



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

“PARTICIONES SIN CRUCE EN PUNTOS BICOLOREADOS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRA EN CIENCIAS
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A:

MARIA FERNANDA SANCHEZ PUIG

DIRECTOR DE TESIS: Dr. JORGE URRUTIA GALICIA

México, D.F.

2009.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Áreas de aplicación	2
2. Fundamentos	5
2.1. Métodos de conteo	5
2.1.1. Permutaciones	5
2.1.2. Combinaciones	6
2.1.3. Coeficientes binomiales	7
2.2. Conjuntos de órdenes parciales	8
2.2.1. Ordenes parciales	9
2.2.2. Visualización de un conjunto parcialmente ordenado	11
2.2.3. Elementos especiales dentro de un orden	12
2.2.4. Tipos de orden especiales: lattices	13
2.3. Números de Catalan	15
2.4. Crecimiento asintótico de funciones	20
2.4.1. Definición formal	20
2.4.2. Propiedades	22
2.5. Geometría computacional	25
3. Particiones sin cruce	29
3.1. Partición de conjuntos	29
3.2. Definición básica	32
3.3. Particiones sin cruce y los números de Catalan	33
3.3.1. Particiones sin cruce como una latiz	35

3.3.2.	Particiones sin cruce y árboles binarios	36
3.3.3.	Particiones sin cruce y triangulaciones de polígonos convexos.	42
3.3.4.	Particiones sin cruce y el problema del apretón de manos	43
3.4.	Combinatoria enumerativa	45
3.4.1.	Rutas monotónicas	45
3.4.2.	Funciones de crecimiento restringido	46
3.4.3.	Permutaciones restringidas	48
3.5.	Topología	49
3.5.1.	Mapas	49
3.6.	Geometría combinatoria	51
3.6.1.	Asociaedro	51
3.7.	Generalización de las particiones sin cruce	53
4.	Particiones sin cruce bicromáticas	61
4.1.	Particiones sin cruce en bloques monocromáticos	61
4.2.	Particiones sin cruce en bloques balanceados	65
4.2.1.	Posición convexa	66
4.2.1.1.	Conteos inferior y superior	66
4.2.1.2.	Configuraciones extremas	71
4.2.2.	Posición general	77
4.2.2.1.	Configuraciones especiales	77
4.2.2.2.	Conteos inferior y superior	80
5.	Conclusiones	85
5.1.	Trabajo Futuro	86

Índice de figuras

2.1. Diagrama de Hasse del conjunto de todos los divisores de 60.	11
2.2. Secuencias de paréntesis bien formadas	18
2.3. El cierre convexo de un conjunto de puntos en tres dimensiones.	26
2.4. Un corte tipo ham-sandwich.	28
3.1. Una partición de S	30
3.2. (a)Partición con cruce: $167/2358/4$, (b) Partición sin cruce: $1/256/34/78$	33
3.3. Particiones sin cruce de un conjunto para $1 \leq n \leq 4$	34
3.4. Lattice NC_4	36
3.5. Gráfica con 4 vértices	37
3.6. Gráfica conexa	37
3.7. Una gráfica de árbol	38
3.8. Un árbol binario	39
3.9. Árboles binarios con $0 \leq n \leq 4$ vértices	40
3.10. Relación de recurrencia de un árbol binario.	41
3.11. Triangulación de un n -ágono, donde $3 \leq n \leq 6$	42
3.12. Configuraciones posibles de apretón de manos para $0 \leq n \leq 4$	44
3.13. Un camino de Catalan y su partición sin cruce asociada.	46
3.14. $\pi = 145/26/3 \in \Pi_6$	47
3.15. $\pi = 146/23/5 \in \Pi_6$	48

3.16. Un hiper-mapa en el plano	50
3.17. Γ_2 y Γ_3 formando la frontera de los polítopos convexos: (a) Q_2 y (b) Q_3	52
3.18. El asociaedro Q_4	53
3.19. Gráfica de una partición sin cruces.	54
3.20. Separación de convexos utilizando semilíneas.	55
3.21. Clasificación de una partición sin cruce: columna(\bullet), aislados(\circ), superiores(\oplus), inferiores(\ominus).	56
3.22. La doble cadena D_{18}	58
3.23. Lugares de acoplamiento	59
4.1. Partición balanceada de un conjunto de puntos bicromático.	66
4.2. Conjunto convexo de puntos bicolorados separables.	67
4.3. Ejemplo de una partición de puntos bicolorados.	68
4.4. Conjunto de puntos con una coloración alternante	69
4.5. Ejemplo de una coloración no alternante.	71
4.6. Nuevas particiones obtenidas en la coloración \tilde{k} cuando $r_1 \in P_i$ y $r_2, b_1 \in P_j$	72
4.7. Nuevas particiones obtenidas en la coloración \tilde{k} cuando $r_1, r_2 \in P_i$ y $b_1 \in P_j$	73
4.8. Nuevas particiones obtenidas en la coloración \tilde{k} cuando $r_1 \in P_i, r_2 \in P_j$ y $b_1 \in P_k$	74
4.9. La doble cadena D_{16} con una coloración alternante.	78
4.10. Un emparejamiento perfecto bicromático de la doble cade- na D_{16} en una coloración alternante.	79

Capítulo 1

Introducción

La geometría computacional es una rama de las ciencias de la computación dedicada al estudio de los algoritmos que pueden ser expresados en términos de geometría. Algunos problemas puramente geométricos surgen del estudio de los algoritmos de geometría computacional, y esos problemas son también considerados como parte de la geometría computacional.

El principal impulso para el desarrollo de la geometría computacional como una disciplina son los avances en gráficas y el diseño asistido por computadora, pero muchos de los problemas en la geometría computacional son clásicos por naturaleza.

Algunas aplicaciones importantes de la geometría computacional incluyen la robótica (problemas de movimiento y visibilidad), los sistemas de información geográfica (SIG) (búsqueda y localización geométrica, planificación de itinerarios) y diseño de circuitos integrados.

Una de las principales ramas de la geometría computacional es la geometría combinatoria, también llamada geometría discreta, que trata a los objetos geométricos como entidades discretas ya sea por su naturaleza o por su representación.

Dentro de esta rama de la geometría combinatoria podemos encontrar a la combinatoria enumerativa que estudia el número de maneras en que

ciertos patrones se pueden formar tomando en cuenta su configuración geométrica. Además de contar el número de elementos dentro de un conjunto, muchos de los objetos que estudia, como las particiones sin cruce, tienen definiciones relativamente simples en términos combinatorios.

En este documento, se trata de ilustrar el problema de las particiones sin cruce con el apoyo de la geometría combinatoria.

En el capítulo 2 mostraremos algunos conceptos fundamentales del tema.

El objetivo del capítulo 3 es mostrar, a través de diversos temas y sin tratar de dar una exposición exhaustiva, las diferentes manifestaciones de las particiones sin cruce (y algunos objetos combinatorios relacionados) dentro de un contexto geométrico.

También, se establece la notación y los antecedentes básicos, así como las propiedades teóricas de las particiones sin cruce.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos para el problema de las particiones balanceadas sin cruce en conjuntos de puntos bicromáticos.

Finalmente, el capítulo 5 presenta las conclusiones y algunas líneas de investigación que se podrían seguir como trabajo a futuro.

1.1. Áreas de aplicación

Tanto como objeto principal de estudio, y como un objeto de teoría aplicada, o como un objeto matemático que sirve de modelo para un fenómeno de interés independiente, las particiones sin cruce apoyan una rica cantidad de temas de matemáticas, dentro y más allá de la combinatoria enumerativa.

En el ámbito de la combinatoria enumerativa, se pueden estudiar vínculos con los números de Catalán y describir algunos resultados expresables

en términos del retículo de las particiones sin cruce que se relacionan con problemas topológicos. Así como, las relaciones entre objetos geométricos y la generalización de las particiones sin cruce.

En particular, dos lugares donde se manifiestan estas conexiones son en el estudio de gráficas en superficies y el uso de diagramas en la teoría nudos.

Mientras que, en otros ámbitos de la combinatoria, se relaciona con politopos convexos como el asociaedro.

Otros ejemplos donde las particiones sin cruce están fuera del interés de la combinatoria se pueden encontrar en el artículo [8]. Algunos ejemplos son:

- *Álgebra*: Estudia los objetos de interés algebraico, como son las funciones y grupos simétricos, dados por el retículo de las particiones sin cruce.
- *Biología molecular*: Utilizando particiones sin cruce, se plantea un modelo idealizado de la estructura secundaria de RNA.
- *Teoría de la Probabilidad*: La relación entre las particiones sin cruce y probabilidad es a través de caminos de retículas. La retícula de las particiones sin cruce se introdujo por el trabajo de Speicher dentro de la probabilidad cuántica y la noción de medidas de libre convolución introducidas por Voiculescu. Lo mismo ocurre en el estudio de probabilidad libre.
- *Otras áreas*: Una de las principales contribuciones y relevancia del tema se centra en el área de la geometría computacional y está asociado a otros problemas como, emparejamientos sin cruce, subdivisiones, triangulaciones, árboles y ciclos generadores en gráficas, como muestra el artículo [3].

Capítulo 2

Fundamentos

2.1. Métodos de conteo

Muchos problemas en matemáticas, ingeniería y ciencias de la computación involucran contar objetos con propiedades particulares.

La teoría del conteo intenta responder a la pregunta *¿Cuántas?* sin hacer enumeraciones. Por ejemplo, podríamos preguntar: *¿Cuántos números diferentes de n bits hay?* o *¿Cuántos ordenamientos de n elementos distintos hay?*

A pesar de que no existen reglas absolutas que se puedan utilizar para resolver todos los problemas de conteo, muchos de los problemas que surgen frecuentemente se pueden resolver utilizando algunas reglas básicas.

A continuación, se mostrarán algunas técnicas y elementos estándar de la teoría de conteo.

2.1.1. Permutaciones

Una **permutación** de un conjunto finito S es una secuencia ordenada de todos los elementos de S , donde cada elemento aparece exactamente una vez.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos el conjunto $S = \{a, b, c\}$. Entonces, hay 6 permutaciones de S :

$$\{abc\}, \{acb\}, \{bac\}, \{bca\}, \{cab\}, \{cba\}$$

Hay $n!$ permutaciones de un conjunto de n elementos, ya que el primer elemento de la secuencia puede ser elegido de n formas, el segundo de $n-1$ maneras, el tercero de $n-2$ maneras, y así sucesivamente.

Una k -**permutación** de S es una secuencia ordenada de k elementos de S , donde ningún elemento aparece más de una vez en la secuencia.

Por lo tanto, una permutación simple es una permutación de n elementos de un conjunto de tamaño n .

Ejemplo 2.1.2. Las doce 2-permutaciones del conjunto $S = \{a, b, c, d\}$ son:

$$\begin{aligned} &\{ab\}, \{ac\}, \{ad\}, \{ba\}, \{bc\}, \{bd\}, \\ &\{ca\}, \{cb\}, \{cd\}, \{da\}, \{db\}, \{dc\} \end{aligned}$$

El número de k -permutaciones de un conjunto de tamaño n es:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ya que hay n formas de elegir el primer elemento, $n-1$ maneras de elegir al segundo elemento, y así sucesivamente hasta que k elementos son seleccionados, el último de ellos es una selección de $n-k+1$ elementos.

2.1.2. Combinaciones

Una k -**combinación** de un conjunto S de n elementos es un k -subconjunto de S .

Ejemplo 2.1.3. Hay seis 2-combinaciones del conjunto $S = \{a, b, c, d\}$:

$$\{ab\}, \{ac\}, \{ad\}, \{bc\}, \{bd\}, \{cd\}$$

Podemos construir una k -combinación de un conjunto de n elementos, eligiendo k elementos distintos del conjunto.

El número de k -combinaciones de un conjunto de n elementos, se puede expresar en términos del número de k -permutaciones de un conjunto de tamaño n .

Para cada k -combinación, hay exactamente $k!$ permutaciones de sus elementos, cada uno de los cuales es una k -permutación diferente de los conjuntos de tamaño n .

Así pues, el número de k -combinaciones de un conjunto de n elementos es el número de k -permutaciones dividido entre $k!$; esto es

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Para $k = 0$, esta fórmula nos dice que el número de maneras de elegir 0 elementos de un conjunto con n elementos es 1 (no 0), ya que $0! = 1$.

2.1.3. Coeficientes binomiales

Los coeficientes binomiales modelan matemáticamente el proceso de seleccionar k elementos dentro de una colección de n elementos en circunstancias donde el orden de selección no importa y la repetición de elementos no está permitida.

Usaremos la notación $\binom{n}{k}$ para denotar al número de k -combinaciones de un n -conjunto. Entonces tenemos que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esta fórmula es simétrica en k y $n - k$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Estos números son conocidos como los **coeficientes binomiales**, debido a su aparición en la **expansión binomial**:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Un caso especial de la expansión binomial ocurre cuando $x = y = 1$:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Esta fórmula corresponde al conteo del número de subconjuntos (incluyendo el conjunto completo y el conjunto vacío) que hay en un conjunto de tamaño n . Se le llama **conjunto potencia** y se deriva del hecho de que el número total de distintos subconjuntos de un k – conjunto de n elementos está dado por la suma del coeficiente binomial.

2.2. Conjuntos de órdenes parciales

La teoría del orden es una rama de las matemáticas que estudia los diversos tipos de relaciones binarias y que dan la noción intuitiva de ordenamiento, proporcionando un marco para decidir cuándo una cosa es *inferior* a o *precede a* otra.

La noción de orden aparecen en todas partes, por lo menos en lo que respecta a las matemáticas y áreas relacionadas. El primer tipo de orden que normalmente se muestra en la educación matemática es el orden \leq en los números naturales. Este concepto se puede extender fácilmente a otros grupos de números, como los enteros y los reales.

De hecho, la idea de ser mayor o menor que otro número es una de las intuiciones básicas de varios sistemas en general. Otro ejemplo es el orden lexicográfico de las palabras en un diccionario.

Estos tipos de órdenes tienen una propiedad especial: cada elemento se puede comparar con cualquier otro elemento, es decir, es mayor, menor o

igual. Sin embargo, esto no siempre es un requisito deseado. Por ejemplo, la posibilidad de ordenar los subconjuntos de un conjunto. Si un conjunto A contiene todos los elementos de un conjunto B , entonces B se dice que es menor o igual que A .

Sin embargo, hay algunos conjuntos que no pueden ser relacionados de ésta manera. Cuando ambos conjuntos contienen elementos que no están en el otro, entonces los dos conjuntos no están relacionados entre sí bajo la propiedad de subconjunto de inclusión. Por lo tanto, es sólo un orden parcial, frente al orden total mencionado antes.

2.2.1. Ordenes parciales

En matemáticas, en especial para la teoría de orden, un conjunto **parcialmente ordenado** (o *poset*) formaliza el concepto intuitivo de orden de los elementos de un conjunto.

Un poset consiste de un conjunto y una relación binaria que describe, para algunas parejas de elementos en el conjunto, el requisito de que uno de los elementos debe preceder a otro. Sin embargo, un conjunto ordenado difiere de un orden total, en que algunos pares de elementos no pueden ser relacionados entre sí de esta manera.

Un poset finito se pueden visualizar a través de su diagrama de Hasse¹, que describe la relación de orden entre determinados pares de elementos y permite reconstruir la estructura total del orden parcial.

Un ejemplo de la vida real de un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto de personas ordenadas por su descendencia genealógica. Algunos pares de personas tienen la relación ancestro-descendiente, pero no todos tienen esa relación.

¹Nombrados así en honor a Hemult Hasse (1898-1979)

Formalmente, un orden parcial es una relación binaria \leq sobre un conjunto P que cumple con las propiedades de ser reflexiva, asimétrica y transitiva, es decir, $\forall a, b, c \in P$, se cumple:

- **Reflexiva:** $a \leq a$.
- **Asimétrica:** Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.
- **Transitiva:** Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

Analizando estas propiedades, se ve inmediatamente que el orden de los números naturales, enteros, racionales y reales son órdenes en el sentido antes citado.

Sin embargo, tienen la propiedad adicional de ser ordenes totales, es decir, $\forall a, b \in P$, cumplen:

- **Totalidad:** $a \leq b$ ó $b \leq a$.

Si un orden tiene la propiedad de totalidad, entonces cualesquiera dos elementos de un poset son comparables. A este tipo de orden también se le llama **orden lineal** o **cadena**.

Si ocurre lo contrario y si cualesquiera dos elementos son incomparables se les llama **anticadena**.

