son ternas (X, A, x_0) tales que $x_0 \in A \subset X$, llamadas *parejas punteadas* y los morfismos entre las ternas (X, A, x_0) y (Y, B, y_0) son aplicaciones punteadas de parejas $f\colon (X, A) \to (Y, B)$, es decir, tales que $f(A) \subset B$ y $f(x_0) = y_0$, las cuales denotaremos como $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$.

Ejemplo 1.5. También tenemos $\mathbf{Top}_H$, la categoría cuyos objetos son los espacios topólogicos y cuyos morfismos son las clases de homotopía de aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ que denotaremos por $[f]$.

Por último definiremos la siguiente categoría que será importante en el momento de realizar la construcción "Q" de Quillen (ver Teorema IV.2.2).

Ejemplo 1.6. Sea Δ la siguiente categoría: para cada entero no negativo n, sea $\underline{n} = \{0 < 1 < \cdots < n\}$ el conjunto ordenado que consiste de $0, 1, \cdots, n$; los objetos de Δ son los conjuntos ordenados $\underline{n}$, y los morfismos son aplicaciones monótonas (es decir, $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$ es tal que $f(i) \leq f(j)$ para $i < j$).

Para cada entero positivo n, tenemos $n+1$ aplicaciones en Δ, $\partial_i^n\colon \underline{n-1} \to \underline{n}$ las cuales son inyectivas, dadas por

$$\partial_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \tag{1}$$

Éstas son llamadas *caras*. Enseguida, tenemos n aplicacióones $\sigma_i^{n-1}\colon \underline{n} \to \underline{n-1}$ sobreyectivas, dadas por

$$\sigma_i^{n-1}(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

éstas son llamadas *degeneraciones*. Las caras y las degeneraciones satisfacen las siguientes relaciones:

$$\partial_j \partial_i = \partial_i \partial_{j-1}, \ i < j$$

$$\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}, \ i \leq j$$

$$\sigma_j \partial_i = \begin{cases} \partial_i \sigma_{j-1} & i < j \\ id & i = j, j+1 \\ \partial_{i-1} \sigma_j & i > j+1. \end{cases}$$

Cualquier morfismo en Δ se puede escribir como una composición de caras y degeneraciones (ver pagina 254 de [**25**]).

1.2. Funtores y transformaciones naturales

DEFINICIÓN 1.7. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ dos categorías. Un *funtor covariante* o simplemente *funtor* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ es una regla que asocia

I. a cada objeto $A \in \mathbf{C}$ un objeto $F(A) \in \mathbf{C}'$
II. a cada morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathbf{C}(A, B)$ un morfismo $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ en $\mathbf{C}'(F(A), F(B))$ que satisface las siguientes condiciones
III. $F(fg) = F(f)F(g)$, y
IV. $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

EJEMPLO 1.8. Veamos los siguientes ejemplos.

I. Tenemos un funtor gracioso, el *funtor olvidadizo* F_o, que va de cualquiera de las categorías: **Mon**, **Grp**, **Ab**, $\mathbf{Vec}(F)$, **Top** a la categoría **Conj**, el cual manda al monoide, grupo, espacio vectorial o espacio topológico en sí mismo pero visto sin su estructura, es decir, sólo como conjunto, y cada morfismo de la respectiva categoría sólo visto como función entre conjuntos.
II. Definimos el siguiente funtor $(\cdot)^*\colon \mathbf{An} \to \mathbf{Grp}$ que manda a cada anillo Λ en el grupo Λ^* de unidades del anillo y cada morfismo de anillos $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ al morfismo inducido de grupos $f^*\colon \Lambda^* \to \Lambda'^*$. Otro ejemplo de funtor olvidadizo.
III. Denotaremos con $M_n(\Lambda)$ el anillo de matrices de $n \times n$ con elementos en un anillo con 1. Sea $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ el grupo de unidades de $M_n(\Lambda)$, es decir, $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ es el grupo de matrices invertibles de $M_n(\Lambda)$. Llamaremos a $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ *grupo general lineal*. Asociemos a cada anillo Λ el grupo de matrices $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ y, a cada morfismo $f\colon \Lambda \to \Lambda'$, un morfismo $GL_n(f)\colon \mathrm{GL_n}(\Lambda) \to GL_n(\Lambda')$, el inducido por f, que manda la matriz $(\lambda_{i,j})$ en la matriz $(f(\lambda_{i,j}))$. En estos términos, $GL_n(\cdot)$ es un funtor de la categoría **An** a la categoría **Grp**.
IV. Sabemos que $\pi_1(\cdot)\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ es un funtor, llamado funtor *grupo fundamental*, que manda cada espacio punteado (X, x) al grupo $\pi_1(X, x)$ y cada aplicación punteada $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ al homomorfismo $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ dada por $\pi_1(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.
V. Dada una categoría $\mathbf{C}$ siempre podemos construir el siguiente funtor: sea $A \in \mathbf{C}$, definimos $\mathbf{C}(A, \cdot)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$ que asocia a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ el conjunto $\mathbf{C}(A, X)$ y a cada morfismo $\phi\colon X \to Y$ le asocia la función $\mathbf{C}(A, \phi)\colon \mathbf{C}(A, X) \to \mathbf{C}(A, Y)$ dada por la composición $\phi \circ f$, donde f es una morfismo de A a X. El conjunto $\mathbf{C}(A, \cdot)$ puede tener estructura de grupo, anillo, etc.; veremos ejemplos de esto más adelante.

DEFINICIÓN 1.9. Dada una categoría $\mathbf{C}$ podemos definir una nueva categoría $\mathbf{C}^{op}$, llamada *categoría opuesta*, como sigue: los objetos de $\mathbf{C}^{op}$ son los mismos que en $\mathbf{C}$ y por cada morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathbf{C}(A, B)$ diremos que tenemos un morfismo $f'\colon B \to A$ en $\mathbf{C}^{op}(B, A)$, para cualesquiera dos objetos $A, B \in \mathbf{C}$. La composición de dos morfismos en $\mathbf{C}^{op}(B, A)$ está definida por la composición en $\mathbf{C}(A, B)$.

Definición 1.10. Un *funtor contravariante* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ entre dos categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ es un funtor covariante entre la categoría $\mathbf{C}^{op}$ y $\mathbf{C}'$, es decir:

i. a cada objeto $A \in \mathbf{C}$ le asocia un objeto $F(A) \in \mathbf{C}'$ y
ii. a cada morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathbf{C}(A,B)$ un morfismo $F(f)\colon F(B) \to F(A)$ en $\mathbf{C}'(F(B),F(A))$ que satisface las siguientes condiciones:
iii. $F(fg) = F(g)F(f)$, y
iv. $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Observemos que ii nos dice que un funtor contravariante cambia el sentido de las flechas.

Ejemplo 1.11. Análogo a el Ejemplo 1.8.v tenemos que, para una categoría $\mathbf{C}$, siempre podemos construir el siguiente funtor contravariante: sea $X \in \mathbf{C}$, definimos $\mathbf{C}(\cdot,X)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$ que asocia a cada objeto $A \in \mathbf{C}$ el conjunto $\mathbf{C}(A,X)$ y a cada morfismo $\varphi\colon A \to B$ le asocia la función $\mathbf{C}(\varphi,X)\colon \mathbf{C}(B,X) \to \mathbf{C}(A,X)$ dada por la composición $g \circ \varphi$, donde g es un morfismo de A a X. Nuevamente, el conjunto $\mathbf{C}(A,X)$ puede tener otra estructura como veremos en el siguiente ejemplo.

En ocasiones denotaremos a los funtores $\mathbf{C}(A,\cdot)$ y $\mathbf{C}(\cdot,X)$ como $\mathrm{Hom}(A,\cdot)$ y $\mathrm{Hom}(\cdot,X)$ respectivamente.

Ejemplo 1.12. Consideremos el grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, es decir los números reales módulo 1. Siguiendo el Ejemplo 1.11 construyamos un funtor entre las categorías $\mathbf{Ab}$ y $\mathbf{Conj}$ como sigue: a cada objeto $G \in \mathbf{Ab}$ le asociamos el conjunto $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ y a cada morfismo $f \in \mathbf{Ab}(G,G')$ podemos asociar una función $\mathrm{Hom}(f,\mathbb{R}/\mathbb{Z})\colon \mathrm{Hom}(G',\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to (G,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dada por $\mathrm{Hom}(f,\mathbb{R}/\mathbb{Z})(g) = g \circ f$ en dirección opuesta a la que se tenía. Es decir, $\mathrm{Hom}(\cdot,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ es un funtor contravariante.

Esto lo podemos ver en un diagrama como sigue:

$$\mathrm{Hom}(\cdot,\mathbb{R}/\mathbb{Z})\colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Conj}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\
G' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}(G',\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(f,\mathbb{R}/\mathbb{Z})"']
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.13. *La composición de dos funtores covariantes es de nuevo un funtor covariante y la composición es asociativa.*

Demostración. Sean $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ categorías y sean $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ funtores. Consideremos $A,B,C \in \mathbf{C}$ con morfismos $f \in \mathbf{C}(A,B)$ y $g \in \mathbf{C}(B,C)$ entonces

i. $H(\cdot) = (G \circ F)(\cdot)$ asocia al objeto $A \in \mathbf{C}$ el objeto $G(F(A)) \in \mathbf{E}$.
ii. $H(\cdot) = (G \circ F)(\cdot)$ asocia a cada morfismo $f \in \mathbf{C}(A,B)$ el morfismo $G(F(f))\colon G(F(A)) \to G(F(B))$ en $\mathbf{E}(G(F(A)),G(F(B)))$.

III.

$$
\begin{aligned}
H(gf) &= (G \circ F)(gf) \\
&= G(F(gf)) \\
&= G(F(g)F(f)) \\
&= G(F(g))G(F(f)) \\
&= (G \circ F)(g)(G \circ F)(f) \\
&= H(f)H(g).
\end{aligned}
$$

IV. Si 1_A es la identidad en **C** entonces

$$
\begin{aligned}
H(1_A) &= (G \circ F)(1_A) \\
&= G(F(1_A)) \\
&= G(1_{F(A)}) \\
&= 1_{(G \circ F)} \\
&= 1_{H(A)}
\end{aligned}
$$

□

Nota 1.14. Análogamente podemos verificar las composiciónes del siguiente cuadro.

Cuadro 1. Composición de funtores

F	G	$F \circ G$
covariante	covariante	covariante
covariante	contravariante	contravariante
contravariante	covariante	contravariante
contravariante	contravariante	covariante

Se puede ver fácilmente que podemos definir una nueva categoría si consideramos a las categorías pequeñas como objetos y a los funtores entre ellos como morfismos, la cual llamaremos *"la categoría de categorías pequeñas"*.

Definición 1.15. Sean **C** y **D** dos categorías. Un funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es *pleno* si para todo par de objetos A y B de **C** y todo morfismo $g\colon F(A) \to F(B)$ de **D** hay un morfismo $f\colon A \to B$ de **C** con $g = F(f)$.

Ejemplo 1.16. Consideremos el funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$ que manda cualquier objeto C en el conjunto vacío $\emptyset$ y, cualquier morfismo en la *función vacía*, es decir, la función $f\colon \emptyset \to \emptyset$. Este funtor es pleno.

Definición 1.17. Sean **C** y **D** dos categorías y $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ dos funtores, una *transformación natural* t de F a G, $t\colon F \to G$, es una colección de morfismos $t_A\colon F(A) \to G(A)$ en **D**, uno para cada objeto $A \in \mathbf{C}$, tal que, para cualquier morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathbf{C}(A,B)$, $G(f)t_A = t_B F(f)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & F(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "t_B"] & G(B). \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.18. Consideremos los funtores $\mathrm{GL}_n(\cdot), (\cdot)^*\colon \mathbf{An} \to \mathbf{Grp}$ que vimos en el Ejemplo 1.8. El determinante de una matriz cuadrada $\mathrm{Det}_{(\cdot)}\colon GL_n(\cdot) \to (\cdot)^*$ es una transformación natural entre estos funtores, puesto que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[d, "f"] & \mathrm{GL_n}(\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{Det}_\Lambda"] \arrow[d, "GL_n(f)"'] & \Lambda^* \arrow[d, "f^*"] \\ \Lambda' & GL_n(\Lambda') \arrow[r, "\mathrm{Det}_{\Lambda'}"] & \Lambda'^*. \end{tikzcd}$$

1.3. Tipos de objetos y morfismos

Definición 1.19. Un morfismo $f\colon A \to B$ es *invertible o isomorfismo* si existe un morfismo $g\colon B \to A$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. Dos objetos A y B son *isomorfos* en una categoría $\mathbf{C}$ si existe un morfismo de A en B invertible.

Proposición 1.20. *El morfismo g de la definición anterior, si existe, es único.*

Demostración. Supongamos que existen dos morfismos $g, g'\colon B \to A$ tales que $gf = 1_A$, $fg = 1_B$; y $g'f = 1_A$, $fg' = 1_B$. Entonces tenemos $gf = g'f$ y $fg = fg'$. Así tenemos

$$g = (g(fg)) = ((g'f)g) = (g'(fg')) = g'.$$

□

Ejemplo 1.21. En las categorías del Ejemplo 1.3; las funciones biyectivas; los isomorfismos de monoides, grupos y anillos; las transformaciones lineales biyectivas y los homeomorfismos, son todos isomorfismos cada uno en su respectiva categoría.

Definición 1.22. Un morfismo $f\colon B \to C$ en una categoría $\mathbf{C}$ es un *monomorfismo* (o simplemente *mono*) si para cualesquiera dos morfismos $g_1, g_2\colon A \to B$ tales que $fg_1 = fg_2$ entonces $g_1 = g_2$; un morfismo $h\colon A \to B$ en $\mathbf{C}$ es un *epimorfismo* (o simplemente *epi*) si para cualesquiera dos morfismos $g_1, g_2\colon B \to C$ tales que $g_1 h = g_2 h$ entonces $g_1 = g_2$.

En ocasiones utilizaremos la flecha ($\rightarrowtail$) para denotar a los monomorfismos y la flecha ($\twoheadrightarrow$) para denotar a los epimorfismos.

Ejemplo 1.23. En las categorías **Conj**, **Grp**, y **Vec**(F), los morfismos que son inyectivos son los monomorfismos y los morfismos que son sobreyectivos son los epimorfismos. Dado que en estas categorías, los morfismos que son inyectivos y sobreyectivos son biyectivos y por lo tanto invertibles, entonces los monomorfismos que son epimorfismos son isomorfismos. Esta última afirmación, en general no es cierta, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.24. Sea **C** la categoría con sólo dos objetos A y B y sólo un morfismo $f\colon A \to B$. En esta categoría, f es monomorfismo y epimorfismo a la vez pero no es isomorfismo, ya que no hay un morfismo de B a A.

Definición 1.25. Un objeto B se llama *inicial* en **C** si, para cada objeto A, existe únicamente un morfismo de B en A; y un objeto C se llama *terminal* si, para cada objeto A en **C**, existe un único morfismo de A en C. Un objeto que es terminal e inicial a la vez se llama *objeto cero* denotado con 0 (único salvo isomorfismo). El morfismo $A \to 0 \to B$ es llamado *morfismo cero* de A a B denotado también como 0.

Ejemplo 1.26. En la categoría **Conj** el conjunto vacío es un objeto inicial y un conjunto con un solo elemento es un objeto terminal. En la categoría **Grp** el grupo trivial $\{0\}$ es un objeto terminal e inicial, es decir, un objeto cero.

Ejemplo 1.27. En **Grp** el morfismo $G \to H$ que manda todo G en el elemento identidad de H es el morfismo cero.

Definición 1.28. Sea **C** una categoría con objeto cero. El *núcleo* de un morfismo $f\colon A \to B$ es un morfismo $\kappa\colon U \to A$ tal que

i. $f\kappa = 0$
ii. Si $fq = 0$ para $q\colon U' \to A$, entonces existe $h\colon U' \to U$ tal que $q = \kappa h$ con h único.

Ejemplo 1.29. En **Grp**, el núcleo de cualquier morfismo $f\colon G \to H$ es la inclusión del núcleo (visto como los elementos de G que van al elemento identidad de H bajo f) del homomorfismo f.

Definición 1.30. Sea **C** una categoría con objeto cero. El *conúcleo* de un morfismo $f\colon A \to B$ es un morfismo $\kappa'\colon B \to C$ tal que

i. $\kappa' f = 0$
ii. Si $qf = 0$ para $q\colon B \to C'$, entonces existe $h\colon C \to C'$ tal que $q = h\kappa'$ con h único.

Ejemplo 1.31. En la categoría **Ab** el conúcleo de un morfismo $f\colon G \to H$ es la proyección $H \to H/\operatorname{Im} f$.

Definición 1.32. Sea **C** una categoría. *El producto* de dos objetos A y B es un objeto $A \times B$ del que se tienen los morfismos $\pi_A\colon A \times B \to A$ y $\pi_B\colon A \times B \to B$, con la propiedad de que si hay otro objeto C con morfismos

$C \to A$ y $C \to B$ entonces existe un único morfismo $C \to A \times B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\ & C \arrow[ul] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Esta propiedad es llamada *propiedad universal del producto* y es la que define el producto de dos objetos.

Ejemplo 1.33. En la categoría **Grp** tenemos definido el producto entre grupos como sigue: Sean $(G, *)$ y $(H, \cdot)$ grupos, consideremos el producto cartesiano $G \times H$ de los conjuntos subyacentes de G y H, definimos una operación en $G \times H$ como sigue: Dados $x_1, x_2 \in G$ y $y_1, y_2 \in H$ entonces $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 * x_2, y_1 \cdot y_2)$, la cual le da estructura de grupo a $G \times H$ llamado *producto directo* y que se denota como $G \oplus H$. Este producto cumple la propiedad universal, es decir, dados dos homomorfismos de grupos $f : C \to G$ y $g : C \to H$ entonces existe un único homomorfismo $\varphi : C \to G \oplus H$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} G & G \oplus H \arrow[l, "\pi_G"'] \arrow[r, "\pi_H"] & H \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd},$$

donde π_G y π_H son las proyecciones naturales. Dicho homomorfismo φ está dado por $\varphi(c) = (f(c), g(c))$.

Definición 1.34. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y A, B, C objetos de $\mathbf{C}$, si tenemos morfismos $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ definimos *el producto fibrado* de A y C como el objeto $A \times_B C$ de $\mathbf{C}$ y los morfismos $p : A \times_B C \to B$ y $q : A \times_B C \to C$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \times_B C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{2}$$

conmuta y tiene la siguiente propiedad universal: Si se tiene D objeto de $\mathbf{C}$ y morfismos $k : D \to C$ y $h : D \to A$ que también hagan conmutar el diagrama entonces existe un único morfismo $u : D \to A \times_B C$ tal que

(3)
$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& A \times_B C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & C \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 1.35. En la categoría **Conj** consideremos X, Y, y Z conjuntos y $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ funciones entre conjuntos, el conjunto $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ junto con las restricciones de las respectivas proyecciones de $X \times Y$ en sus factores, es el producto fibrado. En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

el conjunto $X \times_Z Y$ cumple con la propiedad universal, ya que si existe otro conjunto W y funciones $h\colon W \to X$ y $k\colon W \to Y$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

entonces existe $u\colon W \to X \times_Z Y$ la cual está dada por $u(w) = (h(w), k(w))$.

Teorema 1.36. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría y* $A, B, C \in \mathbf{C}$ *y* $f\colon A \to B$, $g\colon C \to B$ *consideremos el producto fibrado* $A \times_B C$ *dado por el diagrama (2). Entonces, si* f *es monomorfismo implica que* q *es monomorfismo, si además* $\mathbf{C}$ *es abeliana y* g *es epimorfismo implica que* p *es epimorfismo.*

Demostración. Observemos el diagrama (3). Supongamos que se tienen morfismos $u_1, u_2\colon D \to A \times_B C$ tales que $qu_1 = qu_2$, esto implica que $gqu_1 = gqu_2$ y como el cuadrado conmuta, $fpu_1 = fpu_2$ pero por hipótesis f es mono por lo que $pu_1 = pu_2$, así tenemos una flecha de D a A y otra de D a C que hacen conmutar al diagrama y por la propiedad universal del producto fibrado $u_1 = u_2$.

Para la demostración del epimorfismo ver [**16**, Prop. VIII.4.2]. $\square$

1.4. Categorías aditivas, abelianas y exactas

Definición 1.37. Sea $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ dos categorías. El *producto cartesiano* $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ consiste en las parejas (A, A'), $A \in \mathbf{C}$, $A' \in \mathbf{C}'$ y los morfismos

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C}'((A, A'), (B, B')) = \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}'(A', B').$$

La composición esta dada coordenada por coordenada

Definición 1.38. $\mathbf{C}$ se llamará *subcategoría* de $\mathbf{D}$ si

i. $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}$.
ii. $\mathbf{C}(A, B) \subset \mathbf{D}(A, B)$ para toda pareja $(A, B) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.
iii. La composición de cualesquiera dos morfismos en $\mathbf{C}$ es la misma que su composición en $\mathbf{D}$, y
iv. 1_A es la misma en $\mathbf{C}$ que en $\mathbf{D}$.

Definición 1.39. La inclusión de una subcategoría en su respectiva categoría es un funtor, llamado *funtor inclusión*. Una subcategoría se llama plena si el funtor inclusión es pleno.

Ejemplo 1.40. En la categoría **Conj** los conjuntos finitos forman una subcategoría plena.

Definición 1.41. Una *categoría aditiva* $\mathbf{A}$ es una categoría con objeto cero en la cual, cualesquiera dos objetos poseen un producto y el conjunto de morfismos $\mathbf{A}(X, Y)$ es un grupo abeliano tal que la composición es bilineal.

Definición 1.42. Una *categoría abeliana* es una categoría aditiva que además satisface las siguientes propiedades:

i. Todo morfismo posee un núcleo y un conúcleo.
ii. Todo monomorfismo es un núcleo y todo epimorfismo es un conúcleo.

Ejemplo 1.43. Por los ejemplos que hemos visto, es evidente que la categoría **Ab** es una categoría abeliana y por lo tanto aditiva.

Proposición 1.44. *En una categoría abeliana $\mathbf{A}$ todo morfismo f tiene una factorización $f = me$, con m monomorfismo y e epimorfismo, más aún m es el núcleo del conúcleo de f y e es el conúcleo del núcleo de f.*

Para su demostración ver [**16**, Prop. VIII.2.1].

Definición 1.45. Definimos la *imagen* de un morfismo f como el morfismo m de la proposición anterior y, análogamente, la *coimagen* de f como el morfismo e.

Ejemplo 1.46. Observemos que en la categoría **Ab** los conceptos imagen y coimagen de un homomorfismo, coinciden con los conceptos de imagen y coimagen vistos como morfismos de la categoría, es decir, dado el morfismo $f : G \to H$ la imagen es el morfismo inclusión de la imagen (en el sentido usual) de f en H; y el morfismo coimagen es el morfismo proyección de G en el cociente G/N donde N es el núcleo (en el sentido usual) de f.

Definición 1.47. Una composición de morfismos

$$\cdot \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \cdot$$

es *exacta en* B cuando el morfismo imagen de f es igual al morfismo núcleo de g.

Definición 1.48. El diagrama (con 0 como objeto cero)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una *sucesión exacta corta* si es exacta en A, B y C.

Ejemplo 1.49. Sea $f\colon G \to H$ homomorfismo de grupos, i y j son la inclusión y la proyección respectivamente, donde $\ker(f)$ es el núcleo usual del homomorfismo. Es claro que si consideramos la sucesión

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G/\ker(f) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en la categoría $\mathbf{Ab}$.

Del ejemplo anterior podemos ver que las sucesiones exactas en categorías se trabajan en la forma usual (se da por hecho que el lector conoce a las sucesiones exactas).

Veamos ahora el concepto de categoría exacta que introdujo Quillen. En una categoría exacta se extraen las propiedades de una sucesión exacta en una categoría abeliana. De esta manera, se puede definir sucesión exacta sin pedir que los morfismos tengan núcleo y conúcleo, los cuales son necesarios para la definición usual de sucesión exacta. Para nuestros propósitos tenemos la siguiente definición.

Definición 1.50. Una *categoría exacta* es una categoría aditiva $\mathbf{C}$ encajada como tal (aditiva) en una subcategoría plena de una categoría abeliana $\mathbf{A}$, tal que si

$$M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$$

es una sucesión exacta en $\mathbf{A}$ con $M', M'' \in \mathbf{C}$, entonces M es isomorfo a un objeto en $\mathbf{C}$.

De esta manera una sucesión

$$M \longrightarrow M \longrightarrow M''$$

en una categoría exacta $\mathbf{C}$ es una *sucesión exacta* si

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es exacta en su respectiva categoría abeliana $\mathbf{A}$.

Definición 1.51. En una categoría pequeña exacta $\mathbf{C}$, un *monomorfismo admisible* es un morfismo $X \rightarrowtail Y$ en $\mathbf{C}$ que pueda completar una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \rightarrowtail Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

y un *epimorfismo admisible* es un morfismo $Y \twoheadrightarrow Z$ en $\mathbf{C}$ que puede completar la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \twoheadrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

DEFINICIÓN 1.52. Un funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ entre categorías exactas se dice que es *exacto* si para cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

de objetos en $\mathbf{C}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow F(A') \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(A'') \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathbf{C}'$.

1.5. Objetos (co)simpliciales Terminaremos la sección reforzando la importancia de la categoría Δ (ver Ejemplo 1.6), definiendo los objetos simpliciales y los objetos cosimpliciales, veremos ejemplos de estos objetos en las categorías **Conj** y **Top**. Las aplicaciones de estos ejemplos los veremos cuando definamos el espacio clasificante de un grupo y el espacio clasificante de una categoría en la construcción "Q" de Quillen (ver Sección 1.12.2).

DEFINICIÓN 1.53. Un *objeto simplicial* en una categoría $\mathbf{C}$ es un funtor contravariante $\Delta \to \mathbf{C}$, donde Δ es la categoría definida en el Ejemplo 1.6, es decir, un funtor $\Delta^{op} \to \mathbf{C}$. Los objetos simpliciales forman una categoría donde los objetos son los objetos simpliciales y un morfismo entre dos objetos simpliciales en $\mathbf{C}$ es una transformación natural entre ellos. La categoría de objetos simpliciales en la categoría $\mathbf{C}$ la denotaremos por $\mathbf{S}\,\mathbf{C}$.

NOTA 1.54. Supóngase que $F\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ es un conjunto simplicial. Entonces para cada entero n, $F(\underline{n})$ es un conjunto, llamado el conjunto de *n-simplejos* de F. Las aplicaciones ∂_i^n dan lugar a $n+1$ aplicaciones de conjuntos $F(\underline{n}) \to F(\underline{n-1})$, las cuales asocian a cada n-simplejo en $F(\underline{n})$ una colección de $(n-1)$-simplejos en $F(\underline{n-1})$ llamadas *caras.* De igual manera las n aplicaciones σ_i^{n-1} dan lugar a aplicaciones $F(\underline{n-1}) \to F(\underline{n})$, asociados a cada $(n-1)$-simplejo llamadas *degeneraciones.* De esta manera, para cada $\delta \in F(\underline{n})$, llamaremos a $F(\partial_i^n)(\delta)$ la i-ésima cara de δ y $F(\sigma_i^{n-1})(\delta)$ la i-ésima degeneración de δ.

Dual a la Definición 1.53 tenemos la definición de objeto cosimplicial

DEFINICIÓN 1.55. Un *objeto cosimplicial* en una categoría $\mathbf{C}$ es un funtor covariante $\Delta \to \mathbf{C}$, donde Δ es la categoría definida en el Ejemplo 1.6. Los objetos cosimpliciales forman una categoría donde los objetos son los objetos simpliciales y un morfismo entre objetos simpliciales en $\mathbf{C}$ es una transformación natural entre ellos.

Definición 1.56. Definimos un "triángulo" en cualquier dimensión, el llamado *n-simplejo estándar* que corresponde al siguiente conjunto

$$\Delta^n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}.$$

el cual tiene la topología inducida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo 1.57. Para cada n natural definimos $S_n(\cdot)\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Conj}$ como el funtor $\mathbf{Top}(\Delta^n, \cdot)$ (ver Ejemplo 1.8.v). Al conjunto $S_n(X)$ lo llamaremos el *conjunto de n-simplejos singulares* de X.

Ejemplo 1.58. A continuación definiremos una serie de funtores, que nos permitirán definir conceptos y hacer cálculos más simples más adelante. En este ejemplo nuestro objetivo sera definir un funtor $\mathbf{S}_*\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{S\,Conj}$. Procedamos como sigue:

i. Un *espacio cosimplicial* es un funtor de la categoría Δ a la categoría $\mathbf{Top}$. Por ejemplo, un espacio cosimplicial $F\colon \Delta \to \mathbf{Top}$ es dado como sigue: Denotemos por $v_0 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, v_n = (0, \cdots, 1)$ a los vértices de un n-simplejo estándar. Si identificamos los elementos de $\underline{n}$ con los vértices $v_0, \cdots, v_n$, entonces $F(\cdot)$ asocia al objeto $\underline{n} \in \Delta$ el objeto $F(\underline{n}) = \Delta^n \in \mathbf{Top}$ y, a cada morfismo $f \in \Delta(\underline{m}, \underline{n})$ le asocia la función continua $F(f) = \tilde{f}\colon \Delta^m \to \Delta^n$ que manda los vértices de Δ^m en los vértices de Δ^n mediante $\tilde{f}(v_i) = v_{f(i)}$ y que se extiende de manera lineal.

   Es claro que la identidad en Δ induce la identidad en $\mathbf{Top}$ y que dados $f\colon \underline{l} \to \underline{m}$ y $g\colon \underline{m} \to \underline{n}$ tenemos que $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$.

ii. Sea X un espacio topológico fijo. Definimos el funtor $S_{(\cdot)}(X)\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ como la composición del funtor F de arriba y el funtor $\mathbf{Top}(\cdot, X)$, es decir, $S_{(\underline{n})}(X) = \mathbf{Top}(F(\underline{n}), X)$ (ver Ejemplo 1.11), el funtor $S_{(\cdot)}(X)$ es un *conjunto simplicial*, ya que es contravariante. Observemos que $S_{(\underline{n})}(X) = S_n(X)$, donde $S_n(X)$ es el funtor del Ejemplo 1.57 y por lo tanto lo denotaremos de esta manera.

iii. Construyamos ahora nuestro funtor $S_*\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{S\,Conj}$. El funtor $S_*(\cdot)$ asocia a cada espacio topológico X el funtor $S_{(\cdot)}(X)$ y a cada aplicación continua $\phi\colon X \to Y$ una transformación natural de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
\underline{n} \arrow[d, "f"] & S_n(X) \arrow[r, "t_{\underline{n}}"] & S_n(Y) \\
\underline{m} & S_m(X) \arrow[u, "S_{(f)}(X)"] \arrow[r, "t_{\underline{m}}"] & S_m(Y) \arrow[u, "S_{(f)}(Y)"']
\end{tikzcd}$$

   Donde $t_{\underline{n}} = S_n(\phi)$ y lo denotaremos simplemente por ϕ_n.

   Así pues, definimos nuestro funtor $S_*\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{S\,Conj}$ como $S_*(X) = S_{(\cdot)}(X)$ y $S_*(\phi) = \{\phi_n\}$.

   Es fácil, probar que en efecto $S_*(\cdot)$ satisface las propiedades de un funtor.

Definición 1.59. La *realización geométrica* $|F|$ de un conjunto simplicial $F\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ (ver Ejemplo 1.57), es el espacio topológico definido como el cociente
$$\left(\coprod_{n\geq 0} F(\underline{n}) \times \Delta_n\right) / \sim .$$
donde para cada $n \geq 0$, $F(\underline{n})$ es considerado como un espacio discreto. La relación de equivalencia $\sim$ es definida como sigue: dado $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$ en Δ, sea $\tilde{f}\colon \Delta^m \to \Delta^n$ como en el Ejemplo 1.58.i. Entonces para algún $\delta \in F(\underline{n})$ se tiene que
$$(\delta, \tilde{f}(y)) \sim (F(f)(\delta), y)$$
para toda $y \in \Delta^m$ donde $(\delta, \tilde{f}(y)) \in F(\underline{n}) \times \Delta^n$, y $(F(f)(\delta), y) \in F(\underline{m}) \times \Delta^m$. Así $|F|$ es el espacio cociente, con la topología cociente.

