UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CADENAS DE MARKOV EN ESPACIO DE ESTADOS GENERAL, CONJUNTOS PEQUEÑOS Y DICOTOMÍA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

LUIS DAVID ÁLVAREZ CORRALES

DIRECTOR DE TESIS: DR. NELSON O. MURIEL TORRERO

México, D.F. NOVIEMBRE 2009.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno. Apellido paterno: Apellido materno: Nombres: Teléfono: Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera: Número de cuenta:	1. Datos del alumno. Álvarez Corrales Luis David 55389523 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 405000162
2. Datos del tutor. Grado: Nombres: Apellido paterno; Apellido materno:	2. Datos del tutor. Doctor Nelson Omar Muriel Torrero
3. Datos del sinodal 1. Grado: Nombres: Apellido paterno; Apellido materno:	3. Datos del sinodal 1. Doctora María Asunción Begoña Fernández Fernández
4. Datos del sinodal 2. Grado: Nombre: Apellido paterno; Apellido materno:	4. Datos del sinodal 2. Doctora Ana Meda Guardiola
5. Datos del sinodal 3. Grado: Nombre: Apellido paterno: Apellido materno:	5. Datos del sinodal 3. M. en C. Juan Martín Barrios Vargas
6. Datos del sinodal 4. Grado: Nombre: Apellido paterno: Apellido materno:	6. Datos del sinodal 4. M. en C. Gerardo Rubio Hernández
7. Datos del trabajo escrito. Título: Número de páginas: Año:	7. Datos del trabajo escrito. Cadenas de Markov en espacio de estados general, conjuntos pequeños y dicotomía 180 2009

A mi madre y a mi abuela

Agradecimientos

A mi familia, amigos, maestros, compañeros, ligues, mascotas, gracias por guiarme en la vida, por formarme de esta manera, por acompañarme en momentos difíciles, irreales, increíbles... gracias.

Índice general

Introducción

En un curso básico de Procesos Estocásticos se estudian las propiedades de las *Cadenas de Markov* $\{X_n\}$ en un espacio de estados discreto ξ que están caracterizadas por la estructura de dependencia

$$P[X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0] = P[X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}],$$
$$P[X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}] = P[X_1 = x_n | X_0 = x_{n-1}],$$

conocida como la *propiedad de Markov.* A la asignación

$$p(x, y) = P[X_1 = y | X_0 = x], \text{ para todas } x, y \in \xi;$$

se le conoce como la *función de transición.* Dada una distribución $\pi_0 = \{\pi_0(x), x \in \xi\}$ para el estado inicial X_0; como corolario de la propiedad de Markov, podemos caracterizar a las distribuciones finito dimensionales del Proceso $\{X_n\}$ mediante una ecuación conocida como la regla del producto: para cualquier número natural n

$$P[X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0] = \Pi_{i=0}^{n-1} P[X_{j+1} = x_{j+1} | X_j = x_j] \pi_0(x_0).$$

De dicha ecuación podemos ver que las propiedades del Proceso Estocástico $\{X_n\}$ quedan resumidas en dos objetos: la distribución inicial π_0 y la función de transición p; simplificándose su estudio notablemente.

El principal objeto de estudio de $\{X_n\}$ es la *estabilidad* del mismo, clasificando a los estados en recurrentes (estables) y transitorios (inestables), dependiendo si el Proceso regresa a ellos o no. Especificamente, un estado x es recurrente si

$$P[\inf_n X_n = x | X_0 = x] = 1;$$

y x es transitorio si no es recurrente. Podemos extender la clasificación al Proceso de la manera natural, es decir, $\{X_n\}$ es recurrente si todos los elementos de ξ son recurrentes; y es transitoria si no es recurrente.

Es en este punto donde la noción de comunicación entre estados se vuelve vital, ya que la propiedad de Markov hace de dicha comunicación un medio para heredar propiedades de estabilidad.

En las aplicaciones, la propiedad de Markov es verdaderamente útil en modelos poblacionales, modelar el número de partículas en un medio líquido o la ganancia en unidades monetarias de un apostador. Desgraciadamente, la estructura discreta del espacio de estados nos limita en muchas otras aplicaciones: la entrada y salida de flujo en en un medio, la posición de una partícula en el espacio a través del tiempo, el precio de una acción.

En este trabajo extendemos el análisis de estabilidad para Procesos Estocásticos $\{\phi_n\}$ con una estructura de dependencia Markoviana y homogénea, pero en algún espacio de estados no numerable X, aprovechando las propiedades de la integral de Lebesgue. Dotamos a X con la σ-álgebra $B(X)$. A la función

$$P(x,A) = P[\phi_1 \in A|\phi_0 = x], \text{ para cualesquiera } x \in X \text{ y } A \in B(X)$$

le llamamos *Núcleo de Probabilidad de transición.* Dada una distribución μ para el estado ϕ_o, tenemos el análogo a la regla del producto,

$$P_\mu(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \ldots, \phi_n \in A_n)$$

$$= \int_{A_0}\int_{A_1} \cdots \int_{A_{n-1}} P(y_{n-1}, A_n)P(y_{n-2}, dy_{n-1})...P(y_0, dy_1)d\mu(y_0)$$

del cual podemos concluir, al igual que en el caso discreto, que el estudio de $\{\phi_n\}$ recae en los objetos μ y $P(x,\cdot)$.

Aunque $\{\phi_n\}$ es una extensión natural del caso discreto, hay claras diferencias. La más notoria es que en la segunda entrada de $P(x,\cdot)$ ya no tomamos puntos, si no conjuntos medibles, ya que si $P(x,\cdot)$ tiene densidad, $P(x,\{y\}) = 0$.

Al querer extender los conceptos de comunicación, tenemos el mismo problema: no puede ser de punto a punto o de conjunto a punto; si no, de conjunto a conjunto. Las Cadenas irreducibles $\{\phi_n\}$ ahora son las que cumplen que todos los conjuntos de tamaño razonable son alcanzados con Probabilidad positiva, desde cualquier estado inicial.

El trabajar con conjuntos finitos de puntos en $\{X_n\}$ facilita su estudio. Queremos hacer un análisis análogo para $\{\phi_n\}$, y tenemos un acercamiento si X cuenta con ciertos conjuntos accesibles que de alguna manera se comporten como conjuntos finitos puntos: átomos. Además, la existencia de algún átomo accesible hace más fáciles las nociones de comunicación. El problema es que incluso en Cadenas muy simples no existen.

Bajo ciertas condiciones, podemos construir una Cadena artificial que contenga un átomo y luego pasar sus propiedades a la Cadena original. La condiciones bajo las cuales lo podemos hacer es básicamente pedir la existencia de otros conjuntos: los pequeños. Para ello, sólo tenemos que pedir que la Cadena sea irreducible.

El Teorema de existencia de conjuntos pequeños es el Teorema principal de este trabajo. Como es de esperarse, su prueba está muy alejada de lo trivial, y hace evidente el uso de la nueva herramienta con la que se trabaja.

Al igual que en el caso discreto, nuestro estudio de $\{\phi_n\}$ se centra en hacer un análisis de estabilidad. Damos un criterio de clasificación de estados, cuya finalidad es dar una clasificación dicotómica de Cadenas de Markov. En términos generales, una Cadena de Markov es recurrente si al comenzar en cualquier conjunto accesible, regresa una infinidad de veces a el; y es transitoria si no es recurrente. Para que esta definición sea consistente, solo debemos pedir que $\{\phi_n\}$ sea irreducible.

Los criterios de estabilidad estarán basados en el estudio de una familia de Núcleos de transición. De modo que damos criterios que solo impliquen el estudio de un solo Núcleo, basados en la existencia de funciones para las cuales el Proceso Estocástico $\{f(\phi_n)\}$ se comporte como una supermartingala o submartingala sobre cierto conjunto.

Análogamente al caso discreto, la base de la clasificación está en la noción de comunicación entre estados, ya que la propiedad de Markov hace de dicha comunicación un para heredar propiedades de estabilidad, de modo que es crucial el haber dado una definición de comunicación entre conjuntos consistente con la nueva estructura del espacio.

Simbología

Sea (X, τ_X) un espacio topológico; σ_X una σ-álgebra sobre X; μ y η dos Medidas sobre σ_X; $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones y $Y : (X, \sigma_X) \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria.

1. λ^n Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

   Si $X = \mathbb{R}^n$ y σ_X es la σ-álgebra de Lebesgue, λ^n es la única Medida que le asocia a las n-celdas su volumen.

2. $\overline{\mathbb{N}}$, los naturales union el cero

   $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

3. $\mathbb{R}^+$, los números reales positivos y el cero

   $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

4. $\prec$, Medidas absolutamente continuas.

   Decimos que μ es absolutamente continua con respecto a η, y lo denotamos $\mu \prec \eta$, si, y sólo si, para todo $A \in \sigma_X$ tal que $\eta(A) = 0$, entonces $\mu(A) = 0$

5. $\frac{d\mu}{d\eta}$, derivada de Radon-Nikodym.

   Si existe $h : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ medible tal que la Medida μ tenga la representación integral

   $$\mu(A) = \int_A h d\eta, \text{ para todo } A \in \sigma_X,$$

   decimos que h es la derivada de Radon-Nikodym de μ con respecto de η, y lo denotamos $h = \frac{d\mu}{d\eta}$

6. μ-cdq, propiedades válidas casi donde quiera, relativo a μ.

Decimos que la propiedad P es válida μ-cdq si, y sólo si, existe $A \in \sigma_X$ tal que $\mu(A) = 0$ y P se cumple para todo $x \in A^c$.

7. $\binom{n}{m}$, las combinaciones de n en m.

   Sean n y m dos números naturales con $m \leq n$, el número de subconjuntos de tamaño m tomados de un conjunto de tamaño n está dado por $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

8. $\mu_n \overrightarrow{w} \mu_\infty$ convergencia débil.

   Decimos que la sucesión de Medidas de Probabilidad $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debilmente a la Medida de Probabilidad μ_∞, y lo denotamos $\mu_n \overrightarrow{w} \mu_\infty$, si, y sólo si, para toda función continua y acotada f,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu_\infty$$

9. $*$, convolución.

   Si $X = \mathbb{R}^n$, la convolucion entre μ y η es una Medida definida mediante

$$(\mu * \eta)(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(A - x)\eta(dx), \text{ para todo } A \in \sigma_{\mathbb{R}^n}$$

   donde $A - x = \{y \in \mathbb{R}^n | y = a - x, \text{ para algun } a \in A\}$. Para cualquier número natural n, μ^{n*} denota la convolución de μ consigo misma n veces.

   Si f y g son medibles, la convolución entre ellas es la función medible dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\lambda(dy), \text{ para toda } x \in \mathbb{R}^n$$

   Para cualquier número natural n, f^{n*} denota a la convolución de f consigo misma n veces.
   Si $X = \overline{\mathbb{N}}$, la convolución entre f y g está dada por

$$(f * g)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)g(n - m), \text{ para toda } n \in \overline{\mathbb{N}}$$

10. δ_x, la Medida de dirac concentrada en x.

    Sea $x \in X$. A la Medida de Probabilidad $\delta_x : \sigma_X \to [0, \infty]$, definida mediante

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in A \\ 0 & , \text{ si } x \notin A \end{cases} \text{ para todo } A \in \sigma_X$$

se conoce como la Medida de dirac concentrada en x.

11. $\sim$, la Distribución de una variable aleatoria.

    Decimos que la variable aleatoria Y se Distribuye Γ, y lo denotamos $Y \sim \Gamma$ si, y sólo si,

    $$P[Y \leq x] = \Gamma(x)$$

12. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones infinitamente diferenciables.

    $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | h$ tiene derivadas de todos los órdenes en cualquier $x \in \mathbb{R}^n\}$

13. $M(n \times m)$, el espacio de las matrices de $n \times m$

    $M(n \times m) = \{A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m | A$ es una función lineal$\}$

14. $[\cdot]^+$, función máximo.

    Definimos la función máximo $[\ ]^+ : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ tal que $[]^+(x) = \text{máx}\{0, x\}$.

15. $f_{/C}$, la restricción de f al conjunto C.

    Sea $C \subseteq X$, definimos la restricción de f al conjunto C, $f_{/C} : C \to \mathbb{R}$ tal que $f_{/C}(x) = f(x)$, para toda $x \in C$.

16. Im, imagen de una función.

    $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} |\ \ existe\ \ x \in X\ \ tal\ que\ \ f(x) = y\}$

17. $\mu_{/C}$, Medida restringida al conjunto C.

    Sea $C \in \sigma_X$, definimos la medida $\mu_{/C} : \sigma_X \to [0, \infty]$ dada por

    $$\mu_{/C}(A) = \mu(A \cap C), \text{ para todo } A \in \sigma_X$$

18. $m.c.d.$, máximo común divisor.

    Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$, denotamos al máximo común divisor de $\mathcal{A}$ (el divisor común más grande de todos los elementos de $\mathcal{A}$) como $m.c.d.(A)$

19. $\perp$, Medidas ortogonales.

    Decimos que μ y η son ortogonales, y lo denotamos $\mu \perp \eta$, si, y sólo si, existen $A, B \in \sigma_X$ disjuntos, tal que $\mu(A) = \eta(B) = 0$.

20. 2^X, la potencia de X.

    $2^X = \{A \subseteq X\}$, el conjunto de todos los subconjuntos de X.

21. $\sigma(\cdot)$, sigma algebra generada por una familia de subconjuntos.

    Sea $\beta \subseteq 2^X$, una familia de subconjuntos de X,

    $$\sigma(\beta) = \bigcap \{\sigma | \sigma \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \beta \subseteq \sigma\}$$

22. $\sigma(Y)$, sigma algebra generada por la variable aleatoria Y.

    Sea $\beta = \{Y^{-1}(A) | A \in B(\mathbb{R})\}$, decimos que $\sigma(Y)$ es la σ-álgebra generada por Y si, y sólo si, $\sigma(Y) = \sigma(\beta)$. Es decir, $\sigma(Y)$ es la mínima σ-álgebra que hace a Y variable aleatoria.

23. Sigma algebra numerablemente generada.

    Decimos que σ es numerablemente generada si, y sólo si, existe

    $$\beta = \{B_i | i \in \mathbb{N}\}$$

    un conjunto de particiones finitas de X tal que B_{i+1} es un refinamiento de B_i y $\sigma = \sigma(\beta)$.

    Supongamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

    $$B_i = \{B_i^1, \ldots, B_i^{n_i}\}, \text{ para algún } n_i \in \mathbb{N}$$

    fijando $i \in \mathbb{N}$, entonces

    $$B_i(x) := \{B_i^j \in B_i | x \in B_i^j\}$$

24. *supp*, el soporte de una función.

    $supp(f) = \overline{\{x \in X | f(x) > 0\}}$, donde $\overline{A}$ denota la cerradura topológica del conjunto A.

Capítulo 1

Procesos de Markov y Probabilidades de transición

En este primer Capítulo introducimos las nociones básicas de una Cadena de Markov homogénea, para lo cual es necesario describir en que espacio están definidas, que operadores las caracterizan y dar un Teorema de existencia.

Luego hacemos un analisis análogo al de Cadenas de Markov en espacio de estados discreto, como las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, tiempos de paro, funciones relacionadas con las Cadenas, etcétera.

Por último, introducimos a las Cadenas Muestreadas, subcadenas de una Cadena de Markov que amplian y facilitan el estudio de la original.

1.1. El espacio de estados

De ahora en adelante, trabajamos con Procesos Estocásticos de la forma $\Phi = \{\phi_n | n \in \overline{\mathbb{N}}\}$, donde cada variable aleatoria Φ_n tiene un rango común X, llamado el *espacio de estados* del Proceso. Denotamos por $B(X)$ a la σ-álgebra del espacio X.

Tomamos a $X^{n+1} = \prod_{k=0}^{n} X_k$, donde cada $(X_k, B(X_k))$ es una copia de $(X, B(X))$; y a cada X^{n+1} lo equipamos con la σ-álgebra $\mathcal{F}^n = \bigvee_{k=0}^{n} B(X_k)$. Sea $\Omega = \Pi_{n=0}^{\infty} X_n$, lo equipamos con la σ-álgebra $\mathcal{F} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$.

Por último, dado el Proceso Estocástico $\Phi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$, definimos $\mathcal{F}_n^{\Phi} = \sigma(\phi_0, \dots, \phi_n)$.

En la teoría de Cadenas de Markov en espacio de estados discreto, se considera que X es a lo más numerable, comúnmente $X = \mathbb{N}$ ó $X = \mathbb{Z}$. En este trabajo se presenta teoría de cadenas de Markov en espacios de estados más generales.

Definición 1. *Sea X el espacio de estados del Proceso Estocástico Φ, decimos que X es lcsH si, y sólo si, (X, τ_X) es un espacio topològico de Haussdorf, localmente compacto y separable, y tomamos a $B(X)$ como la σ-álgebra de Borel.*

Si X es un lcsH, entonces es un espacio topológico regular, ya que es de Haussdorf y localmente compacto; al ser separable y localmente compacto, es segundo numerable. El Teorema 35 nos asegura que (X, τ_X) es metrizable.

Proposición 1. *Si X es un espacio de estados lcsH, entonces X está dotado con una σ-álgebra numerablemente generada, es decir, existe*

$$\beta = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$$

conjunto de particiones finitas de X, tal que B_{n+1} es un refinamiento de B_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $B(X) = \sigma(\beta)$.

Demostración. Como (X, τ_X) es metrizable y separable, existe una base numerable de τ_X, digamos $\mathbb{U} = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$. Definamos la sucesión de particiones como sigue:

$$B_1 = \{U_1, X \setminus U_1\}$$

$$B_2 = \{U_1 \cap U_2, U_1 \setminus U_2, U_2 \setminus U_1, X \setminus (U_1 \cup U_2)\}$$

y B_n será la partición de X generada por $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

B_{n+1} es un refinamiento de B_n, es decir, cualquier elemento de B_n se escribe como una unión finita de elementos de B_{n+1}.

Sea $\beta = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$, por construcción tenemos que

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, a U_n lo podemos escribir como una unión finita de elementos de elementos de B_n, es decir, la familia β genera la base de la topología τ_X.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, a todo elemento de B_n lo podemos ver como unión finita de intersecciones finitas de $\mathbb{U}$, unión finita de restas finitas de elementos de $\{\mathbb{U}, X\}$, es decir, la base de τ_X genera a la familia β.

Por lo tanto, $B(X) = \sigma(\beta)$.

□

Una primera observación es que, si X es un espacio de estados lcsH, entonces tiene propiedades muy parecidas a la de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$. De hecho, los ejemplos a desarrollar tienen como espacio de estados a $\mathbb{R}^n$.

Otra observación muy importante es que si X es numerable, podemos tomar a $\tau_X = 2^X$, la cual es metrizable (la topología generada por la métrica discreta coincide con la potencia); además, X es separable, pues es numerable; y es localmente compacto, ya que todos sus subconjuntos son abiertos, entonces, un subconjunto es compacto si, y sólo si es finito. Por lo tanto, X es un espacio de estados lcsH, con $B(X) = 2^X$. Así, la teoría conocida de Cadenas de Markov en espacio de estados discretos es un caso particular.

1.2. Núcleos de Probabilidad de transición

Para motivar un poco la idea de una Cadena de Markov y sus Probabilidades de transición, veamos un ejemplo sencillo e ilustrativo: la caminata aleatoria en $\mathbb{R}$. Aunque todavía no se ha dado la definición formal de Cadena de Markov, podemos dar una definición intuitiva: es un Proceso Estocástico que cumple que el futuro es independiente del pasado, dado el presente.

Definición 2. *Sean $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas en $\mathbb{R}$ con función distribución común Γ, y μ una distribución inicial en $B(\mathbb{R})$, independiente de Γ, decimos que el Proceso Estocástico $\Phi = \{\phi_n | n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ es una Caminata Aleatoria en $\mathbb{R}$ si, y sólo si,*

$$\begin{aligned}
&\phi_0 \sim \mu \\
&\phi_n = \phi_{n-1} + W_n \ \textit{para } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

A W le llamamos la variable de incremento

Ya que cada ϕ_n está en función de ϕ_{n-1} y W_n, dado el presente ϕ_{n-1}, ϕ_n es independiente del pasado; es decir, la Caminata Aleatoria es una Cadena de Markov.

Dado que $\phi_0 = x$, ¿cuál es la Probabilidad de que al siguiente paso la Cadena alcanze el conjunto A? Definiendo

$$P_x(A) = P[\Phi_1 \in A | \Phi_o = x],$$

vemos que

$$P_x(A) = P[\Phi_0 + W_1 \in A | \Phi_0 = x] = P[x + W_1 \in A] = P[W_1 \in A - x] = \Gamma(A - x)$$

Definición 3. *Sea $P : X \times B(X) \to [0, 1]$ tal que*

1. *Para cada* $A \in B(X)$, $P(\cdot, A)$ *es una función medible no negativa,*

2. *Para cada* $x \in X$, $P(x, \cdot)$ *es una Probabilidad en* $B(X)$,

decimos que P *es un Núcleo de Probabilidad de transición.*

La caminata aleatoria tiene asociado el Núcleo de transición $P(x, A) = \Gamma(A - x)$.

Dado un Núcleo de Transición P, fijo, es posible definir operaciones.

Definición 4. *Sean* $\Theta = \{\mu : B(X) \to \mathbb{R} | \mu \text{ es medida de Probabilidad } \}$ *y* $\Lambda := \{f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}) | f \text{ es medible y } f \geq 0 \}$. *Definimos los operadores* $\Gamma : \Theta \to \Theta$ *y* $\Pi : \Lambda \to \Lambda$ *tales que*

$$\Gamma_\mu(A) = \int_X P(y, A)\mu(dy), \text{ para todo } A \in B(X);$$

$$\Pi_f(x) = \int_X f(y)P(x, dy), \text{ para toda } x \in X$$

Veamos que las imágenes de los operadores Γ y Π realmente caen en Θ y Λ, respectivamente.

Proposición 2. *Sean* $\mu \in \Theta$ *y* $f \in \Lambda$. *Entonces* $\Gamma_\mu \in \Theta$ *y* $\Pi_f \in \Lambda$.

Demostración. Primero veamos que $\Gamma_\mu \in \Theta$, es decir que es medida de Probabilidad.

Dado que $P(y, \cdot) \geq 0$, para toda $y \in X$ y $\mu \geq 0$, $\Gamma_\mu \geq 0$. Además,

$$\Gamma_\mu(X) = \int_X P(y, X)\mu(dy) = \int_X 1\mu(dy) = \mu(X) = 1$$

Resta ver unicamente que es σ-aditiva. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X)$ una sucesión disjunta,

$$\Gamma_\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$= \int_X P(y, \cup_{n=1}^{\infty} A_n)\mu(dy) = \int_X \left[\sum_{n=1}^{\infty} P(y, A_n)\right] \mu(dy)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X P(y, A_n)\mu(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$$

Por lo tanto Γ_μ es una medida de Probabilidad, es decir, $\Gamma_\mu \in \Theta$.

Veamos ahora que $\Pi_f \in \Lambda$.

Sea $A \in B(X)$, $1_A \in \Lambda$ y

$$\Pi_{1_A}(x) = \int_X 1_A(y)P(x,dy) = P(x,A), \text{ para toda } x \in X;$$

de modo que $\Pi_{1_A}(\cdot) = P(\cdot, A) \in \Lambda$.

Sea $s \in \Lambda$ una función simple y medible, existen $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ y $A_1, \ldots, A_n \in B(X)$ tales que $s = \sum_{m=1}^n \alpha_m 1_{A_m}$. Ahora,

$$\begin{aligned}\Pi_s(x) &= \int_X s(y)P(x,dy) = \int_X \left[\sum_{m=1}^n \alpha_m 1_{A_m}(y)\right] P(x,dy) \\ &= \sum_{m=1}^n \alpha_m \int_X 1_{A_m}(y)P(x,dy) = \sum_{m=1}^n \alpha_m P(x,A_m);\end{aligned}$$

es decir, Π_s es combinación lineal positiva de funciones medibles, es decir, $\Pi_s \in \Lambda$.

Sea $f \in \Lambda$, al ser f es medible y positiva, existe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente de funciones simples, medibles y positivas tal que

$$f = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Por el Teorema de convergencia monótona,

$$\Pi_f(x) = \int_X f(y)P(x,dy) = \lim_{n\to\infty} \int_X s(y)P(x,dy) = \lim_{n\to\infty} \Pi_{s_n}(x);$$

al ser cada s_n simple, medible y positiva, Π_{s_n} es medible y positiva, de modo que Π_f es límite de una sucesión de funciones medibles y positivas, por lo tanto Π_f es medible y positiva, es decir, $\Pi_f \in \Lambda$.

□

Dada la linealidad de la integral tanto en el integrador como en el integrando, el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 3. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \ldots \mu_n \in \Gamma$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $\sum_{m=1}^n \alpha_m = 1$, entonces*

$$\Gamma_{\alpha_n\mu_1+\ldots+\alpha_n\mu_n} = \alpha_1\Gamma_{\mu_1} + \ldots + \alpha_n\Gamma_{\mu_n}$$

$$\Pi_{\beta_1 f_1+\ldots+\beta_n f_n} = \beta_1\Pi_{f_1} + \ldots + \beta_n\Pi_{f_n}$$

Necesitaremos trabajar con el siguiente operador.

Definición 5. *Sea* $\xi := \{f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))|$ *f medible y acotada* $\}$. *Definimos el operador* $\Delta : \xi \to \xi$ *que cumple que*

$$\Delta_f(x) = \int_X f(y)P(x, dy) - f(x), \text{ para toda } x \in X$$

Proposición 4. *Sea* $f \in \xi$*, entonces* $\Delta_f \in \xi$

Demostración. Como f es acotada, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|f| \leq M$, por lo cual

$$|\Delta_f(x)|$$

$$= \left| \int_X f(y)P(x, dy) - f(x) \right| \leq \int_X |f(y)|P(x, dy) + |f(x)| \leq \int_X MP(x, dy) + M$$

$$= MP(x, X) + M = 2M, \text{ para toda } x \in X,$$

así, Δ_f es acotada.

Procediendo análogamente a la Proposición 2, tenemos que Θ_f es medible. □

Al igual que con los operadores Γ y Π, dada la linealidad de la integral, tenemos la siguiente implicación.

Proposición 5. *Sean* $n \in \mathbb{N}$*,* $f_1, \ldots, f_n \in \xi$ *y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\Theta_{\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n} = \alpha_1 \Theta_{f_1} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n},$$

es decir, Θ *es un operador lineal.*

Como Corolario inmediato de la Proposición 2 se obtiene el siguiente Teorema.

Teorema 1. *Sean* P *y* Q *dos Núcleos de Transición, entonces la función* $R : (X, B(X)) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$R(x, A) = \int_X P(y, A)Q(x, dy), \text{ para toda } x \in X \text{ y para todo } A \in B(X)$$

es un Núcleo de Probabilidad de transición

1.3. Cadenas de Markov homogéneas y sus Probabilidades de transición

Definición 6. *Sea $\Phi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ un Proceso Estocástico con distribución inicial μ y P_μ una Probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\Phi \sim P_\mu$. Decimos que Φ es una Cadena de Markov si, y sólo si, para toda $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $A_0, \ldots, A_{n+1} \in B(X)$,*

$$\begin{aligned} &P_\mu(\phi_{n+1} \in A_{n+1} | \phi_n = y_n, \ldots, \phi_0 \in A_0) \\ &\qquad\qquad = P_\mu(\phi_{n+1} \in A_{n+1} | \phi_n = y_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Además, decimos que es homogénea si, y sólo si

$$P_\mu(\phi_{n+1} \in A_{n+1} | \phi_n = y_n) = P_\mu(\phi_1 \in A_{n+1} | \phi_0 = y_n), \ \textit{para toda } n \in \mathbb{N}$$

Como lo habíamos afirmado, una Cadena de Markov es un Proceso Estocástico en el cual el futuro y el presente son independientes, dado el pasado. Además, si la Cadena es homogénea, la Probabilidad condicional de alcanzar cierto conjunto al paso $n+1$ dado que que al paso n está en cierto estado fijo, no depende del valor de n; sino del estado inicial y del conjunto que se quiere alcanzar al siguiente paso.

De la ecuación (1.1) tememos que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $B \in B(X)$,

$$P(\phi_{n+1} \in B | \phi_n, \ldots, \phi_0) = P(\phi_{n+1} \in B | \phi_n) \tag{1.2}$$

y, si la Cadena es homogénea, la ecuación anterior se transforma en

$$P(\phi_{n+1} \in B | \phi_n, \ldots, \phi_0) = P(\phi_1 \in B | \phi_0) \tag{1.3}$$

Sea Φ un Proceso Estocástico con distribución inicial μ y distribución P_μ, gracias al Teorema de la Probabilidad total,

$$P_\mu(\Phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A) = \int_{A_0} P_\mu(\phi_1 \in A | \phi_0 = x) \mu(dx),$$

Definiendo

$$P(x, A) = P_\mu(\phi_1 \in A | \phi_0 = x), \text{ para cualesquiera } x \in X \text{ y } A \in B(X),$$

notamos que P es un Núcleo de transición asociado a Φ; es decir, todo Proceso Estocástico tiene asociado un Núcleo de transición. En caso de que Φ sea una Cadena de Markov, el Núcleo cumplirá con la propiedad descrita en la ecuación (1.1).

Lo siguiente que hacemos es caracterizar la distribución finito dimensional de una Cadenas de Markov, que en cursos básicos de Procesos Estocásticos lo conocemos como la regla del producto.

Teorema 2. *Sea Φ una Cadena de Markov con distribución inicial μ, distribución P_μ y Núcleo de Transición P. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $A_0, \dots, A_n \in B(X)$*

$$P_\mu(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \dots, \phi_n \in A_n)$$

$$= \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_{n-1}} P(y_{n-1}, A_n) P(y_{n-2}, dy_{n-1}) \dots P(y_0, dy_1) d\mu(y_0) \tag{1.4}$$

Demostración. Para $n = 1$, tomamos $A_0, A_1 \in B(X)$. Por el Teorema de la Probabilidad total,

$$P(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1) = \int_{A_1} P(x, A_1) \mu(dx).$$

Supongamos que es válido para $n \in \mathbb{N}$, es decir, para cualesquiera $A_0, \dots, A_n \in B(X)$,

$$P_\mu(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \dots, \phi_n \in A_n)$$

$$= \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_{n-1}} P(y_{n-1}, A_n) P(y_{n-2}, dy_{n-1}) \dots P(y_0, dy_1) d\mu(y_0),$$

Sea $A_{n+1} \in B(X)$, por el Teorema de la Probabilidad total, dado que Φ es Cadena de Markov y por hipótesis de inducción

$$P_\mu(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \dots, \phi_n \in A_n, \phi_{n+1} \in A_{n+1})$$

$$= \int_{A_n} P(\phi_n \in A_{n+1} | \phi_n = y_n, \phi_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, \phi_0 \in A_0) P(\phi_n = dy_n, \phi_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, \phi_0 \in A_0)$$

$$= \int_{A_n} P(y_n, A_{n+1}) P(\phi_n = dy_n, \phi_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, \phi_0 \in A_0)$$

$$= \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_n} P(y_n, A_{n+1}) P(y_{n-1}, dy_n) \dots P(y_0, dy_1) \mu(dy_0)$$

De modo que Φ cumple con la ecuación (1.4). $\square$

Auxiliándonos con el Teorema anterior, el siguiente paso es construir una extensa gama de Cadenas de Markov, caracterizadas por un Núcleo de Probabilidad de transición y una Distribución inicial.

Teorema 3. *Sea P un Núcleo de transición y μ una Distribución inicial sobre $B(X)$. Entonces existe una Proceso Estocástico $\Phi = \{\phi_n | n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ y existe una Probabilidad P_μ sobre $\mathcal{F}$ tales que $\phi_0 \sim \mu$, $\Phi \sim P_\mu$ y sus Distribuciones finito-dimensionales están caracterizadas por la ecuación* (1.4)*, es decir, Φ es una Cadena de Markov.*

Demostración. Construimos el Proceso Estocástico dando las distribuciones correspondientes a los vectores aleatorios $\Phi^n = (\phi_0, \ldots, \phi_n)$ en $(X^n, \mathcal{F}_n)$ de la siguiente manera:

$$\phi_0 \sim \mu,$$

$$P(\phi_0 \in A_0, \phi_1 A_1) = \int_{A_0} P(y_0, A_1)\mu(dy_0),$$

$$P(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \phi_2 \in A_2) = \int_{A_0}\int_{A_1} P(y_1, A_2)P(y_0, dy_1)\mu(dy_0),$$

$$P(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \phi_2 \in A_2, \phi_3 \in A_3) = \int_{A_1}\int_{A_2} P(y_2, A_3)P(y_1, dy_2)P(x, dy_1),$$

$$\vdots$$

$$P(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \ldots \phi_n \in A_n) =$$

$$\int_{A_0}\int_{A_1} \ldots \int_{A_n - 1} P(y_{n-1}, A_n)P(y_{n-2}, dyn - 1) \ldots P(y_0, dy_1)\mu(dy_0)$$

Ahora,

$P^{n+1}(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \ldots, \phi_n \in A_n, \phi_{n+1} \in X)$

$$=\int_{A_0}\int_{A_1}\cdots\int_{A_{n-1}}\int_{A_n} P(y_n, X)P(y_{n-1}, dy_n)P(y_{n-2}, dy_{n-1})\ldots P(y_0, dy_1)\mu(dy_0)$$

$$=\int_{A_0}\int_{A_1}\cdots\int_{A_{n-1}}\int_{A_n} 1\ P(y_{n-1}, dy_n)P(y_{n-2}, dy_{n-1})\ldots P(y_0, dy_1)\mu(dy_0)$$

$$=\int_{A_0}\int_{A_1}\cdots\int_{A_{n-1}} P(y_{n-1}, A_n)P(y_{n-2}, dy_{n-1})\ldots P(y_0, dy_1)\mu(dy_0)$$

$$=P^n(\phi_0 \in A_0, \phi_1 \in A_1, \ldots, \phi_n \in A_n)$$

que es la construcción por básicos de la Distribución de Φ^n, de modo que el vector aleatorio Φ^n es vector marginal del vector aleatorio Φ^{n+1}, es decir, $\Phi^{n+1} = (\Phi^n, \phi_{n+1})$. Así, la familia de distribuciones finito-dimensionales antes expresadas son consistentes en el sentido de Kolmogorov. Por el Teorema de existencia de Procesos Estocásticos de Kolmogorov, tenemos el resultado.

□

Teorema 4. *Sea Φ una Cadena de Markov con Núcleo de transición P y con Distribución inicial μ. Entonces, para toda*

$$f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

integrable y para toda $n \in \mathbb{N}$, sucede que

$$E_\mu[f(\phi_{n+1}, \phi_{n+2}, \ldots)|\phi_0, \ldots, \phi_n] = E_{\phi_n}[f(\phi_1, \phi_2, \ldots)], \tag{1.5}$$

Demostración. Sean $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})$ integrable y $n \in \mathbb{N}$. Como toda función integrable es aproximable por una sucesión creciente y convergente al módulo a $|f|$ de funciones simples y medibles, por linealidad de la integral y por el Teorema de convergencia dominada, basta hacerlo para $f = 1_A$, para algún $A \in \mathcal{F}$.

Sean $B = \Pi_{i=0}^{\infty} B_i$, donde $B_0, \ldots, B_k \in B(X)$ y $B_i = X$, para toda $i \in \{n+1, n+2, \ldots\}$; y $A = \Pi_{i=0}^{\infty} A_i$, donde $A_0, \ldots, A_m \in B(X)$ y $A_i = X$, para toda $i \in \{n+1, n+2, \ldots\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $k \leq m$, entonces la ecuación (1.5) se transforma en las ecuaciones (1.2) y (1.3).

Como $\mathcal{F}_m^\Phi$ está generado por $\mathcal{B} = \{\Pi_{i=0}^{\infty} B_i |\ B_0, \ldots, B_k \in B(X),\ B_i = X,\ k \geq n+1,$ para alguna $k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}$ es un π-sistema, por el Lema de Dynkin, basta demostrarlo para elementos de $\mathcal{B}$.

Análogamente, como $\mathcal{F}$ está generado por el conjunto $\mathcal{A} = \{\Pi_{k=0}^{\infty} A_k |$ existe $m \in \overline{\mathbb{N}}$ tal que $A_0, \ldots, A_m \in B(X), A_k = X,\ k \geq m+1\}$, y $\mathcal{A}$ es un π-sistema, es suficiente demostrarlo para elementos de $\mathcal{A}$.

□

1.4. El Núcleo de transición a n pasos y las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

De ahora en adelante, Φ es una Cadena de Markov homogénea con Núcleo de Probabilidad de transición P.

Volvamos al ejemplo de la Caminata Aleatoria Φ con Núcleo de transición $P(x, A) = \Gamma(A - x)$. Supóngamos que Γ tiene densidad γ, con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, λ; lo que nos interesa obtener es la Probabilidad de que la Cadena alcance un conjunto $A \in B(X)$ en su segundo paso, dado que empezó en x, es decir,

$$P^2(x, A) := \mathbb{P}[\phi_2 \in A | \phi_0 = x]$$

Así,

$P^2(x, A)$

$$= \mathbb{P}[\phi_1 + W_2 \in A | \phi_0 = x] = \mathbb{P}[\phi_0 + W_1 + W_2 \in A | \phi_0 = x]$$

$$= \mathbb{P}[W_1 + W_2 \in A - x] = \Gamma * \Gamma(A - x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(A - x - y) d\Gamma(dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(A - x - y)\gamma(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(A - z)\gamma(z - x)dz = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(A - z)d\Gamma(z - x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} P(z, A)P(x, dz),$$

de modo que

$$P^2(x, A) = \int_{\mathbb{R}} P(x, A)P(x, dy) \tag{1.6}$$

La ecuación (1.6) no solo se cumple para la Caminata Aleatoria, sino para cualquiera Cadena de Markov, en una forma más general.

Sean $x \in X$, $A \in B(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$P^0(x, A) = \delta_x(A)$

$P^n(x, A) = P[\phi^n \in A|\phi_0 = x] = P[\phi_n \in A, \phi_{n-1} \in X, \dots, \phi_1 \in X|\phi_0 = x]$

Teorema 5 (Chapman-Kolmogorov)**.** *Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ sucede*

$$P^n(x, A) = \int_X P^{n-m}(y, A)P^m(x, dy)$$

Demostración. Sea $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, en (1.4) tomemos $A_0 = x$; $A_i = X$, para $1 \leq i \leq n-1$; $A_n = A$ y $\mu(\cdot) = 1^x_{(\cdot)}$,

$P_\mu(\phi_0 =x, \phi_1 \in X, \dots, \phi_{n-1} \in X, \phi_n \in A)$

$$= \int_X \dots \int_X \int_X \dots \int_X P(y_{n-1}, A)P(y_{n-2}, dy_{n-1}) \dots P(y_{m-1}, dy_m)P(y_{m-2}, y_{m-1}) \dots P(x, dy_1)$$

$$= \int_X \dots \int_X P^{n-m}(y_{m-1}, A)P(y_{m-2}, y_{m-1}) \dots P(x, dy_1)$$

$$= \int_X P^{n-m}(y_{m-1}, A)P^m(x, dy_{m-1})$$

$$= \int_X P^{n-m}(y_{m-1}, A)P^m(x, dy_{m-1})$$

□

Las ecuaciones de Chapman Kolmogorov son una herramienta que utilizamos a lo largo de todo este trabajo. Observamos que es el análogo al caso discreto.

Como caso particular de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, tenemos que

$$P^n(x, A) = \int_X P^{n-1}(y, A)P(x, dy)$$

Dada $m \in \mathbb{N}$, gracias al Teorema 1 y a la ecuación anterior, P^m es un Núcleo de transición, ya que P lo es. Si $\Phi = \{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ es la Cadena asociada a P , entonces $\Phi^m = \{\phi_{nm}\}_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ es la Cadena de Markov asociada a P^m

Definición 7. *Llamamos a Φ^m, la Cadena asociada a P^m, el m-esqueleto de Φ.*

1.5. Ocupación, llegadas y tiempos de paro

Definición 8. *Una función $\xi : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} \cup \{\infty\}$ es un tiempo de paro para la Cadena Φ, con respecto a la Distribución inicial μ y al Núcleo de transición P si, y sólo si, el evento $\{\xi = n\} \in \mathcal{F}_n^{\Phi}$, para toda $n \in \overline{\mathbb{N}}$.*

Definición 9. *Sea $A \in B(X)$.*

1. *El tiempo de ocupación de A, η_A, es el número de visitas de Φ a A, después del tiempo 0,*

$$\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\phi_n \in A}$$

2. *las variables aleatorias*

$$\tau_A = min\{n \in \mathbb{N} | \phi_n \in A\},$$

$$\sigma_A = min\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} | \phi_n \in A\}$$

el primer regreso a A de la Cadena, y la primera llegada a A de la Cadena, respectivamente.

Proposición 6. *Para toda $A \in B(X)$, τ_A y σ_A son tiempos de paro para Φ.*

Demostración. Sean $A \in B(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, $\{\tau_A = n\}$ si, y sólo si, $\phi_n \in A$ y $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1} \notin A$, es decir,

$$\{\tau_A = n\} = \left(\cap_{m=1}^{n-1} \{\phi_m \in A^c\}\right) \cap \{\phi_n \in A\}$$

Pero $\{\phi_0 \in A^c\}, \ldots, \{\phi_{n-1} \in A^c\}, \{\phi_n \in A\} \in \mathcal{F}_n$, es decir,

$$\{\tau_A = n\} = \left(\cap_{m=1}^{n-1} \{\phi_m \in A^c\}\right) \cap \{\phi_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Análogamente

$$\{\sigma_A = n\} = \left(\cap_{m=0}^{n-1} \{\phi_m \in A^c\}\right) \cap \{\phi_n \in A\}$$

Concluimos que τ_A y σ_A son tiempos de paro.