Ejemplo 2.2.1. Algunos ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados son:

- Los subconjuntos de un conjunto.
- La relación de divisibilidad $|$. Para dos números naturales n y m , escribimos $n|m$ si n divide a m sin residuo. Se ve fácilmente que se obtiene un orden parcial.
- La relación de igualdad ($=$) de cualquier conjunto es también un orden parcial en el que cada dos elementos son incomparables.

2.2.2. Visualización de un conjunto parcialmente ordenado

Los *diagramas de Hasse* pueden representar visualmente los elementos y las relaciones de un ordenamiento parcial.

Son representaciones de gráficas donde para un conjunto ordenado (S, \leq) cada uno de los elementos de S se representa como un vértice y se dibuja un segmento de línea o curva, de abajo hacia arriba, que va de un elemento x a un elemento y si $x < y$, y no existe otro elemento z tal que $x < z < y$.

En este caso, se dice que y *cubre* a x o que y es un *sucesor inmediato* de x . Cualquier diagrama únicamente determina un orden parcial, pero hay muchas posibilidades de ubicar los elementos en el plano, lo que resulta en diferentes diagramas de Hasse para un tipo de orden dado y que puede tener una amplia variedad de apariencias.

Ejemplo 2.2.2. El conjunto $S = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60)$ de todos los divisores de 60, ordenados parcialmente por la propiedad de divisibilidad tiene el siguiente diagrama de Hasse:

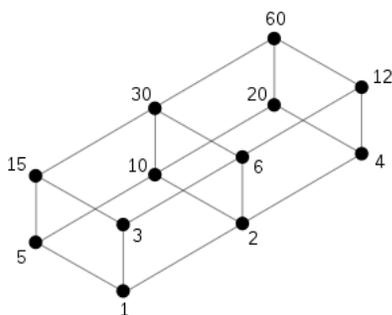


Figura 2.1: Diagrama de Hasse del conjunto de todos los divisores de 60.

2.2.3. Elementos especiales dentro de un orden

Dentro de un conjunto parcialmente ordenado puede haber algunos elementos que desempeñan un papel especial. Un ejemplo es el **elemento mínimo** del poset.

Formalmente, un elemento m es un elemento mínimo si:
 $m \leq a, \forall a$ dentro de un orden.

El **elemento máximo** de un poset se define de manera dual.

Un poset que contiene un elemento máximo y un mínimo se dice que es un **poset acotado**.

Los elementos máximos y mínimos pueden no existir, tal es el caso de los números reales. Sin embargo, si existen dentro del conjunto, entonces son únicos.

Los subconjuntos de conjuntos parcialmente ordenados heredan el orden. Sin embargo, también hay elementos de un poset que son especiales con respecto a algún subconjunto del orden.

Esto nos lleva a la definición de **límite superior**:

Dado un subconjunto S de algún poset P , un límite superior de S es un elemento $b \in P$ que está por encima de todos los elementos de S .

Formalmente, esto significa que

$$s \leq b, \forall s \in S$$

Los límites inferiores se definen invirtiendo el orden. Por ejemplo, -5 es un límite inferior de los números naturales como un subconjunto de los números enteros.

Dado un conjunto de conjuntos, un límite superior para dichos conjuntos bajo un ordenamiento de subconjuntos, está dado por la operación de unión de conjuntos. De hecho, este límite superior es bastante especial: es el conjunto más pequeño que contiene todos los conjuntos. Por lo tanto,

hemos encontrado el menor de los límites superiores de un conjunto de conjuntos.

Este concepto también se denomina **supremo**, y para un conjunto S se denota como $\sup(S)$ ó $\bigcup S$. Por el contrario, el mayor límite inferior es conocido como **ínfimo** y se denota como $\inf(S)$ ó $\bigwedge S$.

Por ejemplo, considera la relación de divisibilidad $|$ en números naturales. El menor límite superior de dos números es el número más pequeño que se divide entre dos de ellos, es decir, el mínimo común múltiplo de los números. El mayor límite inferior es, a su vez, dada por el máximo común divisor.

2.2.4. Tipos de orden especiales: lattices

Muchos tipos de orden surgen cuando se garantiza la existencia de un elemento ínfimo y un elemento supremo dentro del conjunto.

Centrándose en este aspecto, que se refiere como la integridad del orden, se obtienen:

- **Posets acotados:** Posets con un elemento ínfimo y un elemento supremo.
- **Lattices o Celosías:** En las que todo conjunto finito no vacío tiene un elemento supremo y un elemento ínfimo.
- **Lattices o Celosías completas:** En el que cada conjunto tiene un elemento supremo y un elemento ínfimo.

Nos enfocaremos al estudio de las lattices como posets.

Un poset (L, \leq) es una lattice siempre que cumpla los siguientes dos axiomas:

- **Existencia de unión binaria:** Para cualesquiera dos elementos a y b en L , el conjunto (a, b) tiene una unión (menor límite superior ó supremo) y se denota $a \vee b$.

- **Existencia de intersección binaria:** Para cualesquiera dos elementos a y b en L , el conjunto (a, b) tiene una intersección (máximo límite inferior o ínfimo) y se denota $a \wedge b$.

Esta definición hace que ambas operaciones \vee y \wedge sean binarias y monótonas con respecto al orden, es decir: $a_1 \leq a_2$ y $b_2 \leq b_1$ implica que $a_1 \vee b_1 \leq a_2 \vee b_2$ y $a_1 \wedge b_1 \leq a_2 \wedge b_2$.

El primer axioma dice que L es un supremo-semilattice y el segundo axioma dice que L es una ínfimo-semilattice. Entonces, las particiones de un conjunto forman un supremo-semilattice.

Utilizando un argumento de inducción podemos deducir que todo subconjunto finito no vacíos de una lattice tiene un elemento supremo y un elemento ínfimo.

Ejemplo 2.2.3. Algunos ejemplos de conjuntos que forman una lattice son:

- Los números naturales (incluido el 0) en su orden habitual, forman una lattice, bajo las operaciones de *min* y *max*. 0 es el elemento ínfimo, pero no hay supremo.
- El plano cartesiano de números naturales, ordenado por la operación \leq de modo que $(a, b) \leq (c, d) \leftrightarrow (a \leq c) \wedge (b \leq d)$. (0, 0) es el ínfimo y no hay supremo.
- Los números naturales también forman una lattice bajo las operaciones de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, con la relación de divisibilidad: $a \leq b$, si a divide a b . 1 es el ínfimo y 0 es el supremo.

Algunas de las propiedades que cumplen las lattices son:

- **Completez**

Un poset es llamada una lattice completa si todos sus subconjuntos tienen un supremo y un ínfimo.

- **Distributividad**

Dado que las lattices tienen dos operaciones binarias, es natural preguntarse cuándo una de ellas distribuye sobre la otra, es decir, cuándo una de las siguientes leyes duales se mantiene para cualesquiera tres elementos $a, b, c \in L$:

Distributividad de \vee sobre \wedge : $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Distributividad de \wedge sobre \vee : $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

- **Modularidad**

Para algunas aplicaciones la condición de distributividad es muy fuerte, pero la siguiente propiedad es más débil y usualmente útil.

Una lattice (L, \vee, \wedge) es modular, si para todos los elementos $a, b, c \in L$, cumplen la siguiente identidad:

Identidad de Modularidad: $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = [(a \wedge c) \vee b] \wedge c$.

Ley de Modularidad: $a \leq c \leq b \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Ambas condiciones son equivalentes.

- Además cumplen las propiedades de asociatividad, conmutatividad, idempotencia y absorción del álgebra binaria.

2.3. Números de Catalan

Hasta la fecha, han aparecido cerca de 400 artículos y problemas relacionados con los números de Catalan.

En 1965, William G. Brown, de la Universidad de Columbia Británica, Canadá, presentó un recuento histórico con una lista de sesenta referencias. Cinco años más tarde, Jo Anne Simpson Growney encontró las apariciones de los números de Catalan dentro de las estructuras algebraicas.

En 1976, Henry W. Gould de la Universidad de Virginia Occidental, Morgantown, publicó una extensa bibliografía sobre los números de Catalan, que contiene 470 listados. Richard P. Stanley del MIT, ha enumerado

más de setenta casos de los números de Catalán en su libro *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, y otros setenta en su sitio *Web Catalan Addendum*.

El matemático belga Eugene C. Catalán descubrió los números de Catalán en 1838, mientras estudiaba secuencias de parentizaciones bien formadas. A pesar de que llevan el nombre de Catalan, no fueron descubiertas por él.

Alrededor de 1751, Euler los encontró mientras estudiaba las triangulaciones de polígonos convexos. Sin embargo, según un artículo de 1988 del matemático chino J.J. Luo, el matemático chino Ming Antu los descubrió en 1730 a través de sus modelos geométricos. El trabajo de Ming fue publicado en chino, por lo que era desconocido en el Oeste.

Los números de Catalan son definidos como:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Como el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ es un número entero par cuando $n \geq 1$ entonces, cada número de Catalan es un entero.

Los primeros números de Catalán son:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \dots$$

Esta es la secuencia de números enteros 577 en el libro *A Handbook of Integer Sequences* de N.J.A. Sloane.

Hay otra forma de definir C_n :

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\ &= C_n \end{aligned}$$

Esto también confirma que todos los números de Catalan son enteros.

Es interesante observar que en 1941 H. Urban conjeturó una relación de recurrencia, observando un patrón, e hizo la siguiente observación:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_0} &= \frac{4 * 1 - 2}{1 + 1} \\ \frac{C_2}{C_1} &= \frac{4 * 2 - 2}{2 + 1} \\ \frac{C_3}{C_2} &= \frac{4 * 3 - 2}{3 + 1} \end{aligned}$$

Notando el patrón que sigue la secuencia, Urban infirió que

$$C_n = \frac{4n - 2}{n + 1} C_{n-1}$$

Ahora, presentaremos el problema de parentización de Catalan.

Primero notemos que la expresión $((ab)(cd))$ esta correctamente parentizada, pero $((ab)(y)(ab)cd)$ no lo esta.

Ejemplo 2.3.1. El número de maneras diferentes de parentizar $n + 1$ elementos con n paréntesis pares izquierdos y derechos, es decir, el número P_n de secuencias bien formadas de paréntesis izquierdos y derechos que se pueden formar con n pares, donde $n \geq 0$, es el numero de Catalan.

Denotemos como S el conjunto de secuencias bien formadas con n pares de parentesis.

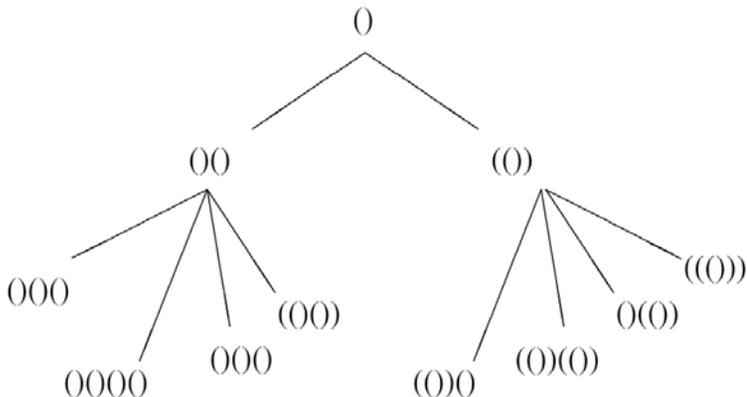


Figura 2.2: Secuencias de paréntesis bien formadas

Los elementos de S pueden ser generados utilizando diagramas de árbol como se muestra en la figura 2.2.

Podemos desarrollar una fórmula recursiva para encontrar P_n . Primero, debemos notar que, $P_0 = 1 = P_1$.

Supongamos que $n \geq 2$.

Sea $0 \leq i \leq n-1$. Los primeros i pares pueden ser agrupados de manera correcta en P_i formas distintas y las restantes $n-1-i$ parejas en P_{n-i-1} formas distintas. Utilizando el principio de multiplicación, estos dos eventos pueden ocurrir simultáneamente en $P_i P_{n-i-1}$ formas distintas.

Como esto es cierto para cada valor de i , utilizando el principio de adición, se tiene:

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} P_i P_{n-i-1}.$$

Entonces, P_n satisface la misma relación de recurrencia y la misma condición inicial que C_n . Entonces $P_n = C_n$.

Los números de Catalan son un caso especial de la clase de números $C(n, k)$, definidos como:

$$C(n, k) = \frac{1}{kn + 1} \binom{(k+1)n}{n}$$

donde $k \geq 0$. Claramente, $C(n, 1) = C_n$.

Como en el caso de los números ordinarios de Catalan, todos los *números generalizados de Catalan* $C(n, k)$ son enteros.

Para comprobar ésto, se puede hacer notar que:

$$\begin{aligned} \binom{kn+n}{n} - \binom{kn+n}{n-1} &= \frac{(kn+n)!}{n!(kn)!} - \frac{(kn+n)!}{(n-1)!(kn+1)!} \\ \frac{(kn+n)!}{(kn+1)!n!} (kn+1) - n & \qquad (2.1) \\ &= \frac{1}{(kn+1)} \binom{kn+n}{n} (k-1)n + 1 \end{aligned}$$

Como la parte izquierda de la ecuación es un número entero, entonces la parte derecha también es un entero. Pero además, $kn + 1$ y $(k-1)n + 1$ son primos relativos. Entonces, $C(n, k)$ es un entero para todo $n, k \geq 0$.

Ejemplo 2.3.2. Algunas secuencias de los números generalizados de Catalan correspondientes a $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad 1, 1, 1, 1, 1, \dots, \binom{n}{n} \\ k = 1 & \quad 1, 1, 2, 5, 14, \dots, \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ k = 2 & \quad 1, 1, 3, 12, 55, \dots, \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n} \\ k = 3 & \quad 1, 1, 4, 22, 140, \dots, \frac{1}{3n+1} \binom{4n}{n} \\ k = 4 & \quad 1, 1, 5, 35, 285, \dots, \frac{1}{4n+1} \binom{5n}{n} \end{aligned}$$

2.4. Crecimiento asintótico de funciones

En matemáticas, ciencias de la computación y otras áreas afines, la notación O grande, también conocida como notación asintótica, describe el comportamiento límite de una función cuando el argumento tiende hacia un valor particular o infinito, generalmente en términos de simplificación de funciones. Esta notación permite simplificar funciones, a fin de concentrarse solo en sus tasas de crecimiento: diferentes funciones con la misma tasa de crecimiento pueden ser representadas usando la misma notación O .

Aunque ha sido desarrollada como parte de la matemática pura, esta notación también se utiliza con frecuencia en la teoría de la complejidad computacional para describir el uso de los recursos de un algoritmo: el peor de los casos o el caso medio de tiempo de ejecución o el uso de la memoria de un algoritmo se expresa a menudo en función de la longitud de su entrada usando la notación O mayúscula. Esto permite a los diseñadores de algoritmos, predecir el comportamiento de sus algoritmos y determinar cuál, de los múltiples algoritmos, es mejor utilizar, de manera que sea independiente de la arquitectura de la computadora o el tiempo del reloj. La notación O también se utiliza en muchos otros campos para proporcionar estimaciones similares.

La descripción de una función en términos de la notación O grande, por lo general sólo establece un límite superior de la tasa de crecimiento de la función. Asociada con la notación O grande, hay también otras notaciones relacionadas que utilizan los símbolos, Ω , ω , y θ , para describir otros tipos de límites sobre las tasas de crecimiento asintótico.

2.4.1. Definición formal

Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en un subconjunto de los números reales. Se escribe

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow \infty,$$

si y sólo si, para valores suficientemente grandes de x , $f(x)$ es a lo más una constante de $g(x)$ en valor absoluto.

Esto es, $f(x) = O(g(x))$ si y sólo si existe un número real positivo M y un número real x_0 tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \text{ para todo } x > x_0.$$

En muchos contextos, la suposición de que estamos interesados en la tasa de crecimiento de la variable x cuando tiende a infinito queda sin confirmar, y se escribe simplemente $f(x) = O(g(x))$.

La notación también puede ser utilizada para describir el comportamiento de f cerca de algún número real a

$$f(x) = O(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow a$$

si y sólo si existen números positivos δ y M tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \text{ para } |x - a| < \delta.$$

Si $g(x) \neq 0$ para valores de x suficientemente cerca de a , entonces ambas definiciones pueden ser unificadas con el límite superior:

$$f(x) = O(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow a$$

si y sólo si

$$\limsup_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Ejemplo 2.4.1. Sea $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5$, y supongamos que queremos simplificar esta función, utilizando la notación O , para describir su tasa de crecimiento cuando x tiende a infinito.

Esta función es la suma de tres términos: $6x^4$, $-2x^3$, y 5 . De estos tres términos, el que tiene la mayor tasa de crecimiento es el que tiene el mayor exponente como una función de x , es decir, $6x^4$.