Nota 1.60. La realización geométrica, asocia a un conjunto simplicial $F\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ el espacio topológico $|F|$ y, a una transformación natural $t\colon F \to G$ entre los conjuntos simpliciales, F y G, la aplicación continua entre los espacios topológicos $|t|\colon |F| \to |G|$ dada de la siguiente manera:

Sea t una trasformación natural, es decir, una colección de morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta:

(4)
$$\begin{tikzcd} \underline{n} \arrow[d, "f"] & F(\underline{n}) \arrow[r, "t_{\underline{n}}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(\underline{n}) \arrow[d, "G(f)"] \\ \underline{m} & F(\underline{m}) \arrow[r, "t_{\underline{m}}"] & G(\underline{m}), \end{tikzcd}$$

consideremos $|t_n|\colon F(\underline{n}) \times \Delta^n \to G(\underline{n}) \times \Delta^n$ dada por $|t_n|(\delta, y) = (t_{\underline{n}}(\delta), y)$ la cual podemos extender a la unión disjunta
$$\left(\coprod_{n\geq 0} F(\underline{n}) \times \Delta^n\right) \to \left(\coprod_{n\geq 0} G(\underline{n}) \times \Delta^n\right)$$
Además desciende al cociente puesto que, por la conmutatividad del diagrama (4), si $(\delta, \tilde{f}(y)) \sim (F(f)(\delta), y)$ entonces $(t_{\underline{n}}(\delta), \tilde{f}(y)) \sim (t_{\underline{m}}(F(f)(\delta)), y)$ y por lo tanto tenemos una aplicación: $|t|\colon |F| \to |G|$ bien definida, claramente continua (recordemos que $F(\underline{n})$ tiene la topología discreta).

De esta manera se puede ver que la realización geométrica $|\cdot|$ satisface las propiedades de un funtor de la categoría de conjuntos simpliciales a la categoría de espacios topológicos. Por su definición, la realización geométrica es de hecho un funtor de la categoría de conjuntos simpliciales a la categoría de complejos CW (ver Capítulo II.1.1)

Ejemplo 1.61. Sea G un grupo. Consideremos ahora el siguiente conjunto simplicial $\mathbf{N}G\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ dado por $\mathbf{N}G(\underline{0}) = \{e\}$ donde e es el elemento identidad de G y

$$\mathbf{N}\, G(\underline{n}) = G^n = \prod_{i=1}^{n} G_i$$

donde $G_i = G$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Denotaremos a los elementos de G^n como $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$.

Las caras y degeneraciones están dadas por

$$\mathbf{N}\, G(\sigma_i^n)[g_1|\cdots|g_n] = [g_1|\cdots, g_i|e|g_{i+1}|\cdots|g_n]$$

$$\mathbf{N}\, G(\partial_i^n)[g_1|\cdots|g_n] = \begin{cases} [g_2|\cdots|g_n] & \text{si } i = 0 \\ [g_1|\cdots|g_i g_{i+1}|\cdots|g_n] & \text{si } 0 < i < n \\ [g_1|\cdots|g_{n-1}] & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Observemos que esto nos da un funtor $\mathbf{N}\colon\ \mathbf{Grp} \to \mathbf{S\,Conj}$ al cual llamaremos el *nervio de G*.

Definición 1.62. La realización geométrica del conjunto simplicial $\mathbf{N}\, G$ lo llamaremos el *espacio clasificante* del grupo G y lo denotaremos por $\mathbf{B}(\mathrm{G})$.

2. Módulos

Ahora veamos un ejemplo de una categoría muy importante en el desarrollo de esta tesis, la categoría de módulos.

Esta categoría y sus propiedades bien pudieron ser incluidos como parte de los ejemplos de cada uno de los conceptos definidos en la sección anterior pero, es tal su importancia en el estudio del Álgebra Homológica y de la K-Teoría Algebraica que merece un estudio aparte.

Empezaremos definiendo los objetos de estudio, los módulos y probaremos que en efecto forman una categoría, luego definiremos los funtores $\mathrm{Hom}(\cdot, N)$ y $\mathrm{Hom}(M, \cdot)$ y, paso a paso, refinaremos esta categoría hasta llegar a la subcategoría de módulos libres (módulos con base, similar a espacios vectoriales) y la subcategoría de módulos proyectivos (módulos que son sumandos directos de libres), probaremos que satisface las condiciones que exigen las definiciones de los conceptos de la sección anterior.

Como lo menciona Emilio Lluis-Puebla en la introducción de su libro [**15**]: "Así como el Álgebra Homológica comienza con el hecho "lamentable" de que no todos los módulos son proyectivos la K-Teoría Algebraica empieza con el hecho "lamentable" de que no todos los módulos proyectivos son libres". En esta sección veremos que los módulos libres son proyectivos pero no todos los módulos proyectivos son libres.

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Definición 2.1. Un Λ-*módulo izquierdo* o *módulo izquierdo sobre* Λ es una pareja (M, μ), donde M es un grupo abeliano aditivo y $\mu\colon \Lambda \times M \to M$ es una función escrita $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ tal que los siguientes axiomas se cumplen:

i. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

II. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
III. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
IV. $1x = x$.

Un Λ-módulo derecho se define análogamente multiplicando los elementos del anillo por la derecha. En adelante nos referiremos a los Λ-módulos izquierdos como Λ-módulos.

EJEMPLO 2.2. Tomemos $\Lambda = \mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros. Para cualquier grupo abeliano G, la función $\mu\colon \mathbb{Z}\times G \to G$ dada por $\mu(n,x) = nx$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y para toda $x \in G$, satisface los axiomas de la Definición 2.1. De esta manera todo grupo abeliano puede considerarse como un $\mathbb{Z}$-módulo.

EJEMPLO 2.3. Si Λ es un campo F, entonces un F-módulo es un espacio vectorial sobre F.

NOTA 2.4. De manera alterna podemos definir los Λ-módulos como sigue: sea M un grupo abeliano. Los homomorfismos $f\colon M \to M$ llamados *endomorfismos* forman un anillo no necesariamente conmutativo, denotado como $\mathrm{End}(M)$, con la suma y la composición de homomorfismos. Sea Λ un anillo no necesariamente conmutativo con $1 \neq 0$. Un Λ-módulo izquierdo es un grupo abeliano M junto con un homomorfismo de anillos $\eta\colon \Lambda \to \mathrm{End}(M)$ que manda el $1 \in \Lambda$ en el $1 \in \mathrm{End}(M)$. Si escribimos αx en lugar de $(\eta(\alpha))(x)$, $x \in M$, $\alpha \in \Lambda$, entonces esta operación cumple los axiomas de la Definición 2.1. Recíprocamente si tenemos una operación que satisfaga los axiomas de la Definición 2.1, entonces se tiene un endomorfismo $\eta\colon \Lambda \to \mathrm{End}(M)$ definido como $\eta(\alpha) = \eta_\alpha(x) = \alpha x$ que manda el $1 \in \Lambda$ en el $1 \in \mathrm{End}(M)$. Por lo tanto las definiciones son equivalentes.

DEFINICIÓN 2.5. Sea M y N dos Λ-módulos. Una función $f\colon M \to N$ se llama *homomorfismo de Λ-módulos* si f es un homomorfismo de grupos abelianos tal que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para toda $\alpha \in \Lambda$ y para toda $x \in M$.

Tenemos la categoría más importante en el desarrollo de la K-Teoría Algebraica.

PROPOSICIÓN 2.6. *Consideremos a los módulos como objetos y a los homomorfismos de Λ-módulos como morfismos. Entonces estos forman una categoría que denotaremos como* $\mathbf{Mod}(\Lambda)$.

DEMOSTRACIÓN. La composición de dos homorfismos es de nuevo un homomorfismos ya que dados $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to K$ homomorfismos de Λ-módulos, $\alpha \in \Lambda$ y $x \in M$, entonces $g \circ f\colon M \to K$ es un homomorfismos de grupos y ahora, $(g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha(g(f(x))) = \alpha(g \circ f)(x)$. Además la composición de homomorfismos es asociativa pues,

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f((g \circ h)(x)) \\ &= (f \circ (g \circ h))(x). \end{aligned}$$

Observemos que la identidad $1_M\colon M \to M$ es la identidad en esta categoría, ya que dados cualesquiera otros homomorfismos $f\colon M \to N$ y $g\colon N' \to M$ se tiene que $(f \circ 1_M)(x) = f(x)$ y $(1_M \circ g)(x) = g(x)$ para toda $x \in M$. $\square$

DEFINICIÓN 2.7. Un subconjunto N de un Λ-módulo M se llama *submódulo* del Λ-módulo M si N es un subgrupo de M y para toda $\alpha \in \Lambda$, $\alpha N = \{\alpha x : x \in N\} \subset N$.

NOTA 2.8. El Λ-*módulo trivial* $\{0\}$ siempre es un submódulo de cualquier Λ-módulo, por lo que siempre podemos incluir este submódulo en cualquier otro Λ-módulo. Además, dado cualquier Λ-módulo M, podemos definir el *homomorfimo trivial* $h\colon M \to \{0\}$ que manda cualquier elemento $x \in M$ al elemento identidad del Λ-módulo trivial. En términos de categorías $\{0\}$ es objeto cero y h es morfismo cero.

DEFINICIÓN 2.9. Sea N un submódulo de un Λ-módulo M, entonces el *módulo cociente* M/N es el grupo abeliano cociente M/N provisto de una multiplicación escalar $\mu\colon \Lambda \times M/N \to M/N$ dada por $\mu(\alpha, x+N) = \alpha x + N$, $\alpha \in \Lambda$ y $x + N \in M/N$.

DEFINICIÓN 2.10. Sea $f\colon M \to N$ homomorfismo de Λ-módulos. Definimos el *núcleo de* f como el conjunto $\ker f = \{x \in M : f(x) = 0\}$ y *imagen de* f como el conjunto $\operatorname{Im} f = \{f(x) \in N : x \in M\}$

PROPOSICIÓN 2.11. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo de Λ-módulos. Entonces, si M' es un submódulo de M, $f(M')$ es un submódulo de N y si N es un submódulo de N, $f^{-1}(N')$, la preimagen de N', es un submódulo de M.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $f(M') = \{f(x) : x \in M'\}$ es un submódulo de N. Sean $u, v \in f(M')$, entonces existen $x, y \in M'$ tales que $f(x) = u$ y $f(y) = v$. Como M' es un submódulo de M, $x + y \in M'$ y $\alpha x \in M'$. Como f es un homomorfismo, tenemos que

$$u + v = f(x) + f(y) = f(x + y) \in f(M')$$
$$\alpha u = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in f(M').$$

Por lo tanto, $f(M')$ es un submódulo de N.

Veamos que $f^{-1}(N') = \{x \in M : f(x) \in N'\}$ es un submódulo de M. Sean $x, y \in f^{-1}(N')$, $f(x)$ y $f(y)$ están en N'. Como N' es un submódulo de N y f es un homomorfismo,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \in N'$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \in N'.$$

Así, $(x + y), (\alpha x) \in f^{-1}(N')$. $\square$

COROLARIO 2.12. *Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo. Entonces, los conjuntos núcleo e imagen de f son submódulos de M y N respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Del teorema anterior considerando $M' = M$ y $N' = 0$. $\square$

DEFINICIÓN 2.13. Llamaremos *coimagen* y *conúcleo* a los cocientes

$$\operatorname{coim} f = M/\ker f,$$
$$\operatorname{coker} f = N/\operatorname{Im} f.$$

NOTA 2.14. Observemos que para un morfismo $f\colon M \to N$ de Λ-módulos, la inclusión del núcleo de f en M es el morfismo núcleo de f y la proyección de N en el conúcleo de f es el morfismo conúcleo del morfismo f.

DEFINICIÓN 2.15. Denotemos con $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,N)$ el conjunto de homomorfismos de M a N, es decir, $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,N) = \mathbf{Mod}(\Lambda)(M,N)$. Sean $f,g\colon M \to N$ homomorfismos de este estilo. Definamos $f+g\colon M \to N$ mediante $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y $\alpha f\colon M \to N$ como $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$.

PROPOSICIÓN 2.16. *Utilizando la conmutatividad de* Λ *y las operaciones anteriores* $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,N)$ *es un* Λ*-módulo.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,N)$ es un grupo abeliano con la suma y, dado $f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M,N)$ y $\alpha, \alpha' \in \Lambda$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\alpha f)(\alpha' x) &= \alpha(f(\alpha' x)) \\
&= \alpha(\alpha' f(x)) \\
&= \alpha'(\alpha f(x)) \\
&= \alpha'(\alpha f)(x),
\end{aligned}$$

por la conmutatividad de Λ, es decir, αf es un homomorfismo de Λ-módulos. Es fácil probar que $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,N)$ satisface las propiedades de un Λ-módulo. □

DEFINICIÓN 2.17. Recordemos que un morfismo $f\colon M \to N$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo único $g\colon N \to M$ tal que $g \circ f = 1_M$ y $f \circ g = 1_N$ (ver Definición 1.19). Además, diremos que si $f\colon M \to N$ es un isomorfismo entonces M y N son isomorfos y lo denotaremos como $M \cong N$.

PROPOSICIÓN 2.18. *Un homomorfismo* $f\colon M \to N$ *es isomorfismo si, y sólo si, es inyectivo y suprayectivo.*

DEMOSTRACIÓN. La condición: "existe un homomorfismo $g\colon N \to M$ tal que $g \circ f = 1_M$ y $f \circ g = 1_N$" es equivalente a: "g es la inversa de f". Además, "g es la inversa de f" es equivalente a decir: "f es inyectiva y sobreyectiva". □

PROPOSICIÓN 2.19. *Para* Λ*-módulos, un morfismo* $f\colon M \to N$ *es inyectivo si y sólo si es monomorfismo y es suprayectivo si y sólo si es epimorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f\colon M \to N$ es inyectivo. Consideremos $g_1, g_2\colon M' \to M$ tales que $f \circ g_1 = f \circ g_2$ y sea $x \in M'$ cualquiera, entonces tenemos que $(f \circ g_1)(x) = (f \circ g_2)(x)$, como f es inyectiva $g_1(x) = g_2(x)$, como x es arbitraria, entonces $g_1 = g_2$.

Ahora supongamos que si $f \circ g_1 = f \circ g_2$ entonces $g_1 = g_2$ para cualesquiera $g_1, g_2 \colon M' \to M$. Supongamos que para $x_1, x_2 \in M$ se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$. Consideremos el Λ-módulo libre Λ y sea x su generador, entonces definamos $g_1, g_2 \colon \Lambda \to M$ como $g_1(x) = x_1$ y $g_2(x) = x_2$, entonces ya que $f \circ g_1 = f \circ g_2$ se tiene que $g_1 = g_2$, es decir, $x_1 = x_2$.

Para la segunda afirmación supongamos primero que $f \colon M \to N$ es sobre y que dados dos homomorfismos $g_1, g_2 \colon N \to N'$ se tiene que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Sea $n \in N$ entonces por hipótesis existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$, así $(g_1 \circ f)(m) = (g_2 \circ f)(m)$, es decir, $g_1(n) = g_2(n)$ para toda n.

Por otro lado si $f \colon M \to N$ es epimorfismo y consideramos las aplicaciones $g_1, g_2 \colon N \to N/\operatorname{Im} f$ dadas por $g_1(n) = e$ donde e es la identidad del grupo $N/\operatorname{Im} f$ y $g_2(n) = n + \operatorname{Im} f$ la aplicación cociente, entonces tenemos que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Por hipotesis tenemos que $g_1 = g_2$, lo que es lo mismo $N/\operatorname{Im} f = \{\operatorname{Im} f\}$ por lo tanto $N = \operatorname{Im} f$, es decir, f es sobre. □

Nota 2.20. Por lo anterior tenemos que en la categoría $\mathbf{Mod}(\Lambda)$ los morfismos que son monomorfismos y epimorfismos son isomorfismos y viceversa.

Al igual que en la Teoría de Grupos, en la Teoría de Λ-Módulos tenemos teoremas de isomorfismo, que en esencia son los mismos que en grupos. Enunciaremos el más importante de ellos por sus aplicaciones.

Teorema 2.21. *Sea N un submódulo del Λ-módulo M y $f \colon M \to M'$ un homomorfismo de Λ-módulos tal que $N \subset \ker f$. Entonces existe un homomorfismo único $h \colon M/N \to M'$ tal que $h \circ p = f$*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & M/N \arrow[d, "h"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

donde p es la proyección. Además $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$ y $\ker h = (\ker f)/N$.

Demostración. Por hipótesis, $f(N) = 0$, por lo que f manda los elementos de cualquier clase lateral $x+N$ en un solo elemento $f(x+N) = f(x)$. Esto es, existe una única función h de M/N en M' tal que $h \circ p = f$. Además h es homomorfismo de grupos pues

$$\begin{aligned} h(x+N) + h(y+N) &= f(x) + f(y) \\ &= f(x+y) \\ &= h((x+y)+N), \end{aligned}$$

y también es un homomorfismo de Λ-módulos, pues

$$\alpha h(x+N) = \alpha f(x) = f(\alpha x) = h(\alpha x + N).$$

Como $h(p(x)) = f(x)$, y p es sobreyectiva, se tiene que $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f$, y como $h(x+N) = 0$ si y sólo si, $f(x) = 0$, es decir $x \in \ker f$ tenemos que $x + N \in (\ker f)/N$. Por lo tanto $\ker h = (\ker f)/N$. □

COROLARIO 2.22. $f(M) \cong M/\ker f$

DEMOSTRACIÓN. Si en el teorema precedente tenemos que $N = \ker f$, entonces h es un monomorfismo. Así que $f(M) = \operatorname{Im} f \cong M/\ker f = M/N$. □

PROPOSICIÓN 2.23. *En la categoría de Λ-módulos,*

I. *Si $f\colon M \to N$ un homomorfismo inyectivo (monomorfismo), entonces f es el núcleo de la proyección de N en $N/\operatorname{Im} f$*

II. *Si $g\colon M \to N$ homomorfismo sobreyectivo (epimorfismo), entonces g es conúcleo a la inclusión del núcleo de g en M.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos cada caso:

I. Para probar que f es un núcleo, supongamos que existe q tal que $pq = 0$. Probaremos que existe un único h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "p"] & N/\operatorname{Im} f \\ M' \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "q"'] & & \end{tikzcd}$$

Como $pq = 0$, tenemos que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} f$, entonces dado $m' \in M'$ existe $m \in M$ tal que $q(m') = f(m)$, definimos $h(m') = m$. De esta manera h es un homomorfismo como se quería. Este homomorfismo h es único ya que f es monomorfismo.

II. Para probar que g es un conúcleo observemos que $N \cong M/\ker g$ ya que g es sobreyectivo (ver el Teorema 2.21). Supongamos que existe $q\colon M \to M'$ tal que compuesto con la inclusión $i\colon \ker g \to M$ es cero, entonces por el mismo Teorema 2.21 tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \ker g \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "q"'] & M/\ker g \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & M' \end{tikzcd}$$

Donde h es el único homomorfismo que hace conmutativo el diagrama. □

Sean M y N Λ-módulos. Queremos definir una estructura de Λ-módulo en $M \times N$. Definimos $+\colon (M \times N) \times (M \times N) \to (M \times N)$ mediante

$$(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n') \tag{5}$$

Es inmediato que "+" hace a $M \times N$ un grupo abeliano cuyo elemento identidad es $(0_M, 0_N)$ donde 0_M representa el elemento identidad de M y 0_N el de N.

Definimos $\mu\colon \Lambda \times (M \times N) \to (M \times N)$ mediante

$$\alpha(m, n) = (\alpha m, \alpha n) \tag{6}$$

Definición 2.24. Las operaciones definidas en (5) y (6) le dan a $M \times N$ estructura de Λ-módulo, llamado *producto directo* de M y N.

Definición 2.25. $\pi_M : M \times N \to M$ definida como $\pi_M(m,n) = m$ es un homomorfismo llamado *homomorfismo proyección.*

Proposición 2.26. *El producto directo junto con las proyecciones π_M y π_N tiene la propiedad universal, es decir, si hay otro objeto P con homomorfismos $f\colon P \to M$ y $g\colon P \to N$ entonces existe un único morfismo $P \to M \times N$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M & M \times N \arrow[l, "\pi_M"'] \arrow[r, "\pi_N"] & N \\ & P \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\exists! h"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} .$$

Es decir, la categoría $\mathbf{Mod}(\Lambda)$ tiene definido un producto para cada par de objetos (ver Definición 1.32).

Demostración. Definimos $h\colon P \to M \times N$ como $h(x) = (f(x), g(x))$. Este es un homomorfismo único y por construcción hace conmutar el diagrama. $\square$

2.1. Los funtores $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, N)$ **y** $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \cdot)$ Definiremos dos funtores de la categoría $\mathbf{Mod}(\Lambda)$ en sí misma. Dado un Λ-módulo N fijo, podemos asociar a cada Λ-módulo M el Λ-módulo $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$. De manera dual, dado un Λ-módulo M fijo, podemos asociar a cada Λ-módulo N el Λ-módulo $\mathrm{Hom}(M,N)$.

En esta subsección veremos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, N)$ y $\mathrm{Hom}(M, \cdot)$ son funtores.

Primero tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \cdot)$ es un funtor: sea M fijo. Como ya vimos a cada Λ-módulo N le podemos asociar el Λ-módulo $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$. Ahora, sea $\psi\colon N \to N'$ un homomorfismo de Λ-módulos y $f\colon M \to N$ un elemento de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$. Asociamos a f un homomorfismo $M \to N'$ en $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N')$ mediante un homomorfismo

$$\psi_* = \mathrm{Hom}(M,\psi)\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N')$$

dado por $\psi_*(f) = \psi \circ f$. El homomorfismo ψ_* lo llamaremos el *homomorfismo inducido por ψ.*

De esta manera, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \cdot)$ satisface las propiedades de funtor:

I. Si $1_N\colon N \to N$ es la identidad, entonces

$$1_{N*}\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$$

es la identidad ya que $1_{N*}(f) = 1_N \circ f = f$, y

II. Si $\psi\colon N \to N'$, $\psi'\colon N' \to N''$ son homomorfismos de Λ-módulos y M es un Λ-módulo, entonces $(\psi' \circ \psi)_* = \psi'_* \circ \psi_*$, puesto que

$$\begin{aligned} (\psi' \circ \psi)_*(f) &= (\psi' \circ \psi) \circ f \\ &= \psi' \circ (\psi \circ f) \\ &= (\psi'_* \circ \psi_*)(f). \end{aligned}$$

De manera dual, $\mathrm{Hom}(\cdot, N)$ es un funtor contravariante: sea N fijo. A cada M le podemos asociar el Λ-módulo $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$. Sea $\varphi\colon M' \to M$ un homomorfismo de Λ-módulos y $g\colon M \to N$ un elemento de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$. Asociamos a g un homomorfismo $M' \to N$ en $\mathrm{Hom}_\Lambda(M', N)$ mediante un homomorfismo

$$\varphi^* = \mathrm{Hom}(\varphi, N)\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M', N)$$

dada por $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$. Este homomorfismo de Λ-módulos, es llamado el *homomorfismo inducido por* φ.

Ahora bien,

I. Si $1_M\colon M \to M$ es la identidad, entonces

$$1_M{}^*\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$$

es la identidad ya que $1_M{}^*(g) = g \circ 1_M = g$, y

II. Si $\varphi\colon M' \to M$, $\varphi'\colon M'' \to M'$ son homomorfismos de Λ-módulos y N es un Λ-módulo, entonces $(\varphi \circ \varphi')^* = \varphi'^* \circ \varphi^*$ puesto que

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ \varphi)^*(g) &= g \circ (\varphi \circ \varphi') \\ &= (g \circ \varphi) \circ \varphi' \\ &= \varphi'^*(\varphi^*(g)) \\ &= (\varphi'^* \circ \varphi^*)(g). \end{aligned}$$

2.2. Módulos libres y proyectivos

DEFINICIÓN 2.27. Un Λ-módulo L es *libre* si tiene una base, es decir existe un subconjunto $X = \{x_j\}_{j \in J}$ de L tal que todo elemento $x \in L$ se puede escribir de manera única como $x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ para todo $j \in J$ y donde solo un número finito de los $\lambda_j \in \Lambda$ son distintos de cero. Diremos que un Λ-módulo L es libre con base X si X es una base para L. Llamaremos a X un *conjunto de generadores* de L.

DEFINICIÓN 2.28. Si un Λ-módulo posee un conjunto finito de generadores, diremos que es *finitamente generado*.

Hemos construido una subcategoría de $\mathbf{Mod}(\Lambda)$ cuyos objetos son módulos libres y los morfismos se toman de la categoría $\mathbf{Mod}(\Lambda)$. Denotaremos a esta subcategoría con $\mathbf{L}(\Lambda)$.

PROPOSICIÓN 2.29. *Sea L un Λ-módulo libre con base el conjunto X. Dado M Λ-módulo y una función $\varphi\colon X \to M$, entonces existe un único homomorfismo $\psi\colon L \to M$ que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & L \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Definimos ψ como el homomorfismo $\psi(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i)$, el cual es el único que hace conmutar el diagrama. $\square$

A esta propiedad se le conoce como *propiedad universal del módulo libre.*

NOTA 2.30. Podemos pensar lo anterior de forma más general. Definimos un nuevo funtor $L_\Lambda\colon \mathbf{Conj} \to \mathbf{Mod}(\Lambda)$, el cual asocia a cada conjunto X el Λ-módulo libre $L_\Lambda(X)$ generado por X, definido como el conjunto de sumas formales finitas $\sum_{j\in J}\lambda_j x_j$ con $x_j \in X$ y, a cada función entre conjuntos $f\colon X \to Y$ le asocia el homomorfismo de Λ-módulos $L_\Lambda(f)\colon L_\Lambda(X) \to L_\Lambda(Y)$ dado por $L_\Lambda(f)(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j) = \sum_{i\in J}\lambda_j f(x_j)$.

PROPOSICIÓN 2.31. *Todo Λ-módulo M es cociente de un Λ-módulo libre.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un subconjunto de M tal que genere a M. En particular, podemos tomar $X = M$. Consideremos el Λ-módulo libre generado por X y denotémoslo con L. Entonces la inclusión $f: X \to M$ se extiende a un homomorfismo $\phi\colon L \to M$ (ver Proposición 2.29). Como $X \cong f(X) \subset \phi(L) \subset M$, y como X genera a M, tenemos que $\phi(L) = M$. por lo que ϕ es epimorfismo, y por el Teorema 2.21, tenemos que $M \cong L/\ker\phi$ $\square$

DEFINICIÓN 2.32. Un Λ-módulo P se llama *proyectivo* si para todo homomorfismo $f\colon P \to N''$ y para todo epimorfismo $\psi'\colon N \to N''$ de Λ-módulos, existe un homomorfismo $h\colon P \to N$ tal que $\psi' \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\psi'"] & N'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

De la categoría de módulos, tomemos los proyectivos y sus morfismos, entonces, de la definición de la categoría $\mathbf{Mod}(\Lambda)$, se sigue que estos definen una subcategoría, a la que denotaremos por $\mathbf{P}(\Lambda)$. Más aún, por definición esta categoría es plena (ver Definición 1.39).

PROPOSICIÓN 2.33. *El producto de dos Λ-módulos P_1 y P_2 es proyectivo si y sólo si P_1 y P_2 lo son.*

Para su demostración ver [**15**, Prop. I.6.11]

PROPOSICIÓN 2.34. *Si L es un módulo libre,entonces para todo homomorfismo $f\colon L \to N''$ y para todo epimorfismo $\psi'\colon N \to N''$existe un homomorfismo $h\colon L \to N$ tal que $f = \psi' \circ h$. Es decir, si L es libre entonces L es proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea L un módulo libre con base el conjunto X. Como ψ' es epimorfismo, podemos definir $g\colon X \to N$ como $g(x_i) = y_i$, para toda $x_i \in X$, tal que y_i es una preimagen de $f(x_i)$. Como X es la base de L podemos extender g a todo L (ver Proposicón 2.29). Sea $h\colon L \to N$ dicha extensión. Luego, si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in L$, $\lambda_i \in \Lambda$, $x_i \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi'(h(x)) &= \psi'(h(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi'(g(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \\
&= f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi' \circ h = f$.

□

LEMA 2.35. *Sean* $f\colon M' \to M$ *y* $g\colon M \to M''$ *tales que* $g \circ f$ *es un isomorfismo. Entonces* $M \cong \operatorname{Im} f \times \ker g$.

Para su demostración ver [**15**, Cor. I.4.10]

TEOREMA 2.36. *Sea* P *un* Λ*-módulo. Entonces los siguientes son equivalentes*

I. P *es proyectivo.*
II. *Toda sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *se escinde.*
III. P *es un sumando directo de un* Λ*-módulo libre.*

DEMOSTRACIÓN. (I $\Rightarrow$ II): Supongamos que P es un Λ-módulo proyectivo. Entonces para toda $g\colon N \to P$ sobre y $1_P\colon P \to P$ existe $h\colon P \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

esto es, $1_P = g \circ h$. Es decir la sucesión se escinde.

(II $\Rightarrow$ III): Por la Proposición 2.31, P es isomorfo al cociente de un Λ-módulo libre L y existe un epimorfismo $g\colon L \to P$. Entonces consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0 .$$

Por hipótesis, existe $h\colon P \to L$ tal que $1_P = g \circ h$, es decir la sucesión se escinde, por lo tanto $L = \ker g \oplus P$.

(III $\Rightarrow$ I): Como todo Λ-módulo libre es proyectivo y todo sumando de un proyectivo es proyectivo (ver la Proposición 2.33), es inmediata la equivalencia. □

Nota 2.37. Por lo expuesto anteriormente, la categoría $\mathbf{Mod}(\Lambda)$ es abeliana y la subcategoría $\mathbf{P}(\Lambda)$ es aditiva. Además $\mathbf{P}(\Lambda)$ es una categoría exacta ya que, en una sucesión exacta corta de Λ-módulos

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

si la sucesón se escinde entonces $M \cong M' \times M''$, por lo que en una sucesión exacta de Λ-módulos proyectivos tenemos que $M \cong M' \times M''$ y por la Proposición 2.33 $M \cong M' \times M''$ es proyectivo. Por lo tanto, la categoría $\mathbf{P}(\Lambda)$ es una categoría exacta.

2.3. Producto Tensorial Antes de terminar esta sección veamos un concepto más, el producto tensorial, que nos ayudará más adelante para la definición de la Homología de Grupos. No daremos los detalles de las demostraciones de todos los resultados, para ello ver [**15**, I].

Sea Λ un anillo conmutativo con $1 \neq 0$.

Sean M y N Λ-módulos. Consideremos el Λ-módulo libre L con base $M \times N$, es decir, los elementos de L son combinaciones lineales con coeficientes en Λ de las parejas ordenadas (x, y); $x \in M$ y $y \in N$. Sea K un submódulo de L generado por los elementos de la forma

I. $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$
II. $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$
III. $(\lambda x, y) - (x, \lambda y)$, $\lambda \in \Lambda$.

Definimos $M \otimes_\Lambda N = L/K$. Denotamos con $x \otimes y$ a la clase lateral $(x, y) + K$. Es inmediato comprobar que $f \colon M \times N \to M \otimes_\Lambda N$ dado por $f(x, y) = x \otimes y$, es bilineal.