$\square$

Proposición 7. *Sean $A \in B(X)$, $x \in X$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

1. *$P_x(\tau_A = 1) = P(x, A)$ y*

$$P_x(\tau_A = n) = \int_{A^c} P_y(\tau_A = n - 1) P(x, dy)$$

2. $P_x(\sigma_A = 0) = 1_A^x$*, y para* $x \in A^c$

$$P_x(\sigma_A = n) = P_x(\tau_A = n)$$

Demostración. 1. Para $n = 1$, $\{\tau_A = 1\}$ si, y sólo si, $\{\phi_1 \in A\}$; entonces

$$P_x(\tau_A = 1) = P_x(\phi_1 \in A) = P(x, A)$$

Para $n = 2$, $\{\tau_A = 2\}$ si, y sólo si, $\{\phi_1 \in A^c, \phi_2 \in A\}$; entonces

$$P_x(\tau_A = 2) = P_x^2(A^c \times A) = \int_{A^c} P(y, A)P(x, dy) = \int_{A^c} P_y(\tau_A = 2-1)P(x, dy)$$

Supóngamo válido para $n = k$, es decir,

$$P_x(\tau_A = k) = \int_{A^c} P_y(\tau_A = k-1)P(x, dy) = \int_{A^c} \dots \int_{A^c} P(y_{k-1}, A)P(y_{k-2}, dy_{k-1}) \dots P(x, dy_1),$$

$\{\tau_A = k+1\}$ si, y sólo si, $\{\phi_1 \in A^c, \dots, \phi_k \in A^c, \phi_{k+1} \in A\}$; de modo que

$$\begin{aligned} P_x(\tau_A = k+1) & \\ &= P_x(\phi_1 \in A^c, \dots, \phi_k \in A^c, \phi_{k+1} \in A) \\ &= \int_{A^c} \int_{A^c} \dots \int_{A^c} P(y_k, A)P(y_{k-1}, dy_k) \dots P(y_1, dy_2)P(x, dy_1) \\ &= \int_{A^c} P_{y_1}(\tau_A = k)P(x, dy) \end{aligned}$$

2. $\{\sigma_A = 0\}$ si, y sólo si, $\{\phi_0 \in A\}$, y con ello,

$$P_x(\sigma_A = 0) = P_x(\phi_0 \in A) = \mathbb{P}[\phi_0 \in A | \phi_0 = x] = 1_A^x$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{\sigma_A = n\} = \{\tau_A = n\}$, ya que $x \notin A$; de modo que $P_x(\sigma_A = n) = P_x(\tau_A = n)$.

□

Nos interesa estudiar las Probabilidades de alcanzar en n pasos el conjunto B, evitando el conjunto A en los primeros $n - 1$ pasos.

Definición 10. *Sea $A \in B(X)$. Definimos las Probabilidades taboo como*

$$P_A^n(x,B) := P_x(\phi_n \in B, \tau_A \geq n), \text{ para toda } x \in X$$

Proposición 8. *Sea $A \in B(X)$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$P_A^1(x,B) = P(x,B)$$

$$P_A^n(x,B) = \int_{A^c} P_A^{n-1}(y,B)P(x,dy)$$

Demostración. Para $n = 1$ tenemos que $\{\tau_A \geq 1\} = \Omega$, y así

$$\{\phi_1 \in B, \tau_A \geq 1\} = \{\phi_1 \in B\},$$

de modo que $P_A^1(x,B) = P(x,B)$.

Sea $n \geq 2$,

$$P_A^{n+1}(x,B) = P_x(\phi_{n+1} \in B, \tau_A \geq n+1) = P_x(\phi_1 \in A^c, \ldots, \phi_n \in A^c, \phi_{n+1} \in B)$$

$$= \int_{A^c} P(\phi_1 = y, \phi_2 \in A^c, \ldots, \phi_n \in A^c, \phi_{n+1} \in B)P(x,dy)$$

$$= \int_{A^c} P(\phi_0 = y, \phi_1 \in A^c, \ldots, \phi_{n-1} \in A^c, \phi_n \in B)P(x,dy)$$

$$= \int_{A^c} P_y(\phi_n \in B, \tau_A \geq n)P(x,dy) = \int_{A^c} P_A^n(y,B)P(x,dy)$$

□

Las siguientes funciones que sirven para el estudio de estabilidad de Cadenas de Markov.

Definición 11. *Sean $x \in X$ y $A \in B(X)$.*

1. $U(x,A) := E_x[\eta_A] = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,A)$

2. $L(x,A) = P_x(\tau_A < \infty)$

Proposición 9. *Sean $x \in X$ y $A \in B(X)$. Entonces*

$$L(x,A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(x,A)$$

Demostración.

$$\{\tau_A < \infty\} = \{\phi_n \in A, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A\}$$

Queremos demostrar que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A, \tau_A \geq n\}$$

Claramente,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A, \tau_A \geq n\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A\}$$

Tomemos $w \in \{w \in \Omega | \phi_n(w) \in A\}$; sea $m = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} | \phi_k(w) \in A\}$, así $\phi_m(w) \in A$ y $\tau_A(w) = m$, de modo que

$$w \in \{w \in \Omega | \phi_m(w) \in A, \tau_A(w) \geq m\};$$

por lo tanto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A, \tau_A \geq n\}$$

Teniendo la igualdad de los conjuntos,

$$L(x, A) = P_x(\tau_A < \infty) = P_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\phi_n \in A, \tau_A \geq n\}\right). \tag{1.7}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, $\{\phi_n \in A, \tau_A \geq n\} = \{\phi_n \in A, \tau_A = n\}$, de modo que la sucesión $\{\phi_n \in A, \tau_A \geq n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\phi_n \in A, \tau_A = n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es disjunta, y por (1.7) tenemos que

$$L(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(x, A)$$

□

Definición 12. *Sean $x \in X$ y $A, B \in B(X)$. Definimos*

$$U_A(x, B) := \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(x, B)$$

Por la Proposición 9,

$$L(x, A) = U_A(x, A).$$

Proposición 10. *Sean $x \in X$ y $A \in B(X)$. Entonces*

1.
$$P_x(\tau_A = n+1) = \int_{A^c} P_y(\tau_A = n)P(x,dy), \ \ \textit{para toda } n \in \mathbb{N};$$

2.
$$P_x(\tau_A \geq n+1) = P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\tau \geq n)P(x,dy), \ \ \textit{para toda } n \in \mathbb{N};$$

3.
$$L(x,A) = P(x,A) + \int_{A^c} L(y,A)P(x,dy), \ \ \textit{para toda } n \in \mathbb{N}$$

Demostración. 1. Sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&P_x(\tau_A = n+1) \\
&\qquad = P_x(\phi_1 \in A^c, \ldots, \phi_n \in A^c, \phi_{n+1} \in A) \\
&\qquad = \int_{A^c} P(\phi_1 = y, \phi_2 \in A^c, \ldots, \phi_n \in A^c, \phi_{n+1} \in A)P(x,dy) \\
&\qquad = \int_{A^c} P_y(\phi_1 \in A^c, \ldots, \phi_{n-1} \in A^c, \phi_n \in A)P(x,dy) \\
&\qquad = \int_{A^c} P_y(\tau_A = n)P(x,dy)
\end{aligned}$$

2. Veamos para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
&P_x(\tau \leq 2) \\
&\qquad = P_x(\{\tau_A = 1\} \cup \{\tau_A = 2\}) = P_x(\tau_A = 1) + P(x, \tau_A = 2) \\
&\qquad = P(x,A) + P_x(\phi_1 \in A^c, \phi_2 \in A) = P(x,A) + \int_{A^c} P(\phi_1 = y, \phi_2 \in A)P(x,dy) \\
&\qquad = P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\phi_1 \in A)P(x,dy) = P(x,A) + \int_{A^c} P(y,A)P(x,dy) \\
&\qquad = P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\tau_A = 1)P(x,dy)
\end{aligned}$$

Supongamos válido para $n = k$, es decir,

$$P_x(\tau_A \leq k+1) = P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\tau_A \leq k)P(x,dy)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} P_x(\tau_A \leq & k+2) \\ =& P_x(\{\tau_A \leq k+1\} \cup \{\tau_A = k+2\}) = P_x(\tau_A \leq k+1) + P_x(\tau_A = k+2) \\ =& P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\tau \leq k)P(x,dy) + \int_{A^c} P_y(\tau_a = k+1)P(x,dy) \\ =& P(x,A) + \int_{A^c} [P_y(\tau_A \leq k) + P_y(\tau_A = k+1)]P(x,dy) \\ =& P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\{\tau_A \leq k\} \cup \{\tau_A = k+1\})P(x,dy) \\ =& P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\tau_A \leq k+1)P(x,dy) \end{aligned}$$

3. Del inciso 2 tenemos que

$$P_x(\tau_A \leq n+1) = P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\tau \leq n)P(x,dy)$$

$\{\tau_A \leq n+1\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente a $\{\tau_a < \infty\}$,

$$\lim_{n\to\infty} P_z(\tau_A \leq n) = P_z(\tau_A < \infty), \text{ para toda } z \in X$$

Por el Teorema de convergencia monótona tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A^c} P_y(\tau_A \leq n) = \int_{A^c} P_y(\tau_A < \infty)P(x,dy)$$

Por lo tanto,

$$P_x(\tau_A < \infty) = P(x,A) + \int_{A^c} P_y(\tau_A < \infty)P(x,dy)$$

$\square$

1.6. Cadenas muestreadas

De ahora en adelante, $a, b, c, \ldots$ denotarán distribuciones en $\overline{\mathbb{N}}$. Consideremos un tiempo aleatorio $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ tal que $\tau \sim a$ y τ es independiente de Φ. Por el Teorema de Probabilidad total

$$P_x(\Phi_\tau \in A) = P_x(\Phi_\tau \in A, \tau = n, \text{ para algún } n \in \overline{\mathbb{N}})$$

$$= P_x\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{\Phi_\tau \in A, \tau = n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\phi_\tau \in A, \tau = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\phi_\tau \in A|\tau = n)P_x(\tau = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(\phi_n \in A)P(\tau = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n)$$

Es decir, tomando aleatorio al tiempo, la Cadena de Markov Φ_τ tiene a la distrubución descrita arriba.

Proposición 11. *Para cualquier Distribución a en $\overline{\mathbb{N}}$, la función*

$$K_a(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n), \; x \in X \; y \; A \in B(X)$$

es un Núcleo de Probabilidad de transición.

Demostración. Sea $A \in B(X)$ fijo, y sea $S_m(x, A) = \sum_{n=0}^{m} P^n(x, A)a(n)$, $S_m(\cdot, A)$ es una función medible, para toda m y

$$\lim_{n\to\infty} S_m(x, A) = K_a(x, A), \text{ para toda } x \in X,$$

por lo tanto $K_a(\cdot, A)$ es medible.

Sea $x \in X$, fijo, por ser $K_a(x, \cdot)$ una suma lineal numerable con coheficientes positivos, es una medida. Además,

$$K_a(x, X) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, X)a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) = 1;$$

por lo tanto $K_a(x, \cdot)$ es una medida de Probabilidad sobre $B(X)$.

Por lo tanto K_a es un Núcleo de Probabilidad de transición.

$\square$

Al ser K_a un Núcleo de transición, el Teorema 3 nos asegura que existe una Cadena Φ_a con Núcleo de Probabilidad K_a.

Definición 13. *Decimos que K_a dado por*

$$K_a(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n), x \in X \text{ y } A \in B(X);$$

es el Núcleo de Probabilidad de transición de la Cadena muestreada bajo la Distribución a. Φ_a es conocida como la Cadena muestreada bajo la Distribución a.

Una Cadena muestreada que ya mencionamos es el m-esqueleto:

Sea $a(n) = \delta_m(n)$,

$$K_{\delta_m}(x, A) = \sum_{n=o}^{\infty} P^n(x, A)\delta_m(n) = P^m(x, A).$$

Por lo tanto Φ_{δ_m} es el m-esqueleto de la Cadena Φ.

Una Cadena que usaremos frecuentemente es la muestreada bajo la Distribución geométrica.

Definición 14. *Sea $\epsilon \in (0, 1)$ y $a_\epsilon(n) = (1 - \epsilon)\epsilon^n$, entonces la Cadena Φ_{a_ϵ} es la resolvente de Φ.*

El siguiente Lema nos da una generalización de la ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, para tiempos aleatorios.

Lema 1. *Sean $A, B, C \in B(X)$. Entonces las Cadenas muestreadas Φ_a y Φ_b cumplen con la generalización de la ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:*

$$K_{a*b}(x, A) = \int_X K_b(y, A)K_a(x, dy)$$

Demostración.

$K_{a*b}(x,A)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,A) a*b(n) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,A) \sum_{m=0}^{n} a(m)b(n-m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P^n(x,A) b(n-m)a(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P^n(x,A) b(n-m)a(m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P^{n+m}(x,A) b(n)a(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b(n)a(m) \int_X P^n(y,A) P^m(x,dy)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_X \left[P^n(y,A)b(n)\right]\left[P^m(x,dy)a(m)\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_X \left[\sum_{n=0}^{\infty} P^n(y,A)b(n)\right]\left[P^m(x,dy)a(m)\right]$$

$$= \int_X \left[\sum_{n=0}^{\infty} P^n(y,A)b(n)\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} P^m(x,dy)a(m)\right]$$

$$= \int_X K_b(y,A) K_a(x,dy)$$

□

1.7. Ejemplos de Cadenas de Markov y sus Núcleos de transición

1.7.1. La caminata aleatoria en $\mathbb{R}$

Ya que es uno de los ejemplos más sencillos e ilustrativos en Cadenas de Markov en Espacio de estados generales, lo hemos trabajado desde el inicio de este capítulo. Veamos ahora con toda formalidad que la caminata aleatoria en $\mathbb{R}$ es una Cadena de Markov homogénea.

Proposición 12. *La caminata aleatoria en $\mathbb{R}$ es una Cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{R}$ y Núcleo de Probabilidad en n pasos*

$$P^n(x,A)=\Gamma^{n*}(A-x),$$

Demostración. Sean $n \in \mathbf{N}$ y $A_0,\ldots,A_{n+1} \in B(X)$, al ser $\{W_n\}$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas,

$$\begin{aligned} &P(\phi_{n+1}\in A_{n+1}|\phi_n\in A_n,\ldots,\phi_0\in A_0)\\ &\qquad = P(\phi_n+W_{n+1}\in A_{n+1}|\phi_n\in A_n,\ldots,\phi_0\in A_0)\\ &\qquad = P(\phi_n+W_{n+1}\in A_{n+1}|\phi_n\in A_n)\\ &\qquad = P(\phi_0+W_1\in A_{n+1}|\phi_0\in A_n)\\ &\qquad = P(\phi_1\in A_{n+1}|\phi_0\in A_n),\end{aligned}$$

así, la Caminata Aleatoria es una Cadena de Markov.

Sea $x\in\mathbb{R}$, dado que $W_1+\ldots+W_m$ tiene Distribución Γ^{n*},

$$\begin{aligned} P^n(x,A) &= P_x(\phi_n\in A)\\ &= P(\phi_n\in A|\phi_0=x)=P(W_n+\ldots+W_1+x\in A)\\ &= P(W_n+\ldots+W_1\in A-x)=\Gamma^{n*}(A-x),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$P^n(x,A)=\Gamma^{n*}(A-x),\ \text{para toda}\ n\in\mathbb{N},$$

$\square$

Si Γ tiene densidad γ, también los Núcleos de transición a n pasos.

Proposición 13. *Sea Φ la caminata aleatoria en $\mathbb{R}$ y supongamos que Γ tiene densidad γ, entonces*

$$P^n(x,A)=\int_A\left(\int_{\mathbb{R}}\ldots\int_{\mathbb{R}}\gamma(x_1-x-x_2-\ldots-x_n)\gamma(x_2)\ldots\gamma(x_n)dx_n\ldots dx_2\right)dx_1,$$

es decir, $P^n(x,\cdot)$ tiene densidad

$$\gamma_n(x_1)=\int_{\mathbb{R}}\ldots\int_{\mathbb{R}}\gamma(x_1-x-x_2-\ldots-x_n)\gamma(x_2)\ldots\gamma(x_n)dx_n\ldots dx_2$$

Demostración. Dado que λ es σ-finita, podemos usar los Teoremas de Tonelli y de Cambio de Variable, válidos en $\mathbb{R}^n$. Ahora,

$$P^2(x,A)$$

$$= \Gamma^{2*}(A-x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(A-x-z)\Gamma(dz) = \int_{\mathbb{R}} \int_{A-x-z} \gamma(y)dy\gamma(z)dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{A} \gamma(y-x-z)\gamma(z)dydz = \int_{A} \int_{\mathbb{R}} \gamma(y-x-z)\gamma(z)dzdy$$

Análogamente al paso $n=2$ y procediendo inductivamente,

$$P^{n+1}(x,A) = \int_A \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \gamma(x_1 - x - x_2 - \dots - x_n - x_{n+1}) dx_{n+1} dx_n \dots dx_2 dx_1,$$

□

Podemos dar una extensa gamma de Cadenas de Markov, imitando la construcción de la Caminata Aleatoria.

Lema 2. *Sea μ Distribución inicial en $B(X)$, $f : X \times X \to X$, medible, y $\{W_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicametne distribuídas en $(X, B(X))$. Entonces el Proceso Estocástico definido por*

$$\phi_0 \sim W_0,$$
$$\phi_n = f(\phi_{n-1}, W_n), \ \text{para } n \in \mathbb{N}$$

es una Cadena de Markov.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A_0, \dots, A_{n+1} \in B(X)$ y $x \in X$, al ser $\{W_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas

$$P(\phi_{n+1} \in A_{n+1} | \phi_n \in A_n, \phi_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, \phi_0 \in A_0)$$

$$= P(f(\phi_n, W_{n+1}) \in A_{n+1} | \phi_n \in A_n, \phi_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, \phi_0 \in A_0)$$

$$= P(f(\phi_n, W_{n+1}) \in A_{n+1} | \phi_n \in A_n)$$

$$= P(f(\phi_0, W_1) \in A_{n+1} | \phi_0 \in A_n)$$

$$= P(\phi_1 \in A_{n+1} | \phi_0 \in A_n)$$

□

1.7.2. Caminata aleatoria en la semi-recta.

Sean $\{W_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ sucesión de v.a.i.i.d. en $\mathbb{R}$ con Distribución Γ. Decimos que Φ es una caminata aleatoria en la semi-recta si

$$\phi_0 = [W_0]^+,$$
$$\phi_{n+1} = [\phi_n + W_{n+1}]^+, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Dado que $[\ ]^+$ y la función suma son medibles, por el Teorema 2, Φ es una Cadena de Markov. Por construcción, su espacio de estados es $\mathbb{R}^+$.

Sean $A \in B(\mathbb{R}^+)$ tal que $A \subseteq (0, \infty)$ y $x \in \mathbb{R}^+$

$$P(x, A)$$

$$= P(\phi_1 \in A|\phi_0 = x) = P([\phi_0 + W_1]^+ \in A|\phi_0 = x)$$

$$= P([W_1 + x]^+ \in A) = P(\text{máx}\{0, W_1 + x\} \in A) = P(W_1 \in A - x)$$

$$= \Gamma(A - x),$$

mientras que

$$P(x, \{0\})$$

$$= P(\phi_1 = 0|\phi_0 = x) = P([\phi_0 + W_1]^+ = 0|\phi_0 = x)$$

$$= P([W_1 + x]^+ = 0) = P(\text{máx}\{0, W_1 + x\} \in A) = P(W_1 - x \geq 0)$$

$$= \Gamma((-\infty, 0])$$

Modelos de almacenamiento

El siguiente es un modelo de almacenamiento simple, que utiliza como base a la caminata aleatoria en la semi-recta.

Supongamos que

1. Tenemos otra $\{S_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas en $\mathbb{R}^+$ tales que $S_n \sim H$. A la n-ésima llegada, llega una cantidad de flujo S_n.

2. Tenemos $\{\tau_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas en $\mathbb{R}^+$ que funcionan como los tiempos de interarribo de cierta cantidad de flujo que sale del sistema, tal que $\tau_0 \sim G$, independientes de la sucesión $\{S_n\}$.

3. Entre cada entrada, hay retiradas fijas del sistema a una tasa r.

Decimos que Φ es un modelo de almacenamiento simple si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= S_0 - J_0, \\ \phi_{n+1} &= [\phi_n + S_{n+1} - J_{n+1}]^+; \end{aligned}$$

donde $J_n \sim r\tau_n$.

Φ representa el contenido de un sistema de almacenamiento a los tiempos $\{\tau_n\}$, inmediatamente antes de cada entrada. Dado que es una caminata aleatoria en la semirecta variable de incremento $W_n = S_n - J_n$, en la sección anterior vimos que para encontrar su Núcleo de transición, basta encontrar Distribución de $S_n - J_n$.

$$P(-J_n \in A) = P(-r\tau_n \in A) = P(\tau_n \in -A/r) = G(-A/r);$$

Dado que S_n es independiente de $-J_n$,

$$\Gamma(A) = P(S_n - J_n \in A) = \int_{\mathbb{R}^+} G(-(A-y)/r)H(dy) = \int_{\mathbb{R}^+} G(y/r - A/r)H(dy)$$

1.7.3. Procesos de Renovación y la Cadena hacia adelante en el tiempo

Sean $\{\alpha_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes identicamente distribuídas en $\mathbb{R}$ tales que $\alpha_0 \sim \Gamma$, los tiempos interearribo en un Proceso de Conteo. Definimos la sucesión de Renovación $S_n = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m$.

Nótese que $S_n \sim \Gamma^{(n+1)*}$. Además, $S_{n+1} = S_n + \alpha_{n+1}$, de modo que $S = \{S_n\}$ es una caminata aleatoria con Núcleo de Probabilidad de transición $P(x, A) = \Gamma(A - x)$. El problema con la sucesión de renovación es que puede crecer al infinito rápidamente, dependiendo de α_n.

Introducimos una Cadena de Markov que nos permite estudiar la sucesión de renovación, y que presenta un comportamiento un poco más inestable (puede crecer, y luego decrecer, y luego crecer, etc.), pero que no va hacia el infinito con Probabilidad 1.

Sea $V^+(t) = inf\{S_n - t | S_n > t,$ para alguna $n \in \overline{\mathbb{N}}\}$, para toda $t \leq 0$. Sea $\delta > 0$, definimos la Cadena hacia adelante en el tiempo con δ-esqueleto dada por $V_\delta^+ = \{V^+(n\delta) | n \in \overline{\mathbb{N}}\}$.

Veamos que V_δ^+ es una Cadena de Markov. Sea $n \in \mathbb{N}$, por propiedades de ínfimos

$$\begin{aligned}V^+(n\delta) &= \text{ínf}\{S_m - n\delta | S_m > n\delta, \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}\\ &= \text{ínf}\{S_m - (n-1)\delta - \delta | \delta_m > (n-1)\delta + \delta, \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}\\ &= \text{ínf}\{S_m - (n-1)\delta | \delta_m > (n-1)\delta, \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\} - \delta\\ &= V^+((n-1)\delta) - \delta\end{aligned}$$

como las funciones ínfimo y resta son continuas, del Lema 2 tenemos que $\{V^+(n\delta)\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ es una Cadena de Markov homogénea.

Veamos ahora como es su Núcleo de transición. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^+$.

Si $x > \delta$ y $x = S_m - (n-1)\delta = S_m - n\delta + \delta$, entonces $S_m - n\delta = x - \delta > 0$; de modo que, si $V^+((n-1)\delta) = x$, entonces $V^+(n\delta) = x - \delta$, por lo que

$$P(V_\delta^+(n) \in \{x-\delta\} | V_\delta^+(n-1) = x) = P(V^+(n\delta) \in \{x-\delta\} | V^+((n-1)\delta) = x) = 1$$

Si $x \leq \delta$, sea $A \in B(\mathbb{R}^+)$, entonces

$$P(V_\delta^+(n) \in A | V_\delta^+(n-1) = x) = P(V^+(n\delta) \in A | V^+((n-1)\delta) = x)$$

Si $x = S_m - (n-1)\delta = S_m - n\delta + \delta$, $S_m - n\delta = x - \delta \leq 0$. Dejando esa m fija, y fijando $y \in A$. Si queremos que $V^+(n\delta) = y$, dado que $S_m - n\delta = x - \delta$, entonces, el siguiente salto en el tiempo es de tamaño $y - (\delta - x)$ o da primero k saltos de tamaño $t \in [0, \delta - x]$ y luego da un paso de tamaño $y - (\delta - x) - t$, para alguna $k \in \mathbb{N}$.

De lo anterior,

$$V^+(n\delta) \in A | V^+((n-1)\delta) = x \text{ si y sólo si, } \alpha_{m+1} \in A - (\delta - x)$$

ó

$$\sum_{r=m+1}^{k+m+1} \alpha_r \in [\delta - x] \quad \text{y} \quad \alpha_{k+m+2} \in A - (\delta - x) - \left(\sum_{r=m+1}^{k+m+1} \alpha_r\right), \text{ para alguna } k \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$P(V^+(n\delta) \in A | V^+((n-1)\delta) = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,\delta-x]} \Gamma(A-(\delta-x)+t)\Gamma^{k*}(dt)$$

$$= \int_{[0,\delta-x]} \Gamma(A-(\delta-x)+t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{k*}(dt) \right), \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto,

$$P(x,A) = \begin{cases} 1 & ; x > \delta \text{ y } A = \{x-\delta\} \\ \int_{[0,\delta-x]} \Gamma(A-(\delta-x)+t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{k*}(dt) \right) & ; x \leq \delta \end{cases}$$

1.7.4. Modelo Autorregresivo de promedios móviles y Modelo lineal de Espacio de estados

Sea $\{W_m\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas en $\mathbb{R}$. Decimos que el Proceso $Y = \{Y_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ es un Modelo Autorregresivo de promedios móviles de orden (k,l) si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-l} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} &Y_0 = W_0, \\ &Y_n = \alpha_1 Y_{n-1} + \alpha_2 Y_{n-2} + \ldots + \alpha_k Y_{n-k} + W_n + \beta_1 W_{n-1} + \ldots + \beta_l W_{n-l+1} \end{aligned}$$

Si $k > 1$, el futuro Y_{n+1} depende no solo del presente Y_n, sino también del pasado $Y_{n-2}, \ldots, Y_{n-k}$; de modo que no es una Cadena de Markov.

Definimos

$$X_n = (Y_n, \ldots, Y_{n-k+1}, W_n, \ldots, W_{n-l+1})^T,$$

así,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} X_{n-1} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{l-1} & \beta_l \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W_n \\ \vdots \\ W_{n-l+1} \end{pmatrix}$$

El Teorema 2 nos asegura que $X = \{X_n\}_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ es una Cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^l$. Así que podemos explotar las propiedades Markovianas de X y luego tratar de regresar información útil al Proceso Y.

Podemos generalizar la construcción antes hecha de la siguiente manera

Definición 15. *Decimos que el Proceso X es un Modelo lineal de Espacio de estados si existen $m, p \in \mathbb{N}$, $F \in M(n \times n)$, $G \in M(n \times p)$ y W una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas en $\mathbb{R}^p$ tales que*

$$\begin{aligned} X_0 &= W_0, \\ X_k &= FX_{n-1} + GW_k \end{aligned}$$

Por el Teorema 2, todo Modelo lineal de Espacios de estados es una Cadena de Markov.

Dado un modelo de Espacio Lineales, tenemos un modelo determinista definido por la dupla (F, G)

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \; x_{k+1} = Fx_k + Gu_{k+1},$$

para cualquiera sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^p$, al que denotaremos por $LM(F, G)$.

Definición 16. *Decimos que el $LM(F, G)$ es controlable si, y sólo si, para todos $x_0, x^* \in \mathbb{R}^n$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal y $u_1^*, \dots, u_m^* \in \mathbb{R}^p$ tal que $x_m = x^*$, cuando $u_1 = u_1^*, \dots, u_m = u_m^*$. Lo denotaremos por $LCM(F, G)$.*

La definición anterior es claramente un concepto de comunicación entre estados para el modelo determinista.

Definición 17. *Sea $m \in \mathbb{N}$.*

$$C_m = [F^{m-1}G|\ldots|FG|G] \in M(n \times n^m)$$

son las matrices de controlabilidad asociada a (F, G). Decimos que (F, G) es controlable si C_n tiene rango n.

Proposición 14. *La dupla (F, G) es controlable si, y sólo si, C_m tiene rango máximo, para alguna $m \in \mathbb{N}$*

Demostración. Supongamos que (F, G) es controlable, entonces C_n tiene rango n, por definición.

Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que C_m tienen rango n. Si $m = n$, por definición, (F, G) es controlable.

Si $m < n$, entonces C_m tiene n columnas linealmente independientes. Como

$$C_n = [F^{n-1}G|\ldots|F^mG|F^{m-1}G|\ldots|FG|F] = [F^{n-1}|\ldots|F^mG|C_m],$$

C_n tiene n columnas linealmente independientes.

Si $m > n$, por el Teorema de Caley-Hamilton, existen polinomios de grado $n-1$, $p_1, \ldots, p_{m-n+1}$ tales que $F^m = p_{m-n+1}(F), \ldots, F^{n+1} = p_{m-n+1}(F)$. Así,

$$C_m = [p_{m-n+1}(F)G|\ldots|p_1(F)G|C_n],$$

de modo que C_n tiene n columnas linealmente independientes.

Por lo tanto (F, G) es controlable.

□

Proposición 15. *Si (F, G) es controlable, entonces $LM(F, G)$ es controlable, es decir, tenemos un $LCM(F, G)$*

Demostración. Sea $x_0 \in$ y $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$,

$x_1 = Fx_0 + G_1u_1,$

$x_2 = Fx_1 + GW_2 = F(Fx_0 + Gu_1) + Gu_2 = F^2x_0 + FGu_1 + Gu_2,$

$\vdots$

$x_n = Fx_{n-1} + Gu_n = F(F^{n-1}x_0 + F^{n-2}Gu_1 + \ldots + FGu_{n-2} + Gu_{u-1}) + Gu_n$

$= F^nx_0 + F^{n-1}Gu_1 + \ldots + FGu_{k-1} + GW_u$

$$= F^nx_0 + [F^{n-1}G|\ldots|FG|G] \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = F^nx_0 + C_n \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Al tener C_n rango n, para toda $x^* \in \mathbb{R}^n$, existen $u_1^*, \ldots, u_n^* \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_n(u_1^*, \ldots, u_n^*) = x^*$. Por lo tanto el Modelo Lineal es controlable. □

Teorema 6. *Sea X un Modelo de Espacios lineal tal que W tiene una Distribución Gaussiana estándar y el modelo determinista asociado es controlable, entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $P^n(x, A)$ tiene densidad Gaussiana con soporte en todo $\mathbb{R}^n$ y de clase $C^\infty(R^n)$.*

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $X_0 = x$,

$X_1 = Fx + GW_1,$

$X_2 = FX_1 + GW_2 = F(Fx + GW_1) + GW_2 = F^2x + FGW_1 + GW_2,$

$\vdots$

$X_n = FX_{n-1} + GW_k = F(F^{n-1}x + F^{n-2}GW_1 + \ldots + FGW_{n-2} + GW_{n-1}) + GW_n$

$= F^nx + F^{n-1}W_1 + \ldots + FGW_{n-1} + GW_n;$

Al ser X_n combinación lineal de variables aleatorias Gaussianas independientes, X_n es una variable aleatoria Gaussiana, por lo tanto tiene densidad Gaussiana.

Ahora, $P^n(x,\cdot)$ está concentrada en todo $\mathbb{R}^n$ si, y sólo si, la matriz de covarianzas de $P^n(x,\cdot)$ es de rango máximo.

Dado que

$$X_n = F^n x + F^{n-1}W_1 + \ldots + FGW_{n-1} + GW_n,$$

y que W_0 tiene una Distribución Gaussiana estándar

$$\mu_x^n = E_x[X_n] = F^n x$$

y

$$\sigma_n^k = Var_x[X_n] = E_x[(X_n - \mu_x^n)(X_n - \mu_x^n)^T)] = \sum_{m=0}^{n-1} F^m G G^T (F^m)^T,$$

como el modelo determinista asociado es controlable, C_n tiene rango máximo, en particular, σ_n^k tiene rango máximo. Por lo tanto $P^n(x,\cdot)$ tiene densidad Gaussiana, con soporte en todo $\mathbb{R}^n$ y de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

□

Capítulo 2

Irreducibilidad

Puestos en claro los conceptos generales de una Cadena de Markov, ahora nos interesa estudiar la Probabilidad de llegar a cierto conjunto, partiendo de un estado inicial. En espacio de estados discreto, dada una Cadena Φ, decimos que es irreducible si $L(x, y) > 0$, para todos $x, y \in X$. Esto facilita el estudio de la Cadena, aprovechando la estructura discreta del espacio de estados.

Se vuelve problemático querer generalizar este concepto, cuando el espacio de estados es más general, pues en muchos casos las probabilidades asociadas tendrán densidades, o los puntos donde se acumula masa serán muy pocos. De modo que, al querer calcular la Probabilidad de llegar a cierto punto, seguramente es cero.

En este Capítulo abordaremos estos tópicos de comunicación imitando las construcciones de teoría en espacios discretos, aprovechando la estructura general que le damos al espacio de estados.

2.1. Irreducibilidad

Definición 18. *Se dise que la Cadena de Markov Φ es φ-irreducible si, y sólo si, existe una medida φ en $B(X)$ tal que*

para toda $x \in X$, sucede que $L(x, A) > 0$, siempre que $\varphi(A) > 0$.

Si X es discreto y tenemos una Cadena de Markov irreducible Φ, entonces, para todo $x \in X$, existe una medida trivial de irreducibilidad, la medida de dirac en x, dada por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1; & \text{si } x \in A \\ 0; & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

Teorema 7. *Sea $0 < \epsilon < 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Φ es φ-irreducible.*

2. *Para toda $x \in X$, siempre que $\varphi(A) > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $P^n(x, A) > 0$.*

3. *Para toda $x \in X$, siempre que $\varphi(A) > 0$, $U(x, A) > 0$.*

4. *Para toda $x \in X$, siempre que $\varphi(A) > 0$,*

$$K_{a_\epsilon}(x, A) > 0$$

Demostración. Sea $A \in B(X)$ tal que $\varphi(A) > 0$.

$$L(x, A) = P_x(\tau_A < \infty) = P_x(\phi_n \in A, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}) = P_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\phi_n \in A\}\right)$$

De modo que, para toda $m \in \mathbb{N}$, $x \in X$ y $A \in B(X)$

$$P^m(x, A) \leq L(x, A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \tag{2.1}$$

De aquí concluimos la equivalencia entre 1,2 y 3.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $a(n) = (1-\epsilon)\epsilon^n > 0$; entonces $P^n(x, A) > 0$ si, y sólo si, $a(n)P^n(x, A) > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto 2 implica 4.

Por último, veamos que 4 implica 1.

Supongamos que $K_{a_\epsilon}(x, A) > 0$, para toda $x \in X$. Ahora,

$$K_{a_\epsilon}(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n) = P^0(x, A)a(0) + \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A)a(n)$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A)a(n) & , \text{ si } x \in A^c \\ \\ (1-\epsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A)a(n) & , \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Como para toda $x \in A^c$, $K_{a_\epsilon}(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A)a(n) > 0$, de modo que $U(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0$, para toda $x \in A^c$. Dado que 3 implica 1, $L(x, A) > 0$, para toda $x \in A^c$.

Sea $x \in A$, por la Proposición 10

$$L(x, A) = P(x, A) + \int_{A^c} L(y, A)P(x, dy),$$

como

$$1 = P(x, X) = P(x, A \cup A^c) = P(x, A) + P(x, A^c)$$

$\max\{P(x, A) > 0, P(x, A^c)\} > 0$.

Si $P(x, A) > 0$, entonces $L(x, A) > 0$.

Si $P(x, A^c) > 0$, como $L(y, A) > 0$, para toda $y \in A^c$, entonces $\int_{A^c} L(y, A)P(x, dy) > 0$.

Es decir, $L(x, A) > 0$, para toda $x \in A$.

Por lo tanto, si $K_{a_\epsilon}(x, A) > 0$, entonces $L(x, A) > 0$, para toda $x \in X$, es decir, la Cadena es φ-irreducible.

□

Corolario 1. *Si algún m-esqueleto de la Cadena Φ es φ-irreducible, entonces Φ es φ-irreducible*

Demostración. Sea $A \in B(X)$ tal que $\phi(A) > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} P^{nm}(x, A) > 0, \text{ para toda } x \in X.$$

Por el Teorema anterior, Φ es φ-irreducible.

□

El recíproco es falso, como lo muestra la Cadena Φ en $\{0, 1\}$ con Núcleo de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El 2-esqueleto tiene como Núcleo de transición a la matriz

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La Cadena es irreducible, por lo que δ_0 es medida de irreducibilidad y $\delta_0(0) = 1 > 0$, pero $P^{2n}(1, 0) = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto Φ^2, no es δ_0-irreducible.

2.2. Medida de irreducibilidad maximal

Supongamos que tenemos una Cadena de Markov irreducible en los naturales, entonces $L(n, A) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \emptyset$. Dado $n \in \mathbb{N}$, δ_n es una medida de irreducibilidad.

Si tomamos como ψ a la medida de contar en $\mathbb{N}$, entonces

$$\psi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(A),$$

es decir, ψ tiene acumulada toda la información que nos proporcionaba cada δ_n, por lo que podríamos decir que la medida de contar es una medida de irreducibilidad "maximal"para todas las Cadenas irreducibles en los naturales.

Queremos hacer lo mismo, pero ahora en cualquier Cadena de Markov con alguna medida de irreducibilidad, es decir, encontrar una medida que acumule toda la información de todas las medidas de irreducibilidad.

Damos primero un Lema que es útil en lo que sigue de la Tesis.

Lema 3. *Sean Φ una Cadena de Markov φ-irreducible, $A, B \in B(X)$,*

$$A(k) = \left\{ y \in B | \sum_{n=1}^{k} P^n(y, A) > \frac{1}{k} \right\},$$

$$A(\infty) = \left\{ y \in B | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A) > 0 \right\}$$

Entonces:

1. *$\{A(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una cubierta creciente de $A(\infty)$;*
2. *si $\varphi(A) > 0$, entonces $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una cubierta creciente de B.*

Demostración. 1. Sea $x \in A(\infty)$; como $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{m} P^n(x, A) > 0$, y existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{m} P^n(x, A) > \frac{1}{r}$.

Si $r \geq m$, entonces $\sum_{n=1}^{r} P^n(x, A) \geq \sum_{n=1}^{m} P^n(x, A) > \frac{1}{r}$, es decir, $x \in A(r)$.

Si $r < m$, $\frac{1}{r} > \frac{1}{m}$, entonces $\sum_{n=1}^{m} P^n(x, A) > \frac{1}{m}$, es decir, $x \in A(m)$.

De lo anterior, $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A(m)$, para toda $x \in A(\infty)$, por lo tanto, $A(\infty) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A(k)$.

Sea $x \in A(m)$, $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \geq \sum_{n=1}^{m} P^n(x, A) > 1/m > 0$; por lo que $x \in A(\infty)$, para toda $x \in A(m)$ y para toda $m \in \mathbb{N}$.

Entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A(k) \subseteq A(\infty)$.

De todo lo anterior concluimos que $A(\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(k)$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $x \in A(k)$, $\sum_{n=1}^{k} P^n(x, A) > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$.

Dado que $\sum_{n=1}^{k+1} P^n(x, A) \geq \sum_{n=1}^{k} P^n(x, A) > \frac{1}{k+1}$, tenemos que $x \in A(k+1)$, para toda $x \in A(k)$.

Es decir, $A(k) \subseteq A(k+1)$, para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una cubierta creciente de $A(\infty)$.

2. Si $\varphi(A) > 0$, entonces $L(x, A) > 0$, para toda $x \in X$, en particular para toda $x \in B$. Por el Teorema 7,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0, \text{ para toda } x \in X,$$

es decir, $B \subseteq A(\infty) = \{y \in B | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A) > 0\} \subseteq B$.

Concluimos que $B = \{y \in B | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A) > 0\}$.

Por la parte 1 tenemos que $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una cubierta creciente de B.

□

Teorema 8. *Sean Φ una Cadena de Markov φ-irreducible, para alguna medida en $B(X)$, y $0 < \epsilon < 1$. Entonces existe una medida, ψ, sobre $B(X)$ tal que:*

1. *Φ es ψ-irreducible;*
2. *para cualquier otra medida φ' sobre $B(X)$, la Cadena es φ'-irreducible si, y sólo si, $\varphi' \prec \psi$;*
3. *si $\psi(A) = 0$, entonces $\psi(\{y \in X | L(y, A) > 0\}) = 0$;*
4. *la medida de Probabilidad ψ es equivalente a*

$$\psi'(A) = \int_X K_{a_\epsilon}(y, A)\varphi'(dy)$$

para toda medida de irreducibilidad finita φ'

Demostración. Antes de comenzar la prueba, hagamos unas observaciones para hacer menos pesada la demostración.

Sea $\eta \prec \varphi$ y supongamos que $\eta(A) > 0$, entonces $\varphi(A) > 0$, por lo cual $L(x, A) > 0$, para toda $x \in X$, por lo tanto η es una medida de irreducibilidad para Φ.

De lo anterior, podemos suponer que $\varphi(X) = 1$; si no, tomamos cualquier $f \in L_1(X, B(X), \varphi)$ tal que $\int_X f d\varphi > 0$, y definimos $\varphi'(A) = \frac{\int_A f d\varphi}{\int_X f d\varphi}$, que cumple $\varphi'(X) = 1$ y $\varphi \succ \varphi'$.

Definimos $\psi : B(X) \to \mathbb{R}$ como

$$\psi(A) = \int_X K_{a_\epsilon}(y, A)\varphi(dy)$$

Dado que $K_{a_\epsilon}(y, X) = 1$ y φ es una medida de Probabilidad, ψ también es una medida de Probabilidad.

1. Supongamos que $\psi(A) = \int_X K_{a_\epsilon}(y, A)\varphi(dy) > 0$ y sea $a(n) = (1-\epsilon)\epsilon^n$, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$K_{a_\epsilon}(y, A) = 0 \text{ si, y sólo si, } \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A)a(n) = 0$$

y

$$X = \{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A) > 0\} \bigcup \{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A) = 0\}$$

De lo anterior,

$$\int_X K_{a_\epsilon}(y, A)\varphi(dy)$$

$$= \int_{\{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y,A) > 0\}} K_{a_\epsilon}(y, A)\varphi(dy) + \int_{\{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y,A) = 0\}} K_{a_\epsilon}(y, A)\varphi(dy)$$

$$= \int_{\{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y,A) > 0\}} K_{a_\epsilon}(y, A)\varphi(dy) > 0$$

Por el Lema 3, tomando a $B = X$,

$$\{A(k)\}_{k \in \mathbb{N}} = \{y \in X | \sum_{n=1}^{k} P^n(y, A) > 1/k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

es una cubierta creciente de

$$\{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A) > 0\} = A(\infty).$$

Así,

$$\int_{\cup_{k=1}^{\infty} A(k)} K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A)\varphi(dy) > 0$$

De modo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{A(k)} K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A)\varphi(dy) > 0$, y con ello $\varphi(A(k)) > 0$.