Ahora, $6x^4$ es un producto de 6 y x^4 en la que el primer factor no depende de x . La omisión de este factor resulta en la forma simplificada x^4 .

Por lo tanto, decimos que $f(x) \in O(x^4)$.

Se puede confirmar este cálculo mediante la definición formal:

Sea $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5$ y $g(x) = x^4$. Aplicando la definición formal,

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

para algún x_0 y M y para todo $x > x_0$.

Para probar esto, $x_0 = 1$ y $M = 13$. Entonces, para todo $x > x_0$:

$$\begin{aligned} |6x^4 - 2x^3 + 5| &\leq 6x^4 + 2x^3 + 5 \\ &\leq 6x^4 + 2x^4 + 5x^4 \\ &= 13x^4 \\ &= 13|x^4| \end{aligned}$$

Así,

$$|6x^4 - 2x^3 + 5| \leq 13|x^4|.$$

La notación O tiene dos áreas principales de aplicación. En matemáticas, se utiliza comúnmente para describir la forma en que una serie finita se aproxima a una función determinada, especialmente en el caso de una serie de Taylor truncada o expansión asintótica. En ciencias de la computación, es útil en el análisis de algoritmos.

En ambas aplicaciones, la función $g(x)$ que aparecen en el $O(\dots)$ suele ser elegida para ser tan simple como sea posible, prescindiendo de los factores constantes y los términos de menor orden.

2.4.2. Propiedades

Si una función $f(n)$ puede ser escrita como una suma finita de otras funciones, la de mayor crecimiento determina el orden de $f(n)$.

En particular, si una función puede ser acotada por un polinomio en n , cuando n tiende a infinito, entonces se pueden ignorar los términos de

orden menor del polinomio.

$O(n^c)$ y $O(c^n)$ son muy diferentes. Este último crece mucho más rápido, no importa cuán grande es la constante c (siempre que sea mayor que uno). Una función que crece más rápidamente que cualquier potencia de n se llama superpolinomial. Una que crece más lentamente que cualquier función exponencial de la forma c^n se llama subexponencial. Un algoritmo puede requerir tiempo que es a la vez superpolinomial y subexponencial; ejemplos de esto incluyen los algoritmos más rápidos conocidos para la factorización de enteros.

$O(\log n)$ es exactamente el mismo que $O(\log(n^c))$. Los logaritmos se diferencian sólo por un factor constante, ya que $(n^c) = c \log n$ y por lo tanto la notación O lo ignora. Del mismo modo, los registros con diferentes bases de constante son equivalentes. Exponenciales con diferentes bases, por otra parte, no son del mismo orden. Por ejemplo, 2^n y 3^n no son del mismo orden.

Cambiar unidades pueden o no pueden afectar el orden del algoritmo resultante. Cambiar unidades es equivalente a multiplicar la variable apropiada por una constante dondequiera que aparezca.

Por ejemplo, si un algoritmo se ejecuta en el orden de n^2 , reemplazando n por cn , significa que el algoritmo se ejecuta en el orden de c^2n^2 , y la notación O ignora la constante c^2 . Esto se puede escribir como $c^2n^2 \in O(n^2)$. Sin embargo, si un algoritmo se ejecuta en el orden de 2^n , al sustituir n con cn queda $2^{cn} = (2^c)^n$. Esto no es equivalente a 2^n en general.

Un cambio de variable puede afectar el orden del algoritmo resultante. Por ejemplo, si un algoritmo se ejecuta en el orden de $O(n)$ cuando n es el número de dígitos del número de entrada, entonces tiene un orden de $O(\log n)$ cuando n es el número de la entrada en sí.

Producto $f_1 \in O(g_1)$ y $f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$

$$f \cdot O(g) \in O(fg)$$

Suma $f_1 \in O(g_1)$ y $f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(|g_1| + |g_2|)$

Esto implica $f_1 \in O(g)$ y $f_2 \in O(g) \rightarrow f_1 + f_2 \in O(g)$.

Si f y g son funciones positivas, $f + O(g) \in O(f + g)$

Multiplicación por una constante Sea k una constante. Entonces:

$O(kg) = O(g)$ si $k \neq 0$.

$f \in O(g) \Rightarrow kf \in O(g)$.

La O es la notación asintótica más utilizada para la comparación de funciones, aunque en muchos casos puede ser reemplazado por Θ para límites más estrictos asintóticamente.

A continuación, se presentan otras funciones de la familia de Bachmann-Landau a la que la notación de O pertenece.

Notación	Intuición	Cuando $n \rightarrow \infty$	Definición
$f(n) \in O(g(n))$	f es acotada superiormente por g (hasta un factor constante) asintóticamente	$ f(n) \leq g(n) \cdot k$ para alguna k	$\exists k > 0, n_0 \forall n > n_0, f(n) \leq g(n) \cdot k $
$f(n) \in \Omega(g(n))$	f esta acotada inferiormente por g asintóticamente	$ f(n) \geq g(n) \cdot k$ para alguna k	$\exists k > 0, n_0 \forall n > n_0 g(n) \cdot k \leq f(n) $
$f(n) \in \Theta(g(n))$	f esta limitada tanto por encima como por debajo de g asintóticamente	$ g(n) \cdot k_1 \leq f(n) \leq g(n) \cdot k_2$ para alguna k_1, k_2	$\exists k_1, k_2 > 0, n_0 \forall n > n_0 g(n) \cdot k_1 < f(n) < g(n) \cdot k_2 $
$f(n) \in o(g(n))$	f está dominada por g asintóticamente	$ f(n) \leq g(n) \cdot \varepsilon$ para toda ε	$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 f(n) \leq g(n) \cdot \varepsilon $
$f(n) \in \Omega(g(n))$	f domina asintóticamente a g	$ f(n) \geq g(n) \cdot k$ para toda k	$\forall k > 0, \exists n_0 \forall n > n_0 g(n) \cdot k \leq f(n) $
$f(n) \sim g(n)$	f es igual a g asintóticamente	$ f(n)/g(n) - 1 < \varepsilon$ por cada ε	$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \forall n > n_0 f(n)/g(n) - 1 < \varepsilon$

Además de la notación O -grande, la notación de Θ y Ω son las dos más utilizadas en ciencias de la computación.

De manera informal, especialmente en ciencias de la computación, la notación O a menudo es un poco abusada para describir un crecimiento asintótico muy justo, donde el uso de la notación Θ puede ser más adecuado.

En algunos campos, la notación O se utiliza con más frecuencia que la notación Θ porque las funciones que crecen más despacio son más deseables. Por ejemplo, si $T(n)$ representa el tiempo de ejecución de un algoritmo de reciente creación para una entrada de tamaño n , los creadores y los usuarios del algoritmo pueden inclinarse más a poner una cota superior asintótica de cuánto tiempo tardará en ejecutarse, sin hacer una declaración explícita sobre la cota inferior asintótica.

2.5. Geometría computacional

La geometría computacional es una rama de las Ciencias de la Computación dedicada al estudio de algoritmos que pueden ser expresados en términos de la geometría.

Las principales ramas de la geometría computacional son:

- Geometría computacional combinatoria, también llamada geometría algorítmica, trata a los objetos geométricos como entidades discretas, de modo que los métodos de solución son, en su mayoría, de teóricos o algoritmos de carácter combinatorio.
- Geometría computacional numérica, también llamada modelación geométrica; se ocupa principalmente de representar los objetos del mundo real de forma adecuada para los cálculos en sistemas computacionales. Este grupo puede ser visto como un desarrollo de la geometría descriptiva.

Los problemas en geometría computacional puede ser clasificados de diferentes maneras y de acuerdo a varios criterios.

Sin embargo, uno de los problemas más interesantes en la geometría computacional es el *problema de encontrar el cierre convexo* de un conjunto de puntos.

Dicho problema, consiste en encontrar el polígono convexo más pequeño, que contiene a todos los puntos de un conjunto.

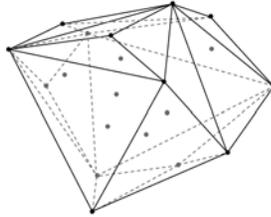


Figura 2.3: El cierre convexo de un conjunto de puntos en tres dimensiones.

Dicho problema surge debido a que calcular el cierre convexo, permite dar una muy buena idea de la forma del conjunto de datos con los que se está trabajando, además de que tiene aplicaciones prácticas en áreas como el reconocimiento de patrones, procesamiento de imágenes, y análisis estático de código utilizando interpretación abstracta. También sirve como un primer paso de preprocesamiento dentro de los algoritmos geométricos como calcular el diámetro de un conjunto de puntos.

Otro de los problemas clásicos en geometría computacional es el problema de ham-sandwich.

En el ámbito de la geometría discreta y la geometría computacional, el teorema del ham-sandwich, por lo general se refiere al caso especial en que cada uno de los conjuntos que se divide es un conjunto finito de puntos.

Aquí la medida relevante es la medida de contar, que simplemente cuenta el número de puntos de ambos lados del hiperplano.

En dos dimensiones, el teorema puede enunciarse de la siguiente ma-

nera:

Para un conjunto finito de puntos en el plano, cada uno coloreado en rojo o azul, hay una línea que simultáneamente divide al mismo tiempo los puntos rojos y los puntos azules, es decir, el número de puntos rojos a ambos lados de la línea es igual y el número de puntos azules a ambos lados de la línea es igual.

Hay un caso excepcional cuando un punto se encuentra en la línea. En esta situación, se cuenta con el punto como en ambos lados de la línea o en ninguna de las partes de la línea.

Este caso excepcional es en realidad necesario para el teorema, en caso de que el número de puntos de color rojo o el número de puntos de color azul sea impar.

En geometría computacional, el teorema del ham-sandwich lleva a un problema computacional; el *problema de ham-sandwich*. En dos dimensiones, el problema es el siguiente: Dado un conjunto finito de n puntos en el plano, cada uno de color *rojo* o *azul*, se busca un corte tipo *ham-sandwich* para ellos.

Primero, Megiddo (1985) dió un algoritmo para un caso especial, donde todos los puntos rojos están en un lado de alguna línea y todos los puntos azules en el otro lado; es una situación donde hay un único corte del tipo ham-sandwich y el cual, Megiddo, no pudo encontrar con un algoritmo de tiempo lineal.

Más tarde, Edelsbrunner y Waupotitsch (1986) dieron un algoritmo para el caso general de dos dimensiones, el tiempo de ejecución de su algoritmo es $O(n \log n)$.

Por último, Lo y Steiger (1990) encontraron un algoritmo óptimo de tiempo lineal $O(n)$. Este algoritmo se extendió a las dimensiones superiores gracias al trabajo de Lo, Matousek, y Steiger (1994). Dado d conjuntos de puntos en posición general en un espacio con d -dimensiones, dicho algoritmo calcula un hiperplano en $(d - 1)$ -dimensiones que tiene un número igual de puntos de cada uno de los conjuntos de cada uno de sus medios espacios, es decir, un corte tipo ham-sandwich para los puntos dados.

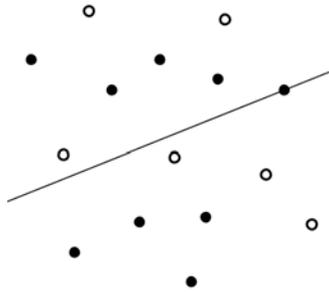


Figura 2.4: Un corte tipo ham-sandwich.

Capítulo 3

Particiones sin cruce

En 1972, Germain Kreweras investigó el tema de las particiones sin cruce bajo el marco de las relaciones de orden. Su documento [1] presenta las bases tanto para resultados enumerativos, como para nuevas conexiones entre las particiones sin cruce y la combinatoria de conjuntos parcialmente ordenados.

Desde entonces, las particiones sin cruce han adquirido importancia, en el área de las matemáticas, y en particular en el ámbito de la combinatoria como es el caso del álgebra combinatoria, geometría combinatoria, problemas de topología, en la teoría de la probabilidad y biología matemática.

En este capítulo se muestran aspectos de combinatoria enumerativa de las particiones sin cruce y reflejando los resultados desarrollados desde la aparición del documento de Germain Kreweras.

3.1. Partición de conjuntos

Una **partición** de un conjunto S es una división disjunta por pares de subconjuntos no vacíos, llamados *partes*, *bloques* o *celdas*, cuya unión es todo el conjunto S .

Formalmente, una familia de subconjuntos S_i de un conjunto S es una **partición** de S si:

- Cada S_i es no vacío.
- Los subconjuntos son disjuntos por pares, es decir, $S_i \cap S_j = \emptyset$. Siempre que $i \neq j$.
- La unión de los subconjuntos S_i es S . Es decir, $\bigcup_{i \in I} S_i = S$, donde I denota los índices de la familia.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos el conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Entonces, $P = \{\{a\}, \{b, e\}, \{c\}, \{d, g, h\}, \{f\}\}$ es una partición de S .

Los subconjuntos $B_1 = \{a\}$, $B_2 = \{b, e\}$, $B_3 = \{c\}$, $B_4 = \{d, g, h\}$, $B_5 = \{f\}$ son los bloques de la partición.

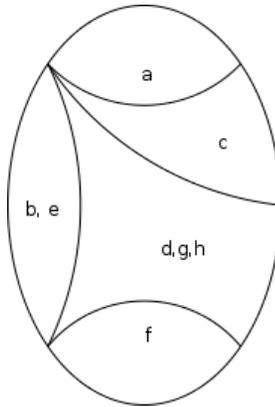


Figura 3.1: Una partición de S

El **número de Bell** B_n , nombrado en honor a Eric Temple Bell, es el número de diferentes particiones de un conjunto con n elementos.

El número de Bell satisface la siguiente fórmula de recursión:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n B_k \binom{n}{k}$$

donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial.

Ejemplo 3.1.2. $B_3 = 5$ porque un conjunto de 3 elementos $\{a, b, c\}$ puede ser particionado de 5 formas diferentes:

$$\begin{aligned} & \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \} \\ & \{ \{a\}, \{b, c\} \} \\ & \{ \{b\}, \{a, c\} \} \\ & \{ \{c\}, \{a, b\} \} \\ & \{ \{a, b, c\} \} \end{aligned}$$

Además, $B_0 = 1$ porque hay exactamente una partición del conjunto vacío.

Cada miembro del conjunto vacío es un conjunto no vacío (que es cierto por vacuidad), y su unión es el conjunto vacío. Por lo tanto, el conjunto vacío es la única partición de sí mismo.

El número de particiones de un conjunto de n elementos en exactamente k bloques no vacíos es el **número de Stirling del segundo tipo** $S(n, k)$.

Los números de Stirling pueden ser calculados por la suma:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Ejemplo 3.1.3. Consideremos el conjunto $P = \{a, b, c\}$. Entonces, $S(3, 2) = 3$. Es decir, un conjunto de tamaño 3 puede ser particionado en 2 subconjuntos, de 3 maneras diferentes:

$$\{ \{a, b\}, \{c\} \}, \quad \{ \{a, c\}, \{b\} \}, \quad \{ \{a\}, \{b, c\} \}$$

3.2. Definición básica

Una **partición sin cruces** de un conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$ es una partición $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ de S donde, si cualesquiera cuatro elementos, $1 \leq a < b < c < d \leq n$ son tales que $a, c \in B_i$ pertenecen a la misma categoría y $b, d \in B_j$ pertenecen a la misma categoría entonces, $i = j$ y las dos clases coinciden.

Ejemplo 3.2.1. Sea $n = 8$.

Entonces, $\sigma = 125/34/68/7$ es una partición sin cruce de S .

Pero, $\sigma = 125/37/4/68$ es una partición con cruce, porque $3 < 6 < 7 < 8$ pero los bloques $\{3, 7\}$ y $\{6, 8\}$ no son iguales.

Las particiones sin cruce también puede ser descritas geoméricamente, debido a que admiten una representación plana, ya sea lineal o circular. Dicha caracterización se debe a Robert Steinberg ¹.

En la recta real, se unen elementos sucesivos de cada bloque mediante arcos dibujados en el plano medio superior.

Alternativamente, se puede considerar la posibilidad de un conjunto finito de puntos que es linealmente ordenado y dispuestos en un orden cíclico como los vértices de un n -ágono entonces, los n elementos del conjunto se pueden representar en un círculo etiquetados desde 1 hasta n de manera ordenada y los elementos sucesivos de cada bloque se unen mediante cuerdas.

De forma equivalente, si se etiquetan los vértices de un n -ágono, con los números 1 a n , el casco convexo de los diferentes bloques de la partición están disjuntos el uno del otro, es decir, que no se cruzan entre sí.

Ejemplo 3.2.2. Una partición de S en representación lineal y circular.

¹Steinberg es miembro de la National Academy of Science y ganó el premio Leroy P. Steel en 1985.

