UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES PRÁCTICAS DEL MODELO DE DECREMENTOS MÚLTIPLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

TANIA FIGUEROA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. en A.R. PEDRO AGUILAR BELTRÁN
2009

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno
   Figueroa
   López
   Tania
   56 95 58 48
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   300106606

2. Datos del tutor
   M. en A.R.
   Aguilar
   Beltrán
   Pedro

3. Datos del sinodal 1
   Act.
   Avendaño
   Estrada
   Jorge Otilio

4. Datos del sinodal 2
   Act.
   Canseco
   Rodríguez
   Nahiely

5. Datos del sinodal 3
   Act.
   Gómez
   Mendoza
   Maximino

6. Datos del sinodal 4
   Act.
   Peralta
   Cuellar
   Agustín

7. Datos del trabajo escrito
   Aplicaciones prácticas del modelo de decrementos múltiples
   104 páginas
   2009

AGRADECIMIENTOS

¡Gracias!, qué más podría empezar diciendo...

A mis padres, porque estuvieron, porque están y porque siempre estarán conmigo guiando mi camino. Sepan que mi esfuerzo es inspirado por ustedes y que este logro también es suyo.

A mis hermanos, por las alegrías, sueños e ilusiones compartidas, por mostrarme que puedo contar con ustedes ahora y siempre.

A mis amigos de aquí y de allá, por estar conmigo a pesar de la distancia, cada uno de ustedes me ha apoyado de una u otra forma para concretar este sueño.

A mi director de tesis y mis sinodales, quienes a pesar de sus múltiples ocupaciones se dieron un espacio para la revisión de este trabajo.

Selbañartne sodreucer sol rop saicarg, soña sotnat rop sala sim revom a óduya euq eria le res rop, suorefitarG it a.

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO

En la actualidad los actuarios regularmente tienen la necesidad de calcular la probabilidad de que, dado un conjunto de eventos de carácter fortuito, como son la muerte, invalidez o desempleo, una persona se vea afectada por cualquiera de ellos -el que ocurra primero-, y como consecuencia se origina una obligación que puede ser el pago de un beneficio. Considerando que a una persona le puede afectar más de un evento durante el tiempo de exposición, se produce un efecto de dependencia en el efecto de dichos eventos sobre la persona, lo que da origen a la necesidad de aplicar técnicas especiales para el cálculo de probabilidades de que a la persona le ocurra un evento determinado. A tales probabilidades se les llama probabilidades de decrementos múltiples. El problema principal radica en que deben construirse a partir de las probabilidades de salidas independientes llamadas en este ámbito, probabilidades de salidas simples, independientes o absolutas. Lo anterior genera una serie de técnicas conocidas en conjunto como teoría de decrementos múltiples.

El modelo de decrementos múltiples no considera sólo la defunción como estado final, sino que también tiene en cuenta otros estados de vida que se pueden tomar como definitivos, es decir, eventos que constituyen la salida del grupo de estudio y el pago de un beneficio. En este sentido, dependiendo del tipo de fenómeno que se esté estudiando, pueden definirse diferentes decrementos.

Este modelo es utilizado por actuarios y compañías de seguros para calcular primas, pensiones (rentas) e indemnizaciones a pagar al llegar al estado de beneficiario, es decir, jubilado, incapacitado, viudo, etc.; sin embargo, el objetivo de este trabajo es mostrar que el modelo de decrementos múltiples tiene distintas aplicaciones que no están relacionadas directamente con los seguros y pensiones.

En el Capítulo 1 se estudia el modelo de un solo decremento, esto es, en el que el pago del beneficio depende del fallecimiento de la persona y a partir de este modelo hacemos la generalización al modelo de decrementos múltiples. También planteamos un problema con el cual podemos observar que las probabilidades de las causas de salida dependen unas de otras, por lo que las probabilidades de decremento son vistas como dependientes.

Para poder resolver problemas en los que se involucren varios decrementos es necesario realizar un ajuste en las probabilidades individuales de salida, ya que corremos el riesgo de llegar a resultados erróneos de ser utilizadas así. Los métodos para ajustar estas probabilidades las desarrollamos en el Capítulo 2.

En el Capítulo 3 estudiamos el conjunto de técnicas que permiten estudiar la variable "tiempo hasta que ocurre un evento "y su dependencia con otras posibles variables. Por ejemplo, en el estudio de enfermedades crónicas o tratamientos muy agresivos, el tiempo hasta que ocurre la muerte del enfermo (tiempo de supervivencia) y su dependencia con la aplicación de distintos tratamientos, pero en otras enfermedades, el tiempo hasta la curación, o el tiempo hasta la aparición de la enfermedad. En procesos de control de calidad se estudia el tiempo hasta que un cierto producto falla (tiempo de fallo), o el tiempo de espera hasta recibir un servicio (tiempo de espera), etc. A esto se le llama análisis de supervivencia y es una aplicación del modelo de decrementos múltiples.

Finalmente en el Capítulo 4 abordamos las aplicaciones prácticas del modelo de decrementos múltiples.

1. INTRODUCCIÓN AL MODELO DE DECREMENTOS MÚLTIPLES

Un Modelo de decrementos múltiples es un modelo matemático que considera a un grupo de estudio sujeto a diversas contingencias (también llamadas decrementos) que operan en forma continua sobre él y por las cuales cada integrante puede salir del grupo. Por ejemplo, en el plan de pensiones de una compañía se pueden tomar en cuenta diversos decrementos como son la invalidez, la jubilación, la rotación y la muerte. En algunos casos el pago de un seguro puede estar condicionado a un accidente o enfermedad. En otros casos una persona puede dejar de ser asegurado si muere, se incapacita o alcanza una edad límite.

Sin embargo, dicho grupo de estudio no se limita sólo a personas o seres vivos, también se puede tomar como sujeto de estudio cualquier objeto que sea susceptible de salir de un grupo de estudio determinado, o del cual se quiera saber su comportamiento bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, en un proceso industrial la calidad de cierto producto es determinado por el control de calidad; el tiempo de vida de vida de una computadora puede ser afectada por distintos factores; o el pago del seguro de un automóvil puede estar condicionado a ciertos eventos contingentes.

Tomemos en cuenta que ahora hablaremos de “salida de una persona del grupo”pues no es necesario que la persona fallezca para que salga del grupo inicial, nótese, que en caso de un plan de pensiones, una persona puede salir del grupo inicial si se invalida, jubila, rota, muere o se ve afectada por cualquier otro decremento incluido en el plan de pensiones; además de que en algunos casos no necesariamente estaremos hablando de personas, también podemos estar tratando con “objetos”.

Por el momento, no daremos una lista específica de las causas por las que una persona u objeto puede salir de nuestro grupo de estudio, ya que éstas dependen del fenómeno que se esté estudiando, pero asumiremos que la causa “muerte” se encuentra en nuestra lista de n decrementos.

1.1. El modelo de decremento simple

Como ya se mencionó, en un Modelo de decrementos múltiples hay n causas de eliminación; sin embargo, antes de empezar el estudio de tal modelo, introduciremos un modelo más sencillo, un modelo en el que sólo hay una forma de salida, el fallecimiento, llamaremos a este modelo el *Modelo de Decremento Simple o Modelo Básico de Supervivencia*; queda claro que cada miembro de un grupo de personas sujeto a este modelo saldrá del grupo de estudio si fallece.

A continuación estudiaremos cómo se comporta este modelo, y para ello será necesario introducir algunos términos.

$T(x)$: variable aleatoria continua que denotará el tiempo restante de existencia de una persona de edad x.
Claramente el rango de $T(x)$ es $[0, \infty)$ si no existe una edad límite. En otro caso, será $[0, \omega - x)$ donde ω representa la edad límite.

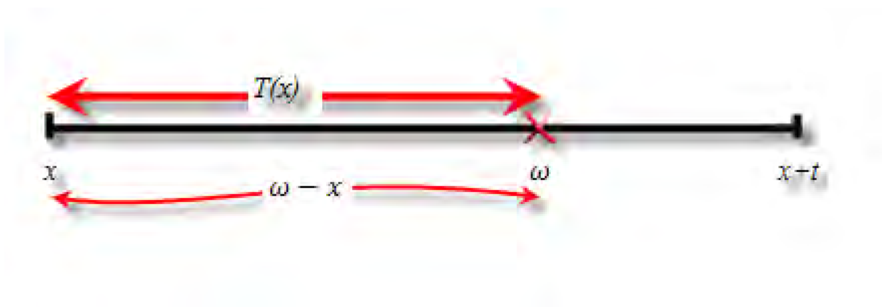


Fig. 1.1: Rango de la variable $T(x)$

Para la función de distribución acumulada de $T(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} F_T(x)(t) &= P[T(x) \leq t] \\ &= P[\textit{el tiempo que le resta de vida a } (x) \textit{ sea menor a } t \textit{ años}] \\ &= P[(x) \textit{ fallezca entre las edades } x \textit{ y } x+t] \\ &= {}_tq_x'^{(m)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

El complemento de ${}_tq_x'^{(m)}$ es ${}_tp_x'^{(m)}$, que representa la probabilidad de que

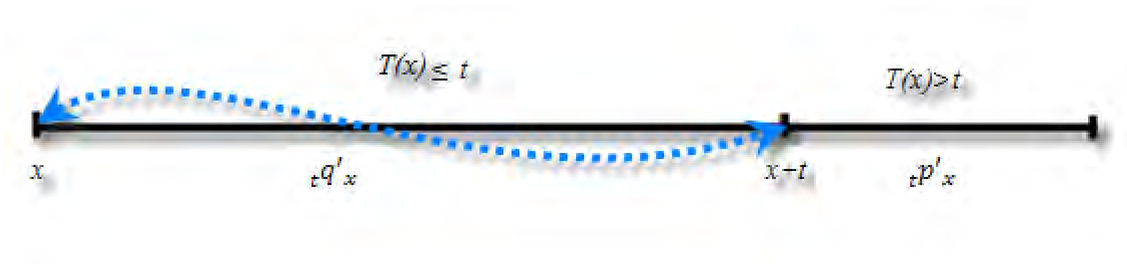


Fig. 1.2:

(x) no fallezca entre las edades x y $x+t$.

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{\prime(m)} &= 1 -_t q_x^{\prime(m)} \\ &= P[(x) \text{ fallezca después de la edad } x+t] \\ &= P[(x) \text{ se encuentre con vida a la edad } x+t] \\ &= P[T(x) > t] \end{aligned} \tag{1.2}$$

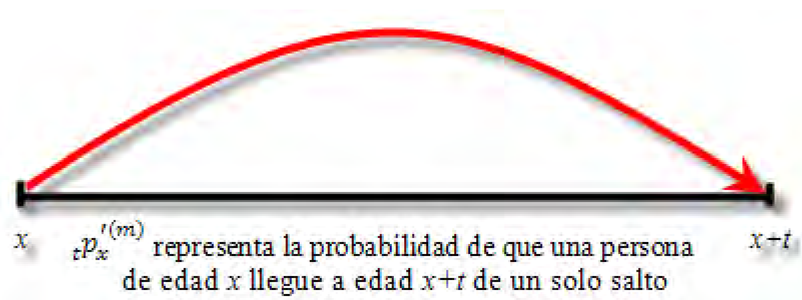


Fig. 1.3:

${}_tp_x^{\prime(m)}$ representa la probabilidad de que una persona de edad x llegue a edad $x+t$, pero esto significa que primero debe llegar con vida a edad $x+1$, después debe conseguir llegar a edad $x+2$, y así sucesivamente hasta llegar a edad $x+t$. Vea la siguiente ilustración.

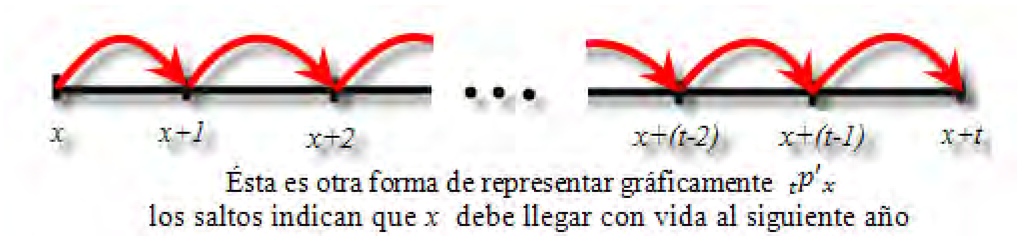


Fig. 1.4:

El análisis anterior se reduce en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1: Si $t \in \mathbb{N}$,con $t > 1$, se tiene que

$$ {}_tp_x^{\prime(m)} = p_x^{\prime(m)} * p_{x+1}^{\prime(m)} * p_{x+2}^{\prime(m)} * \ldots * p_{x+(t-1)}^{\prime(m)} $$

Demostración. Sea A_i el evento (x) llega con vida a edad $x+i$, o en otras palabras, que el tiempo que le queda de vida a (x) sea mayor que i

$$ P[A_i] = {}_ip_x^{\prime(m)} = P[T(x) > i] $$

Veamos que $\bigcap_{i=1}^{t} A_i = A_t$

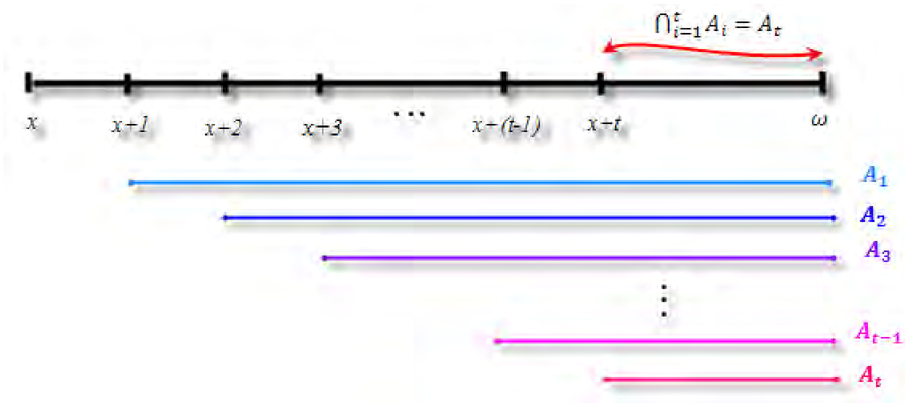


Fig. 1.5:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{\prime(m)} &= P[A_t] \\
&= P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t] \\
&= P[A_1] * P[A_2|A_1] * P[A_3|A_1 \cap A_2] * \ldots * P[A_t|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{t-1}] \\
&= P[A_1] * P[A_2|A_1] * P[A_3|A_2] * \ldots * P[A_t|A_{t-1}] \\
&= p_x^{\prime(m)} * P[T(x) > 2|T(x) > 1] * P[T(x) > 3|T(x) > 2]* \\
&\quad \ldots * P[T(x) > t|T(x) > t-1] \\
&\quad \text{Supongamos que la distribución de } T(x+t) \\
&\quad \text{es la misma que la de } T(x) \text{ dado que } T(x) > t, \text{ para } t \geq 1 \\
&= p_x^{\prime(m)} * P[T(x+1) > 1] * P[T(x+2) > 1] * \ldots * P[T(x+t-1) > 1] \\
&= p_x^{\prime(m)} * p_{x+1}^{\prime(m)} * p_{x+2}^{\prime(m)} * \ldots * p_{x+(t-1)}^{\prime(m)}
\end{aligned}
$$

$$\underline{\therefore\ {}_tp_x^{\prime(m)} = p_x^{\prime(m)} * p_{x+1}^{\prime(m)} * p_{x+2}^{\prime(m)} * \ldots * p_{x+(t-1)}^{\prime(m)}}$$

∎

Usando la fórmula anterior con $t = 2{,}3$ y 4, tenemos:

$$\begin{aligned}
{}_2p_x^{'(m)} &= p_x^{'(m)} * p_{x+1}^{'(m)} \\
{}_3p_x^{'(m)} &= p_x^{'(m)} * p_{x+1}^{'(m)} * p_{x+2}^{'(m)} &&= {}_2p_x^{'(m)} * p_{x+2}^{'(m)} \\
{}_4p_x^{'(m)} &= p_x^{'(m)} * p_{x+1}^{'(m)} * p_{x+2}^{'(m)} * p_{x+3}^{'(m)} &&= {}_3p_x^{'(m)} * p_{x+3}^{'(m)}
\end{aligned}$$

Analizando las ecuaciones anteriores encontramos una forma recursiva que enunciaremos de la siguiente manera:

Corolario 1.1.2: Sea $t \in \mathbb{N}$,tal que $t \geq 2$, entonces

$$ {}_tp_x^{'(m)} = {}_{t-1}p_x^{'(m)} * p_{x+(t-1)}^{'(m)} $$

Para la probabilidad de fallecimiento tenemos otra variante, denotaremos por ${}_{t|u}q_x$, la probabilidad de que (x) fallezca entre las edades $x+t$ y $x+t+u$, siguiendo este razonamiento tenemos que

$$\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x^{'(m)} &= P[t \leq T(x) \leq t+u] \\
&= P[T(x) \leq t+u] - P[T(x) \leq t] \\
&= {}_{t+u}q_x^{'(m)} -_t q_x^{'(m)} \qquad (1.3) \\
&= (1 -_{t+u} p_x^{'(m)}) - ({}_{1-t}p_x^{'(m)}) \\
&= tp_x^{'(m)} -_{t+u} p_x^{'(m)}
\end{aligned}$$

Cuando $u = 1$, sólo escribiremos ${}_{t|}q_x^{'(m)}$.
En otras palabras ${}_{t|u}q_x^{'(m)}$ representa la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a edad $x+t$, pero no sobreviva a edad $x+t+u$. Vea la Figura 1.6.