Sea $x \in X$, dado que φ es medida de irreducibilidad, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $P^m(x, A(k)) > 0$. Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$\sum_{n=1}^{k} P^{n+m}(x, A) = \sum_{n=1}^{k} \int_X P^n(y, A)P^m(x, dy) = \int_X \left(\sum_{n=1}^{k} P^n(y, A) \right) P^m(x, dy)$$

$$\geq \int_{A(k)} \left(\sum_{n=1}^{k} P^n(y, A) \right) P^m(x, dy) \geq \int_{A(k)} \frac{1}{k} P^m(x, dy)$$

$$= \frac{1}{k} \int_{A(k)} P^m(x, dy) = \frac{1}{k} P^m(x, A(k)) > 0$$

Es decir, $\sum_{n=1}^{k} P^{n+m}(x, A) > 0$.

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \geq \sum_{n=1}^{k} P^{n+m}(x, A) > 0$, sucede que $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0$, para toda $x \in X$, siempre que $\psi(A) > 0$. Por lo tanto la Cadena es ψ-irredudible.

2. Sea φ' una medida sobre $B(X)$.

Supongamos φ' es una medida de irreducibilidad. Si $\varphi'(A) > 0$, $K_{a_\epsilon}(y, A) > 0$, para toda $y \in X$. Entonces $\psi(A) = \int_X K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A)\varphi(dy) > 0$. Por lo tanto $\psi \succ \varphi$.

Supongamos $\psi \succ \varphi'$. Si $\varphi'(A) > 0$, entonces $\psi(A) > 0$. Al ser ψ una medida de irreducibilidad, $L(x, A) > 0$, para toda $x \in X$. Así, si $\varphi'(A) > 0$, entonces $L(x, A) > 0$, para toda $x \in X$, es decir, φ' es una medida de irreducibilidad.

3. Sea $m \in \mathbb{N}$, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$
\begin{aligned}
&\psi(A) \\
&\quad = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,A)a(n)\varphi(dx) \geq \int_X \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n+m}(x,A)a(n+m)\right]\varphi(dx) \\
&\quad = \int_X \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^m(y,A)P^n(x,dy)(1-\epsilon)\epsilon^{n+m}\right]\varphi(dx) \\
&\quad = \int_X \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^m(y,A)\epsilon^m \left(P^n(x,dy)(1-\epsilon)\epsilon^n\right)\right]\varphi(dx) \\
&\quad = \int_X \int_X P^m(y,A)\epsilon^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,dy)(1-\epsilon)\epsilon^n\right]\varphi(dy) \\
&\quad = \epsilon^m \int_X \int_X P^m(y,A)K_{a_\epsilon}(x,dy)\varphi(dx) \\
&\quad = \epsilon^m \int_X P^m(y,A)\left[\int_X K_{a_\epsilon}(x,dy)\varphi(dx)\right] \\
&\quad = \epsilon^m \int_X P^m(y,A)\psi(dy)
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\int_X P^m(x,A)\psi(dx) \leq \frac{\psi(A)}{\epsilon^m}
$$

Dado que $P_A^m(x,A) \leq P^m(x,A)$,

$$
\int_{\{y\in X \,|\, L(y,A)>0\}} P_A^m(x,A)\psi(dx) \leq \int_X P^m(x,A)\psi(dx) \leq \psi(A)/\epsilon^m
$$

Sumando sobre todo $\mathbb{N}$ la igualdad anterior y dado que $\frac{1}{\epsilon} > 1$,

$$
0 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\{y\in X \,|\, L(y,A)>0\}} P_A^m(x,A)\psi(dx) = \int_{\{y\in X \,|\, L(y,A)>0\}} \sum_{m=1}^{\infty} P_A^m(x,A)\psi(dx)
$$

$$
= \int_{\{y\in X \,|\, L(y,A)>0\}} L(x,A)\psi(dx) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi(A)}{\epsilon^m} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \psi(A) = 0 \\ \infty & , \text{ si } \psi(A) > 0 \end{cases}
$$

Si $\psi(A) = 0$, entonces

$$\int_{\{y\in X|L(y,A)>0\}} L(x,A)\psi(dx) = 0,$$

por lo tanto $\psi(\{y \in X|L(y,A) > 0\}) = 0$.

4. Sea φ' una medida de irreducibilidad finita para la Cadena y $\psi'(A) = \int_X K_{a_{\frac{1}{2}}}(y,A)\varphi'(dy)$.

   Al igual que en las partes 1 y 2, tenemos que ψ' es una medida de irreducibilidad para la Cadena y $\psi' \succ \psi$. Por 2 ψ es absolutamente continua con respecto a cualquier medida de irreducibilidad, en particular, $\psi \succ \psi'$.

   Por lo tanto ψ y ψ' son equivalentes.

$\square$

2.2.1. Conjuntos absorbentes y llenos

Definición 19. *Sea Φ una Cadena ψ-irreducible, con ψ alguna medida maximal de irreducibilidad.*

1. *$B^+(X) = \{A \in B(X)|\psi(A) > 0\}$ es el conjunto de los medibles ψ-positivos.*

2. *Decimos que un conjunto $A \in B(X)$ es lleno si, y sólo si, $\psi(A^c) = 0$.*

3. *Decimos que un conjunto $A \in B(X)$ es absorbente si, y sólo si, $P(x,A) = 1$, para toda $x \in A$.*

El Teorema 8 nos asegura que $B^+(X)$ está bien definido, es decir, que para cualquier otra medida maximal de irreducibilidad ψ', es el mismo, ya que ψ y ψ' son equivalentes.

Lema 4. *Sea $A \in B(X)$ absorbente. Entonces $P^n(x,A) = 1$, para toda $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. El caso $n = 1$ es obvio de la definición de absorbente.

Supóngamos válido para $n = k$, es decir, $P^k(x,A) = 1$, para toda $x \in A$. Sea $y \in A$, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$P^{k+1}(y, A)$

$$= \int_X P^k(x, A)P(y, dx) \geq \int_A P^k(x, A)P(y, dx) = \int_A 1P(y, dx) = P(y, A)$$

$$= 1$$

De modo que, $P^{k+1}(y, A) \geq 1$, y al ser $P^{k+1}(x, \cdot)$ una medida de Probabilidad, $P^{k+1}(y, A) = 1$, para toda $y \in A$.

Concluimos que $P^n(x, A) = 1$, para toda $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.

□

Proposición 16. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ. Entonces*

1. *Todo conjunto absorbente no vacío es lleno.*
2. *Todo conjunto lleno contiene un conjunto absorbente no vacío.*

Demostración. 1. Sea $A \in B(X)$ absorbente. Supongamos $\psi(A^c) > 0$, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A^c) > 0$, para toda $x \in X$, en particular, para toda $x \in A$. Sea $x \in A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $P^m(x, A^c) > 0$.

Por el Lema 4, $P^m(x, A) = 1$, y, al ser $P^m(x, \cdot)$ una Probabilidad, $P^m(x, A^c) = 0$. Esto es una contradición que vino de suponer que $\psi(A^c) > 0$.

Concluimos que $\psi(A^c) = 0$, es decir, A es lleno.

2. Supongamos que $A \in B(X)$ es lleno. Sean

$$B = \{y \in X | \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A^c) = 0\}, B^c = \{y \in X | \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A^c) > 0\} \in B(X)$$

Sea $y \in X$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A^c)$$

$$= P^0(y, A^c) + \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A^c) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A^c) & , \text{ si } y \in A \\ \\ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A^c) & , \text{ si } y \in A^c \end{cases}$$

si $y \in A^c$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A^c) \geq P^0(y, A^c) = 1 > 0$; mientras que si $y \in B^c \setminus A^c$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A^c) > 0$. Por lo tanto

$$B^c = A^c \cup \{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A^c) > 0\}$$

Como $\psi(A^c) = 0$, por el Teorema 8, $\psi(\{y \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A^c) > 0\} = \psi(\{y \in X | L(y, A^c) > 0\} = 0$; es decir, B^c es unión de dos conjuntos ψ-nulos, de modo que $\psi(B) > 0$, en particular, B es no vacío.

Además, $A^c \subseteq B^c$, por lo tanto $B \subseteq A$.

Veamos que B es absorbente. Supongamos que existe $x \in B$ tal que $P(x, B^c) > 0$. Usando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,A^c)$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} P^{n+1}(x, A^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X P^n(y, A^c) P(x, dy)$$

$$= \int_X \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A^c) P(x, dy) \geq \int_{B^c} \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A^c) P(x, dy)$$

Sea $y \in B^c$, de modo que $\sum_{n=o}^{\infty} P^n(y, A^c) > 0$ y, dado que $P(x, B^c) > 0$,

$$\int_{B^c} \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A) P(x, dy) > 0.$$

De lo anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A^c) > 0$. Pero $x \in B$, de modo que $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A^c) = 0$. Esto es una contradicción, que vino de suponer que existe $x \in B$ tal que $P(x, B^c) > 0$. Por lo tanto, $P(x, B^c) = 0$, para toda $x \in B$; y al ser $P(x, \cdot)$ una medida de Probabilidad, $P(x, B) = 1$, para toda $x \in B$.

Concluimos que B es absorbente y $B \subseteq A$.

$\square$

Teorema 9. *Sean Φ una Cadena de Markov, $A \in B(X)$ un conjunto absorbente y P_A el Núcleo de transición P restringido a A. Entonces existe una Cadena de Markov Φ_A cuyo espacio de estados es A y cuyo Núcleo de transición es P_A. Más aun, si Φ es ψ-irreducible, con ψ alguna medida maximal de irreducibilidad, y denotamos a ψ_A la restricción de ψ sobre A, entonces Φ_A es ψ_A-irreducible.*

Demostración. Dado que $P_A(x, A) = 1$, para todo $x \in A$, P_A es un Núcleo de transición. Así, la existencia de la Cadena Φ_A con espacio de estados en A y Núcleo de transición P_A está garantizada por el Teorema 3.

Al ser ψ una medida maximal de irreducibilidad y A absorbente, la Proposición 16 garantiza que A es lleno, es decir, $\psi(A^c) = 0$. De modo que los conjuntos ψ-positivos de $B(X)$ coinciden con los ψ_A-positivos de $B(A)$. Por lo tanto la irreducibilidad de Φ se preserva en Φ_A

$\square$

2.3. Accesibilidad, accesibilidad uniforme y accesibilidad uniforme en Cadenas muestreadas

Definición 20. *Sean $A, B \in B(X)$.*

1. *Decimos que B es accesible desde A si, y sólo si,*

$$L(x, B) > 0, \text{ para toda } x \in A.$$

2. *Decimos que B es uniformemente accesible desde A, y lo denotamos por $A \rightsquigarrow B$, si, y sólo si, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\inf_{x \in A} L(x, B) \geq \delta$$

En espacio de estados discreto se define la relación $\rightarrow$ de la siguiente manera: $x \rightarrow y$ si, y sólo si, $L(x, y) > 0$. Dado que en espacio de estados más generales $L(x, \cdot)$ puede tener densidad, no tiene mucho sentido extender la definición tal cual, ya que en la mayoría de los $L(x, \cdot)$ le asociará a los puntos medida cero. Además, si queremos definir comunicación entre conjuntos más generales que puntos, digamos A y B, en la práctica no basta pedir que

$$L(x, B) > 0, \text{ para toda } x \in A,$$

ya que

$$\inf_{x \in A} L(x, B) \text{ podría ser } 0$$

En cambio, la relación $\rightsquigarrow$ nos es más útil.

La relación $\rightsquigarrow$ no es reflexiva: basta tomar a $X = \{0, 1\}$ y

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como $L(0, 1) = 1$, $0 \rightsquigarrow 1$; pero $L(1, 0) = 0$, de modo que $1 \not\rightsquigarrow 0$.

Veamos que si es transitiva.

Proposición 17. *Sean $A, B, C \in B(X)$ tal que $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow C$. Entonces $A \rightsquigarrow C$.*

Demostración. Sean $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\inf_{x\in A} L(x,B) \geq \delta_1 \text{ y } \inf_{x\in C} L(x,C) \geq \delta_2$$

$$L(x,C) = P_x(\phi_n \in C, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}) \geq P_x(\phi_m \in B, \phi_n \in C, \text{ para algunos } m < n)$$
$$\geq P_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\phi_1 \in B^c, \dots, \phi_{m-1} \in B^c, \phi_m \in B, \phi_{m+1} \in C^c, \dots \phi_n \in C, \dots, \phi_{n+m-1} \in C^c, \phi_{n+m} \in C^c\}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} P_x(\phi_1 \in B^c, \dots, \phi_{m-1} \in B^c, \phi_m \in B, \phi_{m+1} \in C^c, \dots, \phi_n \in C, \dots, \phi_{n+m-1} \in C^c, \phi_{n+m} \in C^c)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \int_B P(\phi_m = y, \phi_{m+1} \in C^c, \dots \phi_n \in C, \dots, \phi_{m+n-1} \in C^c, \phi_{m+n} \in C) P_B^m(x,dy)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \int_B P(\phi_0 = y, \dots, \phi_1 \in C^c, \dots, \phi_{n-1} \in C^c, \phi_n \in C) P_B^m(x,dy)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \int_B P_y(\phi_1 \in C^c, \dots, \phi_{n-1} \in C^c, \phi_n \in C) P_B^m(x,dy)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \int_B P_C^n(y,C) P_B^m(x,dy) = \int_B \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^n(y,C)\right]\left[\sum_{m=1}^{\infty} P^m(x,dy)\right]$$
$$= \int_B L(y,C)L(x,dy)$$

Así

$$L(x,C) \geq \int_B L(y,C)L(x,dy), \text{ para todo } x \in X, \text{ en particular para todo } x \in A.$$

Ahora,

$$\int_B L(y,C)L(x,dy) \geq \int_B \inf_{y\in B} L(y,C)L(x,dy) = \int_B \delta_2 L(x,dy) = \delta_2 L(x,B),$$

para toda $x \in A$, de modo que

$$\delta_2 \inf_{x\in A} L(x,B) \geq \delta_2\delta_1.$$

De lo anterior $L(x,C) \geq \delta_1\delta_2$, para toda $x \in A$, es decir,

$$\inf_{x\in A} L(x,C) \geq \delta_1\delta_2 > 0.$$

Concluimos que $A \rightsquigarrow C$.

$\square$

Definición 21. *Sea $A \in B(X)$.*

1. $\overline{A} := \{x \in X | L(x,A) > 0\}$, *el conjunto de los puntos desde los cuales A es accesible.*

2. $\overline{A}(m) := \{x \in X | \sum_{n=1}^{m} P^n(x,A) \geq \frac{1}{m}\}$.

3. $A^0 := (\overline{A})^c = \{x \in X | L(x,A) = 0\}$ *el conjunto de los puntos desde los cuales A no es accesible.*

Proposición 18. *Sea $A \in B(X)$. Entonces $\overline{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A(m)$ y $A(m) \rightsquigarrow A$, para toda $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por el Lema 3, $\overline{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A(m)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$, veamos que $A(m) \rightsquigarrow A$.

Ya que $\sum_{n=1}^{m} P^n(x,A) \geq m$, $\max\{P^1(x,A),\ldots,P^m(x,A)\} \geq \frac{1}{m}\frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}$. De modo que

$$L(x,A)$$

$$= P_x(\tau_A < \infty) \geq P_x(\tau_A \leq m) \geq P_x\left(\bigcup_{n=1}^{m}\{\Phi_n \in A\}\right)$$

$$\geq \max\{P^1(x,A),\ldots,P^m(x,A)\} \geq \frac{1}{m^2}, \text{ para toda } x \in A(m)$$

Tomando ínfimo por ambos lados de la desigualdad, obtenemos que

$$\inf_{x \in A(m)} L(x,A) \geq \frac{1}{m^2}.$$

es decir, $A(m) \rightsquigarrow A$.

□

Si Φ tiene como medida maximal de irreducibilidad a ψ, el Lema 3 y la Proposición anterior nos aseguran que para cualquier $A \in B^+(X)$, $X = \overline{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A(m)$ y $A(m) \rightsquigarrow A$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Además, por ser $\{A(m)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión creciente, existe una $M \in \mathbb{N}$ tal que $A(m) \in B^+(X)$, para toda $m \geq M$. Es decir, podemos cubrir al espacio con una sucesión de elementos en $B^+(X)$, desde cada uno de los cuales A es uniformemente accesible.

Definición 22. *Sean $A, B \in B(X)$ y $b : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$. Decimos que B es uniformemente accesible desde A con respecto a b, y lo denotamos como $A \overset{b}{\rightsquigarrow} B$, si, y sólo si, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\inf_{x \in A} K_b(x, B) \geq \delta$$

Proposición 19. *Sean $A, B \in B(X)$ y $a : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$. Si $A \overset{a}{\rightsquigarrow} B$, entonces $A \rightsquigarrow B$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que

$$\inf_{x \in A} K_a(x, B) \geq \delta$$

Por un lado

$$P_x(\Phi_a \in A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n),$$

y por otro

$$L(x, A) = P_x(\phi_n \in A, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}) \geq P_x(\Phi_a \in A)),$$

de modo que

$$L(x, A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n), \text{ para toda } x \in A.$$

De lo anterior

$$\inf_{x \in A} L(x, B) \geq \inf_{x \in A} K_a(x, B) \geq \delta.$$

Por lo tanto $A \rightsquigarrow B$

□

La Proposición anterior nos asegura que $\rightsquigarrow$ generaliza a $\overset{a}{\rightsquigarrow}$, y dado que $\rightsquigarrow$ no es reflexiba, $\overset{a}{\rightsquigarrow}$ tampoco lo es. Pero, al igual que $\rightsquigarrow$, si es transitiva, en algún sentido.

Proposición 20. *Sean $a, b : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ y $A, B, C \in B(X)$. Entonces:*

1. *Si $A \overset{a}{\rightsquigarrow} B$ y $B \overset{b}{\rightsquigarrow} C$, entonces $A \overset{a*b}{\rightsquigarrow} C$*

2. $$U(x, A) \geq \int_X K_a(y, A)U(x, dy)$$

Demostración. 1. Sean $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\inf_{x\in A} K_a(x,B) \geq \delta_1 \text{ y } \inf_{y\in B} K_b(y,C) \geq \delta_2,$$

por el Lema 1, para toda $x \in A$,

$$K_{a*b}(x,C) = \int_X K_b(y,C)K_a(x,dy) \geq \int_B K_b(y,C)K_a(x,dy) \geq \int_B \inf_{y\in B} K_a(y,C)$$

$$= \int_B \delta_2 K_a(x,dy) = \delta_2 K_a(x,B) \geq \delta_2 \inf_{x\in A} K_a(x,B) \geq \delta_1\delta_2,$$

es decir,

$$\inf_{x\in A} K_{a*b}(x,C) \geq \delta_1\delta_2$$

Por lo tanto, $A \overset{a*b}{\rightsquigarrow} C$.

2. Sean $n \in \overline{\mathbb{N}}$,

$U(x,A)a(n)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P^m(x,A)a(n) \geq \sum_{m=n}^{\infty} P^m(x,A)a(n) = \sum_{m=0}^{\infty} a(n)P^{n+m}(x,A)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_X a(n)P^n(y,A)P^m(x,dy) = \int_X a(n)P^n(y,A)\left[\sum_{m=0}^{\infty} P^m(x,dy)\right]$$

De lo anterior,

$$U(x,A)a(n) \geq \int_X a(n)P^n(y,A)\left[\sum_{m=0}^{\infty} P^m(x,dy)\right], \text{ para toda } n \in \overline{\mathbb{N}}$$

y para toda $x \in X$, de modo que

$$U(x,A)$$

$$= U(x,A)\sum_{n=0}^{\infty} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} U(x,A)a(n)$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty}\int_X a(n)P^n(y,A)\left[\sum_{m=0}^{\infty} P^m(x,dy)\right]$$

$$= \int_X \left[\sum_{n=0}^{\infty} a(n)P^n(y,A)\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} P^m(x,dy)\right]$$

$$= \int_X K_a(y,A)U(x,dy)$$

□

2.4. Medidas de irreducibilidad para algunos modelos específicos

2.4.1. Caminata aleatoria en la semirecta

Proposición 21. *Sea Φ la caminata aleatoria en la semirecta con variable de incremento $W = \{W_n\}$ tales que $W_1 \sim \Gamma$; y sea $\varphi : B(\overline{\mathbb{R}}) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\varphi(\{0\}) = 1$ y $\varphi((0,\infty)) = 0$.*

Entonces Φ es φ-irreducible si, y sólo si,

$$P(W_1 < 0) = \Gamma(-\infty, 0) > 0.$$

En este caso, si C es compacto, tenemos que $C \rightsquigarrow \{0\}$.

Demostración. Supongamos $P(W_1 < 0) = 0$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $P(W_1 + \ldots + W_n \geq 0) = 1$. Dado que

$$\phi_n = max\{0, \phi_0 + W_1 + \ldots + W_n\},$$

$P(\phi_n = \Phi_0 + W_1 + \ldots + W_n) = 1$.

Sea $x > 0$,

$$P^n(x,[x,\infty))$$

$$= P_x(\Phi_n \geq x) = P(x + W_1 + \ldots + W_n \geq x)$$

$$= P(W_1 + \ldots + W_n \geq 0) = 1$$

Por lo tanto $P^n(x,\{0\}) = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$; en particular, $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,\{0\}) = 0$, para toda $x > 0$. Como $\varphi(\{0\}) = 1$, φ no puede ser una medida de irreducibilidad.

Supongamos que $P(W_1 < 0) > 0$.

$\{W_1 < 0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{W_1 < -\frac{1}{n}\}$; así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P(W_1 < -\frac{1}{n_0}) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{1}{n_0}$, como $P(W_1 < -\epsilon) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $P(W_1 < -\epsilon) \geq \delta$.

Sea $x \in [0,\infty)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x/\epsilon < n$.Sea

$$w \in \bigcap_{i=1}^{n}\{w \in \Omega | W_i(w) < -\epsilon\},$$

entonces

$$x + W_1(w) + \ldots + W_n(w) < w - \epsilon - \ldots - \epsilon = x - n\epsilon < 0.$$

Si $\phi_0 = x$, entonces $\phi_n(w) = max\{0, x + W_1(w) + \ldots + W_n(w)\} = 0$. De modo que $\phi_n(w) = 0$, para toda $w \in \bigcap_{i=1}^{n}\{w \in \Omega | W_i(w) < -\epsilon\}$.

Dado todo lo anterior,

$$P^n(x,\{0\})$$

$$= P_x(\Phi_n = 0) \geq P(W_1 < -\epsilon, \ldots, W_n < -\epsilon) = \prod_{i=1}^{n} P(W_i < -\epsilon)$$

$$= \delta^n > 0,$$

es decir, para toda $x \in [0,\infty)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^n(x,\{0\}) > 0$.

Como que el único conjunto con medida φ positiva es $\{0\}$, φ es una medida de irreducibilidad para Φ.

Supongamos $C \subseteq [0, c]$ es compacto. Sea $x \in C$, tomamos $n = [\frac{c}{\epsilon}]$, y procediendo análogamente, tenemos que $P^n(x, \{0\}) \geq \delta^n > 0$.

Ahora,

$$L(x, \{0\}) = P_x(\tau_0 < \infty) \geq P_x(\tau_0 \leq n) \geq P^n(x, \{0\}) \geq \delta^n, \text{ para toda } x \in C.$$

Concluímos que, $C \rightsquigarrow \{0\}$.

$\square$

Supongamos que $P(W_1 < 0) > 0$, el Teorema 8 nos asegura que existe una medida maximal de irreducibilidad ψ que tiene la forma

$$\psi(A) = \int_{[0,\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(y, A)}{2^{n+1}} \varphi(dy) = \int_{\{0\}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(y, A)}{2^{n+1}} \varphi(dy) + \int_{(0,\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(y, A)}{2^{n+1}} \varphi(dy)$$

Dado que $\varphi(\{0\}) = 1$ y $\varphi((0, \infty)) = 0$, concluimos que

$$\psi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(0, A)}{2^{n+1}}$$

Modelos de almacenamiento

Los modelos de almacenamiento son un caso particular de las caminatas aleatorias en la semirecta, donde la variable de incremento es $W = \{S_n - J_n\}$, con S_n el número de entradas al sistema al tiempo n, y J_n las salidas. Por la proposición anterior, podemos dar una medida de irreducibilidad simple si $P(S_n - J_n < 0) > 0$, es decir, si el modelo nos permite que a cualquier tiempo n la Probabilidad de que las entradas sean menores que las salidas es positiva.

2.4.2. Caminatas aleatorias

Supongamos que la variable de incremento tiene una parte absolutamente continua con respecto a λ en $\mathbb{R}$, con densidad γ positiva y acotada inferiormente en una vecindad compacta del origen, es decir,

$$P(W_n \in A) \geq \int_A \gamma(y)\lambda(dy), \text{ y } \gamma(x) \geq \delta > 0, \text{ para toda } x \in [-\beta, \beta].$$

Sean $C = [-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}]$, $B \subseteq C$; tomemos $x \in C$ y $z \in B$, es decir, $-\frac{\beta}{2} \leq z \leq \frac{\beta}{2}$ y $-\frac{\beta}{2} \leq x \leq \frac{\beta}{2}$, entonces $-\beta \leq z - x \leq \beta$; de modo que $\beta \geq y \geq \beta$, para toda $y \in B - x$.

Por hipótesis

$$P(x,B) = P(\phi_1 \in B|\phi_0 = x) = P(W_1 + x \in B) = P(W_1 \in B - x)$$

$$\geq \int_{B-x} \gamma(y)\lambda(dy) \geq \delta\lambda(B-x) = \delta\lambda(B)$$

Así, $P(x,B) \geq \delta\lambda(B)$, para toda $x \in C$.

Sean $x > 0$, $D = [-\frac{\beta}{2}, -\frac{\beta}{4}]$ y $n = 2[x/\beta] + 1$,

$$P(W_1 \in D) \geq \int_D \gamma(y)\lambda(dy) \geq \delta\lambda(D) = \delta\frac{\beta}{4} > 0$$

Sea $w \in \bigcup_{i=1}^n \{w \in \Omega | W_i(w) \in D\}$,

$$x - \frac{\beta}{2} - \ldots - \frac{\beta}{2} \leq x + W_1(w) + \ldots + W_n(w) \leq x - \frac{\beta}{4} - \ldots - \frac{\beta}{4},$$

es decir,

$$-\beta/2 \leq x - \frac{n\beta}{2} \leq \phi_n(w) \leq x - \frac{n\beta}{4} \leq \beta/2$$

Por lo tanto $\phi_n(w) \in C$.

Análogamente, si $x < 0$, tomamos $D = [\beta/4, \beta/2]$, $n = 2[x/\beta] + 1$ y $w \in \bigcap_{i=1}^n \{w \in \Omega / W_i(w) \in D\}$, entonces $\phi_n(w) \in C$.

Sean $\varphi = \lambda_{/C}$, la medida de Lebesgue restringida a C y $A \in B(\mathbb{R})$ tal que $\lambda(A \cap C) > 0$. Tomamos $x \in \mathbb{R}$ y $n = 2[x/\beta] + 1$, dado todo lo anterior, $P(y, A \cap C) \geq \delta\lambda(A \cap C) > 0$ y para toda $y \in C$, $P^n(y, C) > 0$.

Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$P^{n+1}(x, A)$

$$\geq P^{n+1}(x, A \cap C) = \int_{\mathbb{R}} P(y, A \cap C) P^n(x, dy) \geq \int_C P(y, A \cap C) P^n(x, dy) > 0$$

Por lo tanto $\varphi = \lambda_{/C}$ es medida de irreducibilidad.

Si los Núcleos de transición tienen densidad con soporte en todo $\mathbb{R}$, por ejemplo Gaussiana, la medida de Lebesgue es una medida de irreducibilidad maximal.

Proposición 22. *Sea Φ la caminata aleatoria en $\mathbb{R}$ y supongamos que Γ tiene densidad γ con soporte en todo $\mathbb{R}$. Entonces λ es medida maximal de irreducibilidad.*

Demostración. Veamos primero que λ es medida de irreducibilidad.
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. En el Capítulo anterior demostramos que si Γ tiene densidad, $P^n(x, \cdot)$ tiene densidad γ_n^x dada por

$$\gamma_n^x(x_n) = \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \gamma(x_1 - x - x_2 - \ldots - x_n)\gamma(x_2) \ldots \gamma(x_n) dx_n \ldots dx_2,$$

Como γ tiene soporte en todo $\mathbb{R}$, también γ_n^x tiene soporte soporte en todo $\mathbb{R}$.
Supongamos que $\lambda(A) > 0$, entonces

$$P^n(x, A) = \int_A \gamma_n^x(y) dy > 0;$$

de modo que, por el Teorema 7, λ es medida de irreducibilidad.

Ahora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, B) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_B \gamma_n^x(y) dy = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^x(y) dy, \text{ para todo } B \in B(\mathbb{R})$$

es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \cdot)$ tiene densidad dada por $\gamma_\infty^x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^x(y)$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \cdot) \prec \lambda$.

Sea φ medida de irreducibilidad,

$$\varphi(A) > 0 \Rightarrow \text{ para toda } x \in X, \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0,$$

ó, equivalentemente,

$$\text{si existe } x \in X \text{ tal que} \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) = 0, \Rightarrow \varphi(A) = 0,$$

es decir, $\varphi \prec \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \cdot)$, para algún $x \in X$.

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \cdot) \prec \lambda$, por transitividad, $\varphi \prec \lambda$, para toda φ medida de irreducibilidad.

Como λ es una medida de irreducibilidad, por el Teorema 8, λ es una medida maximal de irreducibilidad.

□

2.4.3. Modelo lineal de Espacio de estados

Con los Modelos Autoregresivos de promedios móviles

$$Y_n = \alpha_1 Y_{n-1} + \ldots + \alpha_k Y_{n-k} + W_n$$

no es siempre suficiente que W_1 tenga densidad solo en una vecindad del origen, como con la caminata aleatoria. Por ejemplo, para $k = 1$ y $|\alpha| < 1$,

$$Y_n = \alpha_1^n Y_0 + \alpha_1^{n-1} W_1 + \ldots + \alpha_1 W_{n-1} + W_n.$$

Sean $W_1 \sim U(|\alpha| - 1, 1 - |\alpha|)$, $C = [\frac{|\alpha|-1}{2}, \frac{|\alpha|+1}{2}]$, $A \subseteq C$ y $y \in C$; y sea $z \in A - \alpha y$, entonces $z \in [|\alpha| - 1, |\alpha| + 1]$, por lo tanto

$$P(y, A) = P(Y_1 \in A | Y_0 = y) = P(W_1 \in A - \alpha y) = \lambda(A - \alpha y)$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, supongamos $Y_0 = x$. Sean $n \in$ y

$$w \in \bigcup_{i=1}^{n} \{w \in \Omega | |W_i(w)| \leq \frac{1 - |\alpha|}{4}\} = \bigcap_{i=i}^{n} \{w \in \Omega | W_i(w) \in \left[\frac{|\alpha| - 1}{8}, \frac{1 - |\alpha|}{8}\right]\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
&|Y_n(w)| \\
&\qquad = |\alpha^n x + \alpha^{n-1} W_1(w) + \ldots + \alpha W_{n-1}(w) + W_n(w)| \\
&\qquad \leq \alpha|^n |x| + |\alpha|^{n-1} |W_1(w)| + \ldots + |\alpha||W_{n-1}(w)| + |W_n(w)| \\
&\qquad \leq |\alpha|^n |x| + |\alpha|^{n-1} \frac{(1 - |\alpha|)}{4} + \ldots + |\alpha| \frac{(1 - |\alpha|)}{4} + \frac{(1 - |\alpha|)}{4} \\
&\qquad = |\alpha|^n |x| + \frac{(1 - |\alpha|)}{4} \sum_{m=1}^{n-1} |\alpha|^m = |\alpha|^n |x| + \frac{(1 - |\alpha|)}{4} \frac{1 - |\alpha|^n}{1 - |\alpha|} \\
&\qquad \leq |\alpha|^n |x| + \frac{(1 - |\alpha|)}{4}
\end{aligned}$$

Como x está fija y $|\alpha| < 1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha|^k < \frac{1-|\alpha|}{4|x|}$. Así,

$$|Y_n(w)| \leq |\frac{1 - |\alpha|}{4} + \frac{1 - |\alpha|}{4} \leq \frac{1 - |\alpha|}{2}$$

es decir, $|Y_n(w)| \in C$; de modo que

$$P^k(x,C) = P(|Y_k| \in C) \leq P(W_1, \ldots, W_k \in \left[\frac{|\alpha|-1}{8}, \frac{1-|\alpha|}{8}\right]$$

$$= \Pi_{i=1}^k P(W_i \in \left[\frac{|\alpha|-1}{8}, \frac{1-|\alpha|}{8}\right] = \left(\frac{1-|\alpha|}{4}\right)^k > 0$$

Por lo tanto podemos llegar a C desde cualquier punto con Probabilidad positiva.

Sea $\varphi = \lambda_{/C}$, tomamos $A \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $\lambda(A \cap C) > 0$, por Chapman-Kolmogorov y por invarianza bajo traslaciones de λ

$$P^{k+1}(x,A) \geq P^{k+1}(y,A = \int_{\mathbb{R}} P(y,A)P^k(x,dy) \geq \int_C P(y,A)P^k(x,dy)$$

$$= \int_C \lambda(A-\alpha y)P^k(x,dy) = \int_C \lambda(A)P^k(x,dy) = \lambda(A)P^k(x,C) > 0$$

Por lo tanto $\varphi = \lambda_{/C}$ es medida de irreducibilidad.

En cambio, si $|\alpha| > 1$; sean $W \sim U[-1,1]$ y $x \in \mathbb{R}$

$|Y_n|$

$$= |\alpha^n x + \alpha^{n-1}W_1 + \ldots + \alpha W_{n-1} + W_n| \geq |\alpha|^n|x| - (|\alpha|^{n-1}|W_1| + \ldots + |\alpha||W_{n-1}||W_n|)$$

$$\geq |\alpha|^n|x| - (|\alpha|^{n-1} + \ldots + |\alpha| + |1|) = |\alpha|^n|x| - \sum_m^{n-1} |\alpha|^m$$

$$= |\alpha|^n|x| - \left(\frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1}\right)$$

Si $|x| > 2/|\alpha| - 1$, entonces

$|Y_n|$

$$\geq |\alpha|^n|x| - \left(\frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1}\right) \geq \frac{2|\alpha|^n}{|\alpha| - 1} - \left(\frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1}\right) = \frac{2|\alpha|^n - |\alpha|^n + 1}{|\alpha| - 1}$$

$$= \frac{|\alpha|^n + 1}{|\alpha| - 1} > 1$$

Sea $\varphi = \lambda_{/[-1,1]}$, para cualquier $A \in B(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(A) > 0$, $P^n(x, A) = 0$, es decir, la Cadena no es φ-irreducible.

Proposición 23. *Si el modelo lineal $LCM(F, G)$ es Gaussinano y (F, G) es controlable, entonces cualquier medida de irreducibilidad φ que tenga densidad en $\mathbb{R}^n$ es medida de irreducibilidad, y λ es medida maximal de irreducibilidad.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Como W_1 es Gauusiano, en el Capítulo 1 vimos que $P^n(x, \cdot)$ tiene una densidad diferenciable $p^n(x, \cdot)$ con soporte en todo $\mathbb{R}^n$. Veamos λ^n es medida de irreducibilidad.

Sea $C \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $\lambda(C) > 0$, entonces $P^m(x, C) = \int_C p^n(x, y)\lambda(dy) > 0$, pues $p^m(x, \cdot)$ tiene soporte en todo $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto λ es medida de irreducibilidad.

Si φ es cualquier medidada de irreducibilidad con densidad, entonces $\varphi \prec \lambda$. Por lo tanto λ es medida de irreducibilidad maximal.

$\square$

Capítulo 3

Átomos, conjuntos pequeños y descomposición cíclica

En este Capítulo comenzamos buscando ciertos conjuntos en el espacio de estados que facilitan el estudio de la Cadena: átomos. Al no existir átomos que tengan medida de irreducibilidad maximal positiva en todas las Cadenas φ-irreducibles, construimos uno artificial y luego pasamos sus propiedades atómicas a la Cadena. Para asegurar la existencia de dicho "átomo", tenemos que mostrar que existen ciertos conjuntos en el espacio de etados dentro de los cuales el Núcleo de transición quede acotado uniformemente. Finalmente, damos una descomposición cíclica del espacio de estados para Cadenas φ-irreducibles análoga al caso discreto.

3.1. Átomos

Al igual que en el caso discreto, queremos trabajar con Probabilidades restringidas a conjuntos finitos de puntos. En espacios más generales podemos generalizar la idea de la siguiente manera.

Definición 23. *Se dice que $\hat{x} \in B(X)$ es un átomo para Φ si, y sólo si,*

$$P(x, A) = P(y, A), \text{ para todas } x, y \in \hat{x}.$$

Si tenemos que ψ es una medida de irreducibilidad maximal, decimos que $\hat{x}$ es un átomo accesible si, y sólo si, $\psi(\hat{x}) > 0$.

Denotaremos $P(\hat{x}, \cdot) = P(x, \cdot)$, para toda $x \in X$

Podemos notar lo siguiente:

1. En cualquier Cadena de Markov Φ, los puntos son átomos

2. Si X es numerable y la Cadena es irreducible, entonces todos los puntos son átomos accesibles, ya que una medida maximal de irreducibilidad es la medida de contar en X.

En la caminata aleatoria de la semirecta, demostramos que si $\Gamma(-\infty, 0) > 0$, entonces Φ tiene como medida de irreducibilidad a

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1; & A = \{0\} \\ 0; & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

y, por la observación anterior, $\{0\}$ es un átomo accesible. Este ejemplo ilustra otra ventaja de los átomos, por lo menos en esta Cadena: con tan solo pedir que $\Gamma(-\infty, 0) > 0$, tenemos una medida de irreducibilidad muy simple, y gracias a ello, construímos fácilmente la medida de irreducibilidad maximal ψ.

Podemos generalizar el hecho anterior.

Proposición 24. *Supongamos que Φ tiene un átomo $\hat{x}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \hat{x}) > 0$, para toda $x \in X$. Entonces Φ es $P(\hat{x}, \cdot)$-irreducible, $\hat{x}$ es un átomo accesible y una medida de irreducibilidad maximal está dada por*

$$\psi(A) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(y, A)}{2^{n+1}} P(\hat{x}, dy)$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$P^{n+1}(x, A) = \int_X P(y, A) P^n(x, dy) = \int_{\hat{x}} P(y, A) P^n(x, dy) + \int_{X \setminus \hat{x}} P(y, A) P^n(x, dy)$$

$$\geq \int_{\hat{x}} P(y, A) P^n(x, dy) = \int_{\hat{x}} P(\hat{x}, A) P^n(x, dy) = P(\hat{x}, A) P^n(x, \hat{x})$$

Sumando sobre todo $\mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{n+1}(x, A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \hat{x}) P(\hat{x}, A) = P(\hat{x}, A) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \hat{x});$$

y, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \hat{x}) > 0$,

$$\text{si } P(\hat{x}, A) > 0, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0, \text{ para toda } x \in X$$

Por lo tanto $P(\hat{x}, \cdot)$, es medida de irreducibilidad para la Cadena.

Ya que $P(\hat{x}, \cdot)$ es medida de irreducibilidad, el Teorema 7 nos asegura que una medida maximal de irreducibilidad está dada por

$$\psi(A) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(y, A)}{2^{n+1}} P(\hat{x}, dy);$$

y, como $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \hat{x}) > 0$, tenemos que $\psi(\hat{x}) > 0$, es decir, $\hat{x}$ es un átomo accesible.

$\square$

La relación de comunicación $\rightsquigarrow$ queda simplificada si la Cadena tiene un átomo: no hay más que pedir que haya algún camino de $\hat{x}$ a A con Probabilidad positiva.

Proposición 25. *Supongamos que $\hat{x}$ es un átomo para Φ tal que $L(x, A) > 0$, para algún $x \in \hat{x}$. Entonces $\hat{x} \rightsquigarrow A$.*

Demostración. Sea $y \in \hat{x}$,

$$P(y, B) = P(\hat{x}, B), \text{ no depende de } y$$

Para $n \geq 2$, por la Proposición 8 y lo anterior,

$$P_B^n(y, B) = \int_{B^c} P^{n-1}(z, B) P(y, dz) = \int_{B^c} P^{n-1}(z, B) P(\hat{x}, dz), \text{ que no depende de y.}$$

Así, $P_B^n(y, B)$ no depende de y, para toda $y \in \hat{x}$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para todo $B \in B(X)$.

Por la Proposición 9, $L(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(x, A)$, de modo que $L(x, A) = L(y, A)$, para toda $y \in \hat{x}$. Por lo tanto $L(y, A) = L(x, A) > 0$, para toda $y \in \hat{x}$.

Sea $\delta = L(\hat{x}, A) > 0$, entonces

$$\inf_{y \in \hat{x}} L(y, A) = \inf_{y \in \hat{x}} L(\hat{x}, A) = L(\hat{x}, A) = \delta > 0$$

Concluimos que $\hat{x} \rightsquigarrow A$

$\square$

3.2. Pseudo átomos

Los átomos accesibles simplifican el estudio de la Cadena. Desgraciadamente, no siempre se puede obtener que algún punto de la Cadena sea un átomo accesible, como en la Caminata aleatoria en la semirecta; es más, hay Cadenas sin átomos accesibles.

Proposición 26. *Sea Φ la camitana aleatoria en $\mathbb{R}$ y supongamos que Γ tiene densidad. Entonces no existen átomos accesibles para ningún m-esqueleto de Φ.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 12, $P^m(x,A) = \Gamma^{m*}(A-x)$, y por la Proposición 13 $P^n(x,A)$ tiene densidad. Como a ϕ^m lo podemos ver como una caminata aleatoria con variable de incremento $\overline{W} = W_1 + \ldots + W_m$, la Proposición 22 nos asegura que λ es medida maximal de irreducibilidad para Φ^m. Al λ asociarles medida cero a los puntos, ningún punto puede ser átomo accesible, de modo que si existe un átomo accesible, debe de tener más de un punto.

Supongamos que $\hat{x}$ es un átomo accesible, entonces existen $x, y \in \hat{x}$ distintos tales que

$$\Gamma^m(A-x) = P^m(x,A) = P^m(y,A) = \Gamma^m(A-y), \text{ para todo } A \in B(X),$$

es decir,

$$\Gamma^m(A-x) = \Gamma^m(A-y), \text{ para todo } A \in B(X),$$

pero esto es imposible, ya que x y y son distintos. Esta contradicción vino de suponer que Φ^m tiene un átomo accesible. Por lo tanto, no existen átomos accesibles para ningún m-esqueleto.

□

El resultado anterior es un poco decepcionante, ya que una Cadena de Markov tan simple como la caminata aleatoria y con Distribución Γ tan usual como la Gaussina o la Gamma no tienen átomos ni ella ni ninguno de sus m-esqueletos.