Proposición 2.38. *Para toda $g \colon M \times N \to U$ homomorfismo de Λ-módulos bilineal, entonces existe $h \colon M \otimes_\Lambda N \to U$ único tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & M \otimes_\Lambda N \arrow[d, "h"] \\ & U. \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "g"'] & L \arrow[d, "h'"] \\ & U, \end{tikzcd}$$

donde f' es la función que manda $(x, y) \in M \times N$ en el generador $(x, y) \in L$ y g un homomorfismo bilineal, como L es libre con base $M \times N$, existe un homomorfismo $h' \colon L \to U$ tal que $g = h' \circ f$. Como g es bilineal entonces

h se anula en los elementos de la forma (I,II,III), por lo que $K \subset \ker h'$, e induce un homomorfismo $h\colon L/K \to U$ como se quería. □

DEFINICIÓN 2.39. Alternativamente podemos definir $M \otimes_\Lambda N$ como el Λ-módulo generado por los símbolos $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$, sujeto a las relaciones.

I. $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$
II. $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$
III. $\lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y$, $\lambda \in \Lambda$

Sean $\varphi\colon M' \to M$ y $\psi\colon N' \to N$ homomorfismos de Λ-módulos y $\varphi \times \psi\colon M' \times N' \to M \times N$ dado por $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Sean $f\colon M' \times N' \to M' \otimes_\Lambda N'$ y $g\colon M \times N \to M \otimes_\Lambda N$ las funciones bilineales respectivas. Consideremos la función bilineal $g \circ (\varphi \times \psi)\colon M' \times N' \to M \otimes_\Lambda N$. Como el $M \otimes_\Lambda N$ es el producto tensorial, existe un homomorfismo único

$$h\colon M' \otimes_\Lambda N' \to M \otimes_\Lambda N$$

que denotaremos con $\varphi \otimes \psi$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M' \times N' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\times\psi"'] & M' \otimes_\Lambda N' \arrow[d, "\varphi\otimes\psi"] \\
M \times N \arrow[r, "g"'] & M \otimes_\Lambda N
\end{tikzcd}$$

Es decir, $(\varphi \otimes \psi) \circ f(x, y) = g \circ (\varphi \times \psi)(x, y)$, $(x, y) \in M' \times N'$. Luego $(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$.

En particular tenemos que $M \otimes (\cdot)$ y $(\cdot) \otimes N$ son funtores de la categoría de Λ-módulos en sí misma, ya que se tienen las siguientes proposiciones cuyas demostraciónes se siguen del párrafo anterior:

PROPOSICIÓN 2.40. *Sea M un Λ-módulo fijo. Entonces $M \otimes (\cdot)$ satisface que*

I. *si $1_M\colon M \to M$ y $1_N\colon N \to N$ son los homomorfismos identidad, entonces $1_M \otimes_\Lambda 1_N$ es la identidad de $M \otimes_\Lambda N$, y*
II. *si $\psi\colon N \to N'$ y $\psi'\colon N' \to N''$ son homomorfismos de Λ-módulos, entonces $(1_M \otimes \psi') \circ (1_M \otimes \psi) = 1_M \otimes (\psi' \circ \psi)$.*

PROPOSICIÓN 2.41. *Sea N un Λ-módulo fijo. Entonces $(\cdot) \otimes N$ satisface que*

I. *si $1_M\colon M \to M$ y $1_N\colon N \to N$ son los homomorfismos identidad, entonces $1_M \otimes_\Lambda 1_N$ es la identidad de $M \otimes_\Lambda N$, y*
II. *si $\varphi\colon M' \to M$ y $\varphi'\colon M'' \to M'$ son homomorfismos de Λ-módulos, entonces $(\varphi \otimes 1_N) \circ (\varphi' \otimes 1_N) = (\varphi \circ \varphi') \otimes 1_N$.*

PROPOSICIÓN 2.42. I. *Si $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\psi'} N'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de Λ-módulos , entonces*

$$M \otimes_\Lambda N' \xrightarrow{1_M \otimes \psi} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{1_M \otimes \psi'} M \otimes_\Lambda N'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

II. *Si* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\varphi'} M'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de* Λ-*módulos, entonces*

$$M' \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi\otimes 1_N} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\varphi'\otimes 1_N} M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

En el caso de que N es proyectivo, el funtor $(\cdot) \otimes N$ preserva sucesiones exactas cortas.

Para el caso en el que Λ sea un anillo no necesariamente conmutativo tenemos la ligera variación del producto tensorial.

Definición 2.43. El producto tensorial $M \otimes_\Lambda N$ del Λ-módulo derecho M y el Λ-módulo izquierdo N sobre Λ anillo con 1 (no necesariamente conmutativo), es el grupo abeliano generado por los símbolo $x \otimes y$, $x \in M$, $y \in N$, sujeto a las relaciones.

I. $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$
II. $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$
III. $x\lambda \otimes y = x \otimes \lambda y$, $\lambda \in \Lambda$.

3. Álgebra Homológica

En esta sección estudiaremos algunos resultados de la teoría del Álgebra Homológica necesarios para nuestros propósitos. El Álgebra Homológica aparece al final de la década de los 50's del siglo XX. Al igual que el lenguaje de categorías, en la actualidad el estudio del Álgebra Homológica ha sorprendido por la generalización de muchos conceptos que sólo se tenían en la Topología Algebraica (tal es el caso de la Homología) y que ahora se están aplicando en diferentes áreas de la matemática.

Empezaremos la sección definiendo Homología, que será de mucha importancia, primero para obtener la homología de grupos, que presentaremos al final de la sección; después, para la homología de espacios topológicos, la cual se explicará en el siguiente capítulo. La Homología de Grupos tiene una bonita relación con la Homología de espacios topológicos que veremos cuando definamos el espacio clasificante de un grupo.

Formularemos los preliminares necesarios para la definición de la Homología de Grupos tales como el concepto de resolución proyectiva, resolución libre y el funtor $\mathbf{Tor}_n^\Lambda$.

3.1. Homología Empecemos definiendo una categoría más que facilitará la notación.

Proposición 3.1. *Consideremos como objetos a las familias de* Λ-*módulos* $M_* = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *con morfismos* $\rho\colon M_* \to N_*$ *de grado* j *entre objetos* M_*

y N_* dados como familias de homomorfismos

$$\{\rho_i \colon M_i \to N_{i+j}\}_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Estas familias de Λ-módulos y estos morfismos forman una categoría, llamada categoría de Λ-módulos graduados *denotada por* $\mathbf{MG}(\Lambda)$.

Demostración. Las identidades $\{1_{M_i} \colon M_i \to M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ definen el morfismos identidad 1_{M_*} de cada Λ-módulo graduado, este morfismo es de grado 0.

Sean $\rho \colon M_* \to M'_*$ y $\rho' \colon M'_* \to M''_*$ morfismos entre Λ-módulos graduados, de grado j y j' respectivamente, entonces los morfismos $\{\rho'_{i+j}\circ\rho_i \colon M_i \to M''_{i+j+j'}\}$ definen una composición $\rho'\circ\rho \colon M_* \to M''_*$ de Λ-módulos graduados de grado $j+j'$. La asociatividad del morfismo se hereda de la asociatividad de los homomorfismos. □

Definición 3.2. Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de Λ-módulos y $\{\partial_n \colon C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de homomorfismos de Λ-módulos tales que $\partial_n\circ\partial_{n+1} = 0$. Llamaremos *complejo de cadenas sobre* Λ o simplemente complejo de cadenas a la pareja $C_* = \{C_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y lo escribiremos

$$C_* : \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Dicho de otra manera, un complejo de cadenas, es una sucesión semiexacta decreciente con índices en $\mathbb{Z}$. Se dice que es semiexacta decreciente por que la condición $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ implica que $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subset \ker\partial_n$.

Definición 3.3. Sean $C_* = \{C_n, \partial_n\}$ y $D_* = \{D_n, \partial'_n\}$ dos complejos de cadenas. Un *morfismo de cadenas* $\varphi \colon C_* \to D_*$ es una familia de homomorfismos de Λ-módulos $\{\varphi_n \colon C_n \to D_n\}$ tales que los cuadrados en el siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd}
C_* : \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
D_* : & \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.4. *Los complejos de cadenas $C_* = \{C_n, \partial_n\}$ y los morfismos arriba mencionados forman una categoría, llamada la categoría de complejos de cadenas que denotaremos por* $\mathbf{CC}(\Lambda)$.

Demostración. Es claro que $1_{C_*} \colon C_* \to C_*$, definido con las identidades $\{1_{C_n} \colon C_n \to C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es el morfismo identidad en las cadenas.

La composición de cadenas viene dada en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C_* : \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
D_* : \arrow[d, "\varphi'"] & \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'_{n-1}"] & \cdots \\
E_* : & \cdots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "\partial_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La asociatividad del morfismo se hereda de la asociatividad de los homomorfismos φ_n y φ'_n. □

Definición 3.5. Sea $C_* = \{C_n, \partial_n\}$ un complejo de cadenas sobre Λ. El *grupo de homología* de grado (o dimensión) n de C_* denotado $H_n(C_*)$ se define como el cociente

$$H_n(C_*) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

Los elementos de C_n se conocen como *cadenas* de grado n, y los homomorfismos ∂_n se llaman *aplicaciones (u operadores) frontera*. Los elementos del núcleo de ∂_n se denominan *ciclos* de grado n, los denotaremos con $Z_n(C_*)$ y los elementos de la imagen de ∂_{n+1} se llaman *fronteras* de grado n, denotadas con $B_n(C_*)$. Así, $H_n(C_*) = Z_n(C_*)/B_n(C_*)$ y $H_*(C_*) = \{H_n(C)\}$ se denomina *homología de la cadena* C_*.

Nota 3.6. La homología $H_*(\cdot)$ es un funtor de la categoría de complejos de cadenas a la categoría de Λ-módulos graduados: hemos asociado a cada cadena C_* un Λ-módulo graduado $H_*(C_*)$. Para cada morfismo de cadenas $\varphi\colon C_* \to D_*$ tenemos un morfismo bien definido de grado cero, $H_*(\varphi) = \varphi_*\colon H_*(C_*) \to H_*(D_*)$, dado por los homomorfismos bien definidos $\varphi_{n_*}\colon H_n(C_n) \to H_n(D_n)$ que vienen de asociar $[z] \mapsto [\varphi(z)]$. El morfismo $H_*(\varphi)$ cumple con las propiedades de funtor, es decir:

i. $1_{C_*}\colon C_* \to C_*$ es la identidad entonces
$$H_*(1_{C_*})\colon H_*(C_*) \to H_*(C_*)$$
es la identidad en homología y

ii. dados $\varphi\colon C_* \to D_*$ y $\varphi'\colon D_* \to E_*$ morfismos de complejos de cadenas, entonces $H_*(\varphi' \circ \varphi) = H_*(\varphi') \circ H_*(\varphi)$.

La primera afirmación es clara. Ahora, dado $[z] \in H_n(C_n)$, entonces $H_n(\varphi_n)\colon H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ manda a $[z]$ en $[\varphi_n(z)]$ y $H_n(\varphi'_n)\colon H_n(D_*) \to H_n(E_*)$ manda a $[\varphi_n(z)]$ en $[(\varphi'_n \circ \varphi_n)(z)]$. Por otra parte, $H_n(\varphi' \circ \varphi_n)\colon H_n(C_*) \to H_n(D_*) \to H_n(E_*)$ manda a $[z]$ en $[(\varphi'_n \circ \varphi_n)(z)]$.

Así, $H_*(\varphi' \circ \varphi) = H_*(\varphi') \circ H_n(\varphi)$.

Definición 3.7. El homomorfismo $\varphi_{n*}\colon H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ se llama el *homomorfismo inducido en el n-ésimo grupo de homología* y el morfismo $\varphi\colon H_*(C_*) \to H_*(D_*)$ es llamada el *morfismo inducido en homología*.

Más aún, también hemos visto que $H_n(\cdot)$ es un funtor de la categoría de complejos de cadenas $\mathbf{CC}(\Lambda)$ en la categoría de Λ-módulos $\mathbf{Mod}(\Lambda)$.

Definición 3.8. Sean $C_* = \{C_n, \partial_n\}$ y $D_* = \{D_n, \partial'_n\}$ dos complejos de cadenas y $\varphi, \varphi' \colon C_* \to D_*$ dos morfismos de complejos de cadenas. Diremos que φ es *homotópico* a φ' si existe una familia de homomorfismos de Λ-módulos

$$h = \{h_n \colon C_n \to D_{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$$

tales que $\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \varphi_n - \varphi'_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C_* : & \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi'_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "\varphi'_n"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi'_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
D_* : & \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La familia $h = \{h_n\}$ se llama *homotopía de cadenas*. En símbolos $h \colon \varphi \sim \varphi' \colon C_* \to D_*$.

Proposición 3.9. *La relación de homotopía de cadenas es una relación de equivalencia.*

Ver [**15**, Prop. 1.8] para su demostración.

Teorema 3.10. *Si* $\varphi \sim \varphi' \colon C_* \to D_*$ *entonces*

$$H_*(\varphi) = H_*(\varphi') : H_*(C_*) \to H_*(D_*).$$

Demostración. Sea $h : \varphi \sim \varphi$ la homotopía. Sea $x \in H_n(C_*)$ arbitraria, $z \in Z_n(C_*)$, un representante, es decir tal que $p(z) = x$, donde $p \colon Z_n(C_*) \to H_n(C_*)$ es la proyección en el cociente. Entonces

$$\varphi_n(z) - \varphi'_n(z) = \partial'_{n+1} \circ h_n(z) + h_{n-1} \circ \partial_n(z) = \partial'_{n+1} \circ h_n(z),$$

pues $\partial_n(z) = 0$. Como $\partial'_{n+1} \circ h_n(z) \in B_n(D_*)$, $\varphi(z)$ y $\varphi'(z)$ son homólogos, es decir, $H_n(\varphi)(x) = H_n(\varphi')(x)$, por lo que $H_n(\varphi) = H_n(\varphi')$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. □

Teorema 3.11 (Teorema fundamental del Álgebra Homológica). *Sea* $A_* \overset{\varphi}{\rightarrowtail} B_* \overset{\varphi'}{\twoheadrightarrow} C_*$ *una sucesión exacta corta complejos de cadenas. Entonces existe un homomorfismo* $\kappa_n \colon H_n(C_*) \to H_{n-1}(A_*)$ *para* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que la siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A_*) \xrightarrow{\varphi_{n*}} H_n(B_*) \xrightarrow{\varphi'_{n*}} H_n(C_*) \xrightarrow{\kappa_n}$$

$$\xrightarrow{\kappa_n} H_{n-1}(A_*) \xrightarrow{\varphi_{n-1*}} H_{n-1}(B_*) \xrightarrow{\varphi'_{n-1*}} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{\kappa_{n-1}} \cdots$$

Para su demostración ver [**15**, Tma. I.1.10].

NOTA 3.12. Siempre que tengamos un funtor de una categoría $\mathbf{C}$ a la categoría de complejos de cadenas de Λ-módulos $\mathbf{CC}(\Lambda)$, componiendo con el funtor homología H_*, podemos definir la homología de los objetos de $\mathbf{C}$. Veremos ejemplos de esto más adelante.

En el caso de la categoría $\mathbf{S\,Mod}(\Lambda)$ de Λ-módulos simpliciales (ver Definición 1.5 y ejemplos sucesivos), siempre se tiene un funtor $C_* : \mathbf{S\,Mod}(\Lambda) \to \mathbf{CC}(\Lambda)$ que manda a cada Λ-módulo simplicial $F\colon \Delta^{op} \to \mathbf{S\,Mod}(\Lambda)$ en la cadena $C_*(F) = \{F(\underline{n}), \partial_n)\}$, con $\partial_n = \sum(-1)^i F(\partial_i^n)$ donde ∂_i^n es una cara como en el Ejemplo 1.6. El hecho de que $C_*(F)$ sea un complejo de cadenas se sigue del siguiente lema:

LEMA 3.13. *La composición* $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que los morfismos cara de la categoría Δ (ver Ejemplo 1.6) satisfacen la ecuación $\partial_j^{n+1} \circ \partial_i^n = \partial_i^{n+1} \circ \partial_{j-1}^n$ y como $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i F(\partial_i^n)$ entonces

$$\begin{aligned}
\partial_n \circ \partial_{n+1} &= \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j F(\partial_j^n) \circ F(\partial_i^{n+1}) \\
&+ \sum_{j>i} (-1)^i(-1)^{j-1} F(\partial_i^n) \circ F(\partial_{j-1}^{n+1}) \\
&= \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j F(\partial_j^{n+1} \circ \partial_i^n) \\
&+ \sum_{j>i} (-1)^i(-1)^{j-1} F(\partial_i^{n+1} \circ \partial_{j-1}^n) \\
&= \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j F(\partial_j^{n+1} \circ \partial_i^n) \\
&+ \sum_{j>i} (-1)^i(-1)^{j-1} F(\partial_j^{n+1} \circ \partial_i^n).
\end{aligned}$$

Los términos en los dos sumandos son los mismos y se cancelan unos con otros pues los de la segunda suma son negativos de los primeros. Así $\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = 0$. Observemos que si $i = j$ entonces $\partial_i^{n+1} \circ \partial_i^n = \partial_{i+1}^{n+1} \circ \partial_i^n$. $\square$

Por otro lado, dada una transformación natural $\varphi = \{\varphi_n\colon F(\underline{n}) \to F'(\underline{n})\}$ entre dos Λ-módulos simpliciales $F(\cdot)$ y $F'(\cdot)$ tenemos un morfismo de complejos de cadenas de Λ-módulos $\varphi_* := C_*(\varphi)\colon C_*(F) \to C_*(F')$ dado por

$$\begin{tikzcd}
C_*(F) : \arrow[d, "\varphi_*"] & \cdots \arrow[r] & F(\underline{n+1}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & F(\underline{n}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & F(\underline{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
C_*(F') : & \cdots \arrow[r] & F'(\underline{n+1}) \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & F'(\underline{n}) \arrow[r, "\partial'_n"] & F'(\underline{n-1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

3.2. $\mathbf{Tor}_n^\Lambda(M,N)$

DEFINICIÓN 3.14. Sea M un Λ-módulo. Una *resolución proyectiva* de M es una cadena exacta P_* de la forma

$$P_* : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

donde P_n es proyectivo para todo $n \geq 0$.

DEFINICIÓN 3.15. En particular si P_n es libre para todo $n \geq 0$, diremos que P_* es una *resolución libre* de M.

PROPOSICIÓN 3.16. *Sea M un Λ-módulo. Entonces existe una resolución libre L_* de M.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.31, todo Λ-módulo M es cociente de un Λ-módulo libre. Luego, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\mu_0} L_0 \xrightarrow{\nu_0} M \longrightarrow 0$$

donde L_0 es un Λ-módulo libre. Como M_0 es un Λ-módulo, es cociente de un Λ-módulo libre; entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\mu_1} L_1 \xrightarrow{\nu_1} M_0 \longrightarrow 0$$

con L_1 libre. Por inducción, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{\mu_n} L_n \xrightarrow{\nu_n} M_{n-1} \longrightarrow 0 \tag{7}$$

para cada n con L_n libre. Definimos la sucesión

$$L_* : \cdots \longrightarrow L_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

dada por

$$L_n = \begin{cases} M & \text{si } n = -1 \\ L_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < -1 \end{cases} \qquad \partial_n = \begin{cases} \nu_0 & \text{si } n = -1 \\ \mu_{n-1} \circ \nu_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < -1 \end{cases}$$

Como ν_{n+1} es un epimorfismo entonces $\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Im} \mu_n$, por (7) $\operatorname{Im} \mu_n = \ker \nu_n$ y por ser μ_{n-1} monomorfismo, tenemos que $\ker \nu_n = \ker \partial_n$. Luego $\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$

Por lo tanto L_* es exacta. □

LEMA 3.17. *Sean $C_* = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $D_* = \{D, \partial'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dos complejos de cadenas. Sea $\varphi = \{\varphi_i \colon C_i \to D_i\}_{i \leq n}$ una familia de homomorfismos de Λ-módulos tales que $\partial'_i \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ \partial_i$ para $i \leq n$. Supongamos que C_i es proyectivo para $i > n$ y que $H_i(D_*) = 0$ para $i \geq n$. Entonces $\{\varphi_i\}_{i \leq n}$ se extiende a un morfismo de cadenas $\varphi \colon C_* \to D_*$ y es único salvo homotopía.*

Para su demostración ver [**15**, Lema. III.2.4]

Teorema 3.18. *Sean P_* y P'_* resoluciones proyectivas de un Λ-módulo M. Entonces existe un morfismo de cadenas $\varphi\colon P_* \to P'_*$ tal que $\epsilon'\varphi = \epsilon$. Donde ϵ corresponde al último morfismo de la resolución proyectiva P_*, es decir, $\epsilon\colon P_0 \to M$ y de manera análoga para $\epsilon'\colon P'_0 \to M$. Más aún, φ es único, salvo homotopía y es una equivalencia homotópica.*

Para su demostración ver [**15**, Tma. III.2.7]

Definición 3.19. Sea P_* una resolución proyectiva de M, una *resolución proyectiva reducida* P_M de M es la resolución proyectiva P_* donde M se ha suprimido, es decir, tenemos la siguiente sucesión

$$P_M : \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0$$

Sea P_M una resolución proyectiva reducida del Λ-módulo M. Sea N un Λ-módulo y consideremos el producto tensorial $P_n \otimes_\Lambda N$ para todo $n \geq 0$, que define la sucesión:

$$P_M \otimes_\Lambda N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_n \otimes_\Lambda 1_N} P_{n-1} \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_{n-1} \otimes_\Lambda 1_N}$$

$$\cdots \longrightarrow P_1 \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\partial_1 \otimes_\Lambda 1_N} P_0 \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$$

Resulta que $P_M \otimes_\Lambda N$ es una sucesión semiexacta, pues para todo $n \geq 0$

$$(\partial_{n-1} \otimes_\Lambda 1_N) \circ (\partial_n \otimes_\Lambda 1_N) = (\partial_{n-1} \circ \partial_n) \otimes_\Lambda 1_N = 0 \otimes_\Lambda 1_N = 0$$

Entonces podemos formar el Λ-módulo graduado

$$H_*(P_M \otimes_\Lambda N) = \{H_n(P_M \otimes_\Lambda N)\}$$

Definición 3.20. Para toda $n \geq 0$, denotaremos a $H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$ con $\mathbf{Tor}_n^\Lambda(M, N)$ y lo llamaremos *funtor de torsión* de grado n sobre Λ de M y N.

$\mathbf{Tor}_n^\Lambda(\cdot, N)$ es un funtor ya que en la Nota 3.6 se prueba que $H_n(\cdot)$ es un funtor.

Proposición 3.21. $\mathbf{Tor}_n^\Lambda(M, N)$ *depende esencialmente de n, M y N, y no de la resolución escogida.*

Demostración. Supongamos que

$$Q_M : \cdots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{\partial'_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\partial'_1} Q_0 \longrightarrow 0$$

es otra resolución proyectiva reducida de M. Por el Teorema 3.18 existen morfismos de cadenas $\varphi\colon P_M \to Q_M$ y $\varphi'\colon Q_M \to P_M$ tales que $\varphi' \circ \varphi \sim 1_{P_M}$ y $\varphi \circ \varphi' \sim 1_{Q_M}$. Sea $1_N\colon N \to N$ la identidad en N. Entonces los morfismos $\varphi \otimes 1_N$ y $\varphi' \otimes 1_N$ son morfismos de complejos de cadenas que, como se vió en la Definición 3.7 inducen morfismos

$$\varphi_*\colon H_n(P_M \otimes_\Lambda N) \to H_n(Q_M \otimes_\Lambda N) \text{ y } \varphi'_*\colon H_n(Q_M \otimes_\Lambda N) \to H_n(P_M \otimes_\Lambda N)$$

para cada $n \geq 0$. Es claro que

$$(\varphi' \otimes 1_N) \circ (\varphi \otimes 1_N) \sim 1_{P_M \otimes N} \text{ y que } (\varphi \otimes 1_N) \circ (\varphi' \otimes 1_N) \sim 1_{Q_M \otimes N}.$$

Por lo tanto, $\varphi'_* \circ \varphi_*$ y $\varphi_* \circ \varphi'_*$ son los morfismos identidad de $H_n(P_M \otimes N)$ y $H_n(Q_M \otimes N)$, respectivamente (ver el Teorema 3.10). Entonces φ_* y φ'_* son isomorfos. Por último es claro que $H_n(P_M \otimes N) = 0$ para $n \leq 0$. $\square$

PROPOSICIÓN 3.22. *Sea P un Λ-módulo proyectivo. Entonces, para los Λ-módulos M y N,*

$$\begin{aligned} \mathbf{Tor}_n^\Lambda(P, N) = 0 \quad &\textit{para} \quad n \geq 1 \\ \mathbf{Tor}_n^\Lambda(M, P) = 0 \quad &\textit{para} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Q_* una resolución proyectiva de P. Como P es proyectivo, Q_* es de la forma $\longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\epsilon} P \longrightarrow 0$, donde $\epsilon = 1_P$. Luego, $Q_* \otimes_\Lambda N$ es exacta, es decir, $0 \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \longrightarrow P \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0$ es exacta y, por lo tanto, $\mathbf{Tor}_n^\Lambda(P, N) = 0$. Para el otro caso, dado que P es proyectivo se tiene que $0 \longrightarrow M \otimes_\Lambda P \longrightarrow M \otimes_\Lambda P \longrightarrow 0$ es exacta. $\square$

TEOREMA 3.23. *Sea $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ una sucesión exacta corta de Λ-módulos y N un Λ-módulo. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Tor}_n^\Lambda(M', N) \longrightarrow \mathbf{Tor}_n^\Lambda(M, N) \longrightarrow \mathbf{Tor}_n^\Lambda(M'', N) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbf{Tor}_{n-1}^\Lambda(M', N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{Tor}_0^\Lambda \longrightarrow 0.$$

Para su demostración ver [**15**, III.3.4].

4. Homología de Grupos

Al final de la sección de Homología dijimos que podíamos calcular la homología de los objetos de una categoría, dando un funtor de dicha categoría a la categoría de complejos de cadenas y luego aplicando el funtor homología. Veamos un ejemplo: la homología de grupos.

Terminaremos la sección con tres resultados de los grupos de homología $H_0(G, N)$, $H_1(G, \mathbb{Z})$ y $H_2(G, \mathbb{Z})$, que serán útiles en capítulos posteriores.

4.1. G-módulos

DEFINICIÓN 4.1. Sea G un grupo. El *anillo entero* $\mathbb{Z}[G]$ del grupo G es el conjunto de sumas formales $\sum_{i \in I} \lambda_i g_i$, $g_i \in G$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, donde, excepto un número finito de las λ_i son cero, junto con las operaciones binarias

$$+ : \mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G] \quad y \quad \cdot : \mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$$

dadas por

i. $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i + \sum_{i\in I} \mu_i g_i = \sum_{i\in I}(\lambda_i + \mu_i) g_i$
ii. $(\sum_{i\in I} \lambda_i g_i) \cdot (\sum_{i\in I} \mu_i g_i) = \sum_{i\in I}(\sum_{g_j g_k = g_i} \lambda_j \mu_k) g_i$

Estas operaciones dan a $\mathbb{Z}[G]$ estructura de anillo.

Teorema 4.2. *Sea Λ un anillo con 1_Λ, G un grupo con identidad 1 y $\varphi\colon G \to \Lambda$ una función tal que $\varphi(1) = 1_\Lambda$ y $\varphi(g_i g_j) = \varphi(g_i)\varphi(g_j)$. Entonces existe un homomorfismo de anillos único $\psi\colon \mathbb{Z}[G] \to \Lambda$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{Z}[G] \arrow[d, "\psi"] \\ & \Lambda, \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión.

Demostración. Definimos $\psi(\sum_{i\in I} \lambda_i g_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(g_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $g_i \in G$. Este homomorfismo es único y por construcción hace conmutar el diagrama. □

Consideremos la función trivial φ de un grupo G en los enteros $\mathbb{Z}$ que manda cualquier elemento $g \in G$ en $1 \in \mathbb{Z}$. Por el Teorema 4.2, φ da lugar a un homomorfismo único de anillos $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ y tenemos la siguiente definición.

Definición 4.3. Denotaremos por $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ al homomorfismo arriba mencionado el cual se llama *homomorfismo de aumentación.*

Definición 4.4. El núcleo del homomorfismo $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ se llama *ideal de aumentación* de G y lo denotaremos con IG.

Proposición 4.5. *Los elementos $\{g - 1 : g \in G\}$ forman una base para IG.*

Demostración. Observemos que los elementos de la forma $g - 1$ para $g \in G$ están en IG. Ahora sea $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i$ un elemento de IG, entonces $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i = \sum_{i\in I} \lambda_i g_i - \sum_{i\in I} \lambda_i = \sum_{i\in I} \lambda_i (g_i - 1)$. □

Definición 4.6. Sea $(M, +)$ un grupo abeliano y G un grupo. Diremos que M es un *G-módulo izquierdo* si existe $\kappa\colon G \times M \to M$ dado por $\kappa(g, x) = gx$, tal que

i. $1x = x$
ii. $(gg')x = g(g'x)$; para todas $g, g' \in G$ y $x \in M$
iii. $g(x_1 + x_2) = gx_1 + gx_2$ para todas $g \in G$ y $x_1, x_2 \in M$.

Es decir, G opera en el grupo abeliano M por la izquierda. La función κ se llama *acción* de G en M. De otra manera, podemos decir que un G-módulo M consiste de un grupo abeliano M junto con un homomorfismo

$$\kappa\colon G \to \mathrm{Aut}(M),$$

dado por asociar a $g \in G$ el automorfismo $\varphi_g(x) = gx$ que viene de la acción de G en M. Aquí $\mathrm{Aut}(M)$ es el grupo de isomorfismos de M es sí mismo.

DEFINICIÓN 4.7. Sea M un grupo abeliano aditivo y G un grupo (multiplicativo). Diremos que M es un *G-módulo trivial* si $gx = x$ para toda $g \in G$ y $x \in M$.

EJEMPLO 4.8. Claramente $\mathbb{Z}$ es un G-módulo trivial al definir $gz = z$ para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Sea M un G-módulo, entonces por el Teorema 4.2 $\kappa\colon G \to \mathrm{Aut} \subset \mathrm{End}(M)$ determina un homomorfismo único de anillos $\psi\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathrm{End}(M)$ que le da a M estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo como en la Nota 2.4. Ahora bien, si M tiene estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo a través de un homomorfismo $\psi'\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathrm{End}(M)$, como cualquier homomorfismo de anillos envía elementos invertibles en elementos invertibles, ψ tiene su imagen en $\mathrm{Aut}(M)$. Entonces le podemos dar a M estructura de G-módulo mediante la composición de la inclusión $i\colon G \to \mathbb{Z}[G]$ con ψ'. Así, hablaremos indistintamente de un $\mathbb{Z}[G]$-módulo M o de un G-módulo M.

EJEMPLO 4.9. $\mathbb{Z}[G]$ es claramente un $\mathbb{Z}[G]$-módulo.

Es claro que, al igual que los Λ-módulos, los G-módulos son una categoría cuyos morfismos son los homomorfismos de G-módulos a la que llamaremos **MG**.

Tenemos que $\mathbb{Z}(\cdot)\colon$ **Grp** $\to$ **An** es un funtor, que asocia a cada grupo G el anillo $\mathbb{Z}[G]$ y a cada morfismo $f\colon G \to H$ de grupos el morfismo inducido $\mathbb{Z}[f]\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[H]$ definido como $\mathbb{Z}[f](\sum \lambda_i g_i) = \sum \lambda_i f(g_i)$.