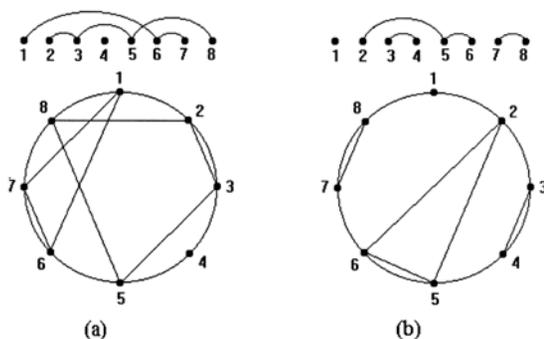


Figura 3.2: (a) Partición con cruce: 167/2358/4, (b) Partición sin cruce: 1/256/34/78.

3.3. Particiones sin cruce y los números de Catalan

Una muy amplia y variada serie de objetos de combinatoria, a la que puede referirse como *La familia Catalan*, se enumeran mediante la llamada sucesión de Catalan. La lista compilada por Richard Stanley [6] incluye actualmente más de 60 tipos de objetos combinatorios.

Desde un punto de vista enumerativo, es natural investigar biyecciones entre las distintas clases de objetos de la familia Catalan y cómo las diferentes propiedades y parámetros definidos por una clase se traducen, a través de biyecciones, a otras clases.

Cuestiones de este tipo tienen una larga historia dentro de la combinatoria enumerativa. En 1996, utilizando funciones generadoras, Martin Klazar de la Universidad Charles en la República Checa, estableció que el número de todas las particiones sin cruce de un conjunto de n elementos es el número de Catalan² C_n , donde

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

²Nombrados de esta forma gracias a Eugène Charles Catalan (1814-1894).

Ejemplo 3.3.1. Representación geométrica de todas las posibles particiones sin cruce de un conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

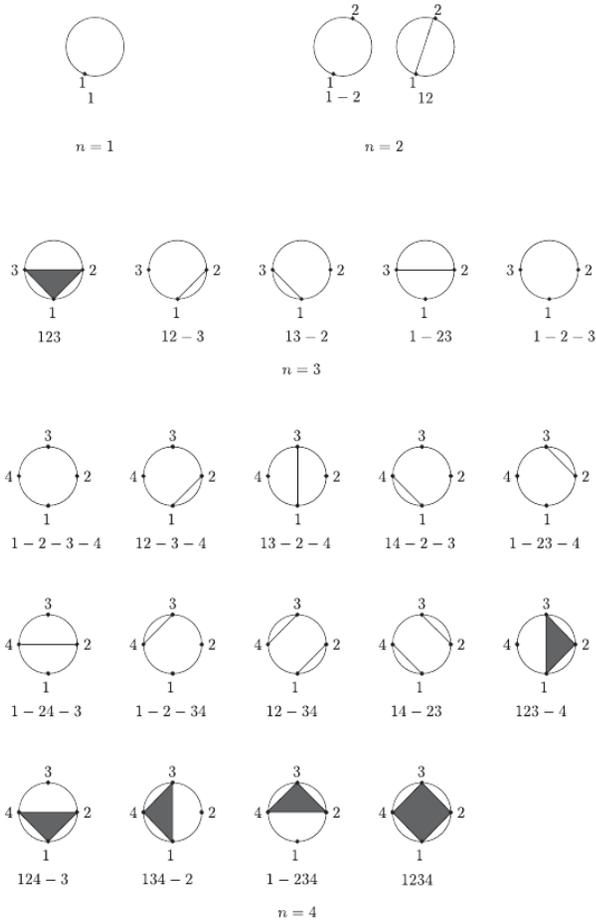


Figura 3.3: Particiones sin cruce de un conjunto para $1 \leq n \leq 4$.

Ahora se presentan varios ejemplos que muestran la aparición de los números de Catalan dentro de la teoría de las particiones sin cruce.

3.3.1. Particiones sin cruce como una latiz

El conjunto Π_n de todas las particiones de un conjunto de n elementos, puede ser visto como un conjunto parcialmente ordenado (*poset*) en donde las particiones están ordenadas por el siguiente refinamiento:

Si $\pi, \sigma \in \Pi_n$, entonces $\pi \leq \sigma$ si cada bloque de π está contenido en un bloque de σ .

Ejemplo 3.3.2. Sea $n = 7$.

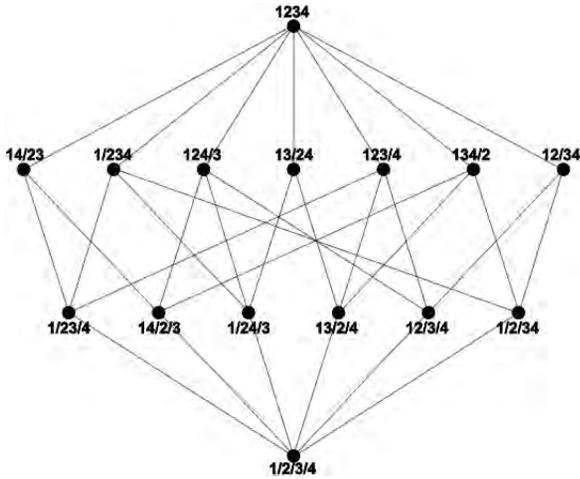
Entonces, $\pi = 1/25/34/6/7 < \sigma = 134/25/4/67$.

Contiene un **elemento mínimo** (la partición más fina) $\hat{0} := 1/2/3/\dots/n$ y un **elemento máximo** (la partición más grande) $\hat{1} := 123\dots n$

El refinamiento del orden resulta en una lattice geométrica sobre Π_n , que es uno de los clásicos posets, y sigue siendo de interés en álgebra y geometría combinatoria.

El artículo de Kreweras [1] de 1972 presenta resultados fundamentales respecto a las particiones sin cruce NC_n como un subconjunto parcialmente ordenado (*subposet*) de Π_n .

Ejemplo 3.3.3. Lattice NC_4 . Ordenada por la relación “*es un refinamiento de*”.

Figura 3.4: Lattice NC_4

Aunque es un subconjunto de la latiz de todas las particiones, no es una sublatiz de la latiz de todas las particiones, ya que las operaciones de unión no concuerdan.

Ejemplo 3.3.4. Si $\pi = 13/2/4$ y $\sigma = 1/24/3$.

Entonces, $\pi \vee_{\pi_4} \sigma = 13/24$, mientras que $\pi \vee_{NC_4} \sigma = \hat{1}$.

3.3.2. Particiones sin cruce y árboles binarios

Aquí presentaremos algunas de las relaciones que existen entre los números de Catalan y el estudio de árboles dentro de la teoría de gráficas.

Primero daremos algunas definiciones básicas sobre el vocabulario de teoría de gráficas.

Una **gráfica** G no vacía es un conjunto de puntos, llamados *nodos* o *vértices*, unidos entre sí mediante un conjunto de segmentos o arcos de

línea, llamados *aristas*.

Sea V que denota el conjunto de vértices y E que denota el conjunto de aristas. La gráfica G se puede considerar como el par ordenado (V, E) : $G = (V, E)$. Una arista entre los vértices v y w se denota por $v - w$ ó (v, w) .

Ejemplo 3.3.5. Una gráfica definida como: $G = \{(V, E) \mid V = \{A, B, C, D\}\}$

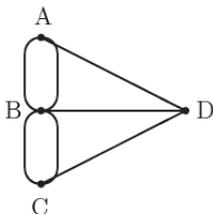


Figura 3.5: Gráfica con 4 vértices

Un **camino** entre dos vértices v_0 y v_n es una secuencia $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vértices v_i y aristas que los conectan. La **longitud del camino** es el número de aristas de la misma. Una gráfica es **conexa** si existe un camino entre cualesquiera dos vértices distintos.

Ejemplo 3.3.6. Una gráfica conexa con $G = \{(V, E) \mid |V| = 12, |E| = 11\}$.



Figura 3.6: Gráfica conexa

Un **ciclo** es un camino con el mismo vértice de inicio que de terminación y que además no contiene vértices repetidos. Se dice, que una gráfica

es **acíclica** si no contiene ciclos. Una gráfica conexa y acíclica es un **árbol**. Además, una gráfica conexa con n vértices es un árbol si y sólo si tiene exactamente $n - 1$ aristas.

Ejemplo 3.3.7. Una gráfica de árbol. Con un vértice especial a llamado **raíz**.

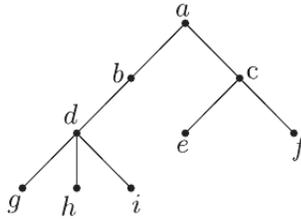


Figura 3.7: Una gráfica de árbol

Un árbol **arraigado y ordenado** es un árbol en el que los vértices de cada nivel están ordenados como primero, segundo, tercero, y así sucesivamente. La terminología básica de árboles arraigados refleja los subárboles de un árbol.

Sea T un árbol con raíz v_0 . Sea $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un camino de v_0 a v_n . Entonces:

- v_{i-1} es el padre de v_i , donde $i \geq 1$.
- v_i es el hijo de v_{i-1} , donde $i \geq 1$.
- Los vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ son los *ancestros* de v_n .
- Los *descendientes* de un vértice v son los vértices para los cuales v es un ancestro.
- Un vértice v sin hijos es una *hoja* o un *vértice terminal*.
- Un vértice que no es una hoja es un *vértice interior*.

- El grado de un vértice es el número de aristas que inciden en un vértice.
- El subárbol que cuelga de v consiste de v , sus descendientes, y todas sus aristas.

Ejemplo 3.3.8. Tomemos el árbol T de la Figura 3.7, entonces:

- El vértice b es padre del vértice d .
- El vértice d tiene tres hijos: $\{g, h, i\}$.
- El vértice h tiene tres predecesores: $\{d, b, a\}$.
- El vértice c tiene dos descendientes: $\{e, f\}$.
- Los vértices g, h, i son hojas.
- Los vértices b, d, c son vértices internos.
- El grado del vértice b es dos y el grado del vértice d es cuatro.

Un árbol con raíz ordenado es **binario** si cada vértice tiene a lo más dos hijos.

Ejemplo 3.3.9. Un árbol binario, su subárbol izquierdo es el árbol binario cuya raíz es la letra b y su subárbol derecho es el árbol binario cuya raíz es la letra d .

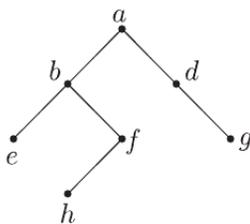


Figura 3.8: Un árbol binario

El siguiente ejemplo muestra la relación entre los árboles binarios y los números de Catalan.

Ejemplo 3.3.10. Muestra todos los posibles árboles binarios para $0 \leq n \leq 4$.

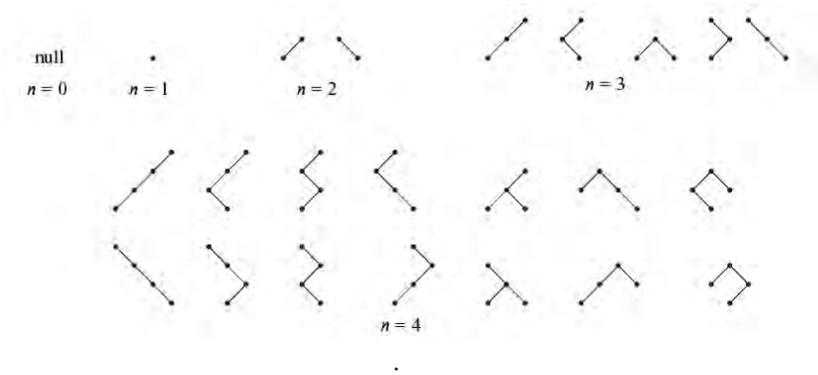


Figura 3.9: Árboles binarios con $0 \leq n \leq 4$ vértices

Teorema 3.3.11. El número de árboles binarios con n vértices es C_n .

Demostración. Sea b_n que denota el número de árboles binarios con n vértices, donde $n \geq 0$. Como el árbol vacío es el único árbol binario con 0 vértices, entonces $b_0 = 1$.

Cuando $n = 1$, el árbol se compone de la raíz, y hay exactamente un árbol binario, así $b_1 = 1$.

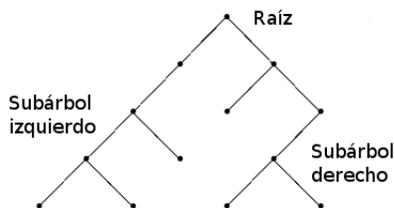


Figura 3.10: Relación de recurrencia de un árbol binario.

Procederemos a encontrar una relación de recurrencia satisfecha por b_n . Consideremos un árbol binario T con n vértices, véase la figura 3.10. La raíz del árbol tiene $n - 1$ descendientes. Supongamos que tiene i descendientes en el subárbol izquierdo y por lo tanto, $n - i - 1$ descendientes en el subárbol de la derecha, donde $0 \leq i \leq n - 1$. Por definición, hay b_i árboles binarios con i vértices y b_{n-i-1} árboles binarios con $n - i - 1$ vértices. Por el principio de multiplicación, hay $b_i b_{n-i-1}$ árboles binarios con i descendientes en su subárbol izquierdo y, por tanto, $n - i - 1$ descendientes en su subárbol derecho. Por lo tanto, por el principio de adición, el número total de árboles binarios con n vértices está dado por

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1} \\ &= b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

cuando $b_0 = 1$.

Esta es exactamente la misma relación de recurrencia de Segner para los números de Catalan, de modo que $b_n = C_n$.

□

3.3.3. Particiones sin cruce y triangulaciones de polígonos convexos.

En 1751, Euler le propuso al matemático prusiano Christian Goldbach el problema de la triangulación de polígonos convexos. Dicho problema consistía en encontrar el número de formas en las que el interior de un n -ágono convexo³ puede ser dividido en triángulos dibujando diagonales que no se intersectan.

Ejemplo 3.3.12. Hay exactamente una forma de triangular un triángulo, dos formas diferentes de triangular un cuadrado, cinco maneras diferentes de triangular un pentágono, y catorce formas diferentes de triangular un hexágono. De modo que tenemos los números de Catalan 1, 2, 5, 14.

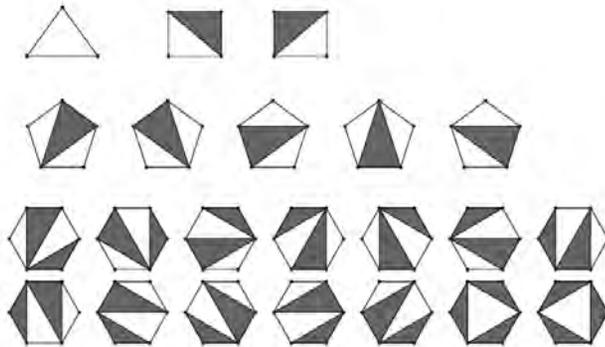


Figura 3.11: Triangulación de un n -ágono, donde $3 \leq n \leq 6$.

Para encontrar ésta relación, Euler utilizó un argumento inductivo que establecía:

$$T_n = \frac{2 * 6 * 10 * \dots * (4n - 10)}{(n - 1)!}, \quad n \geq 3$$

³Un n -ágono convexo es un polígono con n lados tal que todas las diagonales caen en el interior.

Aunque la fórmula de Euler, publicada en 1761, sólo tiene sentido para $n \geq 3$, podemos extenderla para incluir a los casos $n = 0, 1, 2$.

Con este fin, sea $k = n - 3$. Entonces

$$T_{k+3} = \frac{2 * 6 * 10 * \dots * (4k - 2)}{(k + 2)!}, \quad k \geq 0.$$

Entonces, $T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = 5$.

Estos son los números de Catalan C_1, C_2 y C_3 , respectivamente, desplazados dos espacios hacia la derecha.

Así que, definimos $C_n = T_{k+2}$

$$C_n = \frac{2 * 6 * 10 * \dots * (4n - 2)}{(n + 1)!}, \quad n \geq 1.$$

Esto puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(4n - 2)}{n + 1} * \frac{2 * 6 * 10 * \dots * (4n - 6)}{n!} \\ &= \frac{4n - 2}{n + 1} C_{n-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

cuando $n = 1$, entonces $C_1 = C_0$.

Pero $C_1 = 1$, de manera que definimos $C_0 = 1$.

Esta es una forma recursiva de definir el número C_n .

Euler publicó dicho resultado en 1761 en San Petersburgo, en *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*.

3.3.4. Particiones sin cruce y el problema del apretón de manos

Si $2n$ personas están sentadas alrededor de una mesa circular, ¿De cuántas maneras se pueden dar la mano entre ellas simultáneamente con otra persona en la mesa de tal forma que ninguno de los brazos se crucen entre sí? La siguiente figura muestra las posibilidades para $0 \leq n \leq 4$ personas. Una vez más, hay 1, 1, 2, 5, 14 formas para hacer esto.