Esto no quiere decir que no se puedan explotar las propiedades de algún "átomo": en los últimos 40 años se descubrieron dos maneras de construir un átomo artificial para cualquier Cadena de Markov que tenga alguna medida de irreducibilidad. Este es una de las mayores inovaciones en el estudio de las Cadenas de Markov en las últimas cuatro décadas.

Definición 24. *Decimos que la Cadena de Markov Φ cumple con la condición de minorización si, y sólo si, existen $\delta > 0$, algún $C \in B(X)$ y una medida de Probabilidad μ en $B(X)$ tales que $\mu(C^c) = 0$ y*

$$P(x,A) \geq \delta\mu(A)1_C(x), \textit{ para todo } A \in B(X) \textit{ y para todo } x \in X$$

La condición de minorización parece ser un poco restrictiva, y en un principio no se tiene idea de cuales Cadenas de Markov la cumpen o si de hecho alguna la cumple. El siguiente Teorema nos habla de esto.

Teorema 10. *Sea Φ una Cadena φ-irreducible. Entonces la condición de minorización se cumple para algún m-esqueleto.*

La demostración del Teorema se deja hasta el final del Capítulo, ya que es muy larga y técnica, y usa muchísima herramienta matemática pesada que sobra en lo que resta del trabajo. El lector puede seguir con el resto del material sin problema alguno, o leerla con mucho detenimiento y cuidado, aunque está escrita con el mayor detalle posible.

Para no hacer engorrosa la notación y no meternos con los m esqueletos, en lo que sigue supondremos que tenemos una Cadena de Markov que cumple con la condición de minorización.

Hagamos una ruptura del espacio de estados: sean

$$\begin{aligned} X_0 &= X \times \{0\} \\ X_1 &= X \times \{1\} \\ \hat{X} &= X \times \{0,1\} = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) = X_0 \cup X_1, \end{aligned}$$

donde $(X_0, B(X_0))$ y $(X_1, B(X_1))$ son copias de $(X, B(X))$. Denotaremos a los elementos de $B(X_0)$ y $B(X_1)$ como A_0 y A_1, respectivamente. Análogamente, a los elementos de $\hat{X}$ se los denotará como x_0 ó x_1, dependiendo si están en X_0 ó X_1, respectivamente.

$\hat{X}$ está dotado por la σ-algebra de los borelianos, pero dado que X_1 y X_2 son espacios métricos separables,

$$B(\hat{X}) = \sigma(\{A_0 \cup A_1 | A_0 \in B(X_0), A_1 \in B(X_1)\})$$

Al hacer esta ruptura del espacio de estados, lo que se pretende es construir un átomo en el nuevo espacio de estados y luego pasar sus propiedades al espacio de estados original. Consideraremos a X_0 como una copia de X, y a los elementos de $B(X_0)$ como copias de $B(X)$.

Ya establecido el espacio medible $(\hat{X}, B(\hat{X}))$, necesitamos definir el siguiente operador

Definición 25. *Si $\zeta := \{\nu : B(X) \to \mathbb{R} | \nu \text{ medida }\}$ y $\hat{\zeta} := \{\hat{\nu} : B(\hat{X}) \to \mathbb{R} | \hat{\nu} \text{ medida }\}$, definimos el operador ruptura $* : \zeta \to \hat{\zeta}$*

$$\nu * (A_0) = \nu(A \cap C)[1 - \delta] + \nu(A \cap C^c) \quad y \quad \nu(A_1) = \nu(A \cap C)\delta,$$

donde C y δ son los que da la definición de la condición de minorización.

Proposición 27. *Para todas $\nu, \lambda_1, \lambda_2 \in \xi$ y $a \in \mathbb{R}^+$, $\nu* \in \hat{\xi}$ y $(a\lambda_1 + \lambda_2)^* = a\lambda_1^* + \lambda_2^*$. Además, si ν es medida de Probabilidad sobre $B(X)$, ν^* es medida de Probabilidad sobre $B(\hat{X})$.*

Demostración. Sea $\nu \in \xi$, dado que $B(X_1)$ y $B(X_2)$ son σ-algebrás, en particular son π-sistemas; como $B(\hat{X})$ está generada por $B(X_1) \cup B(X_2)$, por el Lema de Dynkin basta probar que $\nu*$ sea una medida sobre $B(X_1) \cup B(X_2)$; pero, por construcción, lo es.

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \xi$ y $a \in \mathbb{R}^+$. Sea $A_0 \in B(X_0)$,

$$(a\lambda_1 + \lambda_2)^*(A_0) = (a\lambda_1 + \lambda_2)(A \cap C)(1 - \delta) + (a\lambda_1 + \lambda_2)(A \cap C^c)$$

$$= [a\lambda_1(A \cap C) + \lambda_2(A \cap C^c)](1 - \delta) + a\lambda_1(A \cap C^c) + \lambda_2(A \cap C^c)$$

$$= a[\lambda_1(A \cap C)(1 - \delta) + \lambda_1(A \cap C^c)] + \lambda_2(A \cap C)(1 - \delta) + \lambda_1(A \cap C^c)$$

$$= a\lambda_1^*(A_0) + \lambda_2^*(A_0)$$

Sea $A_1 \in B(X_1)$,

$$(a\lambda_1 + \lambda_2)^*(A_1) = (a\lambda_1 + \lambda_2)(A \cap C)\delta = a\lambda_1(A \cap C)\delta + \lambda_2(A \cap C)\delta$$

Así, $(a\lambda_1 + \lambda_2)^* = a\lambda_1^* + \lambda_2^*$ en $B(X_1) \cup B(X_2)$, que es el generador de $B(\hat{X})$, y por el Lema de Dynkin $(a\lambda_1 + \lambda_2)^* = a\lambda_1^* + \lambda_2^*$ en todo $B(\hat{X})$.

Supongamos que ν es medida de Probabilidad sobre $B(X)$, es decir, $\nu(X) = 1$; por lo anterior, solo falta ver que $\nu^*(\hat{X}) = 1$.

$$\nu^*(\hat{X})$$

$$=\nu^*(X_1) + \nu^*(X_2) = \nu(X \cap C)(1 - \delta) + \nu(X \cap C^c) + \nu(X \cap C)\delta$$

$$=\nu(C)(1 - \delta) + \nu(C^c) + \nu(C)\delta = \nu(C) + \nu(C^c) = 1$$

□

Es importante observar que:

1.
$$\nu * (A_0 \cup A_1) = \nu * (A_0) + \nu * (A_1) = \nu(A \cap C)[1 - \delta] + \nu(A \cap C^c) + \nu(A \cap C)\delta$$

$$= \nu(A \cap C) + \nu(A \cap C^c) = \nu(A);$$

   de modo que, $\nu * (A_0 \cup A_1) = \nu(A)$, para todo $A \in B(X)$, es decir, ν es la medida marginal inducida por $\nu*$.

2. Si $A \subseteq C^c$,

$$\nu * (A_0) = \nu(A \cap C^c)[1-\delta] + \nu(A \cap C^c) = \nu(A \cap C^c) = \nu(A);$$

de modo que $\nu * (A_0) = \nu(A)$, para todo $A \subseteq C^c$. Dado que estamos pensando a X como X_0, los subconjuntos de C no son afectados en ν-medida por el operador $*$.

El tercer paso en la ruptura es definir una Cadena de Markov sobre $(\hat{X}, B(\hat{X}))$. Sea $\hat{P} : \hat{X} \times B(\hat{X}) \to \mathbb{R}$ definido mediante

$$\hat{P}\,(\cdot,\cdot) = \begin{cases} \hat{P}(x_0,\cdot) = P(x,\cdot)*; & x_0 \in X_0 \setminus C_0 \\ \hat{P}(x_0,\cdot) = \frac{P(x,\cdot)*-\delta\mu*(\cdot)}{1-\delta}; & x_0 \in C_0 \\ \hat{P}(x_1,\cdot) = \mu * (\cdot), & x_1 \in X_1 \end{cases}$$

donde C, δ y μ son el conjunto, la constante y la medida en la condición de minorización, respectivamente.

Proposición 28. *La función $\hat{P}$ es un Núcleo de transición.*

Demostración. Sea $z \in \hat{X}$,

1. $z = x_0 \in X_0 \setminus C_0$

   $\hat{P}(x_0,\cdot) = P(x,\cdot)*$, que es una medida de Probabilidad en $B(\hat{X})$, por la Proposición 27.

2. $z = x_0 \in C_0$

   $\hat{P}(x_0,\cdot) = \frac{P(x,\cdot)*-\delta\mu*(\cdot)}{1-\delta}$. Si $A \in B(X)$, por la condición de minorización sucede que

$$\begin{aligned} &P(x_0,A_0) * -\delta\mu(A_0)* \\ &\qquad = P(x,A\cap C)[1-\delta] + P(x,A\cap C^c) - \mu(A\cap C)[1-\delta]\delta - \mu(A\cap C^c)\delta \\ &\qquad \geq \mu(A\cap C)[1-\delta]\delta + \mu(A\cap C^c)\delta - \mu(A\cap C)[1-\delta]\delta - \mu(A\cap C^c)\delta = 0, \end{aligned}$$

   es decir, $\hat{P}(x_0,A_0)* \geq 0$. Además,

$$P(x_0,A_1)*-\delta\mu(A_1)* = P(x,A\cap C)\delta - \mu(A\cap C)\delta^2 \geq \mu(A\cap C)\delta^2 - \mu(A\cap C)\delta^2 = 0,$$

y así, $\hat{P}(x_0, A_1)* \geq 0$. Por lo tanto, $\hat{P}(x_0, \cdot) \geq 0$.

Gracias a la Proposición 27, $P(x, \cdot)*$ y $v(\cdot)*$ son medidas de Probabilidad sobre $B(\hat{X})$, y por lo anterior, $\hat{P}(x_o, \cdot)$ es una medida.

Ya que $P(x, \hat{X}) * -\delta\mu(\hat{X})* = 1 - \delta$, concluimos que $\hat{P}(x_0, \cdot)$ es medida de Probabilidad.

3. $z = x_1 \in X_1$

   $\hat{P}(x_1, \cdot) = \mu(\cdot)*$, que es una medida de Probabilidad sobre $B(\hat{X})$, ya que μ lo es sobre $B(X)$.

Por lo tanto $\hat{P}(z, \cdot)$ es una medida de Probabilidad, para toda $z \in \hat{X}$.

Para ver que $\hat{P}(\cdot, A)$ es una función medible, es mucho más sencillo, ya que $P(\cdot, \cdot)*$ son combinaciones lineales finitas de funciones medibles.

Concluímos que $\hat{P}$ es un Núcleo de transición.

□

Ya que $\hat{P}$ es un Núcleo de transición sobre $B(\hat{X})$, el Teorema 3 nos asegura que existe una Cadena de Markov $\hat{\Phi}$ asociada a $\hat{P}$.

Dada la forma de $\hat{P}$, afuera de C_0 $\hat{\Phi}$ se comporta igual a Φ, moviéndose solo dentro de X_0. Ya que llega a C_0, con Probabilidad $1 - \delta$ permanece en X_0, y con Probabilidad δ cae en C_1. Comprobémoslo: sea $x_0 \in C_0$.

$$\hat{P}(x_0, C_1)$$

$$= \frac{P(x, C_1)^* - \delta\mu(C_1)^*}{1 - \delta} = \frac{P(x, C)\delta - \mu(C)\delta^2}{1 - \delta}$$

$$= \frac{\delta(P(x, C) - \delta)}{1 - \delta},$$

ya que $x \in C$,

$$P(x, C) \geq \mu(C) = 1, \text{ es decir, } P(x, C) = 1;$$

y así,

$$\hat{P}(x_0, C_1) = \frac{\delta(P(x, C) - \delta)}{1 - \delta}) \frac{(1 - \delta)\delta}{1 - \delta} = \delta.$$

Como

$$\hat{P}(x_0, X_0)$$

$$=1 - \hat{P}(x_0, X_1) = 1 - \hat{P}(x_0, C_1) - \hat{P}(x_0, X_1 \setminus C_1)$$

$$=1 - \hat{P}(x, C_1) = 1 - (1 - \delta) = \delta,$$

se tiene el resultado.

Podemos pensar este proceso de ruptura de la siguiente manera: ya que caigamos en C_0, lanzamos una moneda δ-cargada para decidir en que nivel, X_0 ó X_1, permanecerá $\hat{\Phi}$.

Teorema 11. *Sea $\hat{\Phi}$ la Cadena de ruptura de la Cadena de Markov Φ. Entonces C_1 es un átomo para $\hat{\Phi}$.*

Demostración. $\hat{\Phi}(x_1, \cdot) = \mu(\cdot)* = \hat{P}(y_1, \cdot)$, para todas $x_1, y_1 \in C_1$, que por la Proposición 27 tenemos que $\mu(\cdot)*$ es una medida no trivial (ya que $\mu(\hat{X})* = \mu(X) > 0$) sobre $B(\hat{X})$. Por lo tanto, C_1 es un átomo para $\hat{\Phi}$.

□

Ahora explotemos las propiedades de $\hat{\Phi}$ para Φ.

Teorema 12. *Sea Φ una Cadena de Markov sobre $(X, B(X))$. Entonces:*

1. *Φ es la Cadena marginal de $\hat{\Phi}$, es decir, para cualesquiera Distribución inicial μ sobre $B(X)$ y $k \in \mathbb{N}$ sucede que*

$$\int_X P^k(x, A)\mu(dx) = \int_{\hat{X}} \hat{P}^k(y_i, A_0 \cup A_1)\mu^*(dy_i), \text{ para todo } A \in B(X);$$

   en particular, tomando $\mu = \delta_x$, para algún $x \in X$,

$$\int_{\hat{X}} P^k(y_i, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_i)* = P^k(x, A), \text{ para todo } A \in B(X).$$

2. *Si $\hat{\Phi}$ es $\varphi*$-irreducible, para alguna medida φ en $B(X)$, entonces Φ es φ-irreducible.; y si Φ es φ-irreducible, con $\varphi(C) > 0$, entonces $\hat{\Phi}$ es $\nu*$-irreducible, y C_1 es un átomo accesible para $\hat{\Phi}$.*

Demostración. 1. Sea Θ el espacio de todas las medidas de Probabilidad sobre $B(X)$; como X es lcsH, en particular es métrico y separable, de modo que el Teorema 36 nos asegura que las combinaciones convexas de medidas de dirac son densas en Θ, con la métrica de Prohorov; además, por el Teorema 37, la convergencia con la métrica de Prohorov implica la convergencia débil. Por todo lo anterior, y dada la linealidad del operador $*$, es suficiente verificar que la ecuación se cumple para $\mu = \delta_x$, para toda $x \in X$.

Como $\hat{P}$ es un Núcleo de transición,

$$\hat{P}^{n+1}(x_i, \hat{A}) = \int_{\hat{X}} \hat{P}(y_j, \hat{A})\hat{P}^n(x_i, dy_j),$$

por lo que es suficiente demostrarlo para $k = 1$.

Sea $x \in X$,

$$\delta_x(A_i)* = \begin{cases} \delta_x(A \cap C)[1-\delta] + \delta_x(A \cap C^c); & A_i = A_0 \\ \\ \delta_x(A \cap C^c)\delta; & A_i = A_1 \end{cases},$$

es necesario considerar 2 casos:

a) $x \in C^c$

$$\int_{\hat{X}} \hat{P}(y_j, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_j)*$$

$$= \int_{X_0} \hat{P}(y_0, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_0) * + \int_{X_1} \hat{P}(y_i, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_1)*$$

$$= \int_{X_0} \hat{P}(y_0, A_0 \cup A_1)\delta_{x_0}(dy_0) = \hat{P}(x_0, A_0 \cup A_1) = P(x, A_0 \cup A_1)*$$

$$= P(x, A)$$

b) $x \in C$

$$\int_{\hat{X}} \hat{P}(y_j, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_j)*$$

$$= \int_{X_0} \hat{P}(y_0, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_0) * + \int_{X_1} \hat{P}(y_i, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_1)*$$

$$= \int_{X_0} \hat{P}(y_0, A_0 \cup A_1)[(1-\delta)\delta_{x_0}(dy_0)] + \int_{X_1} \hat{P}(x_1, A_0 \cup A_1)[\delta\delta_{x_1}(dy_1)]$$

$$= (1-\delta)\hat{P}(x_0, A_0 \cup A_1) + \delta\hat{P}(x_1, A_0 \cap A_1)$$

$$= (1-\delta)\frac{P(x, A_0 \cup A_1) * - \delta\mu(A_0 \cup A_1)}{1-\delta} + \delta\mu(A_0 \cup A_1)$$

$$= P(x, A_0 \cup A_1) * + \delta\mu(A_0 \cup A_1) - \delta\mu(A_0 \cup A_1)$$

$$= P(x, A_0 \cup A_1) * = P(x, A)$$

Por lo tanto,

$$\int_{\hat{X}} \hat{P}(y_j, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_j)* = P(x, A), \text{ para todo } A \in B(X) \text{ y para toda } \delta_x$$

2. Supongamos que $\hat{\Phi}$ es $\varphi*$-irreducible.

   Sea $A \in B(X)$ tal que $\varphi(A) = \varphi(A_0 \cup A_1)* > 0$, y sea $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{P}^n(x_0, A_0 \cup A_1) > 0$.
   Tomando en (1) $\lambda = \delta_x *$,

$$P^n(x, A) = \int_{\hat{X}} \hat{P}^n(x_i, A_0 \cup A_1)\delta_x(dy_i)* > 0,$$

   es decir, $P^n(x, A) > 0$, por lo tanto Φ es φ-irreducible.

   Supongamos Φ es φ-irreducible y $\varphi(C) > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, C) > 0$, para toda $x \in X$.

   Por la construcción del operador $*$, $\hat{P}(x_i, X_1 \setminus C_1) = 0$, para toda $x_i \in \hat{X}$, de modo que $\hat{P}^n(x_i, X_1 \setminus C_1) = 0$, para cualesquiera $x_i \in \hat{X}$ y $n \in \mathbb{N}$, es decir, el átomo C_1 es la única parte del nivel X_1 que se alcanza con Probabilidad positiva. Y dado que $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, C) > 0$, para toda $x \in C$, la construcción del Núcleo de transición de la Cadena de ruptura nos asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}^n(x_i, C_1) > 0$, para toda $x_i \in \hat{X}$.

De la Proposición 24 tenemos que $\hat{P}(C_1, \cdot) = \nu^*(\cdot)$ es medida de irreducibilidad para la Cadena y C_1 es un átomo accesible.

□

3.3. Conjuntos pequeños y ejemplos en modelos específicos

Los conjuntos pequeños son la clave en la construcción de la Cadena de Ruptura, son los que nos permiten romper al espacio, al menos para algún m-esqueleto. En esta sección los definimos y daremos ejemplos para modelos, como la caminata aleatoria.

Definición 26. *Sea $C \in B(X)$ tal que existe $m \in \mathbb{N}$, una medida no trivial ν_m sobre $B(X)$ que cumple con que*

$$P^m(x, B) \geq \nu_m(B), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } B \in B(X),$$

decimos que C es ν_m-pequeño.

Al final de este Capítulo demostraremos el siguiente Teorema:

Teorema 13. *Sea Φ una Cadena de Markov.*

1. *Si ψ es una medida maximal de irreducibilidad, entonces existe un conjunto pequeño $C \in B(X)$ en la Cadena. Además, existe $m \in \mathbb{N}$ y ν_m medida sobre $B(X)$ tales que C es ν_m-pequeño, $\nu_m(C) > 0$ y $\nu_{/C}$ es una medida de irreducibilidad.*

2. *Sean $C, D \in B(X)$ tales que $C \in B(X)$ es ν_m-pequeño y $D \rightsquigarrow C$. Entonces D es $\overline{\nu}_n$-pequeño, para $\overline{\nu}$ otra medida no trivial sobre B(X).*

Veamos ejemplos concretos de estos conjuntos, para tener una idea más clara de como funcionan. Además, la Cadena no tiene que ser necesariamente irreducible.

3.3.1. Caminata aleatoria en la semirecta

El conjunto $\{0\}$ es $P(0, \cdot)$-pequeño. En la Proposición 21 mostramos que si $\Gamma(-\infty, 0) > 0$, entonces, para toda $0 < c < \infty$, $[0, c] \rightsquigarrow \{0\}$; y por el Teorema 13, $[0, c]$ es $\overline{\nu}$-pequeño. Es decir, todo compacto es pequeño, cuando se cumple que $\Gamma(-\infty, 0) > 0$.

3.3.2. Caminatas aleatorias dispersas

En el Capítulo dos vimos que cuando una caminata aleatoria cumple que Γ tiene densidad γ positiva y acotada en el origen, es decir, existen $\beta, \delta > 0$ tales que

$$P(W_n \in A) \geq \int_A \gamma(x)\lambda(dx),$$

y $\gamma(x) \geq \delta$, para toda $x \in (-\beta, \beta)$; de modo que $C = [-\beta/2, \beta/2]$ cumple con que

$$P(x, B) \geq \delta\lambda(B), \text{ para toda } x \in C,$$

es decir, C es $\delta\lambda_1$-pequeño.

El ejemplo arriba descrito tiene que ver con un cierto tipo de caminatas aleatorias llamadas "dispersas", en las cuales Γ o alguna de sus convoluciones son no singulares con respecto a λ en una vecindad del origen.

Definición 27. *Sea Φ una caminata aleatoria en $\mathbb{R}$. Decimos que Φ es dispersa (ó Γ dispersa) si, y sólo si, Γ^{n*} es no singular con respecto a λ, para alguna $n \in \mathbb{N}$.*

Para las Caminatas aleatorias dispersas es fácil dar un conjunto pequeño.

Teorema 14. *Si Φ es una caminata aleatoria dispersa, con Γ^{n*} no singular con respecto a λ. Entonces existen $\beta > 0, \delta > 0$ y $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $C_\beta = [-\beta, \beta]$ es ν_{2n}-pequeño, con $\nu_{2n}(\cdot) = \delta\lambda(\cdot)1_{[s,t]}^{(\cdot)}$.*

Demostración. Dado que Γ^{n*} es no singular con respecto a λ, existen $\gamma \in L_1(\lambda)$ y χ, medida sobre $B(\mathbb{R})$ que cumplen que $\gamma \geq 0$, $\int_X \gamma(x)\lambda(dx) > 0$,

$$\Gamma^{n*}(A) = \chi(A) + \int_A \gamma(x)\lambda(dx), \text{ para todo } A \in B(\mathbb{R})$$

y $\chi(\cdot) \perp \int_\cdot \gamma(x)\lambda(dx)$. En particular,

$$\Gamma^{n*}(A) \geq \int_A \gamma(x)\lambda(dx), \text{ para todo } A \in B(\mathbb{R}).$$

Por la Proposición 12

$$P^m(x, A) = \Gamma^{m*}(A - x), \text{ para todos } x \in X, \ m \in \mathbb{N} \text{ y } A \in B(\mathbb{R});$$

en particular,

$$P^n(0, A) = \Gamma^{n*}(A) \geq \int_A \gamma(x)\lambda(dx).$$

Sea $A \in B(X)$,

$$P^{2n}(0,A) = \Gamma^{2n}(A) = (\Gamma^{n*}) * (\Gamma^{n*})(A) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma^{n*}(A-x)\Gamma^{n*}(dx)$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}} \int_{A-x} \gamma(y)\lambda(dy)\Gamma^{n*}(dx) = \int_{\mathbb{R}} \int_{A} \gamma(y-x)\lambda(dy) d\left(\chi(x) + \int_x \gamma(z)\lambda(dz)\right)$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}} \int_{A} \gamma(y-x)\lambda(dy) d\left(\int_x \gamma(z)\lambda(dz)\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{A} \gamma(y-x)\lambda(dy)\gamma(x)\lambda(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{A} \gamma(y-x)\gamma(x)\lambda(dy)\lambda(dx) = \int_{A} \int_{\mathbb{R}} \gamma(y-x)\gamma(x)\lambda(dx)\lambda(dy)$$

$$= \int_{A} \gamma * \gamma(x)\lambda(dx)$$

Sea $\gamma_n = min\{\gamma, n\}$, el n-ésimo truncamiento de γ. Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma, \quad \lambda(supp(\gamma)) > 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_1 \leq \gamma_3 \leq \ldots \leq \gamma,$$

existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(supp(\gamma_m)) > 0$. Además,

$$\int_{A} \gamma * \gamma(x)\lambda(dx)$$

$$= \int_{A} \int_{\mathbb{R}} \gamma(y-x)\gamma(x)\lambda(dy)\lambda(dx) \geq \int_{A} \int_{\mathbb{R}} \gamma_m(y-x)\gamma(x)\lambda(dy)\lambda(dx)$$

$$= \int_{A} \gamma_m * \gamma(x)\lambda(dx)$$

Así,

$$P^{2n}(0,A) \geq \int_{A} \gamma_m * \gamma(x)\lambda(dx), \text{ para todo } A \in B(\mathbb{R}).$$

Al ser γ_m acotada ($0 \leq \gamma_m \leq m$) y $\gamma \in L_1(\lambda)$, por el Teorema 38, $\gamma_m * \gamma$ es una función continua.

Supongamos $\gamma_m * \gamma = 0$, entonces, para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma_m(y-x)\gamma(x)\lambda(dy) = 0$$

Como $\lambda(supp(\gamma)) > 0$, entonces el interior de $supp(\gamma)$ es diferente de vacío. Sea x en el interior de $supp(\gamma)$, como $\gamma_m(y-x)\gamma(x) \geq 0$, para toda $y \in \mathbb{R}$ e integra 0, $\gamma_m(y-x)\gamma(x) = 0$, para toda $y \in \mathbb{R}$ λ-cdq; dado que $\gamma(x) > 0$, tenemos que $\gamma_m(y-x) = 0$, para toda $y \in \mathbb{R}$ λ-cdq. Pero $\lambda(sup(\gamma_m)) > 0$, esto es una contradicción que obtuvimos al suponer que $\gamma_m * \gamma = 0$.

De modo que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_m * \gamma(x) > 0$.

Al ser $\gamma_m * \gamma$ continua, existe una vecindad de x en la cual $\gamma_m * \gamma > 0$; así, existe un compacto $[a, b]$ en esa vecindad y existe $\delta \geq 0$ tales que $x \in (a, b)$ y $\gamma_m * \gamma(y) \geq \delta$, para toda $y \in [a, b]$.

Sean $\beta = \frac{b-a}{4}$, $s = a + \beta$ y $t = b - \beta$

$$P^{2n}(0, A) \geq \int_A \gamma_m * \gamma(x)\lambda(dx) \geq \int_{A\cap[s,t]} \gamma_m * \gamma(x)\lambda(dx) \geq \int_{A\cap[s,t]} \delta\lambda(dx)$$

$$= \delta \int_{A\cap[s,t]} \lambda(dx) = \delta\lambda(A \cap [s, t]) = \delta\lambda(A)1^A_{[s,t]}$$

Y así,

$$P^{2n}(0, A) \geq \delta\lambda(A)1^A_{[s,t]}, \text{ para todo } A \in B(X).$$

Veamos que $[-\beta, \beta]$ es pequeño, y dado que ya tenemos un candidato para medida cota $(\delta\lambda(\cdot)1^{(\cdot)}_{[s,t]})$, tenemos que demostrar que todo $|x| \leq \beta = \frac{b-a}{4}$ cumple

$$P^{2n}(x, A) \geq \delta\lambda(A)1^A_{[s,t]}.$$

Sean $x \in [-\beta, \beta]$ y $z \in [s, t]$, $-\frac{a-b}{4} \leq -x \leq -\frac{b-a}{4}$ y $a + \frac{a-b}{4} \leq z \leq b - \frac{a-b}{4}$, entonces

$$a = a + \frac{a-b}{4} - \frac{a-b}{4} \leq z - x \leq b + \frac{b-a}{a} - \frac{b-a}{4} = b, \text{ para todos } x \in [-\beta, \beta] \text{ y } z \in [s, t].$$

es decir, $[s, t] - [-\beta, \beta] \subseteq [a, b]$, por lo que $\gamma_m * \gamma(z - x) \geq \delta$, para toda $z - x \in [s, t] - [-\beta, \beta]$. Sea $x \in [-\beta, \beta]$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
&P^{2n}(x,A)\\
&\quad= \Gamma^{2n*}(A-x) = \Gamma^n * \Gamma^n(A-x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(A-x-y)\Gamma(dy) \geq \int_{\mathbb{R}}\int_{A-x-y} \gamma(z)\lambda(dz)\Gamma(dy)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}}\int_{A} \gamma(z-x-y)\lambda(dz)\Gamma(dy) \geq \int_{\mathbb{R}} \gamma(z-x-y)\lambda(dz)\left(\chi(dy) + \int_{dy}\gamma(w)\lambda(dy)\right)\\
&\quad\geq \int_{\mathbb{R}}\int_{A} \gamma(z-x-y)\lambda(dz)\left(\int_{dy}\gamma(w)dw\right) = \int_{\mathbb{R}}\int_{A} \gamma(z-x-y)\lambda(dz)\gamma(y)\lambda(dy)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}}\int_{A} \gamma(z-x-y)\gamma(y)\lambda(dz)\lambda(dy) = \int_{A}\int_{\mathbb{R}} \gamma(z-x-y)\gamma(y)\lambda(dy)\lambda(dz)\\
&\quad= \int_{A} \gamma*\gamma(z-x)\lambda(dz) \geq \int_{A} \gamma_m*\gamma(z-x)\lambda(dz)\\
&\quad\geq \int_{A\cap[s,t]} \gamma_m*\gamma(z-x)\lambda(dz) \geq \int_{A\cap[s,t]} \delta\lambda(dz)\\
&\quad= \delta\int_{A\cap[s,t]} = \delta\lambda(A\cap[s,t])\\
&\quad= \delta\lambda(A)1_{[s,t]}^{A}
\end{aligned}
$$

En conclusión,

$$P^{2n}(x,A) \geq \delta\lambda(A)1_{[s,t]}^{A} \text{ para toda } x \in [-\beta,\beta] \text{ y para todo } A \in B(X),$$

es decir, $[-\beta,\beta]$ es un conjunto ν_{2n}-pequeño, donde $\nu_{2n}(.) = \delta\lambda(.)1_{[s,t]}^{(.)}$.

□

3.3.3. Modelos lineales de Espacio de estados

En el Capítulo anterior vimos que si $LSM(F,G,W)$ es controlable; donde $F \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $G \in M_{n\times p}$, $W \sim N(0,I)$ y $O,I \in M_{p\times p}$; entonces $P^n(\cdot,\cdot)$ es absolutamente continua con respecto a λ y su densidad $p_n : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ es continua (de hecho de clase $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$) y positiva en todo su dominio. Aquí es mucho más fácil identificar a los conjuntos pequeños.

Proposición 29. *Si C es un compacto en $\mathbb{R}^n$, entonces C es v_n-pequeño, con $v_n(\cdot) = \delta_C\lambda(\cdot)1_C^{(\cdot)}$, para alguna $\delta_C > 0$.*

Demostración. Sea C un compacto no vacío en $\mathbb{R}^n$, entonces, $C\times C$ es compacto en $\mathbb{R}^{2n}$.

Dado que p_n es continua y positiva en $\mathbb{R}^{2n}$, existe $\delta > 0$ tal que $p(x,y) \geq \delta$, para todo $(x,y) \in C\times C$. Sea $x \in C$,

$P^n(x,A)$

$$= \int_A p_n(x,y)dy \geq \int_{A\cap C} p_n(x,y)dy \geq \int_{A\cap C} \delta dy = \delta\lambda(A\cap C)$$

$$= \delta\lambda(A)1_C^A$$

Sea $\nu_n(\cdot) = \delta\lambda(\cdot)1_C^{(\cdot)}$,

$$P^n(x,A) \geq \nu_n(A), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } A \in B(\mathbb{R}^n),$$

es decir, C es pequeño.

$\square$

3.4. Comportamiento cíclico

Si Φ es la Cadena de Markov con espacio de estados $X = \{1, 2, \ldots, d\}$ definida por el Núcleo de transición $P(x, x+1) = 1$, para toda $x \in \{1, \ldots, d-1\}$ y $P(d, 1) = 1$.

Claramente $P^n(x,x) > 0$ si, y sólo si, $n \in d\overline{\mathbb{N}} := \{dn | n \in \overline{\mathbb{N}}\}$. De alguna manera, podríamos decir que la Cadena se cicla, o que tiene un d-ciclo.

En esta sección daremos una estructura cíclica, como la descrita arraba, a todas las Cadenas con alguna medida de irreducibilidadal.

Sea Φ una Cadena de Markov con medida de irreducibilidad maximal ψ, con el conjunto ν_m-pequeño C y $\nu_m(C) > 0$ (que gracias al Teorema 13, podemos garantizarlo). De ahora en adelante, quitaremos la dependencia de $\nu_m = \nu$, siempre recordando que $P^m(x,\cdot) \geq \nu(\cdot)$, para toda $x \in C$.

Definición 28. *Sea*

$$E_C = \{n \in \mathbb{N} | C \text{ es } \mu_n\text{-pequeño, con } \mu_n = \delta_n\nu, \text{ para alguna } \delta_n > 0\},$$

el conjunto de los tiempos para los cuales C es pequeño, con una medida minorización múltiplo de ν.

Proposición 30. *El conjunto $E_C \subseteq \mathbb{N}$ es cerrado bajo adición.*

Demostración. Sean $n, m \in E_C$ y $x \in C$,

$$P^{n+m}(x,B) = \int_X P^n(y,B)P^m(x,dy) \geq \int_C P^n(y,B)P^m(x,dy) \geq \int_C \delta_n\nu(B)P^m(x,dy)$$

$$\geq \delta_n\nu(B)\int_C P^m(x,dy) = \delta_n P^m(x,C)\nu(B) \geq [\delta_n\delta_m\nu(C)]\nu(B),$$

para toda $x \in C$.

Sea $\delta_{m+n} = \delta_n\delta_m\nu(C) > 0$ y $\mu_{n+m} = \delta_{n+m}\nu$,

$$P^{m+n}(x,B) \geq \mu(C), \text{ para toda } x \in C,$$

es decir, C es μ_{n+m}-pequeño, con μ_{n+m} un múliplo de ν; y así, $n+m \in E_C$, para todos $n, m \in E_C$; por lo tanto, E_C es cerrado bajo adición.

□

Sea $d = m.c.d.(E_C)$. Al ser E_C cerrado bajo adición, el Teorema 39 nos asegura que si $d = m.c.d.(E_C)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $nd \in E_C$. De algún modo, E_C se está ciclando.

Definición 29. *Sea Φ una Cadena de Markov que contiene un conjunto C ν-pequeño tal que $\nu(C) > 0$. Definimos el ciclo de E_C como $d = m.c.d(E_C)$*

Teorema 15. *Sea Φ Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ. Sean $C \in B^+(X)$ cualquier conjunto pequeño y $d = m.c.d(E_C)$ el ciclo de E_C. Entonces existen $D_1, \dots, D_d \in B(X)$, disjuntos (un "d-ciclo") tal que*

1. *para toda $x \in D_i$ sucede que $P(x, D_{i+1}) = 1$, $i \in \{0, \dots, d-1\}$ (mod d)*

2. *$N = \left[\cup_{i=1}^d D_i\right]^c$ es ψ-nulo.*

Además, el "d-ciclo" $\{D_1, \dots, D_d\}$ es maximal, en el sentido de que para cualquiera colección $\{d', D'_1, \dots, D'_{d'}\}$ que cumpla (1) y (2) se tiene que d'/d; y si $d = d'$, entonces $D'_i = D_i$, para toda $i \in \{1, \dots, d\}$, salvo reordenamientos de $\{D'_1, \dots, D'_d\}$.

Demostración. 1. Veamos primero la existencia del ciclo.

Dado que $C \in B^+(X)$, $\sum_{n=1}^\infty P^n(x,C) > 0$, para toda $x \in X$. Por el algoritmo de la división, $m \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, existen $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq d-1$ tal que $m = nd - k$; de modo que

$$\sum_{n=1}^\infty P^n(x,C) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^{d-1} P^{nd-k}(x,C) > 0, \text{ para toda } x \in X.$$

Sean $A_k = \{x \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-k}(x, C) > 0\}$, para toda $0 \leq k \leq d-1$, por lo anterior tenemos que $X = \cup_{k=0}^{d-1} A_k$.

Los conjuntos $\{A_0, \ldots, A_{d-1}\}$ no son necesariamente disjuntos, pero veamos que su intersección es ψ-nula.

$$A_k = \{x \in X | \sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-k}(x, C) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X | P^{nd-k}(x, C) > 0\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X | P^{nd-k}(x, C) \geq \frac{1}{m}\} \text{ para toda } 0 \leq k \leq d-1.$$

Sean $B_{n,m}^k = \{x \in X | P^{nd-k}(x, C) \geq \frac{1}{m}\}$,

$$A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m}^k, \text{ para toda } 0 \leq k \leq d-1. \tag{3.1}$$

Supongamos que existen $0 \leq i, j \leq d-1$ diferentes tales que el conjunto $A_i \cap A_j$ no es ψ-nulo, es decir, $\psi(A_i \cap A_j) > 0$. Por (3.1),

$$A_i \cap A_j = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m}^i \right] \bigcap \left[\bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} B_{p,q}^j \right] = \bigcup_{m,n,p,q \in \mathbb{N}}^{\infty} \left(B_{m,n}^i \cap B_{p,q}^j \right);$$

Dado que $\psi(A_i \cap A_j) > 0$, existen $m_0, n_0, p_0, q_0 \in \mathbb{N}$ tales que el conjunto $B_{m_0,n_0}^i \cap B_{p_0,q_0}^j$ no es ψ-nulo, es decir, $\psi(B_{m_0,n_0}^i \cap B_{p_0,q_0}^j) > 0$.

Sea $A = B_{m_0,n_0}^i \cap B_{p_0,q_0}^j$, entonces $\psi(A) > 0$ y

$$P^{n_0 d-i}(x, C) \geq \frac{1}{m_0}; \text{ para toda } x \in A$$
$$P^{p_0 d-j}(x, C) \geq \frac{1}{q_0}; \text{para toda } x \in A$$

Por el Teorema 13, $\nu_{/C}$ es una medida de irreducibilidad y por el Teorema 7, una medida maximal de irreducibilidad está dada por

$$\psi(\cdot) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(x, \cdot)}{2^{n+1}} \nu_{/C}(dx) = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(x, \cdot)}{2^{n+1}} \nu(dx)$$

Ya que $\psi(A) > 0$,

$$\psi(A) = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P^n(x,A)}{2^{n+1}} \nu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \frac{P^n(x,A)}{2^{n+1}} \nu(dx) > 0,$$

de modo que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_C P^r(x,A)\nu(dx) = \delta_C > 0$$

Sean $B \in B(X)$ y $x \in C$, al ser C ν_m-pequeño,

$$\begin{aligned}
P^{2m+n_0d-i+r}(x,B) &= \int_X P^m(w,B)P^{m+n_0d-i+r}(x,dw) \\
&= \int_X P^m(w,B)\left[\int_X P^{n_0d-i}(z,B)P^{m+r}(x,dz)\right] \\
&= \int_X P^m(w,B)\left[\int_X P^{n_0d-i}(z,B)\left(\int_X P^{n_0d-i}(y,B)P^m(x,dy)\right)\right] \\
&= \int_X \int_X \int_X P^m(w,B)P^{n_0d-i}(z,dw)P^r(y,dz)P^m(x,dy) \\
&\geq \int_C \int_A \int_C P^m(w,B)P^{n_0d-i}(z,dw)P^r(y,dz)P^m(x,dy) \\
&\geq \int_C \int_A \int_C \nu(B)P^{n_0d-i}(z,dw)P^r(y,dz)P^m(x,dy) \\
&= \nu(B)\int_C \int_A \int_C P^{n_0d-i}(z,dw)P^r(y,dz)P^m(x,dy) \\
&= \nu(B)\int_C \int_A P^{n_0d-i}(z,C)P^r(y,dz)P^m(x,dy) \\
&\geq \nu(B)\int_C \int_A \frac{1}{m_0}P^r(y,dz)P^m(x,dy) \\
&= \nu(B)\frac{1}{m_0}\int_C \int_A P^r(y,dz)P^m(x,dy) \\
&= \nu(B)\frac{1}{m_0}\int_C P^r(y,A)P^m(x,dy) \\
&\geq \nu(B)\frac{1}{m_0}\int_C P^r(y,A)\nu(dy) = \nu(B)\frac{1}{m_0}\delta_C
\end{aligned}$$

Sean $a = 2m + n_0d - i + r$, $\delta_a = \frac{1}{m_0}\delta_C > 0$ y $\mu_a = \delta_a\nu$,

$$P^a(x,B) \geq \mu_a(B), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } B \in B(X),$$

es decir, C es μ_a-pequeño, con μ_a un múltiplo de ν, por lo cual $a = 2m + n_0d - i + r \in E_C$.

Análogamente $2m + p_0 d - j + r \in E_C$.

Al ser $d = m.c.d.E_C$, de modo que

$$2m + n_0 d - i + r \equiv 2m + p_0 d - j + r (mod\ d) \Rightarrow n_0 d - i \equiv p_0 - j (mod\ d),$$

y como $n_0 d \equiv p_0 d \equiv 0(mod\ )$, tenemos que

$$i \equiv j(mod\ d).$$

Lo cual es absurdo, ya que $0 \leq i, j \leq d-1$ e $i \neq j$. La contradicción vino de suponer que $\psi(A_i \cap A_j) > 0$, para algunos $0 \leq i, j \leq d-1$.

Por lo tanto $\psi(A_i \cap A_j) = 0$, para todo $0 \leq i, j \leq d-1$.

Sea

$$N = \bigcup_{\substack{i,j \in \{0,\ldots,d-1\} \\ i \neq j}} (A_i \cap A_j), \text{ por lo anterior, sucede que } \psi(N) = 0 \quad (3.2)$$

Ya que $X = \cup_{i=0}^{d-1} A_i$, el conjunto

$$X \setminus N = \left[\bigcup_{i=0}^{d-1} A_i \right] \setminus N = \bigcup_{i=0}^{d-1} (A_i \setminus N) \text{ es lleno .}$$

Al ser $X \setminus N$ lleno, la Proposición 16 nos asegura que existe $D \subseteq X \setminus N$, $D \in B(X)$ absorbente no vacío. Sean

$$D_i = D \cap (A_{i-1} \setminus N), \text{ para toda } 1 \leq i \leq d.$$

Por la ecuación (3.2) tenemos que $\{D_1, \ldots, D_d\} \subseteq B(X)$ son disjuntos 2 a 2. Además

$$\bigcup_{i=1}^{d} D_i$$

$$= \bigcup_{i=1}^{d} D \cap (A_{i-1} \setminus N) = D \bigcap \left[\bigcup_{i=1}^{d} (A_{i-1}) \setminus N \right] = D \bigcap \left[\bigcup_{i=0}^{d-1} (A_i) \setminus N \right] = D \cap X$$

$$= D$$

Veamos que $P(x, D_{i+1}) = 1$, para toda $x \in D_i$ y para toda $1 \leq i \leq d$, módulo d.

a) Sean $B_i = \{x \in D | P(x, D_{i+1}) > 0\}$, entonces $B_i = D_i$, para toda i.