El razonamiento anterior lo podemos resumir en la siguiente proposición.

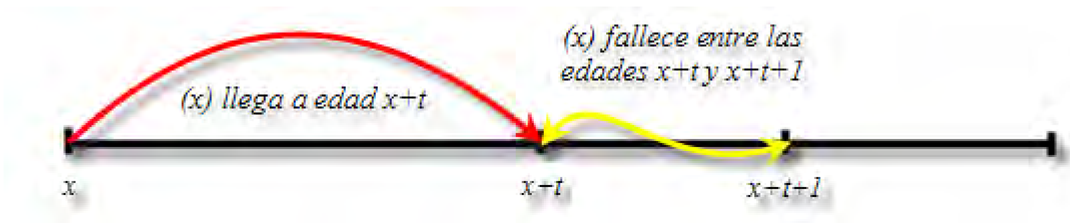


Fig. 1.6:

Proposición 1.1.3: Si t y $u \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$ {}_{t|u}q_x^{'(m)} =_t p_x^{'(m)} *_u q_{x+t}^{'(m)} $$

Demostración.

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x^{'(m)} &= tp_x^{'(m)} -_{t+u} p_x^{'(m)} \\ &= tp_x^{'(m)} -_t p_x^{'(m)} *_u p_{x+t}^{'(m)} \\ &= {}_tp_x^{'(m)}(1 -_u p_{x+t}^{'(m)} \\ &= {}_tp_x^{'(m)} *_u q_{x+t}^{'(m)} \end{aligned} \tag{1.4} $$

$$ \underline{\therefore {}_{t|u}q_x^{'(m)} =_t p_x^{'(m)} *_u q_{x+t}^{'(m)}} $$

∎

1.1.1. Fuerza de Mortalidad

Según se ha visto,

$$ q_x^{'(m)} = \frac{d_x^{(m)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} $$

denota la probabilidad de que una persona de edad x salga de un grupo de estudio, entre las edades x y $x+1$ debido al fallecimiento, por lo tanto podemos referirnos a $q_x^{'(m)}$ como una *tasa de mortalidad anual.*

Si en lugar de calcular esa tasa por un periodo de un año, se considera un periodo menor por ejemplo un semestre, un mes, un día, y se multiplicara, luego, el resultado por dos, por doce, por trescientos sesenta y cinco, respectivamente, y tomando en cuenta la hipótesis de que la mortalidad conserva la misma intensidad durante todo el año, se obtendría una probabilidad de muerte anual.

Así si $1/n$ es el sub-periodo anual adoptado, la tasa correspondiente al sub-periodo es:

$$_{1/n}q_x^{'(m)} = \frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1/n}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

y la correspondiente al año es:

$$q_x^{'(m)(n)} = n\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1/n}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

Sin embargo eso no es exacto. En las primeras edades, la intensidad es menor a manera de que transcurre el tiempo. En el resto de la vida, por lo general, crece con los años. Si se considera la intensidad de la mortalidad con relación a un tiempo infinitamente pequeño, al instante mismo en que se llega a determinada edad, se tiene lo que se conoce como *tasa instantánea de mortalidad*, o *fuerza de mortalidad.*

Se define, pues, la *fuerza de mortalidad* para una edad x, μ_x, como la relación entre el número de muertes que debería haber en el año con respecto al de personas que tiene exactamente la edad x, si durante todo el año la intensidad de la mortalidad permaneciera constante, de tal modo que el número de personas en observación fuera siempre igual siendo inmediatamente reemplazadas las vidas extinguidas por otras de idéntica edad.

Ya se ha visto que al calcular la tasa anual de mortalidad en función de la correspondiente a un periodo $1/n$ de año, se llega a la expresión

$$q_x^{\prime(m)(n)} = n\frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1/n}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

así, la *fuerza de mortalidad*, μ_x, no es sino el límite hacia el cual tiende $q_x^{\prime(m)(n)}$ cuando n crece infinitamente, dicho de otro modo, cuando $1/n$ tiende a hacerse infinitamente pequeño.

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \lim_{n\to\infty} q_x^{\prime(m)(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1/n}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \\
&= \lim_{1/n\to 0} -\frac{1}{1/n} \frac{l_{x+1/n}^{(\tau)} - l_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \\
&= \lim_{1/n\to 0} -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{l_{x+1/n}^{(\tau)} - l_x^{(\tau)}}{1/n} \\
&= -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \lim_{1/n\to 0} \frac{l_{x+1/n}^{(\tau)} - l_x^{(\tau)}}{1/n} \\
&= -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{dl_x^{(\tau)}}{dx}
\end{aligned}$$

$$\underline{\therefore \mu_x = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{dl_x^{(\tau)}}{dx}}$$

Pero la derivada de una función, dividida por dicha función, es la derivada del logaritmo natural de dicha función, así,

$$\mu_x = -\frac{d \ln(l_x^{(\tau)})}{dx}$$

Mientras que para μ_{x+t}, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mu_{x+t} &= \lim_{n\to\infty} q_{x+t}^{'(m)(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{l_{x+t}^{(\tau)}-l_{x++t1/n}^{(\tau)}}{l_{x+t}^{(\tau)}} \\
&= \lim_{1/n\to 0} -\frac{1}{1/n}\frac{l_{x+t1/n}^{(\tau)}-l_{x+t}^{(\tau)}}{l_{x+t}^{(\tau)}} \\
&= \lim_{1/n\to 0} -\frac{1}{l_{x+t}^{(\tau)}}\frac{l_{x++t1/n}^{(\tau)}-l_{x+t}^{(\tau)}}{1/n} \\
&= -\frac{1}{l_{x+t}^{(\tau)}}\lim_{1/n\to 0}\frac{l_{x++t1/n}^{(\tau)}-l_{x+t}^{(\tau)}}{1/n} \\
&= -\frac{1}{l_{x+t}^{(\tau)}}\frac{dl_{x+t}^{(\tau)}}{dt} \\
&= -\frac{l_x^{(\tau)}}{l_{x+t}^{(\tau)}}\frac{dl_{x+t}^{(\tau)}}{dt}\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \\
&= -\frac{1}{l_{x+t}^{(\tau)}/l_x^{(\tau)}}\frac{d(l_{x+t}^{(\tau)}/l_x^{(\tau)})}{dt} \\
&= -\frac{1}{{}_tp_x^{'(m)}}\frac{d({}_tp_x^{'(m)})}{dt}
\end{aligned}
$$

$$
\underline{\therefore \mu_{x+t} = -\frac{1}{{}_tp_x^{'(m)}}\frac{d}{dt}{}_tp_x^{'(m)}}
$$

Manipulando la fórmula anterior obtenemos un resultado de mucha ayuda para desarrollos posteriores.

Proposición 1.1.4: ${}_tp_x^{'(m)} = e^{-\int_0^t \mu_{x+n}dn}$

Demostración. Sabemos que $\mu_{x+n} = -\frac{d}{dn}\ln\left({}_np_x^{'(m)}\right)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad -\textstyle\int_0^t \mu_{x+n} dn &= \textstyle\int_0^t \frac{d}{dn} \ln \left({}_np_x^{'(m)} \right) \\ &= \ln\ {}_np_x^{'(m)}|_0^t \\ &= \ln\ {}_tp_x^{'(m)} - \ln\ {}_0p_x^{'(m)} \\ &= \ln\ {}_tp_x^{'(m)}\end{aligned}$$

Así,

$$-\int_0^t \mu_{x+n}\, dn = \ln_t p_x^{'(m)}$$

y

$$e^{-\int_0^t \mu_{x+n} dn} = {}_tp_x^{('m)}$$

■

Pensemos ahora cómo se comporta la probabilidad de que (x) fallezca entre las edades $x+t$ y $x+t+\Delta t$ dado que (x) llega con vida a edad $x+t$. En términos de la variable $T(x)$, eso significa:

$$\begin{aligned}P[t \leq T(x) \leq t+\Delta t | T(x) > t] &= \tfrac{P[T(x)\leq t+\Delta t]-P[T(x)\leq t])}{P[T(x)>t]} \\ &= \tfrac{F_{T(x)}(t+\Delta t)-F_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)} \quad {}^1 \qquad (1.5) \\ &\simeq \tfrac{f_{T(x)}(t)\Delta t}{1-F_{T(x)}(t)}\end{aligned}$$

En la expresión (1.5) $f_{T(x)}(t)$ representa la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de la variable aleatoria T.

La función

$$\frac{f_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)}$$

[1] $\frac{d}{dt}F_{T(x)}(t) = f_{T(x)}(t)$

tiene una interpretación de densidad de probabilidad condicional, pues nos da el valor de la función de densidad de probabilidad condicional de la variable $T(x)$ a edad exacta $x + t$, dado que sobrevivió hasta esa edad y esto es denotado por $\mu_x(t)$.

Ahora tenemos otra forma de expresar la fuerza de mortalidad,

$$\mu_x(t)^2 = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)}$$

De donde se tiene que,

$$f_{T(x)}(t) = \mu_x(t)[1 - F_{T(x)}(t)]$$

pero

$$F_{T(x)}(t) =_t q_x^{\prime(m)}$$

así,

$$\underline{f_{T(x)}(t) = \mu_x(t)_t p_x^{\prime(m)}}$$

1.2. El modelo de decrementos múltiples

1.2.1. Definiciones

Para empezar definiremos los conceptos de *Probabilidad independiente* y *Probabilidad dependiente*:

1. *Probabilidad independiente*: También llamada Probabilidad Neta de Decremento es la probabilidad que tiene una persona de salir del grupo por una determinada causa que no se ve afectada por otras.

[2] $\mu_x(t) = \mu_{x+t}$

2. *Probabilidad dependiente*: También llamada Probabilidad de Decrementos Múltiples, es la probabilidad que tiene una persona de salir del grupo por la causa i, estando sujeta a todas las causas de salida.

De esta forma, hablaremos de la probabilidad de que una persona salga del grupo por la causa I, sabiendo que existe la causa II (por ejemplo si una persona se invalida -causa I-, estamos alterando la probabilidad de fallecer -causa II- puesto que esta persona es más susceptible a la muerte).
En términos de notación, también es importante diferenciar las probabilidades independientes de las dependientes, así que las primeras estarán denotadas por ${}_tq_x^{\prime(k)}$ y ${}_tp_x^{\prime(k)}$, mientras que las segundas serán de ${}_tq_x^{(k)}$ y ${}_tp_x^{(k)}$
.

1.2.2. Generalización del modelo básico de supervivencia

En esta sección ampliaremos el modelo básico, descrito en la sección 1.1, introduciendo una segunda variable aleatoria, que se representará mediante $J(x) = J$.

Supondremos que J es una variable aleatoria discreta a la cual podremos asignarle los valores $1, 2, 3, \ldots, n$ cada uno de los cuales indica una causa por la que (x) sale de un grupo sujeto a n posibles causas de salida. Por ejemplo, si (x) es miembro de un grupo en el que se tienen 4 modos de partida (decrementos), los números $1, 2, 3, 4$, indican que cada miembro del grupo puede salir por incapacidad, muerte, retiro o rotación, respectivamente. Dependiendo de los decrementos que manejemos para un grupo determinado, la cantidad de valores asignados a J variará, supongamos que tenemos n decrementos.

Nuestro propósito es describir la distribución conjunta de T, el tiempo que le resta a una persona antes de salir del grupo y J, un número que indica el modo de decremento, así como las distribuciones condicionales y marginales relacionadas. Representaremos la f.d.p. (función de densidad de probabilidad) conjunta de T y J mediante $f_{T,J}$, y la f.d.p. marginal de T con f_T.

El punto de partida es una lista de n variables de tiempo de espera, independientes y continuas $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

T_i es el tiempo de espera hasta que el decremento (i) afecte a (x). La ocurrencia de estos eventos es independiente uno de otro. Entonces T y J son descritas de la siguiente forma

$$T = \text{mín}\{T_i\}$$

$$J = j, \text{ si } T = T_j$$

Con variables aleatorias continuas e independientes

$$P[T_1 = T_2] = 0$$

es decir la probabilidad de empate es cero, así J está bien definida (simplemente fingimos que los empates no ocurren).

En un modelo de decrementos múltiples se estudia la distribución conjunta de T y J, mientras que en un modelo de un único decremento (como el de el capítulo anterior) se estudia la distribución de una de las T_i, así cada modelo de "supervivencia" puede ser especificado con una tasa de riesgo (fuerza de decremento) que es denotada por

$$\mu_x^{(k)}(t)$$

A continuación introduciremos la notación estándar y las relaciones de un modelo de decrementos múltiples.

La f.d.a. (función de distribución acumulada) $F_{(T,J)}$ puede utilizarse en la forma acostumbrada para calcular las probabilidades de los eventos definidos por T y J. Por ejemplo,

$$f_{T,}(t,j)dt = P[(t < T \leq t + dt) \cap (J = j)] \tag{1.6}$$

expresa la probabilidad de decremento debido a la causa j entre el tiempo t y $t + dt$,

$$\int_0^t f_{T,J}(s,j)ds = P[(0 < T \leq t \cap (J = j)] \tag{1.7}$$

expresa la probabilidad de decremento debido a la causa j antes del tiempo t, y

$$\sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_{T,J}(t,j)\,dt = P\left[a < T \leq b\right] \tag{1.8}$$

expresa la probabilidad de decremento debido a todas las causas entre el tiempo a y b.

La probabilidad de decremento antes del tiempo t debido a la causa j, descrita anteriormente, tiene un símbolo especial

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds \qquad t > 0, j = 1,2,\ldots,n \tag{1.9}$$

que ilustra el uso del índice para representar la causa del decremento.