DEFINICIÓN 4.10. Una resolución proyectiva donde cada elemento de la cadena es un G-módulo proyectivo es llamada *G-resolución proyectiva.*

4.2. Homología de Grupos Consideremos el anillo entero $\mathbb{Z}[G]$ de un grupo G, $P_{\mathbb{Z}}$ una G-resolución proyectiva reducida del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ y N un G-módulo izquierdo. Entones se tiene

$$P_{\mathbb{Z}} : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

y consideremos $P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$:

$$P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N : \cdots \longrightarrow P_n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow 0$$

que es un complejo de cadenas (ver Definición 3.19) y, por lo tanto, podemos tomar $H_n(P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N)$ y por la Definición 3.20,

$$H_n(P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N) = \mathbf{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N)$$

DEFINICIÓN 4.11. El grupo de homología de grado n de un grupo G con coeficientes en un G-módulo N es

$$H_n(G, N) = \mathbf{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N).$$

4.3. Resolución canónica Observemos que por el Teorema 3.18, la homología de un grupo no depende de la resolucón proyectiva ya que la homología sólo depende de la clase de homotopía del complejo de cadenas. Daremos ahora una resolución proyectiva reducida de $\mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 4.12. *Sea G un grupo, consideremos $\mathbb{Z}[G^{i+1}]$, tenemos que*

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^{n+1}] \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{d_0} 0$$

es una $\mathbb{Z}$-resolución libre reducida del $\mathbb{Z}$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ donde

$$d_i(g_0, \cdots, g_i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j (g_0, \cdots, \hat{g}_j, \cdots, g_i)$$

y $\hat{g}_j$ significa que g_j ha sido omitido. El homomorfismo de aumentación $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ está dado por $g \mapsto 1$.

Para mas detalles consultar "Homología de Grupos" en [**21**] y [**25**].

Para calcular la homología de un grupo G, nos gustaría ver a esta $\mathbb{Z}$-resolución como una $\mathbb{Z}[G]$-resolución proyectiva, para esto, introduciremos la *notación barra*, dada por las siguientes formulas:

$$\begin{aligned} [g_1|g_2|\cdots|g_n] &= (1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1g_2\cdots g_n) \\ (g_0, g_1, \cdots, g_n) &= g_0[g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n] \end{aligned}$$

Ahora bien, G actúa en los generadores de $\mathbb{Z}[G^{n+1}]$ como $g(g_0, g_1, \cdots, g_n) = (gg_0, gg_1, \cdots, gg_n)$, por lo que podemos tomar el espacio de órbitas $\mathbb{Z}[G^{n+1}]/G$, el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}[G^n]$, la acción de G le da estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre en base

$$(1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1g_2\cdots g_n)$$

o utilizando la notación barra en generadores $[g_1|g_2|\cdots|g_n]$. Si $n = 0$ el único elemento de la base se denota como $[\ ]$.

Definimos $\partial_n\colon \mathbb{Z}[G^{n+1}] \to \mathbb{Z}[G^n]$ como

$$\partial_n = \sum_{i}^{n} (-1)^i d_i$$

donde d_i es el $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo dado por

$$d_i[g_1|\cdots|g_i] = \begin{cases} g_1[g_2|\cdots|g_i] & \text{si } i = 0 \\ [g_1|\cdots|g_{j-1}|g_jg_{j+1}|g_{j+2}\cdots|g_i] & \text{si } 0 < j < i \\ [g_1|\cdots|g_{i-1}] & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Observemos que este $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo d_i es el $\mathbb{Z}$-homomorfismo d_i de la Proposición 4.12 pero expresado en términos de la notación barra.

DEFINICIÓN 4.13. La $\mathbb{Z}[G]$-resolución proyectiva reducida de la Proposición 4.12 se llama la $\mathbb{Z}$-*resolución canónica* de $\mathbb{Z}$, donde los $\mathbb{Z}[G^i]$ tienen estructura de $\mathbb{Z}[G]$-módulos.

NOTA 4.14. Si consideramos la resolución canónica de $\mathbb{Z}$:

$$P_{\mathbb{Z}} : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^n] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow 0.$$

y dado un G-módulo izquierdo N obtenemos

$$P_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N : \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^n] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow 0,$$

podemos definir la homología del grupo G como la homología del complejo de cadenas anterior.

NOTA 4.15. Veamos a la homología de grupos en terminos de la Nota 3.12: sea G un objeto el la categoría **Grp** y N un $\mathbb{Z}[G]$-módulo izquierdo, la homología del grupo G está dada por la composición de los funtores: nervio $\mathbf{N}$ del Ejemplo 1.61, $L_{\mathbb{Z}[\mathbb{G}]}(\cdot)$ de la Nota 2.30, $(\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ de la Proposición 2.41, $C_*(\cdot)$ de la Nota 3.12 y $H_n(\cdot)$ de la Nota 3.6. Es decir, primero $\mathbf{N}$ asocia al grupo G el conjunto simplicial $\mathbf{N}\,G(\underline{n}) = G^n$, luego tomamos el $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre $L_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{N}\,G(\underline{n})) = \mathbb{Z}[G^n]$, y posteriormente el producto tensorial $L_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{N}\,G(\underline{n})) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N = \mathbb{Z}[G^n] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$, que es un objeto en la categoría $\mathbf{S}\,\mathbf{Mod}(\mathbb{Z}[G])$, al cual asociamos mediante $C_*(\cdot)$ el complejo de cadenas

$$\{L_{\mathbb{Z}}(\mathbf{N}\,G(\underline{n})) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N, \partial_n\} = \{\mathbb{Z}[G^n], \partial_n\},$$

que es precisamente el complejo de cadenas de la Nota 4.14 que define la homología del grupo G. Por lo tanto la homología de dicho complejo es la homología del grupo G.

DEFINICIÓN 4.16. Sea G un grupo y N un G-módulo. El *grupo de coinvariantes* de N, denotado con N_G, es el cociente de N por el subgrupo aditivo generado por los elementos de la forma $gy - y$, $g \in G$, $y \in N$. Es decir, $N_G = N/T$, donde T es el generado por los elementos $gy - y$.

TEOREMA 4.17. *Sea G un grupo y N un G-módulo. Entonces*

$$H_0(G, N) = N_G.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición, $H_0(G, N) = \mathbf{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$. Por otro lado, como $gy - y = (g - 1)y$ y los elementos $(g - 1) \in \mathbb{Z}[G]$ generan a IG (ver Proposición 4.5). Escribiremos $T = (IG)N$. Si aplicamos el funtor $(\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow IG \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$IG \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \longrightarrow 0$$

(Ver Definición 3.20).

Por lo que $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong N$ y, bajo este isomorfismo, $\mathrm{Im}(IG \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N)$ va a $(IG)N$. Entonces, $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N \cong N/((IG)N) = N/T = N_G$. Por lo tanto $H_0(G, N) = N_G$ □

DEFINICIÓN 4.18. Sea G un grupo, el subgrupo generado por los elementos de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$, con $g, h \in G$, se llama *subgrupo conmutador* de G y lo denotaremos por $[G, G]$.

LEMA 4.19. *Sea G un grupo, IG su ideal de aumentación. Entonces el grupo aditivo $IG/(IG)^2$ es isomorfo al grupo multiplicativo $G/[G, G]$.*

Para su demostración ver [**15**, Lema IV.3.1].

DEFINICIÓN 4.20. Una *presentación proyectiva* de M es una sucesión exacta corta de Λ-módulos

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Tal que P es proyectivo.

TEOREMA 4.21. $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición $H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbf{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Consideremos la presentación proyectiva de $\mathbb{Z}$

$$IG \rightarrowtail \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\ .$$

Apliquemos el funtor $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (\cdot)$ y obtenemos por el Teorema 3.23, la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \mathbf{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, IG) \longrightarrow \mathbf{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) \longrightarrow \mathbf{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\kappa}$$

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{Z}[G]$ es proyectivo, $H_0(G, \mathbb{Z}[G]) = \mathbf{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) = 0$ (ver Proposición 3.22) y como $\mathbb{Z}$ es un G-módulo trivial,

$$H_0(G, \mathbb{Z}[G]) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}$$

y

$$H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbf{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

ya que $z \otimes h = h^{-1}z \otimes 1 = z_1 \otimes 1$. Así el homomorfismo

$$\varphi_{0_*} \colon H_0(G, \mathbb{Z}[G]) \to H_0(G, \mathbb{Z})$$

es sobreyectivo y, por lo tanto, $\varphi_{o*} \neq 0$. Además, cualquier endomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es, o monomorfismo o trivial. Pero como el inducido φ_{0*} es diferente de 0, es monomorfismo. Ahora, tenemos que $\mathrm{Im}\, \varphi_1 = \ker \varphi_0 = 0$ por lo que $\mathrm{Im}\, \kappa = \ker \varphi_1 = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG$. Así,

$$\kappa_0 \colon \mathbf{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathbf{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, IG) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} IG$$

es un isomorfismo. Pero por el Teorema 4.17 y el lema anterior,

$$H_1(G,\mathbb{Z}) \cong H_0(G, IG) = (IG)_G = IG/(IG)(IG) \cong G/[G,G].$$

$\square$

4.4. Extensiones centrales

Definición 4.22. Una *extensión central* de un grupo G es una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

tal que $K \subset Z(E)$, donde $Z(E)$ es el centro de E.

Definición 4.23. Dos extensiones centrales

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

y

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

son *equivalentes* si existe un isomorfismo $\psi\colon E \to E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & K \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Definición 4.24. Una *extensión universal* de un grupo G es una extensión central

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

tal que, dada cualquier extensión central

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

existe un único homomorfismo $h\colon U \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d, "h"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & K \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Notemos que si existe una extensión central universal, ésta es única salvo isomorfismo.

Definición 4.25. Diremos que un grupo es *perfecto* si $G = [G,G]$ donde $[G,G]$ es el subgrupo conmutador de G.

Enunciaremos el siguiente resultado sin demostración, para ello ver [**15**, VI.4.3] .

Lema 4.26. *Sea G un grupo perfecto y escojamos un homomorfismo sobre $F \twoheadrightarrow G$ donde F es un grupo libre. Sea $R = \ker(F \twoheadrightarrow G)$, entonces*

$$H_2(G,\mathbb{Z}) \cong R \cap [F,F]/[R,F],$$

donde $[R,F]$ es el subgrupo generado por los elementos de la forma $rfr^{-1}f^{-1}$ con $r \in R$ y $f \in F$.

Definición 4.27. Una extensión central

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

es trivial si se escinde o, en otras palabras, si $E \cong K \times G$.

Teorema 4.28. *Una extensión central*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

es universal si y sólo si U es perfecto y toda extensión central de U es trivial.

Para su demostración ver [**21**, Tma. 4.1.3]. Veamos ahora que para un grupo perfecto G podemos encontrar una extensión central universal

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Para ello tenemos el siguiente lema:

Lema 4.29. *Si*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

y

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

son extensiones centrales y U es perfecto, hay a lo sumo un homomorfismo $f\colon U \to E$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1. \\
1 \arrow[r] & K \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Para su demostración ver [**25**, Lema 6.9.6].

Teorema 4.30. *Sea G un grupo perfecto, entonces G tiene una extensión universal de la forma*

$$1 \longrightarrow H_2(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Demostración. Escojamos un homomorfismo sobre $F \twoheadrightarrow G$ donde F es un grupo libre. Sea $R = \ker(F \twoheadrightarrow G)$. Entonces R es un subgrupo normal de F lo que implica que $[R,F]$ es un subgrupo normal de F, ya que, dado $x \in F$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
x(rfr^{-1}f^{-1})x^{-1} &= xr(x^{-1}x)f(xx^{-1})r^{-1}(xx^{-1})f^{-1}x^{-1} \\
&= (xrx^{-1})xfx(x^{-1}r^{-1}x)x^{-1}f^{-1}x^{-1} \\
&= r_1f_1r_1^{-1}f_1^{-1},
\end{aligned}$$

donde $r_1 = xrx^{-1} \in R$ y $f_1 = xfx \in F$. Como $G \cong F/R$, existe un epimorfismo $\psi' \colon F/[R,F] \to G$ tal que $\ker\psi' \subset Z(F/[R,F])$, como se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, leftrightarrow, "\cong"] & & F/R \\ & F/[R,F] \arrow[ul, dashed, "\psi'"] \arrow[ur, two heads, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

donde ϕ es la proyección natural. En efecto, ya que, dado $x \in F$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi(x[R,F]) = 1 &\iff xR = R \\ &\iff x \in R. \end{aligned}$$

por lo que si $x[R,F] \in \ker\phi$, entonces para cualquier $a \in F$ se tiene que $xax^{-1}a^{-1} \in [R,F]$ y así $xa[R,F] = ax[R,F]$, es decir $\ker\phi = \ker\psi' \subset Z(F/[R,F])$.

Observemos que $x[R,F]y[R,F]x^{-1}[R,F]y^{-1}[R,F] = xyx^{-1}y^{-1}[R,F]$, por lo que

$$[F/[R,F], F/[R,F]] = [F,F]/[R,F].$$

Ahora bien si G es perfecto, tenemos un homomorfismo sobre de $[F,F]$ en G y por lo tanto un homomorfismo sobreyectivo $\psi \colon [F,F]/[R,F]$ cuyo núcleo es $R \cap [F,F]/[R,F]$. De esta manera tenemos una extensión central de G:

$$1 \longrightarrow \ker\psi \longrightarrow [F,F]/[R,F] \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 1\ .$$

Veamos que esta extensión es universal. Sea

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

cualquier otra extensión central de G. Como F es libre, existe un homomorfismo $h \colon F \to U$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h"'] & G \arrow[d, equal] \\ U \arrow[r, "\varphi'"] & G. \end{tikzcd}$$

Dado $rfr^{-1}f^{-1} \in [R,F]$ se tiene que $\varphi(rfr^{-1}f^{-1}) = 1$, por lo que

$$\varphi'(h(rfr^{-1}f^{-1})) = \varphi(rfr^{-1}f^{-1}) = 1$$

es decir, $h(rfr^{-1}f^{-1})$ viene de N y como

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

es una extensión central,

$$h(rfr^{-1}f^{-1}) = h(r)h(f)h(r^{-1})h(f^{-1}) = h(r)h(r^{-1})h(f)h(f^{-1}) = 1$$

ya que los elementos de N conmutan con los de U, por lo tanto $h([R,F]) = 1$. Luego, h induce un homomorfismo de $F/[R,F] \to U$ y, si lo restringimos a $[F,F]/[R,F]$, tendremos un homomorfismo de $[F,F]/[R,F] \to U$.

El grupo $[F,F]/[R,F]$ es perfecto ya que tanto $[F,F]$ como F se aplican de manera sobreyectiva en G, los elementos $x \in F$ pueden ser escritos como $x = x'r$ con $x' \in [F,F]$ y $r \in R$: en efecto, la imagen de x en G es un conmutador $g = [g_1, g_2]$ el cual viene de un conmutador $[f_1, f_2] \in [F,F]$, entonces como ambos van a dar al mismo g, entonces $x = [f_1, f_2]r$. Escribiendo $y \in F$ como $y's$ con $y' \in [F,F]$ y $s \in R$, en $F/[R,F]$ tenemos que

$$[x,y] = (x'r)(y's)(x'r)^{-1}(y's)^{-1} = [x', y'].$$

Entonces los generadores de $[F,F]/[R,F]$ son un conmutador de elementos x' y y' en $[F,F]/[R,F]$.

De esta manera el homomorfismo h es único tal que el siguiente diagrama conmuta (ver Lema 4.29):

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \ker\psi \arrow[r] \arrow[d] & {[F,F]/[R,F]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & U \arrow[r] & G \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto,

$$1 \longrightarrow \ker\psi \longrightarrow [F,F]/[R,F] \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 1$$

es una extensión central universal de G.

Por otro lado, $\ker\psi$ es $R \cap [F,F]/[R,F]$ y por el Lema 4.26, $\ker\psi = H_2(G,\mathbb{Z})$. Entonces $H_2(G,\mathbb{Z})$ es el núcleo de la extensión central universal

$$1 \longrightarrow H_2(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow [F,F]/[R,F] \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

$\square$

CAPÍTULO II

PRELIMINARES TOPOLÓGICOS

En este capítulo veremos los conceptos topológicos necesarios para la construcción "+" y la construcción "Q" de Quillen.

Estudiaremos dichos conceptos desde el punto de vista de la terminología de las categorías introducida en el capítulo I.

En particular veremos dos funtores de la Topología Algebraica, el funtor homotopía y el funtor homología. Éste último es un caso particular de la homología de complejos de cadenas. Mencionaremos dos resultados importantes: los teoremas de Whitehead y Hurewicz, necesarios para le demostración del teorema de Quillen (ver Teorema IV.1.1). Para finalizar, definiremos el espacio clasificante de un grupo y estudiaremos su homología como espacio topológico y la compararemos con la homología de grupos, ¡es la misma!.

1. Complejos CW

En esta sección estudiaremos espacios topológicos importantes en el desarrollo de la Topología Algebraica, los complejos CW. Estos espacios tienen propiedades que los hacen fáciles de manejar desde el punto de vista de la Topología Algebraica, y que muchos espacios poseen.

DEFINICIÓN 1.1. Veamos la siguiente construcción de espacios topológicos a los cuales llamaremos *complejos CW*,

I. Comencemos con un conjunto discreto de puntos X^0 llamados *0-celdas*, X^0 se llama el *0-esqueleto*.

II. Inductivamente formemos el *n-esqueleto* X^n a partir del X^{n-1} adjuntándole discos $\mathbb{D}^n$ de dimensión n usando aplicaciones
$$\varphi_\alpha \colon \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n \to X^{n-1}.$$
Esto significa que X^n es el espacio cociente de la unión disjunta $X^{n-1} \amalg_\alpha \mathbb{D}^n_\alpha$ de X^{n-1} y una colección de discos $\mathbb{D}^n_\alpha$ bajo las identificaciones $x \sim \varphi_\alpha(x)$ con $x \in \partial\mathbb{D}^n_\alpha$. Las aplicaciones φ_α se llaman *aplicaciones de adjunción*.

Al interior del disco $\mathbb{D}^n$ lo llamaremos *celda* de dimensión n y lo denotaremos con e^n.

III. Podemos detener este proceso inductivo en una etapa finita haciendo $X = X^n$ para alguna $n < \infty$ o podemos continuar indefinidamente haciendo $X = \bigcup_{n=0}^{\infty}(X^n)$.

Un complejo CW es un espacio topológico, cuya topología es la topología débil, es decir, $U \subset X$ es un abierto si $U \cap X^n$ es abierto en cada n-esqueleto X^n para todo n.

Si $X = X^n$ diremos que X es de dimensión finita y n es la dimensión de X, la dimensión máxima de celdas de X.

Ejemplo 1.2. Un complejo CW de dimensión 1 es una gráfica. Las gráficas constan de vértices (0-esqueleto) y aristas (1-esqueleto). Un 1-disco $\mathbb{D}^1$ puede adjuntarse mediante una aplicación constante por lo que la gráfica puede tener lazos.

Ejemplo 1.3. La esfera $\mathbb{S}^n$ tiene estructura de complejo CW con sólo dos celdas e^0 y e^n. La n-celda se adjunta con la aplicación constante $\mathbb{S}^{n-1} \to e^0$. Esto es equivalente a ver $\mathbb{S}^n$ como el cociente $\mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n$.

Ejemplo 1.4. El *plano proyectivo* $\mathbb{RP}^n$ es definido como el espacio de todas las rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$. Cada recta pasa por un par de puntos antípodas en la esfera $\mathbb{S}^n$ que la representan de manera única. Así que podemos ver a $\mathbb{RP}^n$ como la esfera $\mathbb{S}^n$ con puntos antípodas identificados, es decir, como el cociente $\mathbb{S}^n/(s \sim -s)$. Esto es equivalente a decir que $\mathbb{RP}^n$ es el cociente de un hemisferio $\mathbb{D}^n$ con los puntos antípodas de su frontera $\partial\mathbb{D}^n$ identificados. Ya que $\partial\mathbb{D}^n$ con puntos antípodas identificados es $\mathbb{RP}^{n-1}$, podemos ver que $\mathbb{RP}^n$ es obtenido de $\mathbb{RP}^{n-1}$ agregando una celda de dimensión n con la aplicación cociente $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ como aplicación de adjunción.

Se sigue por inducción que $\mathbb{RP}^n$ tiene una estructura de complejo CW $e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$ con una celda e^i en cada dimensión $i \leq n$.

Definición 1.5. Sea X un complejo CW. Un *subcomplejo* de X es un subespacio cerrado $A \subset X$ que es la unión de celdas de X.

Ya que A es cerrado, la aplicación de adjunción de cada celda de A tiene su imagen contenida en A, en particular cada celda de A tiene su imagen contenida en A, así A es un complejo CW por sí mismo.

Definición 1.6. Una pareja (X, A) donde X es complejo CW y A es un subcomplejo es llamada *pareja CW.*

Definición 1.7. Una aplicación $f\colon X \to Y$ entre complejos CW que satisface $f(X^n) \subset Y^n$ para cada n, es llamada *aplicación celular.*

Teorema 1.8. *Toda aplicación $f\colon X \to Y$ de complejos CW es homotópica a una aplicación celular. Si f es ya una aplicación celular en un subcomplejo $A \subset X$ la homotopía puede ser tomada estacionaria en A.*

Para su demostración ver [**9**, Tma. 4.8].

Toda aplicación $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ de parejas CW puede ser deformada a una aplicación celular, esto se sigue del teorema ya que primero se deforma la restricción $f\colon A \to B$ a una celular y luego se extiende esta homotopía a una homotopía de f en todo X.

2. Homología Singular

Ahora veamos el funtor homología, con una definición "difícil" de comprender en comparación con el grupo fundamental $\pi_1(X)$, pero que es más "fácil" de calcular y que vino a revolucionar a las matemáticas a principios del siglo XX.

Terminamos la Subsección I.3.1 diciendo que podíamos calcular la homología de los objetos de una categoría. Veamos ahora la Homología Singular de un espacio topológico. Nuevamente, la Homología Singular es para dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo saber si dos espacios topológicos son homeomorfos o no? La respuesta a esta pregunta se encuentra en muchas ocasiones comparando los grupos de homología de los espacios en cuestión.

Sea X un espacio topológico y sea $C_n(X) = L_{\mathbb{Z}}(S_n(X))$ el grupo abeliano libre con base en el conjunto de n-simplejos singulares en X (ver Ejemplo I.1.57 y la Nota I.2.30). Un elemento $\sigma \in C_n(X)$ es llamado una *n-cadena singular* y consiste de sumas formales

$$\sum n_i \sigma_i; \qquad n_i \in \mathbb{Z}, \qquad \sigma_i \colon \Delta^n \to X\ .$$

Definimos $\partial_n \colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, como

$$\partial_n(\sigma) = \sum (-1)^i \sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_n]}$$

donde $\hat{v}_n$ significa que hemos prescindido del vértice v_n.

Observemos que al quitar el vértice v_n obtenemos un $(n-1)$-simplejo Δ^{n-1} con el orden de los vértices inducido por el n-simplejo, por lo que podemos ver a $\sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_n]}$ como una aplicación continua $\Delta^{n-1} \to X$ es decir, como un $(n-1)$-simplejo singular.

Lema 2.1. *La composición $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$.*

Demostración. Como $\partial_n(\sigma) = \sum (-1)^i \sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_n]}$ y así

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} \circ \partial_n(\sigma) &= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_n]} \\ &+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,v_n]} \end{aligned}$$

Los términos en los dos sumandos son los mismos y se cancelan unos con otros pues los de la segunda suma son negativos de los primeros. Así $\partial_{n+1} \circ \partial_n(\sigma) = 0$. □

Definición 2.2. Por lo anterior $\{C_n(X), \partial_n\}$ es un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}$-módulos al que denotaremos por $C_*(X)$ y lo llamaremos el *complejo de cadenas singular* de X.

La condición $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$ implica que $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$, por lo que tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.3. Definimos el n-ésimo grupo de *homología singular* del espacio topológico X, como el cociente:

$$H_n(X) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

para toda $n \geq 0$.

Una aplicación continua $f\colon X \to Y$ de espacios topológicos induce un homomorfismo de grupos abelianos libres $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ dada en los generadores por $C_n(f)(\sigma) = f \circ \sigma$:

$$\Delta_n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y \ .$$

Más aún, si $C_*(X) = \{C_n(X), \partial_n\}$ y $C_*(Y) = \{C_n(Y), \partial'_n\}\}$ son complejos de cadenas, entonces una aplicación $f\colon X \to Y$ induce un morfismo de complejos de cadenas

$$C_*(f)\colon C_*(X) \to C_*(Y),$$

pues en los generadores ocurre que

$$\begin{array}{rcl} \partial'_n(C_n(f)(\sigma)) & = & \partial'_n(f \circ \sigma) \\ & = & \sum (-1)^i (f \circ \sigma)|_{[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_n]} \\ & = & f \left(\sum (-1)^i (\sigma)|_{[v_0, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_n]} \right) \\ & = & f \circ (\partial_n(\sigma)) \\ & = & C_{n-1}(f)(\partial_n(\sigma)). \end{array}$$

Lo cual es suficiente para ver que $C_*(f)$ sea un morfismo de cadenas.

PROPOSICIÓN 2.4. *Las aplicaciónes $C_n(\cdot)$ para todo n satisfacen:*

I. *Si $1_X\colon X \to X$ es la identidad en X, entonces*

$$C_n(1_X) = 1_{C_n(X)}$$

II. *si $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ son aplicaciones continuas entre espacios topológicos, entonces $C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es inmediata.
Ahora bien, sea $\sigma \in C_n$ cualquiera, entonces

$$\begin{array}{rcl} C_n(g \circ f)(\sigma) & = & (g \circ f) \circ \sigma \\ & = & g \circ (f \circ \sigma) \\ & = & C_n(g)(f \circ \sigma) \\ & = & (C_n(g) \circ C_n(f))(\sigma). \end{array}$$

□

Lo anterior se puede ver con más generalidad desde el punto de vista de las categorías:

Recordemos que en el Ejemplo 1.58 tenemos un funtor $S_*\colon$ **Top** $\to$ **S Conj**, que asocia a cada espacio topológico X un conjunto simplicial

$S_{(\cdot)}(X)\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ y a cada función continua entre espacios topológicos, una transformación natural entre conjuntos simpliciales $S_*(\phi)\colon S_{(\cdot)}(X) \to S_{(\cdot)}(Y)$.

Construyamos un *grupo abeliano simplicial* mediante la siguiete composición:

$$C_{(\cdot)}(X)\colon \Delta^{op} \xrightarrow{S_{(\cdot)}(X)} \mathbf{Top} \xrightarrow{L_{\mathbb{Z}}} \mathbf{Ab},$$

es decir, $C_{(\underline{n})}(X) = L_{\mathbb{Z}}(S_{(\underline{n})}(X))$, o más preciso $C_{(\underline{n})}(X)$ es el grupo abeliano libre con generadores en $S_{(\underline{n})}(X)$ (ver Nota I.2.30). Si denotamos por $\mathbf{S\,Ab}$ a la categoría de grupos abelianos simpliciales, entonces por la Nota I.3.12, podemos asociar a $C_{(\cdot)}(X)$ un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}$-módulos (recordemos que todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo) aplicando el funtor $C_*\colon \mathbf{S\,Ab} \to \mathbf{CC}$. Este complejo de cadenas es precisamente el complejo de cadenas singular de X de la Definición 2.2.

Por lo anterior también podemos ver los grupos de homología de espacios topológicos como en la Definición I.3.5:

$$H_*(X) = \{H_n(C_*(X))\}.$$

Tenemos dos funtores $H_n\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ y $H_*\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{MG}(\mathbb{Z})$. Si X y Y son espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una aplicación continua, el primer funtor asocia a X el grupo abeliano $H_n(X)$ y a f el homomorfismo $H_n(f)\colon H_n(X) \to H_n(Y)$. Mientras que el segundo asocia a X el $\mathbb{Z}$-módulo graduado $H_*(X) = \{H_n(C_*(X))\}$ y f el morfismo de grado cero $H_*(f) = \{H_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

También tenemos homología singular para la categoría $\mathbf{Top}_R$ (Ver I.1.4).

Definición 2.5. Dada una pareja (X, A), definimos $C_n(X, A)$ por el cociente $C_n(X)/C_n(A)$, ya que la aplicación frontera manda $C_n(A)$ en $C_{n-1}(A)$, ésta induce una aplicación frontera $\partial\colon C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ que define el complejo de cadenas $\{C_n(X, A), \partial_n\}$.

Definición 2.6. La homología del complejo de cadenas $\{C_n(X, A), \partial_n\}$ definido arriba es llamado *homología singular relativa* y denotaremos los grupos de homología de dimensión n como $H_n(X, A)$.

Proposición 2.7. *La siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Demostración. La inclusión $i\colon C_n(A) \to C_n(X)$ y la proyección canónica de $j\colon C_n(X) \to C_n(X, A)$, inducen morfismos de complejos de cadenas en la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_*} C_n(X) \xrightarrow{j_*} C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

Entonces por el Teorema I.3.11, se tiene lo que se quería. □

PROPOSICIÓN 2.8. *Si X es un punto, $H_n(X) = 0$ para toda $n \geq 1$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN. En este caso existe un único n-simplejo σ_n para cada n, y $\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}$, una suma de $n+1$ términos, los cuales son 0 para n impar y σ_n para n par, $n \neq 0$. Entonces tenemos el siguiente complejo de cadenas:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

con aplicaciones frontera alternando isomorfismos y aplicaciones triviales, excepto en el último $\mathbb{Z}$. La homología singular para este complejo es trivial excepto para $H_0 = \mathbb{Z}$. □

TEOREMA 2.9. *Si dos aplicaciones $f, g\colon X \to Y$ son homotópicas, entonces los homomorfismos $H_n(f)$ y $H_n(g)$ son iguales en homología singular, para toda $n \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f y g son aplicaciones homotópicas entonces inducen morfismos en complejos de cadenas $C_*(f)$ y $C_*(g)$ homotópicos (ver [**9**, Tma. 2.2.10]). Por el Teorema 3.10 estos morfismos son iguales en homología. □

2.1. Homología con coeficientes locales.

DEFINICIÓN 2.10. Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Un espacio cubriente $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ con aplicación cubriente $p\colon \tilde{X} \to X$ es *normal* si $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ es normal en $\pi_1(X, x_0)$.

DEFINICIÓN 2.11. Una acción del grupo G en un espacio topológico X es *propiamente discontinua* si para todo $x \in X$, existe una vecindad U_x de x tal que $(g \cdot U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ si y sólo si $g = 1$.

PROPOSICIÓN 2.12. *Si G actúa de manera propiamente discontinua en un espacio Y, entonces*

I. *La aplicación cociente $p\colon Y \to Y/G$, $p(y) = yG$, donde Y/G es el espacio de órbitas de la acción y yG denota la órbita de y, es un espacio cubriente normal.*
II. *Si Y es arco conexo, entonces G es el grupo de transformaciones cubrientes del espacio cubriente $Y \to Y/G$.*
III. *Si Y es arco conexo y localmente arco conexo, entonces G es isomorfo a $\pi_1(Y/G)/p_*(\pi_1(Y))$.*

Para su demostración ver [**9**, Prop. 1.40].

Sea (X, x_0) espacio punteado arco conexo con cubriente universal $\tilde{X}$. El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ actúa en $\tilde{X}$ como sigue: sean $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ y $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Sea $\tilde{\gamma}$ el levantamiento de γ que empieza en $\tilde{x}$, dado que lazos homotópicos se levantan a caminos homotópicos podemos definir $[\gamma] \cdot \tilde{x} = \tilde{\gamma}(1)$.

Entonces la acción está dada por $\tilde{x} \mapsto [\gamma] \cdot \tilde{x}$. Esta acción es libre y propiamente discontinua, $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo de transformaciones cubrientes y por lo tanto $X \cong \tilde{X}/\pi_1(X, x_0)$ (ver por ejemplo [**9**, Sección 1.3, Capítulo 1]).

La acción de $\pi_1(X, x_0)$ en $\tilde{X}$ induce una acción de $\pi_1(X, x_0)$ en el grupo $C_n(\tilde{X})$ de n-cadenas singulares en $\tilde{X}$ para toda $n \geq 0$, dada por mandar un n-simplejo $\sigma \colon \Delta^n \to \tilde{X}$ a la composición

$$\Delta \xrightarrow{\sigma} \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \tilde{X} \cdot$$

En adelante denotaremos al anillo entero $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ como $\mathbb{Z}[\pi_1]$.