Sea $x \in D_i = D \cap (A_{i-1} \setminus N)$, $\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-(i-1)}(x, C) > 0$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^{nd-(i+1)}(x, C) > 0$.

Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$P^{nd-(i-1)}(x, C) = \int_X P^{nd-(i-1)-1}(y, C) P(x, dy)$$

$$= \int_{X \setminus D_{i+1}} P^{nd-i}(y, C) P(x, dy) + \int_{D_{i+1}} P^{nd-i}(y, C) P(x, dy) > 0 \tag{3.3}$$

Ahora,

$$X \setminus D_{i+1} = [X \cup (X \setminus D] \setminus D_{i+1} = (D \setminus D_{i+1}) \cup [(X \setminus D) \setminus D_{i+1}]$$

$$= \left[\bigcup_{j \neq i+1} D_j \right] \cup [(X \setminus D) \setminus D_{i+1}] = \left[\bigcup_{j \neq i+1} D_j \right] \cup [X \setminus D]$$

Si

$$y \in \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, d\} \\ j \neq i+1}} D_j = \bigcup_{\substack{j \in \{0, \dots, d-1\} \\ j \neq i}} [D \cap (A_j \setminus N],$$

$P^{nd-j}(y, C) > 0$ si, y sólo si, $j \neq i$. Por lo que $P^{nd-i}(y, C) = 0$, para toda $y \in \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, d\} \\ j \neq i+1}} D_j$.

Así,

$$\int_{X \setminus D_{i+1}} P^{nd-i}(y, C) P(x, dy)$$

$$= \int_{\bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, d\} \\ j \neq i+1}}} P^{nd-i}(y, C) P(x, dy) + \int_{X \setminus D} P^{nd-i}(y, C) P(x, dy)$$

$$= \int_{X \setminus D} P^{nd-i}(x, C) P(x, dy)$$

Además, $x \in D_i \subseteq D$, y D es absorbente, de modo que $P(x, D) = 1$, es decir, $P(x, X \setminus D) = 0$, y con ello

$$\int_{X \setminus D} P^{nd-i}(x, C)P(x, dy) = 0.$$

De la ecuación (3.3) deducimos que

$$\int_{D_{i+1}} P^{nd-i}(y, C)P(x, dy) > 0$$

que pasa si, y sólo si, $P(x, D_{i+1}) > 0$, para toda $x \in D_i$.

Por lo tanto $D_i \subseteq B_i$.

Sea $x \in B_i \subseteq D$, entonces $P(x, D_{i+1}) > 0$. Lo único que resta por es ver que $\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-(i-1)}(x, C) > 0$.

Análogamente a lo anterior,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-(i-i)}(x, C) \\
&\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^{nd-i}(y, C)P(x, dy) = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-i}(y, C) \right) P(x, dy) \\
&\qquad = \int_{X \setminus D_{i+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-i}(y, C) \right) P(x, dy) + \int_{D_{i+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-i}(y, C) \right) P(x, dy) \\
&\qquad = \int_{D_{i+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-i}(y, C) \right) P(x, dy)
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $P(x, D_{i+1}) > 0$, y para todo $y \in D_{i+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-i}(y, C) > 0$; de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-(i-1)}(x, C) = \int_{D_{i+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd-i}(y, C) \right) P(x, dy) > 0,$$

es decir, $x \in D_i$ para toda $x \in B_i$.

Por lo tanto $B_i \subseteq D_i$.

Concluimos que $B_i = D_i$, para toda $i \in \{1, \ldots, d\}$, (módulo d).

b) $P(x, D_{i+1}) = 1$, para toda $x \in D_i$.

Sea $x \in D_i \subseteq D$, dado que D es absorvente $P(x, D) = 1$. $\{D_1, \ldots, D_d\}$ son disjuntos y de (a) tenemos que

$$1 = P(x, D) = P(x, \cup_{i=1}^{d} D_i) = \sum_{i=1}^{d} P(x, D_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} P(x, B_i) = P(x, D_{i+1}), \text{ (mod } d),$$

es decir, $P(x, D_{i+1}) = 1$, para toda $x \in D_i$, módulo d.

Concluimos que $\{D_1, \ldots, D_d\}$ es un d-ciclo.

2. Veamos ahora la unicidad y maximalidad.

Sea $\{D'_1, \ldots, D'_{d'}\}$ otro ciclo con periodo d', con $N' = \left[\cup_{i=1}^{d'} D'_i\right]^c$ y tal que $\psi(N') = 0$.

a) Para toda $1 \leq i \leq d\}$, existe $1 \leq j_i \leq d'$ tal que $D_i \subseteq D'_{j_i}$.

El Teorema 13 asegura que ν_C es una medida maximal de irreducibilidad para la Cadena, y, por el Teorema 7, $\nu_{/C} \prec \psi$. Como $\psi(N') = 0$, $\nu_{/C}(N') = 0$.

Dado que $\nu_{/C}(C) > 0$ y $X = \left(\cup_{i=1}^{d'} D'_i\right) \cup N'$,

$$\nu_{/C}(C) = \nu_{/C}\left(C \cap [\cup_{i=1}^{d'} D'_i]\right) = \nu_{/C}\left(\cup_{i=1}^{d'} [C \cap D'_i]\right) > 0,$$

de modo que existe $1 \leq k \leq d'$ tal que $\nu_{/C}(C \cap D'_k) > 0$.

Al ser C ν-pequeño,

$$P^m(x, D'_k \cap C) \geq \nu(C \cap D'_k) = \nu_{/C}(C \cap D'_k) > 0, \text{ para toda } x \in C. \tag{3.4}$$

Como $\{D'_1, \ldots, D'_{d'}\}$ es un d'-ciclo, para toda $x \in D_k$, $P^n(x, D_k) = 1$ si, y sólo si, $n = hd'$, para algún $h \in \mathbb{N}$. De hecho, $P^n(x, D'_k \cap C) > 0$ si, y sólo si, $n = hd'$, para algún $h \in \mathbb{N}$. De esto y de la ecuación (3.4) tenemos que $m = hd'$, es decir, d'/m.

Sea $n \in E_C$,

$$P^n(x, D'_k \cap C) \geq \delta_n \nu(D'_k \cap C) > 0,$$

de modo que d'/n, para toda $n \in E_C$.

Al ser $d = m.c.d(E_C)$, d'/d.

Veamos que $C \cap D'_i = \varnothing$, para toda $1 \leq i \leq d$, $i \neq k$.

Supongamos lo contrario, es decir, existe $1 \leq k \leq d'$, $i \neq k$, tal que $C \cap D'_j \neq \varnothing$, en particular, existe $x \in C \cap D'_j$. De lo anterior,

$$P^m(x, C \cap D'_k) = P^{hd'}(x, C \cap D'_k) = 0, \text{ por ser un } d' - \textit{ciclo};$$

pero $x \in C \cap D'_j \subseteq C$; así, por la ecuación (3.4)

$$P^m(x, C \cap D'_k) \geq \nu(c \cap D'k) > 0.$$

Lo cual es una contradicción, que vino de suponer que $C \cap D'_j \neq \varnothing$, para toda $j \neq k$; por lo tanto $C \cap D'_j \neq \varnothing$ si, y sólo si, $j = k$, es decir, $C \subseteq D'_k \cup N'$.

Sea $p = d/d'$. Para algún $1 \leq j \leq d'$ sucede que $D_1 \cap D'j \neq \varnothing$, es más, podemos afirmar que $\psi(D_1 \cap D'_j) > 0$, si no, $D_1 \subseteq N' = [\cup_{i=1}^{d'} D'_i]^c$, por lo que $0 = \psi(N') = \psi(D_1)$.

Supongamos $D_1 \cap D'_l \neq \varnothing$, para alguna $l \neq j$, en particular, existe $x \in D_1 \cap D'_l$ que cumple con que

$$P^n d(x, D_1 \cap D'_j) = P^{pnd'}(x, D_1 \cap D'j) = 0, \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

ya que $x \in D'_l$ y por ser $\{D'_1, \ldots, D'_{d'}\}$ un d'-ciclo.

Como $\psi(D_1 \cap D_j) > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, D_1 \cap D_j) > 0, \text{ para toda } x \in X;$$

en particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, D_1 \cap D_j) > 0, \text{ para toda } x \in D_1 \cap D'_l$$

Dado que $x \in D_1$ y $\{D_1, \ldots, D_d\}$ es un d-ciclo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{nd}(x, D_1 \cap D'_j) > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P^{npd'}(x, D_1 \cap D'_j) > 0, \text{ para toda } x \in D_1 \cap D'_l,$$

de modo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^{npd'}(x, D_1 \cap D'_j) > 0$; pero por la ecuación (3.5) esto es absurdo. Esta contradicción vino de suponer que $\psi(D_1 \cap D'_l) > 0$, para algún $l \neq j$; por lo tanto $D_1 \subseteq D'_j$, ψ-cdq.

Análogamente para los demás, sucede que $D_i \subseteq D'_{j_i}$, ψ-casi seguramente, para algún $1 \leq j_i \leq d'$ y para toda $1 \leq i \leq d$.

b) $N' = N$

$N' = \left(\cup_{i=1}^{d'} D'_i\right)^c$ y $N = \left(\cup_{i=1}^{d} D_i\right)^c$. Por la parte (a), para toda $1 \leq i \leq d$, existe $1 \leq j_i \leq d'$ tal que $D_i \subseteq D'_{j_i}$; y como $\psi(N) = \psi(N') = 0$, podemos suponer que $N' = N$ y seguimos teniendo el mismo resultado.

c) Para cada $1 \leq j \leq d'$, D_j es unión de $p = d/d'$ conjuntos $D'_i s$.

Por las partes (a) y (b), existen $n_1, \ldots, n_{d'} \in \mathbb{N}$ y existen $i_1, \ldots, i_{n_i} \in \{1, \ldots, d\}$ tales que $i_1 < \ldots < i_{n_1}$, $j_k \neq i_r$, para todos k y r, si $j \neq i$, y

$$\begin{aligned} D'_1 &= D_{1_1} \cup \ldots \cup D_{1_{n_1}} \\ D'_2 &= D_{2_1} \cup \ldots \cup D_{2_{n_2}} \\ \vdots &= \vdots \\ D'_{d'} &= D_{d'_1} \cup \ldots \cup D_{d'_{n_{d'}}} \end{aligned}$$

Al ser $\{D'_1, \ldots, D'_{d'}\}$ y $\{D_1, \ldots, D_d\}$ d'-ciclo y d-ciclo, respectivamente, cada elemento de la partición de D_1 está relacionado con un único elemento de la partición de D_2, de modo que $n_1 \leq n_2$; y con el mismo razonamiento, $n_1 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_{d'} \leq n_1$. Por lo tanto $n_1 = \ldots = n_{d'}$.

Dado lo anterior, concluimos que si tenemos que $\{D'_i, \ldots, D'_d\}$ es un d-ciclo, entonces $D'_i = D_j$, salvo reordenaciones.

□

De la demostración del Teorema anterior tenemos las siguientes observaciones:

1. El ciclo no depende del conjunto pequeño C que elijamos, a excepción de los conjuntos ψ-nulos.

2. Todo conjunto pequeño está contenido en un único elemento del ciclo, digamos D_i.

Definición 30. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ. Tomemos a d como el natural más grande tal que podemos descomponer a (ψ, X) en un d-ciclo.*

1. *Decimos que d es el ciclo de la Cadena;*

2. *si $d = 1$, decimos que la Cadena es aperiódica;*

3. *cuando existe $C \in B^+(X)$ μ_1-pequeño tal que $\mu_1(C) > 0$, decimos que la Cadena es fuertemente aperiódica.*

Proposición 31. *Si Φ es fuertemente aperiódica, entonces es aperiódica.*

Demostración. Dado que Φ es fuertemente aperiódica, existe C μ_1-pequeño, entonces $1 \in E_C$. Por lo que $1 = m.c.d.E_C$. En la demostración del Teorema anterior vimos que para cualquier d'-ciclo en la Cadena, $d'/m.c.d.E_C = 1$, por lo tanto todo ciclo en la Cadena tiene longitud 1, es decir, la Cadena es aperiódica. □

Proposición 32. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida de irreducibilidad maximal ψ. Entonces:*

1. *Si Φ es fuertemente aperiódica, entonces la condición de minorización se cumple;*

2. *La resolvente K_{a_ϵ} es fuertemente aperiódica, para toda $0 < \epsilon < 1$;*

3. *Si Φ es aperiódica, entonces, todo m-esqueleto es ψ-irreducible y es aperiódico. Además, algún m_0- esqueleto es fuertemente aperiódico.*

Demostración. 1. Condición de minorización: existen $\delta > 0$, $D \in B(X)$ y μ medida en $B(X)$ tal que $\nu(D) = 1$ tales que

$$P(x, A) \geq \delta\mu(A), \text{ para toda } x \in D \text{ y para todo } A \in B(X).$$

Como Φ es fuertemente aperiódica, existe $C \in B(X)$ μ_1-pequeño tal que $\nu_1(C) > 0$ y

$$P(x, A) \geq \nu_1(A), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } A \in B(X). \tag{3.6}$$

Sea $\mu = \nu_1/\nu_1(C)$, entonces $\nu_(C) = 1$. Tomamos $\delta = \nu_1(C)$ y $D = C$. Substituyendo en (3.6),

$$P(x, A) \geq \delta\mu(A), \text{ para toda } x \in D \text{ y para todo } A \in B(X),$$

es decir, Φ cumple la condición de minorización.

2. Sea $0 < \epsilon < 1$. Como Φ es ψ-irreducible, existe un conjunto pequeño en la Cadena, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$, $C \in B^+(X)$ y ν_m tales que

$$P^m(x, A) \geq \nu_m(A), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } A \in B(X).$$

Ahora,

$$K_{a_\epsilon}(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\epsilon)\epsilon^n P^n(x, A) \geq (1-\epsilon)\epsilon^m P^m(x, A) \geq (1-\epsilon)\epsilon^m \nu_m(A),$$

Sea $\overline{\nu}_1 = (1 - \epsilon)\epsilon^m \nu_m$, entonces

$$K_{a_\epsilon}(x, A) \geq \overline{\nu}_1(A), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } A \in B(X),$$

es decir, C es $\overline{\nu}_1$-pequeño en K_{a_ϵ}.

Por lo tanto K_{a_ϵ} es fuertemente aperiódica, para toda $0 < \epsilon < 1$.

3. *a*) Algún m_0-esqueleto es fuertemente aperiódico.

   Como Φ es ψ-irreducible, existe $C \in B^+(X)$, $m_0 \in \mathbb{N}$ y ν_{m_0} medida en $B(X)$ tal que $\nu_{m_0}(C) > 0$ y

$$P^{m_0}(x, A) \geq \nu_{m_0}(A), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } A \in B(X),$$

   es decir, el m_0-esqueleto Φ^{m_0} es fuertemente aperiódico.

   b) Todo m-esqueleto es ψ-irreducible y aperiódico.

   Sea $m \in \mathbb{N}$. Sean $E_C = E_C^1$ y E_C^m los conjuntos de los tiempos bajo los cuales C es pequeño, con una medida de Probabilidad múltiplo de ν en Φ y Φ^m, respectivamente.

   Sea $k \in E_C$, dado que E_C es cerrado bajo adición, $mk \in E_C$, para toda $m \in \mathbb{N}$, es decir, existe $\delta_m > 0$ tal que

$$P^{mk}(x, A) \geq \delta_m \nu(A), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } A \in B(X),$$

   es decir, $k \in E_C^m$, para toda $k \in E_C^m$. Por lo tanto $E_C \subseteq E_C^m$.

   Como la Cadena original es aperiódica, $1 = m.c.d.(E_C)$, ya que la longitud de todos los ciclos que pueden darse a la Cadena debe de dividir al $m.c.d.(E_C)$.

Como $E_C \subseteq E_C^m$, $1 = m.c.dE_C^m$ y la longitud de todo ciclo dado en la Cadena Φ^m debe dividir al $m.c.d.E_C^m = 1$, todo ciclo tiene, a lo más, longitud 1, es decir, Φ^m es aperiódica.

Sean $A \in B^+(X)$ y $x \in X$. Por Teorema 7, podemos tomar a ψ como

$$\psi(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \frac{P^n(y, \cdot)}{2^{n+1}} \nu(dy)$$

y por el Teorema 13, podemos suponer que $\nu(C) > 0$.

Como

$$\psi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \frac{P^n(y, A)}{2^{n+1}} \nu(dy) > 0,$$

existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\int_C P^r(y, A)\nu(dy) > 0$.

Dado que $\psi(C) > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P^k(x, C) > 0$.

Sean $z \in C$, $B \in B(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, $P^n(z, B) \geq \nu(B)(\nu(C))^{n-1}$.

Usando todo lo anterior,

$$
\begin{aligned}
P^{r+n+k}(x,A) &= \int_X P^r(y,A)P^{n+k}(x,dy) \\
&= \int_X P^r(y,A)\left[\int_X P^n(z,dy)P^k(x,dz)\right] \\
&\geq \int_X P^r(y,A)\left[\int_C P^n(z,dy)P^k(x,dz)\right] \\
&\geq \int_X P^r(y,A)\left[\int_C \nu(dy)(\nu(C))^{n-1}P^k(x,dz)\right] \\
&= \int_X P^r(y,A)\left[\nu(dy)(\nu(C))^{n-1}P^k(x,C)\right] \\
&= (\nu(C))^{n-1}P^k(x,C)\int_X P^r(y,A)\nu(dy) \\
&\geq (\nu(C))^{n-1}P^k(x,C)\int_C P^r(y,A)\nu(dy) > 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $P^{r+n+k}(x,A) > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, de modo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r+n+k = ms$, para algún $s \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $P^{ms}(x,A) > 0$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} P^{nm}(x,A) > 0$, para toda $x \in X$.

Concluímos que Φ^m es ψ-irreducible.

$\square$

Si tenemos una Cadena fuertemente aperiódica, entonces se cumple la condición de minorización para la Cadena, y así, podemos construir un átomo artificial y explotar sus propiedades; es decir, es más deseable trabajar con este tipo de Cadenas. Pero muchas Cadenas, incluso las más simples, como las caminatas aleatorias, no la cumplen.

La Proposición anterior nos dice que cualquier resolvente la cumple. En el siguiente Capítulo veremos como pasar estas propiedades de la resolvente a la Cadena original.

Proposición 33. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ, con periodo d y un d-ciclo $\{D_1, \dots, D_d\}$. Entonces, para cada $1 \leq i \leq d$, D_i es absorbente para el d-esqueleto Φ^d. Además, $\Phi^d_{/D_i}$ es aperiódica.*

Demostración. Sea $1 \leq i \leq d$. Dado que $\{D_1, \ldots, D_d\}$ es un d-ciclo,

$$P^d(x, D_i) = 1, \text{ para toda } x \in D_i;$$

y como el Núcleo de transisión asociado a Φ^d es P^d, D_i es absorbente en Φ^d.

Al ser D_i absorbente para el d-esqueleto, por el Teorema 9, $\Phi^d_{/D_i}$ está bn definida. Como d es el natural más grande con el cuál podemos encontrar un ciclo de esa longitud; si $\Phi^d_{D_i}$ no fuera aperiódica, prodríamos partir a D_i en un ciclo mayor a 1 para la Cadena $\Phi^d_{D_i}$, entonces podríamos construir un ciclo de longitud mayor a d para Φ. Por lo tanto $\Phi^d_{D_i}$ es aperiódica.

□

3.5. Teorema de existencia de conjuntos pequeños

Esta sección está destinada a probar que en todas las Cadenas ψ-irreducibles, el espacio de estados contiene un conjunto pequeño, y así asegurar que la condición de minorización se cumple, al menos para un m-esqueleto.

Definición 31. *Sean $C \in B(X)$, $m \in \mathbb{N}$ y ν_m, medida no trivial sobre $B(X)$, que cumplen con que*

$$P^m(x, B) \geq v_m(B), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } B \in B(X)$$

entonces decimos que C es v_m-pequeño.

De ahora en adelantes tomamos a ϕ una medida σ-finita sobre $B(X)$, fija. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, dado que $P^n(x, \cdot)$ es finita, usando el Teorema 40, existen $p^n(x, \cdot) : (X, B(X)) \longrightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, medible ; y $Q^n(x, \cdot)$, medida sobre $B(X)$ ortogonal a ϕ; tales que

$$P^n(x, B) = \int_B p^n(x, y)\phi(dy) + Q^n(x, B), \text{ para todo } B \in B(X) \qquad (3.7)$$

Lema 5. *La función $p^n(x, y)$ es $\sigma_{X\times X}$ medible*

Demostración.

Observación 1. *Como X es un espacio métrico separable,*

$$\sigma_{X\times X} = \sigma(\{A \times B | A, B \in B(X)\})$$

Comenzemos con el caso $n = 1$.

Sea $i \in \mathbb{N}$, definimos

$$p_i^1(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \phi(B_i(y)) = 0 \\ \\ \frac{P(x,B_i(y))}{\phi(B_i(y))} & ; \quad e.o.c. \end{cases}$$

Sea

$$g_i^1(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \quad \phi(B_i(y)) = 0 \\ \\ \frac{1}{\phi(B_i(y))} & , \quad e.o.c. \end{cases}$$

entonces,

$$p_i^1(x,y) = g_i^1(x,y)P(x,B_i(y))$$

Para que $p_i^1(\cdot,\cdot)$ es $\sigma_{X\times X}$ medible, es suficiente ver que $g_i^1(\cdot,\cdot)$ y $P(\cdot,B_i(\cdot))$ son $\sigma_{X\times X}$ medibles.

Veamos primero que $P(\cdot,B_i(\cdot))$ es $\sigma_{X\times X}$ medible. Como P es un Núcleo de transición, $P(\cdot,B_i(y))$ es $B(X)$ medible, y, por la observación 1, solamente falta mostrar que $P(x,B_i(\cdot))$ es $B(X)$ medible. Sea $x \in X$, fija, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, queremos demostrar que

$$A_\alpha = \{y \in X | P(x,B_i(y) > \alpha\} \in B(X)$$

Dado que $Im[P(x,\cdot)] = [0,1]$, para $\alpha \in (-\infty,0]$, $A_\alpha = X \in B(X)$; y para $\alpha \in [1,\infty]$, $A_\alpha = \emptyset \in B(X)$. Sean $\alpha \in (0,1)$ y $y \in A_\alpha$, entonces $P(x,B_i(y)) > \alpha$, de modo que, para toda $z \in B_i(y)$, $P(x,B_i(z)) > \alpha$. Así, $B_i(y) \subseteq A_\alpha$, para toda $y \in A_\alpha$. Al ser $B_i = \{B_i^1,\ldots,B_i^{n_i}\}$ una partición de X, y por lo anterior, existen $1 \leq m \leq n_i$ y $\{j_1,\ldots,j_m\} \subseteq \{1,\ldots,n_i\}$ tales que

$$A_\alpha = B_i^{j_1} \cup \ldots \cup B_i^{j_m} \in B(X),$$

es decir, $P(x,B_i(\cdot))$ es medible, para toda $x \in X$. Por lo tanto, $P(\cdot,B_i(\cdot))$ es $\sigma_{X\times X}$ medible.

Veamos ahora que $g_i(\cdot,\cdot)$ es medible. Por la observación 1, basta probar que g_i es $B(X)$ medible en cada entrada. Sea $y \in X$, fija, $g_i(\cdot,y) = \frac{1}{\phi(B_i(y))}$ no depende de la primera entrada, es decir, es una función constante, por lo tanto, $B(X)$ medible. Sea $x \in X$, fija, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$B_\alpha = \{y \in X | g_i(x,y) > \alpha\};$$

queremos demostrar que $B_\alpha \in B(X)$. Como $g(x,\cdot) \geq 0$, para $\alpha \in (-\infty,0]$, $B_\alpha = X \in B(X)$. Para $\alpha = 0$, $g_i(x,y) > 0$ si, y sólo si, $\phi(B_i(y)) > 0$, es decir,

$$B_0 = \cup\{B_i^m | \phi(B_i^m) > 0\} \in B(X),$$

pues es unión finita de elemento de $B(X)$. Sean $\alpha > 0$ y $y \in B_\alpha$, entonces $g(x,y) > 0$, es decir, $\phi(B_i(y)) > 0$; de modo que

$$B_\alpha = \{y \mid g_i(x,y) > \alpha\} = \{y \mid \frac{1}{\phi(B_i(y))} > \alpha\} = \{y \mid \phi(B_i(y)) < \frac{1}{\alpha}\}$$

Por un razonamiento análo al caso de los conjuntos A_α, tenemos que $B_\alpha \in B(X)$.

Por lo tanto, $p_i^1(\cdot,\cdot)$ es una función medible, para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sea

$$p_\infty^1(x,y) = \lim_{i\to\infty} p_i^1(x,y)$$

que es una función medible, ya que es límite puntual de una sucesión de funciones reales medibles. Por el Teorema 41, $p_\infty^1(\cdot,\cdot)$ es una versión de $p^1(\cdot,\cdot)$, por lo tanto, $p^1(\cdot,\cdot)$ es medible.

Para $n \geq 2$, hacemos el mismo prodecidimento, y obtenemos el resultado. $\square$

Lema 6. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $x, z \in X$, entonces*

$$p^{n+m}(x,z) \geq \int_X p^n(x,y)p^m(y,z)\phi(dy)$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$

$$q^n(x,y) = p_\infty^n(x,y) \bigvee \max_{1\leq k\leq n-1} \left\{\int_X q^{n-k}(w,y)P^k(x,dw)\right\}$$

donde

$$p_\infty^n(x,y) = \lim_{i\to\infty} p_i^n(x,y)$$

es la versión de $p^n(x,y)$ que encontramos en el Lema anterior.

1. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $q^n(\cdot,\cdot)$ es version de $p^n(\cdot,\cdot)$.

   Para $n = 1$

   $$q(x,y) = p_\infty^1(x,y), \text{ que ya demostramos que es versión de } p^1(x,y)$$

   Para $n = 2$,

   $$q^2(x,y) = p_\infty^2(x,y) \bigvee \int_X q(w,y)P(x,dw),$$

Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov y por la descomposición de Lebesgue de P^2 con respecto a ϕ

$$P^2(x,A) = \int_X P(y,A)P(x,dy) = \int_X \left(\int_A p(y,z)\phi(dz) + Q(y,A) \right) P(x,dy)$$

$$= \int_X \int_A p(y,z)\phi(dz)P(x,dy) + \int_X Q(y,A)P(x,dy)$$

$$= \int_A \int_X p(y,z)P(x,dy)\phi(dz) + \int_X Q(y,A)P(x,dy),$$

de modo que

$$P^2(x,A) = \int_A \int_X p(y,z)P(x,dy)\phi(dz) + \int_X Q(y,A)P(x,dy)$$

Definiendo las medidas $\eta, \theta : B(X) \to \mathbb{R}^+$ mediante

$$\eta(A) = \int_A \int_X p(y,z)P(x,dy)\phi(dz), \text{ para todo } A \in B(X),$$

$$\theta(A) = \int_X Q(y,A)P(x,dy), \text{ para todo } A \in B(X),$$

sucede que $\eta \prec \phi$; y al ser $Q(y,\cdot) \perp \phi$, para toda $y \in X$, $\theta \perp \phi$; es decir

$$P^2(x,A) = \eta(A) + \theta(A), \text{ con } \eta \prec \phi \text{ y } \theta \perp \phi,$$

es decir, tenemos otra descomposición de Lebesgue de $P^2(x,\cdot)$ con respecto a ϕ, pero el Teorema 40 nos asegura que la descomposición es única, es decir,

$$\eta(A) = \int_A \left(\int_X p(y,z)P(x,dy) \right)$$

$$\phi(dz) = \int_A p^2(x,z)\phi(dz), \text{ para todo } A \in B(X),$$

Además, la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym nos asegura que

$$p^2(x,z) \text{ es una versión de } \int_X p(y,z)P(x,dy)$$

Por el caso $n = 1$, $q(x,z) = p(x,z)$, y con ello

$$\int_X q(y,z)P(x,dy) \text{ es versión de } p^2(x,z), \text{ que es lo que buscamos.}$$

De modo que $q^2(\cdot,\cdot)$ es máximo de 2 versiones de $p^2(\cdot,\cdot)$; esto, sumado al hecho de que, para todo espacio medible (Y, σ_Y) y $f, g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones medibles, $f \vee g$ es medible; nos dice $q^2(\cdot,\cdot)$ es versión de $p^2(\cdot,\cdot)$.

Para $n > 2$, supongamos válido este hecho para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, y sea

$$q^n(x,y) = p^n_\infty(x,y) \bigvee \overset{\text{máx}}{1 \leq k \leq n-1} \left\{ \int_X q^{n-k}(w,y)P^k(x,dw) \right\}.$$

$p^n_\infty(\cdot,\cdot)$ es versión de $p^n(\cdot,\cdot)$; veamos que las demás también. Por hipótesis de inducción, $q^{n-k}(\cdot,\cdot)$ es versión de $p^{n-k}(\cdot,\cdot)$, para toda $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Tomando $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, y procediendo análogamente al caso $n = 2$, llegamos al resultado deseado.

2. Para todo $x, z \in X$ y para todo $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$q^{n+m}(x,z) \geq \int_X q^n(x,y)q^m(y,z)\phi(dy).$$

Como $q^n(\cdot,\cdot)$ es un máximo finito de versiones de una misma función, basta probar que una de ellas cumple la propiedad. Dado que

$$q^{n+m}(x,z) = p^{n+m}_\infty(x,z) \bigvee \overset{\text{máx}}{1 \leq k \leq n+m-1} \left\{ \int_X q^{n+m-k}(y,z)P^k(x,dy) \right\},$$

tomamos la versión corrrespondiente a $k = m$,

$$\int_X q^{n+m-k}(y,z)P^k(x,dy)$$

$$= \int_X q^n(y,z)P^m(x,dy)$$

$$= \int_X q^m(y,z)\left(\int_{(dy)} q^n(x,w)\phi(dw) + Q^n(x,dy)\right) \geq \int_X q^m(y,z)\left(\int_{(dy)} q^n(x,w)\phi(dw)\right)$$

$$= \int_X q^m(y,z)q^n(x,y)\phi(dy) = \int_X q^n(x,y)q^m(y,z)\phi(dy),$$

de modo que, $q^n(\cdot,\cdot)$ cumple con (2).

De las partes *1* y *2* deducimos que $p^n(\cdot,\cdot)$ cumple con (6).

□

Para simplificar la notación, definimos

$$\phi^+(X) := \{A \in B(X)|\phi(A) > 0\}$$

la familia de conjuntos ϕ-positivos.

Teorema 16 (Existencia de conjuntos pequeños)**.** *Sea Φ una Cadena de Markov sobre $B(X)$ y supongamos ϕ cumple que*

$$\textit{existe } A \in \phi^+(X), \textit{ tal que si } B \in B^+(X) \textit{ y } B \subseteq A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} P^k(x,B) > 0, \textit{ para toda } x \in A$$

Entonces, existen $C \subset A$, $M \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ tal que $\phi(C) > 0$ y $p^M(x,z) > \epsilon$, para todo $x, z \in C$.

Demostración. Sea $B \in B^+(X)$ tal que $B \subseteq A$, por hipótesis

$$\sum_{k=1}^{\infty} P^k(x,B) > 0, \text{ para toda } x \in A,$$

y, por la descomposición de Lebesgue de P^n con respecto a ϕ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_B p^n(x,y)\phi(dy) + Q^n(x,B) > 0, \text{ para toda } x \in A \tag{3.8}$$

Como $\phi \perp Q^n(x,\cdot)$, existen $A_1^n, A_2^n \in B(X)$ tales que

$$X = A_1^n \cup A_2^n; \quad A_1^n \cap A_2^n = \emptyset \quad \phi(A_2^n) = Q^n(x, A_1^n) = 0,$$

$$\text{y} \quad \phi(A_1^n) \text{ y } Q^n(x, A_2^n) \text{ tienen medida total.}$$

Dado que $\phi(A) > 0$, $A \subseteq A_1^n$, en particular, $Q^n(x, A) = 0$. Así, de la ecuación (3.8) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_B p^n(x,y)\phi(dy) > 0, \text{ para toda } x \in A$$

$$\Rightarrow \quad \int_B \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y)\phi(dy) > 0, \text{ para toda } x \in A$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\{x \in A \mid \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y) > 0\}) > 0$$

De modo que existen $n, m \in \mathbb{N}$ (puede ser que $n = m$), tales que

$$\int_{A\times A\times A} p^n(x,y)p^m(y,z)\phi(dx)\phi(dy)\phi(dz) > 0 \tag{3.9}$$

Sean

$$A_k(\eta) := \{(x,y) \in A^2 \mid p^k(x,y) \geq \eta\} \in \sigma_{X\times X}, \quad k \in n, m,$$

veamos que existe $\eta \geq 0$ tal que

$$\phi^3(\{(x,y,z) \in A^3 \mid (x,y) \in A_n(\eta), (y,z) \in A_m(\eta)\}) > 0$$

Supongamos lo contrario, es decir, para toda $\eta > 0$,

$$\phi^3(\{(x,y,z) \in A^3 \mid (x,y) \in A_n(\eta), (y,z) \in A_m(\eta)\}) = 0$$

Para i fija $\{A_i(\eta)\}_{\eta>0}$ es una familia decreciente a $\{(x,y) \in A_2 \mid p^k(x,y) \geq 0\} = A^2$, así

$$\phi^3(\{(x,y,z) \in A^3 \mid (x,y) \in A^2, (y,z) \in A^2\}) = 0, \text{ es decir, } \phi^3(A^3) = 0,$$

de modo que

$$\int_{A^3} p^n(x,y)p^m(y,z)\phi(dx)\phi(dy)\phi(dz) = 0$$

que contradice a la ecuación (3.9); por lo tanto, existe $\eta_1 > 0$ tal que

$$\phi^3(\{(x,y,z) \in A^3 \mid (x,y) \in A_n(\eta_1), (y,z) \in A_m(\eta_1)\}) > 0$$

Por un razonamiento análogo, existen $\eta_2 > 0$ y $\eta_3 > 0$ tales que $\phi^2(A_n(\eta_2)) > 0$ y $\phi^2(A_m(\eta_3)) > 0$. Sea $\eta = \text{máx}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, entonces

$$\phi^3(\{(x,y,z) \in A^3 | \ (x,y) \in A_n(\eta), (y,z) \in A_m(\eta)\}), \phi^2(A_n(\eta)) \text{ y } \phi^2(A_m(\eta)) > 0 \tag{3.10}$$

Ya fijada η, suprimiremos la dependencia de $A_n(\eta)$ con respecto de η, es decir, $A_n(\eta) = A_n$. Sean $x, y \in X$, definimos $B_i(x,y) := B_i(x) \times B_i(y) \in B(X) \times B(X)$, donde $B_i(x)$ es el elemento de la partición B_i a la que x pertenece. Fijemos $k \in \{n, m\}$, y definimos la medida $\varphi_k : B(X) \times B(X) \longrightarrow [0, \infty]$ mediante $\varphi_k(B) = \phi^2(A_k \cap B)$.

Observemos que

$$\varphi_k(B) = \phi^2(A_k \cap B) = \int_X \chi_{A_k \cap B} d\phi^2 = \int_X \chi_{A_k} \chi_B d\phi^2 = \int_B \chi_{A_k} d\phi^2$$

y así, $\frac{d\varphi}{d\phi^2} = \chi_{A_k}$, en particular $\varphi_k \prec \phi^2$. Tomemos $B \in B(X) \times B(X)$ tal que $\varphi_k(B) = 0$, por el Teorema 41, existe $N_k \in B(X) \times B(X)$ ϕ^2 nullo tal que, para toda $(x,y) \in A_k \backslash N_k$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\varphi_k(B_i(x,y))}{\phi^2(B_i(x,y))} = 1, \quad \text{es decir,} \quad \lim_{i \to \infty} \frac{\phi^2(A_k \bigcap B_i(x,y))}{\phi^2(B_i(x,y))} = 1 \tag{3.11}$$

Sea $(u,v,w) \in \{(x,y,z) \in A^3 | \ (x,y) \in A_n \backslash M_n, (y,z) \in A_m \backslash M_n\}$, por (3.11), existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi^2(A_n \cap B_j(u,v)) > (3/4)\phi^2(B_j(u,v)) \tag{3.12}$$

y

$$\phi^2(A_m \cap B_j(v,w)) > (3/4)\phi^2(B_j(v,w)) \tag{3.13}$$

Sea $A_n(\cdot) : A \longrightarrow B(X)$

$$A_n(x) = \begin{cases} \emptyset & ; \text{si para toda } y \in A \ p^n(x,y) < \eta \\ \{y \in A | \ (x,y) \in A_n\} & ; \text{e.o.c} \end{cases}$$

su dominio está bien definido, pues, para cada $x \in A$, $A_n(x)$ define una sección de A_n (que puede ser vacía), y las secciones son medibles. Además,

$$A_n = \bigcup_{x \in A} \{(x,y) \in A^2 | \ y \in A_n(x)\}$$

Análogamente, $A_n(x) \cap Bj(v)$ son las secciones de $A_n \cap B_j(u,v)$ y

$$A_n \cap B_j(u,v) = \bigcup_{x \in B_j(u) \cap A} \{(x,y) \in A^2 |\ y \in A_n(x) \cap B_j(v)\}$$

Sea

$$E_n = \{x \in B_j(u) \cap A |\ \phi(A_n(x) \cap B_j(v)) > (3/4)\phi(B_j(v))\},$$

veamos que $E_n \in B(X)$ y que $\phi(E_n) > 0$. Por el Teorema 42,

$$\phi^2(A_n \cap B_j(u,v)) = \int_{A \cap B_j(u)} \phi(A_n(x) \cap B_j(v)\phi(x)$$

y

$$\begin{aligned}(3/4)\phi^2(B_j(u,v)) &= (3/4)\phi^2(B_j(u) \times B_j(v)) = (3/4)\phi(B_j(u))\phi(B_j(v)) \\ &= (3/4)\phi(B_j(v)) \int_{B_j(u)} 1\phi(dx) = \int_{B_j(u)} (3/4)\phi(B_j(v))\phi(dx) \\ &\geq \int_{B_j(u) \cap A} (3/4)\phi(B_j(v))\phi(dx)\end{aligned}$$

De lo anterior y de la ecuación (3.12)

$$\int_{B_j(u) \cap A} \phi(A_n(x) \cap B_j(v))\phi(dx) > \int_{B_j(u) \cap A} (3/4)\phi(B_j(v))\phi(dx)$$

$$\Rightarrow \int_{B_j(u) \cap A} \left[\phi(A_n(x) \cap B_j(v)) - (3/4)\phi(B_j(v))\right] \phi(dx) > 0$$

Sea $g : X \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} \phi(A_n(x) \cap B_j(v)) - (3/4)\phi(B_j(v)) & x \in B_j(u) \cap A \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

g es medible, por ser convinación lineal de funciones medibles (esto nos lo asegura el Teorema 42). Por como g está definida

$$\int_X g d\phi = \int_{B_j(u) \cap A} g d\phi > 0$$

Sea $H_n = \{x \in B_j(u) \cap A |\ g(x) > 0\}$, entonces $H_n \in B(X)$ y $\phi(H_n) > 0$. Por definición de H_n

$$H_n = \{x \in B_j(u) \cap A |\ \phi(A_n(x)) \cap B_j(v) - (3/4)\phi(B_j(v)) > 0\}$$

$$= \{x \in B_j(u) \cap A |\ \phi(A_n(x) \cap B_j(v)) > (3/4)\phi(B_j(v))\}$$

$$= E_n$$

Por lo tanto, E_n es medible y $\Phi(E_n) > 0$.

Sea $A_m^*(\cdot) : A \longrightarrow B(X)$ tal que

$$A_m^*(z) = \begin{cases} \emptyset & ;\text{ si para todo } y \in A;\ p^m(y,z) < \eta \\ \{y \in A |\ (y,z) \in A_m\} & ;\text{ e.o.c.} \end{cases}$$

y sea

$$D_m = \{z \in B_j(w) \cap A |\ \phi(A_m^*(z) \cap B_j(v)) > \phi(B_j(v))\};$$

procediendo análogamente, obtenemos que D_m es medible y que $\phi(D_m) > 0$.