Para f_T y F_T, se tiene que

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{T,J}(t,j) \tag{1.10}$$

y

$$F_T(t) = \int_0^t f_T(s) \tag{1.11}$$

Las notaciones introducidas en la sección 1.1, pueden extenderse para acomodar la variable aleatoria T. Se utilizará el índice (τ) para indicar que una función se refiere a todas las causas, o fuerza total del decremento, así obtenemos

$${}_tq_x^{(\tau)} = P[T \leq t] = F_T(t) = \int_0^t f_T(s)$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = P[T > t] = 1 -_t q_x^{(\tau)}$$

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(\tau)}(t) &= \tfrac{f_T(t)}{1-F_T(t)} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\, {}_tq_x^{(\tau)} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} \left(1 -_t p_x^{(\tau)}\right) \\
&= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\, {}_tp_x^{(\tau)} \\
&= -\frac{d}{dt} \ln_t p_x^{(\tau)}
\end{aligned}$$

Y por otro lado,

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds} $$

En sentido estrictamente matemático, estas funciones para T son idénticas a las descritas en el capítulo anterior; la diferencia está en la interpretación que se les da en las aplicaciones.
Por ejemplo, probabilidad de decremento debido a la causa j antes del tiempo t dada por la ecuación 1.6 puede analizarse condicionando la supervivencia en el estatus al tiempo t, de esta forma tenemos

$$ f_{T,}(t,j)dt = P[T > t]P[(t < T \leq t + dt) \cap (J = j)|T > t] \tag{1.12} $$

La fórmula de fuerza total de decremento, nos sugiere definir la fuerza de decremento debido a la causa j como,

$$ \begin{aligned} \mu_x^{(j)}(t) &= \frac{f_{T,J}(t,j)}{1-F_T(t)} \\ &= \frac{f_{T,J}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} \end{aligned} \tag{1.13} $$

La fuerza de decremento a edad $x+t$ debido a la causa j tiene una interpretación de probabilidad condicional. Es el valor de la f.d.p. condicional conjunta de T y J en $x+t$, dada la sobrevivencia en $x+t$.
Entonces la expresión 1.12 puede reescribirse como

$$ f_{T,J}(t,j)dt =_t p_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t)dt \qquad t > 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.14} $$

En palabras

$$\begin{pmatrix} \textit{La probabilidad de decremento} \\ \textit{entre el tiempo } t \textit{ y } t+dt \\ \textit{debido a la causa } j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{la probabilidad de que } x \\ \textit{permanezca en el grupo,} \\ \textit{hasta el tiempo } t, {}_tp_x^{(\tau)}. \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \textit{la probabilidad condicional, } \mu_x^{(j)}(t), \\ \textit{de que el decremento } X \textit{ ocurra} \\ \textit{entre el tiempo } t \textit{ y } t+dt \\ \textit{debido a la causa } j \end{pmatrix}$$

Por otro lado, al diferenciar

$${}_tq_x^{(\tau)} = \int_0^t f_T(s)$$

obtenemos,

$$f_{T,J}(t,j) = \frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)}$$

pero según la ecuación 1.13

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}}$$

$$\Rightarrow \mu_x^{(j)}(t) = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)} \tag{1.15}$$

Por otro lado, también se tiene que la fuerza total de decremento, es la suma de las fuerzas de decremento debido a las m causas, esto es,

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(\tau)}(t) &= -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x^{(\tau)} \\
&= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{(\tau)} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\left(1 - {}_tp_x^{(\tau)}\right) \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(\tau)} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}\right) \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\sum\nolimits_{j=1}^{m} \frac{d}{dt}\left({}_tq_x^{(j)}\right) \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{m}\left(\tfrac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\tfrac{d}{dt}{}_tq_x^{(j)}\right) \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{m}\mu_x^{(j)}(t)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Podemos resumir las definiciones presentadas hasta aquí expresando las f.d.p., conjuntas marginales y condicionales en notación actuarial:

$$f_{T,J}(t,j) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t) \tag{1.17}$$

$$f_T(t) = {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(\tau)}(t) \tag{1.18}$$

Recordemos que al principio de la sección, la ecuación 1.9 dice que

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds$$

usando la ecuación 1.17 se tiene que

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(s)ds \tag{1.19}$$

1.3. Planteamiento de un problema

Suponga que se tiene un grupo de 100 personas, sujetas a dos posibles causas de salida, y a dichas personas se les pagará $10,000 si en el plazo de un año mueren o se invalidan. La probabilidad de muerte es $q_x^{\prime(m)} = 0{,}6$ en tanto que la probabilidad de invalidez es $q_x^{\prime(i)} = 0{,}4$. Se quiere saber cuál es el número y monto de los pagos que se harán.

A simple vista parece algo trivial, lo primero que se ocurre es calcular por separado el número de personas que se invalidaron y el número de personas que fallecieron sumar las cantidades y obtener lo que se pide, esto es

$$\begin{aligned} d_x^{(m)} &= l_x^{(\tau)} q_x^{\prime(m)} = (100)(0{,}6) = 60 \\ d_x^{(i)} &= l_x^{(\tau)} q_x^{\prime(i)} = (100)(0{,}4) = 40 \end{aligned}$$

Número de pagos:100

Monto de los pagos: $1,000,000

Sin embargo este resultado no nos convence, por el simple hecho de que se le estaría pagando al 100 % de nuestro grupo. Esto nos invita a pensar que tal vez, este problema no es tan sencillo como creímos al principio; dada la poca fiabilidad de nuestro primer resultado buscamos otras opciones.

Un razonamiento más acertado seria primero calcular el número de personas que fallecieron, una vez descartadas del grupo, calcular de los restantes los que se invalidaron, esto es

$$\begin{aligned} d_x^{(m)} &= l_x^{(\tau)} q_x^{\prime(m)} = (100)(0{,}6) = 60 \\ d_x^{(i)} &= l_x^{(\tau)} q_x^{\prime(i)} = (40)(0{,}4) = 16 \end{aligned}$$

Número de pagos:76

Monto de los pagos: $760, 000

Éste resultado ya suena convincente, pero qué pasa si primero calculamos las personas que se invalidan, las descartamos del grupo y luego calculamos los fallecimientos, obtendríamos lo siguiente

$$\begin{array}{rcccc} d_x^{(i)} & = l_x^{(\tau)} q_x^{\prime(i)} & = & (100)(0{,}4) & = & 40 \\ d_x^{(m)} & = l_x^{(\tau)} q_x^{\prime(m)} & = & (60)(0{,}6) & = & 36 \end{array}$$

Número de pagos:76

Monto de los pagos: $760, 000

¿Qué está pasando?, ¿Cuál resultado es el correcto?, suponiendo que el resultado correcto sea 76 *pagos con un monto de* $760, 000*, ¿Cuál procedimiento es el correcto?*

Comparemos las tres opciones usando la Tabla 1.1

Vayamos descartando las opciones por medio de los errores que podamos encontrar. En el primer procedimiento el error consiste en que en e l segundo paso no podemos tomar $l_x^{(\tau)} = 100$ *ya que nuestro grupo original ha tenido* 60 *salidas, de modo que para el segundo paso hay que considerar* $l_x^{(\tau)} = 40$*, por lo tanto la primera opción queda descartada.*

Para la segunda opción ya se toma en cuenta las salidas del grupo por la causa de muerte, pero ¿qué pasa si algunas de las personas que estamos contando dentro del grupo de 'las salidas por muerte'se invalidaron antes de morir? Con este modo de calcular las salidas del grupo, estamos pensando que ninguna persona que salió por la causa de muerte estaba inválida.

Opción	Primer paso	Segundo paso	Número de pagos	Monto de los pagos
1	$d_x^{(m)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{\prime(m)} = 100 * 0.6 = 60$	$d_x^{(i)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{\prime(i)} = 100 * 0.4 = 40$	100	$1,000,000
2	$d_x^{(m)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{\prime(m)} = 100 * 0.6 = 60$	$d_x^{(i)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{\prime(i)} = 40 * 0.4 = 16$	76	$760,000
3	$d_x^{(i)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{\prime(i)} = 100 * 0.4 = 40$	$d_x^{(m)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{\prime(m)} = 60 * 0.6 = 36$	76	$760,000

Tab. 1.1: Tabla comparativa

Análogamente para la tercera opción, tomando en cuenta el grupo original de personas sujetas a las causas de salida, se está pensando que para calcular las saldas por invalidez no ha ocurrido ninguna salida por muerte.

Esto significa que para la opción 2, estamos condicionando a que primero tendrían que ocurrir todos los fallecimientos, y en el grupo restante deberían ocurrir las salidas por invalidez; mientras que en la opción 3 condicionamos a que primero ocurran todas las salidas por invalidez, y en el grupo restante ocurran solamente fallecimientos. Pero claramente esto no ocurre en un grupo, las salidas por invalidez o muerte no siguen estos patrones, se dan áleatoriamente'.

Las causas de salida, muerte e invalidez, son dos fenómenos que están actuando simultáneamente sobre el grupo, el error en la opción 2 y 3 consiste en que los estamos tratando como si primero actuara uno y luego el otro.

Así es que tenemos que encontrar el modo en que se considere este 'efecto covarianza ', en otras palabras, la tasa de salidas por muerte $q_x^{\prime(m)}$ debe considerar el 'efecto de salida por invalidez', mientras que la tasa de salida por invalidez $q_x^{\prime(i)}$, debe considerar el 'efecto de salida por muerte', a este fenómeno se le llama ajustamiento de tasas.

2. MÉTODOS DE AJUSTAMIENTO DE TASAS

En innumerables ocasiones, el estudio de un cierto fenómeno involucra la observación simultánea de dos o más variables aleatorias y es de interés conocer cómo varían conjuntamente. Tal es el caso del problema del capítulo anterior; considerando un grupo de personas sometido a 2 causas de eliminación, hemos notado que se produce un efecto de dependencia entre dichas causas, lo que afecta el cálculo de las probabilidades de salida. En este capítulo estudiaremos distintos métodos para calcular las probabilidades de salida en un grupo cuando se tienen n posibles causas de eliminación.

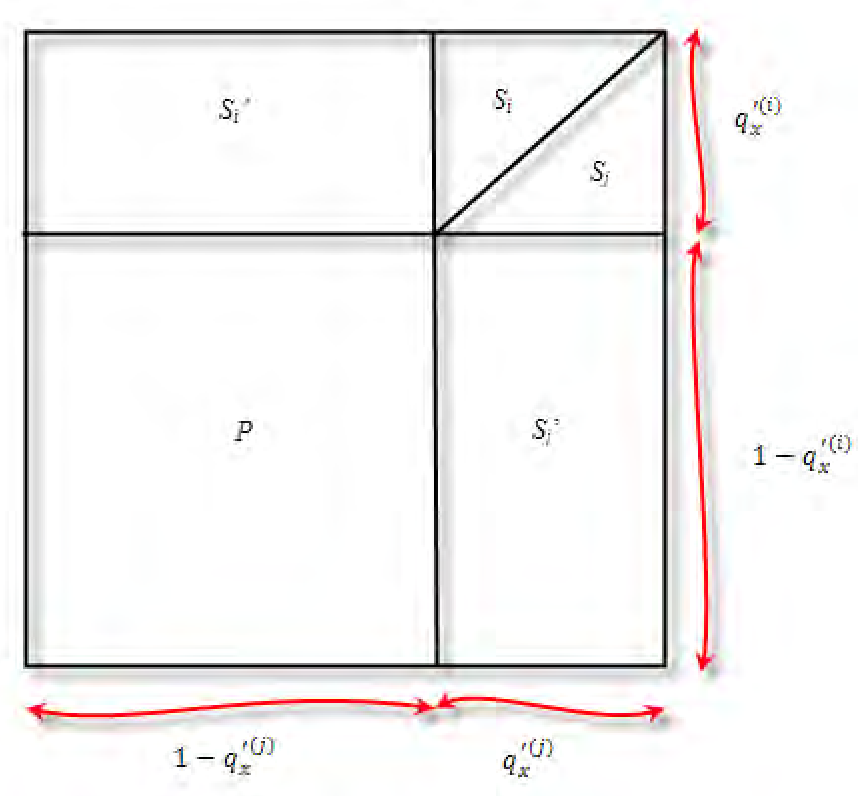
2.1. Método 1

Establezcamos dos hipótesis de partida:

1. Utilizaremos sólo dos posibles causas de salidas, causa i y causa j.

2. Cada una de las causas de salida afectará a la mitad del colectivo no afectado por la otra causa de eliminación

Ahora, mediante la siguiente representación geométrica se ejemplifica la relación entre las probabilidades, incorporando las hipótesis. Cada una de las áreas



puede interpretarse de la siguiente forma:

- P indica la probabilidad de que el individuo de edad x no se vea afectado por ninguna de las causas de salida del grupo, siendo la superficie correspondiente:

$$P = (1 - q_x'^{(i)})(1 - q_x'^{(j)})$$

- S_i' indica la probabilidad de que el individuo salga del grupo por la causa i, de forma que:

$$S_i' = q_x'^{(i)}(1 - q_x'^{(j)})$$

- S'_j indica la probabilidad de salir por la causa j, de forma que:

$$S'_j = q_x^{'(j)}(1 - q_x^{'(i)})$$

Finalmente, en el cuadrante superior derecho tenemos la probabilidad de que el individuo salga del grupo por cualquiera de las dos causas. En función de la hipótesis considerada, en la mitad de los casos la salida se producirá por la causa i, y la otra mitad por la causa j, de forma que:

$$S_i = \frac{q_x^{'(i)} q_x^{'(j)}}{2}$$

$$S_j = \frac{q_x^{'(i)} q_x^{'(j)}}{2}$$

La probabilidad independiente de eliminación por la causa i es, en función de la representación gráfica dada, igual a

$$q_x^{'(i)} = S'_i + S_i + S_j$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad q_x^{'(i)} - S_j &= S'_i + S_i \\
\Longrightarrow \quad q_x^{'(i)} - \frac{q_x^{'(i)} q_x^{'(j)}}{2} &= S'_i + S_i \\
\Longrightarrow \quad q_x^{'(i)} \left(1 - \tfrac{1}{2} q_x^{'(j)}\right) &= S'_i + S_i
\end{aligned}$$

Por tanto la probabilidad dependiente de eliminación por la causa i, denotada por $q_x^{(i)}$, podrá calcularse a partir de las probabilidades independientes $q_x^{'(i)}$ y $q_x^{'(j)}$, de la siguiente forma:

$$\left[q_x^{(i)} = q_x^{'(i)}\left(1 - \frac{1}{2}q_x^{'(j)}\right)\right] \tag{2.1}$$

De forma análoga para la segunda causa de salida, $q_x^{'(j)} = S_j' + S_j + S_i$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad q_x^{'(j)} - S_i &= S_j' + S_j \\
\Longrightarrow \quad q_x^{'(j)} - \frac{q_x^{'(j)} q_x^{'(i)}}{2} &= S_j' + S_j \\
\Longrightarrow \quad q_x^{'(j)}\left(1 - \tfrac{1}{2}q_x^{'(i)}\right) &= S_j' + S_j
\end{aligned}$$

y

$$\left[q_x^{(j)} = q_x^{'(j)}\left(1 - \frac{1}{2}q_x^{'(i)}\right)\right] \tag{2.2}$$

Este método resulta muy intuitivo, sin embargo, si tenemos más de dos decrementos, difícilmente podríamos generalizarlo, así que tendremos que recurrir a un método que no tenga esta limitante.

2.2. Método 2

Fórmula de ajuste bajo el supuesto de distribución uniforme de decrementos múltiples.

Como hipótesis tenemos que la probabilidad de cada decremento se distribuye uniformemente durante el año, esto es

$${}_tq_x^{'(k)} = tq_x^{'(k)} \qquad \forall t \in 0 < t < 1$$

lo que implica que

$${}_tp_x^{'(k)} = 1 - tq_x^{'(k)} \qquad \forall t \in 0 < t < 1$$

También usaremos que

$$ {}_tp_x^{'(k)}\mu_{x+t}^{(k)}{}^{1} = \frac{d}{dt}\left(-{}_tp_x^{'(k)}\right) = q_x^{'(k)2} $$

y

$$ q_x(k) = \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(k)}dt $$

Primero daremos el desarrollo del modelo, cuando se tienen sólo dos posibles causas de salida la causa 1 y la causa 2. Entonces para $q_x^{(1)}$ se tiene:

[1] $\mu_{x+t}^{(k)}$es la fuerza de decremento de la causa k de una persona de edad $x+t$

$\mu_x^{(k)}(t)$ es la fuerza de decremento de la causa $k$de una persona de edad x en el tiempo t

$$ \therefore\ \mu_{x+t}^{(k)} = \mu_x^{(k)}(t) $$

[2] Esta igualdad es válida pues,

$$ \frac{d}{dt}\left(-{}_tp_x^{'(k)}\right) = \frac{d}{dt}\left(tq_x^{'(k)} - 1\right) = q_x^{'(k)} $$

Por otro lado

$$ \mu_{x+t}^{(k)} = \frac{f_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)} \Rightarrow f_{T(x)}(t) = {}_tp_x^{'(k)}\mu_{x+t}^{(k)} $$

pero

$$ f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}F_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}{}_tq_x^{'(k)} = \frac{d}{dt}tq_x^{'(k)} = q_x^{'(k)} $$

$$\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt \\
&= \int_0^1 {}_tp_x^{'(1)}\mu_{x+t}^{(1)}\,{}_tp_x^{'(2)}dt \\
&= q_x^{'(1)}\int_0^1 \left(1-tq_x^{'(2)}\right)dt \\
&= q_x^{'(1)}\left[t-\tfrac{t^2}{2}q_x^{'(2)}\right]_0^1 \\
&= q_x^{'(1)}\left(1-\tfrac{1}{2}q_x^{'(2)}\right)
\end{aligned}$$

Del mismo modo, se obtiene $q_x^{(2)}$.

Así que

$$q_x^{(1)} = q_x^{'(1)}\left(1-\frac{1}{2}q_x^{'(2)}\right) \tag{2.3}$$

$$q_x^{(2)} = q_x^{'(2)}\left(1-\frac{1}{2}q_x^{'(1)}\right) \tag{2.4}$$

Supongamos ahora, que tenemos tres causas de salida denotadas por los números 1, 2 y 3. El desarrollo de $q_x^{(1)}$ es:

$$\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt \\
&= \int_0^1 {}_tp_x^{'(1)}\mu_{x+t}^{(1)}\,{}_tp_x^{'(2)}\,{}_tp_x^{'(3)}dt \\
&= \int_0^1 q_x^{'(1)}\int_0^1 \left(1-tq_x^{'(2)}\right)\left(1-tq_x^{'(3)}\right)dt \\
&= \int_0^1 q_x^{'(1)}\left[1-t\left(q_x^{'(2)}+q_x^{'(3)}\right)+t^2\left(q_x^{'(2)}q_x^{'(3)}\right)\right] \\
&= q_x^{'(1)}\left[t-\tfrac{t^2}{2}\left(q_x^{'(2)}+q_x^{'(3)}\right)+\tfrac{t^3}{3}\left(q_x^{'(2)}q_x^{'(3)}\right)\right]_0^1 \\
&= q_x^{'(1)}\left[1-\tfrac{1}{2}\left(q_x^{'(2)}+q_x^{'(3)}\right)+\tfrac{1}{3}\left(q_x^{'(2)}q_x^{'(3)}\right)\right]
\end{aligned}$$

De modo que

$$q_x^{(1)} = q_x^{'(1)}\left[1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{'(2)} + q_x^{'(3)}\right) + \frac{1}{3}\left(q_x^{'(2)}q_x^{'(3)}\right)\right] \tag{2.5}$$

Siguiendo el procedimiento anterior para las causas 2 y 3 obtenemos,

$$q_x^{(2)} = q_x^{'(2)}\left[1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{'(1)} + q_x^{'(3)}\right) + \frac{1}{3}\left(q_x^{'(1)}q_x^{'(3)}\right)\right] \tag{2.6}$$

y

$$q_x^{(3)} = q_x^{'(3)}\left[1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{'(1)} + q_x^{'(2)}\right) + \frac{1}{3}\left(q_x^{'(1)}q_x^{'(2)}\right)\right] \tag{2.7}$$

Ahora, usando este método, daremos una generalización de la fórmula de ajustamiento, es decir suponiendo n causas de salida. Al existir n causas de eliminación y tomando la causa 1, la fórmula de desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(1)}dt \\
&= \int_0^1 {}_tp_x^{'(1)}\mu_{x+t}^{(1)}\,{}_tp_x^{'(2)}\,{}_tp_x^{'(3)}\ldots{}_tp_x^{'(n-1)}\,{}_tp_x^{'(n)}dt \\
&= \int_0^1 q_x^{'(1)}\,{}_tp_x^{'(2)}\,{}_tp_x^{'(3)}\ldots{}_tp_x^{'(n-1)}\,{}_tp_x^{'(n)}dt \\
&= q_x^{'(1)}\int_0^1\left(1 - tq_x^{'(2)}\right)\left(1 - tq_x^{'(3)}\right)\ldots\left(1 - tq_x^{'(n-1)}\right)\left(1 - tq_x^{'(n)}\right)dt \\
&= q_x^{'(1)}\int_0^1 [1 - tC_1 + t^2C_2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1}C_{n-1} + (-1)^nt^nC_n] \\
&= q_x^{'(1)}\left[t - \tfrac{t^2}{2}C_1 + \tfrac{t^3}{3}C_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{t^n}{n}C_{n-1} + (-1)^n\tfrac{t^{n+1}}{n+1}C_n\right]_0^1 \\
&= q_x^{'(1)}\left[1 - \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{3}C_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}C_{n-1} + (-1)^n\tfrac{1}{n+1}C_n\right]
\end{aligned}$$

Donde C_k, denota la suma de los productos de probabilidades $q_x^{'()}$ asociadas a k causas de salida simples -distintas unas de otras-, formando dichos productos, a partir las probabilidades asociadas a cada uno de los elementos de los conjuntos que se pueden formar al seleccionar k causas (distintas) de entre un conjunto de $n-1$ causas posibles.

De este modo,

C_1 denota la suma del producto de $n-1$ elementos tomados de 1 en 1.

C_2 denota la suma del producto de $n-1$ elementos tomados de 2 en 2.

C_3 denota la suma del producto de $n-1$ elementos tomados de 3 en 3. $\vdots$

C_{n-1} denota la suma del producto de n-1 elementos tomados de $n-1$ en $n-1$.

$$\begin{array}{lcl} C_1 & = & \sum_{i=2}^{n} q_x^{'(i)} \\ C_2 & = & \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} q_x^{'(i)} q_x^{'(j)} \\ C_3 & = & \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} q_x^{'(i)} q_x^{'(j)} q_x^{'(k)} \\ \vdots & & \\ C_{n-1} & = & \prod_{i=2}^{n} q_x^{'(i)} \end{array} \tag{2.8}$$

De este modo, se tiene que la fórmula general para el ajuste de tasas es:

$$q_x^{(1)} = q_x^{'(1)} \left[1 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}C_{n-1} + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n \right] \tag{2.9}$$

Análogamente para $q_x^{(i)}$, con $i = 2, 3, \ldots, n$.

Cuando las probabilidades independientes son pequeñas, la fórmula puede prescindir de los términos que contemplan productos de dos o más elementos sin que haya un error importante, pudiendo en ese caso aplicarse la fórmula como:

$$q_x^{(1)} = q_x^{\prime(1)}\left[1 - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} q_x^{\prime(i)}\right] \tag{2.10}$$

2.3. Método 3

Fórmula de ajuste bajo el supuesto de fuerza de decrementos múltiples constante

Tomemos como hipótesis que para cada año de edad se cumple que la fuerza de decremento para la causa k y para el decremento total τ es constante, esto significa que:

$$\begin{aligned}
\mu_{x+t}^{(k)} &= \mu_x^{(k)} \quad t \in [0,1) \\
\mu_{x+t}^{(\tau)} &= \mu_x^{(\tau)} \quad t \in [0,1)
\end{aligned}$$

Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
q_x^{(k)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(k)}dt \\
&= \tfrac{\mu_x^{(\tau)}}{\mu_x^{(\tau)}} \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(k)}dt \\
&= \tfrac{\mu_x^{(k)}}{\mu_x^{(\tau)}} \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(\tau)}dt \\
&= \tfrac{\mu_x^{(k)}}{\mu_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}
\end{aligned}$$

Pero por otro lado, bajo nuestra hipótesis, sabemos que en el transcurso de cada año

$$\begin{aligned} \mu_x^{(k)} &= -\ln p_x^{'(k)} \\ \mu_x^{(\tau)} &= -\ln p_x^{(\tau)} \end{aligned}$$[3]

Así,

$$\begin{aligned} q_x^{(k)} &= \frac{-\ln p_x^{'(k)}}{-\ln p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} \\ \Rightarrow &\quad \frac{q_x^{(k)}}{q_x^{(\tau)}} \ln p_x^{(\tau)} = \ln p_x^{'(k)} \\ \Rightarrow &\quad \ln \left[\left(p_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}} \right] = \ln p_x^{'(k)} \\ \Rightarrow &\quad \left(p_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}} = p_x^{'(k)} \\ \Rightarrow &\quad \left(1 - q_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}} = \left(1 - q_x^{'(k)} \right) \\ \Rightarrow &\quad \left[\left(1 - q_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}} \right] - 1 = -q_x^{'(k)} \\ \Rightarrow &\quad q_x^{'(k)} = 1 - \left[\left(1 - q_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}} \right] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$q_x^{'(k)} = 1 - \left[\left(1 - q_x^{(\tau)} \right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}} \right] \tag{2.11}$$

es otra fórmula de ajustamiento, que resulta aplicable ya que relaciona las probabilidades independientes de salida con las probabilidades dependientes.

2.4. Método 4

[3] Este método no es aplicable si $p_x^{'(k)}$ o $p_x^{(\tau)}$ son iguales a cero, en cuyo caso resulta conveniente buscar otro método.

Fórmula de ajuste bajo el supuesto de distribución uniforme de decremento absoluto.

Ahora tomemos como hipótesis que la probabilidad de salida dependiente para la causa k, así como la probabilidad total de salida tienen una distribución uniforme en el intervalo $(x, x+1)$, esto es:

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = tq_x^{'(\tau)} \qquad \forall t \in 0 < t < 1 $$

Por otro lado, recordemos que

$$ \begin{aligned} \mu_{x+t}^{(k)} &= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} \ln {}_tq_x^{(k)} \\ &= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} \ln tq_x^{(k)} \\ &= \frac{q_x^{(k)}}{{}_tp_x^{(\tau)}} \end{aligned} \tag{2.12} $$

$$ \Rightarrow q_x^{(k)} = {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(k)} $$

y también

$$ \begin{aligned} \mu_{x+t}^{(k)} &= \frac{q_x^{(k)}}{1 - {}_tq_x^{(\tau)}} \\ &= \frac{q_x^{(k)}}{1 - tq_x^{(\tau)}} \end{aligned} $$

Recordando que

$$ p_x^{'(k)} = \exp\left[- \int_0^1 \mu_{x+t}^{(k)} dt \right] $$

Se sigue que,

$$\begin{aligned} q_x^{'(k)} &= 1-\left[\exp\left(-\int_0^1 \frac{q_x^{(k)}}{1-tq_x^{(\tau)}}dt\right)\right] \\ &= 1-\left\{\exp\left[\frac{q_x^{(k)}}{q_x^{(\tau)}}\ln\left(1-q_x^{(\tau)}\right)\right]\right\} \\ &= 1-\left\{\exp\left[\ln\left(1-q_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}}\right]\right\} \\ &= 1-\left[\left(1-q_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(k)}/q_x^{(\tau)}}\right] \end{aligned}$$

Y de esta manera, nuevamente llegamos a la fórmula deducida bajo el supuesto de fuerza de mortalidad constante.

2.5. Algunas propiedades de las tasas ajustadas.

Las tasas de decrementos ajustadas cumplen algunas propiedades, básicamente son relaciones entre las tasas ajustadas y las tasas brutas.

Propiedad 2.5.1: La probabilidad total de permanencia en el grupo es igual al producto de las probabilidades simples de permanencia. Para que (x) permanezca en el grupo, necesita "superar"cada causa de eliminación. Esto es,

$${}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_tp_x^{'(i)}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{(\tau)} &= e^{\left[-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds\right]} \\
&= e^{\left[-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \mu_x^{(i)}(s)\right)ds\right]} \\
&= e^{\left[-\sum_{i=1}^m \left(\int_0^t \mu_x^{(i)}(s)ds\right)\right]} \\
&= e^{\left[-\int_0^t \mu_x^{(1)}(s)ds\right]} e^{\left[-\int_0^t \mu_x^{(2)}(s)ds\right]} \dots e^{\left[-\int_0^t \mu_x^{(m)}(s)ds\right]} \\
&= {}_tp_x^{'(1)}\, {}_tp_x^{'(2)} \dots {}_tp_x^{'(m)} \\
&= \prod_{i=1}^m {}_tp_x^{'(i)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

∎

Propiedad 2.5.2: La probabilidad total de salida en el grupo es igual a la suma de las probabilidades ajustadas de salida. Esto es,

$${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{i=1}^m {}_tq_x^{(i)}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
{}_tq_x^{(\tau)} &= \int_0^t f_T(s)ds \\
&= \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m f_{T,J}(s,j)\right) ds \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\int_0^t f_{T,J}(s,j)ds\right) \\
&= \sum_{i=1}^m {}_tq_x^{(i)}
\end{aligned}$$

∎

Propiedad 2.5.3: La probabilidad de permanencia total en el grupo es menor que la probabilidad simple de permanencia.

Es lógico pensar que la probabilidad de permanencia en un grupo sujeto a n causas de eliminación será menor que en un grupo sujeto únicamente a 1 causa de eliminación.

$$ {}_tp_x^{(\tau)} \leq {}_t p_x^{'(i)} $$

Demostración. Sabemos que

$$ \prod_{i=1}^{m} {}_tp_x^{'(i)} \leq {}_t p_x^{'(i)} $$

pero

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_tp_x^{'(i)} $$

$$ \Rightarrow {}_t p_x^{(\tau)} \leq {}_t p_x^{'(i)} $$

∎

Propiedad 2.5.4: Para cada decremento, la probabilidad ajustada de eliminación es menor que la probabilidad bruta de eliminación.

$$ {}_tq_x^{(j)} \leq {}_t q_x^{'(j)} $$

Demostración. Sabemos que

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds $$

y

$$ {}_tq_x^{'(j)} = \int_0^t f_T(s)ds $$

pero,

$$f_{T,J}(s,j) = {}_sp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(s)$$

$$f_T(s) = {}_sp_x^{'(j)}\mu_x(s)$$

y usando la propiedad anterior

$$f_{T,J}(s,j) \leq f_T(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f_{T,J}(s,j) \leq \int_0^1 f_T(s)$$

∎

2.6. Solución al problema

Una vez que hemos estudiado distintos métodos para ajustar las tasas, retomemos el problema planteado en el capítulo anterior.

Suponga que se tiene un grupo de 100 personas, sujetas a dos posibles causas de salida, y a dichas personas se les pagará $\$10,000$ en caso de muerte o invalidez de las mismas en un año. La probabilidad de muerte es $q_x^{'(m)} = 0{,}6$ en tanto que la probabilidad de invalidez es $q_x^{'(i)} = 0{,}4$. Se quiere saber cuál es el número y monto de los pagos que se harán.

El número de pagos esta dado por el número de personas que salen del grupo debido a invalidez o muerte, esto es,

$$d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{(\tau)}$$

pero

$$q_x^{(\tau)} = q_x^{(i)} + q_x^{(m)}$$

por lo que el problema se reduce a ajustar las tasa. Así,

$$\begin{aligned} q_x^{(i)} &= q_x^{\prime(i)}\left(1-\tfrac{1}{2}q_x^{\prime(m)}\right) \\ &= 0{,}4\left(1-\tfrac{1}{2}(0{,}6)\right) \\ &= 0{,}28 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_x^{(m)} &= q_x^{\prime(m)}\left(1-\tfrac{1}{2}q_x^{\prime(i)}\right) \\ &= 0{,}6\left(1-\tfrac{1}{2}(0{,}4)\right) \\ &= 0{,}48 \end{aligned}$$

$$\therefore\ q_x^{(\tau)} = 0{,}76$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} * q_x^{(\tau)} \\ &= 100 * 0{,}76 \\ &= 76 \end{aligned}$$

De modo que se deberán hacer 76 pagos y el monto total de éstos será de $\$760,000$.

En el capítulo anterior observamos que las causas de salida son fenómenos que actúan simultáneamente en el grupo, y obtuvimos resultados erróneos pues los tratamos como si fueran eventos que actúan de forma independiente. Retomemos los resultados obtenidos en el capítulo anterior para hacer algunas observaciones. Ver Tabla 2.1

En este ejercicio el monto de los pagos no cambió, sin embargo las opciones 2 y 3 muestran que la composición de las salidas cambia dependiendo de la tasa que apliquemos primero, en otras palabras, depende el fenómeno que se observe primero; ahora sabemos que ese tipo de razonamiento es erróneo y que las tasa ajustadas ya consideran que los fenómenos actúan simultáneamente; teniendo eso en cuenta no importa el orden en que se calculen el número de salidas, éste no debe modificarse, si primero calculamos por separado el

Opción	$d_x^{(m)}$	$d_x^{(i)}$	Número de pagos	Monto de los pagos
1	60	40	100	\$100,000
2	60	16	76	\$760,000
3	36	40	76	\$760,000

Tab. 2.1:

número de salidas por cada evento y luego los sumamos, esto es

$$d_x^{(\tau)} = d_x^{(i)} + d_x^{(m)}$$

Por otro lado

$$d_x^{(i)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{(i)}$$

$$d_x^{(m)} = l_x^{(\tau)} * q_x^{(m)}$$

Pero las tasas ajustadas son:

$$q_x^{(i)} = 0{,}28 \quad q_x^{(m)} = 0{,}48$$

Esto significa que el número de salidas del grupo debido invalidez es

$$d_x^{(i)} = 28$$

mientras que por fallecimiento es

$$d_x^{(m)} = 48$$

y

$$d_x^{(\tau)} = 76$$

Por lo tanto el número total de pagos es 76 y el monto de los pagos es $760,000.

En la última fila de la siguiente tabla muestra la composición final del número de pagos, que claramente cambió debido a que la tasa ajustada de muerte considera el efecto de dependencia del evento invalidez mientras que la tasa ajustada de invalidez considera el efecto de dependencia del evento muerte.

Opción	$d_x^{(m)}$	$d_x^{(i)}$	Número de pagos	Monto de los pagos
1	60	40	100	$100,000
2	60	16	76	$760,000
3	36	40	76	$760,000
4	48	28	76	$760,000

Tab. 2.2:

3. LOS MODELOS DE SUPERVIVENCIA

Ya sea que estemos hablando de seres vivos u objetos, el objetivo principal de la Teoría de Decrementos Múltiples es el estudio del tiempo de permanencia en el grupo, y para ello vamos a hacer uso del *Análisis de supervivencia.*

3.1. El análisis de supervivencia

El objetivo del *Análisis de supervivencia* es el análisis y la predicción de tiempos de duración de una determinada situación. El término de dicha situación viene marcado por la ocurrencia de un determinado suceso. En particular la vida de una persona u otro ser vivo finaliza con la ocurrencia del suceso "muerte". Precisamente de aquí proviene el nombre de análisis de supervivencia y se utiliza ampliamente en ciencias de la salud y de la naturaleza. La duración de una máquina viene marcada por la ocurrencia del "fallo"de la máquina. En este caso el análisis de supervivencia recibe el nombre de *teoría de la fiabilidad*, y el análisis estadístico toma un enfoque ligeramente distinto. Como es obvio, las aplicaciones de este último caso se centran en la ingeniería.

Sin embargo, las aplicaciones no se reducen solamente a los casos citados.

También las ciencias sociales y económicas utilizan esta herramienta en estudios como la permanencia de una persona en un determinado puesto de trabajo, duración de una empresa, tiempo que una persona tarda en realizar una tarea en un experimento psicológico o tiempo de vida de una generación de ordenadores, entre otros muchos ejemplos que podrían citarse.

3.2. El modelo de supervivencia

Resumiendo lo mencionado en el apartado anterior, podríamos decir que los conceptos fundamentales en el análisis de supervivencia son los siguientes:

1. *Momento inicial u origen*, a partir del cual se hará la observación de determinado fenómeno.

2. *Momento terminal*, en el que ocurre el suceso de interés, y que no es necesariamente "muerte".

Así, podemos definir una variable aleatoria T que denote el tiempo que transcurre entre el momento inicial (diagnóstico de un cáncer, operación quirúrgica, etc.) y la ocurrencia de un suceso que marque el momento terminal. De esta forma podemos decir que un modelo de supervivencia es una distribución de probabilidad para una variable aleatoria, en este caso, para T.

Suponga que una unidad de aire acondicionado está operando en un laboratorio cuya temperatura es muy elevada. La unidad empieza a funcionar en el tiempo $t = 0$, y estamos interesados en conocer la probabilidad de que la unidad aún esté funcionando en un tiempo futuro t. En este caso la variable T denotará el tiempo que la unidad permanecerá funcionando.

Como otro ejemplo, considere un estudio sobre animales inyectados con una sustancia cancerígena. La inyección constituye el evento inicial que define el tiempo $t = 0$. En este caso, estaríamos interesados en observar el patrón de supervivencia de estos animales como una función de tiempo desde el evento inicial.

En ambos casos T expresa un *tiempo de fallo*; en la primera situación es el momento en que deja de funcionar la unidad, mientras que en el segunda es el momento en que fallece el animal. También en ambos casos estamos interesados en la probabilidad de que el sujeto de estudio (persona o cosa) permanezca en el estado bajo el cual se está estudiando en el momento t. Tal probabilidad la denotaremos simbólicamente por $S(t)$.

En los ejemplos anteriores, la edad del sujeto de estudio no es de interés para nosotros, además de que puede no ser conocido. La razón de esto es que creemos que la oportunidad de fallo, al ser una función del tiempo, depende de las condiciones de estudio y no de la edad del sujeto en cuestión. Por esta razón usamos la notación $S(t)$.

La mayoría de los casos donde el tiempo de fallo es visto como una función de tiempo desde el evento inicial, y no de la edad del sujeto de estudio, está relacionado con objetos mecánicos o animales de laboratorio. Por otro lado, en casos de patrones de sobrevivencia relacionados con humanos, especialmente aquellos de interés para el estudio de los actuarios, se reconoce que el tiempo de fallo está relacionado con la edad del individuo. Sin embargo, debemos reconocer que en algunas situaciones la naturaleza del grupo de estudio es tal, que la edad es de menor importancia comparada con el tiempo desde el evento inicial. Por ejemplo, considere un estudio donde nos interesa conocer la supervivencia de personas que han sido diagnosticadas con cierta enfermedad y han comenzado un tratamiento para tal enfermedad. Si el tiempo $t = 0$ es la fecha del diagnóstico, podemos interesarnos en medir la supervivencia de tales personas como una función de tiempo desde $t = 0$, sólo si creemos que las condiciones de salud (y el programa de tratamiento) afectaría la supervivencia de una gran rango de personas, pues en tal caso la edad es irrelevante. De modo que deberíamos adoptar de nuevo como función de supervivencia a $S(t)$.

Para cualquiera de los ejemplo anteriores nos interesará obtener medidas como el tiempo medio de supervivencia, la variabilidad de esa medida, la probabilidad o el riesgo de muerte cuando ha pasado un cierto tiempo después de la operación (en el caso de la persona) o la probabilidad de que la unidad de aire acondicionado permanezca funcionando en un tiempo futuro t, etc. Es decir, nos interesará el estudio de la distribución de probabilidad de la variable T.

3.2.1. Modelos de supervivencia actuarial

Los tres ejemplos mencionados en la sección anterior ilustran casos que son de interés primario para la ingeniería, la estadística clínica y la bioestadística. Destacamos la idea que, en tales casos, la edad actual de cada individuo en el grupo de estudio no es de importancia y puede incluso no ser conocida. En contraste, los modelos de supervivencia actuarial, para el uso en operaciones de seguro o esquemas de pensiones, deben reconocer en primer lugar, la edad, dado que consideramos la función de supervivencia como una función de edad. Ambas versiones de los modelos de supervivencia serán estudiados.

El modelo selecto

Considere un modelo de supervivencia que será usado para hacer cálculos de seguros de personas seleccionadas en la cobertura de un seguro a edad x. Podemos notar que la emisión de seguros constituye el evento inicial, definiendo así el tiempo $t = 0$, el modelo da probabilidades de aún estar vivo en un tiempo t cualquiera. Por ejemplo, pensando en términos de la función $S(t)$, tenemos entonces que $S(10)$ da la probabilidad de supervivencia en el tiempo $t = 10$ (probablemente medido en años). Pero seguramente aceptaríamos que $S(10)$ debe tener un valor diferente si $x = 25$ cuando $t = 0$ que si $x = 55$ en ese tiempo. En otras palabras, en tales casos $S(t)$ por si solo es insuficiente para nuestras necesidades. Necesitamos una función $S(t)$ que dependa de una u otra forma del valor de x cuando $t = 0$. En tales casos usaremos el símbolo $S(t; x)$. En este contexto, la edad de la selección, x, es llamada *variable relacionada*. La edad x no es la única variable relacionada que se sabe tiene una influencia en la supervivencia. Otra variable importante es el sexo, que también puede estar reflejada en modelos de supervivencia para hombres y para mujeres. Incluso otro ejemplo sería fumadores contra no fumadores. Si un modelo de supervivencia fuera diseñado para reflejar estas variables, así como la variable de tiempo de la selección, entonces usaríamos el símbolo $S(t; x, h, f)$, que denota el modelo apropiado para observar el patrón de supervivencia de un grupo de hombres fumadores de edad x. Más adelante discutiremos acerca de este tipo de modelos. Por el momento, estamos concentrados en introducir la idea de que un factor distinto al evento inicial, puede afectar la supervivencia, y que la edad alcanzada en el evento inicial (o momento de la selección) es un evidente ejemplo de esto.

El modelo agregado

Ahora consideremos es caso especial donde el evento inicial, definiendo el tiempo $t = 0$, es el nacimiento de una personas cuyas probabilidades de supervivencia están dadas por $S(t)$. Entonces, usando x como la edad cumplida, tenemos que $x = 0$ cuando $t = 0$, así la edad cumplida y el tiempo transcurrido correrán juntos. En este caso, podemos usar x o t como variable principal. Usando como variable x, las probabilidades de supervivencia estarán dadas por una función llamada $S(x)$, $x \geq 0$, con $S(0) = 1$ y $S(x) \to 0$ cuando

$x \to \infty$.

En este caso, la variable X es claramente **la edad de fallecimiento** o la variable que mide **el tiempo futuro de vida** justo como T era el tiempo de muerte (o tiempo de fallo). Debe quedar claro que $S(x)$ y $S(t)$ son realmente la misma función. De esta manera, podemos estudiar propiedades matemáticas de cualquiera de ellas. Sin embargo, usaremos ambos símbolos y dejaremos clara la diferencia entre el uso de t y el uso de x.

Para resumir, cuando la edad de los sujetos cuyas probabilidades de supervivencia estén siendo estudiadas no sea un factor importante, ya que la supervivencia es vista sólo como una función de tiempo, usaremos la función $S(t)$. En el caso especial de patrones de supervivencia de seres humanos con fecha de nacimiento usaremos $S(x)$.

3.3. Formas del modelo de supervivencia

Hasta este momento nos hemos referido a la función $S(t)$ -o $S(x)$- conceptualmente, sin ser específicos sobre su forma. Desde que nos referimos a T como una variable aleatoria de una sola variable, es razonable pensar que se tenga una distribución en mente, como la binomial o la exponencial, y este es frecuentemente el caso. Cuando las probabilidad de supervivencia, $S(t)$, están dadas por una fórmula matemática, decimos que $S(t)$ está en **forma paramétrica**. Este nombre se debe a que los valores de $S(t)$ dependerán de uno o más parámetros, así como de t. Por ejemplo, si T es una variable aleatoria distribuida exponencialmente, $S(t) = e^{-\lambda t}$, λ es un parámetro en el modelo de supervivencia. Algunos modelos paramétricos serán revisados más adelante.

Tradicionalmente, los modelos de supervivencia actuarial no han estado en forma paramétrica. La forma de $S(x)$ es muy compleja como para ser representada adecuadamente por una distribución de un solo parámetro (como la uniforme o la exponencial). Buenas representaciones son dadas por las distribuciones de Gompertz (con dos parámetros) o Weibull y mejor aún por la distribución de Makeham (con tres parámetros).

Aunque estas distribuciones han tenido algunos usos como modelos paramétricos de supervivencia, la profesión actuarial ha tendido a favor de los **modelos tabulares** sobre los paramétricos. Un modelo de supervivencia tabular es aquel en el cual los valores de $S(t)$ son representados por ciertos valores de x, más comúnmente los enteros. En otras palabras es una tabla de números, de la cual proviene su nombre.

Por otro lado, si un modelo tabular representa los valores de $S(x)$ solo con $x = 0, 1, 2, \ldots$, entonces el modelo es ineficiente para dar valores cuando x no es un entero. Para superar esta deficiencia, es usual hacer supuestos o hipótesis acerca de la forma de $S(x)$ entre números cercanos. Cuando tal hipótesis, llamado **supuesto de distribución de mortalidad**, aplica al modelo tabular, entonces $S(x)$ es definida para todo $x \geq 0$, y cualquier calculo que puede ser hecho en un modelo paramétrico, puede ser hecho ahora desde *el modelo tabular con supuesto de distribución.*

El modelo tabular actuarial de supervivencia tiene muchos años en práctica y se conoce comúnmente como **tabla de vida** o **tabla de mortalidad**.

3.4. Función de supervivencia

La variable aleatoria que estamos considerando, llamada T, es definida para ser el tiempo de fallo, entonces la probabilidad de que el tiempo de fallo sea más tarde (matemáticamente más grande) que el valor de t, es formalmente,

$$S(t) = P(T > t) \tag{3.1}$$

Por la naturaleza de T, es claro que es una variable aleatoria positiva, esto es, $T \geq 0$, así $S(0) = 1$ y $S(t)$ es una función decreciente así que $\lim_{t \to \infty} S(t) = 0$ Ahora, si T es el tiempo de fallo de un "ente"que existe en el tiempo $t = 0$, entonces T puede interpretarse también como el tiempo futuro de vida de este ente. Es importante notar que estamos interesados en la supervivencia del ente o sujeto de estudio como una función de tiempo, desde un evento inicial el cual ocurre en el tiempo $t = 0$. En los casos mencionados anteriormente, los eventos iniciales comienzan cuando la unidad es probada bajo ciertas condiciones y cuando el paciente ha salido de la operación.

3.5. La distribución de T

Antes de empezar el estudio de la estimación del modelo de supervivencia, necesitamos desarrollar un completo entendimiento de la naturaleza de los modelos de supervivencia. Ya que un modelo de supervivencia es un tipo especial de distribución de probabilidad, la mayor parte del material de este capítulo será familiar si se tiene un buen conocimiento de la probabilidad.

En las secciones anteriores decidimos definir y describir un modelo de supervivencia en términos de la función $S(t)$, la cual representa $P(T > t)$, donde T es una variable aleatoria que denota el tiempo de fallo.

3.5.1. La función de densidad de probabilidad

Para comenzar el estudio de la distribución de probabilidad de T, supongamos que tenemos un grupo de estudio, en el cual T indica el momento en el que ocurre la salida de un integrante del grupo debido a la ocurrencia de un determinado suceso.

T es continua ya que en principio cualquier tiempo puntual es posible, aunque en la práctica muchas veces se utilicen tiempos discretos, por ejemplo días o años. Unos intervalos de tiempo serán más probables que otros y, así, la correspondiente distribución de probabilidad vendrá determinada por una *función de densidad* más grande en los momentos más verosímiles, por ejemplo entorno a la media. La Figura 3.1 muestra una función de densidad que podría representar una distribución de tiempos.

Para el caso de variables aleatorias continuas, la *función de densidad de probabilidad (fdp)*,$f(t)$, es definida como la derivada de $F(t)$. Entonces,

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = -\frac{d}{dt}S(t), \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Fig. 3.1: Función de densidad

Consecuentemente, es fácil ver que

$$F(t) = \int_0^t f(y)dy, \tag{3.3}$$

y

$$S(t) = \int_t^\infty f(y)dy. \tag{3.4}$$

3.5.2. Función de distribución acumulada

La *función de distribución acumulada (fda)* medirá la probabilidad de que ocurra el momento terminal antes de llegar a un determinado tiempo t, en otras palabras la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales a t. Esto es,

$$F(t) = P(T \leq t) \tag{3.5}$$

Gráficamente esta probabilidad corresponde con el área bajo la curva de densidad desde el tiempo cero hasta el instante t.

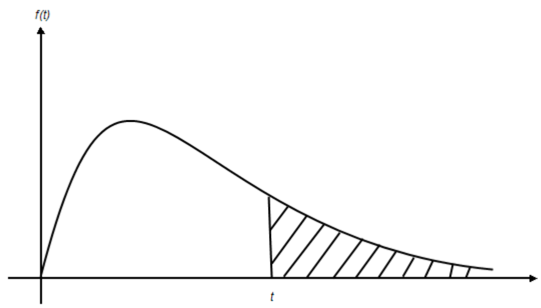


Fig. 3.2: Probabilidad como área: el área sombreada correspondería a la supervivencia en el momento t.

Una medida más optimista y útil es la *función de supervivencia*, que es complementaria de la *fda* y mide por tanto, la probabilidad de que un integrante del grupo no salga de él hasta después del instante de tiempo t,

$$S(t) = 1 - F(t) \tag{3.6}$$

La Figura 3.2 muestra el área rayada correspondiente a dicha probabilidad. Evidentemente esta probabilidad decrece con el tiempo.

3.6. Distribuciones analíticas

Para la estimación de las curvas de supervivencia tenemos fundamentalmente dos enfoques, que como veremos dan lugar a su vez a modelos específicos. El primer enfoque es postular una distribución de probabilidad sobre la variable tiempo futuro de supervivencia T. El segundo, que tiene mucha más relación con el mundo actuarial, supone la construcción de una tabla de mortalidad.

3.6.1. La distribución uniforme

La distribución uniforme es una distribución con dos parámetros y una función de densidad de probabilidad constante. Los parámetros de la distribución son los límites del intervalo sobre el cual está definido, y su fdp es el recíproco del tamaño del intervalo. De esta forma, si la variable aleatoria está definida sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq t \leq b; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para el caso en el que la variable denota el tiempo futuro de vida, $a = 0$. Por lo tanto, b es el tamaño del intervalo. Cuando esta distribución es usada como un modelo de supervivencia, la letra ω es usada como parámetro, entonces la distribución está definida por

$$f(x) = \frac{1}{\omega} \quad 0 \leq t \leq \omega$$

Cabe mencionar que la distribución uniforme, como modelo de supervivencia, suele no ser apropiada en una intervalo de tiempo grande, al menos como un modelo de supervivencia *humana*, aunque es de interés histórico notar que esta fue la primera distribución de probabilidad continua sugerida para tal propósito, en 1724 por Abraham de Moivre.

3.6.2. La distribución exponencial

Esta distribución tiene un sólo parámetro y es definida por su función de supervivencia

$$S(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \lambda \geq 0.$$

De donde se sigue que su fdp es

$$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

mientras que su tasa de riesgo es

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda,$$

una constante. En el contexto actuarial, donde la tasa de riesgo es llamada fuerza de mortalidad, la distribución exponencial es llamada **distribución de fuerza constante**. La distribución exponencial, con esta propiedad de tasa de riesgo constante, es usada como modelo de supervivencia para objetos inanimados, tales como partes de maquinas. Aunque no contemplamos la distribución uniforme y la exponencial como modelos de supervivencia humana, usamos T, más que X para expresar el tiempo de fallo. En las siguientes distribuciones, usamos X para sugerir que son más usadas como modelos de supervivencia humana.

3.6.3. La distribución de Gompertz

Esta distribución fue sugerida como modelo de supervivencia humana por Gompertz en 1825. La distribución es usualmente definida por su tasa de riesgo como

$$\lambda(x) = Bc^x, \quad x \geq 0, B > 0, c > 1$$

Entonces la función de supervivencia está dada por

$$S(x) = \exp\left[-\int_0^x \lambda(t)dy\right] = \exp\left[\frac{B}{\ln c}(1 - c^x\right]$$

La fdp está dada por

$$\lambda(x)S(t)$$

3.6.4. La distribución de Makeham

En 1860 Makeham modificó la distribución de Gompertz tomando la tasa de riesgo como

$$\lambda(x) = A + Bc^x, \quad x \geq 0, B > 0, c > 1, A > -B$$

Makeham sugirió que parte de la tasa de riesgo a cualquier edad es independiente de la edad por sí misma, de este modo, una constante fue añadida a la tasa de riesgo de Gompertz. La función de supervivencia está dada por

$$S(x) = \exp\left[-\int_0^x (A + Bc^y)dy\right] = \exp\left[\frac{B}{\ln c}(1 - c^x) - Ax\right]$$

3.6.5. La distribución de Weibull

Esta distribución es definida por

$$\lambda(x) = kx^n, \quad x \geq 0, k > 0, n > -1$$

Su función de supervivencia es

$$S(x) = \exp\left[-\int_0^x ky^n dy\right] = \exp\left[-\frac{kx^{n-1}}{n+1}\right]$$

4. APLICACIONES DEL MODELO DE DECREMENTOS

En esta sección describiremos algunas aplicaciones del modelo de decrementos múltiples

4.1. Diseño de los planes privados de pensiones

Dentro del trabajo actuarial el uso de los modelos de decrementos múltiples en los planes de pensión es una de sus importantes aplicaciones. En esta sección consideraremos los métodos básicos utilizados para calcular los valores presentes actuariales de los beneficios del participante en un plan de pensiones así como de sus contribuciones al mismo. Un plan de retiro, proporciona pensiones por edad y servicio o por incapacidad. Para el caso en que hay separación del empleo puede haber ya sea, un reembolso de las contribuciones acumuladas por el empleado, o bien una pensión diferida. Cuando el fallecimiento ocurre antes de las otras contingencias, puede pagarse al beneficiario un ingreso o suma global única. A los pagos que se realizan para cubrir los costos de los beneficios se les denomina contribuciones, no primas como en el seguro, y son pagaderas en diversas proporciones por los participantes y el patrocinador del plan.

La filosofía de los planes de pensiones es ayudar a mantener el nivel de vida de los trabajadores, que por alguna situación tengan que retirarse de sus labores; de esta manera un plan de pensión puede ser visto como un sistema para comprar anualidades vitalicias diferidas (pagaderas durante el retiro) y ciertos beneficios subsidiarios mediante alguna forma de anualidad temporal de contribuciones durante el servicio activo. El balance entre los valores presentes actuariales de los beneficios y los de las contribuciones puede hacerse sobre una base individual, pero con más frecuencia se realiza sobre una base para todo el grupo de participantes. Los métodos para lograr este balance constituyen el contenido de la teoría de los fondos de pensión. Con respecto a un participante típico, en este apartado estaremos preocupados sólo con la valuación por separado de los valores presentes actuariales de los beneficios y de las contribuciones del plan. También se presentarán las herramientas básicas para la valuación de los beneficios de un plan de pensión y de las contribuciones al mismo.

Para la implementación de cualquier plan de pensiones es necesario, después de haber establecido las características de éste, el cálculo de las aportaciones que serán requeridas para cubrir las obligaciones futuras. Debido a que las aportaciones como los beneficios, están sujetos a condiciones contingentes es necesario realizar los cálculos de ambos montos, de tal manera que estos sean iguales.

El monto de la obligación total del plan se determina mediante un proceso matemático de descuento a una fecha preestablecida. Dicho proceso se denomina comúnmente “valuación actuarial”y el resultado numérico que se obtiene se conoce como “valor presente actuarial”que denotaremos por VPA, además éste se calcula de acuerdo con un conjunto predeterminado de *hipótesis actuariales.*

4.1.1. Hipótesis actuariales

Las hipótesis actuariales son el conjunto de supuestos sobre ocurrencias y eventos futuros que afectan los costos de un plan de pensiones. Estas hipótesis están divididas en

- Biométricas y
- Financieras

Las primeras corresponden a las contingencias que puede originar la no permanencia de una persona en un grupo de estudio; éstas son invalidez, rotación y muerte. Es en este punto donde podemos observar la aplicación de la Teoría de Decrementos Múltiples, pues será necesario utilizar tasas ajustadas.

Por lo que respecta a las hipótesis financieras, éstas corresponden a los supuestos de tasa de inversión de reservas, llamada tasa de interés técnico i, que constituye el fondo para el pago futuro de obligaciones. De forma semejante los planes establecen su revaluación del beneficio, y éste generalmente se hace con respecto al Salario Mínimo General (SMG) por lo que otra variable a considerar va a ser la tasa de incremento salarial mínima j_m.

A continuación, de describen las principales hipótesis actuariales que se utilizan en la valuación actuarial.

1. Mortalidad

La valuación actuarial de un plan de pensiones es afectada por las hipótesis que se asuman sobre mortalidad de los miembros activos del plan y los jubilados. Estas hipótesis, en combinación con las que se utilicen para estimar la rotación del personal, producen el número de participantes que se encontraran vivos y activos en su fecha de jubilación. La hipótesis de mortalidad, aplicada a los jubilados, define el tiempo en el que deberán pagarse los beneficios estipulados. Si el plan otorga un beneficio en caso de fallecimiento antes del retiro, la hipótesis de mortalidad, aplicada a los participantes activos servirá para determinar el VPA de estos beneficios.

En la selección de la tabla de mortalidad debe tomarse en cuenta que la mortalidad en grupos de personas activas es más baja que la mortalidad en la población en general, ya que en los grupos laborales se requiere un nivel mínimo de salud para permanecer en servicio activo, mientras que la medición de la mortalidad de la población en general incluye a personas de diversas condiciones de salud. Por otra parte, hay que tomar en cuenta que las tasas de mortalidad se comportan de manera distinta, dependiendo del sexo, ya que en promedio, las mujeres viven más que los hombres.

2. Rotación

Una parte del grupo activo de participantes en un plan de pensiones terminará voluntariamente la relación de trabajo antes de jubilarse y, por lo tanto, debe estimarse el efecto que tiene. El método más común que se utiliza para considerar el efecto de la terminación voluntaria del empleo de los participantes, es el uso de una tabla conocida como *tabla de experiencia y servicios*, en la que se muestra el porcentaje de participantes elegibles, edad por edad, que se espera terminen sus servicios durante un año.

Ya que resulta difícil observar un grupo suficientemente grande y por un periodo de tiempo suficientemente largo para así determinar su propia tabla de experiencias y servicios, generalmente se hacen observaciones simultaneas en varios grupos en periodos cortos de tiempo, posteriormente se gradúan los resultados con base en alguno de los métodos que existen para tal efecto.

Las tasas de rotación se aplican de la misma manera que las de mortalidad a un grupo hipotético de empleados que participan en el plan. Para calcular la probabilidad de que un participante continúe activo dentro del plan hasta su fecha de retiro, la tasa de rotación se combina con la de invalidez y muerte, obteniéndose de esta manera el total de decrementos por edad, y también reflejando el número de empleados que se espera continúen activos hasta obtener los beneficios previstos por el plan.

Las tasas de rotación tienden a disminuir conforme aumenta el tiempo de servicio en una empresa, algunas tablas de experiencia y servicios incluyen, no sólo las tasas de rotación por cada edad, sino también por tiempo de servicio, generando así las tablas selectas.

3. Invalidez

Es posible que un plan de pensiones otorgue algún beneficio de invalidez distinto del que representa la opción de retiro anticipado. En este caso, debe tomarse en cuenta en el cálculo del VPA. Para realizar la valuación actuarial de los beneficios de invalidez, puede hacerse distinción entre las tasas de invalidez propiamente dichas y las que se utilizan en el cálculo de una anualidad contingente de invalidez. La primera hipótesis es la relativa a que un participante se invalide, de acuerdo a la definición establecida en el plan. La segunda hipótesis se refiere al valor presente actuarial de los beneficios pagaderos a un participante que adquiere el derecho de recibirlos.

4. Interés

En el cálculo del VPA, es necesario tomar en cuenta el interés y otros ingresos resultantes de las inversiones que se hacen con los fondos de pensiones. En la selección de la hipótesis de interés, debe tomarse en cuenta:

- La necesidad de proteger al fondo contra una baja en los rendimientos.
- Las expectativas de liquidez.
- La acumulación de una reserva para contingencias por baja de la tasa de interés real.

La selección de esta hipótesis se complica por la diversidad de las circunstancias que afectan el rendimiento de las inversiones, por lo que su elección debe basarse en la experiencia.

5. Edad

El monto de la pensión que se que otorgará a los participantes del plan estará determinado, entre otras cosas, por la edad de retiro que se considere en el plan. Generalmente esta hipótesis considera una edad obligatoria para jubilarse, así se considera que los beneficios se pagarán a partir de esa fecha; en caso de haber más de una edad de jubilación, se puede utilizar una edad promedio o aplicar tasas de retiro ponderadas para las diferentes edades de jubilación.

6. Escala de salarios

Si los beneficios que otorga el plan no se basan en los sueldos futuros, el cálculo del VPA se realiza con base en los salarios del periodo al que corresponda la valuación actuarial. Sin embargo, cuando los beneficios están basados en los sueldos que los participantes recibirán en el futuro, es necesario estimar el cambio que éstos pueden sufrir, de esta manera se usa una escala prospectiva de salarios. En ocasiones, la escala de salarios se obtiene como un cociente del salario promedio en cada edad y el promedio del salario de los empleados que tengan la edad máxima para recibir los beneficios del plan; otras veces la escala de salarios puede ser una progresión geométrica, aritmética o alguna que utilice diferentes tasas para diferentes periodos.

4.1.2. Tipos de plan

Como la pensión privada descansa principalmente sobre el sueldo y la antigüedad de un participante, el monto de los beneficios depende del monto de las contribuciones que se hagan al fondo de pensiones y, sobre todo, de que tales contribuciones sean fijas o variables. Para examinar la manera en que se calculan las pensiones, conviene agrupar los planes en dos categorías:

Costo Variable - Beneficio fijo En los planes de costo variable se establece de antemano el monto de los beneficios que se desea otorgar, sin tomar en consideración lo que pueda costar. Para definir el beneficio que otorga el plan, se utiliza un procedimiento que lleva a establecer la regla para calcular la pensión.

Costo Fijo - Beneficio Variable El beneficio es variable porque depende del fondo constituido durante el periodo mientras la persona es activa, generalmente este fondo se constituye por aportaciones de un porcentaje sobre el sueldo del trabajador, es decir, se establece anticipadamente lo que el trabajador tendrá que aportar, y al llegar a la fecha de retiro el saldo a su favor se convierte en una pensión mensual vitalicia. Una ventaja de este plan es que la empresa ejerce un control casi total sobre el costo del plan, además no es necesario llevar a cabo valuaciones actuariales periódicas; sin embargo, no hay control sobre el monto de los beneficios. La cantidad que se acumula a favor de cada participante es una función de su sueldo y, sobre todo, del periodo que ha estado incluido en el plan recibiendo aportaciones a su favor, por lo que los participantes con mayor antigüedad y mayor sueldo reciben más que los que tienen antigüedades más cortas y menor sueldo.

4.1.3. Formas de otorgar el beneficio

El objetivo de cualquier plan de pensiones consiste en proporcionar un beneficio al participante retirado, para ello existen varias formas de condicionar el pago del beneficio, puede ser sobre el pensionado, su esposa o hijos bajo condiciones especiales; en el caso más sencillo se habla de rentas vitalicias, que es un conjunto de pagos de por vida, que pueden depender del titular únicamente. A continuación se enlistan las principales formas de otorgar el beneficio.

Pensión Vitalicia Los pagos comienzan en la fecha de retiro del participante y terminan al ocurrir su fallecimiento.

Pensión Vitalicia con Garantía Los pagos comienzan en la fecha de retiro del participante y terminan cuando se haya completado el periodo de garantía, que generalmente es de 5, 10 o 15 años, aún cuando ya haya ocurrido el fallecimiento del participante, o bien cuando ocurra el fallecimiento del participante pensionado después del periodo de garantía.

Pensión Vitalicia con Reembolso Modificado Los participantes contribuyen al costo de plan con el objetivo de garantizar la devolución de sus aportaciones. Cuando ocurre el retiro se establece una cuenta a su favor, cuyo monto está formado por las contribuciones hechas por él mismo, más los intereses correspondientes, sin considerar las cantidades aportadas por la empresa. Los pagos que recibe el pensionado se cargan a su cuenta hasta que se salde, si el fallecimiento ocurre cuando existe saldo a favor, éste se entrega a sus beneficiarios en una sola exhibición.

Pensión sobre Vidas Conjuntas Esta modalidad tiene como objetivo principal, además de otorgar una pensión vitalicia al pensionado, la continuación del pago de la pensión durante la vida de un segundo pensionista, generalmente conocido como *pensionista contingente*, que es designado por el participante pensionado al momento de su retiro. Esto es, si el participante pensionado fallece antes que el pensionista contingente, éste último cobrará la pensión designada mientras viva, en caso contrario no hay designación de un nuevo pensionista contingente ni modificación en el monto de la pensión.

Pago Único La pensión estipulada en el plan tiene un valor actuarial que generalmente representa, cuando menos, el valor de la indemnización legal, por lo tanto es válido el cambio de una pensión por el pago en una sola exhibición.

4.1.4. Modelos de cálculo

Funciones básicas

Un punto de partida es una tabla de decrementos múltiples construida para representar a un grupo de participantes sujetos, durante los años de servicio activo, a las probabilidades de

- Rotación
- Muerte durante el servicio
- Retiro por invalidez
- Jubilación

Las notaciones para estas probabilidades sobre una persona de edad x, son: $q_x^{(r)}$, $q_x^{(m)}$, $q_x^{(i)}$ y $q_x^{(j)}$ respectivamente.

Como se indicó anteriormente, los principales beneficios de un plan de pensión son las anualidades para los beneficiarios elegibles. Para la valuación de dicha indemnización anual, es necesario adoptar tablas de mortalidad apropiadas que diferirán si el retiro es por invalidez o por años de servicio. Los valores de la anualidad correspondiente se indicarán por los índices

$\bar{a}_{x+t}^{(i)}$ si el retiro es por invalidez, y

$\bar{a}_{x+t}^{(j)}$ si el retiro es debido a los años de servicio.

El valor de la anualidad continua se utiliza como un medio de aproximación conveniente a la forma real del pago de pensión que normalmente será mensual, pero que puede tener condiciones particulares como pagos iniciales y finales.

Algunos planes de pensión, especialmente aquéllos diseñados para los trabajadores por hora, definen las indemnizaciones como cantidades netas de ingreso por año de servicio. Otros planes definen a los beneficios como porcentajes de un salario final medio. Dichas fórmulas son utilizadas frecuentemente en los planes que involucran empleados asalariados. En estos casos, es preciso proyectar los salarios futuros para poder evaluar las indemnizaciones. Las contribuciones del patrocinador se expresan con frecuencia como un porcentaje del salario, por lo que aquí también es importante la proyección de los salarios futuros. Para dicha proyección, definimos las siguientes funciones de salario:

- $(SR)_{x+h}$ es la tasa real de salario anual en la edad $x+h$, es decir, para un participante que ingreso a edad x y ha alcanzado ahora la edad $x+h$;
- $(SP)_{x+h+t}$ es la tasa proyectada del salario anual para la edad $x+h+t$.

Adicionalmente supondremos que tenemos una función de escala de salarios S_y, para usarla con estas proyecciones, tal que

$$(SP)_{x+h+t} = (SR)_{x+h} \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}} \tag{4.1}$$

La función del salario S_y no sólo refleja los incrementos al salario debido a méritos y antigüedad, sino también los incrementos causados por la inflación. Se supone generalmente que S_y es una función por etapas, con nivel constante durante cualquier año de edad dado.

Los factores requeridos para determinar los valores presentes actuariales de las indemnizaciones de los planes de pensión y de las contribuciones requeridas para respaldarlas son el modelo de decremento múltiple, la escala de salarios, el supuesto respecto al reembolso de la inversión, y un valor anual apropiado para los retiros por incapacidad y por años de servicio

En las siguientes secciones discutiremos las fórmulas básicas para la valuación de las contribuciones de los planes de pensión y diversos tipos de indemnización.

Contribuciones

Existen dos patrones simples de contribuciones:

- una tasa neta por participante, y
- un porcentaje neto del salario por cada participante.

Para cada uno de estos patrones evaluaremos el valor presente actuarial de las contribuciones futuras con respecto a un participante que ha alcanzado la edad $x + h$.

El valor presente actuarial de las contribuciones futuras pagadas continuamente a una tasa de c puede expresarse como

$$VPA = c\int_0^{\omega-x-h} v^t \ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}dt \tag{4.2}$$

Si reemplazamos en 4.2 t por $k+s$ en donde k es un entero y $0 \leq s \leq 1$, obtenemos que

$$c\int_0^{\omega-x-h} v^t \ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}dt = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k \ {}_kp_{x+h}^{(\tau)} \int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)}ds \tag{4.3}$$

Si aproximamos cada integral mediante la fórmula del punto medio, obtenemos el valor aproximado

$$c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k \ {}_kp_{x+h}^{(\tau)} v^{1/2} \ {}_{1/2}p_{x+h+k}^{(\tau)} = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2} \ {}_{k+1/2}p_{x+h}^{(\tau)} \tag{4.4}$$

Nótese que 4.4 puede obtenerse directamente al suponer que los pagos tienen lugar a la mitad de los años de edad.

Si las contribuciones se expresan como una fracción c del salario, entonces el valor presente actuarial de las contribuciones futuras con respecto a un participante que está siendo pagado corrientemente a una tasa anual de $(SR)_{x+h}$ se puede expresar, usando 4.1 y 4.3, como

$$\begin{aligned} VPA &= c(SP)_{x+h+t}\int_0^{\omega-x-h} v^t \ {}_tp_{x+h}^{(\tau)} \\ &= c(SR)_{x+h}\int_0^{\omega-x-h} v^t \ {}_tp_{x+h}^{(\tau)}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}dt \\ &= \frac{c(SR)_{x+h}}{S_{x+h}}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k \ {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\int_0^1 v^s \ {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)} S_{x+h+k+s}ds \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si se supone que la función S_y es constante para cualquier año de edad, entonces también puede eliminarse las integrales. Además, si aproximamos cada una de las integrales mediante la fórmula del punto medio, obtenemos como VPA

$$VPA = \frac{c(SP)_{x+h}}{S_{x+h}} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2} \ {}_{k+1/2}p_{x+h}^{(\tau)} S_{x+h+k} \tag{4.6}$$

Indemnizaciones por jubilación

La principal indemnización de un plan de pensión es normalmente la anualidad diferida de retiro por años de servicio, mejor conocida como anualidad por jubilación. En los *planes de contribución definida*, el VPA es simplemente la acumulación con interés de las contribuciones hechas por el participante, y la indemnización es una anualidad que puede comprarse con dicha acumulación. En dichos planes, la determinación del VPA se logra mediante un proceso de acumulación. En otros planes, el ingreso de retiro está definido por una fórmula, y es para tales *planes de beneficio definido* para los que buscamos expresar los valores presentes actuariales.

A continuación introducimos la función $R(x, h, t)$ para representar la tasa de ingreso de indemnización anual para un empleado de edad $x + h$ que ingreso a la edad x y quien en t años a partir de ahora, a la edad $x + h + t$, es candidato para recibir indemnizaciones de ingreso inmediato o diferido. Suponemos que el ingreso permanece igual, y que en caso de jubilación, por ejemplo, expresamos su valor presente actuarial al tiempo del retiro mediante $R(x,h,t)\bar{a}^{(j)}_{x+h+t}$. Podemos entonces escribir una expresión integral para el VPA de la indemnización por jubilación para un empleado actualmente activo en el estatus $x+h<\alpha$,

$$VPA = \int_{\alpha-x-h}^{\omega-x-h} v^t\, {}_tp^{(\tau)}_{x+h}\mu^{(j)}_{x+h+t}R(x,h,t)\bar{a}^{(j)}_{x+h+t}dt \tag{4.7}$$

Aproximando la integral tenemos,

$$VPA = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^k\, {}_kp^{(\tau)}_{x+h} \int_0^1 v^s\, {}_sp^{(\tau)}_{x+h+k}\, \mu^{(j)}_{x+h+k+s}R(x,h,k+s)\bar{a}^{(j)}_{x+h+k+s}ds \tag{4.8}$$

Suponiendo una distribución uniforme de los retiros para cada año de edad, podemos reescribir esto como

$$VPA = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^k\, {}_kp^{(\tau)}_{x+h}\, q^{(j)}_{x+h+k} \int_0^1 v^s\, R(x,h,k+s)\bar{a}^{(j)}_{x+h+k+s}ds \tag{4.9}$$

y utilizando la aproximación del punto medio para las integrales nos da

$$VPA \cong \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\, {}_kp^{(\tau)}_{x+h}\, q^{(j)}_{x+h+k}R(x,h,k+1/2)\bar{a}^{(j)}_{x+h+k+1/2} \tag{4.10}$$

La fórmula 4.10 es la forma general mediante la cual calcularemos los valores presentes actuariales de las indemnizaciones por jubilación.

Indemnizaciones por invalidez

Se puede seguir un proceso similar al que se utiliza en la sección anterior para la valuación de las pensiones por invalidez o incapacidad. Tales pensiones generalmente se basan sobre el salario que se devenga en la fecha de la invalidez, podrán representar una indemnización mínima y podrán ser pagaderas sólo hasta alguna edad, como por ejemplo 65, y en ese momento se cambiará la pensión a una pensión por jubilación. Ejemplificaremos el proceso mediante una pensión por invalidez pagadera a la tasa de f veces el salario del año en que ocurre el retiro por invalidez multiplicado por el número de años de servicio acreditados incluyendo cualquier crédito fraccionario. Se supone que el participante debe haber acreditado sus servicios al menos durante 5 años y ser menor de 65 años para ser elegible para el retiro por invalidez, pero si tal retiro ocurre durante este periodo, la indemnización será al menos de $10f$ veces el salario anual correspondiente a la fecha de incapacidad. La función de la tasa de ingresos por indemnización para un integrante nuevo de edad x está dada por

$$R(x,0,t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 5 \text{ o } t \geq 65 - x; \\ 10f(SP)_{x+t} = 10f(SR)\frac{S_{x+t}}{S_x} & 5 \leq t < 10; \\ tf(SP)_{x+t} = tf(SR)\frac{S_{x+t}}{S_x} & 10 \leq t < 65 - x. \end{cases} \tag{4.11}$$

El VPA para estas indemnizaciones por incapacidad, (que aquí se suponen pagaderas de por vida) están dadas por

$$VPA = \int_5^{65-x} v^t_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(i)} R(x,0,t) \bar{a}_{x+t}^{(i)} dt \tag{4.12}$$

y se aproxima mediante

$$VPA = \sum_{k=5}^{64-x} v^{k+1/2}\, {}_kp_x^{(\tau)}\, q_{x+k}^{(i)} R(x,0,k+1/2) \bar{a}_{x+k+1/2}^{(i)} \tag{4.13}$$

Las diferencias entre estas expresiones y 4.7 y 4.10 son el uso de la fuerza de decremento de la invalidez, la probabilidad del retiro por invalidez y el uso de valores para la anualidad por invalidez, así como los limites de integración y de la suma.

Indemnizaciones por rotación

En general, existen dos tipos de indemnizaciones por rotación, una que aplica después de cierto número de años, y la otra que aplica a planes. En el primer caso, después de un número de años, por ejemplo, 10 años el participante saliente puede ser candidato a una anualidad diferida. Como ejemplo, consideramos una indemnización por rotación de una anualidad diferida que se inicia a la edad de 60 años. La tasa de ingreso es f veces el número de años de servicio hasta el momento de la separación multiplicado por la tasa de salario pagadera en el año de la separación. En este caso tenemos

$$R(x,h,t) = \begin{cases} 0 & h+t<10; \\ f(h+t)(SP)_{x+h+t} & 10 \leq h+t < 60-x. \end{cases} \tag{4.14}$$

El VPA de esta indemnización se aproxima mediante

$$VPA = \sum_{k=l}^{59-x-h} v^{k+1/2}\, {}_kp_{x+h}^{(\tau)}\, q_{x+h+k}^{(r)} R(x,h,k+1/2)_{60-x-h-k-1/2}\bar{a}_{x+k+1/2}^{(j)} \tag{4.15}$$

donde l es el mayor de $10-h$ y 0.

El otro tipo de indemnización por rotación se aplica a planes que incluyen contribuciones de los participantes. Estos planes, que generalmente incluyen a empleados públicos, usualmente estipulan un reembolso de las contribuciones de los participantes, acumulados con interés, como una suma global si el participante sale antes de ser candidato a una pensión de indemnización. Para valuar el reembolso de la indemnización de contribuciones pasadas, representamos a éstas últimas como $(CPA)_{x+h}$ acumuladas con interés hasta la fecha, con respecto a un participante con edad actual $x+h$. Con el supuesto de que las contribuciones de los participantes se acumularán en el futuro a la tasa efectiva anual j, el tamaño de la suma global de indemnización pagadera a la edad de salida $x+h+t$ está dada por

$$B(x,h,t) = (CPA)_{x+h}(1+j)^t$$

La suma aproximada de los valores presentes actuariales de indemnización por reembolso con respecto a las contribuciones pasadas, es entonces,

$$(CPA)_{x+h} = \sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} v^{k+1/2} \; {}_kp_{x+h}^{(\tau)} \; q_{x+h+k}^{(r)}(1+i)^{k+1/2} \tag{4.16}$$

Donde β es la edad a la que se establece la elegibilidad para la pensión y $x+h<\beta$. Además suponemos que no se hacen reembolsos después de la edad β.

4.2. Seguro educativo

Otra aplicación de la teoría de decrementos múltiples se encuentra en el Seguro educativo, éste es un seguro de protección y ahorro que garantiza la formación de un capital para solventar la educación universitaria.

La Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef) define al seguro educativo como un instrumento financiero, de supervivencia del menor, en el que durante determinado tiempo el padre, madre o tutor paga una prima (cantidad mensual, trimestral, semestral o anual) y el beneficiario recibirá al cumplir 15, 18 o 22 años, una suma asegurada para continuar sus estudios.

Los seguros educativos están diseñados para conformar un ahorro que cubra la educación de los menores a través de diversos planes que se diferencian de acuerdo con lo siguiente:

Cobertura Por lo general, los seguros educativos van de la mano de una cobertura de exención del pago de primas por fallecimiento o invalidez total y permanente del contratante. Ante estas eventualidades, la aseguradora pagará las primas hasta que se cumpla el plazo del seguro. Dependiendo del seguro, se puede contar con la protección por fallecimiento, invalidez y desempleo temporal, desde la contratación y con la disposición de los recursos generados a favor de tus hijos cuando lleguen a la edad de ingresar a la Universidad.

Prima La periodicidad del pago de la prima puede ser anual, mensual, trimestral, etc., mientras que su valor se encuentra en función de la edad del menor al contratar, pues entre más años tenga éste, las primas serán mayores, porque el tiempo para pagar la suma es más corto, y viceversa. Esta situación no es aplicable en todos los seguros, pues algunos tienen periodos específicos para cubrir la suma asegurada. Por ejemplo, algunos establecen un límite de hasta 5 años para el pago y un límite de edad del menor de 13 años.

Edad del menor La edad del menor sobre la cual se hace el cálculo del seguro educativo regularmente sirve de plazo máximo para el pago del total, es decir, si el seguro se contrata cuando nace el niño, significa que se tiene un periodo de 15, 18 o 22 años para cubrir la suma asegurada según el plan contratado, aunque no siempre es aplicable, como ya se menciono en el párrafo anterior.

Suma asegurada En los seguros educativos el monto de la suma asegurada está en función de los ingresos de la familia, pero también de las expectativas académicas para el menor, pues se determina con base en la carrera o estudios de posgrado y, principalmente, con respecto al tipo de escuela, pública o privada. Es importante señalar que el costo de los seguros depende de la suma asegurada, que en este caso es la cantidad que se quiere ahorrar, y la edad del menor, por lo que, entre más grande sea la suma asegurada y/o más grande la edad del menor, el seguro será más caro.

Los seguros educativos tienen tres componentes:

- Ahorro: Son las aportaciones periódicas denominadas primas para alcanzar la suma asegurada.

- Seguro: Cubre el riesgo contra invalidez, fallecimiento o desempleo de los padres o tutores, el cual podría afectar el cumplimiento de la meta.

- Inversión: El ahorro acumulado crece con el tiempo para que no pierda su poder adquisitivo.

Los seguros educativos son una alternativa para hacer frente a los gastos y las eventualidades futuras relacionadas con la educación de los hijos, es en este punto donde podemos observar que este tipo de seguro está directamente relacionado con el modelo de decrementos múltiples pues dichas "eventualidades "actúan simultáneamente sobre todos los contratantes de este seguro, que puede ser padre, madre o tutor; tales contratantes forman un grupo que está expuesto a tres diferentes decrementos que son: el fallecimiento, la invalidez y el desempleo; en el momento en que alguno muera, se invalide o quede sin empleo saldrá del grupo en cuestión.

Los seguros educativos son una buena opción, porque no sólo constituyen un ahorro, sino una garantía para la educación del menor. Lo anterior no sucede si el dinero se canaliza a través de instrumentos bancarios donde el ahorro queda inconcluso si el padre -el contratante- fallece o queda inválido o desempleado; en cambio, en el seguro educativo, el dinero que recibirá el menor asegurado, está garantizado, ya que la institución se compromete a seguir pagando el seguro hasta que el menor alcance -dependiendo del plan, la institución y los padres- los 15, 18 ó 22 años de edad, término que indica el momento en que la aseguradora entregará el dinero al menor.

4.3. Presupuesto para un programa de becas

Fuera del ámbito de las pensiones y los seguros la teoría de decrementos tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, ésta puede ser una herramienta de apoyo para hacer el presupuesto que debe destinarse a un programa de becas. Supongamos que tenemos un cierto número de alumnos que ingresan a la universidad y que han sido seleccionados para tener una beca, tal cantidad de alumnos será denotada como l_0. A cada alumno se le dará una cantidad mensual de B pesos siempre y cuando mantenga los requisitos de la beca. Nuestro principal objetivo es calcular el número de alumnos que después de determinado tiempo mantendrán la beca, de esta manera podemos estimar la cantidad de dinero que debe destinarse al programa.

Como punto de partida tenemos un grupo inicial de estudio, l_0, que son aquellos alumnos que tienen una beca al inicio del ciclo escolar. El siguiente paso es establecer las causas por las cuales un alumno puede perder el beneficio de la beca, algunas causas pueden ser:

- No mantener el promedio requerido
- Muerte del alumno
- Deserción escolar

Por otro lado, debemos notar que el costo que genera la beca está en función de la tasa de permanencia de los alumnos, esto es, se debe estimar el número de alumnos que mantendrán la beca hasta que terminen sus estudios;

para conocer el costo por ciclo escolar, entonces basta con hacer la estimación por ciclo.

Así, en este caso, las tasas de salida del grupo de estudio estarán dadas por:

$q'^{(p)}$ probabilidad de que un alumno con beca no mantenga el promedio mínimo requerido

$q'^{(m)}$ probabilidad de que un alumno con beca fallezca durante el ciclo escolar

$q'^{(d)}$ probabilidad de que un alumno con beca deserte

Aplicando algún método de ajustamiento de tasas, podemos obtener una tasa $q^{(\tau)}$ que exprese la tasa de salida de los alumnos con beca, mientras que la tasa de permanencia, es decir la proporción de alumnos que seguirán teniendo el apoyo económico, estará dado por

$$p^{(\tau)} = 1 - q^{(\tau)}$$

De este modo, del número inicial de alumnos con beca l_0, se estima que sólo

$$l_1 = p^{(\tau)} l_0$$

seguirán con el apoyo económico para el siguiente ciclo. Y en términos generales para el ciclo n se tendrán $l_n^{(\tau)}$ alumnos, donde

$$l_n^{(\tau)} = l_{n-1}^{(\tau)} p_n^{(\tau)}$$

Para ejemplificar esto, supongamos que tenemos $1,000$ alumnos con beca de la carrera de actuaría que ingresan a la facultad. Las tasas de salida son

- $q^{'(p)} = 11\,\%$
- $q^{'(m)} = 0{,}123\,\%$
- $q^{'(d)} = 16\,\%$

s	$q'^{(p)}_s$	$q'^{(m)}_s$	$q'^{(d)}_s$	$q^{(p)}_s$	$q^{(m)}_s$	$q^{(d)}_s$	$q^{(\tau)}_s$
1							
2	0.11000	0.00123	0.16000	0.10114	0.00107	0.15111	0.25332
3	0.10900	0.00123	0.14000	0.10131	0.00108	0.13229	0.23468
4	0.10800	0.00123	0.12000	0.10146	0.00110	0.11345	0.21601
5	0.10700	0.00123	0.10000	0.10159	0.00111	0.09459	0.19729
6	0.10600	0.00123	0.08000	0.10170	0.00112	0.07571	0.17853
7	0.10500	0.00123	0.06000	0.10179	0.00113	0.05682	0.15973
8	0.10400	0.00123	0.04000	0.10186	0.00114	0.03790	0.14090

Tab. 4.1: Tabla de ajustamiento de tasas

s	$l^{(\tau)}_s$	$d^{(p)}_s$	$d^{(m)}_s$	$d^{(d)}_s$	$d^{(\tau)}_s$
1	1000				
2	746.68	101.14	1.07	151.11	253.32
3	571.45	75.65	0.81	98.78	175.23
4	448.01	57.98	0.63	64.83	123.44
5	359.62	45.51	0.50	42.38	88.39
6	295.42	36.57	0.40	27.23	64.20
7	248.23	30.07	0.33	16.78	47.19
8	213.26	25.28	0.28	9.41	34.98
Totales	**3,882.67**				**786.74**

Tab. 4.2: Tabla de datos

En la tabla 4.1 se encuentran los datos relacionados con el procedimiento de ajustamiento de tasas, mientras que en la tabla 4.2 se encuentran los datos reacionados con las "salidas " del grupo; en este caso los ciclos escolares son semestres, indicados con s, que va del 1 al 8 para relacionarlos con los 8 semestres que dura el programa de becas; como mencionamos, al empezar el primer semestre habrá $1,000$ alumnos con beca, sin embargo cuando empiece el segundo semestre sólo habrá 746 expresados en la tabla como $l_2^{(\tau)}$ que no es más que el número original de alumnos multiplicado por la tasa de permanencia en el semestre 2, esto es

$$l_2^{(\tau)} = l_1^{(\tau)} p_2^{(\tau)}$$

para el semestre 3 en número de becas estará dado por

$$l_3^{(\tau)} = l_2^{(\tau)} p_3^{(\tau)}$$

y así sucesivamente.

Una vez que tenemos el número de alumnos por semestre que permanecerán con beca, podemos decir qué monto debe ser destinado para este programa. Véase la siguiente tabla.

En este caso se presume que el monto que debe ser destinado a este programa es de $3,883B$ pesos.

4.4. Estimación de servicios

En esta sección desarrollaremos otro ejemplo en el que se puede usar el modelo de decrementos múltiples.

Semestre	Alumnos
1	1,000
2	747
3	571
4	448
5	360
6	295
7	248
8	213
Total	3,883

Tab. 4.3: Tabla de alumnos con beca por semestre

Una agencia de mantenimiento de autos provee servicio a una compañía que tiene una flota de autos para sus empleados. La agencia de mantenimiento está interesada en conocer un estimado de la cantidad de servicios que atenderá por mes.

Como primera hipótesis tenemos que el servicio de mantenimiento sólo será requerido por cualquiera de las siguientes tres situaciones:

- Falla. El automóvil será reparado de cualquier falla que presente
- Choque. En cualquier colisión en el que el auto no requiera ser reemplazado por uno nuevo, éste deberá ser reparado.
- Robo de autopartes. Cuando una pieza del auto sea robada, la agencia de mantenimiento deberá reponer dicha pieza.

Como segunda hipótesis asumiremos que los autos que requieran el servicio se irán "sacando"de la flota y ya no vuelven a formar parte de ésta. Es decir, si por ejemplo, un auto choca, se le da servicio, pero ya no forma parte de la "flota asegurada", así, si después falla ya no se le dará servicio.

La compañía cuenta con 800 autos los cuales conforman el grupo de estudio, expuestos a tres decrementos, que son falla, choque y robo de autopartes. De acuerdo a la experiencia de la agencia, las probabilidades de ocurrencia mensual de dichos eventos se muestran en la Tabla 4.4.

m	$q'^{(f)}_m$	$q'^{(ch)}_m$	$q'^{(ra)}_m$
1	0.00065	0.00153	0.05800
2	0.00066	0.00161	0.05500
3	0.00068	0.00171	0.05100
4	0.00071	0.00182	0.04850
5	0.00075	0.00192	0.04450
6	0.00080	0.00203	0.04200
7	0.00086	0.00215	0.03950
8	0.00093	0.00237	0.03650
9	0.00102	0.00260	0.03450
10	0.00113	0.00283	0.03150
11	0.00125	0.00306	0.02950
12	0.00138	0.00328	0.02650

Tab. 4.4: Tabla de probabilidades mensuales por evento.

Donde

$q'^{(f)}$ es la probabilidad de falla

$q'^{(ch)}$ es la probabilidad de choque

$q'^{(ra)}$ es la probabilidad de robo de autopartes

Como última hipótesis supondremos que los datos de incidencia que se muestran en la Tabla 4.4 son probabilidades y no frecuencias. Recordemos que la frecuencia de un evento es el cociente del número de veces que ocurre el evento y el número de sujetos expuestos a tal evento; en el caso de la frecuencia de choque, tendríamos que

$$\text{frecuencia de choque} = \frac{\text{número de choques}}{\text{número de autos en la flota}}.$$

Si tuvieramos por ejemplo que en un mes

$$\text{frecuencia de choque} = \frac{2400}{800} = 3$$

eso significaría que en promedio un carro es chocado tres veces en un mes, pero según nuestro modelo, en cuanto un sujeto de nuestro grupo es afectado por cualquiera de los eventos a los que está expuesto, sale del grupo; así, en el caso de choque, no nos interesa conocer la frecuencia (número de veces que choca un auto), más bien nos interesa saber si un auto choca o no en un determinado periodo. De este modo, supondremos que las probabilidades que usaremos consideran que el evento ocurre una sola vez, como en el caso de las tablas de vida, en donde una persona sólo puede ser afectada una sola vez por el evento "muerte". Es importante precisar esta hipótesis, pues los eventos choque, robo de autopartes y falla, claramente pueden ocurrir más de una vez, pero sólo nos interesa conocer cuando ocurre la primera vez.

Usando el modelo de decrementos múltiples podemos estimar el número de autos que mensualmente requerirán el servicio, más aún podemos decir cuántos serán atendidos por cada uno de los tres decrementos.

El la Tabla 4.5 se muestra la cantidad de autos que mensualmente podría atender la agencia de mantenimiento. La primera columna describe los meses del año, en la segunda aparece la cantidad de autos expuestos, que se refiere a la cantidad de autos en la flota de la compañía; de la tercera a la quinta columna se muestran los autos que requerirán servicio por falla, choque o robo de autopartes, respectivamente; mientras que la última columna muestra los totales por mes de incidencias.

m	$l_m^{(\tau)}$	$d_m^{(f)}$	$d_m^{(ch)}$	$d_m^{(ra)}$	$d_m^{(\tau)}$
1	800	0.50	1.19	46.35	48.0
2	752.0	0.48	1.18	41.31	43.0
3	709.0	0.47	1.18	36.12	37.8
4	671.2	0.46	1.19	32.51	34.2
5	637.1	0.47	1.20	28.31	30.0
6	607.1	0.47	1.21	25.46	27.1
7	579.9	0.49	1.22	22.87	24.6
8	555.4	0.51	1.29	20.24	22.0
9	533.3	0.53	1.36	18.37	20.3
10	513.1	0.57	1.43	16.13	18.1
11	494.9	0.61	1.49	14.57	16.7
12	478.3	0.65	1.55	12.64	14.8
Totales		**6.2**	**15.5**	**314.9**	**336.6**

Tab. 4.5: Tabla de incidencia por mes.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se hace una revisión del modelo de decrementos múltiples, empezando por el modelo simple, que considera que el único evento que puede afectar a una persona es el fallecimiento; en este caso solamente se admite un decremento y la variable que se estudia es "tiempo hasta que ocurra el fallecimiento"; sin embargo, en otros casos surge la necesidad de analizar cuando una persona está expuesta a más de un evento simultáneamente y para ello usamos el modelo de decrementos múltiples.

Este trabajo se realizó con la finalidad de que se observe que el modelo de decrementos múltiples a pesar de ser un modelo actuarial enfocado a las pensiones, también puede ser aplicado en otras áreas.
Es un modelo matemático que puede ayudar a diseñar presupuestos, en este trabajo se enfocó en un presupuesto de becas, pero puede ser empleado en situaciones en que la permanencia de una persona sea determinante para una planificación financiera; también resulta útil en la estimación de la frecuencia de ciertos eventos, por ejemplo, a una persona que piensa poner un negocio, le resultará valioso conocer el número de clientes que puede tener; y por último, aunque no menos importante, en el área de seguros resulta de mucha utilidad

al ser un modelo que considera más de una forma (la que ocurra primero) para otorgar un beneficio.

Con este trabajo se aprecia que es amplio el campo en el que este modelo puede ser aplicado; espero que el presente trabajo sirva para que el modelo de decrementos múltiples sea utilizado con mayor frecuencia fuera del ámbito actuarial.

APÉNDICE

Conceptos básicos

$l_x^{(\tau)}$ número total de personas de edad x en un grupo de estudio sujeto a n causas de salida.

Esta función claramente es decreciente, dado que con el paso del tiempo la cantidad de personas irá disminuyendo por consecuencia de las distintas causas de salida.

${}_t d_x^{(k)}$ representa el número de personas de edad x que salen del grupo entre las edades x y $x+t$ debido a la causa k.

Cuando hablamos del primer año, es decir, el número de personas que dejan el grupo entre las edades x y $x+1$, el subíndice tomaría el número 1, así tendríamos ${}_1 d_x^{(k)}$, pero en tal caso acordaremos omitir tal subíndice, quedando sólo $d_x^{(k)}$.

${}_t d_x^{(\tau)}$ denota el número total de personas de edad x que salen del grupo, entre las edades x y $x+t$, por cualquiera de las posibles causas.

Análogamente

$d_x^{(\tau)}$ denota el número total de personas de edad x que salen del grupo, entre las edades x y $x+1$. Ya que esta función se refiere a las personas que salen del grupo debido por cualquiera de las causas,

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{i=1}^{n} d_x^{(i)}$$

Es claro que para la edad $x+1$, el número de personas en el grupo, está dado por

$$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(\tau)}$$

De donde

$$d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}$$

${}_t d_x^{(-k)}$ denota el número de personas de edad x que salen del grupo entre las edades x y $x+t$ debido a causas distintas a la causa k.

Para $t=1$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_x^{(-k)} &= q_x^{(\tau)} - q_x^{(k)} \\ &= \tfrac{d_x^{(\tau)} - d_x^{(k)}}{l_x^{(\tau)}} \end{aligned}$$

${}_t p_x^{'(k)}$ representa la probabilidad de que una persona de edad x, que de ahora en adelante denotaremos por (x), estando sujeta únicamente a la causa k, no salga del grupo entre las edades x y $x+t$.

${}_t q_x^{'(k)}$ representa la probabilidad de que (x), salga del grupo por la causa k entre las edades x y $x+t$, estando sujeta únicamente a la causa k.

De acuerdo a los principios elementales del cálculo de probabilidades, la probabilidad de que ocurra un evento A, está dado por

$$P[A] = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Número total de casos}}$$

De modo que

$$_t q_x^{'(k)} = \frac{_t d_x^{(k)}}{l_x^{(\tau)}}$$

$_t q_x^{(\tau)}$ probabilidad de que (x) salga del grupo por cualquiera de las causas, entre las edades x y $x+t$.

$$_t q_x^{(\tau)} = \frac{_t d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

$_t p_x^{(\tau)}$ probabilidad de que (x) permanezca en el grupo entre las edades x y $x+t$.

Ahora el número de casos favorables está dado por $l_{x+t}^{(\tau)}$, así

$$\begin{aligned} _t p_x^{(\tau)} &= \frac{l_{x+t}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \\ &= \frac{l_x^{(\tau)} - {_t d_x^{(\tau)}}}{l_x^{(\tau)}} \\ &= 1 - {_t q_x^{(\tau)}} \end{aligned}$$

Notemos que para $_t p_x^{'(k)}$ y $_t q_x^{'(k)}$ se especifica que (x) **solamente** está sujeta a la causa k de permanencia y salida respectivamente, es decir, si la causa a la que está sujeta (x) es la muerte,

$q_x'^{(m)}$ representa la probabilidad de que (x) fallezca entre las edades x y $x+1$.

$p_x'^{(m)}$ representa la probabilidad de que (x) llegue con vida a edad $x+1$.

Si la causa a la que está sujeta (x) es la invalidez,

$q_x'^{(i)}$ representa la probabilidad de que (x) se invalide entre las edades x y $x+1$.

$p_x'^{(i)}$ representa la probabilidad de que (x) no se invalide entre las edades x y $x+1$.

Análogamente para cualquier otra causa de salida.

BIBLIOGRAFíA

[1] Ayuso, Mercedes. *Estadística actuarial vida.* Barcelona:Universidad de Barcelona, 2001.

[2] Bowers, Newton L. *Actuarial mathematics.* Schaumburg, IL: Society of Actuaries, 1997.

[3] London, Dick. *Survival models and their estimation.* Winsted, CT: ACTEX Publications, 1988. Second Edition.

[4] Rivas López María J. *Análisis de supervivencia.* La Muralla & Hespérides , 2000.

[5] Villalón, Julio G. *Operaciones de seguros clásicas y modernas.* Pirámide, 1997.

[6] *Aspectos actuariales de la teoría y práctica de los planes privados de pensiones en México.* Asociación Mexicana de Actuarios Consultores en Planes de Beneficios para Empleados, 1990.