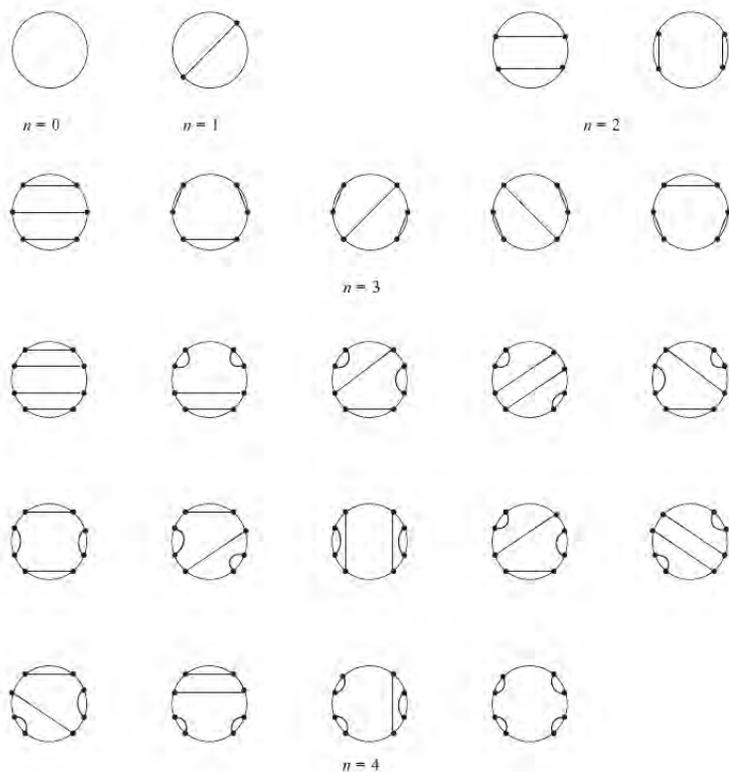


Figura 3.12: Configuraciones posibles de apretón de manos para $0 \leq n \leq 4$.

Este problema es equivalente a encontrar el número de formas en que $2n$ puntos en un círculo pueden ser unidos por n cuerdas de tal manera que no hay dos cuerdas que se intersecten entre sí.

Para contar el número de apretón de manos se puede utilizar un análisis como sigue:

Se escoge cualquier persona de entre las $2n$ personas en la mesa, y esa persona se da la mano con alguien. Para admitir a un patrón legal, esa persona tendrá que dejar un número par de personas en cada lado de la persona con la que se da la mano.

De los restantes $n - 1$ pares de personas, puede dejar a cero a la derecha y $n - 1$ pares de la izquierda, 1 a la derecha y $n - 2$ a la izquierda, y así sucesivamente. Los pares sobrantes a la derecha y la izquierda se pueden elegir de forma independiente entre cualquiera de los posibles patrones de cruce de manos, por lo que una vez más, el contar C_n para n pares de personas está dada por:

$$C_n = C_{n-1}C_0 + C_1C_{n-2} + \cdots + C_1C_{n-2} + C_0C_{n-1}$$

que, junto con el hecho de que $C_0 = C_1 = 1$, no es más que la definición de los números de Catalan.

3.4. Combinatoria enumerativa

Las particiones sin cruce han generado un gran número de problemas enumerativos. Entre ellos podemos encontrar algunos que se refieren a cuestiones de enumeración exacta y asintótica, sobre la distribución y el valor esperado en estadísticas de combinatoria y el uso de particiones sin cruce en la solución de otras ramas enumerativas.

3.4.1. Rutas monotónicas

Un **camino de Catalan** es el camino de una latiz en el plano, inicia en el origen y termina en el punto (n, n) , dando pasos de la forma: $(1, 0)$ (Este) ó $(0, 1)$ (Norte), y que no atraviesan de la recta $x = y$.

Cada ruta corresponde de manera biyectiva a una partición sin cruce, asociándolo como sigue.

Se recorre el camino desde el origen hasta (n, n) y se van etiquetando los pasos dados hacia el Este desde $1, 2, \dots, n$ en el orden en que se van encontrando.

Los pasos de la ruta se puede poner por pares, poniendo los pasos hacia el Este como paréntesis izquierdos y los pasos hacia el Norte como paréntesis derechos, y emparejando dos pasos, si los paréntesis correspondientes se aparean.

A cada paso hacia el Norte, se le asigna la etiqueta del paso hacia el Este con el que se empareja. Entonces, las etiquetas de los pasos contiguos hacia el Norte forman los bloques de una partición y esta partición es libre de cruces.

La figura 3.13 muestra una partición sin cruces y su camino de Catalan correspondiente. Es de notar que, el número de bloques de la partición sin cruces, es igual al número de EN-esquinas del camino de Catalan asociado.

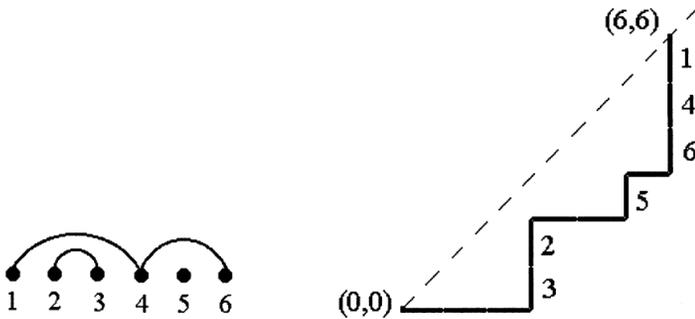


Figura 3.13: Un camino de Catalan y su partición sin cruce asociada.

3.4.2. Funciones de crecimiento restringido

Un gran número de artículos tratan las propiedades de distribución de estadística combinatoria definiéndolas en términos de las funciones de crecimiento restringido para las particiones de un conjunto.

Dada la partición de un conjunto $\pi \in \Pi_n$, decimos que $\pi = B_1/B_2/\dots/B_k$

donde B_i son los bloques de la partición.

Su **función de crecimiento restringido** $w_\pi : [n] \rightarrow [k]$ se define como: $w_\pi(i) = j$ si $i \in B_j$. Es conveniente representar a w_π como una palabra $w_1 w_2 \dots w_n$ donde $w_i = w_\pi(i)$.

Las particiones sin cruce son precisamente aquellas funciones de crecimiento restringido que no contienen ninguna subsecuencia de 4 términos de la forma $abab$ (como es 1212 en el siguiente ejemplo).

Ejemplo 3.4.1. Dada $\pi = 145/26/3 \in \Pi_6$, entonces su función de crecimiento restringido es 123112 .

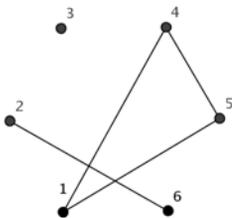


Figura 3.14: $\pi = 145/26/3 \in \Pi_6$

Dada $\pi = 146/23/5 \in \Pi_6$, entonces su función de crecimiento restringido es 122131 .

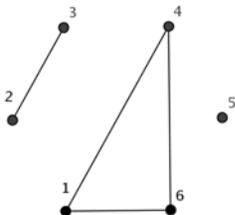


Figura 3.15: $\pi = 1\ 4\ 6/2\ 3/5 \in \Pi_6$

3.4.3. Permutaciones restringidas

Una permutación σ de un conjunto de n elementos, puede ser escrita como una palabra $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(n)$. Diremos que σ *contiene el patrón* ρ , donde ρ es una permutación de k elementos, si existen $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ tal que, para todo j y l , con $1 \leq j < l \leq k$, tenemos que $(\sigma(i_j) - \sigma(i_l))(\rho(j) - \rho(l)) > 0$.

Informalmente, σ contiene el patrón ρ si contiene una subsecuencia de k términos cuyos valores relativos por pares son los de los términos correspondientes en ρ .

Ejemplo 3.4.2. Dada $\sigma = 3\ 5\ 2\ 1\ 4$, contiene el patrón $\rho = 3\ 2\ 1$ porque hay dos secuencias: $(3\ 2\ 1)$ y $(5\ 2\ 1)$.

Dada $\sigma = 2\ 3\ 1$, $1\ 3\ 2$, $2\ 1\ 3$, $3\ 1\ 2$, no contienen el patrón $\sigma = 1\ 2\ 3$.

Se denota $S_n(\rho)$ el conjunto de permutaciones de n elementos que no contienen un patrón ρ determinado.

Las permutaciones con patrones restringidos surgen dentro de las ciencias de la computación teórica en relación al ordenamiento de una secuencia utilizando una red de pilas y colas. Las secuencias ordenables con una

pila, son aquellas que evitan el patrón $\rho = 2\ 3\ 1$.

No es difícil mostrar, que por cada patrón ρ de 3 letras, el número de permutaciones de tamaño n , que prohíben ρ es el n -ésimo número de Catalan, $\#\mathcal{S}_n(\rho) = C_n$. De manera que, $\#\mathcal{S}_n(\rho)$ es independiente de la elección de $\rho \in \mathcal{S}_3$.

La independencia de elección en el patrón falla para patrones grandes. Esto ha generado una gran cantidad de investigación y conjeturas al respecto. Lo mismo ocurre en el trabajo sobre enumeración exacta y asintótica de las clases de permutaciones restringidas ya sea para patrones simples o múltiples que contienen las mismas o diferentes longitudes, o para un número específico de apariciones de un patrón.

3.5. Topología

La teoría de gráficas proporciona un medio para relaciones entre la combinatoria y la topología. Dos ejemplos específicos donde éstas conexiones se manifiestan son dentro del estudio de gráficas embebidas en superficies y el uso de diagramas en la teoría de nudos. Esta sección ofrece una breve descripción de un problema relacionado con ésta área y en el que surgen las particiones sin cruce.

3.5.1. Mapas

Cuando hablamos de **mapas** nos referimos a una (hiper)gráfica orientada y encajada en una superficie sin bordes.

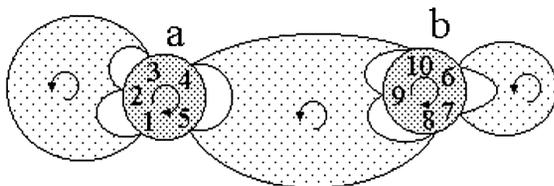


Figura 3.16: Un hiper-mapa en el plano

La figura 3.16 muestra un hiper-mapa con dos vértices, a y b , y tres hiper-aristas aaa , $aabbb$, y bb , en la esfera.

Sea N el número de incidencias entre vértices e hiper-aristas. De modo que, la figura 3.16, tiene $N = 10$ y las incidencias están etiquetadas como en la figura. Al elegir una orientación, un hiper-mapa puede ser codificado a través de dos permutaciones. Uno es una permutación $\sigma \in S_N$ cuyos ciclos describen los vértices del hiper-mapa, al leer las incidencias de cada vértice como una sucesión de acuerdo a la orientación elegida. La otra es una permutación $\alpha \in S_N$ cuyos ciclos describen las hiper-aristas del mapa, al leer las incidencias de cada una de las hiper-aristas de acuerdo a la orientación opuesta.

Ejemplo 3.5.1. En el hiper-mapa de la figura 3.16, las flechas indican la orientación a seguir, entonces se tiene $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ y $\alpha = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 8\ 9\ 10)(6\ 7)$.

Además, los ciclos de la permutación $\alpha^{-1}\sigma$ representa las regiones (o caras) del hiper-mapa.

Entonces, la permutación $\alpha^{-1}\sigma = (1)(2)(3\ 1\ 0\ 7\ 5)(4)(6)(8)(9)$ tiene siete ciclos y cada uno describe una 2-gráfica diferente del complemento del hiper-mapa en la esfera.

Un caso especial son los hiper-mapas con un solo vértice, que podemos suponer están dados por la permutación $\sigma = (1\ 2\ \dots\ N)$. Si la permutación α tiene sólo *ciclos crecientes*, es decir, cada ciclo se puede escribir

de la forma $(i_1 i_2 \dots i_k)$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, entonces el mapa puede ser identificado con una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$.

En comparación con la representación circular de una partición, un hiper-mapa muestra los bloques como hiper-aristas en el exterior del círculo que representa el único vértice. Dicho hiper-mapa tiene género cero precisamente cuando los ciclos de α constituyen los bloques de una partición sin cruces de $\{1, 2, \dots, N\}$.

Por lo tanto, las particiones sin cruce, pueden ser vistas como particiones de género cero.

3.6. Geometría combinatoria

En el último par de décadas ha habido un aumento en la investigación de combinatoria relacionada con politopos convexos, arreglos de hiperplanos, y grupos de reflexiones, para ello, se han utilizado herramientas de geometría, topología y álgebra.

A continuación, vamos a mostrar una instancia relacionada con las particiones sin cruce: el trabajo relacionado con un politopo convexo llamado *asociaedro*.

3.6.1. Asociaedro

Considera $(n-2)$ -ágono convexo, $P_n, n \geq 2$. Sea Γ_n el conjunto de todos los subconjuntos de diagonales sin cruce de P_n (por lo tanto, dos diagonales del mismo conjunto pueden ser disjuntas o se pueden intersectar en un vértice de P_n). Como Γ_n es cerrado bajo subconjuntos, entonces forma un complejo simplicial abstracto. Las caras (símplices) de Γ_n corresponden a la disección del polígono. Las facetas (caras maximales) corresponden a las triangulaciones de P_n , por lo que la dimensión de Γ_n es $n - 2$, ya que una triangulación tiene $n - 1$ diagonales.

Micha Perles planteó la pregunta de si: Dado Γ_n un politopo, entonces ¿hay un politopo convexo Q_n cuyo complejo de la frontera es Γ_n ? Es decir, ¿Puede Γ_n ser la frontera del cierre convexo de un número finito de

puntos en el espacio euclidiano? Dicho politopo necesariamente debe ser $(n - 1)$ -dimensional y simplicial (es decir, todas sus caras tendrían que ser símplies). Por ejemplo, Γ_2 consiste sólo de la cara vacía y dos conjuntos simples (las dos diagonales de un cuadrilátero convexo que se cruzan), y se puede ver como el complejo de la frontera de un segmento de línea. Cuando $n = 3$, además de la cara vacía, Γ_3 tiene 5 vértices de dimensión 0 y 5 aristas de dimensión 1, y se pueden ver como la frontera de un politopo convexo de dimensión 2: un pentágono convexo (ver figura 3.17. La figura 3.18 muestra Q_4 .

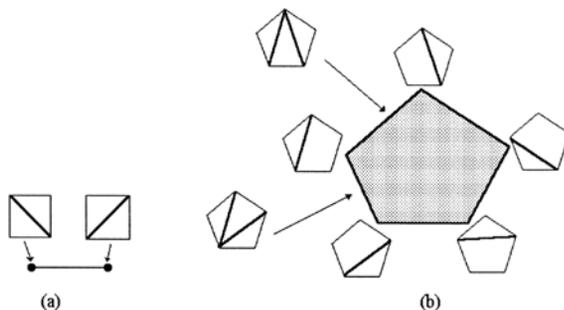
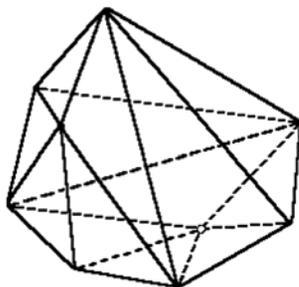


Figura 3.17: Γ_2 y Γ_3 formando la frontera de los politopos convexos: (a) Q_2 y (b) Q_3 .

La respuesta a la pregunta de Perles es afirmativa para toda $n \geq 2$, y el politopo buscado es Q_n llamado **asociaedro**. Hay que notar que Γ_n especifica sólo las relaciones de incidencia necesarias entre las caras, y no es un subconjunto convexo particular en el espacio euclidiano.

Figura 3.18: El asociaedro Q_4

Un invariante para un politopo convexo es su f -vector. Si el politopo tiene dimensión d , entonces su f -vector es $f = (f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$, donde f_i denota el número de caras de dimensión i (con $f_{-1} = 1$ que representa la cara vacía). Por ejemplo, $f(Q_3) = (1, 5, 5)$.

Como el máximo número de caras del asociaedro son las triangulaciones de un $(n + 2)$ -ágono convexo, entonces $f_{n-2}(Q_n) = C_n$, el n -ésimo número de Catalan.

3.7. Generalización de las particiones sin cruce

En la sección anterior nos concentramos en el caso en que un conjunto P con n puntos se encuentra en posición circular, en otras palabras, cuando se encuentran en posición convexa. En éste caso el número total de particiones sin cruce es el número de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Ahora nos enfocaremos en el caso en que el conjunto de puntos se encuentra en posición general.

Diremos que $S \subset \mathbb{E}^2$, un conjunto de puntos en el plano, está en *posición general* si no hay tres de ellos colineales. Una partición $S = \cup S_i$ se dice que es *libre de cruces* si las cerraduras convexas de los bloques son

disjuntas; es decir, si $\text{conv}(S_i) \cap \text{conv}(S_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.

De manera que, una partición sin cruce puede ser identificada de manera única con la gráfica de aristas de los cierres convexos de cada uno de los bloques. éstas aristas forman una gráfica geométrica libre de cruces con a lo más n aristas, como se ve en la figura 3.19.

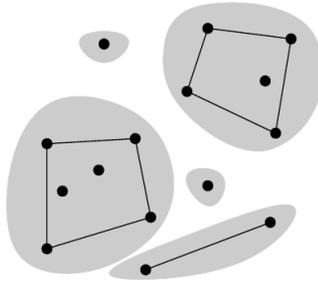


Figura 3.19: Gráfica de una partición sin cruces.

El caso en el cual los puntos están en posición general es considerado en [2] con algoritmos para clusters. Los autores de dicho artículo mostraron que, para una k constante, el número de k -particiones es $O(n^{6k-12})$.

Para verificar ésto, basta con generar todos los posibles conjuntos convexos disjuntos en el plano y particionarlos utilizando segmentos de líneas, de forma que cada segmento de línea caiga en la frontera de dos caras de la partición, como se ve en la figura 3.20.

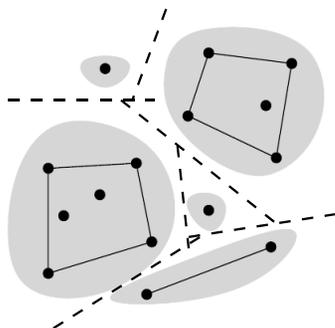


Figura 3.20: Separación de convexos utilizando semilíneas.

Sabemos, que hay un número fijo de gráficas planas diferentes con k vértices. El número de aristas es a lo más $3k - 6$, para $k \geq 3$. El número de diferentes formas en que un conjunto de n puntos pueden ser separados por una línea en dos conjuntos (P_1, P_2) es $n(n - 1) + 2$.

Así, el número de posibilidades para escoger una gráfica plana con k vértices es $(n(n - 1) + 2)^{3k-6} = O(n^{6k-12})$.

Las cotas, superior e inferior, en el número total de particiones sin cruce para puntos en posición general son exhibidas en [3].

La cota superior es $O(12.24^n)$ y la cota inferior, alcanzada por la *doble cadena*, es $\Omega(5.23^n)$.

A continuación probaremos los resultados mencionados arriba.

Teorema 3.7.1. *Sea P un conjunto de n puntos en el plano. Entonces, el número de particiones sin cruce (*cpf*) cumple:*

$$cpf(P) \leq O(12.2388^n)$$

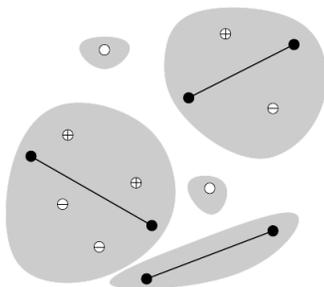


Figura 3.21: Clasificación de una partición sin cruce: columna(\bullet), aislados(\circ), superiores(\oplus), inferiores(\ominus).

Demostración. A cada una de las particiones sin cruces de P se asigna a una tupla (M, S, I^+, I^-) como en la figura 3.21.

- M es el emparejamiento en P , cuyas aristas conectan el punto más a la izquierda de cada bloque de la partición, con el punto más a la derecha del bloque y con al menos dos elementos (nos referimos a cada uno de esos segmentos como la columna vertebral de su conjunto);
- S es el conjunto de todos los puntos que forman conjuntos aislados en la partición.
- I^+ (respectivamente, I^-) es el conjunto de los puntos de $P \setminus S$ que no son ni el punto más a la izquierda ni el punto más a la derecha en su bloque, y que se encuentran por encima (o por debajo) de la columna vertebral del bloque.

Observemos que M es una partición sin cruces y que la partición esta determinada de forma única por (M, S, I^+, I^-) . Por lo tanto, cualquier límite superior sobre el número de tuplas establecerá un límite superior sobre el número de particiones sin cruce.

Para cada emparejamiento sin cruces de M en P hay $3^{n-2|M|}$ tripletas (S, I^+, I^-) , que forman una 4-tupla con M (claramente, no todos ellos tienen que venir de una partición libre de cruces, de modo que tenemos un

sobreconteo).

Por lo tanto $\sum_m 3^{n-2m} ma_m(P)$, donde $ma_m(P)$ es el número de emparejamientos sin cruces dentro de P , es un límite superior sobre el número de particiones sin cruce.

Desarrollando la suma anterior, se obtiene una cota de $O(12.2388^n)$.

Podríamos haber estimado el número de 4-tuplas primero escogiendo un subconjunto Q , como la unión de S y los extremos de M , luego escogiendo un emparejamiento en Q y, después, particionado $P \setminus Q$ en $I^+ \cup I^-$.

Entonces se tiene:

$$\sum_k^n \binom{n}{k} c^k 2^{n-k} = (c + 2)^n$$

donde c es la constante que acota el número de emparejamientos de P .

Obteniendo una cota de $O(12.43^n)$, que se encuentra por encima de la cota obtenida arriba.

□

La cota inferior se deriva del análisis de la doble cadena.

Dada $m \in \mathbb{N}$, la **doble cadena** D_{2m} consiste de $n := 2m$ puntos.

Hay una mitad superior U_m con m puntos de la parábola $y = \frac{x^2+1}{2}$, con sus coordenadas en x en el rango $[-1, 1]$, y hay una mitad inferior L_m de m puntos de la parábola $y = -\frac{x^2+1}{2}$ en el mismo rango de x , como se muestra en la figura 3.22.

Una propiedad importante es que U_m y L_m están en posición convexa, y el interior relativo de cada segmento que conecta un punto desde U_m con un punto de L_m es disjunto de los cascos convexos de U_m y de L_m .

Teorema 3.7.2. *Dada $m \in \mathbb{N}$. Sea P un conjunto de $n := 2m$ puntos en el plano, como se muestra en la figura 3.22.*

Entonces, el número de particiones sin cruce (cpf) cumple:

$$cpf(D_{2m}) \geq O(5.23^n)$$

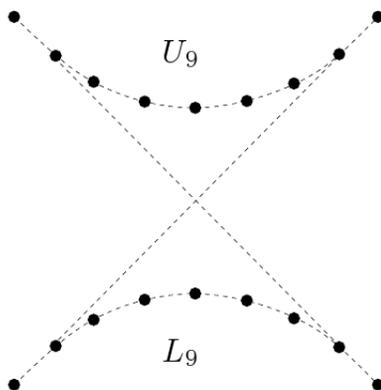


Figura 3.22: La doble cadena D_{18}

Demostración. Esta cota para particiones sin cruce, cuenta solamente un tipo de particiones, es decir, las compuestas de un emparejamiento entre $m - k$ puntos de U_m con $m - k$ puntos de L_m , junto con las particiones sin cruce del resto de los k puntos en U_m y el resto de los k puntos en L_m .

Vamos a realizar un conteo exhaustivo de las particiones de la doble cadena.

Sabemos que para $N \in \mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}$, el número N puede ser escrito como la suma ordenada de i enteros no negativos en $\binom{N+i-1}{i-1}$ formas, y escrito como la suma ordenada de i enteros positivos en $\binom{N-1}{i-1}$ formas.

Ahora vamos a escoger la mitad superior de las particiones sin cruce en U_m de la siguiente manera.

Primero especificamos el número k de partes que se van a extender hasta la mitad inferior, y también especificamos las k secuencias contiguas no vacías de puntos de U_m que forman las partes superiores de dichas partes extendidas; nos referiremos a éstas secuencias como los *lugares de aco-*

plamiento.

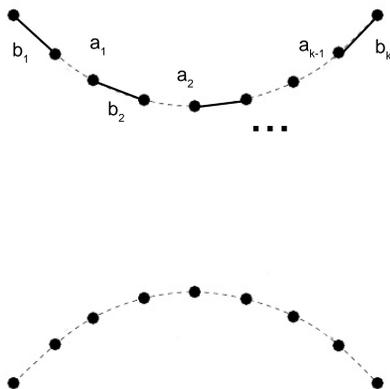


Figura 3.23: Lugares de acoplamiento

Si el tamaño total de estos lugares de acoplamiento es $k + l$, entonces debemos especificar los números $a_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq i \leq k$, que son los tamaños de las partes intermedias que no son de acoplamiento, y los números $b_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$, que son los tamaños de las partes de acoplamiento, como se muestra en la figura 3.23.

De manera que, $m = a_0 + b_1 + a_1 + \dots + b_k + a_k$, con $\sum a_i = m - k - l$, y por lo tanto $\sum b_i = k + l$.

Hay $\binom{m-k-l+(k+1)-1}{(k+1)-1} = \binom{m-l}{k}$ maneras de elegir las a_i , y $\binom{k+l-1}{k-1}$ formas de elegir los b_i .

El número de puntos que no son de acoplamiento pero que forman particiones sin cruce con U_m , es $m - (k + l)$, entonces ellos forman C_{m-k-l} particiones sin cruce al interior de U_m .

Es decir, el número de configuraciones con k lugares de acoplamiento y contando los puntos que no son de acoplamiento pero que forman parti-

ciones sin cruce con U_m , es exactamente:

$$\sum_{l=0}^{m-k} \binom{m-l}{k} \binom{k+l-1}{k-1} C_{m-k-l}$$

Por lo tanto, haciendo el mismo análisis a la mitad inferior L_m y observando que hay una única forma de conectar los lugares de acoplamiento de la parte superior con la parte inferior de manera que las particiones no se crucen, se obtiene:

$$cpf(D_{2m}) = C_m^2 + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=0}^{m-k} \binom{m-l}{k} \binom{k+l-1}{k-1} C_{m-k-l} \right)^2$$

Así, estimando los valores de la suma anterior utilizando métodos numéricos experimentales, se obtiene que $cpf(D_{2m}) \geq O(5.23^n)$.

□

Capítulo 4

Particiones sin cruce bicromáticas

En el capítulo anterior analizamos las particiones sin cruce de conjuntos de puntos monocromáticos. Ahora veremos el caso en el que los conjuntos de puntos se encuentran bicoloreados.

Diremos que un conjunto S está **bicoloreado** si $S = R \cup B$ es la unión disjunta de dos conjuntos de puntos del mismo tamaño en el plano. Nos referiremos a éstos como los colores y les llamaremos puntos *rojos* y *azules*, respectivamente.

Analizaremos dos variantes del problema, una en la que los bloques de las particiones están formadas por puntos pertenecientes únicamente a la misma clase cromática y otro en el que los bloques contienen el mismo número de puntos de una y otra clase cromática.

4.1. Particiones sin cruce en bloques monocromáticos

Dado un conjunto S de n puntos bicoloreados en posición general en el plano, sea $p(S)$ el mínimo número de subconjuntos monocromáticos en los que S puede dividirse, tal que sus cierres convexos son disjuntos por

pares. A partir de esto,

$$p(n) = \max\{p(S) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ en posición general, } |S| = n\}$$

Dumitrescu y Pach demostraron en [4] que es posible particionar un conjunto de n puntos en el plano en $n/2 + O(1)$ bloques monocromáticos cuyos cierres convexos son disjuntos, sin embargo, si el tamaño de cada bloque se limita a contener a lo más dos puntos entonces, ésto no es posible ya que hay configuraciones que requieren $(1/2+\delta)n - O(1)$, $\delta > 0$ partes.

A continuación, enunciaremos el teorema de Dumitrescu y Pach.

Teorema 4.1.1. *Sea $p(n)$ el entero p más pequeño, con la propiedad de que todo conjunto bicromático de n puntos en posición general en el plano se puede dividir en p subconjuntos monocromáticos cuyos cierres convexos son disjuntos por pares. Entonces tenemos*

$$p(n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

Demostración. Probaremos el límite inferior por inducción sobre n . Evidentemente, tenemos que $p(1) \geq 1$, $p(2) \geq 2$.

Supongamos que la desigualdad se cumple para todos los valores menores que n . Consideremos un conjunto S_a de n puntos colocados en un círculo, y con colores alternados, rojo y azul (si n es impar, habrá dos puntos adyacentes del mismo color, digamos, rojo). Llamamos a esta configuración *alternante*. Denotemos como $h(n) = p(S_a)$ el mínimo número de bloques necesarios para particionar una configuración alternante de n puntos. Es evidente que $p(n) \geq h(n)$.

Supongamos primero que n es un número par, y fijemos una partición de S_a . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que esta partición tiene un bloque monocromático (por ejemplo, rojo) P de tamaño $l \geq 2$, de lo contrario el número de bloques es n . El conjunto $S_a \setminus P$ cae en l subconjuntos contiguos alternantes, cada uno compuesto por un número impar, n_1, n_2, \dots, n_l , de elementos, de manera que

$$\sum_{i=1}^{i=l} n_i + l = n, \text{ ó } \sum_{i=1}^{i=l} n_i + 1 = n$$

Entonces, por inducción,

$$h(n) \geq 1 + \sum_{i=1}^{i=l} h(n_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{i=l} \frac{n_i + 1}{2} = 1 + \frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

Si n es un número impar, sea P que denota uno de los dos puntos rojos adyacentes de S_a . Entonces,

$$h(n) = h(S_a) \geq h(S_a - \{P\}) = h(n-1) \geq \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

Para demostrar el límite superior, también usaremos inducción sobre n . Evidentemente, tenemos que $p(1) \leq 1$, $p(2) \leq 2$. Supongamos que la desigualdad se cumple para todos los valores menores que n . Si n es par,

$$p(n) \leq p(1) + p(n-1) \leq 1 + \frac{(n-1)+1}{2} = 1 + \frac{n}{2} = \frac{n+2}{2} = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

Sea n impar. Consideremos un conjunto S de n puntos, $n = w + b$, donde w y b denotan el número de puntos rojos y azules respectivamente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $w \geq b + 1$. Si, $\text{conv}(S)$, el cierre convexo de S , tiene dos vértices adyacentes del mismo color, podemos tomarlas como una parte monocromática y aplicar la hipótesis de inducción a los restantes $n - 2$ puntos.

Por tanto, podemos suponer que $\text{conv}(S)$ tiene un número par de vértices, y que son de color rojo y azul de manera alternada. Sea x un vértice rojo de $\text{conv}(S)$, y consideremos los puntos de $S - \{x\}$ en el sentido de las manecillas del reloj a partir de la visibilidad de x . Escribiendo un 0 para cada punto de color rojo que nos encontramos y un 1 por cada punto azul, construimos una secuencia $(0, 1)$ de longitud $n - 1$.

Obviamente, esta secuencia comienza y termina con un 1. Quitando el primero y el último elemento, obtenemos una secuencia $T = a_0 a_1 \dots a_{n-4}$ de longitud (par) $n - 3$.

La secuencia T consiste en $k = w - 1$ ceros y $l = b - 2$ unos, donde $k - l = (w - 1) - (b - 2) \geq 2$, donde $k + l$ es par. De acuerdo con el lema 4.1.2, demostrado a continuación, T tiene una subsecuencia 00 de dos ceros adyacentes a partir de un índice par $(0, 2, 4, \dots)$. Sea y y z que representan los dos puntos rojos que corresponden a estos dos ceros consecutivos. Particionando el conjunto S en la tripleta roja (x, y, z) y dos conjuntos de tamaño impar, n_1 y n_2 (con $n_1 + n_2 = n - 3$), formado por todos los puntos que preceden y siguen a (y, z) en el orden de las manecillas del reloj, respectivamente.

Entonces, se sigue por inducción que

$$p(n) \leq 1 + \frac{n_1 + 1}{2} + \frac{n_2 + 1}{2} = \frac{n + 1}{2} = \left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil$$

□

Lema 4.1.2. *Sea $T = a_0 a_1 \dots a_{k+l-1}$ una secuencia $(0, 1)$ de longitud par, que consiste de k ceros y l unos, donde $k - l \geq 2$. Entonces, hay un índice par $0 \leq i \leq k + l - 2$ tal que $a_i = a_{i+1} = 0$.*

Demostración. Probamos la afirmación utilizando inducción sobre $k + l$, la longitud de la cadena.

El caso base $k + l = 2$ es claro, porque entonces tenemos $T = 00$.

Para el paso inductivo, tenemos cuatro casos, de acuerdo a lo que se tiene en los dos primeros elementos de T : 00, 01, 10, 11.