Sea $(x,z) \in E_n \times D_m$,

$$\phi(A_n(x) \cap A_m^*(z))$$

$$\geq \phi((A_n(x) \cap B_j(v)) \cap (A_m^*(z) \cap B_j(v))) \tag{3.14}$$

$$= \phi(A_n(x) \cap B_j(v)) + \phi(A_m^*(z) \cap B_j(v)) - \phi(A_{m,n}^{x,z})$$

donde

$$A_{m,n}^{x,z} := [A_n(x) \cap B_j(v)] \cup [A_m^*(z) \cap B_j(v)] \subseteq B_j(v);$$

de modo que

$$\phi(A_{m,n}^{x,z}) \leq \phi(B_j(v)), \quad \text{es decir} \quad -\phi(A_{m,n}^{x,z}) \geq -\phi(B_j(v))$$

Dado que $x \in E_n$ y $z \in D_m$,

$$\phi(A_n(x) \cap B_j(v)) > (3/4)\phi(B_j(v))$$

y

$$\phi(A_m^*(z) \cap B_j(v)) > (3/4)\phi(B_j(v))$$

Subsituyendo todo lo anterior en la ecuación (3.14),

$$\begin{aligned}
&\Phi(A_n(x) \cap A_m^*(z)) \\
&\qquad\qquad \geq \phi(A_n(x) \cap B_j(v)) + \phi(A_m^*(z) \cap B_j(v)) - \phi(B_j(v)) \\
&\qquad\qquad > (3/4)\phi(B_j(v)) + (3/4)\phi(B_j(v)) - \phi(B_j(v)) > 0 \\
&\qquad\qquad = (1/2)\phi(B_j(v)) > 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\phi(A_n(x) \cap A_m^*(z)) > (1/2)\phi(B_j(v)) > 0, \text{ para toda } (x,z) \in E_n \times D_m \quad (3.15)$$

Por el Lema 6, para cualquier vector $(x,z) \in E_n \times D_m$,

$$\begin{aligned}
&p^{n+m}(x,z) \\
&\quad \geq \int_X p^n(x,y)p^m(y,z)\phi(dy) \geq \int_{A_n(x)\cap A_m^*(z)} p^n(x,y)p^m(y,z)\phi(dy) \\
&\quad \geq \int_{A_n(x)\cap A_m^*(z)} \eta\eta\phi(dy) = \eta^2 \int_{A_n(x)\cap A_m^*(z)} \phi(dy) = \eta^2\phi(A_n(x) \cap A_m^*(z)) \\
&\quad \geq \eta^2(1/2)\phi(B_j(v)) > 0
\end{aligned}$$

Sea $\epsilon_1 = \eta^2(1/2)\phi(B_j(v)) > 0$, entonces

$$p^{n+m}(x,z) \geq \epsilon_1, \quad \text{para todo vector } (x,z) \in E_n \times D_m \qquad (3.16)$$

Como $\phi(E_n) > 0$ y $E_n, D_m \subseteq A$, por hipótesis,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P^k(x, E_n) > 0, \quad \text{para toda } x \in A, \text{ en particular, para toda } x \in D_m$$

Sean

$$C_k^i = \{x \in C_k | \; P^k(x, E_n) \geq \frac{1}{i}\} = C_k \cap \{x \in X | \; P^k(x, E_n) \geq \frac{1}{i}\} \in B(X),$$

$D_m = \bigcup_{i\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}}^{\infty} C_j^i$; y ya que $\psi(D_m) > 0$, existen $i, k \in \mathbb{N}$ tales que $\phi(C_k^i) > 0$. Sean $C := C_k^i$ y $\epsilon_2 := \frac{1}{i}$,

$$P^k(x, E_n) \geq \epsilon_2 \quad \text{para toda } x \in C \tag{3.17}$$

Para finalizar, ya que $p^l(\cdot,\cdot)$ son versiones de las densidades $q^l(\cdot,\cdot)$, construidas como sigue

$$q^l(x,y) = p_\infty^n(x,y) \bigvee \max_{1\leq j\leq n-1} \left\{ \int_X q^{n-j}(w,y) P^j(x,dw) \right\},$$

para todo $x, z \in C$, por las ecuaciones (3.16) y (3.17)

$$\begin{aligned} p^{k+m+n}(x,z) & \\ &\geq \int_X p^{n+m}(y,z)P^k(x,dy) \geq \int_{E_n} p^{n+m}(y,z)P^k(x,dy) \\ &\geq \int_{E_n} \epsilon_1 P^k(x,dy) = \epsilon_1 \int_{E_n} P^k(x,dy) = \epsilon_1 P^k(x,E_n) \\ &\geq \epsilon_1\epsilon_2 > 0 \end{aligned}$$

Sea $M = k + n + m$ y $\epsilon = \epsilon_1\epsilon_2$,

$$p^M(x,z) = \epsilon > 0, \quad \text{para todo } x, z \in C.$$

$\square$

Lema 7. *Sea Φ una Cadena de Markov con ψ una medida de irreducibilidad maximal. Entonces, para todo $A \in B^+(X)$, Φ cumple con las hipótesis del Teorema 16, con $\phi = \psi$.*

Demostración. Sea $A \in B^+(X)$ y $B \in B^+(X)$ tal que $A \subseteq B$; como Φ es ψ-irreducible,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P^k(x,B) > 0 \quad \text{para todo } x \in X, \quad \text{en particular, para todo } x \in A.$$

Tomamos $\phi = \psi$ y hemos acabado.

$\square$

Corolario 1. .- *Sea Φ una Cadena ψ-irreducible. Entonces, para todo $A \in B^+(X)$, existe $M \in \mathbb{N}$, y $C \subseteq A$, ν_M-pequeño tal que $C \in B^+(X)$ y $\nu_M(C) > 0$.*

Demostración. Sea $A \in B^+(X)$, por el Lema 7, tomando $\phi = \psi$, se cumplen las hipótesis del Teorema 16, de modo que existen $C \subseteq A$, $C \in B^+(X)$; $M \in \mathbb{N}$, y $\delta > 0$ tales que $p^M(x,z) \geq \delta$, para todo $x, z \in C$. Sea $V_M : B(X) \longrightarrow [0,\infty]$ definida mediante

$$\nu_M(D) = \delta\psi(D \cap C), \text{ para todo } D \in B(X),$$

como $C \in B^+(X)$ y $\delta > 0$, V_M es no trivial y $\nu_M(C) = \delta\psi(C) > 0$. Sea $x \in C$ y $D \in B(X)$, usando la descomposición de Lebesgue de $P^M(x,\cdot)$ con respecto a ψ,

$$\begin{aligned} P^M(x,D) & \\ &= \int_D p^M(x,y)\psi(dy) + Q^M(x,D) \geq \int_D p^M(x,y)\psi(dy) \\ &\geq \int_{D\cap C} p^M(x,y)\psi(dy) \geq \int_{D\cap C} \delta\psi(dy) = \delta\psi(D\cap C) \\ &= \nu_M(D) \end{aligned}$$

□

Teorema 17. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ. Entonces la condición de minorización se cumple para algún M-esqueleto*

Demostración. Por Teorema 7, existe una medida maximal de irreducibilidad finita. Análogamente al Corolario 1, existen $C \in B^+(X)$, $M \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que

$$P^M(x,D) \geq \delta\psi(D \cap C) = \delta\psi(C)\frac{\psi(D\cap C)}{\psi(C)}, \text{ para toda } x \in C$$

Sean $\epsilon = \delta\psi(C)$ y $\nu : B(X) \to [0,\infty]$ definida por $\nu(D) = \frac{\psi(D\cap C)}{\psi(C)}$, entonces

$$P^M(x,D) \geq \epsilon 1_C^x \nu(D), \text{ para todo } D \in B(X),$$

es decir, se cumple la condición de minorización.

□

Teorema 18. *Sea Φ una Cadena de Markov.*

1. *Sean $C, D \in B(X)$ tales que C es ν_n-pequeño y existen $\epsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ que cumplen que $P^m(x,C) \geq \epsilon$, para toda $x \in D$, entonces D es ν_{n+m}-pequeño, donde ν_{n+m} es un múltiplo de ν_n.*

2. *Supongamos que ψ es una medida de irreducibilidad maximal para Φ. Entonces X es una unión numerable de conjuntos pequeños.*

3. *Supongamos que ψ es una medida de irreducibilidad maximal para Φ. Sea $C \in B^+(X)$ un conjunto ν_n-pequeño, siempre podemos encontrar $M \in \mathbb{N}$ y una medida ν_{n+M} sobre $B(X)$ tal que C es ν_{n+M}-pequeño, y $\nu_{n+M}(C) > 0$. Además, $\nu_{n+M/C}$ es una medida de irreducibilidad.*

Demostración. 1. Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov y la pequeñez de C,

$$P^{n+m}(x,B)$$

$$= \int_X P^n(y,B)P^m(x,dy) \geq \int_C P^n(y,B)P^m(x,dy)$$

$$\geq \int_C v_n(B)P^m(x,dy) = v_n(B)\int_C P^m(x,dy) = v_n(B)P^m(x,C)$$

$$\geq v_n(B)\epsilon$$

Tomando $\nu_{n+m} = \epsilon\nu_n$, concluimos la demostración.

2. Como la Cadena es ψ-irreducible, entonces, por el Corolario 1, existe $C \in B^+(X)$, ν_M-pequeño. Sean

$$\overline{C}(n,m) = \left\{ y \in X |\ P^n(y,C) \geq \frac{1}{m} \right\}, \quad n,m \in \mathbb{N}$$

como Φ es ψ irreducible, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}} \overline{C}(n,m)$. Sea $x \in \overline{C}(n,m)$, $P^n(x,C) \geq \frac{1}{m} > 0$, para toda $x \in X$, en particular, para toda $x \in C$. Por la parte 1, $\overline{C}(n,m)$ es pequeño, para toda $n,m \in \mathbb{N}$.

3. Como $C \in B^+(X)$, $K_{a^{\frac{1}{2}}}(x,C) > 0$, para toda $x \in X$. Dado que v_n es no trivial,

$$\int_X K_{a^{\frac{1}{2}}}(y,C)v_n(dy) > 0$$

$$\Rightarrow \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P^j(y,C)}{2^j} v_n(dy) > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \frac{P^j(y,C)}{2^j} \nu_n(dy) > 0$$

De modo que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_X \frac{P^M(y,C)}{2^M} \nu_n(dy) > 0, \quad \text{es decir} \quad \int_X P^M(y,C)\nu_n(dy) > 0,$$

ó, en notación de operador, $\nu_n P^M(C) > 0$.

Sea $\nu_{n+M} : B(X) \longrightarrow [0,\infty]$ dada por $\nu_{n+M}(D) = \nu_n P^M(D)$, por lo anterior, $\nu_{n+M}(C) > 0$. Veamos C es ν_{n+M} pequeño. Sea $x \in C$, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$P^{n+M}(x,B) = \int_X P^M(x,B)P^n(x,dy) \geq \int_C P^M(x,B)P^n(x,dy)$$

$$\geq \int_X P^M(x,B)\nu_n(dy) = vP^M(B) = \nu_{m+M}(B)$$

Por lo tanto, C es ν_{n+M} pequeño.

Ahora veamos que ν_{n+M} es una medida de irreducibilidad. Sean $x \in X$, $A \in B(X)$ y $m \in \mathbb{N}$, por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$P^{m+n+M}(x,A)$$

$$= \int_X P^{n+M}(y,A)P^m(x,dy) \geq \int_C P^{n+M}(y,A)P^m(x,dy)$$

$$\geq \nu_{n+M}(A)P^m(x,C)$$

sumando sobre toda $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} P^m(x,A) \geq \sum_{m=1}^{\infty} P^{m+n+M}(x,A) \geq \nu_{n+M}(A) \sum_{m=1}^{\infty} P^m(x,C),$$

es decir,

$$\sum_{m=1}^{\infty} P^m(x,A) \geq \nu_{n+M}(A) \sum_{m=1}^{\infty} P(x,C), \text{ para toda } x \in X \text{ y para todo } A \in B(X)$$

Sea $A \in B(X)$ tal que $\nu_{n+M}(A) > 0$, como $C \in B^+(X)$, $\sum_{m=1}^{\infty} P^m(x,C) > 0$, para toda $x \in X$, y así

$$\sum_{m=1}^{\infty} P^m(x,A) > 0, \text{ para toda } x \in X,$$

es decir, la Cadena es ν_{n+M}-irreducible.

$\square$

Capítulo 4

Dicotomía en Cadenas de Markov

A lo largo de este trabajo, hemos construido resultados estructurales para Cadenas de Markov, en particular para las φ-irreducibles. En este último Capítulo desarrollamos algunos resultados de estabilidad estocástica para Cadenas de Markov.

De muchas maneras, es más fácil decir cuando una Cadena es inestable: no regresa a su estado inicial; deja eventualmente cualquier conjunto "acotado" con Probabilidad 1; regresa solo un número finito de veces a un conjunto de medida "razonablemente grande", etc. De modo que las Cadenas estables son aquellas que vuelven a su estado inicial, en alguna de las maneras antes mencionadas.

Como una introducción a la estabilidad estocástica en Cadenas de Markov, damos criterios de clasificación de estados, cuya finalidad es dar una dicotomía en el espacio de estados.

4.1. Conjuntos petite

Que una Cadena tenga un conjunto pequeño nos facilita su estudio, por ejemplo la descomposición de la Cadena de ruptura. Para comenzar el último Capítulo, damos una generalización de los conjuntos pequeños, los cuales facilitan aun más el estudio de las Cadenas en lo que concierne a criterios de recurrencia y transitoriedad.

Definición 32. *Sean $C \in B(X)$, a una Distribución en $\overline{\mathbb{N}}$ y ν_a una medida no trivial en $B(X)$ que cumplen con que*

$$K_a(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, B)a(n) \geq \nu_a(A) \textit{ para toda } x \in C \textit{ y para toda } A \in B(X),$$

entonces decimos que C es ν_a-petite.

Si tenemos un conjunto petite, ligado a la Distribución a, en la Cadena de Markov Φ, entonces la Cadena muestreada Φ_a tiene un conjunto 1-pequeño, ya que su Núcleo de transición está dado por K_a; es decir, la Cadena muestreada ligada a la Distribución a cumple con la condición de minorización.

Proposición 34. *Todo conjunto pequeño es petite.*

Demostración. Sea $C \in B(X)$ con conjunto ν_k-pequeño, en el Capítulo 1 vimos que a cualquier m-esqueleto lo podemos ver como una Cadena muestreada con la Distribución de dirak conentrada en m, δ_m, y $K_{\delta_m} = P^m$. Como C es pequeño,

$$K_{\delta_k}(x, A) = P^k(x, A) \geq \nu_k(A), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } A \in B(X);$$

es decir, C es ν_k-petite.

$\square$

Algunas propiedades de los conjuntos pequeños se mantienen para los conjuntos petites.

Proposición 35. *Sea Φ una Cadena de Markov y sea $A \in B(X)$ un conjunto ν_a-petite.*

1. *Si $B \in B(X)$ es tal que $B \overset{b}{\rightsquigarrow} A$, para alguna Distribución b; entonces B es ν_{b*a}-petite, con ν_{b*a} múltiplo de ν_a.*
2. *Si Φ tiene a ψ como medida maximal de irreducibilidad y $A \in B(X)^+$; entonces ν_a es medida de irreducibilidad para Φ.*

Demostración. Por hipótesis,

$$K_a(y, D) \geq \nu_a(A), \text{ para toda } y \in A \text{ y para todo } D \in B(X); \text{ y}$$

$$\inf_{x \in B} K_b(x, A) \geq \delta,$$

para alguna $\delta > 0$

1. Sean $x \in B$ y $D \in B(X)$, por el Lema 1,

$$K_{a*b}(x,D)$$

$$= \int_X K_a(y,D)K_b(x,dy) \geq \int_A K_a(y,D)K_b(x,dy)$$

$$\geq \int_A \nu_a(D)K_b(x,dy) = \nu_a(D)\int_A K_b(x,dy) = \nu(D)K_b(x,A)$$

$$\geq \delta\nu_a(D),$$

para toda $x \in B$ y para todo $D \in B(X)$.

Sea $\nu_{a*b} = \delta\nu_a$, entonces B es ν_{a*b}-pequeño, con ν_{a*b} un múltiplo de ν_a.

2. Sean $\overline{A}(n,m) = \{y \in X | P^n(x,A) \geq 1/m\}$, para $n, m \in \mathbb{N}$. Dado que Φ es ψ-irreducible y $A \in B^+(X)$, $X = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \overline{A}(n,m)$.

   Sea $D \in B(X)$ tal que $\nu_a(D) > 0$, y sea $x \in X$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in \overline{A}(n,m)$. Ahora,

$$P^n K_a(x,D)$$

$$= \int_X K_a(y,D)P^n(x,dy) \geq \int_A K_a(y,D)P^n(x,dy)$$

$$\geq \int_A \nu_a(D)P^n(x,dy) = \nu_a(D)P^n(x,A) \geq \frac{\nu_a(D)}{m} > 0,$$

   es decir, $P^n K_a(x,D) > 0$, de modo que $P^n(x,D) > 0$. Por lo tanto, ν_a es medida de irreducibilidad para Φ.

□

La siguiente Proposición nos da propiedades que distinguen a los petites de los pequeños.

Proposición 36. *Sea Φ con medida maximal de irreducibilidad ψ.*

1. *Si A es ν_a-petite, entonces existe Distribución de muestra c tal que A es también ψ_c-petite, con ψ_c medida de irreducibilidad maximal.*

2. La unión de dos conjuntos petite es petite.

3. Existe una Distribución de muestra c, una función medible estrictamente positiva $s : X \to \mathbb{R}$ y una medida de irreducibilidad maximal ψ_c tales que

$$K_c(x,B) \geq s(x)\psi_c(B), \text{ para toda } x \in X \text{ para todo } B \in B(X).$$

Además, existe una sucesión creciente $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos ψ_c-petite, con la misma Distribución de muestra c y medida minorizante equivalente a ψ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Demostración. 1. Veamos primero que ν_a es también medida de irreducibilidad, incluso si $\psi(A) = 0$.

Por el Teorema 13, existe $C \in B^+(X)$ ν_b petite (de hecho, pequeño) tal que $\nu_b(C) > 0$. Como $C \in B^+(X)$,

$$K_{a_{1/2}}(y,C) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^n(y,C)}{2^{n+1}} > 0, \text{ para toda } y \in C.$$

Sea $x \in A$, dado que ν_a es no trivial y por lo anterior,

$$K_{a*a_{1/2}}(x,C)$$

$$= \int_X K_{a_{1/2}}(y,C)K_a(x,dy) \geq \int_X K_{a_{1/2}}(y,C)\nu_a(dy) > 0,$$

para toda $x \in A$.

Sea $\delta = \int_X K_{a_{1/2}}(y,C)\nu_a(dy) > 0$, entonces $K_{a*a_{1/2}}(x,C) \geq \delta$, para toda $x \in A$, es decir, $A \overset{a*a_{1/2}}{\rightsquigarrow} C$.

De la Proposición anterior deducimos que A es $\nu_{a*a_{1/2}*b}$-petite, donde $\nu_{a*a_{1/2}*b} = \delta\nu_b$. Como $C \in B^+(X)$ y es ν_b pequeño, con ν_b medida de irreducibilidad para Φ, de modo que cualquier múltiplo de ν_b también lo es, en particular, $\nu_{a*a_{1/2}*b}$.

Dado todo lo anterior, podemos suponer que ν_a es una medida de irreducibilidad para Φ.

Sean $x \in A$ y $B \in B(X)$,

$K_{a*a_{1/2}}(x,B)$

$$= \int_X K_{a_{1/2}}(y,B)K_a(x,dy) \geq \int_X K_{a_{1/2}}(y,B)\nu_a(dy)$$

para toda $x \in A$ y para todo $B \in B(X)$.

Sean $c = a * a_{1/2}$ y $\psi_c(B) = \int_X K_{a_{1/2}}(y,B)\nu_a(dy)$,

$$K_c(x,B) \geq \psi_c(B), \text{ para toda } x \in A \text{ y para todo } B \in B(X),$$

es decir, A es ψ_c-petite, y por la forma de ψ_c, el Teorema 7 nos asegura que es una medida maximal de irreducibilidad.

2. Sean $A \in B(X)$ y $B \in B(X)$ ψ_a-petite y ψ_b-petite, respectivamente, con ψ_a y ψ_b medidas maximales de irreducibilidad, construídas en la parte 1.

   Sean $C \in B^+(X)$ un conjunto petite fijo, existente gracias al Teorema 13; $c = \frac{a+b}{2}$ y $x \in A \cup B$,

   $K_c(x,C)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c(n)P^n(x,C) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a(n)+b(n)}{2}\right) P^n(x,C)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a(n)P^n(x,C) + \sum_{n=0}^{\infty} b(n)P^n(x,C)\right) = \frac{1}{2}\left(K_a(x,C) + K_b(x,C)\right)$$

$$= \begin{cases} \geq \frac{1}{2}\left(\psi_a(C) + K_b(x,C)\right) \geq \frac{1}{2}\psi_a(C); & x \in A \\ \geq \frac{1}{2}\left(K_a(x,C) + \psi_b(C)\right) \geq \frac{1}{2}\psi_b(C); & x \in B \end{cases}$$

$$\geq \text{mín}\left\{\frac{1}{2}\psi_a(C), \frac{1}{2}\psi_b(C)\right\}$$

   Al ser ψ_a y ψ_b son medidas de irreducibilidad maximales y $C \in B^+(X)$, sucede que $min\{\frac{1}{2}\psi_a(C), \frac{1}{2}\psi_b(C)\} > 0$.

Sea $\delta = min\{\frac{1}{2}\psi_a(C), \frac{1}{2}\psi_b(C)\} > 0$,

$$K_c(x, C) \geq \delta, \text{ para toda } x \in A \cup B, \text{ es decir } A \cup B \overset{c}{\rightsquigarrow} C.$$

Por la Proposición anterior, $A \cup B$ es petite.

3. Como ψ es una medida maximal de irreducibilidad, el Teorema 13 nos dice que existe $B \in B^+(X)$ ψ_b-pequeño, es decir,

$$K_b(x, A) \geq 1_B^y \psi_b(A), \text{ para toda } x \in X \text{ y para todo } A \in B(X).$$

Por la parte 1, podemos tomar a ψ_b como medida maximal de irreducibilidad, y como $B \in B^+(X)$,

$$K_{a_{1/2}}(x, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^n(x, B)}{2^{n+1}} > 0, \text{ para toda } x \in X$$

Sean $x \in X$ y $A \in B(X)$,

$$K_{b*a_{1/2}}(x,A)$$

$$= \int_X K_b(y, A) K_{a_{1/2}}(x, dy) \geq \int_B K_b(y, A) K_{a_{1/2}}(x, dy)$$

$$\geq \int_B \psi_b(A) K_{a_{1/2}} = \psi_b(A) \int_B K_{a_{1/2}}(x, dy)$$

$$= \psi_b(A) K_{a_{1/2}}(x, B)$$

Sean $s(x) = K_{a_{1/2}}(x, B)$, $c = b * a_{1/2}$ y $\psi_c = \psi_b$, entonces

$$K_c(x, A) \geq s(x)\psi_c(A), \text{ para toda } x \in X \text{ y para todo } A \in B(X),$$

que es el resultado deseado.

Sea $C_n = \{x \in X | s(x) \geq 1/n\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una suseción creciente de elementos de $B(X)$.

Como $B \in B^+(X)$ y $s(x) = K_{a_{1/2}}(x, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^n(x,B)}{2^{n+1}}$, sucede que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $x \in C_n$ y $A \in B(X)$,

$$K_c(x,B) \geq s(x)\psi_c(A) \geq \frac{1}{n}\psi_c(A);$$

Sea $\psi_c^n = \frac{1}{n}\psi_c$, que, al ser múltiplo de una medida maximal de irreducibilidad, también es medida maximal de maximal irreducibilidad, y con ello,

$$K_c(x,A) \geq \psi_c^n(A), \text{ para toda } x \in C_n \text{ y para todo } A \in B(X),$$

es decir, C_n es ψ_c^n-petite.

□

El siguiente Teorema es sorprendente: a cualquier petite lo podemos considerar con una Distribución de muestra uniforme o geométrica. Esto es útil en el análisis de conjuntos petites, al ser estas Distribuciones más trabajables, ya que tienen momentos de todos los órdenes, entre otras cosas.

Teorema 19. *Sean Φ una Cadena con medida maximal de irreducibilidad ψ y $C \in B(X)$ ψ_c-petite, con ψ_c una medida de irreducibilidad maximal. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar a c como uniforme; o, para toda $0 < \epsilon < 1$, como geométrica de parámetro ϵ.*

Demostración. Sea $A \in B(X)^+$ ν_n-petite,

$$K_c(x,A) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)P^m(x,A) \geq \psi_c(A) > 0, \text{ para toda } x \in C,$$

entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=0}^{N} c(n)P^m(x,A) \geq \frac{1}{2}\psi_c(A)$, para toda $x \in C$. Dado que $P^m(x,A) \geq c(m)P^m(x,A)$, para toda m,

$$\sum_{m=0}^{N} P^m(x,A) \geq \frac{1}{2}\psi_c(A), \text{ para toda } x \in C.$$

Sean $x \in C$, $B \in B(X)$,

$$\sum_{m=1}^{n+N} P^m(x,B)$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} P^m(x,B) + \sum_{m=n}^{n+N} P^m(x,B) \geq \sum_{m=n}^{n+N} P^m(x,B)$$

$$= \sum_{m=0}^{N} P^{n+m}(x,B) = \sum_{m=0}^{N} \int_X P^n(y,B) P^m(x,dy)$$

$$= \int_X P^m(y,B) \left(\sum_{m=0}^{N} P^m(x,dy) \right) \geq \int_A P^n(y,B) \left(\sum_{m=0}^{N} P^m(x,dy) \right)$$

$$\geq \int_A \nu_n(B) \left(\sum_{m=0}^{N} P^n(x,dy) \right) = \nu_n(B) \int_A \left(\sum_{m=0}^{N} P^m(x,dy) \right)$$

$$= \nu_n(B) \sum_{m=0}^{N} P^m(x,A) \geq \frac{1}{2} \nu_n(B) \psi_c(A),$$

de modo que

$$\sum_{m=1}^{n+N} P^m(x,B) \geq \frac{1}{2} \psi_c(A) \nu_n(B), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } B \in B(X)$$

1. Para la Distribución uniforme.

   Sean $b(m) = \frac{1}{n+N}$, para toda $m \in \{1, \ldots, n+N\}$ y cero en otro caso; $x \in C$ y $B \in B(X)$,

$$K_b(x,B)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} b(m) P^m(x,B) = \sum_{m=1}^{n+N} \frac{1}{n+N} P^m(x,B)$$

$$= \frac{1}{n+N} \sum_{m=1}^{n+N} P^m(x,B) \geq \frac{1}{2(n+N)} \psi_c(A) \nu_n(B)$$

Sea $\nu_b(\cdot) = \frac{1}{2(n+N)}\psi_c(A)\nu_n(\cdot)$, claramente una medida no trivial,

$$K_b(x, B) \geq \nu_b(B), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } B \in B(X),$$

es decir, C es ν_b-petite.

2. Para la Distribución geométrica.

Sean $0 < \epsilon < 1$ y $k = n+N$, definimos $a_k(m) = 1/k$, para toda $1 \leq m \leq k$. Sea $c = min\{a_\epsilon(1), \ldots, a_\epsilon(k)\}$, entonces $a_\epsilon(m) \geq c \geq 0$, y dado que $1 \geq a_k(m) \geq 0$, sucede que $a_\epsilon(m) \geq ca_k(m)$, para toda $1 \leq m \leq k$.

Sea $a_k(m) = 0$, para toda $m \geq k+1$, entonces, por esto y por lo anterior, $a_\epsilon(m) \geq ca_k(m)$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Tomemos $x \in C$ y $B \in B(X)$,

$$\begin{aligned}
&K_{a_\epsilon}(x,B) \\
&\qquad = \sum_{m=0}^{\infty} a_\epsilon(n)P^m(x, B) \geq \sum_{m=1}^{\infty} a_\epsilon(m)P^m(x, B) \\
&\qquad \geq \sum_{m=1}^{\infty} ca_k(m)P^m(x, B) = c\sum_{m=1}^{\infty} a_k(m)P^m(x, B) \\
&\qquad = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k}P^m(x, B) = \frac{c}{n+N}\sum_{m=1}^{n+N} P^n(x, B) \\
&\qquad \geq \frac{c}{2(n+N)}\psi_c(A)\nu_n(B)
\end{aligned}$$

Sea $\nu_{a_\epsilon} = \frac{c}{2(n+N)}\psi_c(A)\nu_n(B)$, medida no trivial, entonces

$$K_{a_\epsilon}(x, B) \geq \nu_{a_\epsilon}(B), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } B \in B(X),$$

es decir, C es ν_{a_ϵ}-petite.

$\square$

4.1.1. Aperiodicidad y conjuntos petite

Los petites son una generalización de los conjuntos pequeños. Pero, ¿cúando un conjunto petite es pequeño? Si la Cadena es aperiódica y tiene alguna medida de irreducibilidad, podemos garantizarlo, es decir, los conjuntos petites coinciden con los pequeños.

Teorema 20. *Sea Φ con medida de irreducibilidad maximal ψ. Si la Cadena es aperiódica, entonces todo petite es pequeño.*

Demostración. Sean $A \in B(X)$ ψ_a-petite, con ψ_a medida de irreducibilidad maximal; $C \in B^+(X)$ ν_M-pequeño, tal que $\nu_M(C) > 0$ y

$$E_C = \{n \in \mathbb{N} |\ \text{C es } \nu_n \text{ pequeño , con } \nu_n = \delta_n \nu_M, \text{ para algún } \delta_n > 0\}$$

Al ser la Cadena aperiódica, $1 = m.c.d.(E_C)$. Dado que E_C es cerrado bajo adición y que $\psi_a(C) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ par, tal que, para toda $n \geq \frac{N}{2} - 1$, sucede que $n \in E_C$ y $\sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{\infty} a(n) < \frac{1}{2}\psi_a(C)$.

Ya que $n \in E_C$, para todo $\frac{N}{2} - 1 \leq n \leq N$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$P^n(x, B) \geq \delta_n \nu_M(B), \text{ para toda } x \in C \text{ y para todo } B \in B(X).$$

Sea $\delta = min\{\delta_n | \frac{N}{2} - 1 \leq n \leq N\} > 0$,

$$P^n(x, B) \geq \delta \nu_M(B), \text{ para toda } x \in C, \text{ para todo } B \in B(X) \text{ y para toda } \frac{N}{2} - 1 \leq n \leq N.$$

Sean $x \in A$ y $B \in B(X)$,

$P^N(x,B)$

$$\geq P^N(x, B) \sum_{n=0}^{N/2} a(n) = \sum_{n=0}^{N/2} a(n) P^N(x, B) = \sum_{n=0}^{N/2} a(n) \int_X P^{N-n}(y, B) P^n(x, dy)$$

$$\geq \sum_{n=0}^{N/2} a(n) \int_C P^{N-n}(y, B) P^n(x, dy) \geq \sum_{n=0}^{N/2} a(n) \int_C \delta \nu_M(B) P^n(x, dy)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2} \delta a(n) \nu_M(B) P^n(x, C) = \delta \nu_M(B) \sum_{n=0}^{N/2} a(n) P^n(x, C)$$

Como A es ψ_a-petite,

$$K_a(x,C)$$

$$= \sum_{n=N/2+1}^{\infty} a(n)P^n(x,C) + \sum_{n=0}^{N/2} a(n)P^n(x,C) \geq \psi_a(C);$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{N/2} a(n)P^n(x,C)$$

$$\geq \psi_a(C) - \sum_{n=N/2+1}^{\infty} a(n)P^n(x,C) \geq \psi_a(C) - \sum_{n=N/2+1}^{\infty} a(n)$$

$$\geq \psi_a(C) - \frac{1}{2}\psi_a(C) = \frac{1}{2}\psi_a(C)$$

Sea $\nu_N = \frac{1}{2}\delta\psi_a(C)\nu_M$, dado que

$$P^N(x,B) \geq \delta\nu_M(B)\sum_{n=0}^{N/2} a(n)P^n(x,C), \text{ para toda } x \in A,$$

sucede que

$$P^N(x,B) \geq \nu_N(B), \text{ para toda } x \in A \text{ y para todo } B \in B(X),$$

es decir, A es ν_N-pequeño.

□

4.2. Clasificación de estados

Primero damos una clasificación de estados. Lo más natural es estudiar la variable aleatoria η_A, el número esperado de visitas al estado A.

Definición 33. *(Transitoriedad uniforme y recurrencia) Sea $A \in B(X)$.*

1. *Decimos que A es uniformemente transitorio si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $E_x(\eta_A) \leq M$, para toda $x \in A$.*
2. *Decimos que A es recurrente si, y sólo si, $E_x(\eta_A) = \infty$, para toda $x \in A$.*

Damos dos descomposiciones de las Probabilidades de transición en n pasos, que usamos en lo que resta de este Capítulo. Para esto, recuerdese que las Probabilidades taboo están dadas por

$$P_A^n(x,B) = P_x(\phi_n \in B, \tau_A \geq n) \quad \text{y} \quad P_A^0(x,B) = 0$$

Proposición 37. *Sean $A, B \in B(X)$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

1. *Descomposición de la primera entrada*

$$P^n(x,B) = P_A^n(x,B) + \sum_{m=1}^{n-1} \int_A P^{n-m}(y,B) P_A^m(x,dy)$$

2. *Descomposición de la última salida*

$$P^n(x,B) = P_A^n(x,B) + \sum_{m=1}^{n-1} \int_A P_A^{n-m}(y,B) P^m(x,dy)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\{\phi_n \in B\} \\
&\qquad = \{\phi_n \in B, \tau_A \geq n\} \cup \{\phi_n \in B, \tau_A < n\} \\
&\qquad = \{\phi_n \in B, \tau_A \geq n\} \bigcup \left(\bigcup_{m=1}^{n-1} \{\phi_n \in B, \tau_A = m\} \right),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
P^n(x,B) &= P_A^n(x,B) + P_x\left(\bigcup_{m=1}^{n-1} \{\phi_n \in B, \tau_A = m\} \right) \\
&= P_A^n(x,B) + \sum_{m=1}^{n-1} P_x(\phi_n \in B, \tau_A = m)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

1. Intuitivamente, la ecuación de la primera entrada es muy clara: llegamos en n pasos a B evadiendo a A en esos n pasos, o llegamos primero a A en algún paso anterior a n.

   Sea $1 \leq m \leq n-1$, $\tau_A = m$ si, y sólo si, $\phi_1, \ldots, \phi_{m-1} \in A^c$ y $\phi_m \in A$; así

$$P_x(\phi_n \in B, \tau_A = m)$$

$$= P(\phi_1 \in A^c, \ldots, \phi_{m-1} \in A^c, \phi_m \in A, \ldots, \phi_n \in B)$$

$$= \int_A P^{n-m}(y, B) P_A^m(x, dy),$$

para toda $1 \leq m \leq n-1$. Substituyendo lo anterior en la ecuación (4.1) tenemos que

$$P^n(x, B) = P_A^n(x, B) + \sum_{m=1}^{n-1} \int_A P^{n-j}(y, B) P_A^j(x, dy)$$

2. Para $1 \leq l \leq n-1$, definimos

$$B_l = \{\phi_1 \in X, \ldots, \phi_{l-1} \in X, \phi_l \in A, \phi_{l+1} \in A^c, \ldots, \phi_{n-1} \in A^c\},$$

por demostrar

$$\bigcup_{m=1}^{n-1} \{\tau_A = m\} = \bigcup_{l=1}^{n-1} B_l$$

Sea $w \in \{\tau_A = m\}$, entonces $\phi_1(w), \ldots, \phi_{m-1}(w) \in A^c$, $\phi_m(w) \in A$ y $\phi_{m+1}(w), \ldots, \phi_{n-1}(w) \in X$, en particular, $\phi_i(w), \ldots, \phi_{m-1}(w) \in X$. Tenemos los siguientes casos

(1) $\phi_m(w) \in A$ y $\phi_{m+1}(w), \ldots, \phi_{n-1} \in A^c$, es decir, $w \in B_m$;

(2) $\phi_m(w), \phi_{m+1}(w) \in A$, y $\phi_{m+2}(w), \ldots, \phi_{n-1} \in A^c$, es decir, $w \in B_{m+1}$;

$\vdots$

(n-m-1) $\phi_m(w), \ldots, \phi_{n-1}(w) \in A$, es decir, $w \in B_{n-1}$;

así, $w \in \bigcup_{l=1}^{n-1} B_l$, para toda $w \in \{\tau_A = m\}$ y para toda $1 \leq m \leq n-1$; por lo tanto

$$\bigcup_{m=1}^{n-1} \{\tau_A = m\} \subseteq \bigcup_{l=1}^{n-1} B_l$$

Sea $w \in B_l$, en particular, $\phi_l(w) \in A$, es decir, $1 \leq \tau_A(w) \leq l$, de modo que $w \in \bigcup_{m=1}^{n-1}\{\tau_A = m\}$, para toda $w \in B_l$ y para toda $1 \leq l \leq n-1$; por lo tanto

$$\bigcup_{l=1}^{n-1} B_l \subseteq \bigcup_{m=1}^{n-1}\{\tau_A = m\}$$

Concluimos que

$$\bigcup_{m=1}^{n-1}\{\tau_A = m\} = \bigcup_{l=1}^{n-1} B_l$$

Por lo anterior y por la ecuación (4.1),

$$\begin{aligned} &P^n(x,B) \\ &\qquad = P_A^n(x,B) + P_x\left[\left(\bigcup_{l=1}^{n-1} B_l\right), \phi_n \in B\right] \\ &\qquad = P_A^n(x,B) + \sum_{l=1}^{n-1} P_x(B_l, \phi_n \in B); \end{aligned}$$

Sea $l \in \{1,\dots,n-1\}$,

$$\begin{aligned} &P_x(B_l, \phi_n \in B) \\ &\qquad = P_x(\phi_1 \in X, \dots, \phi_{l-1} \in X, \phi_l \in A, \phi_{l+1} \in A^c, \dots, \phi_{n-1} \in A^c, \phi_n \in B) \\ &\qquad = \int_A P_A^{n-l}(y,B) P^l(x,dy) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P^n(x,B) = P_A^n(x,B) + \sum_{l=1}^{n-1} \int_A P_A^{n-l}(y,B) P^n(x,dy)$$

$\square$

La clasificación de estados se hace mediante la función

$$E_x(\eta_B) = U(x,B) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,B),$$

de modo que nos auxiliaremos con la función generadora de las suseciones $\{P^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{P_A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$U^z(x,B) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,B)z^n \quad \text{y} \quad U_A^z(x,B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(x,B)z^n, \text{ para toda } |z|<1,$$

respectivamente. Además, tienen la propiedad límite

$$U(x,B) = \lim_{z\nearrow 1} U^z(x,B) \quad \text{y} \quad U_A(x,B) = \lim_{z\nearrow 1} U_A^z(x,B)$$

Por la Proposición 9, $L(x,A) = P_x(\tau_A < \infty)$ satisface

$$L(x,A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(x,A) = \lim_{z\nearrow 1} U_A^z(x,A) = \lim_{z\nearrow 1} L^z(x,A).$$

Proposición 38. *Sean $x \in X$ y $A, B \in B(X)$. Entonces*

1.

$$U^z(x,B) = U_A^z(x,B) + \int_A U^z(y,B)U_A^z(x,dy)$$

$$U(x,B) = U_A(x,B) + \int_A U(y,B)U_A(x,dy)$$

2.

$$U^z(x,B) = U_A^z(x,B) + \int_A U_A^z(y,B)U^z(x,dy)$$

$$U(x,B) = U_A(x,B) + \int_A U_A(y,B)U(x,dy)$$

Demostración. 1. multiplicando por z^n la ecuación de la descomposición de la primera entrada,

$$P^n(x,B)z^n = P_A^n(x,B)z^n + \sum_{m=1}^{n-1} \int_A P^{n-m}(y,B)z^n P_A^m(x,dy), \text{ para toda } n,$$

y sumando sobre todo $\mathbb{N}$

$$U^z(x,B) = U_A^z(x,B) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} \int_A (P^{n-m}(y,B)z^n) P_A^m(x,dy) \qquad (4.2)$$

Ahora,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\int_A (P^{n-m}(y,B)z^n)P_A^m(x,dy) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_A (P^{n-m}(x,B)z^n)P_A^m(x,dy)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_A (P^n(y,B)z^{n+m})P_A^m(x,dy) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_A (P^n(y,B)z^n)(P_A^m(x,dy)z^m)$$

$$= \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^n(y,B)z^n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} P_A^m(x,dy)z^m\right) = \int_A U^z(y,B)U_A^z(x,dy).$$

Substituyendo lo anterior en la ecuación (4.2),

$$U^z(x,B) = U_A^z(x,B) + \int_A U^z(y,B)U_A^z(x,dy);$$

además, haciendo $z \nearrow 1$, por el Teorema de Convergencia monótona, sucede que

$$U(x,B) = U_A(x,B) + \int_A U(y,B)U_A(x,dy);$$

2. Usando la descomposición de la última salida y procediendo análogamente a lo anterior, obtenemos el resultado.

□

4.3. Dicotomía en Cadenas con átomos

Antes de saltar a Cadenas generales, comenzaremos a dar criterios de dicotomía para Cadenas con átomos y aprovechar las propiedades de este . Si la Cadena admite un átomo $\hat{x}$ y $x \in \hat{x}$, $P^n(x,B)$, $L(x,A)$ y $U(x,A)$ no dependen de x, y los denotamos como $P^n(\hat{x},B)$, $L(\hat{x},B)$ y $U(\hat{x},B)$.

Teorema 21. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ, y supongamos que admite un átomo accesible $\hat{x}$. Entonces:*

1. *Si $\hat{x}$ es recurrente, todo $B^+(X)$ lo es.*

2. *Si $\hat{x}$ es transitorio, existe una cubierta numerable de X de conjuntos uniformemente transitorios.*

Demostración. 1. Supongamos que $\hat{x}$ es recurrente, es decir,

$$E_{\hat{x}}[\eta_{\hat{x}}] = U(\hat{x}, \hat{x}) = \infty$$

Sean $A \in B^+(X)$, y $x \in A$; como $\hat{x} \in B^+(X)$, existen $m, k \in \mathbb{N}$ tales que $P^m(\hat{x}, A) > 0$ y $P^k(x, \hat{x}) > 0$. Ahora,

$E_x[\eta_A]$

$$= U(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{m+k+n}(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^m(z, A) P^{k+n}(x, dz)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\hat{x}} P^m(z, A) P^{k+n}(x, dz) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\hat{x}} P^m(\hat{x}, A) P^{k+n}(x, dz)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P^m(\hat{x}, A) P^{k+n}(x, \hat{x}) = P^m(\hat{x}, A) \sum_{n=1}^{\infty} P^{k+n}(x, \hat{x})$$

$$= P^m(\hat{x}, A) \sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^n(y, \hat{x}) P^k(x, dy) \geq P^m(\hat{x}, A) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\hat{x}} P^n(y, \hat{x}) P^k(x, dy)$$

$$= P^m(\hat{x}, A) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\hat{x}} P^n(\hat{x}, \hat{x}) P^k(x, dy)$$

$$= P^m(\hat{x}, A) \sum_{n=1}^{\infty} (P^n(\hat{x}, \hat{x}) P^k(x, \hat{x})) = P^m(\hat{x}, A) P^k(x, \hat{x}) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(\hat{x}, \hat{x})$$

$$= P^m(\hat{x}, A) P^k(x, \hat{x}) U(\hat{x}, \hat{x})$$

Por hipótesis, $U(\hat{x}, \hat{x}) = \infty$, y como $P^m(\hat{x}, A), P^k(x, \hat{x}) > 0$, sucede que $P^m(\hat{x}, A) P^k(x, \hat{x}) U(\hat{x}, \hat{x}) = \infty$. Por lo tanto, $E_x[\eta_A] = \infty$, para toda $x \in A$, es decir, A es recurrente, y A fue un conjunto arbitrario en $B^+(X)$.