Se tiene que:

I. La acción de $\pi_1(X, x_0)$ en $C_n(\tilde{X})$ le da estructura de $\mathbb{Z}[\pi_1]$-módulo.

II. Si M es un módulo arbitrario sobre $\mathbb{Z}[\pi_1]$, definimos $C_n(X, M)$ como $C_n(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1]} M$, estos grupos forman un complejo de cadenas con aplicaciones frontera $\partial_n \otimes 1_M$, ya que

$$\partial_{n+1} \otimes 1_M \circ \partial_n \otimes 1_M = \partial_{n+1} \circ \partial_n \otimes 1_M = 0 \otimes 1 = 0$$

Definición 2.13. A los grupos de homología $H_n(X, M)$ del complejo de cadenas antes mencionado los llamaremos *grupos de homología con coeficientes locales.*

3. Homotopía

Construiremos un funtor más entre $\mathbf{Top}_*$ y $\mathbf{Grp}$, que al igual que el de homología ha trascendido en las matemáticas por sus múltiples aplicaciones, el funtor homotopía $\pi_n(\cdot)$. Este funtor es la generalización del grupo fundamental introducido por Poincaré, la gran sorpresa es que para $n \geq 2$, $\pi_n(X)$ es un grupo abeliano, lo cual no necesariamente pasa con $\pi_1(X)$.

Uno de los objetivos de esta sección, es estudiar los teoremas de Whitehead y Hurewicz. Hurewicz encontró una muy bonita relación entre los grupos de homotopía y homología de un espacio topológico que tiene aplicaciones en la clasificación de variedades y en el cálculo de homología y homotopía.

En esta sección denotaremos al intervalo unitario con I, es decir, $I = [0, 1]$.

Definición 3.1. El *cilindro de una aplicación* $f \colon X \to Y$ es el cociente M_f de la unión disjunta de $X \times I$ y Y bajo las identificaciones $(x, 1) \sim f(x)$.

Definición 3.2. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios punteados, definimos el *producto cuña* $X \vee Y$ como el cociente

$$(X \amalg Y)/x_0 \sim y_0.$$

El producto cuña de parejas punteadas se define como el producto cuña de sus espacios punteados asociados, es decir, $(X, A) \vee (Y, B) = (X \vee Y, A \vee B)$.

Análogo a la definición de $\pi_1(X, x_0)$ como el conjunto de clases homotopía de aplicaciones $(\mathbb{S}^1, s_0) \to (X, x_0)$, definimos $\pi_n(X, A, x_0)$ como sigue.

DEFINICIÓN 3.3. Si $n > 1$, el n-ésimo *grupo de homotopía relativo*, $\pi_n(X, A, x_0)$ de la pareja punteada (X, A, x_0) es el conjunto de clases de homotopía $[\alpha]$ de aplicaciones de parejas punteadas $\alpha\colon (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$. El producto de dos clases de homotopía está definida por la clase de homotopía de la composición

$$\alpha * \alpha'\colon (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \xrightarrow{c} (\mathbb{D}^n \vee \mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \xrightarrow{\alpha\vee\alpha'} (X, A, x_0)$$

donde c colapsa el diámetro geométrico $\mathbb{D}^{n-1}$ de $\mathbb{D}^n$ a un punto s_0 y

$$(\alpha \vee \alpha')(s) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{si } s \text{ viene del hemisferio norte de } \mathbb{D}^n, \\ \alpha'(s) & \text{si } s \text{ viene del hemisferio sur de } \mathbb{D}^n, \\ \alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = x_0. \end{cases}$$

Sean $[\alpha], [\alpha'] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Denotaremos por $[\alpha * \alpha']$ a la operación en $\pi_n(X, A, x_0)$.

Observemos que podemos definir $\pi_1(X, A, x_0)$ pero no es un grupo. Si consideramos espacios puntados entonces tenemos el n-ésimo grupo de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ del espacio punteado (X, x_0), por lo que $\pi_1(X, x_0)$ es un caso particular de esta definición.

PROPOSICIÓN 3.4. *El grupo $\pi_n(X, A, x_0)$ es abeliano para $n \geq 3$ y el grupo $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano para $n \geq 2$.*

Para su demostración ver [**9**, Pag. 341]

Una aplicación $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$, induce un homomorfismo de grupos

$$\pi_n(f)\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, x_0)$$

dado por $\pi_n(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Primero probaremos que $\pi_n(f)$ está bien definido, para ello sean α y α' representantes de la misma clase en $\pi_n(X, A, x_0)$. Sea $F\colon \mathbb{S}^n \times I \to X$ una homotopía entre α y α', entonces es claro que $f \circ F$ es una homotopía que hace $[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha']$.

Ahora probemos que $\pi_n(f)$ es un homomorfismo: Si consideramos $s \in \mathbb{S}^n$, entonces

$$f([\alpha * \alpha'])(s) = \begin{cases} f(\alpha(s)) & \text{si } s \text{ viene del hemisferio norte,} \\ f(\alpha'(s)) & \text{si } s \text{ viene del hemisferio sur,} \\ f(\alpha(s_0)) = f(\alpha'(s_0)) = f(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\pi_n(f)([\alpha][\alpha']) &= \pi_n(f)([\alpha * \alpha'])\\ &= f\circ(\alpha*\alpha')\\ &= [(f\circ\alpha)*(f\circ\alpha')]\\ &= [f\circ\alpha][f\circ\alpha]\\ &= \pi_n(f)([\alpha])\pi_n(f)(\alpha').\end{aligned}$$

Ahora bien, $\pi_n(\cdot)$ es un funtor de la categoría $\mathbf{Top}_{R_*}$ a la categoría **Grp** (o a la categoría de grupos abelianos si $n \geq 3$) ya que $\pi_n(\cdot)$ satisface las propiedades de un funtor:

I. si $1_X\colon X \to X$ es la identidad, entonces $\pi_n(1_X)(\alpha) = 1_X \circ \alpha = \alpha$ y
II. dadas $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ y $g\colon (Y, B, y_0) \to (Z, C, z_0)$ aplicaciones de parejas punteadas, entonces $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$. En efecto

$$\begin{aligned}\pi_n(g\circ f)(\alpha) &= (g\circ f)\circ\alpha\\ &= g\circ(f\circ\alpha)\\ &= \pi_n(g)(f\circ\alpha)\\ &= \pi_n(g)\circ\pi_n(f)\end{aligned}$$

Análogamente se tiene un funtor entre la categoría $\mathbf{Top}_*$ y la categoría **Grp**.

TEOREMA 3.5. *La siguiente sucesión es exacta:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial}$$

$$\xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

donde i_* y j_* son los homomorfismos inducidos por la inclusiones $A \hookrightarrow X$ y $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$ respectivamente, y ∂ es la aplicación que viene de restringir la aplicación $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ a $\mathbb{S}^{n-1}$. La aplicación ∂, es llamada la aplicación frontera *y es un homomorfismo para $n > 1$.*

Para su demostración ver [**9**, Tma. 4.3].

DEFINICIÓN 3.6. Un espacio X con punto base x_0 es llamado *n-conexo* si $\pi_i(X, x_0) = 0$ para $i \leq n$. 0-conexo es conexo por caminos y 1-conexo es simplemente conexo. En el caso relativo, diremos que una pareja (X, A) es n-conexa si $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para $i \leq n$, $i > 1$ y $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Supongamos que X es un espacio arco conexo y sean $x_0, x_1 \in X$. Entonces podemos dar un isomorfismo de $\pi_n(X, A, x_0)$ a $\pi_n(X, A, x_1)$ (Ver [**2**, Tma. 4.4.8]). Si X es además n-conexo, como n-conexo implica 0-conexo entonces el punto base es irrelevante y podemos abreviar la notación $\pi_n(X, A, x_0)$ escribiendo $\pi_n(X, A)$ o $\pi_n(X)$ en el caso de espacios punteados.

DEFINICIÓN 3.7. Una aplicación $f\colon X \to Y$ es llamada *equivalencia homotópica débil* si induce isomorfismos $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ para toda $n \geq 0$ y toda elección de x_0.

LEMA 3.8. *Sea (X, A) una pareja CW y sea (Y, B) alguna pareja con $B \neq \emptyset$. Para cada n tal que $X - A$ tiene celdas de dimensión n, supongamos que $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ para toda $y_0 \in B$. Entonces toda aplicación $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ es homotópica a una aplicación $X \to B$ relativa a A.*

Para su demostración ver [**9**, Lema. 4.6].

TEOREMA 3.9 (Whitehead). *Si una aplicación $f\colon X \to Y$ entre complejos CW conexos induce isomorfismos $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ para toda n, entonces f es una equivalencia homotópica. En el caso que f sea la inclusión de un subcomplejo $X \hookrightarrow Y$, X es un retracto por deformación de Y.*

DEMOSTRACIÓN. En el caso especial en el que f es la inclusión de un subcomplejo, consideremos la sucesión exacta de homotopía (ver el Teorema 3.15) de la pareja (Y, X). Ya que f induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía, los grupos relativos $\pi_n(Y, X)$ son cero. Aplicando el Lema 3.8 a la identidad $(Y, X) \to (Y, X)$ entonces tendremos un retracto por deformación de Y en X.

El caso general puede ser probado aplicando el cilindro de la aplicación f, M_f (ver Definición 3.1). El cilindro M_f contiene a $X = X \times \{0\}$ y a Y como subespacios. Es claro que M_f se retrae por deformación a Y. La aplicación f viene de la composición de la inclusión $X \to M_f$ con la retracción $M_f \to Y$. Ya que esta retracción es una equivalencia homotópica, es suficiente probar que M_f se puede retraer por deformación a X si f induce isomorfismos en los grupos de homotopía, o equivalentemente, si los grupos relativos $\pi_n(M_f, X)$ son todos cero.

Si la aplicación f es celular, tomando el n-esqueleto de X en el n-esqueleto de Y para toda n, entonces (M_f, X) es una pareja CW y por lo tanto el teorema queda demostrado por el caso particular en el primer párrafo de esta prueba. Si f no es celular, podemos aplicar el Teorema 1.8 por el cual tenemos que f es homotópica a una aplicación celular. $\square$

DEFINICIÓN 3.10. Pensando $\pi_n(X, A, x_0)$ para $n > 1$ como las clases de homotopía de aplicaciones $f\colon (\mathbb{D}^n, \partial\mathbb{D}^n, s_0) \to (X, A, X_0)$, podemos definir aplicaciones $h\colon \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ dadas por $h([f]) = f_*(\alpha)$ donde α es un generador fijo de $H_n(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}$ y $f_*\colon H_n(D^n, \partial D^n) \to H_n(X, A)$ es la aplicación inducida por f, es decir, $f_* = H_n(f)$. Estas aplicaciones son llamadas *aplicaciones de Hurewicz*.

TEOREMA 3.11 (Hurewicz). *Si X es $(n-1)$-conexo, $n \geq 2$, entonces $H_i(X) = 0$ para $0 < i < n$ y $\pi_n(X) \cong H_n(X)$. Si una pareja (X, A) es $(n-1)$-conexa, $n \geq 2$, entonces $H_i(X, A) = 0$ para $0 < i < n$ y $\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$.*

Para su demostración ver [**9**, Tma. 4.32]

3.1. Fibraciones

DEFINICIÓN 3.12. Una aplicación continua de espacios topológicos $p\colon E \to B$ es llamada *fibración* si tiene la *propiedad del levantamiento* de homotopías, esto es, dada una homotopía $h\colon I \times X \to B$ (que podemos escribir como $h_t\colon X \to B$) y una aplicación continua $H_0\colon X \to E$ tal que $h_0 = p \circ H_0$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "H_0"] \arrow[r, "h_0"'] & B, \end{tikzcd}$$

entonces existe una aplicación continua $H\colon I \times X \to E$ con $H(0,x) = H_0(x)$ y tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I \times X \arrow[ur, "H"] \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

es decir, $p \circ H = h$. Llamaremos a H_0 y H los *levantamientos* de h_0 y h respectivamente.

EJEMPLO 3.13. Los siguientes son ejemplos de fibraciones:

I. La proyección $p\colon E \times F \to E$ en el primer factor en el producto de espacios (con la topología producto). La fibra sobre un punto es homeomorfa a F en este caso.
II. Un espacio cubriente $E \to B$. En este caso, la fibra es un espacio discreto.

Para más detalles ver [**2**, Ejemplo 4.5.2],[**2**, Ejemplo 4.5.3] y [**2**, Lema 4.5.4].

PROPOSICIÓN 3.14. *Sea $p\colon E \to B$ una fibración, y supongamos que B es arco conexo. Para cualquier par de puntos b_0 y b_1 en B, las correspondientes fibras $F_0 = p^{-1}(b_0)$ y $F_1 = p^{-1}(b_1)$ tienen el mismo tipo de homotopía.*

Una demostración de esta propiedad se puede ver en [**21**, Prop. 5.1.23].

TEOREMA 3.15. *Sea $p\colon E \to B$ una fibración con B arco conexo, y sea $b_0 \in B$, $F = p^{-1}(b_0)$ y $x_0 \in F$. Existe una sucesión exacta llamada la* sucesión exacta larga de homotopía de la fibración

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B,b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F,x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E,x_0) \xrightarrow{p_*}$$

$$\pi_n(B,b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,x_0) \longrightarrow \cdots$$

Ver la demostración en [**21**, Tma. 5.1.24].

Corolario 3.16. *Si $p\colon E \to B$ es un espacio cubriente, entonces $\pi_n(E) \to \pi_n(B)$ son isomorfismos para toda $n > 1$.*

Demostración. Ya que un espacio cubriente tiene fibra discreta tenemos que $\pi_n(F, x_0) = 0$, entonces para $n > 0$ tenemos sucesiones

$$0 \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 0\ .$$

□

4. Espacio clasificante de un grupo

Terminaremos este capítulo construyendo un tipo de espacios topológicos conocidos como espacios de Eilenberg-Mac Lane $K(G,1)$. En realidad ya lo conocemos, probaremos que un espacio clasificante (Definición I.1.61) es un $K(G,1)$, estos espacios sólo tienen grupos de homotopía no triviales en dimensión 1, por lo que son auxiliares en la demostración de teoremas que involucran el cálculo de grupos de homotopía u homología por su simpleza.

También, como ya se mencionó, calcularemos la homología de estos espacios, que muestran una vez más como un mismo concepto se puede ver algebraica o topológicamante.

Proposición 4.1. *Sea G un grupo. Entonces existe un complejo CW contraible X con una acción propiamente discontinua, tal que el cociente es también un complejo CW.*

Para su demostración ver [**21**, Teo. 5.1.15]

Corolario 4.2. *Sea G un grupo discreto (con la topología discreta). Existe X complejo CW tal que $\pi_1(X) = G$.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 2.12 y 4.1. □

Definición 4.3. Un espacio X que tiene sólo un grupo de homotopía no trivial $\pi_n(X) \cong G$ es llamado *Espacio de Eilenberg-Mac Lane $K(G,n)$*.

Teorema 4.4. *Si $K(G,1)$ es un complejo CW, entonces el tipo de homotopía de $K(G,1)$ es únicamente determinado por G.*

Para su demostración ver [**9**, Prop. 1B.9].

Proposición 4.5. *El espacio clasificante* $\mathbf{B}(\mathrm{G})$ *de un grupo G de la Definición I.1.61 es un $K(G,1)$.*

Demostración. Sea G un grupo. Definimos el siguiente conjunto simplicial dado por el funtor $\tilde{\mathbf{N}}G\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ que asocia a cada objeto $\underline{n} \in \Delta^{op}$ el conjunto

$$\prod_{i=0}^{n} G_i,$$

donde $G_i = G$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, es decir, el conjunto de $(n+1)$-adas $(g_0, \cdots, g_n)$ de elementos del grupo G a las que llamaremos n-simplejos.

Dado un morfismo $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$, el correspondiente morfismo $\tilde{\mathbf{N}}G(f)\colon \tilde{\mathbf{N}}G(\underline{n}) \to \tilde{\mathbf{N}}G(\underline{m})$ trasforma el n-simplejo $\prod_{i=0}^{n} G_i$ en el m-simplejo $\prod_{i=0}^{m} G_{f(i)}$, particularmente cada punto $(g_0, \cdots, g_{n-1})$ es mandado en $(g'_0, \cdots, g'_{m-1})$ en el cual $g'_i = g_{f(i)}$. Los morfismos caras ∂_i^n se corresponden con los morfismos que mandan $(g_0, \cdots, g_n) \in \prod_{i=0}^{n} G_i$ en $(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_n) \in \prod_{i=0}^{n-1} G_i$, donde $\hat{g}_i$ significa que g_i no aparece y los morfismos degeneraciones σ_i^n, se corresponden con los morfismos que mandan $(g_0, \cdots, g_n) \in \prod_{i=0}^{n} G_i$ a $(g_0, \cdots, g_i, g_i, \cdots, g_n) \in \prod_{i=0}^{n+1} G_i$.

La realización geométrica de este conjunto simplicial lo denotaremos con $\mathbf{E}(\mathrm{G})$.

El grupo G actúa por la izquierda en $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ como sigue: un elemento $g \in G$ manda el n-simplejo $(g_0, \cdots, g_n)$ en el n-simplejo $(gg_0, \cdots, gg_n)$. Sólo la identidad e manda un n-simplejo en sí mismo. Esta acción se extiende de manera natural a $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ y esta acción es propiamente discontinua, por lo que la acción de G en $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ es una acción de espacios cubrientes. Así la aplicación cociente $\mathbf{E}(\mathrm{G}) \to \mathbf{E}(\mathrm{G})/G$ es un espacio cubriente.

Veamos que el espacio de orbitas $\mathbf{E}(\mathrm{G})/G$ es el espacio clasificante $\mathbf{B}(\mathrm{G})$ del Ejemplo I.1.61. Observemos que $(g_0, \cdots, g_n) \sim (e, g_0^{-1}g_1, \cdots, g_0^{-1}g_n)$. Utilizando la notación barra vista en (8) de la Subsección I.4.3 podemos escribir al n-simplejo $(e, g_0^{-1}g_1, \cdots, g_0^{-1}g_n)$ como $[g_0^{-1}g_1|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n]$ o considerando $g'_i = g_{i-1}^{-1}g_i$ podemos escribir $[g'_1|\cdots|g'_n]$ para dicho n-simplejo. De esta manera podemos ver que $\mathbf{E}(\mathrm{G})/G$ es $\mathbf{B}(\mathrm{G})$ mandando la órbita de un n-simplejo $(g_0, \cdots, g_n) \in \mathbf{E}(\mathrm{G})$ al n-simplejo $[g'_1|\cdots|g'_n] \in \mathbf{B}(\mathrm{G})$. Esta aplicación manda caras en caras y degeneraciones en degeneraciones.

Denotaremos por $[g_0, \cdots, g_n]$ al n-simplejo geométrico en $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ correspondiente a n-simplejo $(g_0, \cdots, g_n)$. El espacio $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ es contraible ya que podemos mandar a $x \in [g_0, \cdots, g_n]$ a $[e]$ a través de $\alpha_x\colon [0,1] \to \mathbf{E}(\mathrm{G})$ el segmento de linea de x a e en $[e, g_0, \cdots, g_n]$. Hacer esto, está bien definido en $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ ya que si α_x está en la cara $[g_0, \cdots \hat{g}_i, \cdots, g_n]$, α_x es el segmento de línea de x a e en $[e, g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots g_n]$, por lo tanto, tenemos una homotopía $H\colon\ \mathbf{E}(\mathrm{G}) \times [0,1] \to \mathbf{E}(\mathrm{G})$ entre la identidad en $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ y la aplicación constante en e dada por $H(x,t) = \alpha_x(t)$. Por lo tanto $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ es contraible. La proyección $\mathbf{E}(\mathrm{G}) \to \mathbf{B}(\mathrm{G})$ es el cubriente universal.

Entonces tenemos que, por el Corolario 3.16 $\pi_n(\mathbf{B}(\mathrm{G})) \cong \pi_n(\mathbf{E}(\mathrm{G})) = 0$ para $n \geq 2$ y por el Teorema 2.12, $\pi_1(\mathbf{B}(\mathrm{G})) = G$. □

Por lo anterior tenemos un nuevo funtor $\mathbf{B}(\cdot)$ entre las categorías **Grp** y **Top**: sean $G, H \in \mathbf{Grp}$ y $\varphi\colon G \to H$ un homomorfismo entre ellos, cada grupo da lugar a un conjunto simplicial $\mathbf{N}G, \tilde{\mathbf{N}}H\colon \Delta \to \mathbf{Conj}$ dados por

$\mathbf{N}\,G(\underline{n}) = \prod_{i=1}^{n} G_i$ y $\mathbf{N}\,H(\underline{n}) = \prod_{i=1}^{n} H_i$. Entonces, f induce una transformación natural entre los simplejos dados como se ilustra a continuación

$$\begin{array}{ccc} \underline{n} & & \mathbf{N}\,G(\underline{n}) \xrightarrow{t_{\underline{n}}} \mathbf{N}\,H(\underline{n}) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{N}\,G(f)} \qquad\qquad \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{N}\,H(f)} \\ \underline{m} & & \mathbf{N}\,G(\underline{m}) \xrightarrow{t_{\underline{m}}} \mathbf{N}\,H(\underline{m}) \end{array}$$

donde

$$t_{\underline{n}}\colon \prod_{i=1}^{n} G_i \to \prod_{i=1}^{n} H_i$$

está dado por $t_{\underline{n}}(g_1, \cdots, g_n) = (\varphi(g_1), \cdots, \varphi(g_n))$ y como la realización geométrica es un funtor, tenemos una aplicación continua

$$\mathbf{B}(f)\colon\ \mathbf{B}(G) \to \mathbf{B}(H)$$

Teorema 4.6. *Sea X un complejo CW y sea Y un $K(G,1)$. Entonces todo homomorfismo $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ es inducido por una aplicación $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ que es única salvo homotopía.*

Para su demostración ver [**9**, Prop. 1B.9].

Lema 4.7. *Sea G un grupo. Si G actúa de manera libre y propiamente discontinua en X, el complejo de cadenas $C_*(X)$ de X es un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}[G]$-módulos, y si $C_n(X)_G$ denota el espacio de órbitas de la acción por G, entonces $C_*(X)_G = \{C_n(X)_G\}$ es el complejo de cadenas de X/G.*

Demostración. Consideremos a $S_n(X)$, el conjunto de aplicaciones $\sigma\colon \Delta^n \to X$. La acción de G induce traslaciones $g\colon X \to X$ para cada $g \in G$. El grupo G actúa en $S_n(X)$, mediante $g\sigma$ la composición de σ con la traslación por $g \in G$. Puesto que $C_n(X)$ es el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base $S_n(X)$, entonces $C_n(X)$ es un G-módulo. Como la traslación por g manda las caras de σ en caras de $g\sigma$, la aplicación frontera $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ es una aplicación de G-módulos. Así $C_*(X)$ es un complejo de cadenas de G-módulos.

Ahora consideremos a $S_n(X/G)$ el conjunto de aplicaciones continuas $\sigma'\colon \Delta^n \to X/G$. Entonces, por el criterio del levantamiento único de un espacio cubriente, tenemos que todo $\sigma'\colon \Delta^n \to X/G$ puede ser levantado a una única aplicación $\sigma\colon \Delta^n \to X$ y que cualquier otro levantamiento es una traslación $g\sigma$ para algún $g \in G$. Como los $g\sigma$ son distintos, esto prueba que $S_n(X) \cong G \times S_n(X/G)$ como un G-conjunto. La elección de un levantamiento para cada σ' nos da una aplicación $S_n(X/G) \to S_n(X)$, por lo tanto una base para $C_n(X)$ como un $\mathbb{Z}$-módulo. Esto prueba que la aplicación natural $C_n(X) \to C_n(X/G)$ induce un isomorfismo $C_n(X)_G \cong C_n(X/G)$. □

Teorema 4.8. $H_*(\mathbf{B}(\mathrm{G}); \mathbb{Z}) \cong H_*(G; \mathbb{Z})$.

Demostración. Ya que $H_n(\mathbf{E}(\mathrm{G})) \cong H_n(x_0) = 0$ para toda $n > 0$ y $H_0(\mathbf{E}(\mathrm{G})) = \mathbb{Z}$, entonces la cadena de complejos $C_*(\mathbf{E}(\mathrm{G}))$ es una G-resolución libre de $\mathbb{Z}$. Además la aplicación

$$f\colon C_*(\mathbf{E}(\mathrm{G})) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \to C_*(\mathbf{E}(\mathrm{G}))_G,$$

dada por $f(\sigma \otimes n) = [n\sigma]$ es un isomorfismo bien definido. Por lo tanto

$$\begin{aligned} H_*(G, \mathbb{Z}) &= H_*(C_*(\mathbf{E}(\mathrm{G})) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}) \\ &= H_*(C_*(\mathbf{E}(\mathrm{G}))_G) \\ &= H_*(C_*(\mathbf{B}(\mathrm{G}))) \\ &= H_*(\mathbf{B}(\mathrm{G}); \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

CAPÍTULO III

K-TEORÍA ALGEBRAICA CLÁSICA

En este capítulo estudiaremos los funtores K_0, K_1, K_2, que fueron los primeros en definirse en K-Teoría Algebraica.

Aplicaremos los conceptos algebraicos del Capítulo I para construir estos funtores y también definiremos K_0 para categorías, que es el punto de partida para definir K_n para categorías que estudiaremos en el siguiente capítulo.

Además de usar la terminología del capítulo I, utilizaremos algunos de los resultados de Homología para ver la relación de ésta con la K-Teoría Algebraica clásica.

1. $K_0(\Lambda)$

El primer paso para la definición de los grupos de K-Teoría Algebraica fueron los trabajos de Grothendieck, retomados por matemáticos de la década de los 60's (como Serre, Milnor, Whitehead, Quillen, entre muchos otros), para calcular el grupo de Grothendieck de clases de isomorfismo de Λ-módulos proyectivos finitamente generados que forman un monoide con la operación "$\times$" producto directo de dos Λ-módulos.

1.1. Grupo Universal Sea I un monoide abeliano. Entonces existe un grupo abeliano I^* (único salvo isomorfismo) llamado el *grupo universal* de I o *grupo de Grothendieck* y un homomorfismo de monoides $\phi\colon I \to I^*$ que tiene la siguiente propiedad universal: dado un homomorfismo de monoides $h\colon I \to G$ de I a un grupo abeliano arbitrario G hay un único homomorfismo de grupos abelianos $h'\colon I^* \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "h"'] & & I^* \arrow[dl, "h'"] \\ & G. & \end{tikzcd}$$

Daremos dos construcciones de I^*.

I. I^* es el grupo abeliano libre con generadores $[\alpha]$ con $\alpha \in I$ bajo las relaciónes $[\alpha+\beta] = [\alpha] + [\beta]$.

II. Considerar la relación $\sim$ en $I \times I$ dada por

$$(\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta') \iff \exists \gamma \in I \text{ tal que}$$
$$\alpha + \beta' + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma.$$

Esta es una relación de equivalencia. Entonces $I^* = I \times I/ \sim$ y la operación es definida por

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \beta, \alpha' + \beta')$$

con identidad $(0, 0)$ e inverso $-(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

Estos dos grupos cumplen la propiedad universal requerida, en el primer caso ϕ manda el elemento α en su clase $[\alpha]$. En el segundo caso, $\phi(\alpha) = [(\alpha, 0)]$ donde 0 es el elemento neutro de I.

EJEMPLO 1.1. Consideremos los números naturales $\mathbb{N}$ junto con la operación suma "+". Es claro que $(\mathbb{N}, +)$ es un monoide. El grupo universal de $\mathbb{N}$ es $\mathbb{Z}$.

Debemos tener un poco de cuidado con el grupo universal, ya que pueden ocurrir cosas que van en contra de la intuición, veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2. Sea M el conjunto potencia de un conjunto X, tenemos una operación en M, la unión "$\cup$" que le da estructura de monoide a M. El grupo universal de este monoide es $\{\emptyset\}$, es decir, su grupo universal es trivial. Lo cual muestra que no necesariamente el monoide está incluido en su grupo universal.

1.2. El grupo $K_0(\Lambda)$

DEFINICIÓN 1.3. Sea Λ un anillo con 1 y sea $\mathbf{P}(\Lambda)$ la categoría de Λ-módulos izquierdos proyectivos finitamente generados. Las clases de isomorfismos de los objetos de esta categoría forman un monoide con el producto. Definimos $K_0(\Lambda)$ como el grupo de Grothendieck del monoide.

EJEMPLO 1.4. Sea F un campo, entonces todo F-módulo finitamente generado es un espacio vectorial que tiene una base que define su dimensión. La dimensión es un invariante salvo isomorfismo de espacios vectoriales, por lo que tenemos un isomorfismo entre el monoide $\mathbb{N}$ y el monoide de clases de isomorfismo de F-espacios vectoriales. Como se observó en el Ejemplo 1.1, tenemos que el grupo de Grothendieck de $\mathbb{N}$ es $\mathbb{Z}$, por lo que $K_0(F) \cong \mathbb{Z}$.

NOTA 1.5. Consideremos el grupo abeliano libre F cuyos generadores $[P]$ son las clases de isomorfismos de Λ-módulos proyectivos finitamente generados y R es el subgrupo de F generado por todas las clases $[M] - [P] - [Q]$ una por cada sucesión exacta corta

$$P \rightarrowtail M \twoheadrightarrow Q\ ,$$

puesto que P y Q son proyectivos, la sucesión se escinde y por lo tanto $M = P \times Q$. Así tenemos una correspondencia entre sucesiones exactas cortas de módulos y la relación

$$[P] + [Q] = [P \times Q]$$

por lo que el grupo F/R es el grupo Grothendieck de la construcción 1.

Esta relación entre los grupos motiva a una definición más general para categorías del grupo de Grothendieck que veremos en la Sección 2.

Con la multiplicación entre Λ-módulos proyectivos definida arriba podemos probar que $K_0(\cdot)$ es un funtor entre las categorías **An** y **Grp**.

Sea $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ un homomorfismo de anillos con 1, f induce un homomorfismo en K_0: dado un Λ'-módulo M podemos definir en M una estructura de Λ-módulo como sigue:

$$\Lambda \times M \to M; \quad (\lambda, x) \longmapsto f(\lambda)x$$

o en notación multiplicativa $\lambda x = f(\lambda)x$. Así podemos dar estructura de Λ-módulo al anillo Λ' y, por lo tanto, podemos tomar el producto tensorial $\Lambda' \otimes_\Lambda P$ de los Λ-módulos Λ' y P.

El producto tensorial $\Lambda' \otimes_\Lambda P$ tiene estructura de Λ'-módulo tomando la siguiente multiplicación por escalares en Λ',

$$\lambda_1'(\lambda_2' \otimes x) = (\lambda_1'\lambda_2') \otimes x.$$

A cada anillo Λ le asociamos el grupo $K_0(\Lambda)$ y un homomorfismo $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ de anillos con 1 induce un homomorfismo de grupos $K_0(f)\colon K_0(\Lambda) \to K_0(\Lambda')$ definido como $K_0(f)([P]) = [\Lambda' \otimes_\Lambda P]$.

Ahora bien, observemos que si P es proyectivo, entonces $\Lambda' \otimes_\Lambda P$ es proyectivo y si

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, entonces

$$0 \longrightarrow \Lambda' \otimes_\Lambda P' \longrightarrow \Lambda' \otimes_\Lambda P \longrightarrow \Lambda' \otimes_\Lambda P'' \longrightarrow 0$$

también es exacta. Por lo tanto el homomorfismo $K_0(f)\colon K_0(\Lambda) \to K_0(\Lambda')$, con $K_0(f)([P]) = [\Lambda' \otimes_\Lambda P]$ está bien definido.

Para probar que $K_0(f)$ es un homomorfismo, primero observemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \Lambda' \otimes_\Lambda P \longrightarrow \Lambda' \otimes_\Lambda (P \times Q) \longrightarrow \Lambda' \otimes_\Lambda Q \longrightarrow 0$$

es exacta por lo que $[\Lambda \otimes P] + [\Lambda \otimes Q] = [\Lambda \otimes (P \times Q)]$.

Entonces $[P], [Q] \in K_0(\Lambda)$, tenemos que

$$\begin{aligned} K_0(f)([P] + [Q]) &= K_0(f)([P \times Q]) \\ &= [\Lambda' \otimes_\Lambda (P \times Q)] \\ &= [\Lambda' \otimes_\Lambda P] + [\Lambda' \otimes_\Lambda Q] \\ &= K_0(f)([P]) + K_0(f)([Q]). \end{aligned}$$

Se puede ver que $K_0(\cdot)$ satisface las propiedades de funtor.

2. $K_0(\cdot)$ para categorías

En vista de la Nota 1.4, veamos una generalización para categorías del grupo de Grothendieck, hecha por él mismo y que es uno de los orígenes de la K-Teoría Algebraica clásica como se mencionó en la introducción de este documento.

DEFINICIÓN 2.1. Si $\mathbf{C}$ es una categoría exacta pequeña definimos F como el grupo abeliano libre en las calses de isomorfismo $[A]$ con $A \in \mathbf{C}$, el *grupo de Grothendieck* $K_0(\mathbf{C})$ es F/R, donde R es el subgrupo generado por las clases $[A] - [A'] - [A'']$ para cada sucesión exacta

$$A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$$

en $\mathbf{C}$.

PROPOSICIÓN 2.2. *En* $K_0(\mathbf{C})$ *tenemos que*

I. $[0] = 0$
II. *Si* A *es isomorfo a* B*, entonces* $[A] = [B]$
III. $[A \times B] = [A] + [B]$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del hecho de que las siguientes sucesiones son exactas:

I. $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\,,$
II. $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0\,,$
III. $0 \longrightarrow A \longrightarrow A \times B \longrightarrow B \longrightarrow 0\,.$

□

Si consideramos dos categorías exactas pequeñas $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ y un funtor exacto entre ellas $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ (ver Definición 1.52), entonces el funtor induce un homomorfismo de grupos $K_0(F)\colon K_0(\mathbf{C}) \to K_0(\mathbf{C}')$ dado por $K_0(F)([A]) = [F(A)]$. El homomorfismo $K_0(F)([A]) = [F(A)]$ está bien definido, ya que el funtor F manda la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F(A') \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(A'') \longrightarrow 0$$

y por lo tanto, la clase de A va a dar a la clase de $F(A)$ bajo el homomorfismo $K_0(F)$. Es decir $K_0(F)$ está bien definido.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} K_0(F)([A] + [B]) &= K_0(F)([A \times B]) \\ &= [F(A \times B)] \\ &= [F(A')] + [F(A'')] \\ &= K_0(F)(A) + K_0(F)(0). \end{aligned}$$

Por otra parte,

I. Si $1_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es el funtor identidad, entonces

$$K_0(1_{\mathbf{C}})\colon K_0(\mathbf{C}) \to K_0(\mathbf{C})$$

es el homomorfismo identidad en grupos.

II. Si $F\colon \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ y $G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}''$ son funtores exactos de las categorías exactas pequeñas $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ y $\mathbf{C}''$, entonces

$$\begin{aligned} K_0(G \circ F)([A]) &= [G(F(A))] \\ &= K_0(G)([F(A)]) \\ &= K_0(G)(K_0(F)([A])) \\ &= K_0(G) \circ K_0(F). \end{aligned}$$

Así, $K_0(\cdot)$ satisface las propiedades de funtor de la categoría de las categorías exactas pequeñas cuyos morfismos son los funtores exactos. Este funtor generaliza al funtor $K_0(\cdot)$ para anillos como vimos en la Nota 1.5 o, alternativamente, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.3. *Si Λ es un anillo y $\mathbf{P}(\Lambda)$ es la categoría de Λ-módulos proyectivos finitamente generados, entonces $K_0(\Lambda)$ puede ser identificado naturalmente con $K_0(\mathbf{P}(\Lambda))$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición $K_0(\mathbf{P}(\Lambda))$ es un grupo abeliano con generadores $[P]$ uno por cada clase de isomorfismos de Λ-módulos proyectivos finitamente generados y, como vimos en la Nota 1.5, $K_0(\Lambda)$ también. La operación en ambos grupos es la misma ya que $[P]+[Q] = [P \times Q]$ en $K_0(\Lambda)$ y en $K_0(\mathbf{P}(\Lambda))$ (ver Proposición 2.2).

Sólo falta ver que las relaciones que satisface un grupo las satisface el otro. $K_0(\Lambda)$ es el grupo libre generado por $[P]$ bajo las relaciones $[P] = [Q]$ si $P \cong Q$, las cuales son satisfechas por $K_0(\mathbf{P}(\Lambda))$. Puesto que una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

de objetos en $\mathbf{P}(\Lambda)$ se escinde y por lo tanto $N = P \times Q$ (ver Teorema I.2.36), es decir, $K_0(\Lambda)$ satisface las relaciones de $K_0(\mathbf{P}(\Lambda))$. □

EJEMPLO 2.4. Sea $\mathbf{Vec}(F)$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo F. Entonces $K_0(\mathbf{Vec}(F)) \cong \mathbb{Z}$.

En efecto, si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo F, entonces $V \cong F^n$ y por tanto $[V] = n[F]$ (ver Proposición 2.2). Así, $[F]$ genera el grupo $K_0(\mathbf{Vec}(F))$. Consideremos la aplicación $\mathrm{Dim}\colon \mathbf{Vec}(F) \to \mathbb{Z}$, que asigna a cada espacio vectorial V su dimensión. Recordemos de Álgebra Lineal que

$$\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(V') + \mathrm{Dim}(V'')$$

Para cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

de espacios vectoriales. Entonces, hay un isomorfismo $K_0(\mathbf{Vec}(F)) \to \mathbb{Z}$.

EJEMPLO 2.5. Sea $\mathbf{Ab}$ la categoría de grupos abelianos finitamente generados, entonces $K_0(\mathbf{Ab}) \cong \mathbb{Z}$.

En efecto, si A es un grupo abeliano finitamente generado, entonces A es isomorfo a $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$. Así en el grupo $K_0(\mathbf{Ab})$ tenemos

$$[A] = n[\mathbb{Z}] + \sum_{i=1}^{r}[\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}].$$

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{d}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $\hat{d}$ es la multiplicación por d, esto implica que $[\mathbb{Z}] = [\mathbb{Z}] + [\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}]$ por lo que $[\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}] = 0$. Así $[A] = n[\mathbb{Z}]$. Consideremos la aplicación Rang: $\mathbf{Ab} \to \mathbb{Z}$ definida como el rango de un grupo abeliano A. Por cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

en la categoría $\mathbf{Ab}$, de la Teoría de Grupos tenemos que $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A') + \mathrm{Rang}(A'')$. Por lo que Rang: $K_0(\mathbf{Ab}) \to \mathbb{Z}$ es un isomorfismo.

3. $K_1(\Lambda)$

Recordemos la terminología empleada en el Ejemplo I.1.8 inciso III, donde definimos $M_n(\Lambda)$ como el anillo de matrices de $n \times n$ con elementos en un anillo conmutativo con 1 y $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ el grupo de unidades de $M_n(\Lambda)$, es decir, $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ es el grupo de matrices invertibles de $M_n(\Lambda)$, llamado *grupo general lineal.*

En esta sección estudiaremos propiedades del grupo general lineal y las utilizaremos para definir $K_1(\Lambda)$.

DEFINICIÓN 3.1. Una matriz e_{ij}^{λ}, $i \neq j$ es *elemental* si difiere de la matriz identidad por un elemento $\lambda \in \Lambda$ fuera de la diagonal.

Como $e_{ij}^{\lambda} \in \mathrm{GL_n}(\Lambda)$ entonces $(e_{ij}^{\lambda})^{-1} = e_{ij}^{-\lambda}$ y se comprueba fácilmente que multiplicar por la izquierda o por la derecha por una matriz elemental corresponde a hacer operaciones elementales por renglón o por columna a dicha matriz. También se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.2. *Para $n \geq 3$,*

$$[e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = \begin{cases} 1 & si\ j \neq k, i \neq l \\ e_{ij}^{\lambda\mu} & si\ j = k, i \neq l \\ e_{ij}^{-\lambda\mu} & si\ j \neq k, i = l \end{cases} \tag{8}$$

DEFINICIÓN 3.3. Sea $\mathrm{E_n}(\Lambda)$ el subgrupo de $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ generado por todas las matrices e_{ij}^{λ}, $\lambda \in \Lambda$, $1 \leq i \neq j \leq n$, llamado *grupo elemental lineal* de Λ.

DEFINICIÓN 3.4. Si identificamos cada matriz $A \in \mathrm{GL_n}(\Lambda)$ con la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1},$$

obtenemos inclusiones $\mathrm{GL}_1(\Lambda) \subset \mathrm{GL}_2(\Lambda) \subset \cdots$, denotamos como $\mathrm{GL}(\Lambda)$ a

$$\mathrm{GL}(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_{\mathrm{n}}(\Lambda)$$

al que llamaremos *grupo general lineal estable* o *infinito.* De igual manera al restringirnos a $\mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda)$ tenemos inclusiones $E_1(\Lambda) \subset E_2(\Lambda) \subset \cdots$ y definimos

$$\mathrm{E}(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda)$$

el cual es llamado *grupo elemental estable* o *infinito* de Λ.

PROPOSICIÓN 3.5. *$\mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda)$ es perfecto para $n \geq 3$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.2, tenemos que cada matriz elemental puede expresarse como el conmutador de otras dos matrices elementales para $n \geq 3$; entonces $[\mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda), \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda)] = \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda)$. □

LEMA 3.6. *Para toda matriz $X \in \mathrm{GL}_n(\Lambda)$, la matriz*

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix}$$

está en $\mathrm{E}_{2n}(\Lambda)$.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

y como

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X^{-1} & I \end{pmatrix}$$

Pueden reducirse a I_{2n} mediante operaciones elementales por renglón, mientras que

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

□

LEMA 3.7 (Whitehead). $\mathrm{E}(\Lambda) = [\mathrm{GL}(\Lambda), \mathrm{GL}(\Lambda)]$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.5, $[\mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda), \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda)] = \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\Lambda) \subset \mathrm{GL}(\Lambda)$.

Veamos ahora que $[\mathrm{GL}(\Lambda), \mathrm{GL}(\Lambda)] \subset \mathrm{E}(\Lambda)$. Para esto, sean $A, B \in \mathrm{GL}(\Lambda)$; entonces, en $\mathrm{GL}_{2n}(\Lambda)$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (BA)^{-1} & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$$

Veamos que el conmutador $ABA^{-1}B^{-1}$ puede expresarse como producto de matrices elementales de $\mathrm{GL}_{2n}(\Lambda)$. Basta ver que cada una de las matrices de arriba se puede reducir a I_{2n} (la matriz identidad) mediante operaciones elementales, pero esto nos lo da el Lema 3.6. Por lo tanto,

$$[\mathrm{GL}(\Lambda), \mathrm{GL}(\Lambda)] \subset \mathrm{E}(\Lambda).$$

□

DEFINICIÓN 3.8. $K_1(\Lambda) = \mathrm{GL}(\Lambda)_{ab} = \mathrm{GL}(\Lambda)/\mathrm{E}(\Lambda)$, es decir, la abelianización de $\mathrm{GL}(\Lambda)$.

EJEMPLO 3.9. Denotemos por $\mathrm{SL}_n(\Lambda)$ a las matices de $\mathrm{GL}_n(\Lambda)$ que tienen determinante 1.

Sea F un campo, entonces $K_1(F) \cong F^* = F - \{0\}$. En efecto, dada $A \in \mathrm{GL}_n(F)$ entonces una entrada en la primera columna es distinta de cero, ya que de lo contrario A no podría ser invertible. Así que $a_{i1} \neq 0$. Si $i = 1$ seguimos. Si no, tomemos

$$e^1_{1i}e^{-1}_{i1}e^1_{1i} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & 1 & \vdots & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para permutar a A, es decir, multiplicar a A por $e^1_{1i}e^{-1}_{i1}e^1_{1i}$, podemos suponer que $a_{11} \neq 0$. Sumando $-a_{i1}a^{-1}_{11}$ veces el primer renglón al i-ésimo renglón, para $i \neq 1$ podemos ahora eliminar las otras entradas de la primera columna. Esto reduce a A a la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

con A' una matriz $(n-1) \times (n-1)$, y claro $\mathrm{Det}(A) = a_{11}\,\mathrm{Det}(A')$.

Podemos repetir el mismo procedimiento para A', cambiando A' por operaciones elementales a la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & A'' \end{pmatrix}$$

con A'' una matriz $(n-2) \times (n-2)$. Continuando por inducción, podemos ver que A puede ser remplazada por una matriz triangular superior vía operaciones elementales por renglón.

Ahora podemos suponer que A es una matriz triangular superior. Sumando múltiplos del último renglón a los otros renglones, podemos eliminar todas las entradas en la última columna excepto a_{nn}. Entonces sumando múltiplos del $(n-1)$-ésimo renglón, a los otros renglones, eliminamos todas las entradas de la $n-1$ columna excepto $a_{n-1,n-1}$. Continuando por inducción, podemos reducir a A en una matriz diagonal invertible $D = (d_{ij})$. Ya que las operaciones elementales por renglón no cambian el determinante, esta matriz diagonal D tiene el mismo determinante que nuestra matriz original A.

Finalmente, tenemos que transformar a D en una matriz diagonal con a lo más un elemento en la diagonal diferente de 1. Usando el Lema 3.6, tenemos que las matrices de la forma

$$diag(1, \cdots, 1, a, a^{-1}, 1, \cdots, 1)$$

son elementales. Multiplicando a D por alguna de estas matrices, transformamos a D en una matriz diagonal con a lo más un elemento en la diagonal, digamos el elemento a_{11}, diferente de 1. Observemos que podemos transformar con operaciones elementales por renglón en la matriz identidad. En otras palabras, $\mathrm{SL}_n(F) = \mathrm{E}_n(F)$.

Por lo tanto, el determinante $\mathrm{Det}\colon \mathrm{GL}_n(F) \to F$ induce un isomorfismo $K_1(F) \to F^{\times}$.

Recordemos que un homomorfismo de anillos $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ define una aplicación $f_*\colon \mathrm{GL_n}(\Lambda) \to \mathrm{GL_n}(\Lambda')$ (ver Ejemplo I.1.8). Sea $p\colon \mathrm{GL}(\Lambda) \to \mathrm{GL}(\Lambda)/\mathrm{E}(\Lambda)$. Un homomorfismo de anillos f induce un homomorfismo de grupos $K_1(f)\colon K_1(\Lambda) \to K_1(\Lambda')$ definido como $K_1(f)(A) = (p \circ f_*)(A)$.

Ya que si $(e_{ij}^{\lambda}) \in \mathrm{E}(\Lambda)$, entonces $f_*(e_{ij}^{\lambda}) = (e_{ij}^{f(\lambda)}) \in \mathrm{E}(\Lambda')$. Así, $K_1(f)$ está bien definido.

$K_1(f)$ es un homomorfismo, en efecto, sean $(a_{ij}^{\lambda}), (b_{ij}^{\lambda'}) \in \mathrm{GL}(\Lambda)$ representantes de dos clases en $K_1(\Lambda)$, entonces

$$K_1(f)((a_{ij}^{\lambda})(b_{ij}^{\lambda'})\,\mathrm{E}(\Lambda)) = (a_{ij}^{f(\lambda)})(b_{ij}^{f(\lambda')})\,\mathrm{E}(\Lambda') = K_1(f)(a_{ij}^{\lambda})K_1(f)(b_{ij}^{\lambda'})$$

Además, $K_1(\cdot)$ satisface las propiedades de un funtor entre las categorías **An** y **Grp**, es decir,

I. Si $1_\Lambda\colon \Lambda \to \Lambda$ es el morfismo identidad, entonces

$$K_1(1_\Lambda)\colon K_1(\Lambda) \to K_1(\Lambda)$$

es el morfismo identidad en **Grp**.

II. Si $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ y $g\colon \Lambda' \to \Lambda''$ son homomorfismos de anillos, entonces $K_1(g \circ f) = K_1(g) \circ K_1(f)$.

NOTA 3.10. Como vimos en la Proposición I.4.21, $H_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G,G]$, en este caso, $K_1(\Lambda) = \mathrm{GL}/[\mathrm{GL}, \mathrm{GL}] = H_1(\mathrm{GL}, \mathbb{Z})$.

4. $K_2(\Lambda)$

Ahora veremos el funtor $K_2(\Lambda)$, que fue el primer intento satisfactorio para generalizar los grupos de K-Teoría Algebraica. Fué introducido por Milnor a finales de la década de los 60's.

DEFINICIÓN 4.1. Sea $n \geqslant 2$, el grupo de *Steinberg* es el grupo libre con generadores x_{ij}^{λ}, denotado como $\mathrm{St_n}(\Lambda)$, con $1 \leq i \neq j \leq n$ y $\lambda \in \Lambda$ sujeto a las relaciones

$$x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\mu} = x_{ij}^{\lambda\mu}$$

$$[x_{ij}^{\lambda}, x_{kl}^{\mu}] = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k \text{ y } i \neq l \\ x_{il}^{\lambda\mu} & \text{si } j = k \text{ y } i \neq l \\ x_{kj}^{-\lambda\mu} & \text{si } j \neq k \text{ y } i = l \end{cases}$$

DEFINICIÓN 4.2. Análogamente a la construcción de $\mathrm{E}(\Lambda)$ podemos definir $\mathrm{St}(\Lambda)$ como la unión infinita de los grupos en la sucesión encajada de $\mathrm{St}_1(\Lambda) \subset \mathrm{St}_2(\Lambda) \subset \cdots$, es decir

$$\mathrm{St}(\Lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{St}_n(\Lambda).$$

Hay un epimorfismo canónico

$$\mathrm{St}(\Lambda) \xrightarrow{\phi_\Lambda} \mathrm{E}(\Lambda)$$

dado por

$$\phi_\Lambda(x_{ij}^{\lambda}) = e_{ij}^{\lambda}$$

DEFINICIÓN 4.3. El grupo $K_2(\Lambda)$ del anillo Λ es definido como el núcleo de $\phi_\Lambda\colon \mathrm{St}(\Lambda) \to \mathrm{E}(\Lambda)$, es decir, $K_2(\Lambda) = \ker \phi_\Lambda$.

Un homomorfismo de anillos $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ da lugar a un homomorfismo de grupos $f_*\colon \mathrm{St}(\Lambda) \to \mathrm{St}(\Lambda')$, definido en los generadores como $f_*(x_{ij}^{\lambda}) = x_{ij}^{f(\lambda)}$. A la vez f_* define un homomorfismo $K_2(f)\colon K_2(\Lambda) \to K_2(\Lambda')$: el homomorfismo $f_*(x_{ij}^{\lambda}) = x_{ij}^{f(\lambda)}$ es compatible con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\phi_\Lambda \arrow[r] & \mathrm{St}(\Lambda) \arrow[r, "\phi_\Lambda"] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{E}(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker\phi_{\Lambda'} \arrow[r] & \mathrm{St}(\Lambda') \arrow[r, "\phi_{\Lambda'}"] & \mathrm{E}(\Lambda') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, el diagrama conmuta. Ahora bien, sea $y \in \ker\phi_\Lambda$, entonces por la exactitud del primer renglón y la conmutatividad del diagrama tenemos que $\phi_{\Lambda'}(f_*(y)) = f'(\phi_\Lambda(y)) = 0$, por lo que $f_*(y) \in \ker\phi_{\Lambda'}$. Definimos $K_2(f)\colon K_2(\Lambda) \to K_2(\Lambda')$, como $K_2(f)(y) = f_*(y)$ construido como arriba. $K_2(f)$ es homomorfismo de grupos bien definido.

Es fácil probar que $K_2(\cdot)$ tiene las propiedades de un funtor, es decir, podemos verificar que:

I. Si $1_\Lambda\colon \Lambda \to \Lambda$ es el morfismo identidad, entonces

$$K_2(1_\Lambda)\colon K_2(\Lambda) \to K_2(\Lambda)$$

es el morfismo identidad en **Grp**.

II. Si $f\colon \Lambda \to \Lambda'$ y $g\colon \Lambda' \to \Lambda''$ son homomorfismos de anillos,$K_2(g \circ f) = K_2(g) \circ K_2(f)$.

LEMA 4.4. *Sea* $Z(\mathrm{E}(\Lambda))$ *el centro de* $\mathrm{E}(\Lambda)$, *entonces* $Z(\mathrm{E}(\Lambda)) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea A en el centro de $\mathrm{E}(\Lambda)$ y n suficientemente grande para que $A \in \mathrm{E}_n(\Lambda)$, así en $\mathrm{E}_{2n}(\Lambda)$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $A = I$ y $Z(\mathrm{E}(\Lambda)) = 1$. □

PROPOSICIÓN 4.5. $\ker \phi_\Lambda = Z(\mathrm{St}(\Lambda))$

Para su demostración ver [**20**, Prop. 5].

COROLARIO 4.6. *El grupo de Steinberg* $\mathrm{St}(\Lambda)$ *completa una extensión central de* $\mathrm{E}(\Lambda)$.

DEMOSTRACIÓN. De la definición de $\mathrm{St}(\Lambda)$ se tiene que es perfecto. Por la proposición anterior $\ker \phi_\Lambda = Z(\mathrm{St}(\Lambda))$. Por lo que tenemos la siguiente extensión central

$$0 \longrightarrow K_2(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{St}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{E}(\Lambda) \longrightarrow 0$$

□

El siguiente Teorema nos muestra que la anterior es la extensión central universal de $\mathrm{E}(\Lambda)$

TEOREMA 4.7. *Sea* $\rho\colon G \to \mathrm{E}(\Lambda)$ *una extensión central. Entonces existe un homomorfismo* $\psi\colon \mathrm{St}(\Lambda) \to G$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{St}(\Lambda) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & \mathrm{E}(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker \rho \arrow[r] & G \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{E}(\Lambda) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Para su demostración ver [**15**, Tma. V.3.4].

COROLARIO 4.8. $K_2(\Lambda) \cong H_2(\mathrm{E}(\Lambda), \mathbb{Z})$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue del teorema anterior y los resultados de la Subsección I.4.4. □

En el caso de un campo F se puede expresar a $K_2(F)$ en términos de generadores y relaciones.

TEOREMA 4.9 (Matsumoto). *Si* F *es un campo, entonces* $K_2(F)$ *es el grupo abeliano libre en generadores* $\{x, y\}$, $x, y \in F^*$, *sujeto a las siguientes relaciones*

I. $\{x_1x_2, y\} = \{x_1, y\}\{x_2, y\}$,
II. $\{x, y_1y_2\} = \{x, y_1\}\{x, y_2\}$ para $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in F^*$
III. $\{x, 1 - x\} = 1$ para toda $x \neq 0, 1$.

Para su demostracón ver [**21**, Tma. 4.3.15]

CAPÍTULO IV

K-TEORÍA ALGEBRAICA SUPERIOR

En este capítulo daremos la generalización de los funtores K_0, K_1 y K_2 que vimos en el capítulo anterior. Dicha generalización fue introducida por Quillen y lo hizo acreedor a la medalla Fields.

Quillen retomó los trabajos sobre los funtores de la K-Teoría Algebraica clásica y, a partir de ellos, probó importantes resultados que le permitieron la generalización pero, no conforme, logró también generalizar al funtor K_0 para categorías, introduciendo con ello la K-Teoría Algebraica en varias categorías, es decir, en varias ramas de la matemática entre que las destacan la Teoría de Números, Teoría de Anillos y Módulos (nuestro caso), Geometría Algebraica, Álgebra y Topología Algebraica.

1. Construcción "+" de Quillen

Empezaremos este capítulo con la construcción "+": a partir de un complejo CW X construye otro compejo CW denotado por X^+ que sólo difiere de X en su grupo fundamental pero no cambia su homología.

Para este propósito emplearemos los conceptos y resultados del Capítulo II, tales como el teorema de Hurewicz, el funtor homotopía, el funtor homología y el espacio clasificante de un grupo.

Además usaremos los resultados de los Capítulos I y III referentes a la homología y su relación con los funtores de la K-Teoría Algebraica clásica para probar que en realidad $K_n(\cdot)$ es la generalización de la K-Teoría Algebraica clásica.

TEOREMA 1.1 (Quillen). *Sea X un complejo CW arco conexo con punto base x_0 y N un subgrupo normal perfecto de $\pi_1(X, x_0)$. Entonces existe un complejo CW X^+ que se obtiene adjuntando sólo 2-celdas y 3-celdas a X y una función continua $i_X\colon (X, x_0) \to (X^+, x^+)$ tal que:*

I. *Existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{i_{X_*}} \pi_1(X^+, x^+) \longrightarrow 0,$$

II. *para algún sistema local de coeficientes L en X^+,*

$$i_{X_*}\colon H_n(X, i_{X_*}(L)) \to H_n(X^+, L)$$

es un isomorfismo para $n \geq 0$,

Demostración. Construyamos X^+ agregando 2-celdas y 3-celdas a X en los siguientes pasos:

Paso 1 Primero consideremos una clase $[\gamma_\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, para α corriendo en un conjunto de índices A, tal que $[\gamma_\alpha]$ sea un generador de N como un subgrupo normal. Para cada $\alpha \in A$, consideremos el lazo γ_α representante de $[\gamma_\alpha]$, y adjuntemos una 2-celda a_α a X usando γ_α en la frontera. Sea X_1 el espacio resultante. Entonces por el teorema de Seifert-van Kampen, $\pi_1(X_1, x_0)$ es el cociente $\pi_1(X, x_0)/N$.

Al agregar las celdas de dimensión 2, hemos aniquilado a N como queríamos, pero también hemos modificado la homología de X, en los siguientes pasos compensaremos esta situación agregando celdas de dimensión 3, las cuales ya no afectarán al grupo fundamental.

Paso 2 Sea $p\colon \tilde{X}_1 \to X_1$ el cubriente universal, y sea $\hat{X} \to X$ el cubriente inducido que tenemos del producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \longrightarrow & \tilde{X}_1 \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

Entonces $\tilde{X}_1$ es obtenido de $\hat{X}$ por adjuntar 2-celdas; ya que $\tilde{X}_1$ es conexo, también lo es $\hat{X}$. Entonces $\hat{X} \to X$ es el espacio cubriente correspondiente al subgrupo $N \subset \pi_1(X, x_0)$ y es normal con grupo de transformaciones $\pi_1(X, x_0)/N$. El grupo $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en las 2-celdas de $\pi^{-1}(a_\alpha)$ con grupo de isotropía N por lo que $H_2(\tilde{X}, \hat{X}; \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)/N]$-módulo libre en generadores $[\tilde{a}_\alpha]$ donde $\tilde{a}_\alpha$ es una 2-celda en $\pi^{-1}(a_\alpha)$.

Paso 3 Tenemos el siguiente diagrama, donde las funciones verticales son las aplicaciones de Hurewicz (Definición II.3.10):

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(\hat{X}) & \longrightarrow & \pi_2(\tilde{X}_1) & \longrightarrow & \pi_2(\tilde{X}_1, \hat{X}) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{X}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2(\hat{X}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_2(\tilde{X}_1, \mathbb{Z}) & \xrightarrow[j]{} & H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_1(\hat{X}, \mathbb{Z}). \end{array} \tag{9}$$

Tenemos que $H_1(\hat{X}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\hat{X})_{ab} = N_{ab} = 0$ ya que N es perfecto. Además, como $\pi_1(\tilde{X}_1) = 0$ entonces $\pi_2(\tilde{X}_1) \cong H_2(\tilde{X}_1, \mathbb{Z})$ por el Teorema de Hurewicz 3.11. Ya que j es sobre, entonces podemos encontrar funciones $\tilde{f}_\alpha\colon \mathbb{S}^2 \to \tilde{X}_1$ tal que la clase de homotopía $[\tilde{f}_\alpha] \in \pi_2(\tilde{X}_1)$ se aplica a $[\tilde{a}_\alpha] \in H_2(\tilde{X}, \hat{X}, \mathbb{Z})$ bajo la composición

$$\pi_2(\tilde{X}_1) \longrightarrow H_2(\tilde{X}_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H_2(\tilde{X}_1, \hat{X}, \mathbb{Z})$$

Sea $f_\alpha\colon \mathbb{S}^2 \to X_1$ la composición $p \circ \tilde{f}_\alpha$ y sea X^+ el espacio obtenido por adjuntar 3-celdas b_α a X_1 usando f_α a lo largo de la frontera de b_α, para cada $\alpha \in A$.

Por construcción, (X^+, X_1) es un complejo CW relativo con sólo 3-celdas, así que $\pi_1(X_1, x_0) \cong \pi_1(X^+, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N$ lo que prueba (I) del teorema.

Dado que $H_n(X^+, X)$ se concentra en dimensión 2 y 3, entonces por la sucesión exacta de la homología de la pareja (ver Proposición 2.7), tenemos que $H_n(X^+) \cong H_n(X)$ para $n \neq 1, 2, 3$. Entonces, basta probar que $H_2(X^+, X) = H_3(X^+, X) = 0$ para tener el isomorfismo en los casos $n = 1, 2, 3$.

Para probar que en efecto $H_2(X^+, X) = H_3(X^+, X) = 0$ observemos que dado L un módulo sobre $\mathbb{Z}(\pi_1(X, x_0)/N)$ visto como un sistema local de coeficientes. Entonces $H_n(X_1, X; L)$ esta concentrado en dimensión 2 por lo que es $\bigoplus_{\alpha \in A} L[a_\alpha]$ y $H_n(X^+, X_1; L)$ en dimensión 3 y en este caso es $\bigoplus_{\alpha \in A} L[b_\alpha]$. Además, por construcción $\partial[b_\alpha] = [a_\alpha]$ por lo que $H_3(X^+, X_1) \cong H_2(X_1, X)$ en la sucesión exacta de homología de la tripleta (X^+, X_1, X)

$$0 = H_3(X_1, X) \longrightarrow H_3(X^+, X) \xrightarrow{k} H_3(X^+, X_1) \xrightarrow{\cong}$$

$$H_2(X_1, X) \xrightarrow{l} H_2(X^+, X) \longrightarrow H_2(X^+, X_1) = 0,$$

por exactitud los morfismos k y l son los homomorfismos cero y por lo tanto $H_2(X^+, X) = H_3(X^+, X) = 0$ como se quería.

$\square$

Dado un espacio topológico X, hemos construido otro X^+ a partir del primero con la misma homología y diferente homotopía, diremos que X^+ es la construcción "+" de X.

Teorema 1.2. *El espacio topólogico X^+ de la construcción del Teorema 1.1, es único en el sentido de que dado Y^+ otro complejo CW que contiene a X como subcomplejo y satisface las mismas condiciones, existe una equivalencia homotópica $X^+ \to Y^+$ la cual se restringe a la identidad en X.*

Demostración. Supongamos que tenemos (X^+, X) y (Y^+, X) parejas CW que satisfacen las propiedades I y II del Teorema 1.1. Sea $i\colon X \to Y^+$ la inclusión. Extenderemos i a las 2-celdas y a las 3-celdas que adjuntamos a X para construir X^+, y probaremos que podemos hacer esto para obtener una equivalencia homotópica $h\colon X^+ \to Y^+$ que sea la identidad en X. Primero necesitamos extender i a una aplicación $g\colon X_1 \to Y^+$. Ya que X_1 fue obtenido de X adjuntando 2-celdas usando las aplicaciónes de adjunción $g_i\colon S^1 \to X$, i puede ser extendida a la aplicación $g\colon X_1 \to Y^+$ puesto que cada $i \circ g_i$ es nulhomotópica. Notemos que g induce un isomorfismo en el grupo fundamental y que hay una aplicación inducida $\widetilde{g}\colon \widetilde{X_1} \to \widetilde{Y^+}$ de cubrientes universales. Ya que X^+ fue obtenido de X_1 por adjuntar celdas de dimensión 3, usando las aplicaciones de adjunción $h_i\colon S^2 \to X_1$, g puede ser extendida a una aplicación $h\colon X^+ \to Y^+$ si cada $g \circ h_i$ es nulhomotópica. Para ver esto primero notemos que

$$\pi_2(Y^+) \cong \pi_2(\tilde{Y}^+) \cong H_2(\tilde{Y}^+;\mathbb{Z}) \cong H_2(\tilde{Y};\mathbb{Z}).$$

Por lo que $g \circ h_i$ son nulhomotópicas si corresponden a clases triviales en la homología $H_2(\tilde{Y};\mathbb{Z})$. Pero la imagen de h_i en homología es la clase $[e_i^2]$ de las 2-celdas adjuntadas a Y^+ por construcción, las cuales son las fronteras $\partial[e_i^3]$, así $g \circ h_i$ es nulhomotópica por lo que podemos extender a g a una aplicación $h\colon X^+ \to Y^+$.