El primer caso se remite al caso base. En los otros tres casos, la afirmación es verdadera, porque la desigualdad $k' - l' \geq 2$ se cumple para la secuencia T' obtenida a partir de T eliminando de sus primeros dos elementos. (Aquí k' y l' denotan el número de ceros y unos en T' , respectivamente.)

□

Cuando los tamaños de las dos clases cromáticas difieren en más de uno, se prueba un mejor resultado. Abusando de la notación, Para toda $w \leq b$, escribimos $p(w, b)$ para el mínimo número de subconjuntos monocromáticos, en el que un conjunto de w puntos rojos y b puntos azules se puede dividir, de modo que sus cierres convexos sean disjuntos por pares. Obviamente, tenemos que $p(w, b) \leq p(w + b)$.

En este caso se tiene

$$w + 1 \leq p(w, b) \leq 2 \left\lceil \frac{w}{2} \right\rceil + 1$$

4.2. Particiones sin cruce en bloques balanceados

En esta sección se presentan nuestros resultados sobre el número $\pi(n)$ de *particiones balanceadas sin cruce* de un conjunto $|S| = 2n$.

La partición de un conjunto bicoloreado se dice que es *balanceada* si cada bloque contiene el mismo número de puntos rojos que de azules.

Es decir, el número de particiones $S = \cup S_i$ donde $|S_i \cap R| = |S_i \cap B|$ y $\text{conv}(S_i) \cap \text{conv}(S_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos el conjunto $S = R \cup B$ donde

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\} \text{ y } B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}.$$

Entonces, $P = \{\{r_1, b_2\}, \{b_1, r_2\}, \{b_3, b_4, b_5, r_3, r_4, r_5\}\}$ es una partición balanceada de S .

Los bloques $B_1 = \{r_1, b_2\}$, $B_2 = \{b_1, r_2\}$, $B_3 = \{b_3, b_4, b_5, r_3, r_4, r_5\}$ están balanceados en la partición.

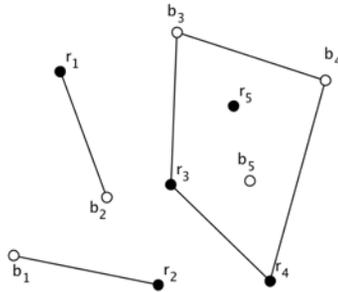


Figura 4.1: Partición balanceada de un conjunto de puntos bicromático.

4.2.1. Posición convexa

Decimos que una familia de puntos está en posición convexa, si sus elementos son los vértices de un poliedro convexo.

En el resto de esta sección supondremos que todos nuestros conjuntos de puntos están en posición convexa.

A continuación mostraremos las cotas inferior y superior, en el número total de particiones balanceadas sin cruce para el caso en que los puntos se encuentran en posición convexa.

En ambos casos, utilizaremos configuraciones especiales de puntos que alcanzan el conteo mínimo y máximo respectivamente y más adelante demostraremos que, efectivamente, éstas son las configuraciones extremas del problema.

4.2.1.1. Conteos inferior y superior

La cota inferior es $O(2^{n-1})$ y la cota superior es $O\left(n^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{27}{4}\right)^n\right)$.

Teorema 4.2.2. *Sea S un conjunto de $2n$ puntos bicromáticos en posición convexa en el plano. Entonces, el número de particiones balanceadas sin cruce cumple:*

$$O(2^{n-1}) \leq \pi(n)$$

Demostración. Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto bicoloreado de puntos en posición convexa, de tal forma que todos los puntos de R se separan de los de B ; diremos que los puntos de R se encuentran en la parte superior y los puntos de B en la inferior (como se muestran en la siguiente figura 4.2).

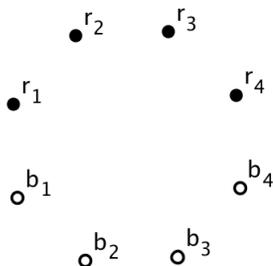


Figura 4.2: Conjunto convexo de puntos bicoloreados separables.

Exhibiremos una inyección de las cadenas de $n - 1$ bits a las particiones balanceadas sin cruces de S .

Para esto, asignemos a los puntos de S uno de sus dos posibles ordenes cíclicos, y sea r_1 el primero de todos los puntos de R en ese orden; así, los puntos de R reciben el orden lineal (r_1, r_2, \dots, r_n) . Para los puntos de B , asignamos el orden cíclico inverso al escogido para los puntos de R , de forma que el punto $b_1 \in B$ es contiguo a r_1 .

Ahora, dada una cadena de bits $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 1)$, le asociamos la siguiente partición $R = \cup R_i$, donde

$$R_i = \{r_i, r_{i+1}, \dots, r_k\}$$

siempre que $t_k = 1$ y $t_i = 0$ para toda $i < k$; es decir, cada bit prendido $t_k = 1$ define una parte, y ésta consta de los elementos a su izquierda que tienen su bit respectivo apagado $t_i = 0$. Los puntos azules los partimos de manera análoga y definimos la partición $S = \cup S_i$, donde $S_i = R_i \cup B_i$.

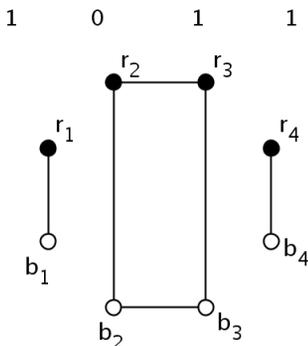


Figura 4.3: Ejemplo de una partición de puntos bicolorados.

Por ejemplo, en la figura 4.2, la cadena de bits $(1, 0, 1, 1)$ define la 3-partición dada en la figura 4.3.

De aquí se sigue que $\pi(n) \geq O(2^{n-1})$

□

La cota superior se deriva de una configuración especial de los puntos del conjunto, aquella en la que la coloración de los puntos es alternante.

Teorema 4.2.3. *Sea S un conjunto de $2n$ puntos bicromáticos en posición convexa en el plano. Entonces, el número de particiones balanceadas sin cruce cumple:*

$$\pi(n) \leq O\left(n \binom{2n}{4}\right).$$

Demostración. Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos en posición convexa, de tal forma que todos los puntos de R y B , se encuentran intercalados entre sí en el casco convexo, como se muestra en la figura 4.4.

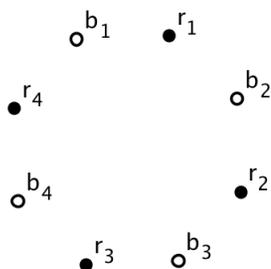


Figura 4.4: Conjunto de puntos con una coloración alternante

Callan mostró en [7] que el número de particiones sin cruce de un conjunto convexo $|S| = 2n$ cuyos bloques son de tamaño par es el número generalizado de Catalan: $\frac{\binom{3n}{n}}{(2n+1)} = \Theta\left(n^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{27}{4}\right)^n\right)$.

De modo que queremos mostrar que dado un conjunto de puntos con una coloración como la que se muestra en la Figura 4.4, cualquier partición cuyos bloques sean de tamaño par, cada uno de los bloques tendrá un número balanceado de puntos de R y B .

Podemos utilizar inducción matemática, sobre el número de bloques de una partición, para comprobar que dicha afirmación es cierta:

Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos en posición convexa bicoloreados de la forma $S = \{r_1, b_1, r_2, b_2, \dots, r_n, b_n \mid r_i \in R, b_i \in B\}$.

Sea P una k -partición cualquiera de S de la forma $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k \mid |P_i| \text{ es par}\}$.

Caso Base Sea $|P| = 1$.

En éste caso tenemos una única partición de tamaño par del conjunto

S con $2n$ puntos, n puntos pertenecen al conjunto R y los otros n pertenecen a B .

Por lo tanto, dicha partición tiene un número balanceado de puntos de R y B .

Hipótesis de inducción Supongamos $|P| = n - 1$ con bloques de tamaño par y cada uno de los bloques tiene un número balanceado de puntos de R y B .

Paso inductivo Tomemos $|P| = n$ una partición de puntos bicoloreados de S .

Tomemos $P_t \in P$ un bloque de la partición P .

Entonces, por hipótesis de inducción sabemos que los $n - 1$ bloques restantes contienen un número balanceado de puntos de R y B .

Ahora, pensemos en regresar el bloque P_t a la partición completa. Tenemos dos casos:

Caso 1. P_t es un bloque con un número par de puntos contiguos.

Entonces, cada punto $r_i \in P_t$ tiene su correspondiente punto azul $b_i \in P_t$ contiguo. Además, como P_t contiene un número par de puntos, entonces contiene la misma cantidad de puntos de R y B .

Caso 2. P_t es un bloque con un número par de puntos no necesariamente contiguos.

Entonces, basta fijarse en las aristas del cierre convexo que unen puntos no contiguos. Dichas aristas separan el conjunto de puntos de P_t del resto de los puntos de S .

Por hipótesis de inducción, sabemos que el resto de los $n - 1$ bloques de la partición están balanceados y contienen un número par de puntos; entonces deja un número par de puntos contiguos afuera de la partición.

Por lo tanto, las aristas que unen puntos no contiguos, deben tener extremos de diferente color y son balanceadas.

$$\text{Así, } \pi(n) \leq \frac{\binom{3n}{n}}{(2n+1)} \leq \Theta\left(n^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{27}{4}\right)^n\right).$$

□

4.2.1.2. Configuraciones extremas

Ahora vamos a demostrar que, para el caso en que los puntos se encuentran en posición convexa, la coloración donde se separan los puntos de una coloración y de otra, minimiza la función π mientras que la coloración que intercala los colores la maximiza.

Para ello, haremos uso de un par de lemas que demostraremos a continuación.

Lema 4.2.4. *Sea $S = R \cup B$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano.*

Entonces, dada una coloración k no alternante, del conjunto S , es posible encontrar otra configuración distinta, \tilde{k} , intercambiando dos puntos consecutivos con diferente coloración, de tal forma que el número de particiones balanceadas sin cruce de \tilde{k} es mayor que las de k .

Demostración. Sea $S = R \cup B$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano de forma que los puntos de S tienen una coloración k no alternante.

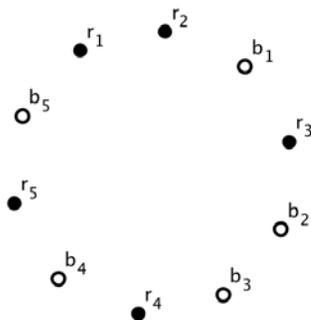


Figura 4.5: Ejemplo de una coloración no alternante.

Entonces existen, en S , al menos tres puntos consecutivos $\{r_1, r_2, b_1 | r_1, r_2 \in R, b_1 \in B\}$. Sin perder generalidad, diremos que los puntos se encuentran ordenados de manera cíclica en el sentido de las manecillas del reloj de la forma $\{r_1, r_2, b_1\}$, como se muestran en la figura 4.5.

Sea P una t -partición cualquiera de S de la forma $P = \{P_1, P_2, \dots, P_t\}$.

Sea \tilde{k} la coloración que se obtiene de intercambiar los puntos r_2 y b_1 . Partiendo de la coloración k , se tienen los siguientes casos:

Caso 1. $r_1 \in P_i$ y $r_2, b_1 \in P_j$ donde $i \neq j$ y $1 \leq i, j \leq t$.

Entonces, al intercambiar r_2 y b_1 , el bloque P_j sigue estando balanceado. Lo que significa que todas las particiones que contienen al bloque P_j siguen siendo válidas en la coloración \tilde{k} , pero además se obtiene una nueva partición P' de la forma:

$P' = \{P_1, P_2, \dots, P'_i, P'_j, \dots, P_t\}$, donde $P'_j = \{P_j \setminus \{b_1\} \cup P_i \setminus \{r_1\}\}$ y $P'_i = \{\{r_1\} \cup \{b_1\}\}$

Como se muestra en la figura 4.6.

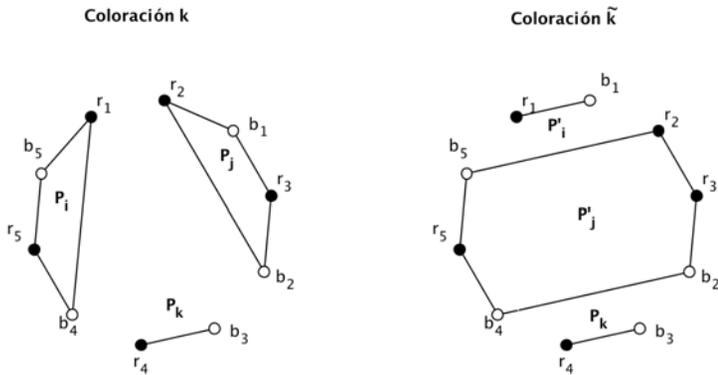


Figura 4.6: Nuevas particiones obtenidas en la coloración \tilde{k} cuando $r_1 \in P_i$ y $r_2, b_1 \in P_j$.

Caso 2. $r_1, r_2 \in P_i$ y $b_1 \in P_j$ donde $i \neq j$ y $1 \leq i, j \leq t$.

Entonces, al intercambiar r_2 y b_1 , los bloques P_i y P_j ya no están balanceados. Sin embargo en la coloración \tilde{k} , podemos construir dos nuevas particiones: una nueva partición P' y otra que es la reflexión de P' .

Así, P' es de la forma $P' = \{P_1, P_2, \dots, P'_i, P'_j, \dots, P_t\}$, donde $P'_j = \{\{r_2\} \cup P_j \setminus \{b_1\} \cup P_i \setminus \{r_1\}\}$ y $P'_i = \{r_1, b_1\}$.

Como se muestra en la figura 4.7.

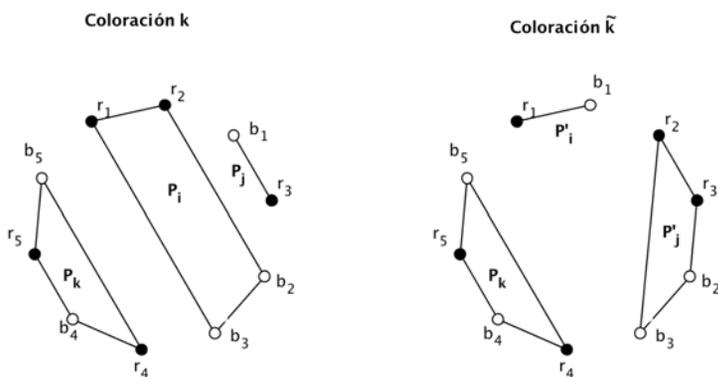


Figura 4.7: Nuevas particiones obtenidas en la coloración \tilde{k} cuando $r_1, r_2 \in P_i$ y $b_1 \in P_j$.

Caso 3. $r_1 \in P_i, r_2 \in P_j$ y $b_1 \in P_k$ donde $i \neq j \neq k$ y $1 \leq i, j, k \leq t$.

Entonces, al intercambiar r_2 y b_1 , los bloques P_j y P_k ya no están balanceados. Sin embargo en la coloración \tilde{k} , podemos construir dos nuevas particiones: una nueva partición P' y otra que es la reflexión de P' .

Así, P' es de la forma $P' = \{P_1, P_2, \dots, P'_i, P'_j, P'_k, \dots, P_t\}$, donde $P'_j = \{P_j \cup P_k \setminus \{b_1\} \cup P_i \setminus \{r_1\}\}$, $P'_i = \{r_1, b_1\}$ y $P'_k = \emptyset$.

Como se muestra en la figura 4.8.

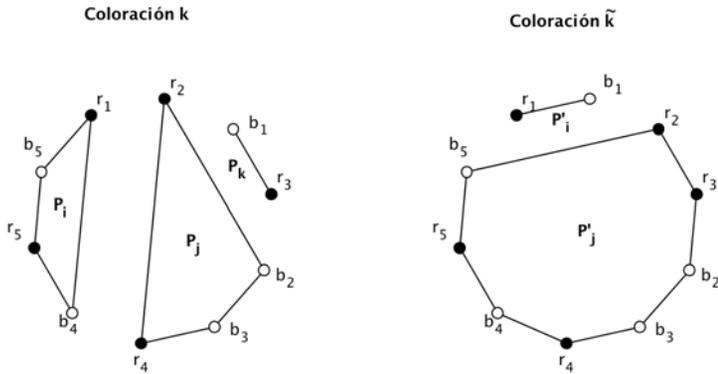


Figura 4.8: Nuevas particiones obtenidas en la coloración \tilde{k} cuando $r_1 \in P_i$, $r_2 \in P_j$ y $b_1 \in P_k$.

Por lo tanto, el número de particiones balanceadas sin cruce de \tilde{k} es mayor que las de k . \square

El siguiente lema prueba que es posible llevar cualquier configuración de puntos con una coloración no alternante a una alternante.

Lema 4.2.5. *Sea $S = R \cup B$, tal que $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano.*

Entonces, dada una coloración k no alternante, del conjunto S , es posible transformarla en una configuración alternante, \tilde{k} , con un número finito de intercambios entre elementos consecutivos.

Demostración. Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ tal que $R = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano de forma que S tiene una coloración k no alternante.

Fijemos de manera arbitraria al punto a_1 como el *punto de inicio*.

Diremos que un punto a_i (b_i), se encuentra en su *posición correcta* si, al ser ordenados de manera cíclica en el sentido de las manecillas del reloj, es consecutivo al punto b_{i-1} (a_{i-1}).

Entonces, llevar los puntos de S a su posición correcta, se realiza mediante la comparación de cada par de puntos adyacentes y de intercambiarlos si no se encuentran en su posición correcta.

Este proceso se ejecuta a través de todos los puntos hasta que ya no se realiza ningún intercambio.

Observemos que, después de la primera vez que se comparan todos los puntos, el último punto estará en su posición final después de la primera pasada. Por lo tanto, inductivamente, basta con ordenar los restantes $n - 1$ puntos: después de la segunda pasada, el punto $n - 1$ estará en su lugar correcto, y así sucesivamente.

Entonces, para llevar todos los puntos de S a su posición correcta es necesario hacer

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}$$

intercambios.

Por lo tanto, la configuración resultante es una coloración alternante y es posible obtenerla con un número finito de intercambios entre elementos consecutivos.

□

Teorema 4.2.6. *Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano de forma que los puntos de S tienen una coloración alternante.*

Entonces, el número de particiones balanceadas sin cruce de S es máximo.

Demostración. Por negación.

Supongamos que el número de particiones balanceadas sin cruce de S no es máximo.

Entonces debe existir un conjunto de puntos con una configuración diferente cuyo número de particiones balanceadas sin cruce es mayor a S .

Sea $S' = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano de forma que los puntos de S' no tienen una coloración alternante.

Sin embargo, por el lema 4.2.5 es posible transformar la configuración de S' en S con un número finito de intercambios entre elementos consecutivos.

Pero por el lema 4.2.4, con cada uno de los intercambios de la transformación de S' se obtiene un número mayor de particiones balanceadas sin cruce.

Entonces, S' no tiene un número máximo de particiones balanceadas sin cruce.

Por lo tanto, el número de particiones balanceadas sin cruce de S es máximo. \square

Teorema 4.2.7. *Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano de forma que los puntos de R se separan de los puntos de B , es decir, los puntos de R y B forman cadenas monocromáticas consecutivas.*

Entonces, el número de particiones balanceadas sin cruce de S es mínimo.

Demostración. Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos bicromáticos en posición convexa en el plano de forma que los puntos de S tienen una coloración separable de R y B .

Entonces, por el lema 4.2.4, dada cualquier configuración de puntos que no tenga una coloración alternante se puede encontrar otra que tenga

un número mayor de particiones balanceadas sin cruce.

Por lo tanto, el número de particiones balanceadas sin cruce de S es mínimo. \square

4.2.2. Posición general

En ésta sección analizaremos configuraciones de puntos que se encuentran en posición general en el plano, es decir, cuando no hay tres puntos que sean colineales entre sí y no hay cuatro puntos que caigan en el mismo círculo.

En el resto de esta sección supondremos que todos nuestros conjuntos de puntos están en posición general y se presentarán algunas cotas para el número de particiones balanceadas sin cruce en conjuntos de puntos bicromáticos.

4.2.2.1. Configuraciones especiales

En ésta sección daremos una primera aproximación al problema utilizando una configuración especial de puntos en posición general: la doble cadena.

En el capítulo 4 se describió la configuración de la doble cadena para conjuntos de puntos monocromáticos.

Ahora utilizaremos la misma interpretación pero con la característica de estar formada por puntos bicromáticos.

Dada $m \in \mathbb{N}$, la **doble cadena** D_{4m} consiste de $2n := 4m$ puntos bicoloreados.

Hay una mitad superior U_m con $2m$ puntos con una coloración alternante de la parábola $y = \frac{x^2+1}{2}$, con sus coordenadas en x en el rango $[-1, 1]$, y hay una mitad inferior L_m de $2m$ puntos con una coloración alternante de la

parábola $y = -\frac{x^2+1}{2}$ en el mismo rango de x , como se muestra en la figura 4.9.

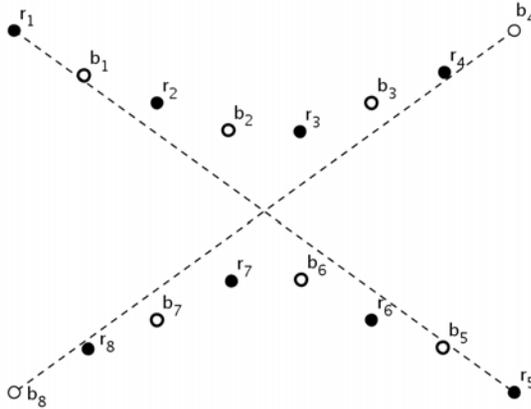


Figura 4.9: La doble cadena D_{16} con una coloración alternante.

Presentaremos una cota inferior para el número de particiones sin cruce en el caso en que los puntos se encuentran formando una doble cadena intercalada. Para ello, se utilizará una técnica semejante a la usada para demostrar el teorema 3.7.2, pero además, explotando el hecho de que toda las particiones se pueden generar uniendo combinaciones posibles de bloques de distintos tamaños.

Teorema 4.2.8. *Dada $m \in \mathbb{N}$. Sea S un conjunto de $2n := 4m$ puntos en el plano, como se muestra en la figura 3.22.*

Entonces, el número de particiones sin cruce (cpf) cumple:

$$cpf(D_{4m}) \geq O(5.23^{2n})$$

Demostración. Supongamos m un entero par, tomemos D_{4m} , y una coloración alternada de los puntos de U_m en rojo y azul, empezando con el color

rojo en el punto que se encuentra más a la izquierda. Luego, se colorea L_m alternando los colores azul y rojo, comenzando con azul en el punto que se encuentra más a la izquierda, como se muestra en la figura 4.9.

Dada ésta coloración, tomemos un apareamiento perfecto bicromático, rojo-azul, del conjunto de puntos S de manera que se aparean los puntos rojos con su vecino azul (a la derecha) en U_m y se aparean los puntos azules con su vecino rojo (a la derecha) en L_m , como se muestra en la figura 4.10. Esto puede hacerse de manera única.

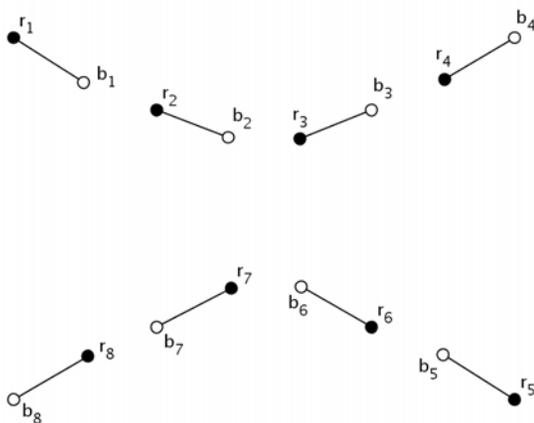


Figura 4.10: Un apareamiento perfecto bicromático de la doble cadena D_{16} en una coloración alternante.

Podemos pensar en cada una de las parejas del apareamiento como un solo punto monocromático, de manera que ahora tenemos un conjunto de puntos de $n := 2m$ formando una doble cadena en el plano.

Utilizando 3.7.2 sabemos que éste conjunto tiene $O(5.23^n)$ particiones sin cruce.

De manera que, *desenvolviendo* el apareamiento bicromático que se formó anteriormente, volvemos a obtener el conjunto D_{4m} puntos que contiene $O(5.23^{2n})$ particiones sin cruce.

□

4.2.2.2. Conteos inferior y superior

Ahora presentaremos las cotas inferior y superior en el número total de particiones balanceadas sin cruce para el caso en que los puntos se encuentran en posición general.

Teorema 4.2.9. *Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$ un conjunto de puntos bicolorados en el plano en posición general.*

Entonces, $O(2^{n/2}) \leq \pi(n)$.

Demostración. Utilizaremos el teorema de Ham-Sandwich para ir haciendo divisiones balanceadas de los puntos en el plano.

El teorema de *Ham-Sandwich* enuncia que: *Para un conjunto finito de puntos en el plano, cada uno de color rojo o azul, existe una línea que divide al mismo tiempo a los puntos de color rojo y a los de color azul, es decir, el número de puntos rojos a ambos lados de la línea es igual y el número de puntos azules a ambos lados de la línea es igual.*

El teorema de Ham-Sandwich, solo muestra la existencia de un bisector que divide al plano de manera balanceada. Sin embargo, dicho bisector podría ser único.

De manera que el teorema del *Ham-Sandwich* nos da inmediatamente una cota inferior sobre el número de puntos; para esto, simplemente encontramos una 2-partición balanceada (garantizada por dicho teorema); luego, podemos partir cada parte de forma balanceada; y así seguimos $\log n$ pasos hasta que las partes contengan exactamente dos puntos, uno de cada color, obteniendo así, la siguiente recurrencia:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) * T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Desarrollando la recurrencia, se obtiene:

Supongamos que $n = 2^k$ es decir, $k = \log_2 n$

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T\left(\frac{2^k}{2}\right) + 1 \\
 &= T\left(\frac{2^k}{4}\right) + 2 \\
 &\dots \\
 &= T\left(\frac{2^k}{2^i}\right) + i
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Detenemos la recurrencia cuando $i = k - 1$.

Así, en el último paso tenemos:

$$\begin{aligned}
 T\left(\frac{2^k}{2^{k-1}}\right) + (k - 1) &= T(2^{2^{k-1}}) + (k - 1) \\
 &= 2^{2^{k-1}} + (k - 1) \\
 &= 2^{2^{(\log_2 n) - 1}} + ((\log_2 n) - 1) \\
 &= 2^{n/2} + (\log_2 n) - 1
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Este procedimiento exhibe al menos

$$O(2^{n/2})$$

particiones del conjunto original. □

El conteo para la cota superior esta basada en el hecho de que la partición con el mayor número de bloques es aquella en la que los bloques contienen el mínimo número de puntos, es decir, la partición con bloques de tamaño dos, una emparejamiento bicromático.

Todas las demás particiones resultan de unir combinaciones de bloques de distintos tamaños.

Teorema 4.2.10. *Sea $S = R \cup B$, $|R| = |B| = n$, un conjunto de puntos bicoloreados en el plano en posición general.*

Entonces, $O(9.61^{2n}) \geq \pi(n)$.

Demostración. Haremos un mapeo de todas las particiones sin cruce balanceadas a una tupla (M, S, I^+, I^-) , donde:

- M es el emparejamiento bicromáticos en P , cuyas aristas conectan el punto más a la izquierda de cada bloque de la partición, con el punto más a la derecha del bloque y con al menos dos elementos (nos referimos a cada uno de esos segmentos como la columna vertebral de su conjunto);
- S es el conjunto de todos los puntos que forman emparejamientos aislados en la partición.
- I^+ (respectivamente, I^-) es el conjunto de emparejamientos bicromáticos de $P \setminus S$ que no son la columna vertebral de su bloque, y que se encuentran por encima (o por debajo) de la columna vertebral del bloque.

Observemos que M es una partición balanceada sin cruces y que la partición está determinada de forma única por (M, S, I^+, I^-) . Por lo tanto, cualquier límite superior sobre el número de tuplas establecerá un límite superior sobre el número de particiones balanceadas sin cruce.

Podemos estimar el número de la 4-tupla escogiendo primero un subconjunto Q de n puntos rojos y n puntos azules y formando un emparejamiento perfecto bicromático, luego se re-particiona el resto de los puntos $P \setminus Q$ en $I^+ \cup I^-$.

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2 c^{2k} 2^{2(n-k)} &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} c^k 2^{(n-k)} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} c^k 2^{(n-k)} \right)^2 \\ &= (c + 2)^{2n}\end{aligned}$$

donde c es la constante que acota el número de emparejamientos perfectos bicromáticos.

Obteniendo:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2 c^{2k} 2^{2(n-k)} \leq (7.61 + 2)^{2n}$$

Por lo tanto, se tiene una cota de $O(9.61)^{2n}$.

□

Capítulo 5

Conclusiones

En los capítulos 3 y 4 se expusieron los resultados del trabajo realizado con particiones sin cruce. Ahora retomaremos brevemente ambos temas para resaltar algunos de los logros, así como mencionar posibles mejoras y direcciones en las que fijaríamos las siguientes metas.

Se demostraron las cotas inferior y superior, en el número total de particiones balanceadas sin cruce para el caso en que los puntos se encuentran en posición convexa.

Dando por resultado que, la cota inferior es $O(2^{n-1})$ y la cota superior es $O\left(n^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{27}{4}\right)^n\right)$.

Se demostró que, para el caso en que los puntos se encuentran en posición convexa, la coloración donde se separan los puntos de una clase cromática de otra, minimiza el número de particiones balanceadas sin cruce, mientras que la coloración que intercala los colores la maximiza.

También se mostró una cota inferior para el número de particiones sin cruce en el caso en que los puntos se encuentran formando una doble cadena intercalada; siendo ésta una configuración especial de puntos en posición general.

Exhibiendo una cota inferior de $cpf(D_{4m}) \geq O(5.23^{2n})$.

Para las cotas inferior y superior en el número total de particiones balanceadas sin cruce para el caso en que los puntos se encuentran en posición general, se demostró que $O(2^{n/2}) \leq \pi(n) \leq O(9.66^{2n})$.

5.1. Trabajo Futuro

Debido al gran número de posibles problemas que involucra el estudio de las particiones sin cruce, el trabajo a futuro sobre el tema y el estudio de las diferentes soluciones resulta igual de extenso.

Entre los posibles estudios futuros se podría seguir cualquiera de las siguientes líneas de investigación:

Particiones en diferentes tipos de clases. Sería deseable estudiar el número de particiones balanceadas sin cruce para un conjunto de puntos bicromático en k clases, para $1 \leq k \leq n$.

Se conjetura que los conjuntos de puntos en posición convexa minimizan el número de particiones balanceadas sin cruce, para todos los valores de k .

Desarrollo de algoritmos para la construcción de particiones. Por lo que se sabe acerca de la complejidad algorítmica de calcular el número $cfpb(P)$ de particiones balanceadas sin cruce para un conjunto P de puntos bicromáticos es abierto, ni siquiera se conoce un algoritmo de tiempo polinomial, ni límites inferiores, o si es un problema NP -completo, por ejemplo.

Límites absolutos. Se podrían encontrar los límites absolutos de las particiones balanceadas sin cruce derivados de las constantes conocidas, como es el número de emparejamientos bicromáticos (pm), es decir, demostrar que

Dada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $cfpb(n) := \max_{|P|=n} cfpb(P)$ y $C_{cfpb} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{cfpb(n)}$.

Bibliografía

- [1] G. Kreweras, Sur les partitions noncroisées d un cycle, *Discrete Math.* 1 (1972) 333-350. e
- [2] V. Capoyreas, G. Rote, G. Woeginger. Geometric Clustering, *Journal of algorithms* 12 (1991), 341-356.
- [3] Sharir Micha, Welzl Emo. On the Number of Crossing-Free Matchings, Cycles, and Partitions. *SIAM J. Comput.*, 36(3). 2006, pp. 695-720.
- [4] Adrian Dumitrescu, Janos Pach. Partitioning Colored Point Sets into Monochromatic Parts. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, vol. 12, num. 5, 2002, p. 401-412
- [5] Koshy, Thomas. *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press US, 2008.
- [6] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*, Cambridge University Press, New York Cambridge, 1999. Excerpt on problems related to Catalan numbers available at <http://www.math.mit.edu/rstan/ec/ec.html>
- [7] D. Callan, Sets, lists and noncrossing partitions, *Journal of Integer Sequences*, 11, Article 08.1.3, 2008.
- [8] Simion, Rodica. Noncrossing partitions. *Discrete Mathematics* 217 (2000) 367-409.

- [9] Cormen, Thomas and Leiserson, Charles and Rivest, Ronald and Stein, Clifford. Introduction to algorithms. Cambridge, massachusetts : MIT : New York : McGraw-Hill, Chapter 34, 1990.
- [10] Skiena, Steven. The algorithm design manual. Springer-Verlag, New York. 1997.
- [11] García Alfredo, Hurtado Ferran, Tejel, Javier, Urrutia, J. On the number of non-crossing rays configurations. 2007.