2. Supongamos $\hat{x}$ es uniformemente transitorio, es decir, $E_{\hat{x}}[\eta_{\hat{x}}] < \infty$. Por la Proposición 38, con $A = B = \hat{x}$,

$$U(\hat{x}, \hat{x}) = U_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{x}) + \int_{\hat{x}} U(y, \hat{x}) U_{\hat{x}}(\hat{x}, dy) = L(\hat{x}, \hat{x}) + \int_{\hat{x}} U(\hat{x}, \hat{x}) U_{\hat{x}}(\hat{x}, dy)$$

$$= L(\hat{x},\hat{x}) + U(\hat{x},\hat{x})U_{\hat{x}}(\hat{x},\hat{x}) = L(\hat{x},\hat{x}) + U(\hat{x},\hat{x})L(\hat{x},\hat{x}),$$

y factorizando

$$U(\hat{x},\hat{x})[1 - L(\hat{x},\hat{x})] = L(\hat{x},\hat{x}) \tag{4.3}$$

Ya que $\hat{x} \in B^+(X)$, $L(\hat{x},\hat{x}) > 0$; sumado esto a la ecuación (4.3) sucede que $U(\hat{x},\hat{x})[1 - L(\hat{x},\hat{x})] > 0$, de modo que $1 - L(\hat{x},\hat{x}) > 0$, es decir, $1 - L(\hat{x},\hat{x}) \neq 0$.

Sea $x \in X$, por la Proposición (38), tomando $A = B = \hat{x}$, y procediendo análogamente a lo que hicimos para obtener la ecuación (4.3), sucede que

$$U(x,\hat{x})[1 - L(\hat{x},\hat{x})] = L(x,\hat{x}) = P_x(\tau_{\hat{x}} < \infty) \leq 1,$$

y como $1 - L(\hat{x},\hat{x}) \neq 0$,

$$U(x,\hat{x}) \leq \frac{1}{1 - L(\hat{x},\hat{x})} \in \mathbb{R}, \text{ para todo } x \in X, \tag{4.4}$$

Sea $\hat{x}_n = \{y \in X | \sum_{m=1}^{n} P^n(y,\hat{x}) \geq 1/n\}$, dado que $\hat{x} \in B(X)$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n$. Veamos que esta cubierta es la requerida. Sean $x \in X$ y $i, j \in \mathbb{N}$,

$$U(x,\hat{x})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,\hat{x}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{n+j}(x,\hat{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^j(y,\hat{x})P^n(x,dy)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\hat{x}_k} P^j(y,\hat{x})P^n(x,dy) = \int_{\hat{x}_k} P^j(y,\hat{x}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,dy) \right)$$

$$= \int_{\hat{x}_k} P^j(y,\hat{x})U(x,dy),$$

es decir,

$$U(x,\hat{x}) \geq \int_{\hat{x}_k} P^j(y,\hat{x})U(x,dy), \text{ para toda } x \in X \text{ y para todos } j,k \in \mathbb{N}.$$

Tomamos $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$, fijas, y substituyendo en la ecuáción anterior,

$$kU(x,\hat{x}) =$$

$$\sum_{j=1}^{k} U(x,\hat{x}) \geq \sum_{n=1}^{k} \int_{\hat{x}_k} P^j(y,\hat{x})U(x,dy)$$

$$= \int_{\hat{x}_k} \left(\sum_{j=1}^{k} P^j(y,\hat{x}) \right) U(x,dy) \geq \int_{\hat{x}_k} 1/kU(x,dy)$$

$$= 1/kU(x,\hat{x}_k);$$

así, $kU(x,\hat{x}) \geq 1/kU(x,\hat{x}_k)$, es decir, $U(x,\hat{x}_k) \geq 1/k^2U(x,\hat{x})$. Como $U(x,\hat{x}) \leq \frac{1}{1-L(\hat{x},\hat{x})} < \infty$, entonces

$$U(x,\hat{x}_k) \leq \frac{1}{j^2[1-L(\hat{x},\hat{x})]} < \infty, \text{ para toda } x \in \hat{x}_k;$$

de modo que $\hat{x}_k$ es uniformemente transitorio, para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto X tiene una cubierta numerable de conjuntos uniformemente transitorios.

□

4.4. Dicotomía en Cadenas irreducibles

Frecuentemente encontramos conjuntos que no son uniformemente transotorios, pero que pueden ser cubiertos por una familia numerable de conjuntos uniformemente transitorios, como sucede con el espacio de estados en las Cadenas con átomos.

Definición 34. *Sea $A \in B(X)$. Decimos que A es transitorio si, y sólo si, puede ser cubierto por una familia numerable de conjuntos uniformemente transitorios.*

La definición anterior no es tan restrictiva como pedir que un conjunto sea uniformemente transitorio, y nos da una idea clara de como se comporta la Cadena en estos conjuntos: si comienza en un transitorio, se mueve erráticamente en él, visitando sólo un número finito de veces cada elemento de la cubierta.

Nuestro objetivo no es sólo clasificar conjuntos en una Cadena de Markov, sino a ella misma. Nos limitares a Cadenas con las que nos es fácil trabajar: las irreducibles.

Definición 35. *Supongamos que Φ es una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ.*

1. *Decimos que Φ es recurrente si, y sólo si, para todo $A \in B^+(X)$, y para toda $x \in X$, $E_x[\eta_A] = \infty$.*

2. *Decimos que Φ es transitoria si X es transitorio.*

El primer paso es ver que, si la Cadena es fuertemente aperiódica, entonces la Cadena original y la de ruptura tienen clasificación mutuamente consistente.

Proposición 39. *Sea Φ una Cadena de Markov, fuertemente aperiódica y con medida maximal de irreducibilidad ψ. Entonces Φ y $\hat{\Phi}$ son ambas recurrentes o transitorias.*

Demostración. Como Φ es fuertemente aperiódica, existe la Cadena de ruptura $\hat{\Phi}$. Del Teorema 12 sabemos que para cualesquiera $A \in B(X)$, $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\hat{X}} \hat{P}^n(y_i, A_0 \cup A_1)\delta_x^*(dy_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^n(y, A)\delta_x(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A). \quad (4.5)$$

Como Φ es fuertemente aperiódica, se cumple la condición de minorización para alguna medida μ, algún $C \in B(X)$ tal que $\mu(C) = 1$ y algún número $\delta > 0$. Dado que $\mu_{/C}$ es una medida de irreducilibilidad, tenemos que $\psi(C) > 0$. De nuevo, gracias al Teorema 12, tenemos que $\hat{\Phi}$ es ψ^*-irreducible.

Supongamos $\hat{\Phi}$ recurrente. Tomamos $B \in B^+(X)$, entonces $\psi * (B_0) = \psi(B \cap C)[1-\delta] + \psi(B \cap C^c) > 0$. Al ser $\hat{\Phi}$ ψ^*-irreducible, B_0 es recurrente en $\hat{\Phi}$; es decir,

$$\hat{U}(x_0, B_o) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}^n(x_0, B_0) = \infty, \text{ para toda } x_0 \in B_0.$$

Ahora,

$$\delta_x^*(B_0) = \delta_x(B \cap C)[1-\delta] + \delta_x(B \cap C^c),$$

de modo que

$$\int_{\hat{X}} \hat{P}^n(y_i, B_0)\delta_x^*(dy_i)$$

$$\geq \int_{B_0} \hat{P}^n(y_0, B_0)[\delta_x(dy_0)] = \int_{B_0} \hat{P}^n(y_0, B_0)[\delta_x(dy \cap C)[1-\delta] + \delta_x(dy \cap C^c)]$$

$$= [1-\delta]\hat{P}^n(x_0, B_0)\delta_C(x) + \hat{P}^n(x_0, B_0)\delta_{C^c}(x)$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\hat{X}}\hat{P}^n(y_i, B_0\cup B_1)\delta_x^*(dy_i) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\hat{P}^n(y_0, B_0)\delta_x*(dy_0)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty}\Big[[1-\delta]\hat{P}^n(x_0, B_0)\delta_C(x) + \hat{P}^n(x_0, B_0)\delta_{C^c}(x)\Big] = \infty,$$

para toda $x \in B$. De la ecuación (4.5)

$$U(x, B) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, B) = \infty, \text{ para toda } x \in B,$$

es decir, B es recurrente, para todo $B \in B^+(X)$. Por lo tanto Φ es recurrente.

Supongamos $\hat{\Phi}$ es transitoria, entonces existe $\{\hat{A}^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B^+(\hat{X})$ cubierta de uniformemente transitorios para $\hat{X}$. Tomamos los conjuntos A_0^n, cubierta de X_0 y partiendo de la ecuación (4.5), tenemos el resultado.

□

Tenemos un Lema que conecta a todas las Cadenas con su resolvente, K_{a_ϵ}.

Lema 8. *Sea* $0 < \epsilon < 1$. *Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{a_\epsilon}^n = \frac{1-\epsilon}{\epsilon}\sum_{n=0}^{\infty} P^n$$

Demostración. Para la prueba, utilizaremos los siguientes dos hechos: sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$, entonces:

1.
$$Card(\{(k_1,\ldots,k_n)\in(\overline{\mathbb{N}})^n | k_1+\ldots+k_n = k\} = \binom{n+k-1}{k} \tag{4.6}$$

2.
$$\sum_{r=1}^{k}\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+k}{k} \tag{4.7}$$

Sean $x \in X$ y $A \in B(X)$, por la definición de los Núcleos de transición y las ecuaciones generalizadas de Chapman-Kolmogorov (Lema 1)

$$K_{a_\epsilon}^n(x, A) = K_{a_\epsilon^{n*}}(x, A),$$

así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{a_\epsilon}^n(x,A)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} K_{a_\epsilon^{n*}}(x,A) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_\epsilon^{n*}(k)P^k(x,A) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_\epsilon^{n*}(k)P^k(x,A)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_\epsilon^{n*}(k)\right)P^k(x,A),$$

para cualesquiera $x \in X$ y $A \in B(X)$. Sea

$$b = \left\{ b(k) | k \in \overline{\mathbb{N}}, \quad \text{y} \quad b(k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_\epsilon^{n*}(k) \right\},$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{a_\epsilon}^n = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)P^k. \tag{4.8}$$

Nos auxiliamos con las funciones generadoras de las sucesiones b y a_ϵ, $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)z^k$ y $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_\epsilon(k)z^k$, respectivamente. Ahora,

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_\epsilon(k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\epsilon)\epsilon^k z^k = (1-\epsilon)\sum_{k=0}^{\infty}(\epsilon z)^k = \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z}.$$

de modo que

$$(A(z))^n = \left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z}\right)^n \tag{4.9}$$

Por otro lado, sea $n \in \mathbb{N}$,

$(A(z))^n$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(1-\epsilon)(\epsilon z)^k\right)^n = (1-\epsilon)^n \left(\sum_{k=0}^{\infty}(\epsilon z)^k\right)^n$$

$$= (1-\epsilon)^n \left(\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in(\overline{\mathbb{N}})^n} (\epsilon z)^{k_1+\ldots+k_n}\right)$$

$$= (1-\epsilon)^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\{(k_1,\ldots,k_n)\in(\overline{N})^m/k_1+\ldots+k_n=k\}} (\epsilon z)^k\right)$$

$$= (1-\epsilon)^n \sum_{p=0}^{\infty} \left(Card(\{(k_1,\ldots,k_n)\in(\overline{\mathbb{N}}\})^n | k_1+\ldots+k_n=k\})(\epsilon z)^k\right)$$

$$= (1-\epsilon)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}(\epsilon z)^k, \text{ para toda } n\in\mathbb{N};$$

Y, con ello,

$\sum_{n=1}^{\infty}(A(z))^n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left((1-\epsilon)^n \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(\epsilon z)^k\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(1-\epsilon)^n\binom{n+k-1}{k}(\epsilon z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon)^n\epsilon^k\binom{n+k-1}{k}(\epsilon z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^p\left(\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^k(1-\epsilon)^n\binom{n+k-1}{k}\right);$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A(z))^n = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^k (1-\epsilon)^n \binom{n+k-1}{k} \right) \tag{4.10}$$

Sea $k \in \overline{\mathbb{N}}$, veamos que $a_\epsilon^{n*}(k) = \epsilon^k (1-\epsilon)^n \binom{n+k-1}{k}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$

$$a_\epsilon^{1*}(k) = a_\epsilon(k) = \epsilon^k(1-\epsilon) = \epsilon^k(1-\epsilon)\frac{(1+k-1)!}{(1-1)!k!} = \epsilon^k(1-\epsilon)\binom{1-k-1}{k}$$

Supongamos válido para $1, \ldots, n$, es decir,

$$a_\epsilon^{r*}(k) = \epsilon^k(1-\epsilon)^n \binom{n+k-1}{k}, \text{ para toda } r \in \{1, \ldots, n\};$$

para $n+1$, por la ecuación (4.7)

$$a_\epsilon^{(n+1)*}(k) = \sum_{r=1}^{k} a_\epsilon(k-r) a_\epsilon^{n*}(r) = \sum_{r=1}^{k} \epsilon^{k-r}(1-\epsilon)\epsilon^r(1-\epsilon)^n \binom{n-r-1}{r}$$

$$= \epsilon^k(1-\epsilon)^{n+1} \sum_{r=1}^{k} \binom{n+r-1}{r} = \epsilon^k(1-\epsilon)^{n+1}\binom{n+k}{k}$$

Por lo tanto

$$a_\epsilon^{n*}(k) = \epsilon^k(1-\epsilon)^n \binom{n+k-1}{k}, \text{ para cualesquiera } n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \overline{\mathbb{N}}.$$

Substituyendo lo anterior en la ecuación (4.10),

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A(z))^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^k(1-\epsilon)^n \binom{n+k-1}{k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_\epsilon^{n*}(k) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b(k) z^k;$$

así,

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A(z))^n. \tag{4.11}$$

Por otro lado, de la ecuación (4.9),

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A(z))^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z} \right)^n = \left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z} \right)^n = \left(\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon z}} \right)$$

$$= \frac{(1-\epsilon)}{(1-\epsilon z)} \frac{(1-\epsilon z)}{(-\epsilon z + \epsilon)} = \frac{1-\epsilon}{\epsilon(1-z)} = \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) \frac{1}{1-z} = \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) z^k$$

Finalmente, substituyendo en la ecuación (4.11)

$$B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) z^k,$$

por unicidad de las series de potencia tenemos que $b(k) = \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right)$, para toda $k \in \overline{\mathbb{N}}$. De la ecuación (4.8) concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{a_\epsilon}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) P^n$$

□

Lema 9. *Sean* $0 < \epsilon < 1$ *y* Φ *una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad* ψ*. Entonces* $B^+(X) \subseteq B_\epsilon^+(X)$*.*

Demostración. Veamos que ψ es medida de irreducibilidad para Φ_{a_ϵ}. Sea $A \in B(X)$ tal que $\psi(A) > 0$, por hipótesis

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0, \text{ para toda } x \in X.$$

Sea $x \in X$, por el Lema 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{a_\epsilon}^n(x, A) = \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A) \geq \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) > 0,$$

es decir, ψ es medida de irreducibilidad para Φ_{a_ϵ}; por lo tanto $B^+(X) \subseteq B^+_\epsilon(X)$. $\square$

Teorema 22. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ. Entonces Φ es recurrente o transitoria*

Demostración. Supongamos Φ_{a_ϵ} es transitoria, entonces existen $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{M_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_m$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n_{a_\epsilon}(x, A_m) \leq M_m, \text{ para toda } m \in \mathbb{N} \text{ y para toda } x \in A_m$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $x \in A_m$, por el Lema 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,A_m)$$

$$= \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} K^n_{a_\epsilon}(x, A_m) - 1^x_{A_m}\right) = \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} K^n_{a_\epsilon}(x, A_m) - 1\right)$$

$$\leq \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)(M_m - 1);$$

es decir, Φ es transitoria.

Supongamos Φ_{a_ϵ} es recurrente. Sea $A \in B^+(X)$, por el Lema 9, $A \in B^+_\epsilon(X)$; al ser Φ_{a_ϵ} recurrente, sucede que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n_{a_\epsilon}(x, A) = \infty, \text{ para toda } x \in X;$$

Sea $x \in X$, por el Lema 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) = \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} K^n_{a_\epsilon}(x, A) - 1^x_A\right) = \infty,$$

por lo tanto Φ es recurrente.

Por la Proposición 32, Φ_{a_ϵ} es fuertemente aperiódica, y la Proposición 39 nos asegura que K_{a_ϵ} es transitoria o recurrente.

Si Φ no es transitoria, entonces, Φ_{a_ϵ} no es transitoria, es decir, es recurrente. Como Φ_{a_ϵ} es recurrente, lo anterior implica que Φ es recurrente.

Si Φ no es recurrente, entonces, Φ_{a_ϵ} no es recurrente, es decir, es transitoria. Como Φ_{a_ϵ} es transitoria, lo anterior implica que Φ es transitoria.

□

Teorema 23. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ y aperiódica.*

1. *Φ es transitoria si, y sólo si, uno, y entonces cualquier m-esqueleto es transitorio.*

2. *Φ es recurrente si, y sólo si, uno, y entonces cualquier m-esqueleto es recurrente.*

Demostración. 1. Supongamos Φ es transitoria, entonces existen $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A_k) \leq M_k, \text{ para toda } x \in A_k$$

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $x \in A_k$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{nm}(x, A_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A_k) \leq M_k;$$

tomando la misma cubierta y las mismas cotas, Φ^m es transitoria.

Supongamos existe que $m \in \mathbb{N}$ tal que Φ^m es transitoria, entonces existen $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{mn}(x, A_k) \leq M_k, \text{ para toda } k \in \mathbb{N} \text{ y para toda } x \in A_k$$

Sea $x \in A_k$. Por el algoritmo de la división, $n \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, existen $j \in \overline{\mathbb{N}}$ y $1 \leq r \leq m$, únicos, tales que $n = jm + r$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A_k)$$

$$= \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} P^{jm+r}(x, A_k) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\int_X P^{mj}(y, A_k)P^r(x, dy)$$

$$\sum_{r=1}^{m}\int_X \sum_{j=0}^{\infty} P^{jm}(y, A_k)P^r(x, dy) \leq \sum_{r=1}^{m}\int_X M_k P^r(x, dy) = M_k \sum_{r=1}^{m} P^r(x, X)$$

$$= mM_k$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A_k) \leq mM_k, \text{ para toda } k \in \mathbb{N} \text{ y para toda } x \in A_k,$$

es decir, Φ es transitoria.

2. Dado que Φ es aperiódica, la Proposición 32 nos asegura que ψ es medida de irreducibilidad maximal para cualquier m-esqueleto.

   Supongamos que Φ es recurrente. Sea $m \in \mathbb{N}$, por el Teorema 22, Φ^m es recurrente o transitoria. Si Φ^m es transitoria, por la parte 1, Φ es transitoria; por lo tanto Φ^m es recurrente.

   Supongamos que Φ^m es recurrente, para algún $m \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 22, Φ es recurrente o transitoria. Si Φ es transitoria, por la parte 1, Φ^m es transitoria; por lo tanto Φ es recurrente.

$\square$

4.5. Relaciones entre recurrencia y transitoriedad

En esta sección comenzando dando condiciones sobre los tiempos de paro que aseguren cuando un conjunto es uniformemente transitorio o recurrente.

Proposición 40. *Sea Φ una Cadena de Markov.*

1. *Si $A \in B(X)$ es uniformemente transitorio, con $U(x, A) \leq M$, para toda $x \in A$; entonces $U(x, A) \leq 1 + M$, para toda $x \in A$.*

2. *Si $A \in B(X)$ satisface que $L(x,A) = 1$, para toda $x \in A$, entonces A es recurrente. Además, si ψ es una medida maximal de irreducibilidad, entonces $A \in B^+(X)$ y $U(x,A) = \infty$, para toda $x \in X$.*

3. *Si $A \in B(X)$ satisface $L(x,A) \leq \epsilon < 1$, para toda $x \in A$, entonces $U(x,A) \leq \frac{1}{1-\epsilon}$, para toda $x \in X$, en particular A es uniformemente transitorio.*

4. *Si $P_x(\tau_A(m) < \infty) \leq \epsilon < 1$, para toda $x \in A$, entonces $U(x,A) \leq 1 + \frac{m}{1-\epsilon}$, en particular, A es uniformemente transitorio.*

Demostración. 1. Sea $x \in X$,

$$U(x,A)$$

$$= U_A(x,A) + \int_A U(y,A)U_A(x,dy) = L(x,A) + \int_A U(y,A)L(x,dy)$$

$$\leq 1 + \int_A U(y,A)L(x,dy) \leq 1 + \int_A ML(x,dy) = 1 + ML(x,A)$$

$$\leq 1 + M$$

Por lo tanto $U(x,A) \leq 1 + M$, para toda $x \in X$

2. Sea $x \in A$

$$U(x,A)$$

$$= U_A(x,A) + \int_A U_A(y,A)U(x,dy) = L(x,A) + \int_A L(y,A)U(x,dy)$$

$$= 1 + \int_A U(x,dy) = 1 + U(x,A),$$

es decir, $U(x,A) = 1 + U(x,A)$, y esto pasa si, y sólo si, $U(x,A) = \infty$.

Supongamos ψ es medida maximal de irreducibilidad. Sea $A^\infty = \{x \in X | L(x,A) = 1\}$, por hipótesis, $A \subseteq A^\infty$. Ahora,

$$\int_X L(y,A)P(x,dy)$$

$$= \int_A L(y,A)P(x,dy) + \int_{A^c} L(y,A)P(x,dy) = \int_A P(x,dy) + \int_{A^c} L(y,A)P(x,dy)$$

$$= P(x,A) + \int_{A^c} L(y,A)P(x,dy)$$

Por otro lado, por la Proposición 8

$$\int_{A^c} L(y,A)P(x,dy)$$

$$= \int_{A^c} \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(y,A)P(x,dy) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A^c} P_A^n(y,A)P(x,dy)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_A^{n+1}(x,A),$$

De modo que

$$\int_X L(y,A)P(x,dy)$$

$$= P(x,A) + \sum_{n=1}^{\infty} P_A^{n+1}(x,A) = P_A(x,A) + \sum_{n=1}^{\infty} P_A^{n+1}(x,A)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_A^n(x,A) = L(x,A),$$

por lo tanto

$$\int_X L(y,A)P(x,dy) = L(x,A), \text{ para toda } x \in X$$

Sea $x \in X$, desarrollando la ecuación anterior,

$$\int_X L(y,A)P(x,dy) = L(x,A) = L(x,A)P(x,X) = \int_X L(x,A)P(x,dy),$$

es decir,

$$\int_X (L(y,A) - L(x,A))P(x,dy) = 0, \text{ para toda } x \in X, \text{ y así}$$
$$\int_{A^\infty} (L(y,A) - L(x,A))P(x,dy) + \int_{(A^\infty)^c} (L(y,A) - L(x,A))P(x,dy) = 0, \text{ para toda } x \in X.$$

Sea $x \in A^\infty$, entonces $L(x,A) = 1$ y

$$\int_{A^\infty} (L(y,A) - L(x,A))P(x,dy) + \int_{(A^\infty)^c} (L(y,A) - L(x,A))P(x,dy)$$

$$= \int_{A^\infty} (1-1)P(x,dy) + \int_{(A^\infty)^c} (L(y,A) - 1)P(x,dy)$$
$$= \int_{(A^\infty)^c} (L(y,A) - 1)P(x,dy) = 0$$

Para toda $y \in (A^\infty)^c$, $L(y,A) - 1 < 0$, pero

$$\int_{(A^\infty)^c} (L(y,A) - 1)P(x,dy) = 0,$$

de modo que $P(x,(A^\infty)^c) = 0$, para toda $x \in A^\infty$, por lo tanto $P(x,A^\infty) = 1$, para toda $x \in A^\infty$, es decir, A^∞ es absorbente.

Al ser A^∞ absorbente, la Proposición 16 nos asegura que A^∞ es lleno. Supongamos $\psi(A) = 0$, por maximalidad de ψ,

$$\psi(\{y \in X | L(y,A) > 0\}) = 0$$

Además, dado que $A^\infty \subset \{y \in X | L(y,A) > 0\}$, sucede que $\psi(A^\infty) = 0$, pero A^∞ es lleno. Esto es una contradicción que vino de suponer que $\psi(A) = 0$, por lo tanto $\psi(A) > 0$. Por la Proposición 20,

$$U(x,A) \geq \int_A U(y,A) K_{a_{1/2}}(x,dy), \text{ para toda } x \in X;$$

por irreducibilidad, dado que $\psi(A) > 0$, $K_{a_{1/2}}(x,A) > 0$, para toda $x \in X$; y, como $U(y,A) = \infty$, para toda $y \in A$, de la ecuación anterior concluímos que

$$U(x,A) = \infty, \text{ para toda } x \in X$$

3. Supongamos que $L(x, A) \leq \epsilon < 1$, para toda $x \in A$.

   Sea $x \in X$,

$$U(x, A) = U_A(x, A) + \int_A U_A(y, A)U(x, dy) = L(x, A) + \int_A L(x, A)U(x, dy)$$

$$\leq 1 + \int_A \epsilon U(x, dy) = 1 + \epsilon U(x, A),$$

   es decir, $U(x, A)(1 - \epsilon) \leq 1$, por lo que $U(x, A) \leq \frac{1}{1-\epsilon}$, para toda $x \in X$

4. Supongamos $P_x(\tau_A(m) < \infty) \leq \epsilon < 1$, para toda $x \in A$.

   Dado que $\{\tau_A(m) < \infty\} = \{\eta_A \geq m\}$, $P_x(\eta_A \geq m) \leq \epsilon$. Veamos que $P_x(\eta_A \geq mn) \leq \epsilon^n$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

   Para $n = 1$ ya lo tenemos.

   Supongamos que $P_x(\eta_A \geq mn) \leq \epsilon^n$,

$$P_x(\eta_A \geq m(n + 1))$$

$$= P_x(\eta_A \geq mn + m) = \int_A P_y(\eta_A \geq m)P^{\tau_A(mn)}(x, dy)$$

$$\leq \int_A \epsilon P^{\tau_A(mn)}(x, dy) = P^{\tau_A(mn)}(x, dy) = \epsilon P_x(\phi_{\tau_A(mn)} \in A)$$

   Dado que $\{\phi_{\tau_A(mn)} \in A\} = \{\tau_A(mn) < \infty\}$, y por hipótesis de inducción,

$$P_x(\eta_A \geq m(n + 1)) \leq \epsilon P_x(\tau_A(mn) < \infty) = \epsilon P_x(\eta_A \geq mn) = \epsilon\epsilon^n = \epsilon^{n+1}$$

   Por lo tanto $P_x(\eta_A \geq mn) \leq \epsilon^n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora,

$$U(x, A)$$

$$= E_x[\eta_A] = \sum_{n=1}^{\infty} P_x[\eta_A \geq n] = \sum_{n=1}^{m-1} P_x(\eta_A \geq n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(\eta_A \geq nm) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=2}^{m-1} P_x(\eta_A \geq mn + r)$$

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $2 \leq r \leq m-1$, $\{\eta_A \geq nm + r\} \subseteq \{\eta_A \geq nm\}$; entonces $P_x(\eta_A \geq nm + r) \leq P_x(\eta_A \geq mn)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in A$,

$$U(x,A)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(\eta_A \geq nm) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=2}^{m-1} P_x(\eta_A \geq mn + r)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P_x(\eta_A \geq nm) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=2}^{m-1} P_x(\eta_A \geq mn) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_x(\eta_A \geq nm) + \sum_{r=2}^{m-1} P_x(\eta_A \geq nm) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_x(\eta_A \geq nm) + (m-2)P_x(\eta_A \geq nm)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (m-1)P_x(\eta_A \geq nm)$$

$$= (m-1) \sum_{n=1}^{\infty} P_x(\eta_A \geq nm) \leq (m-1) \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \leq m \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n$$

$$= \frac{m}{1-\epsilon},$$

de modo que $U(x, A) \leq \frac{m}{1-\epsilon}$, para toda $x \in A$. Para concluir, por la parte 1 tenemos que

$$U(x, A) \leq 1 + \frac{m}{1-\epsilon}, \text{ para toda } x \in X$$

$\square$

Si hay un conjunto uniformemente transitorio, es fácil identificar otros, incluso sin irreducibilidad.

Proposición 41. *Si A es uniformemente transitorio y $B \overset{a}{\rightsquigarrow} A$, entonces B es uniformemente transitorio. Además, existe una cubierta numerable de $\overline{A}$ de conjuntos uniformemente transitorios*

Demostración. Supongamos $U(x,A) \leq M$, para toda $x \in A$. Por la Proposición anterior, $U(x,A) \leq 1 + M$, para toda $x \in X$. Como $B \overset{a}{\rightsquigarrow} A$, existe $\delta > 0$ tal que $K_a(y,A) \geq \delta$, para toda $y \in B$. Sea $x \in B$, por la Proposición 20

$$
\begin{aligned}
U(x,A) & \\
&\geq \int_X K_a(y,A)U(x,dy) \geq \int_B K_a(y,A)U(x,dy) \geq \int_B \delta U(x,dy) \\
&= \delta U(x,B),
\end{aligned}
$$

y así

$$U(x,B) \leq \frac{1}{\delta U(x,A)} \leq \frac{1}{\delta(1+M)} < \infty, \text{ para toda } x \in B,$$

es decir, B es uniformemente transitorio.

Por Proposición 18, $\overline{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{A}(m)$ y $\overline{A}(m) \overset{\delta_m}{\rightsquigarrow} A$. De lo anterior, $\overline{A}$ tiene una cubierta numerable de uniformemente transitorios.

□

Lema 10. *Si $A \subseteq B$. Entonces $\eta_A \leq \eta_B$*

Demostración. Como $A \subseteq B$, $1_A^{\phi_n} \leq 1_B^{\phi_n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Sumando sobre todo $\mathbb{N}$

$$\eta_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_A^{\phi_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_B^{\phi_n} = \eta_B$$

□

Proposición 42. *Si D es abosrbente, entonces D^c es transitorio.*

Demostración. Dado que D es absorbente, D es lleno, en particular, $\psi(D) > 0$, de modo que $L(x,D) > 0$, para toda $x \in X$, en particular para toda $x \in D^c$. Sea $B_m = \{y \in D^c | P^m(y,D) \geq 1/m\}$, veamos que $D^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_n$

Como $B_m \subseteq D^c$, para toda m, $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_n \subseteq D^c$.

Sea $x \in D^c$, entonces $L(x,D) > 0$, y así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^n(x,D) > 0$, de modo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P^n(x,D) \geq 1/k$. Si $n \geq k$, entonces $1/k \geq 1/n$, entonces $P^n(x,D) \geq 1/n$, es decir, $x \in B_n$. Si $n < k$, entonces $1/k < 1/n$.

Al ser D absorbente, $P^n(y,D) = 1$, para toda $y \in D$. Ahora,

$$P^{2n}(x{,}D)$$

$$= \int_X P^n(y,D)P^n(x,dy) \geq \int_D P^n(y,D)P^n(x,dy) = \int_D 1P^n(x,dy) = P^n(x,D)$$

$$\geq 1/k$$

Supongamos $P^{rn}(x,D) \geq 1/k$,

$$P^{(r+1)n}(x,D)$$

$$= P^{n+nr}(x,D) = \int_X P^n(y,D)P^{nr}(x,dy)$$

$$\geq \int_D P^n(y,D)P^{nr}(x,dy) \geq \int_D 1P^{nr}(x,dy) = P^{nr}(x,D)$$

$$\geq 1/k$$

de modo que $P^{nr}(x,D) \geq 1/k$, para toda $r \in \mathbb{N}$. Como k está fija, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $rn \geq k$, de modo que $1/k \geq 1/rn$, y así, $P^{rn}(x,D) \geq 1/rn$, es decir, $x \in B_{rn}$. Por lo tanto $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, para toda $x \in D$.

Concluimos que $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$.

Sea $y \in B_m$, entonces $1 - P^m(y,D) \leq 1 - 1/m$, pero $1 - P^m(y,D) = P^m(y,D^c)$, de modo que $P_y(\phi_m \in D^c) \leq 1 - 1/m$. Como $y \in B_m \subseteq D^c$, por el Lema anterior, $\eta_{B_m} \leq \eta_{D^c}$, de modo que $P_y(\eta_{B_m} \geq m) \leq P_y(\eta_{D^c} \geq m)$. Al ser D absorbente, $P_y(\eta_{D^c} \geq m) \leq P_y(\phi_m \in D^c) \leq 1 - \frac{1}{m}$. Además, $\{\eta_{B_m} \leq m\} = \{\tau_{B_m} < \infty\}$. De lo anterior,

$$P_y(\tau_{B_m} < \infty) \leq 1 - 1/m, \text{ para toda } y \in B_m.$$

Por la Proposición 40,

$$
\begin{aligned}
U(y, B_m) & \\
& \leq 1 + \frac{m}{1-(1-1/m)} = 1 + \frac{m}{\frac{m-m+1}{m}} \\
& = 1 + \frac{m}{1/m} = 1 + m^2 < \infty, \text{ para toda } y \in B_m,
\end{aligned}
$$

es decir, B_m es uniformemente transitorio, para toda $m \in \mathbb{N}$. Dado que $D = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, concluimos que D es transitorio. □

4.6. Identificando conjuntos transitorios en Cadenas irreducibles

El siguiente resultado es una prueba alternativa de la existencia de una dicotomía recurrencia/transitoriedad para Cadenas de Markov irreducibles análoga al caso discreto. La diferencia radica en que no necesitamos un átomo artificial.

Teorema 24. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ. Entonces Φ es recurrente o transitoria.*

Demostración. Supongamos Φ no es recurrente, es decir, existen $A \in B^+(X)$ y $z \in X$ tales que $U(z, A) < \infty$. Sea $A' = \{y \in X | U(y, A) = \infty\}$, supongamos que $\psi(A') > 0$, de modo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $P^m(z, A') > 0$. Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$
\begin{aligned}
U(z, A) & \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(z, A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P^{n+m}(z, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X P^n(y, A) P^m(z, dy) \\
& = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, A) P^m(z, dy) = \int_X U(y, A) P^m(z, dy) \\
& \geq \int_{A'} U(y, A) P^m(z, dy)
\end{aligned}
$$

Como para toda $y \in A'$ sucede que $P^m(z, A') > 0$ y $U(y, A) = \infty$, sucede que

$$\int_{A'} U(y, A) P^m(x, dy) = \infty$$

Así, $U(z,A)=\infty$, que es una contradición a la hipótesis que vino de suponer que $\psi(A')>0$. Por lo tanto $\psi(A')=0$.

Sean $A_n=\{y\in A|U(y,A)<n\}$, entonces $A\cap(A')^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Ahora,

$$\psi(A)=\psi((A\cap A')\cup(A\cap(A')^c))=\psi(A\cap A')+\psi(A\cap(A')^c)=\psi(A\cap(A')^c),$$

por hipótesis, $\psi(A)>0$, de modo que $\psi(A\cap(A')^c)>0$. Como $A\cap(A')^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\psi(A_n)>0$. Dado que $A_n\subseteq A$, $U(x,A_n)\leq U(x,A)$, para toda $x\in X$, de modo que, si $y\in A_n$, entonces $U(y,A_n)\leq U(y,A)\leq n$. Por lo tanto $U(y,A_n)\leq n$, para toda $y\in A_n$.

De la Proposición 40 tenemos que $U(y,A_n)\leq 1+n$, para toda $y\in X$. Sean $A_n(m)=\{y\in X|\sum_{r=1}^{m}P^k(y,A_n)>1/m\}$, para toda $m\in\mathbb{N}$. Ya que $\psi(A_n)>0$, por el Lema 3, $X=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_n(m)$. Sea $x\in X$,

$m(1+n)$

$$\geq mU(x,A_n)=m\sum_{k=1}^{\infty}P^k(x,A_n)=\sum_{k=1}^{\infty}mP^k(y,A_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{m}P^k(x,A_n)$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}P^k(x,A_n)\geq\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=m}^{\infty}P^k(x,A_n)=\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}P^{k+r}(x,A_n)$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\int_X P^r(y,A_n)P^k(x,dy)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{m}\int_X P^r(y,A_n)P^k(x,dy)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_X\sum_{r=1}^{m}P^r(y,A_n)P^k(x,dy)\geq\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_n(m)}\sum_{r=1}^{m}P^r(y,A_n)P^k(x,dy)$$

$$\geq\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_n(m)}\frac{1}{m}P^k(x,dy)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m}P^n(x,A_n(m))\geq\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}P^k(x,A_n(m))$$

$$=\frac{1}{m}U(x,A_n(m))$$

por lo tanto $U(x,A_n(m))\leq(1+n)m^2$, para toda $x\in X$, es decir, $A_n(m)$ es uniformemente transitorio. Como $X=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_n(m)$, tenemos que Φ es transitoria.

Todo comenzó suponiendo que Φ no es recurrente. Concluimos que Φ es recurrente o transitoria.

□

La partición de X en conjuntos uniformemente transitorios como en el Teorema anterior da inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 25. *Sea Φ una Cadena de Markov transitoria con medida de irreducibilidad maximal ψ. Entonces todo conjunto petite es uniformemente transitorio.*

Demostración. Sea D petite. Como X es transitorio, existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cubierta numerable de X, tal que cada A_n es uniformemente transitorio. Además, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in B^+(X)$, para toda $n \geq N_1$.

Al ser la Cadena ψ-irreducible, por la Proposición 36, existe $\{C_n\}$, cubierta creciente y numerable de X tal que C_n es ψ_c^n-petite, con ψ_c^n medida maximal de irreducibilidad. Además, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $C_n \in B^+(X)$, para toda $n \geq N_2$. Dado que $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ y $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, existe $N \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$ tal que $A_N \cap C_N \in B^+(X)$.

Sean $B = A_N \cap C_N$ y $\psi_b = \psi_c^N$. Al ser A_N un conjunto uniformemente transitorio A_N, B también es uniformemente transitorio. Y al ser C_N un conjunto ψ_b-petite, B también es ψ_b-petite.

Como D es petite, por la Proposición 36, existen una Distribución de muestra d y ψ_d medida maximal de irreducibilidad tal que

$$K_d(x, A) \geq \psi_d(A), \text{ para cualesquiera } x \in D \text{ y } A \in B(X)$$

Al ser B ψ_b-petite,

$$K_b(x, A) \geq \psi_b(A), \text{ para cualesquiera } x \in B \text{ y } A \in B(X).$$

Al igual que en la demostración de la Proposición 36, existe una Distribución de muestra e tal que

$$K_e(x, A) \geq \psi_b(A) K_{a_{1/2}}(x, B), \text{ para cualesquiera } x \in X \text{ y } A \in B(X).$$

Al igual que en la demostración del Teorema 19, existe una $\epsilon > 0$ con la cual podemos tomar a D como petite de la siguiente manera

$$K_{a_{1/2}}(x, A) \geq \epsilon \psi_b(A) \psi_d(B), \text{ para cualesquiera } x \in C \text{ y } A \in B(X).$$

Tomando $A = B$ y sea $x \in D$, de todo lo anterior deducimos que

$$K_e(x, B) \geq \psi_b(B) K_{a_{1/2}}(x, B) \geq \psi_b(B) \psi_d(B) \psi_b(B) \epsilon,$$

Ya que ψ_b y ψ_d son medidas maximales de irreducibilidad, $(\psi_b(B))^2\psi_d(B)\epsilon > 0$. Sea $\delta = (\psi_b(B))^2\psi_d(B)\epsilon > 0$, entonces

$$\inf_{x\in D} K_e(x, D) \geq \delta,$$

es decir, $D \overset{d}{\rightsquigarrow} B$. Pero B es uniformemente transitorio, de modo que, por la Proposición 41, D es uniformemente transitorio. $\square$

Teorema 26. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ.*

1. *Si existe un conjunto C petite absorbente, entonces Φ es recurrente.*

2. *La Cadena Φ es transitoria si, y sólo si, existen $C, D \in B^+(X)$ tal que $L(x, C) < 1$, para toda $x \in D$*

Demostración.

1. Sea C petite y absorbente. Sea $x \in C$, al ser C absorbente, $1 = P(x, C) \leq L(x, C) \leq 1$, y así, $L(x, C) = 1$, para toda $x \in C$. Por la Proposicion 40, C es recurrente. Por el Teorema anterior, Φ no es transitoria, es decir, Φ es recurrente.

2. Supongamos que existen $C, D \in B^+(X)$ tales que $L(x, C) < 1$, para toda $x \in D$.

   Sean $D_n = \{x \in D | L(x, C) \leq 1 - (1/n)\} \in B(X)$; claramente $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, además,

   $$D \cap C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cap C)$$

   Tenemos los dos siguientes casos

   a) $\psi(D \cap C) > 0$

      Como $\psi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \cap C)\right) > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(D_n \cap C) > 0$. Sea $x \in D_n$, dado que $L(x, D_n \cap C) \leq L(x, C)$ y $L(x, C) \leq 1 - 1/n$, tenemos que $L(x, D_n \cap C) \leq 1 - 1/n$, para toda $x \in D_n$. Por la Proposicion 40, $D_n \cap C$ es uniformemente transitorio y dado que $D_n \cap C \in B^+(X)$, Φ no es recurrente.

   b) $\psi(D \cap C) = 0$

      Como $\psi(D \cap C) = 0$, en particular, $\psi(D_n \cap C) = 0$. La maximalidad de ψ implica que $\psi(\{y \in X | L(y, D_n \cap C) > 0\}) = 0$, en particular, $\psi(\{y \in C | L(y, D_n \cap C) > 0\}) = 0$. De modo que

$\psi(\{y \in C | L(y, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C < \infty\}) = 0.$

Como $\psi(D) > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(D_n \cap C^c) > 0$; así, $L(x, D_n \cap C^c) > 0$, para toda $x \in X$, en particular, para toda $x \in C$, de modo que, $C = \{x \in C | L(x, D_n \cap C^c) > 0\}$. Ahora,

$$0 < \psi(C)$$

$$= \psi(\{x \in C | L(x, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C < \infty\}) + \psi(\{x \in C | L(x, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C = \infty\})$$

$$= \psi(\{x \in C | L(x, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C = \infty\}),$$

de modo que $\psi(\{x \in C | L(x, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C = \infty\}) > 0$. Además,

$$\{x \in C | L(x, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C = \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in C | P^k(x, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C = \infty\}$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in C | P^k(x, D_n \cap C^c) > 0, \tau_C \geq k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in C | P_C^k(x, D_n \cap C^c) > 0\}$$

$$\subseteq \bigcup_{k,m \in \mathbb{N}} \{x \in C | P_C^k(x, D_n \cap C^c) \geq \frac{1}{m}\},$$

así, existen $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $\psi(\{x \in C | P_C^k(x, D_n \cap C^c) \geq \frac{1}{m}\}) > 0$. Sean $H_k^m = \{x \in C | P_C^k(x, D_n \cap C^c) \geq \frac{1}{m}\}$ y $x \in X$, como $H_k^m \subseteq C$,

$$1 - L(x, H_k^m) = P_x(\phi_n \notin H_k^m, \text{ para toda } n \in \mathbb{N})$$

$$\geq P_x(\phi_1 \in C^c, \ldots, \phi_{k-1} \in C^c, \phi_k \in D_n \cap C^c, \phi_{k+1} \in (H_k^m)^c, \phi_{k+2} \in (H_k^m)^c, \ldots)$$

$$= \int_{D_n \cap C^c} P(\phi_k = y, \phi_{k+1} \in (H_k^m)^c, \phi_{k+2} \in (H_k^m)^c, \ldots) P_C^k(x, dy)$$

$$= \int_{D_n \cap C^c} P(\phi_0 = y, \phi_1 \in (H_k^m)^c, \phi_2 \in (H_k^m)2, \ldots) P_C^k(x, dy)$$

$$= \int_{D_n \cap C^c} (1 - L(y, H_k^m)) P_C^k(x, dy);$$

de modo que

$$1 - L(x, H_k^m) \geq \int_{D_n \cap C^c} (1 - L(y, H_k^m)) P_C^k(x, dy), \text{ para toda } x \in X$$

Sea $y \in D_n \cap C$, entoces $L(y, C) \leq 1 - (1/n)$, y como $H_k^m \subseteq C$, $L(y, H_k^m) \leq 1 - (1/n)$, y así, $1 - L(y, H_k^m) \geq 1/n$, para toda $y \in D_n \cap C$. Sea $x \in H_k^m$, de lo anterior,

$$\int_{D_n \cap C^c} (1 - L(y, H_k^m)) P_C^n(x, dy)$$

$$\geq \int_{D_n \cap C^c} 1/n P_C^k(x, dy) = (1/n) P^k(x, D_n \cap C^c)$$

$$\geq (1/n)(1/m),$$

por lo que $1 - L(x, H^m - k) \geq 1/mn$, es decir, $L(x, H_k^m) \leq 1 - 1/mn < 1$, para toda $x \in H_k^m$. Por la Proposición 40 tenemos que H_k^m es uniformemente transitorio. Como $H_k^m \in B^+(X)$ y es uniformemente transitorio, concluimos que Φ no es recurrente, por lo tanto es transitoria.