Para probar que h es una equivalencia homotópica, por el Teorema de Whitehead II.3.9, basta probar que h induce isomorfismos $h_*\colon \pi_n(X^+) \to \pi_n(Y^+)$. Sea $\widetilde{h}\colon \widetilde{X^+} \to \widetilde{Y^+}$ la aplicación que extiende a $\widetilde{g}$ inducida en espacios cubrientes universales y sean $p_X\colon \widetilde{X^+} \to X$ y $p_Y\colon \widetilde{Y^+} \to Y$ las aplicaciones cubrientes respectivamente, como h_* es un isomorfismo en el grupo fundamental, es suficiente probar que $\widetilde{h}$ es equivalencia homotópica puesto que $h_* = p_{Y_*} \circ \widetilde{h_*} \circ p_{X_*}^{-1}$ en π_n ya que p_{X_*} y p_{Y_*} inducen isomorfismo para $n \geq 2$. Para ello consideremos Z el cilindro de la aplicación $\widetilde{h}$, por la sucesión exacta en homotopía (Teorema 3.15), es suficiente probar que la pareja $(Z, \widetilde{X^+})$ es n-conexa para toda n. Por el Teorema de Hurewicz 3.11, el que $(Z, \widetilde{X^+})$ sea n-conexo para toda n es equivalente a decir que $H_n(Z, \widetilde{X^+};\mathbb{Z}) = 0$ para toda n. Esto último está garantizado por el hecho de que $H_n(Z;\mathbb{Z}) = H_n(\widetilde{Y^+};\mathbb{Z}) \cong H_n(\widetilde{X^+}\mathbb{Z})$ para toda n y de la sucesion exacta

$$H_n(\widetilde{X^+};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Z;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Z,\widetilde{X^+};\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n-1}(\widetilde{X^+};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(Z;\mathbb{Z}).$$

$\square$

PROPOSICIÓN 1.3. *La construcción "+" es funtorial, es decir,* $(\cdot)^+$ *es un funtor de la categoría* $\mathbf{Top}_*$ *en sí misma.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X y Y dos complejos CW cuyos grupos fundamentales tienen a N_X y N_Y como subgrupos perfectos y $f\colon X \to Y$ una aplicación continua entre ellos. Entonces podemos asociar a cada complejo CW su costrucción "+" X^+ y Y^+ respectivamente respectivamente. Si consideramos que $\pi_1(f)(N_X) \subset N_Y$ entonces f induce una aplicación continua $f^+\colon X^+ \to Y^+$ como sigue:

Sea i_Y es la inclusión de Y en Y^+. Necesitamos probar que $i_Y \circ f$ se extiende sobre las 2-celdas y las 3-celdas que adjuntamos a X para obtener a X^+. Primero notemos que $i_Y \circ f$ induce la composición

$$\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)/N_Y$$

en grupos fundamentales. Ya que $\pi_1(f)(N_X) \subset N_Y$, el subgrupo N_X está en el núcleo de esta aplicación, lo cual significa que para cada 2-celda e_i^2 adjunta a X con aplicación de adjunción g, la composición $i_Y \circ f \circ g$ es nulhomotópica. Entonces podemos extender $i_Y \circ f$ sobre las dos celdas de X^+ para obtener una aplicación

$$X \bigcup\nolimits_{g_i} e_i^2 \xrightarrow{f'} Y^+ \ .$$

Ahora necesitamos extender f' a las 3-celdas de X^+. La condición para poder hacer esto es que cada $f' \circ h_i$ sea nulhomotópica, donde h_i son las aplicaciones de adjunción de e_i^3. Y como antes, usaremos el hecho de que $\pi_2(Y^+) \cong H_2(\tilde{Y}; \mathbb{Z})$, donde $\tilde{Y}$ es el cubriente de Y con grupo fundamental N_Y y grupo de trasformaciones cubrientes $\pi_1(Y)/N_Y$. Ya que cada h_i es frontera en homología, también lo son $f' \circ h_i$, y entonces podemos extender sobre las 3-celdas para obtener nuestra aplicación deseada $f^+ \colon X^+ \to Y^+$.

Por último necesitamos probar que f^+ está bien definida salvo homotopía. Supongamos que tenemos $f^+, f_1^+ \colon X^+ \to Y^+$ aplicaciones que extienden a f. Para construir una homotopía entre ellas, sea $p_1 \colon X \times [0,1] \to X$ la proyección en el primer factor y usaremos a f^+, f_1^+ y $i_Y \circ f \circ p_1$ para definir

$$(X^+ \times \{0\}) \cup_{X \times \{0\}} (X \times [0,1]) \cup_{X \times \{1\}} (X^+ \times \{1\}) \to Y^+.$$

Podemos extender esta aplicación a $X^+ \times [0,1]$ para obtener una homotopía de f^+ a f_1^+, pues solo necesitamos extender sobre $e_i^2 \times [0,1]$ y $e_i^3 \times [0,1]$, lo que podemos hacer extendiendo como antes. $\square$

DEFINICIÓN 1.4. Definimos los *grupos de K-Teoría Algebraica* de Λ como $K_i(\Lambda) = \pi_i(\mathbf{B}\, GL(\Lambda))$.

NOTA 1.5. Observemos que si en el Teorema 1.1 consideramos a $X = \mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)$ y aplicamos la construcción "+" sobre $N = \mathrm{E}(\Lambda)$ subgrupo perfecto de $\mathrm{GL}(\Lambda)$ entonces tenemos que $\pi_1(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+) \cong \mathrm{GL}(\Lambda)/\,\mathrm{E}(\Lambda) =: K_1(\Lambda)$.

Sea G un grupo y sea N un subgrupo normal perfecto de G. El espacio $\mathbf{B}(N)$ es un cubriente normal de $\mathbf{B}(G)$ con grupo de transformaciones cubrientes G/N. En efecto, la afirmación se sigue del hecho de que el subgrupo N actúa en $\mathbf{E}(\mathrm{G})$ de manera libre y propiamente discontinua, procediendo como en la Proposición II.4.5 tenemos que $\mathbf{B}(N)$ es $\mathbf{E}(\mathrm{G})\,/N$. Ahora bien, como vimos en la demostración del Teorema 1.2, se puede levantar al cubriente normal $\mathbf{B}(G) \to \mathbf{B}(N)$ adjuntando 2-celdas y 3-celdas a $\mathbf{B}(N)$ anulando al grupo normal perfecto y preservando la homología para obtener $\mathbf{B}(N)^+ \to \mathbf{B}(G)$, el cual resulta ser un cubriente normal con grupo de trasformaciones G/N.

PROPOSICIÓN 1.6. *El grupo $K_2(\Lambda)$ dado por la construcción "+"es isomorfo al grupo $K_2(\Lambda)$ de la K-Teoría Algebraica clásica.*

Demostración. Por lo observado arriba, $\mathbf{B}\,\mathrm{E}(\Lambda)^+$ es el espacio cubriente universal de $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)$, entonces por el Corolario II.3.16,

$$\pi_2(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+) = \pi_2(\mathbf{B}\,\mathrm{E}(\Lambda)^+).$$

Por otra parte, el espacio $\mathbf{B}\,\mathrm{E}(\Lambda)^+$ es simplemente conexo y aplicando el Teorema de Hurewicz II.3.11 tenemos que

$$\pi_2(\mathbf{B}\,\mathrm{E}(\Lambda)^+) \cong H_2(\mathbf{B}\,\mathrm{E}(\Lambda)^+;\mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbf{B}\,\mathrm{E}(\Lambda)).$$

Más aún, por el Teorema II.4.8 y el Teorema 1.1 tenemos que

$$H_2(\mathbf{B}\,\mathrm{E}(\Lambda);\mathbb{Z}) = H_2(\mathrm{E}(\Lambda);\mathbb{Z})$$

y por el Corolario III.4.8, $H_2(\mathrm{E}(\Lambda);\mathbb{Z}) = K_2(\Lambda)$. □

1.1. El grupo $K_3(\Lambda)$ En esta subsección probaremos que $K_3(\Lambda) = H_3(\mathrm{St}(\Lambda),\mathbb{Z})$. Este resultado ha sido el intento más exitoso por definir K-Teoría Algebraica de manera algebraica. Desde su aparición y aún después de la generalización hecha por Quillen, los algebristas, y en general muchos matemáticos, no han estado conformes y siguen intentando definir $K_n(\Lambda)$ con solo Álgebra.

Teorema 1.7. $K_3(\Lambda) = H_3(\mathrm{St}(\Lambda);\mathbb{Z})$

Demostración. Consideremos la extensión central universal de $\mathrm{E}(\Lambda)$

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \mathrm{St}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{E}(\Lambda) \longrightarrow 0$$

como los grupos $\mathrm{St}(\Lambda)$ y $\mathrm{E}(\Lambda)$ son perfectos obtenemos una fibración (ver [**10**, Tma. II.2.17]):

$$\mathbf{B}(\ker\varphi) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathrm{St}(\Lambda))^+ \longrightarrow \mathbf{B}(\mathrm{E}(\Lambda))^+$$

Consideremos la sucesión exacta de homotopía

$$\cdots \longrightarrow \pi_3(\mathbf{B}(\ker\varphi)) \longrightarrow \pi_3(\mathbf{B}(\mathrm{St}(\Lambda))^+) \longrightarrow \pi_3(\mathbf{B}(\mathrm{E}(\Lambda))^+)$$

$$\longrightarrow \pi_2(\mathbf{B}(\ker\varphi)) \longrightarrow \cdots .$$

Como $\mathbf{B}(\ker\varphi)$ es un $K(\ker\varphi,1)$, entonces $\pi_3(\mathbf{B}(\ker\varphi)) = \pi_2(\mathbf{B}(\ker\varphi)) = 0$, por lo que obtenemos un isomorfismo

$$\pi_3(\mathbf{B}(\mathrm{St}(\Lambda))^+) \cong \pi_3(\mathbf{B}(\mathrm{E}(\Lambda))^+)$$

Por otro lado, sabemos que $H_1(\mathrm{St}(\Lambda;\mathbb{Z})) = H_2(\mathrm{St}(\Lambda;\mathbb{Z})) = 0$, ya que $\mathrm{St}(\Lambda)$ es perfecto y toda extención central de $\mathrm{St}(\Lambda)$ se escinde (ver Teorema I.4.28). Si aplicamos el Teorema II.1.1 y el Teorema de Hurewicz 3.11, obtenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} K_3(\Lambda) &= \pi_3(\mathbf{B}(\mathrm{GL}(\Lambda))^+) \\ &\cong \pi_3(\mathbf{B}(\mathrm{E}(\Lambda))^+) \\ &\cong \pi_3(\mathbf{B}(\mathrm{St}(\Lambda))^+) \\ &\cong H_3(\mathbf{B}(\mathrm{St}(\Lambda))^+;\mathbb{Z}) \\ &\cong H_3(\mathrm{St}(\Lambda);\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

2. Construcción "Q" de Quillen

Ahora veamos la construcción "Q": Consideremos una categoría exacta $\mathbf{C}$, nuevamente Quillen construyó otra categoría a partir de ella, luego le asoció a la nueva categoría un espacio topológico X llamado el espacio clasificante de una categoría (una generalización del espacio clasificante de un grupo, ver Ejemplo 2.1). Quillen observó que $K_0(\mathbf{C}) \cong \pi_1(X)$ donde $K_0(\cdot)$ se toma como en la Definición 2.1, luego Quillen definió los funtores $K_n(\cdot)$ de K-Teoría Algebraica superior de una categoría como $K_n(\mathbf{C}) \cong \pi_{n+1}(X)$. Quillen probó también que si consideramos a $\mathbf{C}$ como la categoría de Λ-módulos finitamente generados $\mathbf{P}(\Lambda)$, entonces $K_n(\Lambda)$ y $K_n(\mathbf{P}(\Lambda))$ son isomorfos.

2.1. El espacio clasificante de una categoría Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña. El *nervio* de $\mathbf{C}$ es el conjunto simplicial $\mathbf{N}\,\mathbf{C}\colon \Delta^{op} \to \mathbf{Conj}$ definido como sigue: un n-simplejo $\mathbf{N}\,\mathbf{C}(\underline{n})$ es una sucesión

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

con $A_i \in \mathbf{C}$ y con f_i en los morfismos de $\mathbf{C}$. Dada una aplicación $f\colon \underline{m} \to \underline{n}$ en Δ, la correspondiente aplicación $\mathbf{N}\,\mathbf{C}(\underline{n}) \to \mathbf{N}\,\mathbf{C}(\underline{m})$ manda el n-simplejo anterior en el m-simplejo

$$B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \xrightarrow{g_2} B_2 \xrightarrow{g_3} \cdots \xrightarrow{g_m} B_m$$

donde $B_j = A_{f(j)}$, y $B_j \to B_{j+1}$ es la composición $A_{f(j)} \to A_{f(j+1)}$ y si $f(i) = f(j+1)$, $A_{f(j)} \to A_{f(j+1)}$ es la identidad. En particular la i-ésima cara es el $(n-1)$-simplejo

(10) $$A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1}\circ f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n$$

y la i-ésima degeneración es el $(n+1)$-simplejo

(11)
$$A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{1} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n$$

El *espacio clasificante* de una categoría $\mathbf{C}$ es definido como la realización geométrica de $\mathbf{N}\,\mathbf{C}$ y es denotada por $\mathbf{BC}$, es decir,

$$\mathbf{BC} = |\,\mathbf{N}\,\mathbf{C}\,|.$$

El nervio es un funtor de la categoría de categorías pequeñas a la categoría de conjuntos simpliciales: sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos categorías pequeñas y $F\colon\ \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor entre ellas. A cada categoría le podemos asociar su nervio y el funtor $F\colon\ \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ da lugar a una transformación natural vista en el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
\underline{n} \arrow[d, "f"] & \mathbf{N}\,\mathbf{C}(\underline{n}) \arrow[r, "t_{\underline{n}}"] \arrow[d, "\mathbf{N}\,\mathbf{C}(f)"'] & \mathbf{N}\,\mathbf{D}(\underline{n}) \arrow[d, "\mathbf{N}\,\mathbf{D}(f)"] \\
\underline{m} & \mathbf{N}\,\mathbf{C} \arrow[r, "t_{\underline{m}}"] & \mathbf{N}\,\mathbf{D}(\underline{m}).
\end{tikzcd}$$

Los morfismos $t_{\underline{n}}$ están dados por mandar el n-simplejo

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

en el n-simplejo

$$F(A_0) \xrightarrow{F(f_1)} F(A_1) \xrightarrow{F(f_2)} F(A_2) \xrightarrow{F(f_3)} \cdots \xrightarrow{F(f_n)} F(A_n)\ .$$

De esta manera el espacio clasificante de una categoría $\mathbf{B}(\cdot)$ también tiene las propiedades de un funtor ya que es la realización geométrica de un conjunto simplicial (Ver la Nota I.1.60).

Ejemplo 2.1. Sea G un grupo. Si consideramos a $\mathbf{C}$ como la categoría de un sólo objeto $*$ y el conjunto de morfismos $\mathbf{C}(*, *) = G$, entonces $\mathbf{B}\,\mathbf{C}$ tiene una 0-celda, una 1-celda para cada $g \in G$ y una n-celda por cada n-ada de elementos en G. Esta construcción corresponde a la construcción de la Nota I.1.61 ya que, en particular las caras y las degeneraciónes de los diagramas (10) y (11), son las mismas que las caras y degeneraciones en dicha nota.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña, podemos definir la Homología de la Categoría $\mathbf{C}$ componiendo algunos funtores: Primero, $L_\Lambda\,\mathbf{N}\,\mathbf{C}(\cdot)$ es un Λ-módulo simplicial (ver Nota I.2.30), que son funtores de la categoría $\mathbf{S}\,\mathbf{Mod}(\Lambda)$ y procediendo como en la Nota I.3.12 podemos obtener la Homología de la Categoría $\mathbf{C}$. La Homología de Grupos es un ejemplo de esto.

2.2. Construcción "*Q*" Ahora recordemos que una categoría $\mathbf{C}$ es exacta si está encajada como tal (aditiva) en una subcategoría plena de una categoría Abeliana $\mathbf{A}$, tal que si

$$M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$$

es una sucesión exacta en **A** con $M', M'' \in \mathbf{C}$, entonces M es isomorfo a un objeto en **C**. Decimos que una sucesión es exacta en **C** si es una sucesión exacta en **A** con términos dados en **C**.

Un *funtor exacto* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre dos categorías exactas **C**, **D** es un funtor aditivo tal que si $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ es exacto en **C** entonces

$$F(M') \rightarrowtail F(M) \twoheadrightarrow F(M'')$$

es exacto en **D**.

Si **C** es una categoría exacta, formamos una nueva categoría **QC** definida como sigue: **QC** tiene los mismos objetos que **C**, pero un morfismo $X \to Y$ es dado por una clase de isomorfismos de diagramas

$$X \overset{q}{\twoheadleftarrow} Z \overset{i}{\rightarrowtail} Y$$

donde i es un monomorfismo admisible y q un epimorfismo admisible en **C**, por definición, esto significa que hay sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} Y \longrightarrow Y' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0.$$

Otro diagrama

$$X \overset{q'}{\twoheadleftarrow} Z' \overset{i'}{\rightarrowtail} Y$$

da el mismo morfismo (en tal caso diremos que los diagramas son *isomorfos*) si existe un isomorfismo $Z \to Z'$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, "\cong"] & \\ X & & Y \\ & Z' \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

La composición de las flechas en **QC** se define como sigue: dados

$$X \twoheadleftarrow Z \rightarrowtail Y$$

y

$$Y \twoheadleftarrow V \rightarrowtail T,$$

forman el diagrama (en la categoría **A**)

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
Z \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail] & Y & \\
Z \times_Y V \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail] & V \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail] & T
\end{tikzcd}$$

Ya que **C** es cerrada bajo extensiones, y por el Teorema I.1.36,

$$Z \times_Y V \twoheadrightarrow X$$

$$Z \times_Y V \rightarrowtail T$$

son epi y mono admisibles respectivamente. Así el diagrama

$$X \twoheadleftarrow Z \times_Y V \rightarrowtail T$$

define una flecha en **QC** de X a T. Observemos que la clase de isomorfismo de este diagrama depende sólo de la clase de isomorfismos de $X \twoheadleftarrow Z \rightarrowtail Y$ y $Y \twoheadleftarrow V \rightarrowtail T$, así tenemos una regla de composición para morfismos bien definida, la cual es asociativa. De esta manera, si **C** es una categoría pequeña, entonces **QC** está bien definida, y es una categoría pequeña. Sea $0 \in \mathbf{QC}$ el objeto cero. Tenemos que $\{0\}$ es un 0-simplejo de **BQC**. El primer resultado de Quillen en este contexto es:

Teorema 2.3. *Hay un isomorfismo natural*

$$\psi\colon\ K_0(\mathbf{C}) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbf{BQC}, \{0\}.)$$

Demostración. El isomorfismo ψ es dado por $\psi[M] = [r_M]$, donde r_M es cierto lazo basado en 0. Veamos cómo es r_M.

Siempre se tiene un monomorfismo canónico admisible $i_M\colon\ 0 \rightarrowtail M$ y un epimorfismo $q_M\colon\ M \twoheadrightarrow 0$ asociado a cada objeto $M \in \mathbf{C}$. Además, dado un monomorfismo $i\colon\ M_1 \rightarrowtail M_2$, hay una flecha $i_!\colon M_1 \to M_2$ en **QC**, correspondiente a el diagrama $M_1 \overset{1}{\twoheadleftarrow} M_1 \overset{i}{\rightarrowtail} M_2$. Similarmente, dado un epimorfismo admisible $q\colon\ M_1 \twoheadrightarrow M_2$, hay una flecha $q^!\colon M_2 \to M_1$ en **QC**, correspondiente al diagrama $M_2 \overset{q}{\twoheadleftarrow} M_1 \overset{1}{\rightarrowtail} M_1$. De esta manera podemos construir $i_{M!}, q^!_M\colon 0 \to M$.

Las dos flechas $0 \to M$ in **QC** dadas por $i_{M!}$ y $q^!_M$ dan dos caminos $\{0\} \to \{M\}$ en **BQC**, denotados por $(i_{M!})$ y $(q^!_M)$. Sea $r_M = (i_{M!}) * (q^!_M)^{-1}$ donde la multiplicación $*$ y los inversos son las operaciones usuales de caminos; entonces r_M es el lazo orientado obtenido de seguir primero a $(i_{M!})$ y luego $(q^!_M)$ en sentido contrario.

Para ver que $[M] \mapsto [r_M]$ define un homomorfismo $K_0(\mathbf{C}) \to \pi_1(\mathbf{BQC}, \{0\})$, tenemos que demostrar que si

$$M' \overset{i}{\rightarrowtail} M \overset{q}{\twoheadrightarrow} M'' \tag{12}$$

es una sucesión exacta corta en $\mathbf{C}$, entonces $[r_M] = [r_{M'}]\cdot[r_{M''}]$ en $\pi_1(\mathbf{BQC}, \{0\})$ donde $\cdot$ denota la operación en π_1 y que $\pi_1(\mathbf{BQC}, \{0\})$ es abeliano.

De las sucesiones exactas

$$M' \rightarrowtail M' \times M'' \twoheadrightarrow M''$$

$$M'' \rightarrowtail M' \times M'' \twoheadrightarrow M'$$

Se observa que $[r_{M'}][r_{M''}] = [r_{(M'\times M'')}] = [r_{M''}][r_{M'}]$, es decir, las clases $[r_{M'}]$, $[r_{M''}]$ conmutan. Además, si tenemos que N' y N'' son isomorfos, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow N' \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

Por lo que $[r_{N'}] = [r_{N''}]$, entonces, el homomorfismo $\psi\colon K_0(\mathbf{C}) \to \pi_1(\mathbf{BQC}, \{0\})$ estaría bien definido.

Notemos que de la forma de la sucesión (12) y del hecho de que $i_M = i \circ i_{M'}$, $q_M = q_{M''} \circ q$ en $\mathbf{C}$, dan $i_{M!} = i_! \circ i_{M'!}$ y $q^!_M = q^!_{M''} \circ q^!$ en $\mathbf{QC}$, tenemos un diagrama donde los triángulos sombreados conmutan:

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i_!"] & M & M'' \arrow[l, "q^!"'] \\
& 0 \arrow[ul, "i_{M'!}"', "q^!_{M'}"] \arrow[u, bend left, "i_{M!}"] \arrow[u, bend right, "q^!_M"'] \arrow[ur, "q^!_{M''}", "i_{M''!}"'] &
\end{tikzcd}$$

Los triángulos sombreados dan un 2-simplejo en $\mathbf{BQC}$. En el diagrama, tenemos dos flechas mas $0 \to M$ en $\mathbf{QC}$, éstas son $i_! \circ q^!_{M'}$ y $q^! \circ i_{M''!}$. Afirmamos que $i_! \circ q^!_{M'} = q^! \circ i_{M''!}$. Por definición de la composición $i_! \circ q^!_{M'}$ corresponde al diagrama

$$0 \overset{q_{M'}}{\twoheadleftarrow} M' \overset{i}{\rightarrowtail} M$$

en $\mathbf{C}$ representa una flecha $u\colon 0 \to M$ en $\mathbf{QC}$. Por otra parte, la ley de composición nos da el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
0 \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail, "i_{M''!}"] & M'' & \\
0 \times_{M''} M \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail] & M \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail, "1"] & M
\end{tikzcd}$$

Pero, como $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ es exacta, tenemos que

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & \\
 & 0 \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail, "i_{M''!}"] & M'' & \\
 & 0 \times_{M''} M \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail] \arrow[dl, dashed, leftrightarrow] & M \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail, "1"] & M \\
M' \arrow[uur, bend left] \arrow[urr, tail, bend right] & & &
\end{tikzcd}$$

es decir, hay un isomorfismo $0 \times_{M''} M \xrightarrow{\cong} M'$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \times_{M''} M \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, "\cong"] & \\
0 & & M \\
 & M' \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces $u = i_! \circ q^!_{M'}$ y $q^! \circ i_{M''!}$ son representados por diagramas isomorfos , y dan flechas iguales en $\mathbf{QC}$. Entonces en el diagrama anterior con dos triángulos sombreados, podemos insertar una tercera flecha $u\colon 0 \to M$ e insertar dos triángulos sombreados (que corresponden a 2-simplejos en $\mathbf{BQC}$), de el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i_!"] & M & M'' \arrow[l, "q^!"'] \\
 & 0 \arrow[ul, "q^!_{M'}"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "i_{M''!}"'] &
\end{tikzcd}$$

Esto da una estructura de CW complejo, el cual es homeomorfo a una esfera menos tres discos, en el cual se observa que el lazo $r_{M'} \cdot r_{M''}$ es homotópico al lazo r_M, es decir $[r_{M'}][r_{M''}] = [r_M]$.

$\square$

Esto motivó a Quillen la generalización del funtor K_0 para categorías.

Definición 2.4. $K_i(\mathbf{C}) = \pi_{i+1}(BQC, \{0\}), i \geq 0.$.

Quillen también probó que sus dos definiciones son equivalentes, es decir tenemos el siguiente

Teorema 2.5. $K_n(\mathbf{P}(\Lambda)) = K_n(\Lambda)$

Para los detalles de la demostración ver [**21**, Tma. 5.3.20] y [**23**, Tma. 7.7].

CAPÍTULO V

ELEMENTOS DE TORSIÓN EN K_3

Como la definición de los grupos de K-Teoría Algebraica es muy abstracta, se han buscado maneras más concretas para representar elementos en dichos grupos. Por ejemplo Jones y Westbury construyeron elementos en K-Teoría Algebraica usando esferas homológicas dotadas de una representación de su grupo fundamental en $\mathrm{GL}(\Lambda)$ como veremos en este capítulo.

1. Esferas homológicas y elementos en $K_n(\Lambda)$

Definición 1.1. Una *k-esfera homológica* Σ, es una k variedad que tiene la misma homología que una k-esfera, es decir:

$$H_i(\Sigma) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 1.2. Sea G un grupo, una *representación* de G en $\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ es un homomorfismo de grupos $\alpha\colon G \to \mathrm{GL_n}(\Lambda)$.

Sea Σ una k-esfera homológica; ya que

$$0 = H_1(\Sigma) = \pi_1(\Sigma)/[\pi_1(\Sigma), \pi_1(\Sigma)],$$

entonces $\pi_1(\Sigma) = [\pi_1(\Sigma), \pi_1(\Sigma)]$, es decir, $\pi_1(\Sigma)$ es perfecto.

Dada una representación $\alpha\colon \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{GL_n}(\Lambda)$, sea $f\colon \Sigma \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL_n}(\Lambda)$ la aplicación que induce a α (ver Proposición II.4.6). Si componemos esta aplicación con la inclusión $\mathbf{B}\,\mathrm{GL_n}(\Lambda) \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)$ y aplicando la construcción "+" de Quillen obtenemos

$$\mathbb{S}^k \simeq \Sigma^+ \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+,$$

donde "$\simeq$" denota equivalencia homotópica. Lo anterior es porque la construcción "+" es funtorial (ver Proposición IV.1.3). De esta manera, la clase de homotopía de esta aplicación $\Sigma^+ \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+$ nos da elementos en $K_n(\Lambda)$ que denotaremos como

$$[\Sigma, \alpha] \in K_k(\Lambda) = \pi_k(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}(\Lambda)^+).$$

El objetivo de este capítulo es dar explícitamente elementos de torsión de $K_3(\mathbb{C})$ y $K_3(\mathbb{R})$, para ello consideremos un tipo especial de 3-esferas homológicas, las 3-esferas homológicas de Brieskorn.

Las 3-esferas homológicas de Brieskorn son un caso particular de las *3-esferas homológicas de Seifert* denotadas como $\Sigma(a_1, \cdots, a_m)$. El grupo fundamental de las 3-esferas homológicas de Seifert, tiene una presentación de la forma

$$\pi_1(\Sigma(a_1,\cdots,a_m)) =$$
$$\langle h, x_1,\cdots,x_m | [x_i,h]=1, x_1^{a_1}=h^{-b_1}\cdots x_m^{a_m}=h^{-b_m}, x_1\cdots x_m = h^{-b_0}\rangle$$

Las b_i satisfacen la siguiente relación

$$a_1\cdots a_n(-b_0+\frac{b_1}{a_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n})=1.$$

Definición 1.3. Una *3-esfera homológica de Brieskorn* que denotaremos con $\Sigma(p,q,r)$, es el conjunto

$$\Sigma(p,q,r)=\{(z_1,z_2,z_3)|z_1^p+z_2^q+z_3^r=0\}\cap\mathbb{S}^5\subset\mathbb{C}^3.$$

Proposición 1.4. *El grupo fundamental* $\pi_1(\Sigma(p,q,r))$ *tiene una presentación de la forma*

$$\langle h,x_1,x_2,x_3|[x_i,h]=1, x_1^p=h^{-b_1}, x_2^q=h^{-b_2}, x_3^r=h^{-b_3}, x_1x_2x_3=h^{-b_0}\rangle,$$

donde

$$-pqrb_0+qrb_1+prb_2+pqb_3=1.$$

Para mas información al respecto de las variedades de Saifert y en particular de las 3-esferas homológicas y su grupo fundamental ver [**19**].

Para nuestro propósito enunciaremos las propiedades de una aplicación llamada el *regulador* definido independientemente por Beilison [**4**] y Karoubi [**12**].

Proposición 1.5. *Existe un homomorfismo*

$$e\colon K_{2n+1}(\mathbb{C})\to\mathbb{C}/\mathbb{Z},$$

que tiene las siguientes propiedades:

I. *es un isomorfismo en* $K_1(\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}/\mathbb{Z}$,
II. *el homomorfismo e da un isomorfismo del subgrupo de torsión de* $K_{2n+1}(\mathbb{C})$ *con* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
III. *se anula en productos.*

Para su definición y demostración ver [**11**] o [**12**].

2. Elementos de torsión en $K_3(\mathbb{C})$

Se conocen varios resultados de grupos de K-Teoría Algebraica para campos, en particular tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{Q}$. *Entonces tenemos que*

$$\begin{aligned} K_3(\mathbb{R}) &\cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\oplus V,\\ K_3(\mathbb{C}) &\cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\oplus W.\end{aligned}$$

Para su demostración ver [**24**].

Sea $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(a_1 \cdots, a_m)) \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ una representación, ya que el grupo $\pi_1(\Sigma(a_1 \cdots, a_m))$ es perfecto, toda representación compleja debe tener su imagen en $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Nos restringiremos a representaciones en las que el elemento h actúa como un múltiplo escalar de la identidad.

Asumiendo que $\alpha(h) = \lambda_h I$ donde λ_h es un escalar, entonces, ya que $\alpha(h) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, se sigue que

$$\lambda_h = \zeta_n^{r_h}$$

es una n-ésima raíz de la unidad. Usaremos la notación $\zeta_d = e^{2\pi i/d}$ para la d-ésima raíz primitiva estándar de la unidad. Ahora considerando las matrices

$$\alpha(x_j),\ j = 1, \cdots, m.$$

En vista de las relaciones $x_j^{a_j} = h^{-b_j}$ en $\pi_1(\Sigma(a_1 \cdots, a_m))$, se sigue que los autovalores $\lambda_1(j), \cdots, \lambda_n(j)$ de $\alpha(x_j)$ deben satisfacer la ecuación

$$\lambda_k(j)^{a_j} = \lambda_h^{-b_j}.$$

Hay a_j raíces de esta ecuación y definimos $s_k(j)$ como

$$\lambda_k(j) = \zeta_{na_j}^{ns_k(j)-b_j r_h}$$

Definición 2.2. Nos referiremos a los números

$$s_k(j),\ 1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n$$

como el *tipo de la representación* α.

Con lo expuesto arriba, Jones y Westbury probaron el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea* $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(a_1, \cdots, a_m)) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *una representación del grupo fundamental de una esfera homológica de Seifert* $\Sigma(a_1, \cdots, a_m)$ *en el cual el elemento del centro* h *actúa como un múltiplo escalar de la identidad. Sea*

$$s_k(j),\ 1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n,$$

el tipo de la representación α*; entonces la parte real de* $e[(\Sigma(a_1, \cdots, a_m), \alpha]$ *está dada por*

$$2nRe(e[(\Sigma(a_1, \cdots, a_m), \alpha]) = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{a(s_k(j) - s_l(j))^2}{2a_j^2}$$

donde $a = a_1 \cdots a_m$.

Para su demostración ver [**11**, Tma. C].

Para nuestro caso la parte imaginaria de $e[\sum(a_1, \cdot, a_n), \alpha]$ es cero.

Para el caso $n = 2$ y 3-esferas de Brieskorn, tenemos el siguiente análisis: consideremos una representación $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(p, q, r)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; ya que $\pi_1(\Sigma(p, q, r))$ es perfecto, una representación de este tipo es irreducible y, más aún, el elemento h actúa como un múltiplo escalar de I, la matriz identidad de 2×2. Entonces $\alpha(h) = (-I)^f$ y, en vista de la presentación de la

Proposición 1.4 de $\pi_1(\Sigma(p,q,r))$, la representación α es dada por las matrices $A = \alpha(x_1)$, $B = \alpha(x_2)$ y $C = \alpha(x_3)$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ que satisfacen las ecuaciones

$$A^p = (-I)^f, B^q = (-I)^f, C^r = (-I)^f, ABC = (-I^{fb_0}).$$

Entonces los respectivos autovalores de las matrices A, B y C están dados por

$$\begin{aligned} \zeta_{2p}^{k}, \zeta_{2p}^{-k} \quad & 0 < k < p, \\ \zeta_{2q}^{l}, \zeta_{2q}^{-l} \quad & 0 < l < q, \\ \zeta_{2r}^{m}, \zeta_{2r}^{-m} \quad & 0 < m < r, \end{aligned}$$

tal que $k \equiv l \equiv m \equiv f \mod 2$. Si alguna de las matrices A, B o C es $\pm I$ entonces la representación es trivial (ver [**11**, Lema. 6.1]), pero como el grupo fundamental es perfecto, tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 2.4 (Jones y Wetsbury). *La función $\alpha \longmapsto (k,l,m)$ define una correspondencia uno a uno entre clases de conjugación de representaciones no triviales de $\pi_1(\Sigma(p,q,r))$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ y tripletas (k,l,m) con $0 < k < p$, $0 < l < q$, $0 < m < r$ y $k = l = m$ mod 2.*

Para su demostración ver [**11**, Tma. 6.2].

Con esta caracterización de las representaciones no triviales del grupo $\pi_1(\Sigma(p,q,r))$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ y las propiedades del regulador de la Proposición 1.5, Jones y Westbury en [**11**] probaron que,

LEMA 2.5 (Jones y Wetsbury). *Para una 3-esfera homológica de Brieskorn $\Sigma(p,q,r)$ y una representación $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$e([\Sigma(p,q,r),\alpha]) = -\frac{(qrk)^2 + (prl)^2 + (pqm)^2}{4pqr}.$$

Donde los números k, l y m son los correspondientes a la representación α del Teorema 2.4.

La demostración a lo anterior se encuentra en [**11**, Tma. D].

Ahora veamos ejemplos donde se ilustra explícitamente la teoría desarrollada por Jones y Westbury.

DEFINICIÓN 2.6. Una extensión $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ de los racionales $\mathbb{Q}$, donde ζ_d es una raíz d-ésima primitiva de la unidad, se llama *campo ciclotómico.*

DEFINICIÓN 2.7. Sea F una extensión de grado n de los números racionales $\mathbb{Q}$. Observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "\overline{\sigma}"] & \\ \mathbb{Q} \arrow[u] \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

Existen n extensiones $\overline{\sigma}\colon F \to \mathbb{C}$ de $\sigma\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$, que están determinados por las raíces de un polinómio irreducible p con coeficientes en $\mathbb{Q}$ (ver [**13**]).

Diremos que $\overline{\sigma}$ es una *inmersión real* de F si $\overline{\sigma}(F) \subset \mathbb{R}$ y diremos que es una *inmersión compleja* si $\overline{\sigma}(F) \nsubseteq \mathbb{R}$.

Al número de inmersiones reales r_1 lo llamaremos *lugares reales* y al número de inmersiones complejas r_2 lo llamaremos *lugares complejos*.

El polinomio irreducible p tiene n raíces en F, las raíces conjugadas z y $\overline{z}$ dan lugar a la misma extensión $\overline{\sigma}$ por lo que $r_1 + 2r_2 = n$.

Para mas información de los lugares reales y complejos ver [**7**] y [**26**].

Combinando los resultados de Borel [**5**], Merkurjev y Suslin [**17**], y Levine [**14**] tenemos que

$$K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)) = \mathbb{Z}/w_2(d) \oplus \mathbb{Z}^{r_2}$$

donde

$$w_2(d) = \mathrm{mcm}(24, 2d)$$

y r_2 es el número de lugares complejos de $\mathbb{Q}(\zeta_d)$.

En particular si $(6,d) = 1$, $w_2(d) = 24d$. Utilizando estos hechos, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 2.8 (Jones y Westbury). *Todo elemento en $K_3(\mathbb{C})$ de orden finito puede ser escrito como $[\Sigma(p,q,r),\alpha]$ para alguna representación $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.*

El cual se sigue del Lema 2.5.

Teorema 2.9 (Jones y Westbury). *Si $(6,d) = 1$ entonces hay una representación $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(2,3,d)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ tal que el elemento $[\Sigma(2,3,d),\alpha] \in K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ es un generador del subgrupo de torsión.*

Dicha representación α está dada por:

$$\begin{aligned}
\alpha(h) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\alpha(x_1) &= (-I)^{b_0+1}(\alpha(x_2)\alpha(x_3)), \\
\alpha(x_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\alpha(x_3) &= \begin{pmatrix} -\zeta_d & 0 \\ \zeta_d^{-1} & -\zeta_d^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para más detalles de la demostración de lo anterior ver [**11**, Tma. E].

La representación del Teorema 2.9 corresponde a la tripleta $(1,1,2-d)$ del Teorema 2.4. Estas matrices satisfacen las relaciones de la presentación de $\pi_1(\Sigma(p,q,r))$, por lo tanto $[\Sigma(p,q,r),\alpha] \in K_3(\mathbb{C})$ tiene orden $24d$.

3. Elementos de torsión en $K_3(\mathbb{R})$

En [**6**], Cisneros-Molina, siguiendo los resultados de Jones y Westbury, demostró que elementos de torsión en $K_3(\mathbb{R})$ pueden representarse por elementos $[\Sigma(p,q,r),\alpha]$ para alguna representación $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$. En esta sección veremos los resultados obtenidos por Cisneros-Molina.

Nota 3.1. Tenemos dos representaciones naturales:

$$u_n\colon\ \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{C}),$$
$$v_n\colon\ \mathrm{GL_n}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}),$$

donde u_n es la inclusión y, si $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$, entonces

$$v_n(A) = \begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix}$$

donde $A = Re(A) + iIm(A)$.

Estas representaciones son compatibles con la estabilización y más aún inducen homomorfismos

$$i_*\colon K_3(\mathbb{R}) \to K_3(\mathbb{C})$$
$$i^*\colon K_3(\mathbb{C}) \to K_3(\mathbb{R})$$

donde el primer homomorfismo corresponde a el inducido por la inclusión $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y el otro es llamado *homomorfismo transfer*. Tenemos que el homomorfismo i_* restringido al subgrupo de torsión $i_*\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ está dado por la multiplicación por 2 y i^* restringido al subgrupo de torsión $i^*\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un isomorfismo [**22**].

Teorema 3.2 (Cisneros-Molina). *Todo elemento en $K_3(\mathbb{R})$ de orden finito puede ser escrito como $[\Sigma(p,q,r),\beta]$ para alguna representación*

$$\beta\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_4(\mathbb{R}).$$

Demostración. Por el Teorema 2.8 un elemento de torsión en $K_3(\mathbb{C})$ es de la forma $[\Sigma(p,q,r),\alpha]$ con $\alpha\colon \pi_1([\Sigma(p,q,r),\alpha]) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Ya que i^* es un isomorfismo en la parte de torsión, un elemento de torsión en $K_3(\mathbb{R})$ es de la forma $i^*([\Sigma(p,q,r),\alpha]) = [\Sigma(p,q,r), v_2(\alpha)]$. Por lo tanto, si tomamos $\beta = v_2 \circ \alpha$ el teorema queda casi demostrado, sólo falta probar que β tiene imagen en $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$. Para ello, observemos que $u_{2n} \circ v_n(A)$ es conjugado a

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \quad \text{por} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & \frac{i}{2}I \\ iI & I \end{pmatrix}$$

en $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$. Por lo que

$$\mathrm{Det}\,\beta(A) = \mathrm{Det}(u_4 \circ \beta)(A) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \alpha(A) & 0 \\ 0 & \overline{\alpha}(A) \end{pmatrix} = 1$$

ya que $\alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. $\square$

3.1. K-Teoría de Milnor para campos Siguiendo la idea de Matsumoto (ver Teorema III.4), Milnor definió una K-Teoría para campos como sigue:

DEFINICIÓN 3.3. Dado un campo F, definimos el *álgebra tensorial* del grupo F^* como

$$T(F^*) = \mathbb{Z} \oplus F^* \oplus (F^* \otimes F^*) \oplus (F^* \otimes F^* \otimes F^*) \oplus \cdots .$$

DEFINICIÓN 3.4. El anillo graduado K_*^M es definido como el cociente de $T(F^\times)$ por el ideal generado por los elementos homogéneos $l(x) \otimes l(1-x)$ con $x \neq 0, 1$. El *K-grupo de Milnor* $K_n^M(F)$ es definido como el subgrupo de elementos de orden n.

Se sigue que $K_0^M(F) = \mathbb{Z}$ y $K_1^M(F) = F^*$ (con la operación del grupo escrita aditivamente). Por el Teorema III.4 de Matsumoto , tenemos que $K_2^M(F) = K_2(F)$, excepto que la operación es escrita aditivamente.

Tenemos un homomorfismo de anillos canónico $K_n^M(F) \to K_n(F)$, para toda n. Para $n \leq 2$ dicho homomorfismo es biyectiva.

DEFINICIÓN 3.5. Definimos *la parte indescomponible* de $K_3(F)$ como $K_3^{ind} = K_3(F)/K_3^M$, donde $K_3^M(F)$ es el K-grupo de Milnor.

Denotaremos la imagen de $[\Sigma(p,q,r), \beta] \in K_3(\mathbb{R})_{tor}$ en $K_3^{ind}(\mathbb{R})_{tor}$ por $\langle \Sigma(p,q,r), \beta \rangle$. Al respecto tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 3.6 (Cisneros-Molina). *Todo elemento en $K_3^{ind}(\mathbb{R})$ de orden finito puede ser escrito como $\langle \Sigma(p,q,r), \beta \rangle$ para alguna representación*

$$\beta\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_4(\mathbb{R}).$$

Para su demostración ver [**6**, Tma. 4.3].

PROPOSICIÓN 3.7 (Cisneros-Molina). *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)_{tor} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "p"] & K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d))_{tor} \arrow[d, "\cong"] \\
K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)_{tor} \arrow[r, "\cong"] & K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d))_{tor}
\end{tikzcd}$$

donde p es la proyección natural.

Para su demostración ver [**6**, 4.5].

4. Elementos de torsión en K_3 de extensiones cuadráticas

También en [**6**] Cisneros-Molina planteó el siguiente problema:

PROBLEMA 4.1. Encontrar alguna 3-esfera homológica de Brieskorn $\Sigma(p,q,r)$ y una representación explícita $\beta(d)\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ tal que el elemento $[\Sigma(p,q,r), \beta] \in K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ sea un generador del subgrupo de torsión de $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ para el subcampo $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$ de $\mathbb{C}$. Análogamente, encontrar una representación $\beta'(d)\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ tal que el elemento $\langle \Sigma(p,q,r), \beta' \rangle \in K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ sea un generador del subgrupo de torsión de $K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$.

En esta sección daremos un primer paso para la respuesta a este problema, generalizando lo expuesto por Cisneros-Molina para extensiones cuadráticas.

TEOREMA 4.2. *Sea E una extensión simple $F(z)$ de un campo F tal que z es algebraico sobre F. Sea $n \geq 1$ el grado de el polinomio irreducible en $F[x]$ que satisface z que denotaremos por $irr(z,F)$. Entonces, todo elemento w de $E = F(z)$ se puede expresar de manera única de la forma*

$$w = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}$$

donde los b_i están en F.

Para su demostración ver [**8**].

NOTA 4.3 (Extensiones cuadráticas). Sea F un campo y $w \in F$. Si w no es cuadrado de un elemento en F, entonces el polinomio $f(x) = x^2 - w$ no tiene raíces en F y, más aún, es irreducible. De esta manera, si z es una raíz de $f(x)$ y la característica de F es distinta de 2, entonces $F(z)$ es una extensión de F de grado dos. Llamaremos a $F(z)$ *extensión cuadrática* de F. Recíprocamente, dada una extensión E de F de grado 2, entonces existe $z \in E$ tal que $E = F(z)$. Esto se sigue de completar el cuadrado y de la formula general para ecuaciones cuadráticas que es válida en campos de característica distinta de 2. Se sigue del Teorema 4.2 que los elementos de $F(z)$ se escriben de manera única de la forma $a + bz$.

El polinomio $f(x) = x^2 - w$ tiene sólo dos raíces $z = \pm\sqrt{w}$. Entonces tenemos dos automorfismos $F(z) \to F(z)$: la identidad y el dado por mandar $\sqrt{w} \mapsto -\sqrt{w}$, este último automorfismo manda un elemento de la forma $a + bz$ a $a - bz$. Llamaremos a $a - bz$ *conjugado* de $a + bz$.

EJEMPLO 4.4. Los números complejos $\mathbb{C}$, son una extensión cuadrática de los números reales $\mathbb{R}$ al agregarle la unidad imaginaria i.

EJEMPLO 4.5. Recordemos que $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ es una extensión de los racionales $\mathbb{Q}$, donde ζ_d es una raíz d-ésima primitiva de la unidad la cual hemos llamado campo ciclotómico. Estos campos son extensiones cuadráticas ya que se obtienen del campo $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+ = \mathbb{Q}(\zeta_d + \zeta_d^{-1})$ al adjuntarle la raíz de $\zeta_d^2 + \zeta_n^{-2} - 2$, el cual es un número estrictamente negativo. El campo $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$ también se conoce como la *parte real del campo ciclotómico* $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ y es el máximo subcampo real de $\mathbb{Q}(\zeta_d)$.

DEFINICIÓN 4.6. Consideremos las siguientes dos funciones $R, I\colon F(z) \to F$ dadas como sigue: $R(a + bz) = a$ y $I(a + bz) = b$.

Observemos que estas dos funciones generalizan a las funciones parte real y parte imaginaria de un número complejo $Re, Im\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ respectivamente, considerando $z = i$. Además, tal y como sucede con los complejos, podemos definir análogos a las funciones $R, I\colon F(z) \to F$ para el grupo $\mathrm{GL_n}(F(z))$ como sigue: sea $A \in \mathrm{GL_n}(F(z))$, entonces $A = (a_{ij})$ se puede escribir como $A = R(A) + zI(A)$ donde $R(A) = (R(a_{ij}))$ e $I(A) = (I(a_{ij}))$. Esto generaliza, para extensiones cuadráticas, lo expuesto por Cisneros-Molina en [**6**] como veremos a continuación.

TEOREMA 4.7. *La función* $\nu_n^z\colon \mathrm{GL_n}(F(z)) \to \mathrm{GL}_{2n}(F)$ *dada por*

$$\nu_n^z(A) = \begin{pmatrix} R(A) & z^2 I(A) \\ I(A) & R(A) \end{pmatrix}$$

es una representación.

DEMOSTRACIÓN. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ en $\mathrm{GL_n}(F(z))$, donde $a_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij} z$ y $b_{ij} = \beta_{ij} + \delta_{ij} z$ con $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij} \in F$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \nu_n^z(AB) &= \begin{pmatrix} R(AB) & z^2 I(AB) \\ I(AB) & R(AB) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) & z^2 I\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) \\ & \\ I\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) & R\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} R\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) &= R(\sum_{k=1}^n (\alpha_{ik}\beta_{kj} + \gamma_{ik}\delta_{kj} z^2) + (\gamma_{ik}\beta_{kj} + \alpha_{ik}\delta_{kj}) z) \\ &= \sum_{k=1}^n R((\alpha_{ik}\beta_{kj} + \gamma_{ik}\delta_{kj} z^2) + (\gamma_{ik}\beta_{kj} + \alpha_{ik}\delta_{kj}) z) \\ &= \sum_{k=1}^n (\alpha_{ik}\beta_{kj} + \gamma_{ik}\delta_{kj} z^2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) &= I(\sum_{k=1}^n (\alpha_{ik}\beta_{kj} + \gamma_{ik}\delta_{kj} z^2) + (\gamma_{ik}\beta_{kj} + \alpha_{ik}\delta_{kj}) z) \\ &= \sum_{k=1}^n I((\alpha_{ik}\beta_{kj} + \gamma_{ik}\delta_{kj} z^2) + (\gamma_{ik}\beta_{kj} + \alpha_{ik}\delta_{kj}) z) \\ &= \sum_{k=1}^n (\gamma_{ik}\beta_{kj} + \alpha_{ik}\delta_{kj}). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\nu_n^z(AB) &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj} + z^2\sum_{k=1}^n \gamma_{ik}\delta_{kj}) & z^2(\sum_{k=1}^n \gamma_{ik}\beta_{kj} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\delta_{kj}) \\ \\ \sum_{k=1}^n \gamma_{ik}\beta_{kj} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\delta_{kj} & \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj} + z^2\sum_{k=1}^n \gamma_{ik}\delta_{kj} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R(A)R(B) + z^2 I(A)I(B) & z^2(R(A)I(B) + I(A)R(B)) \\ \\ I(A)R(B) + R(A)I(B) & R(A)R(B) + z^2 I(A)I(B) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} R(A) & z^2 I(A) \\ I(A) & R(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(B) & z^2 I(B) \\ I(B) & R(B) \end{pmatrix} \\
&= \nu_n^z(A) \circ \nu_n^z(B)
\end{aligned}$$

□

Esta representación es inyectiva, ya que dadas $A, B \in \mathrm{GL_n}(F(z))$ y supongamos que

$$\nu_n^z(A) = \nu_n^z(B),$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} R(A) & z^2 I(A) \\ I(A) & R(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(B) & z^2 I(B) \\ I(B) & R(B) \end{pmatrix},$$

Entonces $R(A) = R(B)$ e $I(A) = I(B)$. Por la unicidad en el Teorema 4.2, se tiene que $A = B$.

Por lo anterior se tiene que ν_n^z es un isomorfismo con su imagen.

Además, observemos que la matriz $u_{2n} \circ \nu_n^z(A)$ es conjugada a

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \quad \text{por} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & \frac{z}{2}I \\ \\ -\frac{1}{z}I & I \end{pmatrix}$$

en $\mathrm{GL_n}(F(z))$, donde $\overline{A}$ significa conjugar las entradas de A. Por lo tanto, si suponemos que una matriz A tiene determinante 1, entonces $\nu_n^z(A)$ tiene determinante 1.

De esta manera, si empezamos con una representación

$$\alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_n(F(z))$$

y la componemos con ν_n^z obtenemos una representación

$$\beta = \nu_n^z \circ \alpha\colon \pi_1(\Sigma(p,q,r)) \to \mathrm{SL}_{2n}(F).$$

Con lo anterior, estamos en condiciones de dar el primer paso para la respuesta al problema planteado en la introducción de esta sección, daremos elementos explicitos en $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$.

Sea $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$ la parte real del campo ciclotómico $\mathbb{Q}(\zeta_d)$. Por los resultados de Borel [**5**], Merkurjev y Suslin [**17**], y Levine [**14**] tenemos que

$$K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+) = \mathbb{Z}/2w_2(d) \oplus (\mathbb{Z}/2)^{r_1 - 1}$$

donde

$$w_2(d) = \mathrm{mcm}(24, 2d)$$

y r_1 es el número de lugares reales de $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$.

En particular si $(6, d) = 1$, entonces $w_2(d) = 24d$.

En [**3**], Bass y Tate probaron que para un campo de números F, la parte de torsión del K-grupo de Milnor [**18**] es $K_n^M(F) \cong (\mathbb{Z}/2)^{r_1}$ donde r_1 es el número de lugares reales de F. De esta manera tenemos que

$$K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)_{tor} \cong K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)/(\mathbb{Z}/2)^{r_1} \cong \mathbb{Z}/w_2(d)$$

Consideremos la 3-esfera homológica de Brieskorn $\Sigma(2, 3, d)$, hemos encontrado una representación $\beta(d)\colon \pi_1(\Sigma(2, 3, d)) \to \mathrm{SL}_4(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ tal que el elemento $[\Sigma(2, 3, d), \beta(d)] \in K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ tiene orden $24d$ y $\langle \Sigma(2, 3, d), \beta(d)\rangle \in K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ tiene orden $12d$:

La representación α del Teorema 2.9 tiene entradas en el campo ciclotómico $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ el cual, como ya se mencionó es una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$ al agregarle la raíz cuadrada de $z_0 = \zeta_d^2 + \zeta_d^{-2} - 2$, además observemos que

$$\zeta_d = \frac{\zeta_d + \zeta_d^{-1}}{2} + \frac{\sqrt{\zeta_d^2 + \zeta_d^{-2} - 2}}{2}$$

$$\zeta_d^{-1} = \frac{\zeta_d + \zeta_d^{-1}}{2} - \frac{\sqrt{\zeta_d^2 + \zeta_d^{-2} - 2}}{2}.$$

Así que, $\beta(d) = \nu_2^{z_0} \circ \alpha$ es una representación del grupo fundamental de la 3-esfera homológica $\Sigma(2, 3, d)$ en $\mathrm{SL}_4(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ y por lo tanto nos da un elemento $[\Sigma(2, 3, d), \beta(d)] \in K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$.

Veamos que es de orden $24d$. Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned}
\nu_2(\alpha(h)) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\nu_2(\alpha(x_1)) &= \nu_2((-I)^{b_0+1}\alpha(x_2)\alpha(x_3)), \\
\nu_2(\alpha(x_2)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\nu_2(\alpha(x3)) &= \begin{pmatrix} -\frac{\zeta_d+\zeta_d^{-1}}{2} & 0 & -\frac{\zeta_d^2+\zeta_d^{-2}-2}{2} & 0 \\ \frac{\zeta_d+\zeta_d^{-1}}{2} & -\frac{\zeta_d+\zeta_d^{-1}}{2} & -\frac{\zeta_d^2+\zeta_d^{-2}-2}{2} & \frac{\zeta_d^2+\zeta_d^{-2}-2}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\zeta_d+\zeta_d^{-1}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\zeta_d+\zeta_d^{-1}}{2} & -\frac{\zeta_d+\zeta_d^{-1}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

El tipo de la representación de $\beta(d)$ (ver el Teorema 2.3) está dado por tomar $n = 4$, $r_h = 2$ y los $s_k(j)$ son:

$$\begin{array}{lll} s_1(1) = 1, & s_1(2) = 0, & s_1(3) = (d-3)/2, \\ s_2(1) = 1, & s_2(2) = 0, & s_2(3) = (d-3)/2, \\ s_3(1) = 0, & s_3(2) = 2, & s_3(3) = (d+1)/2, \\ s_4(1) = 0, & s_4(2) = 2, & s_4(3) = (d+1)/2. \end{array}$$

Para calcular el orden del elemento $[\Sigma(2,3,d), \beta_d]$, tenemos que ver a β como una representación compleja. De esta manera tenemos que, por el Teorema 2.3

$$e[\Sigma(2,3,d), \beta] = \frac{25d^2 + 144}{12d}.$$

Por la Proposición 3.7, el elemento $[\Sigma(2,3,d), \beta] \in K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)]$ tiene orden $24d$ y $\langle \Sigma(2,3,d), \beta \rangle \in K_3^{ind}(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ tiene orden $12d$.

Ahora veremos cómo usar la representación ν_n^z de manera recursiva.

Daremos una representación $\beta'(d) \colon \pi_1(\Sigma(3,4,d)) \to \mathrm{SL}_8(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ que induce un elemento $[\Sigma(3,4,d), \beta'(d)]$ del subgrupo de torsión $\mathbb{Z}/48d$ de $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$.

Para este caso necesitamos un poco más de trabajo. Primero observemos que si tenemos una representación $\alpha'(d) \colon \pi_1(\Sigma(3,4,d)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ que corresponda a la tripleta $(1,1,2-d)$ y la 3-esfera homológica $\Sigma(3,4,d)$ tenemos que

$$e([\Sigma(3,4,d), \alpha']) = -\frac{(4d)^2 + (3d)^2 + (12(2-d))^2}{48d}.$$

Entonces el elemento $[\Sigma(3,4,d), \alpha'(d)]$ tiene orden $48d$.

Ahora bien, la representación α' que corresponde a la tripleta $(1,1,2-d)$ está dada por

$$\begin{aligned} \alpha'(h) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \alpha'(x1) &= (-I)^{b_0}(\alpha'(x_2)\alpha'(x_3))^{-1}, \\ \alpha'(x2) &= \begin{pmatrix} 0 & \zeta_d + \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\zeta_d + \sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ \alpha'(x_3) &= \begin{pmatrix} -\zeta_d & 0 \\ \zeta_d^{-1} & -\zeta_d^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La cual se puede ver como $\alpha'(d) \colon \pi_1(\Sigma(3,4,d)) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\zeta_d)(\sqrt{2}))$ puesto que las matrices tienen entradas en el campo $\mathbb{Q}(\zeta_d)(\sqrt{2})$. Este campo se puede ver como una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ que a su vez es extensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\zeta_d)^+$. Por lo que, si consideramos $z_0 = \zeta_d^2 + \zeta_d^{-2} - 2$, la sucesión

$$\pi_1(\Sigma(3,4,d)) \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\zeta)(\sqrt{2})) \xrightarrow{\nu_2^{\sqrt{2}}} \mathrm{SL}_4(\mathbb{Q}(\zeta)) \xrightarrow{\nu_4^{z_0}} \mathrm{SL}_8(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+),$$

nos da una representación

$$\beta'(d) = \nu_4^{z_0} \circ \nu_2^{\sqrt{2}} \circ \alpha'(d) \colon \pi_1(\Sigma(3,4,d)) \to \mathrm{SL}_8(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+).$$

El tipo de la representación $\beta'(d)$ (ver el Teorema 2.3) está dado por tomar $n = 8$, $r_h = 4$ y los $s_k(j)$ son:

$$\begin{array}{lll}
s_1(1) = 0, & s_1(2) = 0, & s_1(3) = (d-3)/2, \\
s_2(1) = 0, & s_2(2) = 0, & s_2(3) = (d-3)/2, \\
s_3(1) = 0, & s_3(2) = 1, & s_3(3) = (d-3)/2, \\
s_4(1) = 0, & s_4(2) = 1, & s_4(3) = (d-3)/2, \\
s_5(1) = 2, & s_5(2) = 2, & s_5(3) = (d+1)/2, \\
s_6(1) = 2, & s_6(2) = 2, & s_6(3) = (d+1)/2, \\
s_7(1) = 2, & s_7(2) = 3, & s_7(3) = (d+1)/2, \\
s_8(1) = 2, & s_8(2) = 3, & s_8(3) = (d+1)/2.
\end{array}$$

Nuevamente veremos esta representación como compleja. De esta manera por el Teorema 2.3

$$e[\Sigma(3,4,d), \beta'(d)] = \frac{119d^2 + 48}{12d}.$$

NOTA 4.8. En resumen, a partir de las representaciones estudiadas por Jones y Westbury, la representaión ν_n^z del Teorema 4.7 nos ha permitido encontrar elementos en $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$. Podemos calcular el orden de dichos elementos pero vistos en $K_3(\mathbb{C})$. De esta manera, queda pendiente encontrar un generador para $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$ dentro de los elementos que hemos construido, pues $[\Sigma(2,3,d), \beta(d)]$ no tiene el orden requerido y no sabemos el orden de $[\Sigma(3,4,d), \beta'(d)]$ en $K_3(\mathbb{Q}(\zeta_d)^+)$. Para ello, sería suficiente probar que el homomorfismo ν_n^z induce isomorfismo en K-Teoría, ya que, en particular $\nu_n^i = v_n$ induce isomorfismo. También sería bueno probar que el homomorfismo inclusión $\mu_n \colon \mathrm{GL}_n(F) \to \mathrm{GL}_n(F(z))$ induce multiplicación por 2 como el homomorfismo $u_n \colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Bibliografía

[1] Editorial. *K-Theory*, (1):1–4, 1987.

[2] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, and Carlos Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[3] H. Bass and J. Tate. The Milnor ring of a global field. In *342*, 1973.

[4] A. A. Beilinson. Higher regulators and values of L-functions of curves. *Funct. Anal. Appl.*, 14:116–117, 1980.

[5] A. Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. 7:235–272, 1974.

[6] José Luis Cisneros-Molina. A note on torsion in K_3 of the real numbers. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 10(Special Issue):117–128, 2004.

[7] Otto Endler. *Teoria dos números algébricos*, volume 15 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1986.

[8] John B. Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967.

[9] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[10] Hvedri Inassaridze. *Algebraic K-Theory*, volume 311 of *Matematics and Its Aplications*. Kluwer Academic, Tbilisi, Georgia.

[11] J. D. S. Jones and B. W. Westbury. Algebraic K-theory, homology spheres, and the η-invariant. 34(4):929–957, 1994.

[12] Max Karoubi. *Homologie Cyclique et K-Théorie*. 1987.

[13] Serge Lang. *Algebra*. Springer-Verlag, New York, third edition edition, 2002.

[14] Marc Levine. The indecomposable K_3 of fields. 22:255–344, 1989.

[15] Emilio Lluis-Puebla. *Álgebra homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica*. Iberoamericana, segunda edition, 2005.

[16] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[17] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin. The group K_3 for a field. *Math. USSR Izvestiya*, 36(3):541–565, 1991.

[18] John Milnor. Algebraic K-theory and quadratic forms. *Invent. Math.*, 1970.

[19] Peter Orlik. *Seifert manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 291.

[20] Daniel Quillen. Algebraic K-Theory. Lecture notes of a course given at the LMS-EPSRC Instructional Conference on K-Theory, Lancaster University, 9-5 July, 1995. Based on lecture notes by J. L. Cisneros-Molina, 1995.

[21] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-Theory and Its Applications*. 147. 1994.

[22] Chih-Han Sah. Homology of classical lie groups made discrete III. 56:269–312, 1989.

[23] V. Srinivas. *Algebraic K-Theory*, volume 90 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston-Basel-berlin, second edition, 1993.

[24] A. A. Suslin. On the K-theory of local fields. 34:301–318, 1984.

[25] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. 1994.

[26] André Weil. *Basic number theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.

Índice alfabético