Supongamos Φ es transitoria. Si existe un conjunto petite absorbente, por la parte 1 Φ es recurrente. Por lo tanto, todo petite es no absorbente. Sea $C \in B^+(X)$ pequeño (por lo tanto petite), por irreducibilidad, $L(x, C) > 0$, para toda $x \in X$. Sea $D = \{y \in C^c | L(x, C) < 1\}$, supongamos $\psi(D) = 0$, entonces D^c es lleno, y por Proposición 16, contiene a un absorbente F.

Sea $x \in F \setminus C = F \cap C^c$. Como $x \in C^c$ y $x \in D^c$, $L(x, C) = 1$, para toda $x \in F \setminus C$.

Sea $x \in F \cap C$. Como F es absorbente, $x \in F$ y $C \setminus F = C \cap F^c$, $P(x, C \setminus F) = 0$. Como, $C^c = (C^c \cap F) \cup (C^c \cap F^c) = (F \setminus C) \cup (C \setminus F)$, $P(x, C^c) = P(x, F \setminus C)$.

De todo lo anterior,

$$
\begin{aligned}
&L(x,C)\\
&\qquad = P(x,C) + \int_{C^c} L(y,C)P(x,dy)\\
&\qquad = P(x,C) + \int_{F\setminus C} L(y,C)P(x,dy) + \int_{C\setminus F} L(y,C)P(x,dy)\\
&\qquad = P(x,C) + \int_{F\setminus C} L(y,C)P(x,dy) = P(x,C) + \int_{F\setminus C} 1P(x,dy)\\
&\qquad = P(x,C) + P(x,F\setminus C) = P(x,C) + P(x,C^c) = P(x,X)\\
&\qquad = 1,
\end{aligned}
$$

es decir, $L(x,C) = 1$, para toda $x \in F \cap C$ y para toda $x \in F \setminus C$, por lo tanto $L(x,C) = 1$, para toda $x \in F$.

Más aun, sea $C_0 = F \cap C$, veamos que $L(x,C_0) = 1$, para toda $x \in F$. Sea $x \in F$,

$$
\begin{aligned}
&L(x,C)\\
&\qquad = L(x,(F\cap C)\cup(C\cap F^c)) = L(x,C\cap F) + L(x,C\cap F^c)\\
&\qquad = L(x,C_0) + L(x,C\cap F^c)
\end{aligned}
$$

Como F es absorbente, $L(x,F^C) = 0$, en particular, $L(x,C\cap F^c) = 0$. Con esto y la ecuación anterior, sucede que $L(x,C) = L(x,C_0)$, pero como $x \in F$, $L(x,C) = 1$. Por lo tanto $L(x,C_0) = 1$, para toda $x \in F$.

Veamos que $C_0 \in B^+(X)$. Dado que $F \subseteq \{y \in X | L(y,C_0) > 0\}$, $\psi(F) \leq \psi(\{y \in X | L(y,C_0) > 0\})$. Y como F es absorbente, F es lleno, en particular, $\psi(F) > 0$, entonces, $\psi(\{y \in X | L(y,C_0) > 0\}) > 0$. Por maximalidad de ψ, $\psi(C_0) > 0$, es decir, $C_0 \in B^+(X)$.

$C_0 \subseteq F$, entonces $L(x,C_0) = 1$, para toda $x \in C_0$ y $C_0 \in B^+(X)$, por la Proposición 40 tenemos que C_0 es recurrente. Además, dado que $C_0 \subseteq C$ y C es petite, por lo tanto C_0 también es petite. En conclusión, Φ tiene un petite recurrente en $B^+(X)$ no vacío. El Teorema anterior nos asegura que Φ es recurrente, pero esto es una contradicción, pues la Cadena es transitoria, y vino de suponer que $\psi(D) > 0$. Por lo tanto $\psi(D) > 0$, es decir, $D^+(X)$, que es lo que nos faltaba mostrar.

□

Se espera que los conjuntos ψ-nulos tengan alguna propiedad de transitoriedad, dada la maximalidad de ψ.

Teorema 27. *Sea Φ una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad ψ. Entonces todo ψ-nulo es transitorio.*

Demostración. Sea B un ψ-nulo, entonces B^c es lleno, por lo tanto existe $D \subseteq B^c$ que es absorbente. Por la Proposición 42, D^c es transitorio, es decir, existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sucesión de uniformemente transitorios, tal que $D^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dado que $D \subseteq B^c$, $B \subseteq D^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, por lo tanto B es transitorio. □

Una aplicación directa e inmediata del Teorema anterior y del Teorema 15 es la extensión de la descomposición cíclica para las Cadenas φ-irreducibles.

Proposición 43. *Sea Φ una Cadena de Markov con medima maximal de irreducibilidad ψ. Entonces existe $d \in \mathbb{N}$ y $D_1, \ldots, D_d \in B(X)$, disjuntos, tales que*

1. *Para toda $x \in D_i$, $P(x, D_{i+1}) = 1$, $i = 0, \ldots, d-1$ (mod d).*
2. *El conjunto $N = \left[\bigcup_{i=1}^{d} D_i\right]$ es ψ-nulo y transitorio.*

4.7. Clasificación de estados usando un Criterio de Deriva

Clasificar estados como lo hemos estado haciendo es bastante difícil, ya que involucra un análisis extenso del operador U, que es suma de todas las potencias del Núcleo de transición P. Es una herramienta teórica muy poderosa, pero hay Modelos específicos que nos interesa clasificar. Afortunadamente hay criterios para transitoriedad y recurrencia que solo involucra el estudio de P sobre ciertos conjuntos petite.

4.7.1. Un criterio de deriva para la transitoriedad

Primero construímos un criterio de transitoriedad que recae en encontrar las soluciones mínimas de una clase de desigualdades.

Proposición 44. *Sea $C \in B(X)$. La solución mínima puntual no negativa del conjunto de desigualdades*

$$\int_X h(y)P(x,dy) \le h(x), \;\; si\ x \in C^c \qquad h(x) \ge 1, \;\; si\ x \in C \tag{4.12}$$

está dada por $h^*(x) = P_x(\sigma_C < \infty)$*, para toda* $x \in X$*, y* h^* *satisface la igualdad.*

Demostración. Sea $x \in C$, $P_x(\sigma_C = 0) = 1$; y, sea $x \in C^c$, $P_x(\sigma_C < \infty) = P_x(\tau_C < \infty)$. En particular, para toda $x \in C$, $h^*(x) = P_x(\sigma_C < \infty) = 1$. Sea $x \in C^c$,

$$h^*(x) = P_x(\sigma_C < \infty) = P_x(\tau_C < \infty) = P(x,C) + \int_{C^c} P_y(\tau_C < \infty)P(x,dy)$$

Ahora,

$$\int_X h^*(y)P(x,dy) = \int_C h^*(y)P(x,dy) + \int_{C^c} h^*(y)P(x,dy),$$

y dado que $h^*(y) = 1$, para toda $y \in C$, $\int_C h^*(y)P(x,dy) = P(x,C)$, de modo que

$$h^*(x) = \int_X h^*(y)P(x,dy) \quad x \in C^c \qquad h^*(x) = 1 \quad x \in C$$

Sea h una solución del sistema de desigualdades, y sea $x \in C$, $h(x) \ge 1 = h^*(x)$, por lo tanto $h_{/C} \ge h^*_{/C}$.

Sea $x \in C^c$,

$h(x)$

$$\geq \int_X h(y)P(x,dy) = \int_C h(y)P(x,dy) + \int_{C^c} h(y)P(x,dy)$$

$$\geq \int_C h(y)P(x,dy) + \int_{C^c}\int_X h(z)P(y,dz)P(x,dy)$$

$$= \int_C h(y)P(x,dy) + \int_{C^c}\left(\int_C h(z)P(y,dz) + \int_{C^c} h(z)P(y,dz)\right) P(x,dy)$$

$$= \int_C h(y)P(x,dy) + \int_{C^c}\int_C h(z)P(y,dz)P(x,dy) + \int_{C^c}\int_{C^c} h(z)P(y,dz)P(x,dy)$$

$$= \int_C h(y)P(x,dy) + \int_C h(z)P_x(\phi_1 \in C^c, \phi_2 = dy) + \int_{C^c} h(z)P_x(\phi_1 \in C^c, \phi_2 = dy)$$

$$= \int_C h(y)P(x,dy) + \int_C h(z)P_C^2(x,dy) + \int_{C^c} h(z)P_C^2(x,dy) \geq \ldots$$

$$\ldots \geq \sum_{j=1}^N \int_C h(y)P_C^j(x,dy) + \int_{C^c} h(y)P_C^N(x,dy) \geq \sum_{j=1}^N \int_C h(y)P_C^j(x,dy),$$

por lo tanto,

$$h(x) \geq \sum_{j=1}^N \int_C h(y)P_C^j(x,dy), \text{ para toda } N \in \mathbb{N} \text{ y para toda } x \in C^c$$

Ahora, dado que para toda $y \in C$ sucede que $h(y) \geq 1$,

$h(x)$

$$\geq \sum_{j=1}^N \int_C h(y)P_C^j(x,dy) \geq \sum_{j=1}^N \int_C 1P_C^j(x,dy) = \sum_{j=1}^N P_C^j(x,C)$$

$$= \sum_{j=1}^N P_x(\tau_C = j) = P_x(\tau_C \leq N) \text{ y } \lim_{N\to\infty} P_x(\tau_C \leq N) = P_x(\tau_C < \infty),$$

por lo que

$$h(x) \geq P_x(\tau_C < \infty).$$

Como $x \in C^c$, $P_x(\tau_C < \infty) = h^*(x)$, para toda $x \in C$, es decir, $h_{/C^c} \geq h^*_{/C^c}$.

Por lo tanto $h \geq h^*$, para toda solución del sistema de desigualdades.

□

Definición 36. *Sea* $\xi = \{f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}_\mathbb{R}) | f$ *medible y acotada* $\}$, *definimos el operador deriva* $\Delta : \xi \to \xi$ *tal que*

$$\Delta f(x) = \int_X f(y)P(x, dy) - f(x)$$

Por la Proposición , para toda $f \in \xi$, $\Delta f \in \xi$.

El primer criterio recae en que $\Delta f(\phi_n)_{/C} \leq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y algún conjunto C y alguna función f, lo que resulta lo menos intuitivo. Sólo basta darse cuenta de lo que es el operador deriva: P, al ser un Núcleo de transición, es una Probabilidad condicional, $P(x, A) = P(\phi_1 \in A|\phi_0 = x) = P(\phi_n \in A|\phi_{n-1} = x)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Si existen $C \in B(X)$ y f medible y acotada tales que $\Delta f(x) \leq 0$, entonces, para toda $x \in C$,

$$E[f(\phi_n)|\phi_{n-1} = x] = \int_X f(y)P(x, dy) \leq f(x) = f(\phi_{n-1}), \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

es decir, $\{f(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala sobre C.

Definición 37. *Sean* $f : (X, B(X)) \to \mathbb{R}$ *medible y* $r \geq 0$, *definimos el subnivel de* f *en* r *como*

$$C_f(r) = \{x \in X | f(x) \leq r\}$$

Teorema 28. *Sea* Φ *una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad* ψ. Φ *es transitoria si existen* $f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+))$ *medible y acotada, y* $r \geq 0$ *tales que*

1. $C_f(r), (C_f(r))^c \in B^+(X)$
2. *Si* $x \in (C_f(r))^c$, $\Delta f(x) > 0$

Demostración. Supongamos existen $f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+))$ medible y acotada y $r \geq 0$ tales que ocurren (1) y (2).

Sea M la cota de f, entonces $\{x \in X | f(x) > M\} = \emptyset$; además, por (1) $C_h(r), (C_h(r))^c \in B^+(X)$, por lo tanto $M > r$. Sean $C = C_h(r)$ y $h : X \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$h(x) = \begin{cases} \frac{M-f(x)}{M-r} & , \text{ si } x \in C^c \\ 1 & , \text{ si } x \in C \end{cases}$$

Sea $x \in C^c$, por hipótesis, $\Delta f(x) > 0$, de modo que

$$\int_X MP(x,dy) \geq \int_X f(y)P(x,dy) > f(x) \quad \Rightarrow$$

$$0 \leq \int_X MP(x,dy) - \int_X f(y)P(x,dy) < M - f(x) \quad \Rightarrow$$

$$0 \leq \int_X \frac{M-f(y)}{M-r} P(x,dy) < \frac{M-f(x)}{M-r},$$

por lo tanto

$$\int_X h(y)P(x,dy) < h(x), \text{ para toda } x \in C^c.$$

Dado que $h(x) = 1$, para toda $x \in C$, y por lo anterior, h es una solución del sistema 4.12 en la Proposición 44, y así, $h(x) \geq h^*(x) = P_x(\sigma_C < \infty)$, para toda $x \in X$. Ahora, para $x \in C^c$, $f(x) > r$, de modo que $M - f(x) < M - r$, por lo tanto

$$h(x) = \frac{M-f(x)}{M-r} < \frac{M-r}{M-r} = 1, \text{ para toda } x \in C^c$$

Además, como para toda $x \in C^c$, $P_x(\sigma_C < \infty) \leq h(x) < 1$, sucede que $L(x,C) = P_x(\tau_C < \infty) = P_x(\sigma_C < \infty) < 1$, para toda $x \in C^c$. Por hipótesis, $C, C^c \in B^+(X)$ y $L(x,C) < 1$, para toda $x \in C^c$. Por el Teorema 26 concluimos que Φ es transitoria.

□

4.7.2. Un criterio de deriva para la recurrencia

Definición 38 (Criterio de deriva para recurrencia)**.** *(V1) Existen $f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ medible y $C \in B(X)$ tales que $\Delta f(x) \leq 0$, para toda $x \in C^c$*

Frecuentemente necesitamos considerar funciones $f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ tales que los conjuntos $C_f(M)$ sean petites, para cada M. Necesitamos definir una clase de funciones con esta propiedad, dando un significado más hondo a los conjuntos petite.

Definición 39. *Sea $f : (X, B(X)) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Decimos que es no acotada fuera de petites si, y sólo si, para toda $M \in \mathbb{N}$, el subnivel $C_f(M)$ es petite.*

Proposición 45. *Si existe* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B(X)$ *tal que, para toda* $M \in \mathbb{N}$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *que cumple con que*

$$C_f(M) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} C_n,$$

entonces f *es no acotada fuera de petites.*

Demostración. Sea $M \in \mathbb{N}$, por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_f(M) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} C_n$. Por la Proposición 36, $\bigcup_{n=1}^{N} C_n$ es petite. Dado que cualquier subconjunto de un petite es petite, tenemos que $C_f(M)$ es petite, para toda $M \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 29. *Sea* Φ *una Cadena de Markov con medida maximal de irreducibilidad* ψ. *Si existen* $C \subseteq X$, *petite, y* $f : X \to \mathbb{R}^+$, *no acotada fuera de petites, y sucede (V1), entonces* $L(x, C) = 1$, *para toda* $x \in C$ *y* Φ *es recurrente.*

Demostración. Dado que $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_f(m)$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq M$ $C_f(m) \in B^+(X)$. Por la Proposición 36, tenemos que $C \cup C_f(m) \in B^+(X)$ es petite, para toda $m \geq M$, de modo que podemos pedir que $C \in B^+(X)$. Además, por el Teorema 25, todo conjunto petite es uniformemente transitorio, en particular, $C_f(m)$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Suponga mos Φ es transitoria. Por el Teorema 26 C no es absorbente. Al igual que en la demostración del Teorema 26, $D = \{y \in C^c | L(x, C) < 1\} \neq \emptyset$ y $D \in B^+(X)$.

Sea $x^* \in D \subseteq C^c$, como $L(x^*, C) < 1$ y $f(x^*) \in \mathbb{R}^+$, existe $m^* \geq M$ tal que

$$m^* > \frac{f(x^*)}{1 - L(x^*, C)} > f(x^*),$$

en particular, $x^* \in C_f(m^*)$. Sea $\hat{P} : X \times B(X) \to [0, 1]$ el Núcleo de transición definido mediante

$$\hat{P}(x, A) = \begin{cases} P(x, A) & , \text{ si } x \in C^c \\ \hat{P}(x, \{x\}) = 1 & , \text{ si } x \in C \end{cases}$$

Por hipótesis, $\Delta f(x) \leq 0$, para toda $x \in C^c$, es decir

$$\int_X f(y)P(x, dy) \leq f(x), \text{ para toda } x \in C^c.$$

Como $P(x, A) = \hat{P}(x, A)$, para toda $x \in C^c$, entonces

$$\int_X f(y)\hat{P}(x, dy) = \int_X f(y)P(x, dy) \leq f(x), \text{ para toda } x \in C^c$$

Sea $x \in C$,

$$\int_X f(y)\hat{P}(x,dy) = \int_{\{x\}} f(y)\hat{P}(x,dy) = f(y)\hat{P}(x,\{x\}) = f(y).$$

Por lo tanto

$$\int_X f(y)P(x,dy) \leq f(x), \text{ para toda } x \in X$$

Sea $x \in C^c$, veamos que $\hat{P}^n(x,C) = P_x(\tau_C \leq n)$.

Para $n = 1$,

$$\hat{P}(x,C) = P(x,C) = P_x(\tau_C = 1) = P_x(\tau_C \leq 1).$$

Supongamos válido para $n = k$, es decir $\hat{P}^k(x,C) = P_x(\tau_C \leq k)$. Ahora,

$$\hat{P}^{k+1}(x,C)$$

$$= \int_X \hat{P}(y,C)\hat{P}^k(x,dy) = \int_C \hat{P}(y,C)\hat{P}^k(x,dy) + \int_{C^c} \hat{P}(y,C)\hat{P}^k(x,dy)$$

$$= \int_C 1\hat{P}^k(x,dy) + \int_{C^c} \hat{P}(y,C)\hat{P}^k(x,dy) = \hat{P}^k(x,C) + \int_{C^c} \hat{P}(y,C)\hat{P}^k(x,dy)$$

$$= P_x(\tau_C \leq k) + \hat{P}(\hat{\phi}_1 \in X, \ldots, \hat{\phi}_{k-1} \in X, \hat{\phi}_k \in C^c, \hat{\phi}_{k+1} \in C)$$

Ya que $\phi_k \in C^c$ y C es absorbente, en $\hat{\Phi}$, $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_{k-1} \in C^c$. Pero $\hat{\Phi}$ se comporta igual que Φ en C^c, de modo que

$$\hat{P}^{k+1}(x,C)$$

$$= P_x(\tau_C \leq k) + P_x(\phi_1 \in C^c, \ldots, \phi_{k-1} \in C^c, \phi_k \in C^c, \phi_{k+1} \in C)$$

$$= P_x(\tau_C \leq k) + P_x(\tau_C = k+1) = P_x(\tau_C \leq k+1),$$

por lo tanto,

$$\hat{P}^n(x,C) = P_x(\tau_C \leq n), \text{ para toda } x \in C^c \text{ y para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que para cualesquiera $A \subseteq C^c$, $A \in B(X)$, $x \in C$ y $n \in \mathbb{N}$, $P^n(x,A) \leq P^n(x,A)$.

Sea $x \in C^c$ y $A \subseteq C^c$ tal que $A \in B(X)$, el caso $n = 1$ es trivial, ya que $\hat{P}(x, A) = P(x, A)$.

Supongamos válido para $n = k$, es decir, $\hat{P}^k(x, A) \leq P^k(x, A)$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
&\hat{P}^{k+1}(x,A) \\
&\qquad = \int_X \hat{P}(y, A)\hat{P}(x, dy) = \int_C \hat{P}(y, A)\hat{P}^k(x, dy) + \int_{C^c} \hat{P}(y, A)\hat{P}^k(x, dy) \\
&\qquad = \int_C 0\hat{P}^k(x, dy) + \int_{C^c} P(y, A)\hat{P}^k(x, dy) = \int_{C^c} P(y, A)\hat{P}^k(x, dy) \\
&\qquad \leq \int_{C^c} \hat{P}(y, A)P^k(x, dy) = P_x(\phi_1 \in X, \ldots, \phi_{k-1} \in X, \phi_k \in C^k, \phi_{k+1} \in A) \\
&\qquad \leq P_x(\phi_1 \in X, \ldots, \phi_{k-1} \in X, \phi_k \in X, \phi_{k+1} \in A) \\
&\qquad = P^{k+1}(x, A)
\end{aligned},
$$

por lo tanto $\hat{P}^n(x, A) \leq P^n(x, A)$, para cualesquiera $x \in C^c$, $A \subseteq C^c$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, $\int_X f(y)\hat{P}(x, dy) \geq f(x)$, para toda $x \in X$. Tomemos $x \in C^c$,

$$
\begin{aligned}
&V(x) \\
&\quad \leq \int_X f(y)\hat{P}(x, dy) \geq \int_X \int_X f(z)\hat{P}(y, dz)\hat{P}(x, dy) = \int_X f(z)\hat{P}^2(x, dz) \geq \ldots \\
&\quad \ldots \geq \int_X f(y)\hat{P}^n(x, dy) \geq \int_{C^c \cap [C_f(m^*)]^c} f(y)\hat{P}^n(x, dy) \geq \int_{C^c \cap [C_f(m^*)]^c} m^*\hat{P}^n(x, dy) \\
&\quad = m^*\hat{P}^n(x, C^c \cap [C_f(m^*)]^c) = m^*\hat{P}^n(x, [C \cup C_f(m^*)]^c) \\
&\quad = m^*(1 - \hat{P}(x, C \cup C_f(m^*)),
\end{aligned}
$$

y así,

$$f(x) \geq m^*(1 - \hat{P}(x, C \cup C_f(m^*)), \text{ para toda } x \in C^c.$$

Dado que $C^c \cap C_f(m^*)^c \subseteq C^c$ y $x^* \in D \subseteq C^c$,

$$\hat{P}^n(x^*, C^c \cap C_f(m^*)) \leq P^n(x^*, C^c \cap C_f(m^*))$$

El conjunto $C_f(m^*)$ es petite, por lo que $C^c \cap C_f(m^*)$ es petite. Dado que Φ es transitoria, $C^c \cap C_f(m^*)$ es uniformemente transitorio, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x, C^c \cap C_f(m^*)) = 0, \text{ para toda } x \in C^c \cap C_f(m^*).$$

Como $x^* \in C^c \cap C_f(m^*)$, de la ecuación anterior obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x^*, C^c \cap C_f(m^*)) = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \hat{P}^n(x^*, C^c \cap C_f(m^*)) = 0$$

Ahora,

$$1 - \hat{P}^n(x^*, C_f(m^*) \cup C)$$

$$= 1 - \hat{P}^n(x^*, [C_f(m^*) \setminus C] \cup C]$$

$$= \hat{P}^n(x^*, C_f(m^*) \setminus C) + \hat{P}^n(x^*, C)]$$

Dado que

$$\hat{P}^n(x^*, C_f(m^*) \setminus C) = \hat{P}^n(x^*, [C_f(m^*) \cap C^c] \; n \overrightarrow{\to} \infty \; 0$$

y

$$\hat{P}^n(x^*, C) = P_{x^*}(\tau_C \leq n) \; n \overrightarrow{\to} \infty \; L(x^*, C),$$

sucede que

$$\lim_{n\to\infty} [1 - \hat{P}^n(x^*, C_f(m^*) \cup C)] = 1 - L(x^*, C)$$

Como para toda $n \in \mathbb{N}$ sucede que $f(x^*) \geq m^*(1 - \hat{P}^n(x^*, C_f(m^*) \cup C))$, tenemos que

$$f(x^*) \geq m^*(1 - L(x^*, C), \text{ es decir } m^* \leq \frac{f(x^*)}{1 - L(x^*, C)},$$

lo cuál es una contradicción, ya que $m^* > \frac{f(x^*)}{1-L(x^*,C)}$, y vino de suponer que C no es absorbente. Por lo tanto $C \in B^+(X)$ es un petite absorbente, y del Teorema 26 tenemos que Φ es recurrente.

□

Las condiciones del Teorema pasado implican que sabemos donde viven los petites de Φ, y sabemos identificar funciones no actoadas fuera de petites.

Clasificación de estados para la Caminata Aleatoria en la semirecta

Los siguientes resultados son para ilustrar una variedad de acercamientos para los criterios de recurrencia, donde diferentes funciones de prueba son utilizadas.

Recordemos que la Caminata Aleatoria en la semirecta es la Cadena de Markov definida por la sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente Distribuídas $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $W_1 \sim \Gamma$

$$\phi_0 = [W_0]^+, \phi_{n+1} = [\phi_n + W_{n+1}]^+$$

Supongamos que $E[\Gamma] \in \mathbb{R}$, sea $\beta = E[\Gamma]$, esperamos que si $\beta \leq 0$, esta sea una condición suficiente para la recurrencia de Φ.

Teorema 30. *Si* $\beta = \int_{\mathbb{R}} w\Gamma(dw) < 0$*, entonces* Φ *es recurrente.*

Demostración. Dado que $\beta = \int_{\mathbb{R}} w\Gamma(dw) < 0$, $\Gamma(-\infty, 0] > 0$, en particular tenemos que la medida sobre $B(\mathbb{R})$ definida mediante

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1; & A = \{0\} \\ 0; & e.o.c. \end{cases}$$

es una medida de irreducibilidad y todos los compactos son petite.

Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{(-x,\infty]} w\Gamma(dw),$$

por el Teorema 43, F es continua, además, $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = \beta$; de modo que existe $x_0 > 0$ tal que $F(x_0) = \int_{(-x_0,\infty]} w\Gamma(dw) < \beta/2 < 0$.

Sean $C = [0, x_0]$ y $f : (\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+)) \to (\mathbb{R}^+, B(\mathbb{R}^+))$ dada por $f(x) = x$. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$C_f(n) = \{y \in \mathbb{R}^+ | f(y) \leq n\} = [0, n]$$

de modo que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $C_f(n)$ es compacto, en particular, petite. Por lo tanto f es libre de petites.

Ahora veamos que

$$\Delta f(x) \leq 0, \text{ para toda } x \in C^c$$

Sea $x \in C^c$,

$$\Delta_f(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} (f(y) - f(x))P(x, dy) = \int_{[0,\infty]} (f(y) - f(x))P(x, dy)$$

$$\leq \int_{(0,\infty]} (y - x)\Gamma(dy - x) = \int_{(-x,\infty]} w\Gamma(dw)$$

$$\leq \int_{(-x_0,\infty]} w\Gamma(dw) \geq \beta/2 < 0,$$

es decir, $\Delta f(x) \leq 0$, para toda $x \in C^c$.

Del Teorema 29 concluimos que Φ es recurrente.

□

Para el caso $\beta = 0$ no podemos elegir una función de prueba tan sencilla como la identidad, es más, tenemos que pedirle condiciones sobre el segundo momento de la variable aleatoria W_1 para poder asegurar la recurrencia. Un par de Lemas técnicos nos ayudarán.

Lema 11. *Sean W una variable aleatoria tal que $W \sim \Gamma$, $t \in \mathbb{R}$ y $s > 0$. Entonces, para cualquier $A \subseteq \{w \in \mathbb{R} | s + tw > 0\}$ tal que $A \in B(X)$,*

$$E[log(s + tW)1_{W\in A}] \leq \Gamma(A)log(s) + \frac{t}{s}E[W1_{\{W\in A\}}] - \frac{t^2}{2s^2}E[W^2 1_{\{W\in A, tW<0\}}]$$

Demostración. Para la prueba, usaremos la siguiente desigualdad

$$\text{para toda } x > -1, \quad log(1 + x) \leq x - (\frac{x}{2})^2 1_{\{W<0\}}$$

Por propiedades de logaritmo y por la desigualdad anterior

$$log(s + tW)1_{\{W\in A\}}$$

$$= [log(s) + log(1 + tW/s)]1_{\{W\in A\}}$$

$$\leq [log(s) + tW/s]1_{\{W\in A\}} - \frac{(tW)^2}{2s^2} 1_{\{tW<0, W\in A\}}$$

Aplicando esperanza a la desigualdad anterior, y por la linealidad de esta,

$$E[log(s+tW)1_{\{W\in A\}}] \leq E[log(s)1_{\{W\in A\}}]+E[(t/s)W]-\frac{t^2}{2s^2}E[W^2 1_{\{tW<0,W\in A\}}]$$

$\square$

Lema 12. *Sea W una variable aleatoria tal que $W \sim \Gamma$ y $E[W^2] \in \mathbb{R}$. Si $s > 0$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} -xE[W1_{\{W<t-sx\}}] = \lim_{x\to\infty} xE[W1_{W>t+sx}] = 0$$

Demostración. Al ser s y t fijas, para x suficientemente grande

$$0 \leq (t+sx)E[W1_{\{W>t+sx\}}] = (t+sx)\int_{(t+sx,\infty)} w\Gamma(dw)$$

$$= \int_{(t+sx,\infty)} (t+sx)w\Gamma(dw) \leq \int_{(t+sx,\infty)} w^2\Gamma(dw)$$

Dado que

$$\int_{\mathbb{R}} w^2\Gamma(dw) = E[W^2] \in \mathbb{R},$$

por el Teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{x\to\infty} \int_{(t+sx,\infty)} w^2\Gamma(dw) = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} (t+sx)E[W1_{\{W>t+sx\}}] = 0,$$

en particular

$$t\lim_{x\to\infty} E[W1_{\{W>t+sx\}}] = (-s)\lim_{x\to\infty} xE[W1_{\{W>t+sx\}}],$$

Como W tiene segundo momento finito, W tiene primer momento finito, de modo que

$$\lim_{x\to\infty} E[W1_{\{W>t+sx\}}] = 0$$

Al ser $s > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} xE[W1_{\{W>t+sx\}}] = 0$$

Para el segundo límite, existe x suficientemente grande tal que

$$0 \geq (t-sx)E[W1_{\{W<t-sx\}}] = (t-sx)\int_{(-\infty,t-sx)} w\Gamma(dw) = \int_{(-\infty,t-sx)} (t-sx)w\Gamma(dw)$$

$$\geq \int_{(-\infty,t-sx)} w^2\Gamma(dw).$$

Dado que,

$$\int_{\mathbb{R}} w^2\Gamma(dw) = E[W^2] \in \mathbb{R},$$

por el Teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{x\to\infty} \int_{(-\infty,t-sx)} w^2\Gamma(dw) = 0,$$

y así,

$$\lim_{x\to\infty} (t-sx)E[W1_{\{W<t-sx\}}] = 0,$$

es decir,

$$t \lim_{x\to\infty} E[W1_{\{W<t-sx\}}] = (-s) \lim_{x\to\infty} (-x)E[W1_{\{W<t-sx\}}]$$

Como W tiene segundo momento finito, W tiene primer momento finito, de modo que

$$t \lim_{x\to\infty} E[W1_{\{W<t-sx\}}] = 0$$

Al ser $s > 0$

$$\lim_{x\to\infty} (-x)E[W1_{\{W<t-sx\}}] = 0$$

$\square$

Teorema 31. *Si W es una variable de incremento en $\mathbb{R}$ con $\beta = 0$ y $0 < E[W^2] < \infty$, entonces Φ es recurrente*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} log(1+x); & x > R \\ 0; & 0 \leq x \leq R. \end{cases}$$

donde R una constante a elegir.

Análogamente al Teorema anterior, al ser $\beta = 0$ y $E[W^2] > 0$, entonces $\Gamma(-\infty, 0) > 0$, por lo que todos los compactos son petite. Sea $n \in \mathbb{N}$,

$$C_f(n) = \{y \in \mathbb{R}^+ | f(y) \leq n\} = \begin{cases} [0,R] & n < R \\ [0,n] & n \geq R \end{cases}$$

de modo que f es libre de petites.

Sean $x > R$ tal que $s = 1 + x$, $t = 1$ y $A = \{w \in \mathbb{R} | x + w \geq R\} \subseteq \{w \in \mathbb{R} | 1 + x + W > 0\}$, por el Lema 11

$E_x[f(\phi_1)]$

$$= E[log(1 + x + W)1_{\{W \in A\}}] = E[log(s + tW1_{\{W \geq R-x\}}]$$

$$\leq \Gamma((-\infty, R - x])log(1 + x) + \frac{1}{1+x}E[W1_{\{W \geq R-x\}}] - \frac{1}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{R-x \leq W < 0\}}]$$

$$\leq log(1 + x) + \frac{1}{1+x}E[W1_{\{W \geq R-x\}}] - \frac{1}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{R-x \leq W < 0\}}]$$

Por el Lema 12,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x}E[W1_{\{W \geq R-x\}}] = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x}\right)\left(\lim_{x\to\infty} xE[W1_{\{W \geq R-x\}}]\right) = 1{\cdot}0 = 0,$$

es decir,

$$\frac{x}{1+x}E[W1_{\{W \geq R-x\}}] = o(x^{-2})$$

Ahora,

$$\frac{x^3}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{R-x<W<0\}}] = \frac{x^3}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{W^2<0\}}] + \frac{x^3}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{W \leq R-x\}}]$$

y, como $E[W^2] < \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{W \leq R-x\}}] = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2(1+x)^2}\right)\left(\lim_{x\to\infty} E[W^2 1_{\{W \leq R-x\}}]\right) = 0{\cdot}0 = 0,$$

de modo que

$$\frac{1}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{R-x<W<0\}}] = \frac{1}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{W^2<0\}}] + o(x^{-3})$$

De todo lo anterior

$E_x[f(\phi_1)]$

$$\leq log(1+x) + \frac{1}{1+x}E[W1_{\{W\geq R-x\}}] - \frac{1}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{R-x\leq W<0\}}]$$

$$= log(1+x) + o(x^{-2}) - \frac{x^2}{2(1+x)^2}E[W^2 1_{\{W^2<0\}}] - o(x^{-3})$$

$$\leq log(1+x) + o(x^{-2}) - o(x^{-3})$$

Si tomamos R suficientemente grande, entonces, para toda $x > R$,

$$o(x^{-2}) - o(x^{-3}) \leq 0$$

Por lo tanto

$$E_x[f(\phi_1)] \leq log(1+x) = f(x), \text{ para toda } x > R.$$

Sea $C = [0, R]$,

$$\Delta_f(x) \leq 0, \text{ para toda } x \in C^c$$

Por el Teorema 29, tenemos que Φ es recurrente.

$\square$

Conclusiones generales

En los Capítulos 1 y 2, no son más que generalizaciones de lo hecho en el caso discreto; las ideas para las demostraciones son las mismas, sólo que la forma de trabajar cambia, dada la nueva estructura del espacio. En cambio, las Cadenas muestreadas son una herramienta que no es necesaria para el estudio de Cadenas de Markov en espacio de estados discreto, pero que en este trabajo se vuelven insdispensables.

El Capítulo 3 es central en la Tesis, en donde la diferencia entre lo discreto y lo general es más que evidente: si una Cadena no tiene un átomo accesible, no podemos trabajar análogamente al caso discreto. Si construimos uno artificial, es posible. De modo que el Teorema de existencia de conjuntos pequeños es el Teorema más imporante de este trabajo, ya que nos dan la posibilidad de construir la Cadena de ruptura.

En el Capítulo 4, hacemos uso de toda la información concentrada en los capítulos anteriores para dar una clasificación dicotómica consistente en Cadenas φ-irreducibles de dos maneras: la primera, clasificando las Cadenas con átomos y para las que no tengan, construir uno artificial y extender el criterio a la Cadena original; y la segunda identificando los conjuntos uniformemente transitorios. Ambas formas son totalmente análogas a como se trabaja en el caso discreto; sólo que la primera forma es más elegante y matemáticamente sólida.

Apéndice

La primera parte del Apéndice son una serie de Teoremas que son utilizados en toda la tesis, que no vale la pena citarlos cada vez que son usados, ya que son utilizados un sinnúmero de veces, además de ser bastante conocidos. Pero si es importante recordarlos.

Teorema 32. *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ y $\zeta = \{n_1, n_2, \ldots\}$ una reordenación de $\mathbb{N}$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j}$$

Teorema 33. *Sea (D, d) un espacio métrico y σ_d la σ-algebra de los Borelianos. Si $\{f_n : X \to D\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces $f : X \to D$ definida mediante*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

es una función medible.

Teorema 34. *Sea $\{f_n : X \to \mathbb{R}^+\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de funciones medibles y*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Entonces

$$\int_X f d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

La siguiente lista de Teoremas no es tan básica y las veces que son usados, son citados.

Teorema 35 (De metrizabilidad de Uryshon)**.** *Si (X, τ_X) es regular y segundo numerable, entonces existe una métrica d para X cuya topología coincide con τ_X.*

En los dos siguientes Teoremas, (S, d) un espacio métrico separable, σ_S la σ-álgebra de los borelianos de S, Θ el espacio de todas las medidas de probabilidad sobre σ_S y $\mathcal{D}$ la métrica de Prohovorov sobre Θ.

Teorema 36. *Sea*

$$\kappa = \left\{ \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \delta_{x_m} | n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+ \ y \ \sum_{m=1}^{n} \alpha_m = 1, \quad x_1, \ldots, x_n \in X \right\}.$$

Entonces κ *es denso en* $(\Theta, \mathcal{D})$

Teorema 37. *Sea* $\{\mu_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Theta$ *que converge en* $(\Theta, \mathcal{D})$ *a la medida de probabilidad* μ*, entonces* $\{\mu_n | n \in \mathbb{N}\}$ *converge debilmente a* μ

Teorema 38. *Sean* $f : (X, \sigma_X) \to (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ *medible y acotada y* $g \in L^1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$*. Entonces* $f * g$ *es continua*

Teorema 39. *Sean* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ *cerrado bajo adición y* $d = m.c.d.(\mathcal{A})$*. Entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para toda* $n \geq N$, $nd \in \mathcal{A}$

Teorema 40 (De descomposición de Lebesgue)**.** *Sea* (X, σ_X) *un espacio medible y sean* η *y* μ *dos medidas* σ*-finitas sobre* σ_X*. Entonces existe* ν*, medida sobre* σ_X*, tal que* $\nu \perp \mu$*; y existe* $f : X \to \mathbb{R}$*,* σ_X *medible, tales que*

$$\eta(A) = \int_A f d\mu + \nu(A), \ \textit{para todo} \ A \in \sigma_X$$

Teorema 41 (De Diferenciación Básico de Lebesgue)**.** *Sea* X *un espacio LcsH. Sean* η *y* μ *son medidas sobre* σ_X *tal que* η *es regular y* μ σ*-finita. Si*

$$\eta(A) = \int_A f d\mu + \nu(A), \ \textit{para toda} \ A \in \sigma_X,$$

es la descomposición de Lebesgue de η*, entonces*

$$f(x) = \lim_{i \to \infty} \frac{\eta(B_i(x))}{\mu(B_i(x))}$$

Teorema 42 (De la medida producto)**.** *Sean* (X, σ_X, μ) *y* (Y, σ_Y, υ) *dos espacio de medida* σ*-finita. Entonces, la función conjuntista* $\pi : \sigma_X \otimes \sigma_Y \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por*

$$\pi(F) = \int_X \upsilon(F_x) d\mu = \int_Y (F_y) d\upsilon$$

es una medida σ*-finita sobre* $\sigma_X \otimes \sigma_Y$ *tal que* $\pi(A \times B) = \mu(A)\upsilon(B)$*, para todo* $A \times B \in \sigma_X \times \sigma_Y$*.*

Teorema 43 (Continuidad absoluta de la integral)**.** *Sean* Γ *una Medida sobre* $B(\mathbb{R})$ *y* $f \in L_1(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}, \Gamma)$*. Entonces la función* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida mediante*

$$F(x) = \int_{(-x,\infty]} f(y)\Gamma(dy)$$

es absolutamente continua.

Bibliografía

[1] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right.* Springer.

[2] Robert G. Bartle. *Elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley.

[3] Robert G. Bartle. *Introduction to Real Analysis.* Wiley.

[4] R.M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[5] Gerald B. Folland. *Real Analysis, Modern Thechiques and Their Applications.* John Wiley and Sons Inc.

[6] B.V. Gnedenko. *The Theory of Probability.* Mir Publishers.

[7] Paul G. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone. *Introduction to Stochastic Processes.* University of California.

[8] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability.* Springer.

[9] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomín. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Mir Publishers.

[10] Emilio Esteban Lluis Puebla. *Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica.* Sistemas Técnicos de Edición.

[11] Daniel A. Marcus. *Combinatorics, A Problem Oriented Approach.* The Mathematical Association of America.

[12] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. *Markov Chains and Stochastic Stability.* Springer-Verlag.

[13] Carlos Prieto. *Topología Básica.* Fondo de Cultura Económica.

[14] Sidney I. Resnick. *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhäuser.

[15] Sidney I. Resnick. *A probability Path.* Birkhäuser.

[16] Daniel Revuz. *Markov Chains.* North-Holland Mathematical Library.

[17] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Tegels. *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* Wiley.

[18] Sheldon M. Ross. *A first Course in Probability.* Pretince Hall.

[19] Sheldon M. Ross. *Stochastic Processes.* John Wiley & Sons Inc.

[20] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill.

[21] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill.