UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

.

Algunas Ecuaciones Diferenciales Semilineales y su Control

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

JOSÉ ANTONIO ALCÁNTARA FÉLIX

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARIA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE, 2009

Índice general

Introducción

En diversas áreas de la ciencia surge la necesidad de optimizar. Algunos ejemplos son las ciencias naturales, finanzas, ingeniería y economía. Ante este hecho, se han desarrollado herramientas para abordar este problema.

Por otro lado, dentro de éstas áreas hay fenómenos que se describen mediante una ecuación diferencial. Por esta razón, se ha desarrollado toda una teoría para describir el comportamiento y la existencia de soluciones a este tipo de ecuaciones. Éstas son las motivaciones de este trabajo.

El objetivo principal que deseamos cubrir es como relacionar ciertos métodos de optimización con la existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales parciales, así como su uso para describir ciertas propiedades de estas soluciones.

El presente trabajo esta divido en tres capítulos, los primeros dos están dedicados a revisar los conceptos y resultados básicos concernientes a los métodos variacionales, a la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas y parabólicas y en el último, veremos ejemplos concretos utilizando lo desarrollado en los primeros dos capítulos.

En el primer capítulo presentamos algunos conceptos y resultados fundamentales del cálculo de variaciones. De forma más precisa, daremos los conceptos de diferenciabilidad de un funcional, la relación que existe entre existencia de mínimos o máximos de un funcional con la existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico. Posteriormente, veremos condiciones necesarias para la existencia de puntos críticos de un funcional presentando y utilizando los métodos conocidos como directos y minimax.

En el segundo capítulo hablaremos de la existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales parabólicas semilineales. Desarrollaremos la parte necesaria de la teoría de semigrupo para abordar este problema. Después, daremos condiciones suficientes para caracterizar la existencia global y local de las soluciones.

El tercer capítulo está dedicado a desarrollar un problema de formación de patrones asociado a una ecuación diferencial parabólica semilineal y dar un resultado con respecto al comportamiento de estos patrones (ver los teoremas 3.2.3 y 3.2.4), que son nuestra aportación. Después, veremos dos ejemplos en el marco de la teoría de control óptimo. Por último, discutiremos el problema de la controlabilidad de los patrones.

La razón principal por la cual el trabajo está desarrollado de la manera anterior se debe a que los primeros dos capítulos no dependen entre ellos y por consiguiente, se pueden ver de forma aislada. En cambio, el último capítulo depende fuertemente de los anteriores, ya que utiliza tanto resultados como las ideas principales de los primeros dos, como son los conceptos de optimización, la caracterización de soluciones, etc.

Capítulo 1

Una Introducción al Cálculo de Variaciones

En este capítulo presentaremos los elementos necesarios para entender qué es un problema variacional, así como algunas herramientas que nos ayudarán a resolver algunos de estos problemas.

La motivación para realizar lo anterior consiste en que los métodos variacionales son útiles para mostrar la existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) o parciales (EDP), o bien, resolver problemas prácticos de optimización. Este tipo de formulación nos permite trabajar una gran variedad de ecuaciones.

Además, aún cuando una ecuación no tenga estructura variacional, es decir, que no sea la ecuación de Euler-Lagrange asociada a un funcional, muchas ideas variacionales se han adoptado en el desarrollo de técnicas para mostrar existencia de soluciones [E02], [St90], [I02], [Ch05], [LiLo01], etc. De hecho, haremos uso de estas técnicas en el último capítulo para mostrar que la solución de una EDP parabólica presenta cierto tipo de patrones y para abordar problemas de control óptimo.

Podemos pensar en una ecuación diferencial de forma abstracta como

$$A[u] = 0, \tag{1.1}$$

donde $A[\,\cdot\,]$ es un operador diferencial no lineal y u es la incógnita. El cálculo de variaciones identifica la clase de ecuaciones tales que A es la derivada de un funcional J, es decir,

$$A[u] = J'(u) = 0. \tag{1.2}$$

A (1.1) se le conoce como la ecuación de *Euler-Lagrange* (E-L) de J. Podemos notar que las soluciones de (1.1) son puntos críticos (también llamados extremos) de J y por tanto, encontrar mínimos, máximos o puntos sillas de J es equivalente a encontrar soluciones de (1.1).

1.1. Nociones Básicas

En esta sección plantearemos de forma rigurosa un problema de optimización y veremos que resolver éste último es equivalente a encontrar soluciones de una ecuación diferencial. Lo que haremos es ampliar las nociones correspondientes del cálculo usual y posteriormente, desarrollaremos algunos resultados para obtener condiciones necesarias y suficientes para encontrar mínimos o máximos del funcional asociado. Las ideas que mostraremos serán desarrolladas para el caso de mínimos, pero son fácilmente adaptables para el caso de máximos.[1]

Sea B un espacio de Banach y $E : B \to \mathbb{R}$ un funcional. Nuestro problema consiste en encontrar una $u \in B$ tal que

$$E(u) \leq E(v), \quad \forall v \in B, \tag{1.3}$$

donde a E se le conoce comúnmente en la literatura como *el funcional de energía*. Si encontramos una u con la característica anterior, decimos que u es un *mínimo global* de E, es decir,

$$E(u) = \min_{v \in B} E(u). \tag{1.4}$$

En general, no es posible encontrar mínimos globales y por consiguiente, debemos restringir nuestro estudio en subconjuntos de B. Si encontramos una $u \in W \subset B$ solución de (1.4) con W abierto, decimos que u es un *mínimo local*.

Por otro lado, sabemos que los ceros de la derivada de una función son puntos críticos, lo que motiva los siguientes conceptos:

[1] Si u es un mínimo de J, entonces u es un máximo de $-J$.

Definición 1.1.1 (Derivada de Fréchet) *Sea E un funcional definido en B y $v_0 \in W \subset B$, W abierto. Decimos que E es Fréchet diferenciable en v_0 si existe un funcional lineal acotado L de B en $\mathbb{R}$ tal que*

$$|E(v) - E(v_0) - L(v - v_0)| = o(\|v - v_0\|_V). \tag{1.5}$$

Denotamos a $L = \nabla E(v_0)$ como la derivada de Fréchet de E en v_0.

La definición anterior es para el caso de funcionales, pero de igual forma se puede definir para funciones de un espacio de vectorial normado en otro.

Muchas de las consecuencias de tener derivada en un punto se pueden deducir para este caso y son:

1. $\nabla E(v_0)$ está determinada de manera única.
2. E es continua en v_0.
3. La regla de la cadena para composición de funciones siempre y cuando la composición tenga sentido.

Siguiendo la analogía con el cálculo diferencial, también podemos definir el concepto de derivada direccional.

Definición 1.1.2 (Derivada de Gâteaux) *Sea $v_0 \in W$. Decimos que E es Gâteaux diferenciable en v_0 si para $h \in B$, existe $D_hE(v_0)$ tal que*

$$|E(v) - E(v_0) - tD_hE(v_0)| = o(t) \quad si \quad t \to 0 \tag{1.6}$$

para todo $v_0 + th \subset W$. A $D_hE(v_0)$ se le conoce como la derivada de Gâteaux de E en v_0 con dirección h.

Podemos observar que la definición anterior coincide con la noción de derivada direccional usual. El concepto anterior es importante para encontrar puntos críticos[2] ya que muchos funcionales no son Fréchet diferenciables pero si son Gâteaux diferenciables.

Observación 1.1.1 De la definición de derivada de Gâteaux se sigue que

$$D_hE(v_0) = \frac{d}{dt}E(v_0 + th)\Big|_{t=0}.$$

También se suele denotar a $D_hE(v_0) = \langle \nabla E(v_0), h \rangle$.

[2]Recordemos que la derivada direccional da la direción de mayor o menor ascenso.

Un resultado que relaciona la derivada de Gâteaux con la derivada de Fréchet es el siguiente:

Teorema 1.1.1 *Supongamos que el funcional E es Gâteaux diferenciable para todo $h \in W$ y $\exists A(v)$ funcional lineal tal que*

$$D_h E(v) = \langle A(v), h \rangle .$$

Si $A(v)$ es continuo en v_0, entonces E es Fréchet diferenciable en v_0 con $\nabla E(v_0) = A(v_0)$.

Demostración. Véase [Ch05], [I02].

□

Ahora bien, estudiaremos una forma explícita del funcional E. Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, acotado, con frontera $\partial\Omega$ suave y

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R},$$

una función de clase C^2. A L se le conoce en la literatura como *lagrangiano*. Podemos pensar en L como una función que depende de tres variables multidimensionales, es decir,

$$L = L(x, z, p) = L(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$$

con $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$. De igual manera, separamos en estas variables al gradiente de L como sigue

$$\nabla L = (\nabla_x L, \nabla_z L, \nabla_p L),$$

donde $\nabla_x L = (L_{x_1} \ldots, L_{x_n})$, $\nabla_p L = (L_{p_1} \ldots, L_{p_n})$ y $\nabla_z L = L_z$. De forma explícita, la forma que consideraremos del funcional E es

$$E(u(x)) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, \mathrm{d}x,$$

para una función $u(x) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ suave que satisface $u = g \quad \text{en } \partial\Omega$.

Supongamos que u es un mínimo de E. Calculando la derivada direccional de E e igualando a cero, veremos que u cumple con una ecuación diferencial.

Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ y consideremos la función de variable real

$$e(t) = E[u + t\phi], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como u es mínimo de E y $u + t\phi = u = g$ en $\partial\Omega$, $e(t)$ tiene un mínimo en $t = 0$ y $e'(0) = 0$, $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

A la expresión $e'(t)$ se le conoce como *la primera variación*. De forma explícita,

$$\begin{aligned} e'(t) &= \left(\int_\Omega L(x, u + t\phi, \nabla u + t\nabla\phi)\, \mathrm{d}x \right)' = \int_\Omega \left(L(x, u + t\phi, \nabla u + t\nabla\phi) \right)' \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega L_z(x, u + t\phi, \nabla u + t\nabla\phi)\phi + \sum_{i=1}^n L_{p_i}(x, u + t\phi, \nabla u + t\nabla\phi)\phi_{x_i}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

El intercambio de derivada por integral en la segunda igualdad se debe a que L es uniformemente continua en $\overline{\Omega}$ y la composición de funciones continuas es continua. La tercera igualdad, se debe a la regla de la cadena usual. Por hipótesis, u es un mínimo para $t = 0$, entonces

$$0 = e'(0) = \int_\Omega L_z(x, u, \nabla u)\phi + \sum_{i=1}^n L_{p_i}(x, u, \nabla u)\phi_{x_i}\, \mathrm{d}x.$$

Ahora, si integramos por partes el segundo término de la integral, como ϕ tiene soporte compacto, los términos de frontera son igual a cero y por tanto

$$\int_\Omega \left(L_z(x, u, \nabla u) + \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(x, u, \nabla u))_{x_i} \right) \phi\, \mathrm{d}x = 0.$$

Como la última igualdad es válida para cualquier $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, podemos concluir que u satisface

$$L_z(x, u, \nabla u) + \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(x, u, \nabla u))_{x_i} = 0, \tag{1.7}$$

la ecuación de Euler-Lagrange (E-L) asociada a E.

Observación 1.1.2 Como u satisface (1.7), entonces E tiene un punto crítico en u. El proceso anterior puede ser efectuado en orden inverso, es decir, multiplicando la EDP por una función de prueba, integrando sobre todo el dominio e integrando por partes, la función resultante es la derivada de un funcional. Como consecuencia de lo anterior, basta suponer que u es un punto crítico.

Podemos mencionar que no toda EDP es la ecuación de E-L de un funcional E. Un ejemplo de lo anterior es

$$u_t - \Delta u = f(t, u, \nabla u).$$

Este hecho es el análogo al caso de los campos gradientes, es decir, no todo campo g es tal que $g = \nabla f$ para alguna f.

Ahora daremos ejemplos de ecuaciones de E-L:

Ejemplo 1.1.1 Los siguientes ejemplos son clásicos dentro de la teoría:

1. **Principio de Dirichlet Generalizado** Consideremos

$$L(x, z, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x) p_i p_j - z f(x),$$

con $a^{ij} = a^{ji}$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Entonces $L_{p_i} = \sum_{j=1}^{n} a^{ij} p_j$ para valores de $j = 1, \ldots, n$ y $L_z = -f$. Por lo tanto el funcional asociado es

$$E[u] = \int_\Omega \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - uf \, \mathrm{d}x$$

y la ecuación de E-L es

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij} u_{x_i}\right) x_j = f \quad \text{en } \Omega. \tag{1.8}$$

Por tanto, encontrar puntos críticos de E es equivalente a encontrar soluciones de la ecuación elíptica (1.8).

2. **Ecuación de Poisson No Lineal** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave, con primitiva $F(z) = \int_0^z f(y) \, \mathrm{d}y$. Consideremos el funcional

$$E[u] = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \, \mathrm{d}x,$$

entonces la ecuación de E-L asociada es

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } \Omega,$$

que es la ecuación de Poisson no lineal. De hecho, este ejemplo será de nuestro interés para el caso en el que $f = -\lambda u + |u|^{p-1}u$ con antiderivada $F = \frac{-\lambda}{2}u^2 + \frac{1}{1+p}|u|^{p+1}$. $\square$

Ejemplo 1.1.2 [Ecuación Parabólica Semilineal] Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} u_t + \lambda u - |u|^{p-1}u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0,x) = u_0 & \text{en} \quad \{t = 0\} \times \Omega. \end{cases}$$

A pesar de que la ecuación anterior no tiene estructura variacional, podemos hacer uso de métodos variacionales para dar información acerca de sus soluciones. Algunas razones por las cuales consideramos a la ecuación anterior son las siguientes:

(i) Si $u(t,x) = u(x)$, es decir, sólo depende de x, estamos en el caso del ejemplo anterior y por consiguiente, podemos usar métodos variacionales para estudiar la existencia de soluciones. A este tipo de soluciones se les conoce como *soluciones estacionarias.*

(ii) También podemos definir la energía de esta ecuación y es

$$E[u(x,t)] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 - F(u(x,t))\,\mathrm{d}x.$$

ésta última nos da mucha información sobre las soluciones de la EDP parabólica utilizando lo que conocemos como métodos de energía. De esto hablaremos en la siguiente sección y en el siguiente capítulo, el cual está dedicado a la existencia local y global de esta ecuación.

$\square$

Ahora bien, otra condición necesaria para determinar con qué tipo de punto crítico estamos trabajando es analizando el signo de la segunda derivada en una vecindad de este punto. En nuestro caso le llamaremos *segunda variación* y se define como $e''(0)$.

Recordemos que la segunda derivada nos da información de la geometría de la imagen de una función dependiendo del signo de esta última, es decir, mide la concavidad o convexidad local de la función. De igual forma podemos calcularla directamente como se hizo anteriormente y obtendríamos que

$$\begin{aligned} e''(0) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(x,u,\nabla u)\phi_{x_i}\phi_{x_j} + 2\sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(x,u,\nabla u)\phi_{x_i}\phi \\ &+ L_{zz}(x,u,\nabla u)\phi^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Si buscamos un mínimo, la condición necesaria para este caso es $e''(0) \geq 0$. A partir de esto, podemos deducir para $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(x,u,\nabla u)\phi_{x_i}\phi_{x_j} \geq 0,$$

conocida como la *condición de Legendre.*

Podemos notar que el vínculo entre la existencia de extremos y la convexidad del lagrangiano es fuerte, por consiguiente, necesitaremos de esta hipótesis para resolver nuestro problema principal. Para profundizar en esto se puede consultar [I02],[E02].

En general, es muy difícil mostrar la existencia de soluciones clásicas de una EDP, es decir, hallar una solución que cumpla la diferenciabilidad que “la ecuación pide ”, por ejemplo, para

$$-\Delta u + f = 0,$$

encontrar $u \in C^2$. En las siguientes secciones veremos cómo trabajar con la formulación débil de las EDP y desarrollaremos métodos para encontrar soluciones en espacios adecuados.

Para finalizar esta sección, deseamos hacer algunas observaciones de lo antes desarrollado:

Observación 1.1.3 Por el enfoque del presente trabajo, no mencionamos los demás casos en los cuales podemos hacer uso de la formulación variacional, estos son algunos:

1. Si $A[u] = 0$ es un sistema de EDP.
2. Si L depende del tiempo.
3. Si $L = L(t, x, x')$, con $t \in \mathbb{R}$, $x : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Si L depende de derivadas de orden más alto.

1.2. Métodos Directos

La idea principal de los métodos directos es cómo construir una sucesión minimizante para E (véase el teorema 1.2.2) y bajo que condiciones esta sucesión converge a un ínfimo.

Para empezar esta sección, presentemos un resultado que nos da una condición para la existencia de mínimos de un funcional.

Teorema 1.2.1 *Sea M un espacio topológico Hausdorff* [3] *y $E : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ satisface la condición de compacidad acotada, es decir, para cualquier $\alpha \in M$ el conjunto*

$$K_\alpha = \{u \in M \,|\, E(u) \leq \alpha\} \text{ es compacto.}$$

Entonces E está acotado inferiormemente en M y alcanza su ínfimo. La conclusión se mantiene válida si suponemos que cualquier subconjunto de nivel K_α es secuencialmente compacto.

Demostración. Véase [St90], pag. 3.

□

A partir del resultado anterior, abordaremos espacios con una estructura topológica menos general para obtener condiciones más fáciles de verificar.

Para continuar, necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.2.1 *Decimos que $E : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es semicontinua inferiormente si para todo $u \in M$, para todo $c \in \mathbb{R}$ con $c < E(u)$, existe una vecindad U de u tal que para toda $v \in U$, $c < E(v)$. Decimos que E es semicontinua superiormente si $-E$ es semicontinua inferiormente (s.i.).*

Ahora bien, si para toda sucesión $\{u\}_{j\in\mathbb{N}}$, $u \in M$ con $u_j \to u$, entonces

$$E(u) \leq \liminf E(u_j),$$

decimos que E es secuencialmente semicontinua inferiormente (s.s.i.). Si la convergencia de la sucesión es en la topología débil de M, decimos que E es semicontinua inferiormente débil (s.i.d) o es secuencialmente semicontinua inferiormente débil (s.s.i.d.).

[3] Recordemos que un espacio topológico Hausdorff M es aquel que para cualesquiera par de puntos distintos en M, siempre existen conjuntos abiertos disjuntos.

Estas nociones coinciden si M es un espacio métrico (véase [Jo05] pag 158.).

Notemos que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$M \setminus K_\alpha = U = \{u \in M \mid E(u) > \alpha\}$$

es abierto y por consiguiente, E es *(secuencialmente) semicontinua inferiormente*. De igual forma, si E es (secuencialmente) semicontinua inferiormente para $a \in \mathbb{R}$, entonces para $\alpha \leq a$, K_α es (secuencialmente) compacto, (véase [Jo05], pag. 158, 160).

Por lo anterior, podemos notar que el funcional E no necesita ser continuo. Por otro lado, verificar las condiciones del teorema (1.2.1) no es sencillo. Esto último depende de la estructura de M. Si M tiene estructura topológica más rica, podemos encontrar condiciones necesarias más sencillas de verificar.

Antes de dar un resultado en esta dirección, i.e., $M = B$, con B un espacio de Banach reflexivo, necesitamos dar otra definición:

Definición 1.2.2 *Sea B un espacio de Banach y $E : B \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un funcional. Decimos que E es coercivo si $E(u) \to \infty$ cuando $\|u\| \to \infty$.*

Si $B = \mathbb{R}$ y $E(x) = x^2$, es fácil ver que $E(x) \to \infty$ si $|x| \to \infty$. Por lo tanto E es coerciva. Más aún, E tiene un mínimo global en $x = 0$.

Este ejemplo muestra que la condición de coercividad nos garantiza que las sucesiones minimizantes estén acotadas y nos da una noción de la geometría de un mínimo, en particular, cuando E es un funcional.

Ahora bien, decimos que un conjunto es débilmente cerrado si éste es cerrado en la topología débil de B. Con este hecho, podemos enunciar un resultado que nos da condiciones más fáciles de verificar para asegurar la existencia de mínimos :

Teorema 1.2.2 *Sea B un espacio de Banach reflexivo y $C \subset B$ un subconjunto débilmente cerrado. Si E es coercivo y s.i.d (s.s.i.d.) en C, entonces E está acotado inferiormente y alcanza su ínfimo en C.*

Demostración. Sea $\alpha_0 = \operatorname{ínf}_C E$ y sea u_n una sucesión en C tal que $E(u_m) \to \alpha_0$ (a este tipo de sucesiones les llamaremos *minimizantes*). Por coercividad, la sucesión está acotada en B, y por reflexividad, usando el teorema de Eberlein-Šmulian (véase [St90] pag. 4), podemos suponer que la sucesión $u_m \rightharpoonup u$ converge débilmente para algún $u \in B$. Como C es débilmente cerrado, $u \in C$ y E s.i.d tenemos que

$$E(u) \leq \liminf_{m\to\infty} E(u_m) = \alpha_0.$$

□

Ejemplo 1.2.1 Si B es un espacio de Banach y $\|\cdot\|$ es su norma, entonces el funcional definido por

$$E(u) = \|u\|\,,$$

es s.s.i.d.. En particular, este hecho es de nuestro interés, ya que si consideramos $B = W^{k,p}(\Omega)$ el espacio de Sobolev con $1 < p < \infty$ y $0 \leq k \leq \infty$, los funcionales pueden depender de la norma de este espacio.

Para ilustrar de forma más detallada el resultado anterior, presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.2 [Partición Mínima de Hipersuperficies] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Denotamos a $BV(\Omega)$ al subespacio de funciones en $L^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |Du| = \sup\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n u\nabla g_i \,\mathrm{d}x \;|\; g \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\},\ |g| \leq 1\right\}$$

sea finito, con $g = (g_1, \ldots, g_n)$. Definimos la norma en este espacio como

$$\|u\|_{BV} = \|u\| + \int_\Omega |Du|.$$

Entonces $BV(\Omega)$ es un espacio de Banach con esta norma, encajado de forma compacta en $L^1(\Omega)$ si Ω es acotado y suave (véase la [St90]). Más aún, se puede mostrar que $\int_\Omega |Du|$ es s.i. con respecto a la convergencia en L^1.

Si $G \subset \mathbb{R}^n$, denotamos a χ_G como la función característica de G y a $\mathcal{L}^n$ la medida de Lebesgue n-dimensional. Deseamos mostrar que existe un subconjunto $G \subset \Omega$ que cumple con

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\Omega \setminus G) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\Omega)$$

y tal que el perímetro con respecto a Ω,

$$P(G,\Omega) = \int_\Omega |D\chi_G|$$

sea mínimo entre todos los conjuntos que cumplen con la propiedad antes mencionada sobre su volumen. Consideremos

$$M = \{\chi_G \,|\, G \text{ es medible, } \mathcal{L}(G) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\Omega)\},$$

con la topología de L^1. El funcional objetivo a minimizar es

$$E(u) = \int_\Omega |Du|.$$

Como $G \subset \Omega$ es medible $\Rightarrow \|\chi_G\|_{L^1} = \mathcal{L}(G) \leq \mathcal{L}(\Omega)$. La propiedad de coercividad de E que necesitamos en M con respecto a la norma de BV se sigue de lo anteior. Por compacidad del encaje antes mencionado, los conjuntos acotados de BV son relativamente compactos en L^1 y como M es cerrado en L^1, por s.i. de E en L^1, los subconjuntos de nivel de E son compactos.

Podemos interpretar geométricamente al soporte de la distribución $D\chi_G$ como la mínima hipersuperficie que bisecta Ω en dos regiones de volumen igual.

$\square$

Así como en la sección anterior, los funcionales E que consideraremos tendrán una estructura muy particular, ésto es

$$E(u) = \int_\Omega L(x,u,\nabla u)\,\mathrm{d}x, \tag{1.9}$$

con $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$. Como vimos en la sección anterior, varias de las condiciones necesarias y suficientes para encontrar mínimos dependen de las propiedades de L. En particular, el hecho de que E sea s.i. puede ser obtenido a partir de L. De hecho, queremos mostrar un resultado en esta dirección. Para ésto, necesitamos dar la siguiente definición:

Definición 1.2.3 *Si* $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ *un espacio de medida y* f *es una función* $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* *(i) para casi toda $x \in \Omega$, $y \mapsto f(x, y)$ es continua,*

(ii) para toda $y \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x, y)$ es medible,

entonces decimos que f es una función de Carathéodory.

Observación 1.2.1 Podemos ver que si f es una función de Carathéodory y u solamente es medible, entonces $f(x, u)$ es medible. De hecho, existe una sucesión de funciones simples u_n tal que $u_n \to u$ casi en todas partes, $f(x, u_n)$ es medible. Además, $f(x, u_n) \to f(x, u)$ casi en todas partes, con $f(x, u)$ medible.

Recordemos que un conjunto abierto Ω' está fuertemente contenido en Ω abierto, denotado por $\Omega' \subset\subset \Omega$, si existe V compacto con $\Omega' \subset V \subset \Omega$.

Teorema 1.2.3 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio y $L : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que cumple las siguientes propiedades:*

(i) Existe $\phi \in L^1(\Omega)$ tal que $L(x, u, p) \geq \phi(x)$ para casi toda x, u, p,

(ii) $L(x, u, \cdot)$ es convexa en p para casi toda x, u.

Entonces, si $u_m, u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ son tales que $u_m \to u$ fuerte en $L^1(\Omega')$ y $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ débil en $L^1(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ tenemos que

$$E(u) \leq \liminf_{m \to \infty} E(u_m),$$

para E dada por (1.9)

Antes de dar una demostración de este hecho, necesitamos los siguientes resultados:

Lema 1.2.1 *Con las hipótesis del teorema anterior, tenemos que*

$$L(x, u_m(x), \nabla u_m(x)) - L(x, u(x), \nabla u_m(x)) \to 0$$

en medida, localmente en Ω.

Demostración. Véase [St90] pag. 11.

□

Teorema 1.2.4 *Sea M un espacio localmente convexo y métrico. Si x_n es una sucesión en M tal que converge débilmente para alguna $x \in M$, entonces existe una sucesión y_i en M tal que cada y_i es una combinación convexa de un número finito de x_n y $y_i \to x$.*

Demostración. Véase [Ru91] pag. 67.

□

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $L \geq 0$, ya que podemos reemplazar a L por $L - \phi$. También podemos suponer que $E(u_m)$ es finita y convergente. Dado $\Omega' \subset\subset \Omega$, por convergencia débil local en L^1 de $\nabla u_m \to \nabla u$, para cualquier $m_0 \in \mathbb{N}$ existe una sucesión de combinaciones lineales convexa de $(P^l)_{l \geq m_0}$

$$P^l = \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l \nabla u_m,\ 0 \leq \alpha_m^l \leq 1, \quad \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l = 1,\ l \geq m_0,$$

tal que $P^l \to \nabla u$ fuertemente en $L^1(\Omega')$ y puntualmente casi donde sea si $l \to \infty$ por el teorema (1.2.4). Por convexidad, para cualquier m_0, con $l \geq m_0$ y para casi toda $x \in \Omega'$

$$\begin{aligned} L(x, u(x), P^l(x)) &= L\left(x, u(x), \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l \nabla u_m(x)\right) \\ &\leq \sum_{m=m_0}^{l} \alpha_m^l L(x, u(x), \nabla u_m(x)). \end{aligned}$$

Si integramos la desigualdad anterior sobre todo Ω' y tomamos el límite $l \to \infty$, por el lema de Fatou tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} L(x, u(x), \nabla u(x))\, \mathrm{d}x &\leq \liminf_{l \to \infty} \int_{\Omega'} L(x, u(x), P^l(x))\, \mathrm{d}x \\ &\leq \sup_{m \geq m_0} \int_{\Omega'} L(x, u(x), \nabla u_m(x))\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Como la desigualdad anterior es para cualquier m_0, obtenemos que

$$\int_{\Omega'} L(x, u(x), \nabla u(x))\, \mathrm{d}x \leq \limsup_{m \to \infty} \int_{\Omega'} L(x, u(x), \nabla u_m(x))\, \mathrm{d}x,$$

para cualquier $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Por el lema 1.2.1, tenemos que para cualquier $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\epsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$, existe una $m \geq m_0$ y un conjunto $\Omega'_{\epsilon,m} \subset \Omega'$, con $\mathcal{L}(\Omega'_{\epsilon,m}) < \epsilon$ tal que

$$|L(x, u_m(x), \nabla u_m(x)) - L(x, u(x), \nabla u_m(x))| < \epsilon \tag{1.10}$$

para toda $x \in \Omega' \setminus \Omega'_{\epsilon,m}$. Si consideramos $\epsilon = \epsilon_m$ con $\epsilon_m = 2^{-m}$, y bajo una subsucesión, si fuera necesario, podemos suponer que existe un conjunto $\Omega'_{\epsilon_m,m} \subset \Omega'$, tal que para cada m con $\mathcal{L}(\Omega'_{\epsilon_m,m}) < \epsilon_m$ se cumple (1.10) para toda $x \in \Omega' \setminus \Omega'_{\epsilon_m,m}$.

Dada $\epsilon > 0$, podemos escoger $m_0 = m_0(\epsilon) > |\log_2 \epsilon|$, $\Omega'_\epsilon = \cup_{m \geq m_0} \Omega'_{\epsilon_m,m}$, con $\mathcal{L}(\Omega'_\epsilon) < \epsilon$ y con la desigualdad (1.10) cumpliéndose para toda $x \in \Omega' \setminus \Omega'_\epsilon$ y toda $m \geq m_0$. Por construcción, si $\epsilon < \delta$ tenemos que $x \in \Omega'_\epsilon \subset \Omega'_\delta$.

Si cubrimos Ω por conjuntos acotados y disjuntos $\Omega^{(k)} \subset\subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ y dada $\epsilon > 0$, podemos escoger una sucesión $\epsilon^{(k)} > 0$, tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(\Omega^{(k)}) \epsilon^{(k)} \leq \epsilon.$$

Tomando una subsucesión, si fuera necesario, para cada $\Omega^{(k)}$ y $\epsilon^{(k)}$ podemos escoger $m_0^{(k)}$ y $\Omega_\epsilon^{(k)} \subset \Omega^{(k)}$ tal que $\mathcal{L}(\Omega_\epsilon^{(k)}) < \epsilon^{(k)}$ y

$$|L(x, u_m(x), \nabla u_m(x)) - L(x, u(x), \nabla u_m(x))| < \epsilon^{(k)}$$

uniformemente para $\Omega^{(k)} \setminus \Omega_\epsilon^{(k)}$, $m \geq m_0$. Más aún, podemos suponer que $\Omega_\epsilon^{(k)} \subset \Omega_\delta^{(k)}$, si $\epsilon < \delta$, $\forall k$. Entonces para cualquier $K \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $\Omega^K = \cup_{k=1}^K \Omega^{(k)}$, $\Omega_\epsilon^K = \cup_{k=1}^K \Omega_\epsilon^{(k)}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^K \setminus \Omega_\epsilon^K} L(x, u, \nabla u) \,\mathrm{d}x &\leq \limsup_{m \to \infty} \int_{\Omega^K \setminus \Omega_\epsilon^K} L(x, u, \nabla u_m) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \limsup_{m \to \infty} \int_{\Omega^K \setminus \Omega_\epsilon^K} L(x, u_m, \nabla u_m) \,\mathrm{d}x + \epsilon \\
&\leq \limsup_{m \to \infty} E(u_m) + \epsilon = \liminf_{m \to \infty} E(u_m) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Ahora, si $\epsilon \to 0$, tenemos que $K \to \infty$. Como $L \geq 0$ y $\Omega^K \setminus \Omega_\epsilon^K$ es una sucesión creciente de conjuntos si $\epsilon \downarrow 0$ o $K \uparrow \infty$, por el teorema de Beppo-Levi obtenemos el resultado.

$\square$

En general, hay problemas variacionales en los cuales no podemos aplicar los métodos directos porque el funcional no es coercivo. Pero a pesar de este inconveniente, existen casos en los cuales podemos reformular nuestro problema de forma adecuada y obtener un funcional coercivo.

Ejemplo 1.2.3 [Ecuaciones Semilineales] Consideremos la siguiente ecuación semilineal elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u - u|u|^{p-2} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y suave, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p > 2$. Para $n \geq 3$ suponemos que $p < p^* = \frac{2n}{n-2}$. Sean $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ los valores propios del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

Podemos mostrar que si $\lambda > -\lambda_1$, este problema tiene una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ positiva. Notemos que la ecuación anterior es la ecuación de E-L del funcional

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2) - \frac{1}{p}|u|^p \, \mathrm{d}x$$

en H_0^1. El funcional no es acotado ni superior ni inferiormente, ya que tiene un comportamiento polinomial del tipo $bx^2 - x^p$ y para valores muy grandes de x, $E(u) \approx \|u\|_{L^p}^p$.

Por otro lado, por el teorema de encaje de Sobolev, tenemos que la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua y compacta, para $p < p^*$ si $n \geq 3$ y $p < \infty$ si $n = 2$. Esta condición será de mucha utilidad para plantear el siguiente problema equivalente y poder utilizar el teorema 1.2.2.

Consideremos el funcional

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2) \, \mathrm{d}x$$

en $H_0^1(\Omega)$, restringido al conjunto

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x = 1\}.$$

Por el teorema de encaje antes mencionado, podemos concluir que M es débilmente cerrado en $H_0^1(\Omega)$. Recordemos que por la fórmula de Rayleigh para el problema de valores propios (véase [E02] pag. 336), tenemos que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x}.$$

De lo anterior, obtenemos la siguiente desigualdad

$$E(u) \geq \frac{1}{2} \text{máx}\{1, 1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\} \|u\|_{H_0^1}, \tag{1.11}$$

de la cual la coercividad para E se sigue inmediatamente. La s.i.d de E se sigue del teorema de Rellich y de la s.i.d. de la norma de H_0^1. Entonces podemos asegurar que E alcanza su ínfimo para $u^* \in M$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u^* \geq 0$, ya que $E(u) = E(|u|)$. Notemos que $E \in C^1$ en H_0^1 con derivada direccional

$$\langle \nabla E(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + \lambda uv \, \mathrm{d}x$$

en dirección v. Además, si

$$G(u) = \int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x - 1,$$

$G : H_0^1 \to \mathbb{R}$ también es continuamente diferenciable con

$$\langle \nabla G(u), v \rangle = p \int_\Omega u|u|^{p-2} v \, \mathrm{d}x$$

y $\langle \nabla G(u), u \rangle = p \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, el conjunto $M = G^{-1}(0)$ es una subvariedad C^1 de H_0^1.

Ahora bien, por la regla de los multiplicadores de Lagrange ([Jo05], [I02]), existe un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \nabla E(u), v \rangle + \mu \langle \nabla G(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + \lambda uv - \mu u|u|^{p-2} v \, \mathrm{d}x = 0,$$

$\forall v \in H_0^1$. Si $v = u^*$ tenemos que

$$2E(u^*) = \int_\Omega |\nabla u^*|^2 + \lambda |u^*|^2 \, \mathrm{d}x = \mu \int_\Omega |u^*|^p \, \mathrm{d}x.$$

Como $u^* \in M$, entonces $u^* \not\equiv 0$ y por tanto, $\mu > 0$ por (1.11). Si reescalamos la solución por $u = \mu^{\frac{1}{p-2}} u^*$, entonces tendríamos

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + \lambda uv - u|u|^{p-2} v \, \mathrm{d}x = 0,$$

que es la ecuación de E-L asociada a J.

De lo anterior, podemos notar que $u \geq 0$ en el sentido débil. Si usamos el resultado de regularidad para ecuaciones semilineales (véase [St90]) y el principio fuerte del máximo para operadores elípticos (véase [St90], [E02]), obtenemos el resultado.

□

El ejemplo anterior es un caso particular de un problema restringido. Queremos destacar que se agrega artificialmente la restricción para mostrar la existencia de soluciones con los resultados antes vistos. De hecho, no hay una forma sistemática de ralizar lo anterior.

Más aún, este ejemplo es de nuestro interés porque abordaremos un problema de formación de patrones para el caso parabólico asociado a este. En otras palabras, queremos analizar el comportamiento de las soluciones haciendo variar p muy cerca y por debajo del exponente p^*.

Por otro lado, la estructura del dominio también influye, por ejemplo, si el dominio es simétrico o estrictamente estrellado. En las siguientes secciones aclararemos esta situación.

Ahora presentaremos la forma general de la ecuación antes tratada, ésta es

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u & = & u_0 & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.12}$$

con $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una subsolución (o supersolución) débil del sistema anterior si cumple con $u \leq (\geq) u_0$ c.s. en $\partial\Omega$ y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)\phi \,\mathrm{d}x \leq (\geq) 0 \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega),\ \phi \geq 0.$$

Podemos interpretar una subsolución (o supersolución) como una aproximación de la solución por abajo (o por arriba) de la solución. La razón de lo anterior, es que en general no podemos aplicar la misma técnica que en el ejemplo 1.2.3 para todos los casos. Por esta razón, daremos el siguiente resultado de existencia de soluciones por medio de esta aproximación:

Teorema 1.2.5 *Supongamos que* $\underline{u}, \overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ *son una subsolución y una supersolución respectivamente de (1.12). Supongamos que existen constantes* $\underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R}$ *tal que* $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c} < \infty$ *c.s. en* Ω*. Entonces existe una solución débil* $u \in H^1(\Omega)$ *de (1.12), con* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *casi donde sea en* Ω*.*

Demostración. Véase [St90] pags 17,18.

□

La idea de la demostración es aproximar la solución tanto por arriba como por abajo y usar una restricción M adecuada como en el ejemplo 1.2.3. La dificultad que tiene el trabajar directamente con el funcional asociado, es que no se puede verificar directamente que E es coercivo en H_0^1.

Ahora, daremos un ejemplo para ilustrar el teorema anterior. Éste nos servirá para motivar un resultado que presentaremos más adelante.

Ejemplo 1.2.4 Sea $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $a > 0$. Además, supongamos que $a(x) \to a_\infty > 0$ si $|x| \to \infty$. Nuestro problema consiste en encontrar soluciones positivas de la ecuación

$$-\Delta u + a(x)u - u|u|^{p-2} = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

tal que $u(x) \to 0$ si $|x| \to \infty$, donde $p > 2$ para $n = 1, 2$. Si $n \geq 3$ requerimos de la restricción $p < \frac{2n}{n-2}$. La condición anterior nos asegura que el encaje

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sea compacto para cualquier $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Observación 1.2.2 *Si en particular,* $g(x,u) = a(x)u - u|u|^{p-2}$*,* Ω *un dominio suave y acotado de* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 3$*,* $p = \frac{2n}{n-2}$*,* $1 \leq a(x) \leq A < \infty$ *uniformemente en* Ω *y* $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ *con* $u_0 \geq 1$ *en la frontera, tenemos que* $\underline{u} \equiv 1$ *es subsolución y* $\overline{u} \equiv c > 1$ *es supersolución para c suficientemente grande. Por lo tanto, la ecuación admite una solución positiva mayor que uno.*

El funcional asociado a la ecuación anterior está dado por

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + a(x)|u|^2 \, \mathrm{d}x$$

en $H^1(\mathbb{R}^n)$, restringido a la esfera unitaria

$$M = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, \mathrm{d}x = 1\}$$

en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Más aún, si $a(x) \equiv a_\infty$, E es invariate bajo traslaciones

$$u \mapsto u_{x_0}(x) = u(x - x_0).$$

En general, para cualquier $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, después de un cambio de variable

$$E(u_{x_0}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + a(x + x_0)|u|^2 \,\mathrm{d}x \to \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + a_\infty |u|^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= E^\infty(u)$$

si $|x_0| \to \infty$.

A continuación damos el resultado correspondiente a nuestro problema:

Teorema 1.2.6 *Supongamos que*

$$I = \inf_M E < \inf_M E^\infty = I^\infty, \tag{1.14}$$

entonces existe una solución positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación (1.13). De hecho, la condición (1.14) es necesaria y suficiente para la compacidad relativa de todas las sucesiones minimizantes de E en M.

Demostración. Para ver que (1.14) es necesaria, notemos que si $I \leq I^\infty$ y u_m es sucesión minimizante para E^∞, entonces $\tilde{u}_m = u_m(\cdot + x_m)$ también lo es, para cualquier sucesión $x_m \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $|x_m|$ suficientemente grande tal que

$$|E(\tilde{u}_m) - E\infty(\tilde{u}_m)| \leq \frac{1}{m}.$$

De hecho, $\tilde{u}_m$ también es sucesión minimizante para E. Además, se puede mostrar que $\tilde{u}_m \to 0$ localmente en L^2 y por tanto, $\tilde{u}_m$ no puede ser relativamente compacta. Notemos que el argumento anterior muestra que la desigualdad $I \leq I^\infty$ siempre es verdadera para cualquier función a.

Para mostrar la existencia de una solución positiva, se sigue de la misma manera que en el ejemplo 1.2.3. Para mostrar la suficiencia, consideremos u_m una sucesión minimizante para E en M tal que $E(u_m) \to I$. Podemos suponer que $u_m \rightharpoonup u$ débilmente en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces, tenemos que

$$\|u_m\|_{H^1} \leq cE(u_m) \leq C < \infty,$$

y por tanto, también podemos suponer que $u_m \rightharpoonup u$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y puntualmente casi donde sea. Consideremos $u_m = v_m + u$ y observemos que por el teorema de Vitali

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p - |u_m - u|^p \,\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 \frac{d}{dt}|u_m - tu|^p \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 u(u_m - tu)|u_m - tu|^{p-2} u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 u(u - tu)|u - tu|^{p-2} u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.15}$$

Como $u \in M$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |v_m|^p \,\mathrm{d}x \to 1.$$

De forma análoga, podemos llegar a que

$$\begin{aligned} E(u_m) &= E(u + v_m) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla v_m + |\nabla v_m|^2 \\ &+ a(x)\left(|u|^2 + 2uv + |v_m|^2\right) \,\mathrm{d}x \\ &= E(u) + E(v_m) + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v_m a(x) u v_m \,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.16}$$

y por convergencia débil, el último término converge a cero en $H^1(\mathbb{R}^n)$ ya que $v_m = u_m - u \rightharpoonup 0$. Por otro lado, para cualquier $\epsilon > 0$, consideremos

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |a(x) - a_\infty| \geq \epsilon\} \subset\subset \mathbb{R}^n,$$

como $v_m \to 0$ localmente en L^2, la integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a_\infty)|v_m|^2 &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |v_m|^2 + \sup_{\mathbb{R}^n} |a(x)| \int_{\Omega_\epsilon} |v_m|^2 \\ &\leq c\epsilon + o(1). \end{aligned}$$

Por lo anterior, si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeña y consideramos $m \geq m_0(\epsilon)$ suficientemente grande, obtenemos

$$E(u_m) = e(u) + E^\infty(v_m) + o(1).$$

Por homogeneidad, si denotamos a $\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned} E(u) &= \lambda^{\frac{2}{p}} E\left(\lambda^{-\frac{1}{p}} u\right) \geq \lambda^{\frac{2}{p}} I, \quad \text{si } \lambda > 0, \\ E^\infty(v_m) &= (1-\lambda)^{\frac{2}{p}} E^\infty\left((1-\lambda)^{-\frac{1}{p}} v_m\right) \geq (1-\lambda)^{\frac{2}{p}} I^\infty + o(1), \quad \text{si } \lambda < 1. \end{aligned}$$

Entonces para $\lambda \in [0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned} I = E(u_m) + o(1) &= E(u) + E^{\infty}(v_m) + o(1) \geq \\ \lambda^{\frac{2}{p}} I + (1-\lambda)^{\frac{2}{p}} I^{\infty} + o(1) &\geq \left(\lambda^{\frac{2}{p}} + (1-\lambda)^{\frac{2}{p}}\right) I + o(1). \end{aligned}$$

Como $p > 2$, entonces $\lambda \in \{0, 1\}$. Si $\lambda = 0$, tenemos que

$$I \geq I^{\infty} + o(1) > I$$

para m suficientemente grande, y por tanto una contradicción. Podemos concluir que $\lambda = 1$, es decir, $u_m \to u$ en L^p, y $u \in M$. Por convexidad de E

$$E(u) \leq \liminf_{m\to\infty} E(u_m) = I,$$

y u minimiza E en M, y $E(u_m) \to E(u)$. Ahora, por (1.16)

$$\|u_m - u\|_{H^1}^2 \leq c(E(u_m - u)) = c(E(u_m) - E(u)) + o(1)$$

y $u_m \to u$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

El ejemplo anterior nos da las ideas principales para poder trabajar cierto tipo de problemas variacionales con restricciones. De hecho, usaremos estimaciones similares al final del capítulo. En general, se pueden trabajar este tipo de problemas de una forma mas sistemática usando el siguiente resultado:

Teorema 1.2.7 (Lema de Concentración-Compacidad) *Supongamos que μ_m es una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\mu_m \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\mu_m = 1$. Entonces existe una subsucesión μ_m donde solo se da una de las siguientes condiciones:*

(i) (Compacidad) Existe una sucesión $x_m \subset \mathbb{R}^n$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un radio $R > 0$ con la propiedad

$$\int_{B_R(x_m)} \mathrm{d}\mu_m \geq 1 - \epsilon$$

para toda m.

(ii) (Desvanecimiento) Para toda $R > 0$, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B_R(x)} \mathrm{d}\mu_m \right) = 0.$$

(iii) (Dicotomía) Existe un número λ, con $0 < \lambda < 1$, tal que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $R > 0$ y una sucesión con la siguiente propiedad:

Dada $R' > R$ existen medidas no negativas μ_m^1, μ_m^2 tales que

$$0 \leq \mu_m^1 + \mu_m^2 \leq \mu_m,$$

$$supp(\mu_m^1) \subset B_R(x_m), \qquad supp(\mu_m^2) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{R'}(x_m),$$

$$\limsup_{m\to\infty} \left(\left| \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\mu_m^1 \right| + \left| (1-\lambda) - \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\mu_m^2 \right| \right) \leq \epsilon$$

Demostración. Véase [St90] pags 39-41.

□

La relación entre el resultado y el ejemplo anterior es que podemos considerar $\mu_m = |u_m|^p \,\mathrm{d}x$, $m \in \mathbb{N}$. La dicotomía fue hecha de forma explícita en (1.15). A pesar de que no usaremos el resultado anterior de forma explícita, es importante señalar que se utiliza para mostrar la existencia de soluciones en el caso crítico $p = p^*$.

Otro problema de nuestro interés es el encaje de Sobolev en dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. De forma más explícita, veremos cómo se relaciona este problema con un problema variacional.

Consideremos $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$, $p \geq 1$, con $kp < n$ y sea

$$\|u\|_{D^{k,p}}^p = \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega |\nabla^\alpha u|^p \,\mathrm{d}x,$$

donde $D^{k,p}(\Omega)$ es la completación de $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma anterior. Por los teoremas de encaje de Sobolev, $D^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ y existe una constante $S(k,n,p) = S$ tal que

$$S \|u\|_{L^q}^p \leq \|u\|_{D^{k,p}}^p, \quad \text{para toda } u \in D^{k,p}(\Omega).$$

Ahora bien, queremos ver cómo encontrar S máxima usando el principio de concentración-compacidad. Notemos que este problema está relacionado con el ejemplo anterior, vía los multiplicadores de Lagrange. Por lo tanto, lo que abordaremos a continuación será de gran utilidad en la siguiente sección y en el último capítulo del presente trabajo. Empecemos mostrando una propiedad del encaje:

Por invariancia de las normas en $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ y en $L^q(\mathbb{R}^n)$ bajo traslaciones y escalamientos

$$u \mapsto u_R(x) = R^{-n/q} u(x/R), \tag{1.17}$$

la constante de Sobolev S es independiente de Ω. Para mostrar lo anterior, notemos que para cualquier dominio Ω, con $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y $u \equiv 0$ fuera de Ω, $C_0^\infty(\Omega)$ es subconjunto de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Análogamente, $D^{k,p}(\Omega) \subset D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Por tanto, tenemos que

$$S(\Omega) = \text{ínf}\{\|u\|^p_{D^{k,p}} \mid u \in D^{k,p}(\Omega),\ \|u\|_{L^q}\} \geq S(\mathbb{R}^n).$$

Por otro lado, si $u_m \in D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión minimizante para $S(\mathbb{R}^n)$, por densidad de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ podemos suponer que $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si hacemos una traslación, podemos considerar que $0 \in \Omega$. Por el escalamiento antes presentado, si R_m es suficientemente pequeño, podemos considerar $v_m = (u_m)_{R_m} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nuevamente, por invariancia de las normas bajo el escalamiento tenemos que

$$S(\Omega) \leq \liminf_{m\to\infty} \|v_m\|^p_{D^{k,p}} = S(\mathbb{R}^n),$$

y $S(\Omega) = S(\mathbb{R}^n) = S$.

Teorema 1.2.8 *Sea $k \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $kp < n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Supongamos que $\{u_m\}$ es una sucesión minimizante de S en $D^{k,p} = D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ con $\|u_m\|_{L^q} = 1$. Entonces $\{u_m\}$ es relativamente compacta en $D^{k,p}$ (módulo traslación y dilatación).*

Demostración. Escojamos $y_m \in \mathbb{R}^n$, $Y_m > 0$ tal que la sucesión

$$v_m(x) = Y_m^{-n/q} u_m\left(\frac{x - y_m}{Y_m}\right)$$

cumpla con

$$Q_m(1) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{B_1(x)} |v_m|^q \,\mathrm{d}x = \int_{B_1(0)} |v_m|^q \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \tag{1.18}$$

Como $p > 1$ podemos suponer que $v_m \rightharpoonup v$ converge débilmente en $L^q(\mathbb{R}^n)$y en $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos las familias de medidas

$$\mu_m = |\nabla^k v_m|^p \mathrm{d}x, \quad \nu_m = |v_m|^q \mathrm{d}x$$

y apliquemos el lema de concentración-compacidad a ν_m. Notemos que por la normalización, $\nu_m \neq 0$ y la condición (ii) queda descartada. Si tuviéramos la dicotomía, es decir, si existiera $\lambda \in (0,1)$ y $\epsilon > 0$, estos números determinan una $R > 0$, una sucesión x_m y medidas ν_m^1, ν_m^2, con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} & 0 \leq \nu_m^1 + \nu_m^2 \leq \nu_m, \\ & supp(\nu_m^1) \subset B_R(x_m), \qquad supp(\nu_m^2) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(x_m), \end{aligned}$$

$$\limsup_{m\to\infty} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^1 - \lambda \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^2 - (1-\lambda) \right| \right) \leq \epsilon.$$

Escojamos una sucesión $\epsilon_m \to 0$ y $R_m > 0$ tales que (bajo una subsucesión ν_m si fuera necesario)

$$supp(\nu_m^1) \subset B_R(x_m), \qquad supp(\nu_m^2) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(x_m),$$

$$\limsup_{m\to\infty} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^1 - \lambda \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^2 - (1-\lambda) \right| \right) = 0.$$

De hecho, por el mismo lema, podemos suponer que $R_m \to \infty$, si $m \to \infty$. Sea $\phi \in C_0^\infty(B_2(0))$ tal que $\phi \equiv 1$ en $B_1(0)$ y $\phi_m(x) = \phi\left(\frac{x-x_m}{R-}\right)$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^k v_m|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^k (v_m \phi_m)|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^k (v_m(1-\phi_m))|^p \,\mathrm{d}x + \delta_m,$$

ya que $v_m = v_m\phi_m + v_m(1-\phi_m)$ y δ_m puede ser estimado por

$$\delta_m \geq -C \sum_{l<k} \int_{B_{2R_m}(x_m)\setminus B_{R_m}(x_m)} |\nabla^l v_m|^p |\nabla^{k-l}\phi_m|^p \,\mathrm{d}x.$$

La desigualdad anterior se obtiene usando que $0 \leq \phi \leq 1$ y $p > 1$. Si $A_m = B_{2R}(x_m)\setminus B_R(x_m)$, podemos realizar la estimación $|\nabla^{k-l}\phi_m| \leq CR_m^{l-k}$ por interpolación y obtener la siguiente cota

$$\begin{aligned} \left\| |\nabla^l v_m| |\nabla^{k-l}\phi_m| \right\|_{L^p(A_m)} &\leq CR_m^{l-k} \left\| \nabla^l v_m \right\|_{L^p(A_m)} \leq \\ CK\gamma \left\| \nabla^k v_m \right\|_{L^p(A_m)} &+ CKR_m^{-k}\gamma^{-\frac{l}{k-l}} \left\| \nabla^l v_m \right\|_{L^p(A_m)}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

donde $\gamma \in (0,1]$ y K es una constante que sólo depende de k y n. Notemos que la estimación anterior es invariante bajo dilataciones. Ahora, por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\begin{aligned} R_m^{-k}\|v_m\|_{L^p(A_m)} &\leq R_m^{-k}\|v_m\|_{L^q(A_m)}(\mathcal{L}^n(A_m))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = C\|v_m\|_{L^q(A_m)} \\ &\leq C\left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^1 + \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^2\right)\right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Entonces este término tiende a 0 si $m \to \infty$, mientras que

$$\left\|\nabla^k v_m\right\|_{L^p(A_m)}^p \leq \|v_m\|_{D^{k,p}}^p$$

se mantiene uniformemente acotado. Si escogemos $\gamma_m \to 0$, de (1.19) obtenemos que $\delta_m \geq o(1)$. Ahora, por la desigualdad de Sobolev

$$\begin{aligned} \|v_m\|_{D^{k,p}}^p &= \|v_m\phi_m\|_{D^{k,p}}^p + \|v_m(1-\phi_m)\|_{D^{k,p}}^p + \delta_m \\ &\geq \delta_m + S(\|v_m(1-\phi_m)\|_{L^q}^p + \|v_m\phi_m\|_{L^q}^p) \\ &\geq S\left[\left(\int_{B_{R_m}(x_m)} \mathrm{d}\nu_m\right)^{p/q} + \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R_m}(x_m)} \mathrm{d}\nu_m\right)^{p/q}\right] + \delta_m \\ &\geq S\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^1\right)^{p/q} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu_m^2\right)^{p/q}\right] + \delta_m \\ &\geq S(\lambda^{p/q} + (1-\lambda)^{p/q}) - o(1). \end{aligned}$$

Pero como $0 < \lambda < 1$ y $p < q$, tenemos que $\lambda^{p/q} + (1-\lambda)^{p/q} > 1$ contradiciendo la hipótesis $\|v_m\|_{D^{k,p}}^p = \|u_m\|_{D^{k,p}}^p \to S$. En vista de lo anterior, tenemos que $\lambda = 1$, que es el caso (iii) del lema. Por consiguiente, existen una sucesión x_m y una $\epsilon > 0$, con $R = R(\epsilon)$ tal que

$$\int_{B_R(x_m)} \mathrm{d}\nu_m \geq 1 - \epsilon.$$

Si $\epsilon < 1/2$, por (1.18) implica que $B_R(x_m) \cap B_1(0) \neq \emptyset$. Por tanto, la conclusión del lema también es válida para $x_m = 0$, reemplazando R por $2R+1$ si fuera necesario. Entonces si $\nu_m \rightharpoonup \nu$ débilmente, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu = 1.$$

Si usamos otro teorema de concentración-compacidad (véase [St90] pag. 46), podemos suponer que

$$\begin{aligned}
\mu_m \rightharpoonup \mu &\geq |\nabla^k v|^p \mathrm{d}x + \sum_{j\in J} \mu^{(j)} \delta_{x^{(j)}} \\
\nu_m \rightharpoonup \nu &= |v|^p \mathrm{d}x + \sum_{j\in J} \nu^{(j)} \delta_{x^{(j)}}
\end{aligned}$$

para ciertos puntos $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j \in J$, donde J es un conjunto de indices a lo mas numerable, $\mu^{(j)}$ y $\nu^{(j)}$ números positivos que cumplen con

$$S(\nu^{(j)})^{p/q} \leq \mu^{(j)}, \quad \forall j \in J.$$

Nuevamente, por la desigualdad de Sobolev

$$\begin{aligned}
S + o(1) = \|v_m\|^p_{D^{k,p}} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\mu_m &\geq \|v\|^p_{D^{k,p}} + \sum_{j\in J} \mu^{(j)} + o(1) \geq \\
S\left(\|v\|^{p/q}_{L^q} + \sum_{j\in J} (\nu^{(j)})^{p/q} \right) + o(1) &\geq S\left(\|v\|^{q}_{L^q} + \sum_{j\in J} (\nu^{(j)}) \right)^{p/q} + o(1) \\
&\geq S\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\nu \right)^{p/q} + o(1) = S + o(1),
\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se da por concavidad estricta de la función $\lambda \to \lambda^{p/q}$. La igualdad se da si a lo más uno de los términos $\|v\|_{L^q}$, $\nu^{(j)}$, $j \in J$ es distinto de cero. Notemos que por la condición (1.18), tenemos que

$$\nu^{(j)} \leq \frac{1}{2} \quad \forall j \in J.$$

Entonces todas las $\nu^{(j)}$ desaparecen, $\|v\|_{L^q} = 1$ y $v_m \to v$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$. Por la desigualdad de Sobolev $\|v\|^p_{D^{k,p}} \geq S$ y $\|v_m\|^p_{D^{k,p}} \to \|v\|^p_{D^{k,p}}$ si $m \to \infty$.

□

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos:

Corolario 1.2.1 *Para cualquiera $k \in \mathbb{N}$ y $p > 1$ tal que $kp < n$, existe una función $u \in D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ con $\|u_m\|_{L^q} = 1$ y $\|u\|_{D^{k,p}} = S$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ y $S = S(k,p,n)$ es la constante de Sobolev.*

Observación 1.2.3 Para el caso $k = 1$, se puede consultar [St90], pag. 43. Más aún, para el caso $p > 1$, la constante de Sobolev no se alcanza si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Una de las razones por la cual este hecho ocurre es por la falta de compacidad del problema. Más adelante, veremos como trabajar en un caso en el cual no tenemos la propiedad de P-S para todo nivel de energía.

Para finalizar esta sección, deseamos presentar el concepto de lagrangiano nulo y algunos resultados con respecto a este concepto. Después, daremos una demostración alternativa del teorema del punto fijo de Brouwer usando lo anterior. Por último, abordaremos un método conocido con el nombre de *compacidad compensada.* éste da condiciones para la existencia de soluciones débiles cuando sólo tenemos cierto nivel de convexidad.

Siendo más precisos, decimos que L es un lagrangiano nulo si el sistema

$$-\sum_{i=1}^{n} \Big(L_{p_i^k}(x, u, \nabla u) \Big)_{x_i} + L_z(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (k = 1, \ldots, m)$$

es resuelto para todas la funciones suaves $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, donde la función $L : \mathbb{M}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{\Omega}) \to \mathbb{R}$ es suave y el conjunto $\mathbb{M}^{m \times n}$ es el espacio de las matrices reales. La importancia de este concepto es que el funcional asociado

$$E(u) = \int_{\Omega} L(x, u, \nabla u) \, \mathrm{d}x$$

solamente depende de la condición en la frontera.

Teorema 1.2.9 *Si L es un lagrangiano nulo, $u, \tilde{u} \in C^2(\Omega, \bar{\mathbb{R}}^m)$ tal que*

$$u \equiv \tilde{u} \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Entonces $E(u) = E(\tilde{u})$.

Demostración. Véase [E02] pags 439-440.

□

Consideremos A una matriz cuadrada $(m = n)$ y denotemos a $cof A$ como la matriz de cofactor, cuyas entradas (k, i) es $(cof A)_i^k = (-1)^{i+k} d(A)_i^k$, donde $d(A)_i^k$ es el determinante de la matriz de $n-1 \times n-1$ obtenida quitando el k-ésimo renglón y la i-ésima columna de A.

Lema 1.2.2 *Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función suave. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} (cof \nabla u)^k_{i,x_i} = 0 \qquad para\ k = 1, \ldots, n.$$

Demostración. [E02] pags 440-441.

□

Teorema 1.2.10 *La función determinante*

$$L(P) = |P|$$

es un lagrangiano nulo.

Demostración. Esto se sigue inmediatamente del lema anterior, notando que

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(L_{p_i^k}(\nabla u) \Big)_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} (cof \nabla u)^k_{i,x_i} = 0 \qquad \text{para } k = 1, \ldots, n.$$

□

Ahora daremos la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer usando lo anterior:

Teorema 1.2.11 *Supongamos que $u : B_1(0) \to B_1(0)$ es una función continua con $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces u tiene un punto fijo en $B_1(0)$.*

Demostración. Supongamos que existe una función suave

$$w : B_1(0) \to \partial B_1(0)$$

tal que $w(x) = x$ para toda $x \in \partial B_1(0)$. Como $w \equiv Id$ en $\partial B_1(0)$, donde Id es la función identidad. Por el teorema 1.2.9., como la función determinante es un lagrangiano nulo, tenemos que $E(w) = E(Id) = medida(B)$, donde E es el funcional asociado al lagrangiano L. Por definición de w, $|w|^2 \equiv 1$ y derivando, obtenemos que $(\nabla w)^T \cdot w = 0$. Como $|w| = 1$, de la expresión anterior podemos concluir que 0 es un valor propio de ∇w^T para cada x. Por lo tanto, $|\nabla w| = 0$, lo cual es una contradicción y esto implica que no puede existir w con las condiciones antes mencionadas.

Si w es una función como antes, pero solamente pedimos que sea continua, extendemos w de manera continua definiendo $w(x) = x$ si $\in \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$. Notemos que $w(x) \neq 0$. Sea

$$\eta(x) = \begin{cases} Cexp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Definimos $\eta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ para cada $\epsilon > 0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $w_1 = \eta_\epsilon * w$ satisfaga $w_1(x) \neq 0$. Como η_ϵ es radial, $w_1(x) = x$ si $\in \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Entonces $w_2(x) = \frac{2w_1}{|w_1|}$ sería una función diferenciable en $B_2(0)$, como en la primera parte de la demostración y nuevamente llegamos a una contradicción.

Ahora, si suponemos que $u : B_1(0) \to B_1(0)$ continua y sin puntos fijos, consideremos $w : B_1(0) \to \partial B_1(0)$, donde $w(x)$ es el punto en la frontera de la bola generado por el rayo que va de $u(x)$ y pasa por x. La función anterior esta bien definida, ya que $u(x) \neq x$ para toda $x \in B_1(0)$. Como w es continua y $w(x) = x$ en $\partial B_1(0)$, sabemos que una función con estas propiedades no puede existir, llegamos a una contradicción.

$\square$

Hemos visto que la condición de convexidad es fundamental para obtener existencia de mínimos. El siguiente resultado nos da condiciones para mostrar la existencia de éstos si el lagrangiano ya no es convexo. Antes, presentamos una noción más débil de convexidad:

Si $L(x, z, P) = F(x, z, detP, P)$ cumple con $(r, P) \mapsto F(x, z, r, P)$ convexo para cada z, x fijos, decimos que L es *policonvexo.*

Teorema 1.2.12 *Supongamos que $n < q < \infty$ y $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $W^{1,q}(U; \mathbb{R}^n)$. Si L es acotado por abajo, policonvexo y cumple con la condición de coercividad*

$$L(u, z, P) \geq a|P|^q - b,$$

entonces

1. *$det\nabla u_k \rightharpoonup det\nabla u$ en $L^{q/n}(U)$,*
2. *$E(u)$ es semicontinua inferiormente en $W^{1,q}(U; \mathbb{R}^n)$ y*

3. $\min E(u)$ *existe en un conjunto admisible no vacío.*

Demostración. Véase [E02] pags 454-457.

□

Con esto último damos por concluida esta sección. A lo largo del trabajo regresaremos al problema de la constante de Sobolev y a la existencia de soluciones de la EDP semilineal asociada al problema anterior, para el caso en el que p se encuentre cerca y por debajo del exponente crítico p^*. También daremos una caracterización geométrica de estas soluciones y abordaremos el caso parabólico.

1.3. Métodos Minimax

En esta sección desarrollaremos los métodos conocidos como minimax. Estos métodos son muy útiles para encontrar puntos silla o mínimos locales, así como para resolver problemas de valores propios. Los resultados más destac

Tenemos que mencionar que el vínculo entre la existencia de puntos críticos y la compacidad de los conjuntos es muy fuerte. Dicho de otra forma, necesitamos un cierto nivel de compacidad para poder mostrar la existencia de puntos críticos. De hecho, el resultado más conocido en esta dirección es el de una función continua sobre conjuntos compactos [I02], [Jo05], [St90]. La dificultad para utilizar este resultado es poder probar que un conjunto es compacto en un espacio de dimensión infinita.

Lo anterior motiva definir *la condición de Palais-Smale* sobre un funcional. Esta condición es una noción de compacidad más fácil de verificar. Durante esta sección vamos a suponer que $E \in C^1(B)$, es decir, E continuamente Frechet diferenciable.

Definición 1.3.1 (Condición de Palais-Smale) *Decimos que una sucesión* $\{u_m\} \subset B$ *es una sucesión de Palais-Smale de* E *si* $|E(u_m)| \leq c$, *uniforme en* m, *y* $\|DE(u_m)\| \to 0$ *si* $m \to \infty$. *Si cualquier sucesión de Palais-Smale de* E *tiene una subsucesión convergente, decimos que* E *satisface la condición de Palais-Smale (P-S).*

Notemos que la condición P-S implica que el conjunto de puntos críticos con energía uniformemente acotada es relativamente compacto o precompacto (véase lemas 1.3.1 y 3.1.2). Para ver equivalencias, una discusión más profunda del concepto anterior y algunos resultados adicionales, se puede consultar [Ja03].

Proposición 1.3.1 *Si E cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Cualquier sucesión de P-S es acotada en B.*

2. *Para cualquier $u \in B$ tenemos la descomposición*

$$\nabla E(u) = (L + K)(u),$$

donde $L : B \to B^*$ es un operador lineal acotado e invertible, B^* el dual de B y K manda conjuntos acotados de B en conjuntos relativamente compactos en B^*, es decir, K es un operador compacto.

Entonces E cumple con (P-S).

Demostración. Sea u_m una sucesión de P-S para E, es decir, $E(u_m)$ es acotada y $\nabla E(u_m) = (L + K)(u_m) \to 0$. Por lo tanto, $u_m + L^{-1}K(u_m) \to 0$.

Por hipótesis, sabemos que u_m es acotada y como K es compacto, la sucesión $L^{-1}K(u_m)$ es relativamente compacta, es decir, admite una subsucesión convergente y por tanto, también u_m.

□

Gran parte de las discusiones que tendremos cuando queramos verificar la condición P-S, surgen a partir de los conjuntos de nivel de E. Por consiguiente, a continuación definimos estos conjuntos y damos una caracterización de ellos.

Consideremos $c \in \mathbb{R}$, $\delta, \rho > 0$ y sean

$$\begin{aligned}
E_c &= \{u \in B \,|\, E(u) < c\}, \\
K_c &= \{u \in B \,|\, E(u) = c,\ \nabla E(u) = 0\}, \\
N_{c,\delta} &= \{u \in B \,|\, |E(u) - c| < \delta,\ \|\nabla E(u)\| < \delta\}, \\
U_{c,\rho} &= \bigcup_{u \in K_c} \{v \in B \,|\, \|v - u\| < \rho\}.
\end{aligned}$$

El resultado que da la relación entre la condición P-S y estos conjuntos es el siguiente:

Lema 1.3.1 *Supongamos que E tiene la propiedad de P-S, entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:*

1. *K_c es compacto.*
2. *La familia $\{U_{c,\rho}\}_{\rho>0}$ es un sistema fundamental de vecindades de K_c.*
3. *La familia $\{N_{c,\delta}\}_{\delta>0}$ es un sistema fundamental de vecindades de K_c.*

Demostración.

1. Cualquier sucesión en K_c tiene una subsucesión convergente por la propiedad de P-S, y por continuidad de E y de ∇E, cualquier punto de acumulación para esa sucesión pertenece a K_c.
2. Cualquier $U_{c,\rho}$ es vecindad de K_c. Ahora consideremos V vecindad abierta de K_c. Supongamos por contradicción que para $\rho_m \to 0$ existe una sucesión de puntos $u_m \in U_{c,\rho_m} \setminus V$. Sea $v_m \in K_c$ tal que $\|u_m - v_m\| \leq \rho_m$. Como K_c es compacto, podemos suponer que $v_m \to v \in K_c$. Pero entonces $u_m \to v$, y $u_m \in V$ para m suficientemente grande y llegamos a una contradicción.
3. Análogamente al inciso anterior.

□

El resultado anterior nos da una caracterización de la topología generada por los niveles de energía de E en puntos críticos. De hecho, queremos presentar un resultado conocido como *el lema de deformación.* éste nos da información acerca del comportamiento de E con respecto a distintos niveles de energía.

Para conseguir el objetivo anterior, primero tenemos que dar una noción geométrica análoga al concepto de flujo gradiente.

Sea $\tilde{B} = \{u \in B \,|\, \nabla E(u) \neq 0\}$ el conjunto de valores regulares de E. Decimos que $v : \tilde{B} \to B$ es un campo pseudo-gradiente para E, si v es un campo vectorial localmente Lipschitz continuo que cumple con:

1. $\|v(u)\| < 2\,\text{mín}\{\|\nabla E(u), 1\|\}$,
2. $\langle v(u), \nabla E(u)\rangle > \text{mín}\{\|\nabla E(u)\|\,, 1\}\,\|\nabla E(u)\|$ para todo $u \in B$.

Un resultado importante con respecto a los flujos pseudo-gradientes es:

Teorema 1.3.1 *Cualquier $E \in C^1(B)$ admite un campo pseudo-gradiente.*

Demostración. Para $u \in \tilde{B}$, consideremos $w = w(u)$ tal que

$$\|w\| < 2\,\text{mín}\{\|\nabla E(u), 1\|\}, \tag{1.20}$$

$$\langle w, \nabla E(u)\rangle > \text{mín}\{\|\nabla E(u)\|, 1\}\,\|\nabla E(u)\|\,. \tag{1.21}$$

Por continuidad, para cualquier $u \in \tilde{B}$ existe una vecindad $W(u)$ tal que (1.20) y (1.21) se cumplen para toda $u' \in W(u)$. Como $\tilde{B} \subset B$ es metrizable y por tanto, paracompacto, existe un refinamiento finito local $\{W_l\}_{l\in I}$ de la cubierta $\{W(u)\}_{u\in\tilde{B}}$ de $\tilde{B}$, que consiste de vecindades $W_l \subset W(u_l)$.

Consideremos una partición de la unidad $\{\phi_l\}$ Lipschitz continua subordinada por $\{W_l\}_{l\in I}$, es decir, una colección de funciones Lipschitz continuas con soporte en W_l, $0 \leq \phi_l \leq 1$ y $\sum_{l\in I}\phi_l \equiv 1$ en $\tilde{B}$.

Si $\rho_l(u) = dist(u, B \setminus W_l) = \text{ínf}\{\|u - v\| \mid v \notin W_l\}$ y

$$\phi_l(u) = \frac{\rho_l(u)}{\sum_{l'\in I}\rho_{l'}(u)},$$

es fácil mostrar que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi_l = 0$ fuera de W_l y $\sum_{l\in I}\phi_l \equiv 1$. Ahora, como $\{W_l\}_{l\in I}$ es localmente finito, para cualquier $u \in \tilde{B}$ existe una vecindad W de u tal que $W \cap W_{l'} \neq \emptyset$ para una cantidad finita de indices $l' \in I$, y la condición de Lipschitz de ϕ_l en W es inmediata de la condición de Lipschitz de la familia $\{\phi_l\}_{l\in I}$.

Finalmente, si

$$v(u) = \sum_{l\in I}\phi_l(u)w(u_l),$$

por (1.20) y (1.21), se mantiene la relación para cualquier combinación lineal convexa, y $v(u)$ es un flujo pseudo-gradiente para E.

□

Ahora enunciaremos uno de los resultados principales del trabajo, el cual es de los más útiles dentro de los métodos minimax para mostrar existencia de puntos críticos:

Teorema 1.3.2 (Teorema del Paso de Montaña) *Sea $E \in C^1(B)$ un funcional que cumple con la condición de P-S, con $E(0) = 0$. Si además*

1. *$\exists \rho > 0$, $\alpha > 0$ tal que si $\|u\| = \rho \Rightarrow E(u) \geq \alpha$ y*

2. *$\exists u_1 \in B$ tal que $\|u\| \geq \rho$ y $E(u_1) < \alpha$.*

Entonces

$$\beta = \inf_{p \in P} \sup_{t \in [0,1]} E(p(t)) \geq \alpha$$

es un valor crítico, donde $P = \{p \in C([0,1]; B) \,|\, p(0) = 0,\, p(1) = u_1\}$.

Para poder dar una demostración del resultado anterior, necesitamos ver el siguiente resultado:

Teorema 1.3.3 (Lema de Deformación) *Supongamos que $E \in C^1(B)$ y cumple con la condición de P-S. Sea $\beta \in \mathbb{R}$, $\bar{\epsilon} > 0$ y V una vecindad de K_β. Entonces existe un número $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y una familia 1-parametrizada continua de homeomorfísmos $\Phi(\cdot, t)$ de B, $0 \leq t < \infty$ con las siguientes propiedades:*

(i) $\Phi(u,t) = u$, si $t = 0$, o $\nabla E(u) = 0$, o $|E(u) - \beta| \leq \bar{\epsilon}$;

(ii) $E(\Phi(u,t))$ es decreciente en t para cualquier $u \in B$;

(iii) $\Phi(E_{\beta+\epsilon} \setminus N, 1) \subset E_{\beta-\epsilon}$ y $\Phi(E_{\beta+\epsilon}, 1) \subset E_{\beta-\epsilon} \cup N$.

Más aún, $\Phi : B \times [0,\infty) \to B$ tiene la propiedad de semigrupo, es decir, $\Phi(\cdot, t) \circ \Phi(\cdot, s) = \Phi(\cdot, t+s)$ para toda $s, t \geq 0$.

Antes de dar una demostración es conveniente comentar que no usaremos el resultado en toda su plenitud. Por consiguiente solo la daremos para el caso $K_\beta = \emptyset$ y B un espacio de Hilbert. Para ver la utilidad del resultado en los demás casos se puede consultar [St90], [Ch05].

Demostración. Primero mostraremos que existen constantes $0 < \sigma, \bar{\epsilon} < 1$ tal que

$$\|\nabla E(u)\| \geq \sigma \quad \text{para cada } u \in E_{\beta+\bar{\epsilon}} \setminus E_{\beta-\bar{\epsilon}}. \tag{1.22}$$

Realizaremos lo anterior por contradicción. Si (1.22) es falso, entonces para toda $0 < \sigma, \bar{\epsilon}$ existen sucesiones $\sigma_k, \bar{\epsilon}_k \to 0$ y u_k tal que

$$u_k \in E_{\beta+\bar{\epsilon}} \setminus E_{\beta-\bar{\epsilon}} \quad \text{con} \tag{1.23}$$

$$\|\nabla E(u_k)\| \leq \sigma. \tag{1.24}$$

Por la condición de P-S, existe una subsucesión u_k y un elemento $u \in B$ tal que $u_k \to u$. Como $E \in C^1(B)$, (1.23) y (1.24) implican que $E(u) = \beta$,

$E'(u) = 0$. Entonces $K_\beta \neq \emptyset$ y por tanto una contradicción.

Sea ϵ tal que

$$0 < \epsilon < \bar{\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < \frac{\sigma^2}{2}. \tag{1.25}$$

Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} U &= \{u \in B \,|\, E(u) \leq \beta - \bar{\epsilon} \text{ o } E(u) \geq \beta + \bar{\epsilon}\}\} \\ W &= \{u \in B \,|\, \beta - \bar{\epsilon} \leq E(u) \leq \beta + \bar{\epsilon}\}\}. \end{aligned}$$

Como ∇E es acotada en conjuntos acotados, podemos verificar que la función $dist(u, U) + dist(u, W)$ es acotada inferiormente por una constante positiva para cada conjunto acotado en B. Como consecuencia, la función

$$g(u) = \frac{dist(u, U)}{dist(u, U) + dist(u, W)}$$

satisface $0 \leq g \leq 1$, $g = 0$ en U y $g = 1$ en W. Sea

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1/t & t \geq 1. \end{cases} \tag{1.26}$$

Ahora definamos a la función

$$J(u) = -g(u)h(\|\nabla E(u)\|)\nabla E(u)$$

y notemos que J es acotada. Consideremos para cada $u \in B$ la siguiente EDO

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= J(\Phi(t)) \\ \Phi(0) &= u. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Como J es acotada y Lipschitz continua en conjuntos acotados existe una única solución para toda $t \geq 0$. Escribimos $\Phi = \Phi(t, u) = \Phi_t(u)$ para mostrar la dependencia de u y t. Notemos que Φ es diferenciable en t, continua en u y cumple con la propiedad de semigrupo. Además se cumple la primera parte de (i) para $t = 0$. Más aún, si $t = 1$, $\Phi = u$ si $u \notin E^{-1}[\beta - \bar{\epsilon}, \beta + \bar{\epsilon}]$ pues $g = 0$.

Derivando, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\Phi_t(u)) &= \left(\nabla E(\Phi_t(u)), \frac{d}{dt}\Phi_t(u)\right) = (\nabla E(\Phi_t(u)), J(\Phi_t(u))) \\ &= -g(\Phi_t(u))h(\|\nabla E(\Phi_t(u))\|) \left\|\nabla E(\Phi_t(u))\right\|^2. \end{aligned} \tag{1.28}$$

De este cálculo obtenemos que

$$\frac{d}{dt}E(\Phi_t(u)) \leq 0$$

y por tanto (ii). Fijemos $u \in E_{\beta+\epsilon}$. Si $\Phi_t(u) \notin W$ para alguna $t \in [0,1]$, no hay nada que demostrar. Entonces supongamos que $\Phi_t(u) \in W$ para alguna $t \in [0,1]$, por tanto $g(\Phi_t(u)) = 1$ y por (1.28) tenemos que

$$\frac{d}{dt}E(\Phi_t(u)) = -h(\|\nabla E(\Phi_t(u))\|) \|\nabla E(\Phi_t(u))\|^2 . \tag{1.29}$$

Si $\|\nabla E(\Phi_t(u))\| \geq 1$, por (1.26) y(1.22) tenemos que

$$\frac{d}{dt}E(\Phi_t(u)) = - \|\nabla E(\Phi_t(u))\|^2 \leq -\sigma^2.$$

De igual forma, si $\|\nabla E(\Phi_t(u))\| \leq 1$ obtenemos la misma desigualdad. Por (1.29) y la desigualdad anterior, obtenemos

$$E(\Phi_1(u)) \leq E(u) - \sigma^2 \leq \beta + \epsilon - \sigma^2 \leq \beta - \epsilon$$

por (1.25) y ésto completa la prueba.

□

Como vimos anteriormente, la ventaja de tener un funcional en un espacio de Hilbert nos permite escoger un flujo explícitamente. Más aún, si $E \in C^2(H)$, donde H es un espacio de Hilbert real, podemos definir el flujo pseudo-gradiente de la misma manera que en el caso de dimensión finita, es decir, $\nabla E(u) : H \to H$ como $(\nabla E(u), v) = \nabla_v E(u)$ para cualquier $u, v \in H$, o bien,

$$\|\nabla E(u)\| = \|\nabla_v E(u)\| , \quad \langle \nabla E(u), \nabla_v E(u)\rangle = \|\nabla E(u)\|^2 .$$

Entonces tendríamos que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) &= -\nabla E(\Phi(u,t)), \\ \Phi(u,0) &= u, \end{cases}$$

ya que $\nabla E \in C^1$. De hecho, a pesar de que no utilizaremos este resultado más adelante, la idea intuitiva del resultado es fundamental en el último capítulo cuando abordemos problemas de tipo parabólico, ya que usaremos la noción de flujo parabólico y herramientas variacionales.

Ahora podemos dar una demostración de 1.3.2:

Demostración. Es fácil mostrar que $\beta \geq \alpha$. Supongamos que $K_\beta = \emptyset$, y sea $0 < \epsilon < \alpha/2$. De acuerdo con el lema de deformación, existe una constante $0 < \delta < \epsilon$ y un homeomorfísmo con la propiedad

$$\Phi(E_{\delta+\alpha}) \subset E_{\delta-\alpha} \text{ y } \Phi(u) = u \text{ si } u \notin E^{-1}[\delta-\alpha, \delta+\alpha].$$

Por definición de β, existe una $p \in P$ tal que

$$\sup_{t\in[0,1]} E(p(t)) < \beta + \epsilon,$$

entonces $\tilde{p} = \Phi \circ p$ también pertenece a P, pues $\Phi(p(0)) = 0$ y $\Phi(p(1)) = \Phi(u)) = u$ por lo antes mencionado. Pero la desigualdad anterior implica que

$$\sup_{t\in[0,1]} E(\tilde{p}(t)) \leq \beta - \epsilon,$$

entonces

$$\beta = \inf_{p\in P} \sup_{t\in[0,1]} E(u(p(t))) \leq \beta - \epsilon,$$

lo cual es una contradicción.

$\square$

A continuación deseamos mostrar una aplicación del teorema del paso de montaña para ver la existencia de soluciones no triviales a una ecuación elíptica semilineal:

Proposición 1.3.2 *Sea*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u) & \textit{en } \Omega, \\ u & = & 0 & \textit{en } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.30}$$

donde f es una función suave que cumple con las siguientes condiciones:

(i) Para alguna $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y $C > 0$

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^p), \quad |f'(x)| \leq C(1 + |x|^{p-1}),$$

(ii) $0 \leq F(x) \leq cf(x)x$ *para alguna constante* $c < 1/2$*, donde*

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s,$$

(iii) Para $0 < a \leq A$

$$a|x|^{p+1} \leq |F(x)| \leq A|x|^{p+1}.$$

Entonces existe al menos una solución $u \not\equiv 0$ *de (1.30).*

Demostración. Primero, definamos el funcional de energía asociado a (1.30), que es

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\,\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$. En este caso, $B = H_0^1(\Omega)$ con el producto interior

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x$$

y $\|\cdot\|$ la norma inducida. Entonces

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x = I_1(u) - I_2(u).$$

Para ver que $I \in C^1(B)$, notemos que para cada $u, w \in B$

$$I_1(w) = \frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}\|u + w - u\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + (u, w - v) + \frac{1}{2}\|w - u\|^2.$$

De la igualdad anterior es fácil ver que $I_1 \in C^1$ con $\nabla I(u) = u$. Recordemos por el teorema de Lax-Milgram que para cada $v^* \in H^{-1}(\Omega)$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= v^* & \text{en } \Omega, \\ v &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una única solución $v \in B$. Sea $v = Kv^*$ de tal manera que

$$K : H^{-1}(\Omega) \to B \tag{1.32}$$

es una isometría. Notemos que si $w \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, el funcional w^* definido por

$$\langle w^*, u\rangle = \int_\Omega wu\,\mathrm{d}x \quad u \in B$$

pertenece a $H^{-1}(\Omega)$, ya que $B \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n+2}} \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow H^{-1}$ y

$$\|w^*\|_{H^{-1}} \leq \|w\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} .$$

Ahora, observemos que

$$p\left(\frac{2n}{n+2}\right) < \frac{n+2}{n-2}\frac{2n}{n+2} = p^*,$$

por lo tanto $f(u) \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ si $u \in B$.

Queremos ver que si $u \in B$, entonces

$$\nabla I_2(u) = K(f(u)). \tag{1.33}$$

Para esto, podemos ver que

$$F(a+b) = F(a) + f(a)b + b^2 \int_0^1 (1-s)f'(a+bs)\,\mathrm{d}s.$$

Entonces para cada $w \in B$,

$$\begin{aligned} I_2(w) = \int_\Omega F(w)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega F(u+w-u)\,\mathrm{d}x = \\ \int_\Omega F(u) + f(u)(w-u)\,\mathrm{d}x + R &= I_2(u) + \int_\Omega \nabla K(f(u)) \cdot \nabla(w-u)\,\mathrm{d}x + R, \end{aligned}$$

donde R satisface por (i)

$$|R| \leq C\int_\Omega (1 + |u|^{p-1} + |w-u|^{p-1})|w-u|^2\,\mathrm{d}x \leq$$

$$C\left(\int_\Omega |w-u|^{p+1} + |w-u|^2\,\mathrm{d}x\right) + C\left(\int_\Omega |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int_\Omega |w-u|^{p+1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}}.$$

Como $p+1 < p^*$, por las desigualdades de Sobolev (véase [LiLo01], [E02]) tenemos que $R = o(\|w-u\|)$ y por (1.32) podemos ver que

$$I_2(w) = I_2(u) + (K(f(u)), w-u) + o(\|w-u\|)$$

y con esto hemos mostrado (1.33). Para mostrar la continuidad, consideremos $u, v \in B$ con $\|u\|, \|v\| \leq L$, entonces

$$\begin{aligned} \|\nabla I_2(u) - \nabla I_2(v)\| &= \|K(f(u)) - K(f(v))\| = \\ \|f(u) - f(v)\|_{H^{-1}} &\leq \|f(u) - f(v)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} . \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|f(u)-f(v)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \leq C\left(\int_\Omega \left((1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1})|v-u|\right)^{\frac{2n}{n+2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+2}{2n}}$$

$$\leq C\left(\int_\Omega \left((1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1})\right)^{q\frac{2n}{n+2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}\frac{n+2}{2n}}\left(\int_\Omega |v-u|^{q'\frac{2n}{n+2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}\frac{n+2}{2n}}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\left(\int_\Omega \left(1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)^{\frac{n+2}{4}\frac{2n}{n+2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{n}}\|u-v\|_{L^{p^*}} \\ &\leq C(L)\|u-v\|_{L^{p^*}}\, C(L)\|u-v\|, \end{aligned}$$

donde nuevamente usamos (i) y la desigualdad de Hölder para $q=\frac{n+2}{4}$ y exponente dual $q'=\frac{n+2}{n-2}$. Entonces $\nabla I_2 : B \to B$ es localmente Lipschitz continua.

Ahora tenemos que verificar la condición de P-S. Sea $u_m \in B$ una sucesión tal que $I(u_m)$ es acotada y $\nabla I(u) \to 0$ en B. Por lo realizado anteriormente, tenemos que

$$u_m - K(f(u_m)) \to 0 \tag{1.34}$$

en B. Entonces para cada $\epsilon > 0$

$$|(\nabla I(u_m), v)| = \left|\int_\Omega \nabla u_m\cdot\nabla v - f(u_m)v\,\mathrm{d}x\right| \leq \epsilon\|v\|$$

si $v \in B$ y para m suficientemente grande. Si $v = u_m$, tendríamos que

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_m|^2 - f(u_m)u_m\,\mathrm{d}x\right| \leq \epsilon\|u_m\|$$

para cada ϵ y m suficientemente grande. En particular, si $\epsilon = 1$ podemos notar que

$$\int_\Omega f(u_m)u_m\,\mathrm{d}x \leq \|u_m\| + \|u_m\|^2, \tag{1.35}$$

pero como $I(u_m)$ es acotado para toda m, existe una $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{2}\|u_m\|^2 - \int_\Omega F(u_m)\,\mathrm{d}x\right) \leq C < \infty.$$

Podemos deducir

$$\|u_m\|^2 \leq C + 2\int_\Omega F(u_m)\,\mathrm{d}x \leq C + 2c(\|u_m\| + \|u_m\|^2)$$

combinando (ii) y la desigualdad (1.35). Como $2c < 1$, podemos ver que u_m es acotada en B. Entonces existe una subsucesión u_m y un elemento $u \in B$, con $u_m \rightharpoonup u$ débil en B y $u_m \to u$ fuerte en $L^{p+1}(\Omega)$, ya que $p+1 < p^*$. Además, $f(u_m) \to f(u)$ en H^{-1}, por tanto $K(f(u_m)) \to K(f(u))$ en B. Como consecuencia de (1.34), obtenemos

$$u = K(f(u)) \quad \text{en } B, \text{ y por tanto} \quad u_m \to u \quad \text{en } B \tag{1.36}$$

Por último, verifiquemos las hipótesis que nos faltan para poder aplicar el teorema del paso de montaña. Claramente $I(0) = 0$. Supongamos que $u \in B$, con $\|u\| = \rho > 0$ por determinar más adelante. Entonces

$$I(u) = I_1(u) - I_2(u) = \frac{\rho^2}{2} - I_2(u). \tag{1.37}$$

Por (iii) y $p+1 < p^*$ tenemos que

$$|I_2(u)| \leq C\int_\Omega |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq C\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+1}{p^*}} \leq C\,\|u\|_{H_0^1}^{p+1} \leq C\rho^{p+1}.$$

En vista de (1.37) se sigue que

$$I(u) \geq \frac{\rho^2}{2} - C\rho^{p+1} \geq \frac{\rho^2}{4} = a > 0,$$

para $\rho > 0$ suficientemente pequeño, ya que $p+1 > 2$.

Sea $u \in B$ distinto de cero y $v = tu$ para alguna t por determinar. Entonces

$$I(v) = I_1(tu) - I_2(tu) = t^2 I_1(u) - \int_\Omega F(tu)\,\mathrm{d}x \leq$$
$$t^2 I_1(u) - at^{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x < 0$$

para t suficientemente grande. Con ésto último hemos verificado todas las hipótesis del teorema del paso de montaña y por consiguiente, existe $u \in B$, $u \not\equiv 0$ tal que

$$\nabla I(u) = u + K(f(u)) = 0,$$

que en particular, para cada $v \in B$, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(u) v \, \mathrm{d}x,$$

es decir, u es una solución débil de (1.30).

$\square$

Observación 1.3.1 Notemos que la condición (iii) implica que $u \equiv 0$ es solución de (1.30). Además, $f(u) = |u|^{p-1}u$ cumple con (i)-(iii). Abordaremos este caso en el siguiente capítulo.

Para finalizar esta sección, deseamos presentar una demostración alternativa del teorema del paso de montaña utilizando un principio variacional. El propósito de esta segunda demostración es mostrar la relación entre los métodos directos y los métodos minimax. Recordemos que estos últimos son de naturaleza topológica. A partir de estos vínculos se desprenden muchas ideas para usar otro tipo de herramientas.

Teorema 1.3.4 (Principio Variacional de Ekeland) *Sea (M, d) un espacio métrico completo, $E : M \to \mathbb{R} \cup \infty$ una función s.i. y acotada inferiormente con $E \not\equiv \infty$. Entonces para cualquier $\epsilon, \delta > 0$ y $u \in M$ con*

$$E(u) \leq \inf_M E + \epsilon,$$

existe una $v \in M$ que minimiza estrictamente el funcional

$$E_v(w) \equiv E(w) + \frac{\epsilon}{\delta} d(v, w).$$

Más aún, tenemos que $E(v) \leq E(u)$, $d(u, v) \leq \delta$.

Demostración. Sea $\alpha = \frac{\epsilon}{\delta}$ y definamos el siguiente orden parcial en $M \times \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$(v, \beta) \leq (v', \beta') \Leftrightarrow (\beta' - \beta) + \alpha d(v, v') \leq 0.$$

Fácilmente podemos mostrar que este orden induce una relación de equivalencia. Definimos el conjunto $S = \{(v, \beta) \in M \times \mathbb{R} \,|\, E(v) \leq \beta\}$.

Por semicontinuidad de E, S es cerrado en $M \times \mathbb{R}$. Ahora, supongamos que S contiene un elemento máximo (v, β) con respecto al orden $\leq$

tal que $(u, E(u)) \leq (v, \beta)$. Si comparamos éste con $(v, E(v)) \in S$ obtenemos que $E(v) = \beta$. Por definición de la relación, podemos notar que $(u, E(u)) \leq (v, E(v))$ es equivalente a $E(v) - E(u) + \alpha d(u, v) \leq 0$.

En particular, esto implica que $E(v) \leq E(u)$ y

$$d(u, v) \leq \alpha^{-1}(E(u) - E(v)) \leq \frac{\delta}{\epsilon}\left(\inf_M E + \epsilon - \inf_M E\right) = \delta.$$

De hecho, si $w \in M$ satisface

$$E_v(w) = E(w) + \alpha d(v, w) \leq E(v) = E_v(v),$$

nuevamente utilizando la relación tenemos que $(v, E(v)) \leq (w, E(w))$. Por lo tanto, $w = v$ por ser $(v, E(v))$ máximo, es decir, v es un mínimo estricto de E_v.

Para concluir la demostración, tenemos que mostrar que tal elemento existe. Para ésto, sea $(v_1, \beta_1) = (u, E(u))$ y de forma iterativa definimos la sucesión (v_m, β_m) como

$$\begin{aligned} S_m &= \{(v, \beta) \in S \,|\, (v_m, \beta_m \leq (v, \beta))\} \\ \mu_m &= \{\beta \,|\, (v, \beta) \in S_m\} \\ &\geq \inf\{E(v) \,|\, (v, \beta) \in S_m\} \geq \inf_M E = \mu_0. \end{aligned}$$

Notemos que $\mu_m \leq \beta_m$ y $S_m = \{(v_m, \beta_m)\}$, si $\mu_m = \beta_m$. Ahora, escogemos $(v_{m+1}, \beta_{m+1}) \in S_m$ de tal manera que

$$\beta_m - \beta_{m+1} \geq \frac{1}{2}(\beta_m - \mu_m).$$

Teniendo en cuenta la transitividad de $\leq$, la sucesión S_m esta anidada, es decir, $S_1 \supset \ldots S_m \supset$ y por lo tanto, también $\ldots \leq \mu_m \leq \mu_{m+1} \leq \ldots \beta_m \leq \beta_{m+1} \leq \ldots$. Por inducción y usando (1.38) podemos obtener que

$$\begin{aligned} \beta_{m+1} - \mu_{m+1} &\leq \beta_{m+1} - \mu_m \\ &\leq \frac{1}{2}(\beta_m - \mu_m) \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m (\beta_0 - \mu_0). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Por definición de S_m, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y cualquier $(v, \beta) \in S_m$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\beta_m - \beta| &= \beta_m - \beta \leq \beta_m - \mu_m \leq C\left(\frac{1}{2}\right)^m, \\ d(v_m, v) &\leq \alpha^{-1}(\beta_m - \beta) \leq C\alpha^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^m. \end{aligned}$$

En particular, (v_m, β_m) es una sucesión de Cauchy en $M \times \mathbb{R}$ y por ser M completo, tenemos que la sucesión converge a un elemento $(w, \eta) \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} S_m$.

Nuevamente, usando la transitividad de $\leq$ tenemos que

$$(u, E(u)) = (v_1, \beta_1) \leq (w, \eta).$$

Además, (w, η) es máximo, porque si $(w, \eta) \leq (\bar{w}, \bar{\eta})$, entonces podemos ver que $(v_m, \beta_m) \leq (\bar{w}, \bar{\eta})$ y $(\bar{w}, \bar{\eta}) \in S_m$ para toda m. Si $(v, \beta) = (\bar{w}, \bar{\eta})$ en (1.38) podemos llegar a que $(v_m, \beta_m) \to (\bar{w}, \bar{\eta})$, y por lo tanto $(\bar{w}, \bar{\eta}) = (w, \eta)$.

□

Ahora podemos dar la correspondiente demostración:

Consideremos a P como un espacio vectorial con la norma

$$\|p\|_P = \max_{t\in[0,1]} \|p(t)\|$$

para $p \in P$. Entonces $P, \|\cdot\|_P$ es un espacio de Banach, y por tanto métrico completo. Sea

$$J(p) = \max_{t\in[0,1]} E(p(t)).$$

J es s.i. por ser cota superior de una familia de funciones s.i.. Además, tenemos que

$$\beta = \inf_{p\in P} J \geq \max\{0, E(u_1)\},$$

por tanto acotada inferiormente. Entonces por el principio variacional de Ekeland, tenemos que $\forall\epsilon > 0$, existe una $p_\epsilon \in P$ tal que

$$\begin{aligned} J(p_\epsilon) &\leq \beta + \epsilon \\ J(p) &\geq J(p_\epsilon) - \epsilon \|p - p_\epsilon\|_P \quad \forall p \in P. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Sea $\mathcal{M} = \{t \in [0,1] \mid E(p_\epsilon(t)) = \max_{s\in[0,1]} E(p_\epsilon(s))\}$. Por (1.39) podemos deducir que existe $t_\epsilon \in \mathcal{M}$ tal que

$$\|\nabla E(p_\epsilon(t_\epsilon))\| \leq \epsilon.$$

Basta que consideremos la sucesión $x_m = p_{\frac{1}{m}}(t_{\frac{1}{m}})$ y concluir por la propiedad P-S.

□

Con esto último terminamos este capítulo. En la primera sección del último capítulo, veremos como utilizar los métodos minimax, que en muchas ocasiones son cruciales.

Capítulo 2

Existencia de Soluciones de una EDP del Tipo Parabólica

Muchos fenómenos pueden ser descritos o modelados por una ecuación diferencial. Entre estos, podemos mencionar la caída libre de un cuerpo, el movimiento de una partícula en un medio, la distribución de calor en un medio, etc. Dependiendo de los factores que se consideren en el modelo, la ecuación resultante puede ser una EDO o una EDP.

En éste capítulo nos enfocaremos en el estudio de la existencia de soluciones de una ecuación del tipo parabólica, que por un lado es una EDP y por otro, tiene la ventaja que puede tratarse como una EDO en un espacio de dimensión infinita, es decir, se pueden utilizar métodos de punto fijo.

El trabajo que desarrollemos durante este capítulo nos servirá de base para abordar otro tipo de problemas como la formación de patrones y de control, que realizaremos posteriormente. Podemos mencionar que hay diferentes maneras de mostrar la existencia de soluciones para este tipo de ecuaciones, entre ellas, podemos destacar el métodos de semigrupo, el de compacidad y el de operador monótono [Zh04],[E02],etc.ar el métodos de semigrupo, el de compacidad y el de operador monótono [Zh04],[E02],etc.

2.1. Existencia y Unicidad de una EDP Semilineal

Uno de los modelos por excelencia para el estudio de distribución de calor, concentraciones químicas, crecimiento de poblaciones en un medio, etc, son las EDP del tipo parabólico [E02],[Sm91]. Una característica importante de mencionar es que la ecuación no tiene estructura variacional, i.e. no es la ecuación de E-L de un funcional. A pesar de este inconveniente, veremos más adelante que lo desarrollado en el capítulo anterior será de gran utilidad para nuestro caso.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ un dominio abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ suave. Consideremos

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \lambda u - |u|^{p-1}u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ u(0,x) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{2.1}$$

con $\lambda > 0$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $T \in (0,\infty]$ y $1 < p < p^* = \frac{2n}{n-2}$. Entendemos por $T = \infty$ que la solución existe para toda $t > 0$. A este tipo de soluciones les llamaremos *globales*. Si $T < \infty$, diremos que la solución estalla en tiempo finito en norma, i.e.

$$\lim_{t\to T^-} \|u(t,x)\| = \infty,$$

A este tipo de soluciones les llamaremos *locales*. La ecuación (2.1) es una ecuación no lineal y se le conoce en la literatura como *semilineal*.

El resultado que deseamos mostrar en esta sección es el siguiente:

Teorema 2.1.1 (Existencia y Unicidad) *Para todo $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, existe una $T \in (0,\infty]$ tal que (2.1) tiene una única solución*

$$u \in C^0([0,T); H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,T); L^2(\Omega)),$$

la cual es solución clásica para $t > 0$.

Ahora bien, las soluciones de (2.1) pueden ser globales o locales, esto último depende de la energía de la condición inicial. Para ilustrar lo anterior, presentamos el siguiente caso particular:

Ejemplo 2.1.1 Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u - u^3 = 0 & \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{2.2}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado con frontera suave. Notemos que si multiplicamos la ecuación anterior por u e integramos sobre todo Ω, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (|\nabla u|^2 - |u|^4 + |u|^2)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.3}$$

Sea

$$E(t) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|u|^4 + |u|^2)\,\mathrm{d}x,$$

la función de energía asociada a (2.2). Si multiplicamos (2.2) por u_t e integramos sobre Ω, vemos que

$$\frac{1}{2}\frac{dE(t)}{dt} + \int_\Omega |u_t|^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

y por consiguiente $E(t) \leq E(0)$. De (2.3) podemos deducir que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + E(t) - \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^4\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por la igualdad anterior, si $E(0) < 0$, entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^4\,\mathrm{d}x, \tag{2.4}$$

ya que $-E(t) \geq 0$. Más aún, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz podemos notar que

$$\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |u|^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.5}$$

con $|\Omega|$ el volumen de Ω. Consideremos

$$e(t) = \int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x,$$

y por lo que realizamos anteriormente, combinando (2.4),(2.5) obtenemos que

$$\frac{de(t)}{dt} \geq ce(t)^2,$$

con $c > 0$. Fácilmente, podemos resolver la desigualdad anterior y llegamos a la siguiente estimación

$$e(t) \geq \frac{e(0)}{1 - ce(0)t},$$

válida si $1 - ce(0)t > 0$. Por consiguiente, si $t \to t_0 = (ce(0))^{-1}$, la solución estalla para este tiempo. Intuitivamente, el hecho anterior se debe al menos por dos motivos:

1. Si la solución $u(t,x) = u(t)$ sólo depende de t, encontrar soluciones de la EDP es equivalente a resolver la siguiente ecuación

$$u' = |u|^{p-1}u.$$

   Las soluciones de la ecuación anterior estallan en tiempo finito dependiendo de la condición inicial.

2. La energía de la ecuación no está acotada y el hecho que $E(t) < 0$ implica que la condición inicial es grande. Para notar este hecho, basta definir $v(x) = ku_0(x)$, como $E(t)$ es decreciente, entonces

$$E(0) = \int_\Omega (k^2|\nabla u_0|^2 - k^4\frac{1}{2}|u_0|^4 + k^2|u_0|^2)\,\mathrm{d}x$$

   es negativa para k suficientemente grande.

$\square$

Por el ejemplo anterior, vemos que la ecuación (2.1) tiene soluciones que no necesariamente son globales. Esto depende en parte de la energía de la condición inicial. Esto marca la pauta para preguntarnos que características comparten los dos tipos de soluciones y cuales son las que las distinguen. Más adelante, veremos condiciones que nos aseguren la existencia global. La idea principal para conseguir este objetivo es combinar la existencia local y estimaciones a *priori* de la solución, es decir, cotas de la solución que al pasar al límite la solución permanezca acotada.

Ahora bien, como mencionamos al principio, existen diferentes formas de mostrar la existencia de soluciones. La forma en la que realizaremos lo anterior es por medio del método de semigrupo.

2.2. Método de Semigrupo

Observemos que por (2.1) tiene una estructura de la forma

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = F(u), \tag{2.6}$$

que es semejante a una EDO de primer orden. Deseamos aplicar métodos conocidos en EDO para encontrar soluciones de la ecuación anterior y esto motiva el desarrollo del método de semigrupo. Este método nos permite trabajar ecuaciones de evolución definiendo una estructura algebraica ([E02],[FS92],[Zh04]).

El desarrollo de esta sección será de la siguiente forma:

1. Daremos las nociones básicas de semigrupo, definiremos el generador infinitesimal y su relación con el semigrupo asociado a (2.1) para el caso $F \equiv 0$.
2. Presentaremos y demostraremos el resultado de existencia y unicidad local para (2.1).

Antes de empezar a dar los conceptos y deducir los resultados necesarios para abordar nuestro problema, veamos un ejemplo para motivar lo antes mencionado:

Ejemplo 2.2.1 [Ecuación del Calor] Deseamos estudiar las soluciones para el siguiente problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{en } \{x=0\} \cup \{x=\pi\} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^2(0,\pi) & \text{en } [0,\pi]. \end{cases}$$

Si aplicamos el método de separación de variables, i.e. las soluciones tienen la forma $u(x,t) = h(x)g(t)$, es fácil ver que la solución se puede expresar en serie de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \operatorname{sen} kx,$$

donde para cada k,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \operatorname{sen} kx \, \mathrm{d}x.$$

Por la identidad de Parseval, ya que $u_0 \in L^2$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dado que la serie (2.7) tiene un factor de decaimiento e^{-k^2t} para $t > 0$, se puede probar que la solución es de clase C^∞ en sus dos variables si $t > 0$.

También notemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (u(x,t) - u_0(x))^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi |\sum_{k=1}^\infty a_k(e^{-k^2t} - 1)\,\mathrm{sen}\ kx|^2\,\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty a_k^2(e^{-k^2t} - 1)^2 \to 0 \text{ si } t \to 0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

En otras palabras, $u \to u_0$ en L^2. Sabemos que la solución es única bajo condición inicial y podemos pensar a u como la imagen de u_0 bajo el mapeo $S(t)$, es decir,

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{-k^2t}\,\mathrm{sen}\ kx. \tag{2.8}$$

De esto último, podemos deducir que $S(t)$ es un operador lineal de L^2 en L^2, con las siguientes propiedades:

(i) Por (2.8), S(0)=I, y para cada $t_1, t_2 \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}S(t_2)S(t_1)u_0(x) &= \sum_{k=1}^\infty (a_k e^{-k^2t_1})e^{-k^2t_2}\ kx\\ = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{-k^2(t_1+t_2)}\,\mathrm{sen}\ kx &= S(t_2 + t_1)u_0(x).\end{aligned}$$

(ii) Como u_0 es cualquier función en L^2, tenemos que

$$S(t_2 + t_1) = S(t_2)S(t_1) = S(t_1)S(t_2).$$

(iii) Por la igualdad de Parseval, podemos ver que

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty a_k^2 e^{-2k^2t}\\ &\leq e^{-2t}\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^\infty a_k^2 = e^{-2t}\,\|u_0\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $t \geq 0$ tenemos que $\|S(t)\| \leq 1$.

(iv) Así como en (2.7), podemos mostrar que si $u_0 \in L^2$, entonces $S(t)u_0 \in C([0,\infty), L^2(0,\pi))$, es decir, podemos pensar a $u(x,t)$ como una función continua con valores en L^2.

Si una familia $\{S(t); t \geq 0\}$ de operadores cumple con las propiedades (i)-(iv), se dice que que $S(t)$ es un semigrupo lineal fuertemente continuo de contracciones, o bien, un semigrupo C_0 en un espacio de Banach.

El ejemplo anterior es un caso particular para el cual utilizamos la teoría de semigrupo. De hecho, encontrar un semigrupo es equivalente a encontrar soluciones de una ecuación y éste solo depende de la condición inicial. Podemos mencionar que éste marco teórico es muy conveniente para estudiar los problemas de evolución en EDP. Más aún, también lo es para el estudio de soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman y poder postular principios de programación dinámica en un marco más general, es decir, no solo para EDP, sino también para EDO, ecuaciones en diferencias o procesos estocásticos [FS92],[E02].

Definición 2.2.1 *Sea B un espacio de Banach. Decimos que una familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados de B en B que cumple con*

1. *$S(0)u = u$ para $u \in B$,*
2. *S(t+s)u=S(t)S(s)u=S(s)S(t)u para cualquier $s, t \geq 0, \quad u \in B$,*
3. *el mapeo $t \to S(t)u$ es continuo de $[0,\infty)$ a B,*

es un semigrupo.

Si además, $\|S(t)\| \leq 1$ para $t \geq 0$, donde $\|\cdot\|$ es la norma del operador, entonces decimos que el semigrupo es de contracciones. En este caso $\|S(t)u\| \leq \|u\|$ para $u \in B$, $t \geq 0$.

Como mencionamos al principio de esta sección, primero deseamos estudiar el caso de la ecuación asociado a (2.6) con $F \equiv 0$, es decir,

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0. \tag{2.9}$$

También mostraremos como asociar un semigrupo a esta ecuación. Para esto, veremos como relacionar al operador $\mathcal{A}$ con $S(t)$. Más adelante veremos como es el semigrupo relacionado a (2.6) a partir de (2.9).

Definición 2.2.2 (Generador Infinitesimal) *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo de contracciones, definido en* B *un espacio de Banach y* $D(\mathcal{A}) \subset B$ *un subconjunto de* B *tal que*

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ u \in B \middle| \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe } \right\}$$

es decir, $S(t)u$ *es diferenciable en* 0 *por la derecha y*

$$-\mathcal{A}u := \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}.$$

Al operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to B$ *se le conoce como el generador infinitesimal del semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *y a* $D(\mathcal{A})$ *su dominio.*

Ahora bien, por la definición anterior, podemos notar que dado un semigrupo, en principio se puede calcular su generador y éste tiene varias propiedades inmediatas, como la linealidad. Por otro lado, podríamos preguntarnos, dado un generador, ¿quién es el semigrupo asociado o como lo encontramos?. Más adelante abordaremos esta pregunta, pero primero veamos que propiedades cumple $\mathcal{A}$.

Teorema 2.2.1 *Supongamos que* $u \in D(\mathcal{A})$*, entonces para cada* $t > 0$ *tenemos que*

(i) $S(t)u \in D(\mathcal{A})$ *(también para* $t = 0$*),*

(ii) $\mathcal{A}S(t)u = S(t)\mathcal{A}u$*,*

(iii) $S(t)u \in C^1([0,\infty); B)$ *y*

(iv) $(S(t)u)' = -\mathcal{A}S(t)u$*.*

(v) $D(\mathcal{A})$ *es denso y* $\mathcal{A}$ *cerrado en* B*.*

(vi) Para cada $t > 0$ *y* $u \in B$*,* $\int_0^t S(y)u \, \mathrm{d}y \in D(\mathcal{A})$ *y*

$$S(t)u - u = -\int_0^t \mathcal{A}S(y)u \, \mathrm{d}y = -\int_0^t S(y)\mathcal{A}u \, \mathrm{d}y, = -\mathcal{A}\int_0^t S(y)u \, \mathrm{d}y$$

Demostración.

1. Sea $u \in D(\mathcal{A})$, esto implica que

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+} \frac{S(t)S(s)u - S(t)u}{s} &= \lim_{s\to 0^+} S(t)\left[\frac{S(s)u-u}{s}\right] \\ &= S(t)\lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)u-u}{s} = -S(t)\mathcal{A}u.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, hemos probado (i) y (ii).

2. Si además, consideramos $h, t > 0$, entonces

$$\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)\mathcal{A}u = S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) - S(t)\mathcal{A}u$$

$$= S(t-h)\left(\frac{S(t)u-u}{h} - \mathcal{A}u\right) + (S(t-h) - S(t))\mathcal{A}u \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

   por continuidad de $S(t)$ y

$$\|S(t-h)\| \leq 1 \text{ y } \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)u-u}{h} = \mathcal{A}u.$$

   Por tanto

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)\mathcal{A}u.$$

   Análogamente

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)u-u}{h} = S(t)\mathcal{A}u.$$

   Por lo tanto, la derivada de $S(t)u$ es igual a $S(t)\mathcal{A}u = \mathcal{A}S(t)u$, para cada $t > 0$. Como el mapeo $t \to \mathcal{A}S(t)u = S(t)\mathcal{A}u$ es continuo, obtenemos (iii) y (iv). Si integramos $(S(t)u)'$ de 0 a t, por propiedad de semigrupo ($S(0)u = u$), obtenemos las primeras dos igualdades de (vi).

3. Sea $u \in B$ y definamos

$$u^t = \int_0^t S(y)u\,\mathrm{d}y.$$

Por continuidad de $S(t)$, $\frac{u^t}{t} \to u$ en B, si $t \to 0^+$. Sea $h > 0$ y por definición de u^t, tenemos que

$$S(h)u^t - u^t = \frac{1}{h}\left[S(h)\left(\int_0^t S(y)u\,\mathrm{d}y\right) - \left(\int_0^t S(y)u\,\mathrm{d}y\right)\right] =$$

$$\frac{1}{h}\int_0^t S(y+h)u - S(y)u\,\mathrm{d}y = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(y)u\,\mathrm{d}y - \frac{1}{h}\int_0^h S(y)u\,\mathrm{d}y$$
$$\to S(t)u - u, \text{ si } h \to 0^+,$$

ya que $S(h+y)u = S(h)S(y)u$. Por lo tanto, $u^t \in D(\mathcal{A})$ y la última igualdad en (vi) queda demostrada.

4. Sea $u_k \in D(\mathcal{A})$ y supongamos que $\mathcal{A}u_k \to v$ en B, si $u_k \to u$. Queremos ver que $u \in D(\mathcal{A})$, $v = \mathcal{A}u$. Por lo anterior, sabemos que

$$S(t)u_k - u_k = -\int_0^t S(y)\mathcal{A}u_k\mathrm{d}y.$$

Ahora, si $k \to \infty$,

$$S(t)u - u = \int_0^t S(y)v\mathrm{d}y.$$

y

$$\frac{S(t)u-u}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t S(y)v\mathrm{d}y = v.$$

Por definición, $u \in D(\mathcal{A})$ y $v = \mathcal{A}u$.

□

Del teorema anterior, podemos notar que $u(t) = S(t)u_0$ satisface una EDO en un espacio de Banach, o bien, una ecuación integral, como en el caso de las EDO usuales. Para ver cuando un generador proviene de un semigrupo, primero necesitamos dar algunos conceptos que están relacionados con propiedades del operador $\mathcal{A}$.

Observación 2.2.1 Una consecuencia de que $\mathcal{A}$ sea cerrado es que $D(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{D(\mathcal{A})} = \left(\|u\|^2 + \|\mathcal{A}u\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

conocida como la norma de la gráfica. Además, $D(\mathcal{A})$ está encajado de forma continua en B.

El concepto que definiremos a continuación se puede interpretar como la forma algebraica de integrar una EDO, o más en concreto, un cierto operador inverso llamado *operador resolvente*:

Definición 2.2.3 (Operador Resolvente) *Sea $\mathcal{A}$ un operador lineal cerrado en B con dominio $D(\mathcal{A})$.*

(i) Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ pertenece a $\rho(\mathcal{A})$, el conjunto resolvente de $\mathcal{A}$, si el operador

$$\lambda I + \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to B$$

es biyectivo.

(ii) Si $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, el operador resolvente $\mathcal{R}_\lambda : B \to B$ esta definido por

$$\mathcal{R}_\lambda u := (\lambda I + \mathcal{A})^{-1} u.$$

Además, $\mathcal{R}_\lambda : B \to D(\mathcal{A})$ es un operador lineal acotado y

$$\mathcal{A}\mathcal{R}_\lambda u = \mathcal{R}_\lambda \mathcal{A} u \quad \text{si } u \in D(\mathcal{A}).$$

Teorema 2.2.2 *(i) Si $\lambda, \mu \in \rho(\mathcal{A})$, tenemos que*

$$\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu = (\lambda - \mu)\mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_\mu$$

(ii) Si $\lambda > 0$, entonces $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ y

$$\mathcal{R}_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, \mathrm{d}t \quad (u \in B),$$

y $\|\mathcal{R}_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Es decir, el operador resolvente es la transformada de Laplace del semigrupo.

Demostración. Véase [E02] pag. 418.

□

Observemos que en el resultado anterior, $\mathcal{A}$ solamente es un operador lineal cerrado y no estamos suponiendo que sea un generador infinitesimal. A continuación presentaremos condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un generador infinitesimal $\mathcal{A}$ proviene de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$:

Teorema 2.2.3 (Hille-Yosida) *Sea $\mathcal{A}$ un operador lineal cerrado, densamente definido en B. Entonces $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ $\Leftrightarrow$*

$$(0,\infty) \subset \rho(\mathcal{A}) \text{ y } \|\mathcal{R}_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ para } \lambda > 0.$$

Demostración.

1. Si $\mathcal{A}$ es un generador, por el resultado anterior, tenemos que el intervalo $(0,\infty) \subset \rho(\mathcal{A})$. Para obtener la segunda parte, usando el mismo resultado, notemos que

$$\left\| \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)u \,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_0^h e^{-\lambda t} \|S(t)u\| \,\mathrm{d}t \leq \|u\| \int_0^h e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t$$

   y el lado derecho de la desigualdad converge a $1/\lambda$ si $h \to \infty$. Por consiguiente, tenemos que

$$\|\mathcal{R}_\lambda u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|u\| .$$

   De esta última desigualdad, podemos concluir $\Rightarrow$.

2. Mostremos $\Leftarrow$. Sea $\lambda > 0$ y definamos

$$\mathcal{A}_\lambda := -\lambda I + \lambda^2 \mathcal{R}_\lambda = \lambda \mathcal{A} \mathcal{R}_\lambda.$$

   A este operador lo podemos pensar como una aproximación regularizada del operador $\mathcal{A}$ y se le conoce como *la aproximación de Yosida* de $\mathcal{A}$. La razón para denominar a $\mathcal{A}_\lambda$ como una aproximación es porque

$$\mathcal{A}_\lambda u \to \mathcal{A}u \quad \text{si } \lambda \to \infty \quad (u \in D(\mathcal{A})).$$

   Para mostrar lo anterior, notemos que $\lambda \mathcal{R}_\lambda u - u = \mathcal{A}\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda \mathcal{A} u$, $\|\lambda \mathcal{R}_\lambda u - u\| \leq \|\mathcal{R}_\lambda\| \|\mathcal{A}u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|\mathcal{A}u\| \to 0$. Por tanto, $\lambda \mathcal{R}_\lambda u \to u$, si $\lambda \to \infty$ y $u \in D(\mathcal{A})$. Recordemos que $\|\lambda \mathcal{R}_\lambda u\| \leq 1$ y $D(\mathcal{A})$ es denso, entonces

$$\lambda \mathcal{R}_\lambda u \to u \text{ si } \lambda \to \infty \text{ si } u \in B.$$

   Si $u \in D(\mathcal{A})$, tenemos que

$$\mathcal{A}_\lambda u = \lambda \mathcal{A} \mathcal{R}_\lambda u = \lambda \mathcal{R}_\lambda \mathcal{A} u.$$

   Con esto último hemos probado nuestra afirmación.

3. Definamos
$$S_\lambda(t) := e^{t\mathcal{A}_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t \mathcal{R}_\lambda} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} \mathcal{R}_\lambda^k.$$
Como $\|\mathcal{R}_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$,
$$\|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} \|\mathcal{R}_\lambda\|^k \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1.$$
A partir de lo anterior, es fácil ver que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones con generador $\mathcal{A}_\lambda$ y $D(\mathcal{A}_\lambda) = B$.

4. Sea $\lambda, \mu > 0$. Como $\mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_\mu \mathcal{R}_\lambda$, notemos que $\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\lambda$ y
$$\mathcal{A}_\mu S(t)_\lambda = S(t)_\mu \mathcal{A}_\lambda, \quad \text{para cada } t > 0.$$
Entonces, podemos calcular
$$\begin{aligned} S(t)_\lambda u - S(t)_\mu u &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left[S_\mu(t-s) S_\lambda(s) u \right] \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t S_\mu(t-s) S_\lambda(s) (\mathcal{A}_\lambda u - \mathcal{A}_\mu u) \, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$
ya que $(S_\lambda(t)u)' = \mathcal{A}_\lambda S_\lambda(t) u = S_\lambda(t) \mathcal{A}_\lambda u$. Esto implica que
$$\|S_\lambda u - S_\mu u\| \leq \|\mathcal{A}_\lambda u - \mathcal{A}_\mu u\| \to 0,$$
si $\lambda, \mu \to \infty$. Tenemos que
$$S(t)u : \lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda(t) u$$
existe para cada $t \geq 0$, $u \in D(\mathcal{A})$. Como $\|S_\lambda(t)\| \leq 1$, el último límite existe para todo $u \in B$, uniformemente en t para subconjuntos compactos de $[0, \infty)$. Por propiedades del límite, es directo probar que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones en B.

5. Para concluir la demostración, basta que verifiquemos que $\mathcal{A}$ es el generador de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Sea A el correspondiente generador. Sabemos que
$$S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s) \mathcal{A}_\lambda u \, \mathrm{d}s$$

y por la desigualdad del triángulo

$$\|S_\lambda \mathcal{A}_\lambda u - S\mathcal{A}u\|\,| \leq \|S_\lambda\|\,\|\mathcal{A}_\lambda u - \mathcal{A}u\| + \|(S_\lambda - S)\mathcal{A}u\| \to 0,$$

si $\lambda \to \infty$ y $u \in D(\mathcal{A})$ y obtenemos

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)\mathcal{A}u\,\mathrm{d}s.$$

Por tanto, $D(\mathcal{A}) \subset D(A)$ y $Au = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u-u}{t} = \mathcal{A}u$.
Si $\lambda > 0$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \cap \rho(A)$, tenemos que

$$(\lambda I - A)(D(\mathcal{A})) = (\lambda I - \mathcal{A})(D(\mathcal{A})) = B,$$

como consecuencia de la hipótesis y concluimos que $(\lambda I - A)|_{D(\mathcal{A})}$ es inyectivo y suprayectivo. Con esto último, llegamos a que $D(A) = D(\mathcal{A})$.

□

Ahora bien, aún necesitamos dar más condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando $\mathcal{A}$ es el generador de un semigrupo. Por ejemplo, si B es un espacio de Hilbert, la caracterización es más sencilla y es un caso que es abordado con frecuencia. Veamos primero una definición y después una serie de resultados que conectan estas ideas:

Definición 2.2.4 (Operador Maximal Acretivo) *Sea $\mathcal{A}$ un operador lineal definido en un espacio de Banach B, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset B \to B$. Si para cualesquiera $u, v \in D(\mathcal{A})$ y cualquier $\lambda > 0$,*

$$\|u - v\| \leq \|u - v + \lambda(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v)\|,$$

decimos que $\mathcal{A}$ es un operador acretivo. Si además, $\mathcal{A}$ es denso y $I + \mathcal{A}$ es suprayectivo, i.e., $R(I + \mathcal{A}) = B$, entonces $\mathcal{A}$ es m-acretivo.

Lema 2.2.1 *Si $\mathcal{A}$ es m-acretivo , entonces $\mathcal{A}$ es cerrado y $R(I + \lambda\mathcal{A}) = B$, para toda $\lambda > 0$, con $\left\|(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}\right\| \leq 1$.*

Demostración.

1. Primero mostremos que $\mathcal{A}$ es cerrado. Sea $u_n \in D(\mathcal{A})$, $u_n \to u$ y $\mathcal{A}u_n \to v$. Entonces

   $$u_n + \mathcal{A}u_n = (I + \mathcal{A})u_n \to u + v.$$

   Por definición del operador $\mathcal{A}$, $(I+\mathcal{A})^{-1}$ es un operador continuo de B en $D(\mathcal{A}) \subset B$. Entonces $u = (I+\mathcal{A})^{-1}(u+v)$ y esto muestra que $u \in D(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}u = v$, y por lo tanto , $\mathcal{A}$ es cerrado.

2. Para la segunda afirmación, si $\lambda_0 > 0$ tal que $R(I+\lambda_0\mathcal{A}) = B$, entonces para cualquier $\lambda > \lambda_0/2$, $R(I+\lambda\mathcal{A}) = B$, es decir, para cualquier $v \in B$ y λ la ecuación

   $$u + \lambda\mathcal{A}u = v$$

   tiene solución. En efecto, podemos reescribir la ecuación anterior como

   $$u + \lambda_0\mathcal{A}u = \frac{\lambda_0}{\lambda}v + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u,$$

   que equivalentemente, como $(I+\lambda_0\mathcal{A})^{-1}$ es invertible,

   $$u = (I+\lambda_0\mathcal{A})^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}v + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u\right).$$

   Notemos que $\left\|(I+\lambda\mathcal{A})^{-1}\right\| \le 1$ se sigue inmediatamente de la definición de m-acretividad de $\mathcal{A}$, ya que

   $$\|u\| = \left\|(I+\lambda\mathcal{A})^{-1}v\right\| \le \|v\|,$$

   lo que implica $\left\|(I+\lambda\mathcal{A})^{-1}\right\| \le 1$. Usando este hecho, llegamos a que la ecuación anterior a la desigualdad es una contracción si

   $$\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1,$$

   para $\lambda > \lambda_0/2$. Por el teorema de la contracción, esa ecuación tiene una única solución $u \in D(\mathcal{A})$. Para concluir, notemos que el argumento anterior funciona para toda $\lambda > \lambda_0/2^n$ y tomando límite cuando $n \to \infty$, obtenemos el resultado.

□

Por el resultado que acabamos de mostrar, podemos notar que una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{A}$ se el generador de un semigrupo es que sea m-acretivo . A continuación veremos que condiciones son equivalentes si B es un espacio de Hilbert:

Lema 2.2.2 *Supongamos que H es un espacio de Hilbert. Entonces las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{A}$ sea m-acretivo son:*

(i) $Re(\mathcal{A}u, u) \geq 0$ *para todo* $u \in D(\mathcal{A})$,

(ii) $R(I + A) = H$.

Demostración. Véase [Zh04] pag. 33.

□

A partir de este punto, utilizaremos las herramientas que hemos ido construyendo para resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \mathcal{A}u = 0, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

donde $\mathcal{A}$ es m-acretivo en un espacio de Banach B con la condición inicial $u_0 \in D(\mathcal{A})$.

Teorema 2.2.4 *El sistema (2.10) tiene una única solución tal que*

$$u \in C^1([0, \infty); D(\mathcal{A})) \cap C([0, \infty); B).$$

Además, tenemos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq \|u_0\|, & \forall t \geq 0, \\ \left\| \frac{du}{dt} \right\| &\leq \|\mathcal{A}u_0\|, & \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $D(\mathcal{A})$ lo entendemos como un espacio de Banach con su respectiva norma (la de la gráfica).

Demostración. Por el teorema 2.2.3 y en particular, por lo realizado para demostrar el "sólo si ", tenemos que $u(t) = S(t)u_0$ es solución clásica. Para mostrar la unicidad, notemos que si u_1, u_2 son soluciones de (2.10), entonces $u_1 - u_2 = u$ es solución de la misma ecuación con $u_0 = 0$, con la regularidad antes mencionada. Sea $T > 0$ y consideremos $\phi(t) = S(t)u(T-t)$, para toda $t \in [0,T]$. Otra vez, por lo realizado en el"solo si " del teorema de Hille-Yosida, tenemos que

$$\frac{d\phi}{dt} = -S(t)\frac{du(T-t)}{dt} - S(t)\mathcal{A}u(T-t) = S(t)\mathcal{A}u(T-t) - S(t)\mathcal{A}u(T-t) \\ = 0.$$

Por lo tanto, ϕ es constante con $\phi(0) = \phi(T) = u(T) = S(T)u(0) = 0$ y concluimos que $u_1 = u_2$. Por otro lado,

$$\|u(t)\| = \|S(t)u_0\| \leq \|S(t)\| \, \|u_0\| \leq \|u_0\|,$$

ya que $\|S(t)\| \leq 1$. Además,

$$\frac{du}{dt} = -\mathcal{A}u = -\mathcal{A}S(t)u_0 = -S(t)\mathcal{A}u_0$$

y usando la desigualdad anterior, obtenemos el resultado.

□

En el caso en que $\mathcal{A} = -\Delta$, $B = L^2(\Omega)$, con Ω regular y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, tenemos la existencia y unicidad de la ecuación del calor por el teorema anterior. Solo falta ver que $-\Delta$ es m-acretivo (véase en la siguiente sección).

Con este ejemplo reiteramos un hecho conocido con respecto a la regularidad de las soluciones de esta ecuación para $t > 0$, aún cuando la condición inicial no lo sea. Así como en el caso de ecuaciones elípticas, podemos hablar de más regularidad lo cual sabemos que depende de la condición inicial u_0. En otras palabras, entre más regular sea la condición inicial, la solución conserva la misma regularidad. Más aún, si buscamos soluciones con condición inicial en B (no necesariamente en $D(\mathcal{A})$), tiene sentido y podemos mostrar que existe una única solución. Por esta razón, perderemos propiedades de la solución, como la diferenciabilidad y no necesariamente va a existir un tiempo para el cual la solución pertenezca a $D(\mathcal{A})$.

Veamos un ejemplo que motivará una nueva definición de solución e ilustremos algunos aspectos antes mencionados.

Ejemplo 2.2.2 Sea $B = \{u \,|\, u \in C[0,1],\ u(0) = 0\}$ y la norma

$$\|u\|_B = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)|,$$

con la cual B es un espacio de Banach. Consideremos el operador

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$$

con $D(\mathcal{A}) = \{u \,|\, u \in C^1[0,1],\, u(0) = u'(0) = 0\}$. Es un resultado conocido que $D(\mathcal{A})$ es denso en B. Para ver que $\mathcal{A}$ es m-acretivo , es suficiente mostrar que para cualquier $v \in B$, el problema

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{du}{dx} + u = v, \\ \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

tiene una única solución en $D(\mathcal{A})$ y $\left\|(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}\right\| \leq 1$. De hecho, no es difícil verificar que

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}y} v(y)\,\mathrm{d}y,$$

$u \in D(\mathcal{A})$ y

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \|v(y)\|_B \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}y}\,\mathrm{d}y \\ &= (1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x})\, \|v\|_B \leq \|v\|_B\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u\|_B \leq \|v\|_B$ y $\mathcal{A}$ es m-acretivo.

Ahora, la correspondiente ecuación de evolución asociada a $\mathcal{A}$ es

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0,1], \\ u = 0 & \text{en } \{x = 0\} \times (0,1], \\ u(x,0) = u_0(x) \in B & \text{en } [0,1]. \end{cases}$$

Si utilizamos el método de las características, podemos resolver el problema anterior y llegamos a que la solución es de la forma

$$u(x,t) = S(t)u_0 = \begin{cases} u_0(x-t) & \text{si } x - t \geq 0 \\ 0 & \text{si } \leq x \leq t. \end{cases}$$

Entonces, si u_0 es continua, pero no diferenciable, tenemos que $u(t) = S(t)u_0$ no es diferenciable para $t \geq 0$ y tampoco pertenece a $D(\mathcal{A})$.

Como mencionamos anteriormente, la condición inicial es un factor para que la solución no sea diferenciable. A pesar de este inconveniente, si el espacio B y el operador $\mathcal{A}$ tienen más propiedades, ayuda a que la solución sea más regular. Por ejemplo, si $B = H$, H un espacio de Hilbert y $\mathcal{A}$ autoadjunto y m-acretivo , tenemos el siguiente resultado de regularidad :

Teorema 2.2.5 *Para todo $u_0 \in H$, el problema (2.10) admite una única solución clásica $u(t) = S(t)u_0$ con*

$$u \in C([0,\infty); H) \cap C^k([0,\infty); D(\ A^j)) \quad \forall k, j = 0, 1, \ldots,$$

donde

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}^j) &= \{u \,|\, u \in D(\mathcal{A}^{j-1}),\, \mathcal{A}u \in D(\mathcal{A}^{j-1}),\, j \in \mathbb{N}\} \\ &= \{u \,|\, \mathcal{A}^j u \in B,\, j = 0, 1, \ldots \mathcal{A}^0 u = u\}, \end{aligned}$$

con la norma

$$\|u\|_{D(\mathcal{A}^m)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\| \mathcal{A}^j u \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Además, tenemos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \|u\| \leq &\quad \|u_0\|, & \forall t \geq 0, \\ \left\| \frac{du}{dt} \right\| = \|\mathcal{A}u(t)\| \leq &\quad \frac{1}{t} \|u_0\|, & \forall t > 0, \end{aligned}$$

Demostración. Véase [Zh04] pag 39.

□

Ahora bien, notemos que definir $u(t) = S(t)u_0$ aún cuando u_0 no este en $D(\mathcal{A})$ tiene sentido y puede ser pensada como una solución generalizada. A este tipo de soluciones les llamaremos *soluciones débiles*, es decir, cuando $u_0 \in B$. También, podemos ver que la definición anterior no restringe el tipo de ecuación a trabajar y por esta razón, adoptaremos este término para otras ecuaciones de evolución. En la siguiente sección abordaremos la existencia de soluciones para un caso más general.

2.3. Ecuaciones Semilineales

En esta sección mostraremos bajo que condiciones la ecuación

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{du(t)}{dt} + \mathcal{A}u = F(u(t)), \\[2ex]
u(0) = u_0,
\end{array}
\right.
\tag{2.11}
$$

admite una solución local, donde $\mathcal{A}$ es un operador m-acretivo que va de su dominio $D(\mathcal{A})$ a un espacio de Banach B, F es operador no lineal de B en B.

La idea principal para realizar lo anterior es utilizar las herramientas de semigrupo y dar argumentos de contracción, como en el caso de EDO. Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.3.1 (Condición de Lipschitz Local) *Sea B un espacio de Banach y $F : B \to B$ un operador no lineal. Decimos que F satisface una condición de Lipschitz local si para cualesquiera $u, v \in B$ y $M > 0$, existe una constante L_M que solo depende de M tal que si $\|u\| \leq M$ y $\|v\| \leq M$,*

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L_M \|u - v\| .$$

Teorema 2.3.1 *Supongamos que $\mathcal{A}$ es un operador m-acretivo y F un operador no lineal que satisface una condición de Lipschitz local. Entonces para cualquier $u_0 \in B$ existe una constante $T > 0$ que sólo depende de $\|u_0\|$ tal que (2.11) en $[0, T]$ admite una única solución local débil $u \in C([0, T]; B)$ y cumple con*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau))\, \mathrm{d}\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Por otro lado, podemos extender la solución u a un intervalo máximo $[0, T^*)$ con las siguientes alternativas

(i) $T^* = \infty$, i.e., la solución es global, o

(ii) $T^* < \infty$ y

$$\lim_{t \to T^*} \|u(t)\| = \infty,$$

i.e., la solución estalla en tiempo finito.

Si además, $u_0 \in D(\mathcal{A})$, entonces u es Lipschitz continua en $[0,T^*)$ y clásica si:

(iii) B *es un espacio de Banach reflexivo, o*

(iv) $F : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ *con* $u \in C^1([0,T^*);B) \cap C([0,T^*);D(\mathcal{A}))$.

Demostración.

1. Sea L la constante de Lipschitz correspondiente a $M = \|u_0\| + 1$ y T una constante positiva tal que $T < \frac{1}{L}$.

   Definamos $\mathscr{E} = \{u \in C([0,T];B) \mid \|u(t)\| \leq M, \forall t \in [0,T]\}$, con la norma

   $$\|u\|_{\mathscr{E}} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| .$$

   Es fácil verificar que $\mathscr{E}$ es convexo y cerrado en $C([0,T];B)$.

   Ahora, consideremos la función

   $$\phi(u) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-y)F(u(y))\,\mathrm{d}y$$

   definida en $\mathscr{E}$. Para cualquier $u \in \mathscr{E}$, tenemos que

   $$\|\phi(u)\|_{\mathscr{E}} \leq \|S(t)u_0\| + \int_0^T \|S(t-y)F(u(y))\|\,\mathrm{d}y \leq \|u_0\| +$$
   $$\int_0^T \|F(0)\|\,\mathrm{d}y + \int_0^T \|F(u(y)) - F(0)\|\,\mathrm{d}y \leq \|u_0\| + T(\|F(0)\| + LM).$$

   La segunda desigualdad es por que $\|S(t)\| \leq 1$, la condición de Lipschitz para F y $\|u\| \leq M$.

   Si T es tal que

   $$T < \min\left(\frac{1}{L}, \frac{1}{\|F(0)\| + LM}\right),$$

entonces $\phi(u)$ manda $\mathscr{E}$ en si mismo. Más aún, si $u_1, u_2 \in \mathscr{E}$,

$$\begin{aligned}\|\phi(u_1) - \phi(u_2)\| &= \sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t S(t-y)(F(u_1(y)) - F(u_2(y)))\,\mathrm{d}y\right\| \\ \leq LT\,\|u_1 - u_2\|_{\mathscr{E}}\,,\end{aligned}$$

es decir, $\phi(u)$ es contracción en $\mathscr{E}$ y podemos concluir que ϕ tiene un punto fijo, que es la correspondiente solución débil de (2.11).

2. Para probar la unicidad, sean $u_1, u_2 \in C([0,T];B)$ dos soluciones y sea $u = u_1 - u_2$. Entonces

$$u(t) = \int_0^t S(t-y)(F(u_1) - F(u_2))\,\mathrm{d}y, \quad \|u(t)\| \leq L\int_0^t \|u(y)\|\,\mathrm{d}y.$$

Por la desigualdad de Gronwall, podemos deducir que $\|u(t)\| = 0$ y por consiguiente, $u_1 = u_2$. Si $u_0 \in D(\mathcal{A})$, $h > 0$ tal que $t + h \in (0,T)$ y $\widehat{u}(t) = u(t+h)$, vemos que $\widehat{u}(t)$ es una solución débil de (2.11) con condición inicial $u(h)$. Además,

$$\|u(t+h) - u(t)\| = \|\widehat{u}(t) - u(t)\| \leq \|u(h) - u_0\|\,e^{Lt},$$

por la desigualdad de Gronwall y por sus respectivas representaciones en términos de $S(t)$,u_0 y $u(h)$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\|u(h) - u_0\| &= \left\|S(h)u_0 - u_0 + \int_0^h S(h-y)F(u)\,\mathrm{d}y\right\| \\ &\leq \left\|\int_0^h S(y)\mathcal{A}u_0\,udy\right\| + h\,\|F(u_0)\| + L\,\|u - u_0\| \\ &\leq (\|\mathcal{A}u_0\| + \|F(u_0)\|)h + L\,\|u - u_0\|\,.\end{aligned}$$

Nuevamente por la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\|u(h) - u_0\| \leq (\|\mathcal{A}u_0\| + \|F(u_0)\|)he^{Lh}$$

y por consiguiente, si $t_1, t_2 \in [0,T]$, deducimos

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| \leq (\|\mathcal{A}u_0\| + \|F(u_0)\|)|t_1 - t_2|e^{2LT},$$

es decir, u es Lipschitz.

3. Si B es reflexivo, con $u_0 \in D(\mathcal{A})$, tenemos que $F(u(t))$ es Lipschitz en t, ya que F es Lipschitz. Se puede mostrar que $f' \in L^1([0,T];B)$ y f Lipschitz, entonces

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(y)\,\mathrm{d}y,$$

para cualquier función Lipschitz de $[0,T]$ a B (véase [Zh04], pag. 45).

Ahora bien, si $g \in L^1([0,T];B)$, entonces

$$w(t) = \int_0^t S(t-y)g(y)\,\mathrm{d}y \in C([0,T;B]),$$

ya que

$$\begin{aligned} w(t+h) - w(t) &= \int_0^{t+h} S(t+h-y)g(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^t S(t+-y)g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (S(h)-I)w(t) + \int_t^{t+h} S(t+h-y)g(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

Además, si $h \to 0$, entonces

$$\|w(t+h) - w(t)\| \leq \|(S(h)-I)w(t)\| + \int_t^{t+h} \|g(y)\|\,\mathrm{d}y \to 0,$$

donde usamos la continuidad de $S(t)$ y la continuidad absoluta de $\|g\| \in L^1[0,T]$. Por otro lado, notemos que para casi toda $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \frac{w(t+h)-w(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(y)f(t+h-y) - f(t-y)\,\mathrm{d}y \\ &+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(y)f(t+h-y)\,\mathrm{d}y \longrightarrow \frac{dw}{dt} \quad \text{si } h \to 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= S(t)f(0) + \int_0^t S(y)f'(t-y)\,\mathrm{d}y \\ &= S(t)f(0) + \int_0^t S(t-y)f'(y)\,\mathrm{d}y \in C([0,T];B). \end{aligned}$$

Y por consiguiente, para casi toda t, si $f(t) = F(u(t))$

$$\frac{dw}{dt} = -\mathcal{A}w + F(u).$$

Como $w, F(u) \in C([0,T];B)$ y por la igualdad anterior, para casi toda t, $\mathcal{A}w = v \in C([0,T];B)$. Como $\mathcal{A}$ es un operador cerrado, podemos concluir que $w \in C([0,T];D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,T];B)$ y por tanto, solución clásica.

4. Si $F : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$, sea $B_1 = D(\mathcal{A})$, $A_1 = \mathcal{A}$ y $D(A_1) = D(\mathcal{A}^2) \mapsto B_1$. Entonces B_1 es un espacio de Banach y A_1 es un operador densamente definido de $D(\mathcal{A}^2)$ en B_1.

   Primero probaremos que A_1 es m-acretivo en B_1. Sea $u, v \in D(\mathcal{A}^2)$, como $\mathcal{A}$ es acretivo en By usando la definición de $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u-v+\lambda(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v)\|_{D(\mathcal{A})} &= \Big(\|u-v+\lambda(\mathcal{A}u-\mathcal{A}v)\|^2 \\
\text{por def. de la norma en } D(\mathcal{A}) &+ \left\|\mathcal{A}u-\mathcal{A}v+\lambda(\mathcal{A}^2u-\mathcal{A}^2v)\right\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\text{por m-acretividad} &\geq \Big(\|u-v\|^2+\|\mathcal{A}u-\mathcal{A}v\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u-v\|_{D(\mathcal{A})},
\end{aligned}$$

   i.e., A_1 es en B_1. Además, si $v \in B$, existe un único $u \in D(\mathcal{A})$ tal que $u + \mathcal{A}u = v$, por ser $\mathcal{A}$ m-acretivo . Ahora, si consideramos $v \in D(\mathcal{A})$, la ecuación anterior admite una única solución $u \in D(\mathcal{A})$ y por tanto, $\mathcal{A}u = v - u \in D(\mathcal{A})$. Entonces $u \in D(\mathcal{A}^2)$, i.e., A_1 es m-acretivo en B_1.

   Sea $S_1(t)$ el semigrupo generado por A_1. Si $u_0 \in D(A_1)$, entonces $u(t) = S_1(t)u_0 \in C([0,T];D(A_1)) \cap C([0,T];A_1)$ es la única solución de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 \\ \\ u_0 = u_0. \end{cases}$$

   Por otro lado, $u(t) = S(t)u_0$ también es una solución clásica en el espacio $C([0,T];D(\mathcal{A})) \cap C([0,T];B)$. Esto nos indica que $S_1(t)$ es una restricción de $S(t)$ en B_1. Por lo antes probado, se tiene una solución débilmente única en $C([0,T],B_1)$ con

$$u(t) = S_1(t)u_0 + \int_0^t S_1(t-y)F(u(y))\,\mathrm{d}y,$$

o bien,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-y)F(u(y))\,\mathrm{d}y \quad \text{ en } D(\mathcal{A}).$$

Por el resultado enunciado al principio del inciso anterior y las estimaciones hechas para w, podemos concluir que u es un solución clásica.

5. Por último, mostremos (i) y (ii). Supongamos u_1,u_2 son soluciones en los intervalos $[0, T_1]$ y $[0, T_2]$, respectivamente. Si $T_1 < T_2$, por unicidad, tenemos que $u_1(t) = u_2(t)$, $\forall t \in [0, T_1]$. Podemos pensar a u_2 como una extensión de u_1. Esto define un orden parcial. Por el lema de Zorn, existe un T_{max} y $[0, T_{max})$ es el correspondiente intervalo máximo de existencia de la solución. Basta probar que si $T_{max} < \infty$, entonces la solución estalla.

   Supongamos que u no estalla. Entonces existe una constante $M > 0$ y una sucesión t_n, tal que $t_n \to T_{max}$ y $\|u(t_n)\| \leq M$. Consideremos

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \mathcal{A}v = F(v), \\ \\ v(0) = u(t_n). \end{cases}$$

   Sabemos que este problema admite una única solución en el intervalo $[0, \delta(M)]$. Podemos escoger n suficientemente grande de tal forma que $t_n + \delta > T_{max}$. Sea

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u(t) & 0 \ \leq t \leq t_n, \\ v(t - t_n) & t_n \leq t \leq t_n + \delta. \end{cases}$$

   Deseamos probar que $\overline{u}(t)$ es una solución débil de (2.11) en $[0, t_n + \delta]$, es decir, $\overline{u}(t)$ satisface la ecuación

$$\overline{u}(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-y)F(\overline{u}(y))\,\mathrm{d}y.$$

   Tenemos que

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-y)F(u(y))\,\mathrm{d}y \quad 0 \leq t \leq t_n,$$
$$v(t) = S(t)u(t_n) + \int_0^t S(t-y)F(v(y))\,\mathrm{d}y \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Si $t \in [0, \delta]$,

$\overline{u}(t + t_n) = v(t) = S(t)u(t_n) + \int_0^t S(t-y)F(v(y))\,\mathrm{d}y =$
$\int_0^t S(t-y)F(v(y))\,\mathrm{d}y + S(t)\left(S(t_n)u_0 + \int_0^t S(t_n - y)F(u(y))\,\mathrm{d}y\right) =$
$S(t+t_n)u_0 + \int_0^{t_n} S(t+t_n-y)F(u(y))\,\mathrm{d}y+$
$\int_{t_n}^{t+t_n} S(t+t_n-y)F(v(y-t_n))\,\mathrm{d}y = S(t+t_n)u_0+$
$\int_0^{t_n} S(t+t_n-y)F(\overline{u}(y))\,\mathrm{d}y + \int_{t_n}^{t+t_n} S(t+t_n-y)F(\overline{u}(y))\,\mathrm{d}y =$
$S(t+t_n)u_0 + \int_0^{t+t_n} S(t+t_n-y)F(\overline{u}(y))\,\mathrm{d}y.$

Si combinamos la última estimación con la representación de $u(t)$ en $[0, t_n]$, obtenemos que $\overline{u}(t)$ es solución débil en el intervalo $[0, t_n+\delta]$, y por tanto una contradicción al hecho de que $[0, T_{max}]$ era el intervalo más largo al que se podía extender la solución de (2.11).

$\square$

Por el resultado anterior, si probamos que $F(u) = -\lambda u + |u|^{p-1}u$ es localmente Lipschitz de B en B y $\mathcal{A} = -\Delta$ es m-acretivo, con condición inicial $u_0(x) \in D(\mathcal{A}) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $B = L^2(\Omega)$, habremos probado el teorema 2.1.1.

Para ver que $\mathcal{A} = -\Delta$ es m-acretivo, sea $g \in B$ y consideremos

$$\begin{cases} u - \Delta u = g & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema es equivalente a encontrar una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, la siguiente igualdad es válida

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gv\,\mathrm{d}x.$$

Es fácil ver que $a(u,v)$ es una forma bilineal coerciva y acotada. Por el teorema de Lax-Milgram, el problema anterior tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

Además,

$$a(u,u) = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega gu\,\mathrm{d}x \leq \|g\|_{L^2}\|u\|,$$

y por tanto

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \|g\|_{L^2} ,$$

es decir,

$$\left\|(I+\mathcal{A})^{-1}\right\| \leq 1.$$

Esto último prueba que $\mathcal{A}$ es m-acretivo. Para ver que $F(u)$ es localmente Lipschitz, basta mostrar que $f(u) = |u|^{p-1}u$ lo es. De hecho, como $u \in L^2(\Omega)$, entonces

$$\|\lambda u - \lambda v\| = \|\lambda(u-v)\| = |\lambda|\,\|u-v\| \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Ahora, como $f(x) = |x|^{p-1}x$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ si $1 < p < p^* = \frac{n+2}{n-2}$, entonces $f(u) \in C^1(B, B)$ si $u \in B$. Por el teorema del valor medio (véase [Jo05]), se sigue que $f(u)$ es localmente Lipschitz.

2.4. Existencia Global y Local

En esta sección discutiremos como caracterizar la existencia global y local de (2.1). Para ésto, veremos que lo anterior depende de la energía de la condición inicial y del problema elíptico asociado. De forma más precisa, por la propiedad decreciente de la energía de (2.1) y a partir de las soluciones dadas por el teorema del paso de montaña del problema elíptico asociado, se tienen cotas para mostrar lo primero mencionado. Se pueden consultar [GW05], [ABKQ], [I00], [IS00], etc. y las referencias en estos artículos.

Consideremos la ecuación

$$\text{(2.12)} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u - |u|^{p-1}u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T), \\ u(0,x) = u_0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

con las mismas condiciones para p y Ω que en las secciones anteriores de este capítulo. Ahora, consideremos los siguientes tres conjuntos a estudiar:

(i) $\mathcal{B} = \{u_0 \in H_0^1(\Omega) \,|\, u(t)$ solución de (2.12) estalla en tiempo finito $\}$,

(ii) $\mathcal{G} = \{u_0 \in H_0^1(\Omega) \,|\, u(t)$ solución de (2.12) existe para toda $t > 0\}$,

(iii) $\mathcal{G}_0 = \{u_0 \in \mathcal{G} \,|\, u(t) \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$ si $t \to \infty\}$.

Un resultado con respecto a estos conjuntos (véase [GW05]) es que $\mathcal{G}$ es cerrado, $\mathcal{B}$ es abierto y $\mathcal{G}_0 = int(\mathcal{G})$. De hecho, de lo anterior, podemos ver que los puntos en $\partial\mathcal{G}$ tienen un papel importante (véase el lema 2.13 y los teoremas 2.4.6 y 2.4.7) y nos servirá para el siguiente capítulo (véanse los teoremas 3.2.3 y 3.2.4).

De forma más precisa, para demostrar el teorema 3.2.3, necesitamos asegurar que con una condición inicial con energía más grande que la constante d (véase la siguiente pagina), las soluciones sean globales y éstas converjan a soluciones estacionarias no triviales.

Ahora bien, notemos que (2.1) y (2.12) difieren por un término, λu. De hecho, los mismos resultados se pueden aplicar a (2.1), ya que las estimaciones necesarias dependen su energía y podemos dominar la energía de (2.1) por la de (2.12), por la desigualdad de Poncaire. Por lo anterior, recordemos que el problema elíptico asociado a (2.12) es

$$\begin{cases} -\Delta u - |u|^{p-1}u = 0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

el cual sabemos que representa las soluciones estacionarias de (2.12). Por un lado, el funcional de energía asociado a esta última ecuación es

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x.$$

Por otro, también es equivalentemente considerar el siguiente funcional

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x$$

para buscar las soluciones de (2.13). La razón de lo anterior, se debe a que la ecuación de E-L es la misma, por la invariancia de las soluciones con respecto a reescalamientos, dilataciones y un múltiplo adecuado.

Ahora, por lo realizado en el capítulo 1, recordemos que (2.13) admite una solución de paso de montaña

$$d = \min_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \max_{s\geq 0} J(su).$$

Continuando, sabemos de este problema está relacionado con encontrar la constante de Sobolev $S(\Omega)$ y de forma explícita

$$d = \frac{p-1}{2(p+1)} S^{p+1/p-1}.$$

Sea $\mathbb{K} = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, u \geq 0$ c.s. en $\Omega\}$, el cono de funciones no negativas y la variedad de Nehari, $\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \,|\, K(u) = 0\}$.

Si estudiamos el comportamiento de la función $s \mapsto K(su)$ para funciones con $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$, se puede mostrar que cada linea empezando por el origen en $H_0^1(\Omega)$ intersecta a esta variedad. Podemos percatarnos que ésta última separa los siguientes conjuntos

$$\mathcal{N}_+ = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, K(u) > 0\} \text{ y } \mathcal{N}_- = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, K(u) < 0\}.$$

Recordemos que los niveles de energía de J son

$$J^k = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, J(u) < k\}.$$

De hecho, podemos caracterizar el nivel de energía d como

$$d = \min_{u \in \mathcal{N}} J(u). \tag{2.14}$$

Con esto último, podemos empezar a mostrar los resultados principales de esta sección:

Teorema 2.4.1 *Si $u_0 \in \mathcal{G}$, entonces para cualquier $k > 0$, tenemos que*

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t+k) - u(t)\|_{C^1} = 0,$$

donde $u(t) = S(t)u_0$ es la solución de (2.12) y $S(t)$ es el semigrupo asociado.

Demostración. Véase [GW05]

□

Teorema 2.4.2 *Las siguiente condiciones son suficientes :*

1. *Si $u_0 \in J^d \cap \mathcal{N}_+$, entonces $u_0 \in \mathcal{G}_0$, es decir, $J^d \cap \mathcal{N}_+ \subset \mathcal{G}_0$.*
2. *Si $u_0 \in J^d \cap \mathcal{N}_-$, entonces $u_0 \in \mathcal{B}$, es decir, es decir $J^d \cap \mathcal{N}_- \subset \mathcal{B}$.*

Para dar la demostración del teorema, necesitamos del siguiente resultado:

Lema 2.4.1 *Para cualquier $u \in \mathcal{N}_+$, $J(u) > 0$. Más aún, para toda $u \in \mathcal{N}$, tenemos que $J(u) = \max_{s \geq 0} J(su)$. Además, para cualquier $k > 0$, el conjunto $J^k \cap \mathcal{N}_+$ es acotado en $H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Para las primeras dos afirmaciones basta estudiar la monotonía de $J(su)$ para $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Para la última afirmación, basta notar que las condiciones $K(u) > 0$ y $J(u) < k$ implican que $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} < k\frac{2(p+1)}{p-1}$.

□

Demostración. de 2.4.2 Sea $u(t) = S(t)u_0$. Como $J(u_0) < d$ y la energía asociada es una función decreciente con respecto a t, tenemos que $J(u(t)) < d$ para toda $t \in [0, T)$. Por la caracterización de paso de montaña (2.14) $u \notin \mathcal{N}$, para toda $t \in [0, T)$ y por tanto, $u(t)$ no se puede aproximar a $\mathcal{N}$ si $t \to T$. De hecho, si $u_0 \in \mathcal{N}_-$, tenemos que $u(t) \in J^d \cup \mathcal{N}_-$ para toda t y, como no hay soluciones para toda t en $\mathcal{N}_-$, la solución estalla en tiempo finito por los teoremas 3 y 4 en [GW05].

Por otro lado, si $u_0 \in \mathcal{N}_+$, tenemos que $u(t) \in J^d \cap \mathcal{N}_+$ para toda t y permanece acotada por el lema anterior y por el teorema 3 en [GW05]. Esto muestra que $u_0 \in \mathcal{G}$. Como $u \equiv 0$ es la única solución de (2.13) en J^d, podemos concluir que $u_0 \in \mathcal{G}_0$.

□

El teorema 2.4.2 es importante ya que nos da una buena descripción del comportamiento de las soluciones de (2.12) dentro de un cierto rango de energía. De hecho, la existencia de soluciones globales y locales no se restringe a estos casos, como veremos en el siguiente resultado:

Teorema 2.4.3 *Para cualquier constante $M > 0$, existen soluciones de (2.12) $u, v \in \mathcal{N}_+ \cap \mathbb{K} \cap C_0^1(\Omega)$ con $J(u), J(v) \geq M$, tal que $u \in \mathcal{G}_0$, $v \in \mathcal{B}$.*

Antes de dar una demostración de lo anterior, necesitamos del siguiente resultado. Para ver su demostración, se puede consultar [GW05]:

Teorema 2.4.4 *Si v es una solución no trivial de (2.13) y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ con $u_0 \not\equiv v$, entonces*

(i) Si $v^+ \neq 0$ y $u_0 \geq v$, entonces $u_0 \in \mathcal{B}$.

(ii) Si $v^- \neq 0$ y $u_0 \leq v$, entonces $u_0 \in \mathcal{B}$.

(iii) Si $v > 0$ y $-v \leq u_0 \leq v$, entonces $u_0 \in \mathcal{G}_0$.

Demostración. Sea $M > 0$ y f solución positiva de (2.13). Consideremos $c > 0$ y $\Omega' \subset \Omega$ un conjunto abierto tal que $f > c$ en Ω'. Para $k > 0$, sea $\phi_k \in C_0^1(\Omega')$, tal que

$$\|\phi_k\|_{H_0^1} \geq k \quad \text{y} \quad \|\phi_k\|_{L^\infty} \leq c.$$

Para k fija, definimos $w_+ = f + \phi_k$ y $w_- = f - \phi_k$. Entonces $w_\pm \in \mathbb{K}$ y

$$\begin{aligned} \|w_\pm\|_{H_0^1} &\geq \|\phi_k\|_{H_0^1} - \|v\|_{H_0^1} \geq k - \|f\|_{H_0^1} \\ \|w_\pm\|_{L^{p+1}} &\leq \|f\|_{L^{p+1}} + \|\phi_k\|_{L^{p+1}} \leq \|v\|_{L^{p+1}} + c|\Omega'|^{1/(p+1)}. \end{aligned}$$

Entonces, si k es suficientemente grande, tenemos que $J(w_\pm) \geq M$ y $K(w_\pm) > 0$. Por tanto, $w_\pm \in \mathcal{N}$. Para esta misma k, consideremos $u = w_-$ y $v = w_+$. Como $0 \leq u \leq f$ tenemos que $u \in \mathcal{G}_0$, por el teorema (2.4.4) (iii) y $v \in \mathcal{B}$ por (i).

□

Hasta el momento, solamente nos hemos restringido a los casos de soluciones que estallan o soluciones que convergen a cero. El siguiente resultado nos muestra que pasa con el resto de las soluciones globales en ciertos casos:

Lema 2.4.2 *Supongamos que Ω es un dominio que admite una solución positiva v de (2.13). Entonces,*

(i) para toda condición inicial $u_0 \in \partial\mathcal{G} \cap \mathbb{K}$, tenemos que

$$\|S(t)u_0 - v\|_{C^1} \to 0,$$

si $t \to \infty$,

(ii) para toda condición inicial $u_0 \in \partial\mathcal{G} \cap J^{2d}$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\|S(t)u_0 - v\|_{C^1} \to 0, \quad \textit{o bien} \\ &\|S(t)u_0 + v\|_{C^1} \to 0, \end{aligned}$$

si $t \to \infty$.

Demostración. Véase [GW05].

□

Es decir, hay soluciones globales que convergen a soluciones del caso estacionario. Este hecho será de gran utilidad cuando abordemos el caso de formación de patrones.

Hasta el momento, no hemos mencionado que ocurre cuando $p = p^*$. De hecho, varias cosas que hemos mostrado se cumplen para este caso, véase [I00], [IS00], [S00] y las referencias que se dan en estos artículos. No deberíamos sorprendernos por el hecho de que también hay grandes diferencias, ya que lo mismo ocurre en el caso estacionario y la dependencia con el caso evolutivo es fuerte. Ahora, daremos algunos resultados en esta dirección señalando las respectivas diferencias.

Lo primero que tenemos que mencionar es que la existencia y unicidad para un tiempo T, con condición inicial $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ de (2.12) y $p = p^*$, se sigue de forma análoga al caso que hemos trabajado. Además, seguimos teniendo la continuidad en t a valores en $H_0^1(\Omega)$ y la diferenciabilidad para $t > 0$.

Ahora veamos el siguiente resultado que muestra las primeras diferencias entre los dos casos:

Proposición 2.4.1 *Sea* $1 < p \leq p^*$, $E = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, u$ *satisface (2.13)* $\}$, $W = (J^d \cap \mathcal{N}_+) \cup \{0\}$ *y* $V = J^d \cap \mathcal{N}_-$. *Entonces*

(i) W *es una vecindad acotada de* 0 *en* $H_0^1(\Omega)$.

(ii) W *y* V *están conectados por trayectorias en* $H_0^1(\Omega)$.

(iii) *Si* Ω *es un dominio estrellado y* $p = p^*$, $E \cap \mathbb{K} = \{0\}$. *Si* $1 < p < p^*$, $(E \cap \mathbb{K}) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

(iv) $\overline{W} = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, J(v) \leq d,\, I(v) > 0\} \cup \{0\}$, *si* $p = p^*$ *y si* $1 < p < p^*$, $\overline{W} = \{u \in H_0^1(\Omega) \,|\, J(v) \leq d,\, I(v) \geq 0\} \cup \{0\}$.

(v) $0 \notin \overline{V} = \{v \in H_0^1(\Omega) \,|\, J(v) \leq d,\, I(v) < 0\}$ *si* $p = p^*$ *y si* $1 < p < p^*$, $\overline{V} = \{v \in H_0^1(\Omega) \,|\, J(v) \leq d,\, I(v) \leq 0\}$.

(vi) $\overline{W} \cap \overline{V} = \emptyset$ *si* $p = p^*$. $\overline{W} \cap \overline{V} \neq \emptyset$ *si* $1 < p < p^*$.

Demostración. Véase [IS00].

□

Ahora, pensando en término de existencia de soluciones locales y globales, el siguiente resultado nos muestra otra gran diferencia con respecto a soluciones que estallan:

Teorema 2.4.5 *Sea Ω un dominio estrellado, $n \geq 3$, $p \in (1, p^*]$ y $u_0 \geq 0$. Si u es solución de (2.12) tenemos las siguientes alternativas:*

(i) Si $T < \infty$, entonces $\|u\|_{L^\infty} = \infty$ y $J(u) \to -\infty$.

(ii) Si $T = \infty$, entonces $\|u\|_{L^\infty} < \infty$ y $\|u\|_{L^\infty} = \infty$ solamente para el caso $p = p^*$. Además, si $\|u\|_{H_0^1} < \infty$ y $\lim_{t\to\infty} J(u) \geq 0$.

Demostración. Véase [S00], [IS00] y [I00].

□

Más adelante veremos como se demuestra parte de (ii) (véase teorema 2.4.6).

Es decir, cuando $p \in (1, p^*)$ las soluciones estallan en tiempo finito o son globales, mientras que en el caso $p = p^*$ también existen soluciones que estallan en tiempo infinito. De hecho, estamos interesados en las soluciones globales en ambos casos.

La condición $J(u) \geq 0$ parece sorprendente, pero podemos argumentar de la siguiente forma:

Para ambos casos, las soluciones globales convergen a soluciones no triviales de la ecuación estacionaria u_* o a 0 en $H_0^1(\Omega)$ y como J es decreciente, tenemos que $J(u_*) > 0$ si $u \to u_*$ y cero en el otro caso. La energía de la solución del caso estacionario es positiva por el teorema 3.1.2.

Para apoyar el argumento anterior, es conveniente ver el siguiente resultado:

Proposición 2.4.2 *Sea u solución de (2.12). Si existe $t_0 \in [0, T)$ tal que $u(t_0) \in W$ (respectivamente en V), entonces $u(t) \in W$ (respectivamente en V) para toda $t \in [t_0, T)$. Para el caso $p = p^*$, si $u(t_0) \in V$, entonces $T < \infty$. Si $T = \infty$, $u(t_0) \in W$ si y solamente si $u(t) \to 0$ en $H_0^1(\Omega)$ si $t \to \infty$.*

Demostración. Para el caso $p = p^*$, véase [IS00]. Si $1 < p < p^*$, se obtiene el resultado de teorema 2.4.2

□

En otras palabras, una solución global con condición inicial positiva no puede tener energía negativa si existe un tiempo en el cual la solución este en V.

Ahora, para el caso en el cual $u(t) \notin W \cup V$ daremos una caracterización de soluciones que existan de forma global, pero que no converjan a cero. Por lo antes mencionado, definimos $C_0 \geq 0$ como sigue

$$C_0 = \frac{2(p+1)}{p-1} \lim_{t\to\infty} J(u(t))$$

si u es global.

Teorema 2.4.6 *Sea Ω un dominio estrellado, $n \geq 3$, $p = p^*$ y $u_0 \geq 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $C_0 > 0$.
2. $J(u(t)) \geq d$ *en* $[0, \infty)$.
3. $u(t) \notin W \cup V$.
4. $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty$.

Antes de empezar a dar una demostración, podemos ver que se desprende el siguiente corolario con respecto al comportamiento de las soluciones globales:

Corolario 2.4.1 *Con las mismas condiciones del teorema anterior y u solución global, tenemos*

1. $u(t_0) \in W$ *para alguna* $t_0 \geq 0$*, donde* $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = \lim_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = 0$ *y* $C_0 = 0$ *o*
2. $u(t) \notin W \cup V$ *para toda* $t \geq 0$*, donde* $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty$, $0 < \liminf_{t\to\infty} \|\nabla u(t)\|_{L^2} < \infty$ *y* $C_0 > 0$.

Para ver una demostración de estos dos resultados, necesitamos de los siguientes hechos:

Si las soluciones son globales, como J es decreciente y

$$J(u(t)) + \int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s = J(u(0)),$$

la siguiente integral existe

$$\int_0^\infty \|u_t(s)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s$$

y por consiguiente, existe una subsucesión $\{t_j\}$ con $t_j \to \infty$ si $j \to \infty$ tal que

$$\|u_t(t_j)\|_{L^2} \to 0. \tag{2.15}$$

Por el hecho de que u es global, $\|u_t(t)\|_{L^2} \leq K$ para toda $t \geq 0$, con $K > 0$. Además, sabemos que

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} J(u(t)) = J(u_0) - \int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s.$$

Lema 2.4.3 *Si u es solución global y $\{t_j\}$ cumple la propiedad (2.15), entonces existe $M > 0$ tal que*

1. $\|\nabla u(t_j)\|_{L^2} \leq M$ *para toda* j,
2. $I(u(t_j)) \to 0$ *si* $j \to \infty$.
3. *Existe* $C_0 \geq 0$ *tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla u(t_j)\|_{L^2}^2 = \lim_{j\to\infty} \|u(t_j)\|_{L^{p+1}}^{p+1} = C_0$$

Demostración. Como

$$(u_t(t), u(t)) = -\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1},$$

las soluciones están acotadas y con una sucesión como en (2.15), tenemos que

$$|-\|\nabla u(t_j)\|_{L^2}^2 + \|u(t_j)\|_{L^{p+1}}^{p+1}| \leq K \|u_t(t_j)\|_{L^2}.$$

Es decir,

$$\|\nabla u(t_j)\|_{L^2}^2 = \|u(t_j)\|_{L^{p+1}}^{p+1} + o(1)$$

con $o(1) \to 0$ si $j \to \infty$. Además, notemos que

$$\begin{aligned} J(u(t)) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|\nabla u(t_j)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{p+1} I(u(t)) &= \frac{p-1}{2(p+1)} \|\nabla u(t_j)\|_{L^2}^2 + o(1) \\ &= J(u_0) - \int_0^{t_j} \|u_t(s)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s \leq J(u_0) \end{aligned}$$

si $j \to \infty$. De aquí es fácil ver que

$$C_0 = \frac{2(p+1)}{p-1} \lim_{j\to\infty} J(u(t_j)) =$$

$$\frac{2(p+1)}{p-1} \left(J(u_0) - \int_0^{\infty} \|u_t(s)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s \right) \geq 0. \tag{2.16}$$

Por la desigualdad anterior y por el teorema de encaje de Sobolev, obtenemos el resultado.

□

Ahora, daremos una demostración de 2.4.6:

La equivalencia de 2 y 3 es bastante sencilla, usando la caracterización de V y W. Para ver que 1 implica 2, supongamos que 2 es falso. Entonces, $J(u(t_0, x)) < d$ para algún $t_0 \in [0, \infty)$ y podemos ver que $u(t_0, x) \in W$. Por consiguiente $\|\nabla u(t_0, x)\|_{L^2} \to 0$ si $t \to \infty$ por la proposición 2.4.1 y $\lim_{t\to\infty} J(u(t, x)) = 0$. Por definición de C_0 esto implica que $C_0 = 0$ contradiciendo la hipótesis.

Para ver la otra equivalencia, notemos que si suponemos que $C_0 = 0$, por (2.16), podemos llegar a que $J(u(t_k, x)) < d$ para alguna k, lo cual contradice la hipótesis.

Falta mostrar la equivalencia de 1 y 4. Por un lado, por el lema 1.2.1 podemos encontrar una sucesión $\{t_j\}$ que cumpla (2.15)tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|u(t_j, x)\|_{L^{p+1}} = C_0,$$

Supongamos que el $\liminf_{t\to\infty} \|u(t, x)\|_{L^\infty} < \infty$. Como Ω es un dominio estrellado, por el teorema 2.4.5 llegamos a que $\lim_{t\to\infty} \|u(t, x)\|_{L^\infty} = 0$ y por tanto, $C_0 = 0$ lo cual contradice 1.

La demostración de implicación faltante se puede ver en [IS00]. Con esto concluimos la demostración del resultado

$\square$

El siguiente resultado nos garantiza la convergencia de las soluciones globales a soluciones del problema estacionario:

Teorema 2.4.7 *Sea $1 < p < p^*$ y u una solución global de (2.12). Entonces existe una sucesión $\{t_n\}$ con $t_n \to \infty$ si $n \to \infty$ tal que $u(t_n, x)$ es relativamente compacta en $H_0^1(\Omega)$ de tal forma que existe un elemento u_∞ solución de la ecuación estacionaria asociada, con $u \to u_\infty$ en $H_0^1(\Omega)$ si $n \to \infty$ bajo una subsucesión. De hecho, si $C_0 > 0$, u_∞ es una solución no trivial. Si $C_0 = 0$, $u_\infty = 0$.*

La demostración de este resultado se sigue a partir de los resultados anteriores y del teorema 3.1.2. Véase [I00]. De hecho, una consecuencia directa de la demostración es la existencia de una sucesión de P-S para (2.12).

Con esto último terminamos este capítulo. En el siguiente, veremos como caracterizar geométricamente las soluciones a este tipo de problemas. En particular, ésto depende del dominio Ω. Además, veremos otro tipo de problemas de optimización donde (2.1) aparece como restricción.

Capítulo 3

Un Problema de Formación de Patrones y Aplicaciones en Control óptimo

En este capítulo, mostraremos algunas aplicaciones de una EDP parabólica semilineal usando las herramientas desarrolladas anteriormente. En la primera sección, daremos resultados de existencia de la EDP elíptica asociada a la ecuación parabólica. En la segunda sección, veremos un problema de formación de patrones recordando algunos resultados vistos en [GP07] y posteriormente, usaremos lo anterior para caracterizar las soluciones del caso parabólico. En la tercera sección, mostraremos dos problemas de optimización en el marco de la teoría de control óptimo ([AQ05]).

La motivación que tenemos para realizar lo anterior son las aplicaciones que se pueden plantear, por ejemplo, a problemas concernientes al secado de materias primas o el consumo de algún recurso natural en el marco de las ecuaciones del tipo Lotka-Volterra.

Para el primer caso, podemos modelar el proceso de secado mediante una EDP parabólica y el problema de control consiste en encontrar una estrategia en la cual la menor cantidad de materia prima resulte quemada. Para el segundo, la dinámica se modela con una ecuación del tipo antes mencionado, pero ahora deseamos maximizar la utilidad, que está en función de la venta y extracción del recurso. Para este caso, abordaremos el caso estacionario.

3.1. Caso Límite de la Condición de Palais-Smale

En el presente trabajo, el análisis que haremos está relacionado con el caso límite de una ecuación elíptica semilineal, es decir, tomaremos el límite cuando el parámetro $p \to p^*$ y veremos su relación con la condición de Palais-Smale, donde p^* es el exponente crítico de Sobolev. De forma más precisa, trabajaremos el problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + \lambda u - u|u|^{p^*-2} & = & 0 & \text{en } \Omega, \\ u & > & 0 & \text{en } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, $p^* = \frac{2n}{n-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Como ya vimos anteriormente, hay dos formas de abordar este problema, la primera sería buscar puntos críticos del funcional

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda|u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} \,\mathrm{d}x,$$

o bien, buscar mínimos del funcional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda|u|^2 \,\mathrm{d}x,$$

restringido al conjunto $M = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{L^{p^*}}^{p^*} = 1\}$.

Esto último es equivalente a minimizar el cociente de Sobolev

$$S_\lambda(u;\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda|u|^2 \,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^{p^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p^*}}},$$

para $u \neq 0$. Si $\lambda = 0$, denotamos a $\inf S_0(u;\Omega) = S(\Omega)$. Podemos mencionar los siguientes hechos del problema (3.1) (véase [St90] pag. 171):

1. Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, entonces $S(\Omega)$ nunca se alcanza.
2. Si removemos la condición $u > 0$ y consideramos $\lambda \geq 0$, Ω un dominio suave y estrictamente estrellado con respecto al origen, solamente hay soluciones triviales.

Ahora bien, aún podemos pensar en el caso $\lambda < 0$. Antes de enunciar el resultado de existencia de soluciones para este caso, veremos algunos resultados auxiliares que nos ayudarán a probarlo.

Como ya vimos en el primer capítulo, trabajar con el problema restringido es equivalente al problema sin restringir por medio de la técnica de los multiplicadores de Lagrange. A pesar de que E_λ no satisface con la condición de P-S para todos los niveles de energía, veremos que podemos obtener una noción local de esta condición y como ésta última se relaciona con la constante óptima de Sobolev S. Análogamente, lo anterior será válido para el funcional S_λ.

Sea $S_\lambda(\Omega) = \operatorname{ínf}_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} S_\lambda(u;\Omega)$, y $\lambda \leq 0$. Notemos que $S_\lambda(\Omega) \leq S(\Omega)$, ya que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Lema 3.1.1 *Si Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ y $S_\lambda(\Omega) < S(\Omega)$, entonces existe una $u \in H_0^1(\Omega)$, $u > 0$, tal que $S_\lambda(\Omega) = S_\lambda(u;\Omega)$.*

Demostración. Sea $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ una sucesión minimizante para $S_\lambda(\Omega)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\|u_m\|_{L^{p^*}} = 1$ y $u_m \geq 0$ (ya que podemos sustituir u_m por $|u_m|$). Por la desigualdad de Hölder para $p = \frac{n}{n-2}$, $q = \frac{n}{2}$, tomando funciones $1 \in L^q$ y $|u|^2 \in L^p$, tenemos que

$$\int_\Omega |u_m|^2 \, \mathrm{d}x \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u_m|^{2p} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por consiguiente

$$S_\lambda(u_m;\Omega) \;\; = \;\; \int_\Omega |\nabla u_m|^2 + \lambda |u_m|^2 \, \mathrm{d}x \geq \int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, \mathrm{d}x + \lambda |\Omega|^{\frac{1}{q}},$$

por la normalización en L^{p^*} de la sucesión y $\lambda \leq 0$. Por la propiedad de P-S de la sucesión, podemos suponer que $u_m \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^2(\Omega)$. Por otro lado, así como en (1.15), por el teorema de convergencia de Vitalli, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m|^{p^*} - |u_m - u|^{p^*} \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{dt} |u_m + (t-1)u|^{p^*} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\
&= p^* \int_\Omega \int_0^1 (u_m + (t-1)u)|u_m + (t-1)u|^{p^*-2} u \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \qquad (3.2) \\
&\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} p^* \int_\Omega \int_0^1 (tu)|tu|^{p^*-2} u \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{p^*} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

El paso al límite es debido a los teoremas de encaje de Sobolev. También notemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, \mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

y por convergencia

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + o(1), \tag{3.4}$$

donde $o(1) \to 0$ si $m \to \infty$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
S_\lambda(\Omega) - o(1) = S_\lambda(u_m; \Omega) - o(1) &= \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\ge S \, \|u_m - u\|^2_{L^{p^*}} + S_\lambda \, \|u\|^2_{L^{p^*}} \quad \left(\text{pues } S \, \|v\|^2_{L^{p^*}} = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x\right) \\
&\ge S \, \|u_m - u\|^{p^*}_{L^{p^*}} + S_\lambda \, \|u\|^{p^*}_{L^{p^*}} \quad (\text{ya que } p^* > 2) \\
&\ge (S - S_\lambda) \, \|u_m - u\|^{p^*}_{L^{p^*}} + S_\lambda \quad (\text{por la desigualdad del triángulo }).
\end{aligned}$$

Por hipótesis, tenemos que $S > S_\lambda$ y por tanto, $u_m \to u$ en $L^{p^*}(\Omega)$. Ahora, podemos concluir que el ínfimo se alcanza en M y por s.i. de la norma en H_0^1, tenemos que

$$S_\lambda(u; \Omega) \le \lim_{m \to \infty} S_\lambda(u_m; \Omega) = S_\lambda(\Omega).$$

Así como en el ejemplo 1.2.3, podemos calcular la primera variación de $S_\lambda(u; \Omega)$ y notar que cualquier múltiplo de u satisface (3.1). Como $u \ge 0$, por el principio del máximo, $u > 0$ en Ω.

□

Ahora bien, pensando en el caso sin restringir, queremos dar un resultado que motiva una modificación a la definición de la condición de P-S con respecto a los niveles de energía β.

Lema 3.1.2 *Si Ω es un dominio acotado, $n \ge 3$, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, cualquier sucesión $u_m \in H_0^1(\Omega)$ que cumpla con*

$$E_\lambda(u_m) \to \beta < \frac{1}{n} S(\Omega)^{\frac{n}{2}}, \quad \nabla E_\lambda(u_m) \to 0,$$

es relativamente compacta en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} 2E_\lambda(u_m) - \langle \nabla E_\lambda(u_m), u_m\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_m|^2 + \lambda |u_m|^2 - \frac{2}{p^*}|u_m|^{p^*}\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 + \lambda|u_m|^2 - |u_m|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Para ver que u_m es acotada, por lo anterior y por la desigualdad de Hölder, tenemos que

(3.5)

$$c\left(\int_\Omega |u_m|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p^*}{2}} \le 2E_\lambda(u_m) - \langle \nabla E_\lambda(u_m), u_m\rangle = \left(1-\frac{2}{p^*}\right)\int_\Omega |u_m|^{p^*}\,\mathrm{d}x,$$

con $c > 0$ y dependiente del dominio. Además,

$$2E_\lambda(u_m) - \langle \nabla E_\lambda(u_m), u_m\rangle \le o(1)(1 + \|u_m\|_{H_0^1}) + \frac{2}{n}S^{\frac{n}{2}}(\Omega),$$

con $o(1) \to 0$ si $m \to \infty$ y $o(1)\,\|u_m\|_{H_0^1} \to 0$, ya que por hipótesis con respecto a la convergencia del funcional y el gradiente

$$\begin{aligned} 2E_\lambda(u_m) &\le o(1) + \frac{2}{n}S^{\frac{n}{2}}(\Omega), \\ \langle \nabla E_\lambda(u_m), u_m\rangle &\le o(1)\,\|u_m\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{H_0^1}^2 = 2E_\lambda(u_m) - \lambda\int_\Omega |u_m|^2\,\mathrm{d}x + \frac{2}{p^*}\int_\Omega |u_m|^{p^*}\,\mathrm{d}x \\ \le C + o(1)\,\|u_m\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

Por tanto u_m es acotada. Podemos suponer que $u_m \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^p(\Omega)$ para toda $p < p^*$, por el teorema de Rellich. En particular, si consideramos $\phi \in C^\infty(\Omega)$ y usando la hipótesis $\nabla E_\lambda(u_m) \to 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla E_\lambda(u_m), \phi\rangle &= \int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla\phi + \lambda u_m\phi - u_m|u_m|^{p^*-2}\phi\,\mathrm{d}x \\ &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi + \lambda u\phi - u|u|^{p^*-2}\phi\,\mathrm{d}x = \langle \nabla E_\lambda(u), \phi\rangle = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, u resuelve débilmente (3.1). Por densidad, podemos sustituir $\phi = u$ y obtenemos

$$0 = \nabla_u E_\lambda(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 - |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x$$

y

$$E_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_\Omega |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

donde la identidad para el funcional se obtiene análogamente a (3.5).

Ahora bien, usando (3.2) y (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + o(1) \\
\int_\Omega |u_m|^{p^*}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |u_m - u|^{p^*}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x + o(1)
\end{aligned}$$

y análogamente al cálculo hecho en (3.2), vemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u_m|u_m|^{p^*-2} - u|u|^{p^*-2})(u_m - u)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |u_m|^{p^*} - u_m|u_m|^{p^*-2}\,\mathrm{d}x + o(1) \\
= \int_\Omega |u_m|^{p^*} - |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x + o(1) &= \int_\Omega |u_m - u|^{p^*}\,\mathrm{d}x + o(1)
\end{aligned}$$

donde $o(1) \to 0$ si $m \to \infty$. Por tanto

$$\begin{aligned}
E_\lambda(u_m) &= E_\lambda(u) + E_0(u_m - u) + o(1), \\
o(1) = \langle \nabla E_\lambda(u_m), u_m - u\rangle &= \langle \nabla E_\lambda(u_m), u_m - u\rangle - \langle \nabla E_\lambda(u), u_m - u\rangle \\
&= \int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2 - |u_m - u|^{p^*}\,\mathrm{d}x + o(1).
\end{aligned}$$

De hecho, de esto último notemos que

$$E_0(u_m - u) = \frac{1}{n}\int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2 \mathrm{d}x + o(1).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
E_0(u_m - u) &= E_\lambda(u_m) - E_\lambda(u) + o(1) \\
&\leq +o(1) \leq c < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}(\Omega) \quad \text{para } m \geq m_0.
\end{aligned}$$

Entonces,
$$\|u_m - u\|^2_{H^1_0} \leq c < S^{\frac{n}{2}}(\Omega) \quad \text{para } m \geq m_0.$$
De esto último y usando el encaje de Sobolev, vemos que

$$\|u_m - u\|^2_{H^1_0}\left(1 - S^{-\frac{p^*}{2}}(\Omega)\, \|u_m - u\|^{p^*-2}_{H^1_0}\right) \leq$$
$$\int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2 - |u_m - u|^{p^*}\, \mathrm{d}x = o(1).$$

Esto muestra que $u_m \to u$ en $H^1_0(\Omega)$.

□

El resultado anterior motiva a dar una variante de la condición de P-S:

Definición 3.1.1 *Sea B es un espacio de Banach, $E \in C^1(B)$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Decimos que E satisface la condición de $(P-S)_\beta$, si para cualquier sucesión en B tal que $E(u_m) \to \beta$ y $\nabla E(u_m) \to 0$, es relativamente compacta.*

Es decir, el lema 3.1.2 enuncia que el funcional E_λ cumple con la condición de P-S para un nivel de energía menor a $\frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}(\Omega)$. De esto último notamos la relación entre el problema restringido y el problema libre.

Con lo anterior, podemos enunciar y probar el primer resultado principal de esta sección que es debido a Brezis y Nirenberg:

Teorema 3.1.1 *Supongamos que Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, y sea $\lambda_1 > 0$ el primer valor propio del operador $-\Delta$ con condiciones Dirichlet homogéneas en la frontera.*

1. *Si $n \geq 4$, entonces para cualquier $-\lambda \in (0, \lambda_1)$, existe una solución positiva de (3.1).*
2. *Si $n = 3$, existe un $\lambda_* \in [0, \lambda_1)$ tal que para cualquier $-\lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ el problema (3.1) admite una solución.*
3. *Si además $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\lambda_* = \frac{\lambda_1}{4}$ y para cualquier $-\lambda \leq \lambda_*$ no existe solución a (3.1).*

Por el lema 3.1.2 para mostrar 1 y 2, necesitamos ver que si $-\lambda > 0$ (respectivamente $-\lambda > \lambda_*$) tenemos que

$$\beta = \inf_{p \in P} \sup_{t \in [0,1]} E_\lambda(u(p(t))) < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}(\Omega), \tag{3.6}$$

donde $P = \{p \in C([0,1]; H_0^1(\Omega)) \,|\, p(0) = 0,\, p(1) = u_1\}$, para u_1 tal que $E_\lambda(u_1) \leq 0$ como en el teorema 1.3.2. Para mostrar la relación entre la última afirmación y la condición $S_\lambda(\Omega) < S(\Omega)$, notemos que dada $u \in H_0^1(\Omega)$ con $\|u\|_{L^{p^*}} = 1$, podemos definir $p(t) = tu$, $u_1 = t_1 u$ para una t_1 suficientemente grande, de tal forma que

$$\beta \leq E_\lambda(tu) = \sup_{0 \leq t < \infty} \left(\frac{t^2}{2} S_\lambda(u;\Omega) - \frac{t^{p^*}}{p^*} \right) = \frac{1}{n} S_\lambda^{\frac{n}{2}}(\Omega).$$

De hecho, para $p \in P$ existe una $u \in p$ con $u \neq 0$ y

$$\langle \nabla E_\lambda(u), u \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 - |u|^{p^*} \,\mathrm{d}x = 0.$$

Como $-\lambda < \lambda_1$, para $u = p(t)$ con t cercano a 0, tenemos que

$$\langle \nabla E_\lambda(u), u \rangle > 0,$$

y para $u = p(1) = u_1$

$$\langle \nabla E_\lambda(u_1), u_1 \rangle < 2E_\lambda(u_1) \leq 0.$$

De lo anterior y por el teorema del valor intermedio, existe una u como afirmamos. Para esa u podemos calcular

$$\begin{aligned} S_\lambda(u;\Omega) &= \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1-\frac{2}{p^*}} \\ &= (nE_\lambda(u))^{\frac{2}{n}} \leq \left(n \sup_{u \in p} E_\lambda(u) \right)^{\frac{2}{n}}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\beta = \inf_{p \in P} \sup_{u \in p} E_\lambda(u) = \frac{1}{n} S_\lambda^{\frac{n}{2}}(\Omega)$$

y con esto concluimos que la condición $S_\lambda < S(\Omega)$ es equivalente a (3.6).

Ahora podemos dar la demostración del resultado anterior:

Demostración. (1) Es suficiente mostrar que $S_\lambda(\Omega) < S(\Omega)$. Consideremos la familia de funciones

$$u_\epsilon^*(x) = \frac{(n(n-2)\epsilon^2)^{\frac{n-2}{4}}}{(\epsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \quad \epsilon > 0, \tag{3.7}$$

donde podemos notar que $u_\epsilon^* \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Además, $u_\epsilon^* = \epsilon^{\frac{2-n}{2}} u_1^*(\frac{x}{\epsilon})$ y satisface la ecuación

$$-\Delta u_\epsilon^* = u_\epsilon^* |u_\epsilon^*|^{p^*-2} \quad \in \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

Afirmamos que $S_0(u_\epsilon^*; \mathbb{R}^n) = S(\Omega)$, es decir, la mejor constante de Sobolev se alcanza con la familia u_ϵ^*, $\epsilon > 0$. Por el teorema 1.2.8, podemos encontrar una $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que $S_0(u; \mathbb{R}^n) = S(\Omega)$. Usando la simetrización de Schwartz, podemos suponer que u es radialmente simétrica, es decir, $u(x) = u(|x|)$. De hecho, u es solución de (3.8). Para ver esto, consideremos $\epsilon > 0$ tal que $u_\epsilon^*(0) = u(0)$. Por lo tanto, u y u_ϵ^* son soluciones de la EDO

$$r^{1-n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) u = u|u|^{p^*-2} \quad r > 0,$$

donde $r = |x|$ con la condición inicial $u(0) = u_\epsilon^*(0)$, $\partial u(0) = \partial u_\epsilon^*(0) = 0$. Se puede probar que esta ecuación admite una única solución con condiciones iniciales y por tanto, $u = u_\epsilon^*$. Esto último implica que $S(u; \mathbb{R}^n) = S(u_\epsilon^*; \mathbb{R}^n) = S(\Omega)$. En particular, podemos notar que

$$\|u_\epsilon^*\|_{H^1} = \|u_\epsilon^*\|_{L^{p^*}} = S^{\frac{n}{2}}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Supongamos que $0 \in \Omega$ y sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ una función de corte, $\phi \equiv 1$ en una vecindad $B(0)_\rho$. Sea $u_\epsilon = \phi u_\epsilon^*$ y calculamos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u_\epsilon^*|^2 \phi^2 \,\mathrm{d}x + O(\epsilon^{n-2}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\epsilon^*|^2 \,\mathrm{d}x + O(\epsilon^{n-2}) = S^{\frac{n}{2}}(\Omega) + O(\epsilon^{n-2}), \\
\int_\Omega |u_\epsilon|^{p^*} \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\epsilon^*|^{p^*} \,\mathrm{d}x + O(\epsilon^n) = S^{\frac{n}{2}}(\Omega) + O(\epsilon^n), \\
\int_\Omega |u_\epsilon|^2 \,\mathrm{d}x &\geq \int_{B_\rho(0)} |u_\epsilon^*|^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_{B_\epsilon(0)} \frac{(n(n-2)\epsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\epsilon^2)^{n-2}} \,\mathrm{d}x = \\
c_1\epsilon^2 + c_2\epsilon^{n-2}\int_\epsilon^\rho r^{3-n} \,\mathrm{d}r &= \begin{cases} c\epsilon^2 + O(\epsilon^{n-2}), & \text{si } n > 4 \\ c\epsilon^2|\ln\epsilon| + O(\epsilon^2), & \text{si } n = 4 \\ c\epsilon + O(\epsilon^2), & \text{si } n = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

con constantes positivas c, c_1, c_2. Entonces, si $n \geq 5$, tenemos que

$$\begin{aligned}
S_\lambda(u_\epsilon) &\leq \frac{S^{\frac{n}{2}}(\Omega) + c\lambda\epsilon^2 + O(\epsilon^{n-2})}{(S^{\frac{n}{2}}(\Omega) + O(\epsilon^n))^{\frac{2}{p^*}}} \\
&= S + c\lambda\epsilon^2 + O(\epsilon^{n-2}) < S(\Omega),
\end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña. Análogamente, si $n = 4$

$$S_\lambda(u_\epsilon) \leq S(\Omega) + c\lambda\epsilon^2 |\ln \epsilon| + O(\epsilon^2) < S(\Omega),$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña. Para el caso $n = 3$, se sigue el mismo argumento, con la diferencia que la desigualdad se tendrá para una λ, con $|\lambda|$ suficientemente grande, dado que el orden donde aparece λ es ϵ. Para ver que $\lambda_* < \lambda_1$, consideramos la primer función propia asociada a $-\Delta$ como función de prueba. Para ver la parte de no existencia, se puede consultar [St90] pag. 179.

□

Para finalizar este capítulo, presentamos uno de los resultados que necesitaremos para la siguiente sección. Éste puede verse como una extensión del teorema de concentración-compacidad presentado en el primer capítulo para problemas del tipo minimax.

Teorema 3.1.2 *Supongamos que Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ y para $\lambda \in \mathbb{R}$ con (u_m) una sucesión de P-S para el funcional E_λ en $H_0^1(\Omega) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Entonces existen $k \in \mathbb{N}$, sucesiones (R_m^j) , (x_m^j), $1 \leq j \leq k$, de radios $R_m^j \to \infty$ y puntos $x_m^j \in \Omega$, una solución $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ al problema (3.1) y soluciones no triviales $u^j \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq k$, al problema límite*

$$-\Delta u + \lambda u - u|u|^{p^*-1} = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}^n, \tag{3.9}$$

tal que para una subsucesión de u_m satisface

$$\left\| u_m - u_0 - \sum_{j=1}^{k} u_m^j \right\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Estamos denotando por u_m^j a las funciones

$$u_m^j(x) = (R_m^j)^{\frac{n-2}{2}} u^j(R_m^j(x - x_m^j)), \quad 1 \leq j \leq k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Además, $E_\lambda(u_m) \to E_\lambda(u_0) + \sum_{j=1}^k E_0(u^j)$.

En concreto, el resultado anterior enuncia que si tenemos una sucesión que converge a un punto crítico del funcional asociado a la ecuación, entonces las soluciones en el límite son funciones que concentran la mayor parte de su energía alrededor de k diferentes puntos. A este tipo de soluciones les llamaremos *soluciones con k picos*. Si en particular, $\Omega = B_R(0)$, se puede probar que u^j son de la forma (3.7), con $E_0(u^j) = \frac{1}{n}S^{n/2}(\Omega)$.

Antes de dar la demostración del resultado anterior, necesitamos del siguiente lema:

Lema 3.1.3 *Supongamos que (v_m) es una sucesión de P-S para $E = E_0$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $v_m \rightharpoonup 0$ débilmente. Entonces existen sucesiones (x_m) de puntos $x_m \in \Omega$, (R_m), radios con $R_m \to \infty$, una solución no trivial v_0 al problema límite (3.9) y una sucesión de P-S (w_m) para E_0 en $H_0^1(\Omega)$ tal que para una subsucesión (v_m) satisface*

$$w_m(x) = v_m - (R_m)^{\frac{n-2}{2}} v_0(R_m(\cdot - x_m)) + o(1)$$

donde $o(1) \to 0$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ si $m \to \infty$. En particular, $w_m \rightharpoonup 0$ débilmente. Más aún, $E_0(w_m) = E_0(v_m) - E_0(v_0) + o(1)$ y $R_m dist(x_m, \partial\Omega) \to \infty$.

Finalmente, si $E_0(v_m) \to \beta < \frac{1}{n}S^{n/2}(\Omega)$, la sucesión v_m es relativamente compacta y por lo tanto $v_m \to 0$, $E_0(v_m) \to \beta = 0$.

Demostración. [St90] pags 187-190.

□

Ahora podemos dar la demostración del teorema 1.1.18

Demostración. Recordemos que por el lema 1.1.5, todas las sucesiones P-S para E_λ están acotadas. Por lo tanto, podemos suponer que $u_m \rightharpoonup u_0$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y u_0 es solución de (3.1). De hecho, si $v_m = u_m - u_0$, tenemos que $v_m \to 0$ en $L^2(\Omega)$ y por (3.2) y (3.3), llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v_m|^{p^*}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |u_m|^{p^*}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega |u_0|^{p^*}\,\mathrm{d}x + o(1), \\ \int_\Omega |\nabla v_m|^2\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u_m|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,\mathrm{d}x + o(1), \end{aligned}$$

donde $o(1) \to 0$. En particular, vemos que $E_\lambda(u_m) = E_\lambda(u_0) + E_0(v_m) + o(1)$ y $\nabla E_\lambda(u_m) = \nabla E_\lambda(u_0) + \nabla E_0(v_m) + o(1) = \nabla E_0(v_m) + o(1)$, donde $o(1) \to 0$ en $H^{-1}(\Omega)$.

Ahora, usando el lema anterior, con $v_m^1 = u_m - u_0$, $v_m^j = u_m - u_0 - \sum_{i=1}^{j-1} u_m^i = v_m^{j-1} - u_m^{j-1}$, $j > 1$, donde

$$u_m^i(x) = (R_m^i)^{\frac{n-2}{2}} u^i(R_m^i(x - x_m^i)),$$

se puede probar por inducción que

$$E_0(v_m^j) \quad = \quad E_\lambda(u_m) - E_\lambda(u_0) - \sum_{i=1}^{j-1} E_0(u^i) \leq E_\lambda(u_m) - (j-1)\frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}.$$

Como esta última estimación será negativa para j suficientemente grande y por el lema anterior, la inducción termina para una $k \geq 0$. Más aún, para este índice tenemos que

$$v_m^{k+1} = u_m - u_0 - \sum_{j=1}^{k} u_m^j \to 0$$

fuertemente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ y $E_\lambda(u_m) - E_\lambda(u_0) - \sum_{j=1}^{k} E_0(u^j) \to 0$ como requeríamos.

□

3.2. Un Problema de Formación de Patrones en la Esfera

En esta sección, presentaremos una caracterización de las soluciones de una EDP semilineal parabólica. En términos prácticos, deseamos mostrar que la mayor parte de la energía de la solución está concentrada en bolas centradas en k puntos distintos del dominio y daremos una caracterización del movimiento de los centros a lo largo del tiempo. En particular, los centros de concentración corresponden a los lugares más calientes en un proceso de secado de materia prima y por consiguiente, de quemado de ésta.

Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera de dimensión $n+1$, con $n \geq 3$ y n impar[1]. Consideremos el problema

$$(3.10)\begin{cases} u_t - \Delta_{S^n} u + (d(n)+\lambda)u &= u^p \quad \text{en } S^n \times (0,T), \\ u &> 0 \quad \text{en } S^n \times (0,T), \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{en } S^n \times \{t=0\}, \end{cases}$$

[1]Por simplicidad en los argumentos, nos concentramos en n impar. El caso general y en particular, para $n = 2$ se puede manejar. Véase [GP07].

donde Δ_{S^n} es el operador de Laplace-Beltrami en la esfera ([Ca93],[St90]), $\lambda > 0$, $d(n) = n(n-2)/4$ y $1 < p < p^* = (n+2)/(n-2)$ el exponente crítico de Sobolev. Observemos que el exponente puede expresarse de la forma $p = p^* - \epsilon$ con $\epsilon > 0$.

Deseamos mostrar que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y condiciones iniciales adecuadas que hacen que el funcional de energía asociado a (3.10) cumpla con la condición de P-S, la solución presentará k picos en un tiempo T^* si p es cercano y por debajo de p^*, es decir, la energía de la solución se concentrará en bolas con centros en k distintos puntos del dominio.

Ahora bien, por lo realizado en la sección 2.3, las soluciones de (3.10) pueden ser globales o existir hasta un tiempo T. En el resultado principal de esta sección, veremos que la presencia de k picos solamente depende de la condición de P-S. Más aún, en [GP07] se muestra que el problema elíptico asociado a (3.10) cumple con un problema de optimización en dimensión finita con respecto a la distancia entre los centros de las bolas. En nuestro caso, veremos que existe un resultado análogo.

De forma más precisa, primero presentamos el problema elíptico asociado a (3.10) y los resultados principales de [GP07]. Después, utilizaremos un argumento similar para mostrar la existencia de soluciones con k picos de (3.10) y describiremos el comportamiento de los centros.

Consideremos la ecuación

$$-\Delta_{S^n} u + (d(n)+\lambda)u - u^p = 0 \qquad \text{en } S^n, \tag{3.11}$$

con $p = p^* - \epsilon$ y $\lambda > 0$. La idea principal para probar la existencia de soluciones con k picos es trabajar con el funcional asociado a la ecuación anterior restringido a un espacio adecuado y aplicar el teorema 3.1.2.

Como ya vimos en el primer capítulo, el funcional $J(u) : H^1(S^n) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u(x)) = \int_{S^n} \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + \frac{(d(n)+\lambda)}{2}u^2(x) - \frac{1}{p+1}u^{p+1}(x)\,d\sigma \tag{3.12}$$

es de clase C^1 en $H^1(S^n)$, con derivada de Fréchet $\nabla J(u)$ dada por

$$\langle \nabla J(u), v\rangle = \int_{S^n} \nabla u \cdot \nabla v + (d(n)+\lambda)uv - u^p v\,d\sigma, \tag{3.13}$$

para cada $u, v \in H^1(S^n)$. Por definición, u es solución débil de (3.11) si cumple con $\langle \nabla J(u), v\rangle = 0$ para todo $v \in H^1(S^n)$.

Antes de continuar, necesitamos definir qué entendemos por una solución con k picos:

Definición 3.2.1 *Sean $k \in \mathbb{N}$ y u_m una sucesión de P-S de J dadas. Decimos que una solución u de (3.11) tiene k picos si u cumple con las hipótesis del teorema 3.1.2*

De hecho, por el teorema 3.1.2, sabemos que la energía de u se va a concentrar más en las k bolas con centros x_m^j.

Ahora, presentamos el primer resultado con respecto a la geometría de las soluciones de (3.11):

Teorema 3.2.1 ([GP07]) *Para el problema (3.10), sean $\lambda > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ dados, con n impar. Entonces existe un exponente $p_0 > 0$, que sólo depende de λ y k, tal que la ecuación (3.11) en S^n tiene una solución positiva u_p, que se concentra en k puntos diferentes $x_j \in S^n$ para $j = 1, \cdots, k$ y toda $p_0 \leq p < p^*$.*

Demostración. La idea de la demostración es construir una sucesión de P-S que converja a una solución con k picos (véase más adelante).

Por lo realizado en el primer capítulo y tomando $p = p^* - \epsilon$, con $\epsilon \in (0, 1)$, sabemos que este problema es equivalente a encontrar mínimos del funcional

$$S_{S^n}(u) = \frac{\int_{S^n} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{d(n)+\lambda}{2}|u|^2 \, \mathrm{d}\sigma}{\left(\int_{S^n} |u|^{p^*-\epsilon+1} \, \mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{2}{p^*-\epsilon+1}}}, \tag{3.14}$$

aplicando la técnica de los multiplicadores de Lagrange al problema

$$\int_{S^n} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{d(n)+\lambda}{2}|u|^2 \, \mathrm{d}\sigma, \tag{3.15}$$

con $\int_{S^n} |u|^{p^*-\epsilon+1} \, \mathrm{d}\sigma = 1$.

Antes de dar la demostración para k general, es conveniente hacerla para el caso $k = 2$, es decir, cuando la solución presenta dos picos.

En este caso, para cada $1 < p < p^*$, existe una u_p solución de (3.11) que se construye tomando una sucesión minimizante y a partir de ésta sucesión, se construye una sucesión de P-S para (3.15) restringiéndonos al espacio de funciones invariantes bajo la acción antipodal $x \to -x$ y usando el hecho de que el funcional cumple con la condición de P-S. Véase el ejemplo 1.2.3.

Ahora bien, por continuidad de las normas L^p con respecto a p, podemos tomar una sucesión u_{p_m} formada por las soluciones encontrada anteriormente al variar el exponente p_m para que converja a p^* si $m \to \infty$. A partir de esto último, podemos construir una sucesión de P-S para (3.15).

Para finalizar la demostración de este caso, necesitamos mostrar que la sucesión u_{p_m} converge a una solución con dos picos.

Si aplicamos el teorema 3.1.2 a $u_{p_{\epsilon_m}}$, en particular obtenemos al menos una solución u_1 al problema límite, sucesiones R_m^1 y x_m^1, de radios y centros respectivamente. De hecho, por la simetría de las funciones consideradas, existe otra sucesión de centros que es $-x_m^1$, y por tanto, tenemos dos centros de concentración, es decir, dos picos.

Para el caso general, podemos usar el argumento anterior si podemos construir una acción que no tenga puntos fijos en la esfera y tal que cualquier órbita tenga k puntos distintos. De hecho, la acción g dada por

$$g = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_\theta & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_\theta \end{pmatrix}, \quad \text{donde } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y $\theta = 2\pi/k$, cumple con estas condiciones. De igual manera que en el caso $k = 2$, pero restringiendonos al subespacio de funciones invariantes bajo la acción g, podemos mostrar la existencia de un punto crítico y la existencia de k concentraciones para p suficientemente pequeña.

Consideramos n impar, ya que no se puede construir una acción g para dimensión par con la propiedad anterior y sin puntos fijos en la esfera.

$\square$

Si consideramos una p, con $p = p^* - \epsilon$, que cumpla la condición del teorema anterior, obtenemos una solución con k picos. Como las soluciones con k

picos y energía acotada forman un conjunto compacto, podemos considerar la solución $u^*_{p_\epsilon}$ con k picos la cual tenga la menor energía de entre las demás soluciones. El resultado que muestra el comportamiento de los centros es:

Teorema 3.2.2 *Sea $u_{p_{\epsilon_i}}$ la sucesión de soluciones con k picos de (3.11) con la menor energía S_{S^n}, $p_{\epsilon_i} \to p^*$ si $i \to \infty$ y x_i^j el centro del j-ésimo pico con $j = 1, \ldots, k$, $i = 1, 2, \ldots$. Entonces existen subsucesiones tal que $x_i^j \to x_*^j$, donde x_*^j son soluciones del problema de maximización*

$$\max_{x^j, x^l \in S^n} \sum_{j \neq l} \|x^j - x^l\|^2$$

con $x^j \neq x^l$ si $j \neq l$.

Demostración. Sea $v_{p_{\epsilon_i}}$, $\epsilon_i \to 0$ una sucesión minimizante como en el teorema anterior. Como ya vimos en la demostración del teorema 3.1.1, las funciones de la forma (3.7) (después de usar la proyección estereográfica)

$$(3.16) w^j = \left(\frac{r^j}{(r^j)^2 + |y - y^j|^2} \right)^{(n-2)/2} = \left(\frac{1/r^j}{1 + (|y - y^j|/r^j)^2} \right)^{(n-2)/2},$$

son soluciones con un pico al problema límite (3.8).

También se vio en el teorema antes mencionado, que las soluciones de la forma anterior son radialmente simétricas con respecto a y^j. Además, se puede mostrar que alcanzan su máximo y su energía se concentra más si $r \to 0$. Llamaremos a $\tilde{w}^j(x)$ a la solución con un sólo pico en la esfera.

Ahora bien, por la caracterización compacta de las sucesiones de P-S, el comportamiento de la energía (3.14) está dado por la expresión

$$I^\epsilon = \frac{\frac{1}{2} \int_{S^n} |\nabla V_m|^2 + (d + \lambda) V_m^2 \, \mathrm{d}\sigma}{\left(\int_{S^n} V_m^{p^*+1-\epsilon} \, \mathrm{d}\sigma \right)^{2/(p^*+1-\epsilon)}}, \tag{3.17}$$

donde $V_m = \sum_{j=1}^k \tilde{w}_m^j$ es una sucesión de P-S y $\tilde{w}_m^j$ es de la forma (3.16) con $r^j = r_m^j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $r_m^j = r_m = \min_j \{r_m^j\}$, ya que esto hace que I^ϵ decrezca.

Lo que vamos a hacer es analizar el comportamiento de (3.17) con respecto a la sucesión V_m haciendo una expansión en Taylor de forma adecuada para así obtener el resultado. Para ésto, necesitamos ver que dada $\delta > 0$ existe un $r_0(\delta)$ y $C_1(n,k)$, $C_2(n,k)$, e_1 y e_2 todas positivas tal que

$$I^{\epsilon} = C_1 - C_2 \sum_{j \neq l}^{k} \left\| y^j - y^l \right\|^2 + e_1 + e_2$$

con $e_1 \to 0$ si $\epsilon \to 0$, $e_2 < \delta$ para toda $r < r_0$, es decir, necesitamos encontrar un radio en función de $\epsilon = \delta$ para el cual podamos asegurar que el comportamiento en el límite de I^{ϵ} esta dominado por la distancia entre los centros de concentración.

Primero tenemos que mostrar que la siguiente cantidad

$$J = \frac{\int_{S^n} |\nabla \tilde{w}^j|^2 \, d\sigma}{\left(\int_{S^n} |\tilde{w}^j|^{p^*+1} \, d\sigma\right)^{2/(p^*+1)}}$$

no depende de r ni de y^j. De hecho, si sustituimos $y = (z - z^j)/r$

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left(\frac{1/r}{1+(|z-z^j|/r)^2} \right)^{(n-2)/2} \right|^2 |\mathrm{Jac}(\sigma)| \, dz}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\frac{1/r}{1+(|z-z^j|/r)^2} \right)^{(n-2)/2} \right)^{2n/(n-2)} |\mathrm{Jac}(\sigma)| \, dz \right)^{(n-2)/n}} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^{(n-2)/2} \right|^2 \frac{r^n}{r^n} |\mathrm{Jac}(\sigma)| \, dy}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^n \frac{r^n}{r^n} |\mathrm{Jac}(\sigma)| \, dy \right)^{(n-2)/n}} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^{(n-2)/2} \right|^2 |\mathrm{Jac}(\sigma)| \, dy}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^n |\mathrm{Jac}(\sigma)| \, dy \right)^{(n-2)/n}},
\end{aligned}$$

llegamos a la conclusión deseada. Análogamente, vemos que la siguiente cantidad tiende a cero uniformemente en r para $0 \leq \epsilon \leq 1$,

$$\frac{\int_{S^n} (\tilde{w}^j)^2 \, d\sigma}{\left(\int_{S^n} (\tilde{w}^j)^{p^*+1-\epsilon} \, d\sigma\right)^{2/(p^*+1-\epsilon)}}, \tag{3.18}$$

ya que el factor resultante bajo el cambio de variable es $r^{n-(2n)/(p^*+1-\epsilon)}$, con exponente positivo si $\epsilon < 4/(n-2)$. Para mostrar lo anterior, solo basta notar que al hacer el cambio de variables, queda un cociente de la forma

$$\frac{r^{n-2}}{\left[r^n \left(\frac{1}{r}\right)^{p^*+1-\epsilon}\right]^{\frac{2}{p^*+1-\epsilon}}} = \frac{r^{n-2}}{r^{\frac{2n}{p^*+1-\epsilon}-2}}.$$

Por lo anterior, aseguramos que si $r \to 0$, entonces (3.18) converge a cero. Por lo tanto, podemos escoger r suficientemente pequeño, de tal forma que el término que contiene a V_m^2 en (3.17) sea menor a ϵ_1, ya que el numerador converge a cero más rápido que el denominador.

Recordemos que la norma L^p es creciente y continua con respecto a p. Por consiguiente, para cualquier $v \in L^{p^*+1}$, podemos escribir

$$\|v\|_{L^{p^*+1-\epsilon}} = \|v\|_{L^{p^*+1}} - p_1(\epsilon),$$

donde $p_1(\epsilon) \geq 0$ y tiende a cero al mismo orden que ϵ. Sea

$$v(x) = v(\sigma^{-1}(y)) = V(y) = \sum_{j=1}^{k} \tilde{w}^j.$$

Por la desigualdad de Minkowski y la estructura de los $\tilde{w}^j$, podemos encontrar $p_2(r) \geq 0$ con $p_2 \to 0$ si $r \to 0$, de manera que

$$\left(\int_{S^n} |v|^{p^*+1}\,\mathrm{d}\sigma\right)^{1/(p^*+1)} = \sum_j \left(\int_{S^n} |\tilde{w}^j|^{p^*+1}\,\mathrm{d}\sigma\right)^{1/(p^*+1)} - p_2(r).$$

Por lo anterior y (3.18), es posible elegir r_0 y ϵ_0 tal que para toda $\epsilon < \epsilon_0$ y $r < r_0$, (3.17) sea de la forma

$$\begin{aligned} I_{S^n}^{\epsilon} &= \frac{\int_{S^n} \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \epsilon_1\,\mathrm{d}\sigma}{\left(k\int_{S^n} |\tilde{w}^j|^{p^*+1}\,\mathrm{d}\sigma\right)^{2/(p^*+1)} - P} \\ &= \frac{1}{\left(k\int_{S^n} |\tilde{w}^j|^{p^*+1}\,\mathrm{d}\sigma\right)^{2/(p^*+1)}}\left[\frac{\int_{S^n} \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \epsilon_1\,\mathrm{d}\sigma}{1 - P/\left(k\int_{S^n} |\tilde{w}^j|^{p^*+1}\,\mathrm{d}\sigma\right)^{2/(p^*+1)}}\right] \end{aligned}$$

donde ϵ_1, $P \geq 0$. Expandiendo $|\nabla v|^2$ y usando el hecho de que

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + o(a^2),$$

obtenemos que la expansión

$$I^{\epsilon}_{S^n} = C_1 + C_2 \int_{S^n} \sum_{j,l} \nabla \tilde{w}^j \cdot \nabla \tilde{w}^l \, \mathrm{d}x + Q,$$

donde C_1, C_2 dependen solamente de k, n y Q es pequeño para $r < r_0$ y uniforme para $\epsilon < \epsilon_0$.

Falta mostrar que la integral

$$\int_{S^n} \nabla \tilde{w}^j \cdot \nabla \tilde{w}^l \, \mathrm{d}x,$$

sólo depende de la distancia de los centros de las concentraciones. Sin pérdida de generalidad, podemos rotar y suponer que los centros x^j, x^l están en el círculo unitario del plano horizontal. Ahora, utilizando la proyección estereográfica y la definición de w^j, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla w^j \cdot \nabla w^l \, \mathrm{d}y = \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\tfrac{1/r}{1+(|y-y^j|/r)^2}\right)^{(n-4)/2}$$
$$\left(\tfrac{1/r}{1+(|y-y^l|/r)^2}\right)^{(n-4)/2} \times \tfrac{-2(y-y^j)}{r^2(1+(|y-y^j|/r)^2)^2} \times \tfrac{-2(y-y^l)}{r^2(1+(|y-y^l|/r)^2)^2} \, \mathrm{d}y.$$

El término dominante en r de la expresión anterior es proporcional a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (y - y^j) \cdot (y - y^l) \, \mathrm{d}x.$$

Podemos notar que el término que contiene a $|y|^2$ da una contribución fija, los de la forma $y^j \cdot y$ son cero ya que son funciones impares integradas sobre un dominio simétrico con respecto al origen. De hecho, $y^j \cdot y^l$ se pueden escribir de la forma $C|y^j||y^l|\cos(\alpha_{j,l})$, donde $\alpha_{j,l}$ es el ángulo entre y^j y y^l. Por construcción, $|y^j| = |y^l| = 1$ y $\alpha_{j,l}$ es proporcional a la distancia geodésica en la esfera. Entonces, minimizar

$$\int_{S^n} \sum_{j,l} \nabla \tilde{w}^j \cdot \nabla \tilde{w}^l \, \mathrm{d}x$$

es equivalente a minimizar

$$\sum_{j,l} \cos(\alpha_{j,l}).$$

Por lo tanto, la energía mínima para una solución con k picos se alcanza cuando la suma de las distancias entre los k picos es maximizada. Con esto concluimos la demostración.

□

Como ya vimos en el capítulo 2, podemos trabajar a (3.10) como una EDO en un espacio de Banach. En particular, podemos mostrar que (3.10) tiene la estructura

$$u'(t) = -\nabla J(u(t)) \tag{3.19}$$
$$u(0) = u_0, \tag{3.20}$$

donde J es el funcional de energía asociado a (3.10). Para mostrar la caracterización geométrica de las soluciones al igual que en [GP07], podemos trabajar con el funcional libre (sin restricción). Por otro lado, podemos trabajar de igual forma con el funcional restringido al igual que en las secciones 1.1 y 3.1. La diferencia entre los dos casos, es que en el segundo, las soluciones son globales, ya que el funcional asociado está acotado inferiormente. La razón de lo anterior se debe a la restricción que imponemos para usar la técnica de los multiplicadores.

Sea el funcional J definido por

(3.21)
$$J(u(t,x)) = \int_{S^n} \frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{(d(n)+\lambda)}{2}u^2(t,x) - \frac{1}{p+1}u^{p+1}(t,x)\,\mathrm{d}\sigma,$$

con $u_0 \in H_0^1$. Recordemos que por el teorema 2.1.1, (3.10) tiene una única solución $u \in C([0,T], H^1(S^n)) \cap C^1((0,T], L^2(S^n))$ para $1 < p < p^*$. La existencia y unicidad para el caso $p = p^*$, también se puede probar (véase [IS00]) con una ligera modificación en la regularidad para la derivada temporal.

Para verificar que el funcional anterior es diferenciable con respecto a t, necesitamos algunos resultados auxiliares. Si suponemos que u goza de la suficiente diferenciabilidad para justificar los siguientes cálculos, tendríamos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(u(t,x)) &= \int_{S^n} \nabla u \cdot \nabla u_t + (d(n)+\lambda)uu_t - u^p u_t\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \langle \nabla J(u), u_t \rangle .\end{aligned}$$

El proceso anterior se debe a que u y sus derivadas son continuas, S^n es compacto y por tanto, se tiene la uniformidad para el intercambio entre derivada e integral. Por último, realizamos una integración por partes del primer miembro.

Ahora bien, para obtener el resultado anterior en general, hay que ver como manejar el término elevado a la $p+1$ y el del gradiente de u_t. De hecho, el cálculo de la derivada para el término elevado a la $p+1$ se debe a los teoremas de encaje de Sobolev (Teorema de Rellich-Kondrachov). Para el segundo término, hay que hacer una estimación utilizando el concepto de regularización (véase [E02]) y utilizar las propiedades de derivadas débiles. Con esto justificamos el cálculo de $\frac{d}{dt}J$.

Por otro lado, si multiplicamos (3.10) por u_t, integramos sobre todo S^n y después por partes, obtenemos que

$$(3.22)\quad \int_{S^n} u_t^2 \,\mathrm{d}\sigma = -\left(\int_{S^n} \nabla u \cdot \nabla u_t + (d(n)+\lambda) u u_t \,\mathrm{d}\sigma\right) + \int_{S^n} u^p u_t \,\mathrm{d}\sigma.$$

Con esto último hemos probado que (3.10) es equivalente a (3.19).

Ahora bien, por lo anterior, notemos que (3.10) se puede trabajar como un pseudo flujo gradiente, ya que L^2 es un espacio de Hilbert. Una consecuencia inmediata de (3.22) es

$$\frac{dJ}{dt} \leq 0 \quad \text{y por tanto} \qquad J(u(t,x)) \leq J(u(t_0,x)) \quad \text{si } t \geq t_0.$$

En el sistema (3.19), tiene sentido evaluar en cero, ya que u es continua en t. Antes de continuar, es conveniente dar el argumento por el cual las soluciones de (3.10) son globales si consideramos el problema restringido.

Por lo realizado en el capítulo 1, podemos ver que buscar soluciones de (3.10) es equivalente al problema

$$(3.23)\begin{cases} u_t - \Delta_{S^n} u + (d(n)+\lambda)u &= 0 \qquad \text{en } S^n \times (0,T), \\ u &> 0 \qquad \text{en } S^n \times (0,T), \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{en } S^n \times \{t=0\}, \end{cases}$$

usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, restringiéndonos al espacio $M = \{u \in L^p([0,T], L^p(S^n)) \mid \|u\| = 1\}$.

Si $u \in M$, el funcional de energía asociado a (3.23) es

$$E(u(t,x)) = \frac{1}{2}\int_{S^n} |\nabla u(t,x)|^2 + (d(n)+\lambda)u^2(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Notemos que E es acotado inferiormente y por la restricción, se puede deducir que las soluciones de (3.23) son globales. Recordemos que una característica de las soluciones globales es tener energía acotada inferiormente.

Antes de enunciar y demostrar uno de los resultados principales de esta sección, recordemos que u es una función continua para cada t a valores en $H^1(S^n)$ y por consiguiente, para cualquier condición inicial $u_0 \in H^1$, tenemos que si $|t| < \delta$,

$$\|u(t) - u_0\| < \epsilon,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma uniforme de $C^0([0,T); H^1(S^n)) \cap C^1((0,T); L^2(S^n))$. De hecho, por continuidad con respecto a datos iniciales, si $u_0 = \sum_{j=1}^k w_j$ una superposición de soluciones del problema límite, el módulo de continuidad depende de r. Esto nos da una idea de qué tanto dista la solución de una condicioón inicial cercana a una función con k picos.

Ahora presentaremos y demostraremos el resultado principal de esta tesis:

Teorema 3.2.3 *Sean $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e impar dados, con $p = p^* - \epsilon$ y u_0 es una condición inicial para la cual tenemos existencia global de (3.10). Entonces existe una p_0 que sólo depende de λ y k tal que la ecuación (3.10) en S^n, tiene una solución positiva, $u_p(t)$ que se concentra en k puntos diferentes $x_j \in S^n$ para toda $p_0 < p \leq p^*$ y $j = 1, \cdots k$ en un tiempo $T^* < \infty$.*

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente:

1. Primero tenemos que verificar que podemos construir una sucesión de P-S para (3.10). De aquí la existencia de una solución con un pico es inmediata (véase [I00]).

2. Usando la continuidad con respecto al exponente p y la convergencia de las soluciones globales a soluciones del caso estacionario, podemos construir una nueva sucesión de P-S la cual se concentra en k diferentes puntos del dominio.

3. El tiempo T^* se puede calcular a partir de una p fija tan cercana a p^* como se desee.

Sea $u_0 \geq 0$ una condición inicial tal que $u(t) \notin V \cup W$, donde W y V son los conjuntos estable e inestable y están definidos en la proposición 2.4.1.

Sabemos que $J(u(t))$ es decreciente en t y la siguiente identidad se cumple

$$J(u(t)) + \int_0^t u_t(s)^2 \, \mathrm{d}s = J(u_0).$$

Como u es global, esta integral y $J(u(t))$ son finitas. Entonces, existe una sucesión t_n, con $t_n \to \infty$ si $n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_t(t_n)\|_{L^2(S^n)} = 0. \tag{3.24}$$

Ahora, si multiplicamos (3.10) por u e integramos sobre S^n, vemos que

$$\begin{aligned} -I(u(t)) &= -\left(\int_{S^n} |\nabla u(t)|^2 + (d(n)+\lambda)u^2(t) - u^{p+1}(t)\,\mathrm{d}\sigma\right) \\ &= \int_{S^n} u_t(t)u(t)\,\mathrm{d}\sigma \leq \|u_t(t)\|_{L^2(S^n)} \|u(t)\|_{L^2(S^n)}\,. \end{aligned}$$

Como la solución es global, se puede mostrar que $\|u(t)\|_{L^2(S^n)} \leq C$ y por consiguiente,

$$|I(u(t))| \leq C \|u_t(t)\|_{L^2(S^n)}\,.$$

De esta desigualdad y de (3.24), podemos ver que $\lim_{n\to\infty} I(u(t_n)) = 0$. De hecho, también tenemos que

$$J(u(t)) = \frac{p-1}{2(p+1)} \int_{S^n} |\nabla u(t)|^2 + (d(n)+\lambda)u^2(t)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{p+1} I(u(t)).$$

De esto último, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|u_t(t_n)\|_{L^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\nabla u(t_n)\|_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} \|u(t_n)\|_{L^{p+1}} = C_0.$$

De lo anterior, se sigue que

$$J(u_0) \geq J(u(t_n)) \to \frac{p-1}{2(p+1)} C_0 \geq 0,$$

si $n \to \infty$. De hecho, la desigualdad anterior es estricta (véase el teorema 2.4.6). Por la diferenciabilidad del funcional $J(\cdot)$, tenemos que

$$\langle \nabla u(t_n), v \rangle = -\langle u_t(t_n), v \rangle$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Usando la desigualdad de Schwarz y la de Poincaré, obtenemos que

$$|\langle \nabla u(t_n), v \rangle| \leq C_1 \|u_t(t_n)\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}\,,$$

lo cual implica que

$$\|\nabla u(t_n)\|_{H^{-1}} \to 0$$

si $n \to \infty$. Con esto hemos mostrado que $u(t_n)$ es una sucesión de P-S.

Sabemos que las soluciones globales tal que $u \notin V \cup W$ convergen a soluciones estacionarias si $1 < p < p^*$. Por continuidad con respecto a p, si consideramos una condición inicial para la cual $u(t)$ exista globalmente, la solución permanecerá global aún para $p = p^*$.

Así como en la demostración del teorema 3.2.1, si hacemos tender $p \to p^*$ con $p < p^*$, la familia de soluciones variando ϵ también constituyen una sucesión de P-S para el funcional.

Sea $u_{p_{\epsilon_n}}(t_m) = u_{n,m}$ la familia de soluciones globales asociadas a (3.10) con $\epsilon_n \to 0$ como en el teorema 3.2.1 y $u^*_{p_{\epsilon_n}}$ la correspondiente solución estacionaria. Es claro que $u_{n,m}$ es una sucesión de P-S. Tenemos que mostrar que

$$\left\| u_{n,m} - v_0 - \sum_{j=1}^{k} u_n^j \right\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^l)} \longrightarrow 0.$$

como en el teorema 3.1.2. Esto último se sigue del siguiente argumento:

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| u^*_{p_{\epsilon_N}} - w \right\| < \epsilon/3.$$

Esto lo podemos hacer, ya que las soluciones del caso estacionario convergen a una solución con k picos (por el teorema 3.2.1). Para esta misma N, sabemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq M$

$$\left\| u_{N,m} - u^*_{p_{\epsilon_N}} \right\| < \epsilon/3,$$

ya que las soluciones de la ecuación parabólica convergen a soluciones estacionarias. Por último, por el teorema 2.4.1, si $\tilde{m} > m$ y suficientemente grande, tenemos que

$$\|u_{N,m} - u_{N,\tilde{m}}\| < \epsilon/3.$$

Ahora, usando la siguiente desigualdad

$$\|u_{n,m} - w\| \leq \|u_{N,m} - u_{N,\tilde{m}}\| + \left\|u_{N,\tilde{m}} - u^*_{p_{\epsilon_N}}\right\| + \left\|u^*_{p_{\epsilon_N}} - w\right\|,$$

obtenemos el resultado.

□

Observación 3.2.1 *Como J es un funcional que va de H^1 a $\mathbb{R}$ para cada t y por continuidad, seguimos considerando la existencia de k picos en el mismo sentido que en el teorema 3.1.2.*

Si continuamos en esta dirección, el análogo al teorema 3.2.2 es:

Teorema 3.2.4 *Sea $u_p(t)$ la solución con k picos al tiempo T^* de (3.10) y $x^j_{T^*} \in S^n$ el centro del j-ésimo pico para $j = 1, \ldots, k$. Si definimos la función*

$$V(x^1(t), \ldots, x^k(t)) = \sum_{j \neq l} \|x^j(t) - x^l(t)\|^2,$$

tenemos que para $j = 1, \ldots, k$, $x^j(t)$ cumple con

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\nabla_x V, \\ x(T^*) &= x_{T^*}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde $x(t) = (x^1(t), \cdots, x^k(t))$ y $x_{T^*} = (x^1_{T^*}, \cdots, x^k_{T^*})$.

Antes de dar la demostración, es conveniente dar la idea principal de ésta. En el teorema 3.2.2 realizamos una expansión del funcional de energía de la forma

$$I^\epsilon = C_1 - C_2 \sum_{j \neq l}^{k} \left\|y^j - y^l\right\|^2 + e_1 + e_2,$$

tomando una sucesión de P-S haciendo variar el exponente p. Por lo tanto, esta expresión sigue siendo válida para la sucesión de P-S que construimos en el resultado anterior, pero en este caso los centros van a depender del tiempo.

Ahora, si a partir de la expresión anterior, calculamos su gradiente, tenemos que

$$\nabla I^\epsilon = -C_2 \nabla \left(\sum_{j \neq l}^{k} \left\|y^j - y^l\right\|^2 \right) + \nabla e_1 + \nabla e_2.$$

Por lo tanto, solamente tenemos que hacer el cálculo para la condición inicial y ver que los errores ∇e_i tienden a cero en el límite.

En general, lo anterior es cierto para cualquier condición inicial cercana a una función con k picos, pero los errores no necesariamente convergen a cero.

Demostración. Nuevamente, consideremos el funcional I^ϵ definido por (3.17). Queremos ver ∇I^ϵ tiene una expansión similar. De hecho, usando que

$$f' = \frac{z}{g} = \frac{z'}{g} - \frac{g'z}{g^2},$$

podemos calcular $\langle I^\epsilon(v), h\rangle$ con $v \in H^1(\Omega)$ y $h \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\int_{S^n} |\nabla V_m|^2 + (d+\lambda)V_m^2 \, \mathrm{d}\sigma \\ g &= \left(\int_{S^n} V_m^{p^*+1-\epsilon} \, \mathrm{d}\sigma\right)^{2/(p^*+1-\epsilon)} \end{aligned},$$

con $V_m = \sum_{j=1}^k w_m^j$ y $w_m^j = \left(\frac{1/r}{1+(|z-z_j|/r)^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$.

Entonces, tenemos que

$$\langle I^\epsilon(v), h\rangle = \frac{(\nabla z, h)}{g} - \frac{(\nabla g, h)z}{g^2} = A_1 + A_2,$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\int_{S^n} \nabla v \cdot \nabla h + (\lambda + d)vh \, \mathrm{d}\sigma}{\left(\int_{S^n} v^{p^*+1-\epsilon} \, \mathrm{d}\sigma\right)^{2/(p^*+1-\epsilon)}} \\ A_2 &= \frac{\frac{2}{p^*+1-\epsilon} I^\epsilon(v) \left(\int_{S^n} v^{p^*+1-\epsilon} \, \mathrm{d}\sigma\right)^{2/(p^*+1-\epsilon)-1} \left(\int_{S^n} v^{p^*-\epsilon} h \, \mathrm{d}\sigma\right)}{\left(\int_{S^n} v^{p^*+1-\epsilon} \, \mathrm{d}\sigma\right)^{2/(p^*+1-\epsilon)}}. \end{aligned}$$

Ahora, deseamos hacer el análisis para A_1, y posteriormente, para A_2 cuando $v = w^j$. En el primer caso, considerando el cambio de variables $y = (z-z^j)/r$, tenemos que

$$\int_{S^n} \nabla w^j \cdot \nabla h + (\lambda + d) w^j h \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_z \left[\left(\frac{1/r}{1 + (|z - z_j|/r)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] \cdot \nabla h$$

$$+(\lambda + d) \left(\frac{1/r}{1 + (|z - z_j|/r)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} h |\mathrm{Jac}(\sigma)| \,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^n} r^{\frac{n}{2}} \nabla_y \left(\frac{1}{1 + |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \nabla h$$

$$+ r^{\frac{n}{2}+1} (\lambda + d) \left(\frac{1}{1 + |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} h |\mathrm{Jac}(\sigma)| \,\mathrm{d}y.$$

Para el término en el denominador, tenemos que

$$\int_{S^n} (w^j)^{p^*+1-\epsilon} \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{1/r}{1 + |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right]^{p^*+1-\epsilon} r^n |\mathrm{Jac}(\sigma)| \,\mathrm{d}y$$

$$= r^{n - \frac{(p^*+1-\epsilon)(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{1}{1 + |y|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right]^{p^*+1-\epsilon} |\mathrm{Jac}(\sigma)| \,\mathrm{d}y.$$

Elevando la expresión anterior a la $2/(p^*+1-\epsilon)$, obtenemos que el término en r es de la forma $r^{2-n+2n/(p^*+1-\epsilon)}$. Juntando lo realizado anteriormente, vemos que

$$|A_1| \leq \frac{r^{n/2}}{r^{2-n+2n/(p^*+1-\epsilon)}} \left[C_1 + r C_2 \right],$$

con C_1, C_2 constantes positivas. Por lo tanto, $A_1 \to 0$ cuando $r \to 0$, si

$$n/2 - 2 + n - 2n/(p^* + 1 - \epsilon) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3n-4}{2} > \frac{2n}{p^* + 1 - \epsilon}$$

$$\frac{4n}{3n-4} < p^* + 1 - \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon < p^* + 1 - \frac{4n}{3n-4},$$

donde

$$\begin{aligned} p^* + 1 - \frac{4n}{3n-4} &= \frac{2n}{n-2} - \frac{4n}{3n-4} \\ &= \left(\frac{2n}{n-2} \right) \left(\frac{3n - 4 - 2(n-2)}{3n-4} \right) \\ &= \left(\frac{2n}{n-2} \right) \left(\frac{n}{3n-4} \right). \end{aligned}$$

Para A_2, usando lo realizado en el teorema 3.2.2, tenemos que el término g^2 contribuye $r^{4-2n+4n/(p^*+1-\epsilon)}$ y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{S^n} |\nabla w^j|^2 + (d+\lambda)(w^j)^2 \,\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right|^2 \\ &+ r^2(d+\lambda)\nabla\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{n-2} |\mathrm{Jac}(\sigma)|\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

sólo contribuye la parte $(w^j)^2$. Falta ver que

$$\begin{aligned}k\left\langle \nabla g(w^j), h\right\rangle = \left(\int_{S^n}(w^j)^{p^*+1-\epsilon}\,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{2}{p^*+1-\epsilon}-1}\left(\int_{S^n}(w^j)^{p^*-\epsilon}h\,\mathrm{d}\sigma\right) = \\ r^{\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{p^*+1-\epsilon}|\mathrm{Jac}(\sigma)|\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{2}{p^*+1-\epsilon}-1} \times \\ \int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{p^*-\epsilon} h|\mathrm{Jac}(\sigma)|\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

donde $k = \frac{p^*+1-\epsilon}{2}$ y $\alpha = 2-n+\frac{2n}{(p^*+1-\epsilon)}+\frac{(n-2)}{2}(p^*+1-\epsilon)-\frac{(n-2)}{2}(p^*-\epsilon) = 2n(p^*+1-\epsilon)-\frac{(n-2)}{2}$. Si nuevamente, juntamos el trabajo anterior, vemos que el factor r para A_2 es de la forma

$$\begin{aligned}\left(1+r^2\right)\left(\frac{2n}{(p^*+1-\epsilon)}-\frac{(n-2)}{2}-4+2n-\frac{4n}{(p^*+1-\epsilon)}\right) = \\ \left(1+r^2\right)\left(\frac{3(n-2)}{2}-\frac{2n}{(p^*+1-\epsilon)}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A_2 \to 0$ cuando $r \to 0$, si

$$\begin{gathered}\frac{3(n-2)}{2}-\frac{2n}{(p^*+1-\epsilon)} > 0 \Leftrightarrow \frac{3(n-2)}{2} > \frac{2n}{(p^*+1-\epsilon)} \\ \frac{4n}{3(n-2)} < p^*+1-\epsilon \Leftrightarrow \epsilon < \frac{2n}{n-2}-\frac{4n}{3(n-2)} = \frac{2n}{3(n-2)}\end{gathered}$$

Ahora, para poder asegurar que $A_1 + A_2 \to 0$, necesitamos considerar $\epsilon < \text{mín}\left\{\frac{2n}{3(n-2)}, \left(\frac{2n}{n-2}\right)\left(\frac{n}{3n-4}\right)\right\} = \frac{2n}{3(n-2)}$ si $n > 2$.

De aquí podemos concluir que los errores convergen a cero usando un argumento similar al realizado en el teorema 3.2.2 y la continuidad del semigrupo asociado a (3.10). Para concluir el resultado, se usa un argumento similar al que acabamos de hacer y a el realizado en el teorema 3.2.2 para la parte de la derivada respecto a t y así, obtener la igualdad entre la derivada de los centros con respecto al tiempo y el menos gradiente de V.

□

Al final de la siguiente sección, plantearemos una conjetura utilizando los resultados que veremos en esta sección con respecto a la controlabilidad de los picos de la ecuación (3.23) utilizando el resultado anterior. Es decir, la controlabilidad del sistema de EDO (3.25) es equivalente a la controlabilidad de la EDP. De hecho, lo que analizaremos en la siguiente sección es el problema de controlabilidad asociado a (3.23).

3.3. Control óptimo

En esta sección abordaremos dos problemas en el marco de la teoría de control óptimo. El primero está asociado a la ecuación semilineal parabólica que hemos considerado a lo largo del trabajo. El segundo está relacionado con el modelado de la depredación de especies usando una ecuación del tipo Lotka-Volterra.

En concreto, un problema de control óptimo es un problema variacional sujeto a una restricción, es decir, buscamos máximos o mínimos de un funcional sujeto a una ecuación diferencial. Además, en este caso tenemos dos variables: la variable de estado u y el control h. Más adelante explicaremos con precisión lo que significa esto. Para profundizar más en este tema se pueden consultar [E02], [FR75], [FS92], [KSh91],[Øk00], etc. Nosotros nos estamos basando en [AQ05] y [CGM98].

3.3.1. Control de una Ecuación Parabólica con Exponente Subcrítico

Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - |u|^{p-1}u - h = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T), \\ u(0,x) = u_0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{3.26}$$

donde $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, Ω es un dominio abierto, acotado y con frontera regular. Podemos notar que la solución u del problema anterior depende implícitamente de la función h.

Sea $J(u,h)$ un funcional en dos variables, donde u es la variable de estado y h es la variable de control. A J se le conoce como el funcional de costo. Consideremos el conjunto $\mathbb{U}_{ad}$ de controles admisibles y a

$$\mathbb{U}_{ad}^{G} = \{h \in \mathbb{U}_{ad} \,|\, u(h) \text{ es solución global}\}.$$

Nuestro problema es encontrar, si existe, una pareja (u,h) tal que

$$\min_{h \in \mathbb{U}_{ad}^{G}} J(u(h),h) \tag{3.27}$$

sujeto a (4.1). En particular, consideraremos funcionales que dependan del estado u al tiempo T, i.e., $J = J(u(\cdot,T),h)$. Un caso de esta situación sería

$$J \;=\; \int_{\Omega} |u(x,T) - u_d(x)|^q \,\mathrm{d}x + N \int_0^T \int_{\Omega} h^2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{3.28}$$

donde $u_d \in L^q(\Omega)$ y $N > 0$. El segundo término de (3.28) representa el costo por unidad para controlar y J el costo total para controlar.

En general, podemos interpretar (3.27) como sigue: tenemos un fenómeno que se rige por (3.26) y queremos encontrar una estrategia h de tal forma que modifique el estado u y a su vez minimice J. Pero es importante mencionar que este no siempre va a ser nuestro caso, es decir, no siempre necesitaremos minimizar un funcional J [2].

Antes de empezar a enunciar y probar los resultados principales de esta sección, necesitamos definir el concepto de solución débil y fuerte para el contexto actual.

Sea $Q = \Omega \times [0,T]$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en} \quad Q \\ u(0,x) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.29}$$

donde $u_0 \in L^1(\Omega)$ y $f \in L^1(Q)$. Consideremos el conjunto $S_q = \{-2 + 1/q, -1 + 1/q, 1/q, 1 + 1/q\}$ con $1 < p, q < \infty$.

[2] Sin embargo, también hay que agregar que la solución de ciertos problemas de control pueden encontrase minimizando un funcional apropiado. Véase [MiZu].

Sea $t \in (0,T]$ y $s \in [0,2] \setminus S_q$. Decimos que u es solución $L^p(W^{s,q}(\Omega))$ débil de (3.29) en $[0,t]$, si $u \in L^p_{loc}([0,t), W_0^{s,q}(\Omega))$ y es tal que

$$\int_0^t \int_\Omega (-\phi_t - \Delta\phi) u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau = \int_0^t \int_\Omega \phi f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_\Omega \phi(0) u_0 \,\mathrm{d}x$$

para cualquier $\phi \in C_c^\infty(\bar{\Omega} \times [0,t))$ con $\phi = 0$ en $\partial\Omega \times [0,t]$. Es global si $t = T$ y $u \in L^p((0,T), W_0^{s,q}(\Omega))$.

Decimos que u es solución $L^p(W^{s,q}(\Omega))$ fuerte en $[0,t]$ si

$$u \in W^{1,r}_{loc}([0,t), W^{s-2,q}(\Omega)) \cap L^r_{loc}([0,t), W_0^{s,q}(\Omega)),$$

para alguna $r > 1$ y además,

$$\begin{aligned} u' - \Delta u &= f \quad \text{en } [0,T], \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

se satisface c.s.. En particular, si $s = 0$, u es una solución $L^p(L^q(\Omega))$ débil, débil global o fuerte, dependiendo del (véase [AQ05]).

A continuación enunciamos dos lemas necesarios para demostrar los teoremas 3.3.1 y 3.3.2:

Lema 3.3.1 *Sea p, q como en el teorema 3.3.1 y $r \geq 2$ donde r satisface la condición (3.31). Entonces el problema (3.26) está bien definido en $L^q(\Omega)$, es decir, si la norma de h en $L^r([0,T], L^2(\Omega))$ está acotada por una constante C_r, $u_0 \in L^q(\Omega)$, $\|u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q$ y s satisface*

$$\text{máx}\left\{0, \frac{n}{q} - \frac{n}{p}, \frac{n}{q} - \frac{1}{p}\left(2 + \frac{n}{q}\right)\right\} < \quad s \quad < \text{mín}\left\{\frac{2}{p}, 2 + \frac{n}{q} - \frac{n}{2} - \frac{2}{r}, \frac{1}{p}\left(2 + \frac{n}{q}\right) - \frac{n}{2} - \frac{2}{r} + 2\right\},$$

entonces existe una $\tau^* = \tau^*(C_r, Cq) > 0$ y una única solución

$$u \in C([0,\tau^*], L^q(\Omega)) \cap C((0,\tau^*], W_0^{s,q}(\Omega)).$$

Además, la solución satisface

$$\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} + t^{s/2} \|u(t)\|_{W_0^{s,q}(\Omega)} \leq C \qquad \text{para } t \in (0,\tau^*],$$

donde C sólo depende de C_q, C_r y s. Si $\tilde{q} \geq q$ cumple con

$$\tilde{q} < \frac{2n}{n-4} \quad y \quad \frac{1}{r} < 1 - \frac{n}{4} + \frac{n}{2\tilde{q}},$$

entonces $u \in C((0,\tau^*], L^{\tilde{q}}(\Omega))$ y $\|u(t)\|_{L^{\tilde{q}}(\Omega)} \leq C(\delta, \tilde{q}, C_r, C_q)$ para $t \in [\delta, \tau^*]$ con $\delta \in (0, \tau^*)$.

Por último, $u \in C([\delta,\tau^*], W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^{rp}([\delta,\tau^*], L^{2p}(\Omega))$ para cualquier $\delta > 0$ y la norma de u en este espacio está acotada por una constante $C(\delta, Cr, Cq)$.

Demostración. Véase [AQ05] pags 9-11.

□

Lema 3.3.2 *Sea $h \in L^r([0, T+t_1], L^2(\Omega))$, con $t_1 > 0$ y $\|h\| \leq C_r$, y p, q, r como en el teorema 3.3.1. Supongamos que u es solución global de (3.26) en $[0, T+t_1]$ y $u_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ con $\|u_0\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C_q$. Entonces existe una constante $C = C(C_r, C_q, t_1)$ tal que $\|u\|_{L^q} \leq C$ para toda $t \in [0,T]$.*

Demostración. Véase [AQ05] pags 11-13.

□

Ahora podemos enunciar y probar nuestro primer resultado:

Teorema 3.3.1 *Sea $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ y $q \geq 2$ con*

$$q \in \left((p-1)\frac{n}{2}, \frac{2n}{n-4}\right). \tag{3.30}$$

Supongamos que $r \geq 2$ satisface

$$\frac{1}{r} < 1 - \frac{n}{4} + \frac{n}{2q} \tag{3.31}$$

y

$$r > \frac{p+1}{p}\frac{pn-(n+4)}{n+2-p(n-2)} - \frac{2}{p}. \tag{3.32}$$

Supongamos que $u_0 \in W_0^{2,q}(\Omega)$ y $\mathbb{U}_{ad} \subset L^r([0,T], L^2(\Omega))$ es débilmente compacto. Si $h \in \mathbb{U}_{ad}$ entonces (3.26) tiene una única solución $L^{rp}(L^{2p}(\Omega))$

fuerte definida en un intervalo máximo I_h.

Además, si $\mathbb{U}_{ad}^{G} \neq \emptyset$ y J cumple la condición de coercividad

$$J(u,h) \geq c_1 \|u(\cdot,T)\|_{L^q(\Omega)} - c_2, \tag{3.33}$$

para algunas constantes positivas c_1, c_2 y $J(u,h) = J_T(u(\cdot,T),h)$, donde $J_T : L^q(\Omega) \times L^r([0,T], L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ es s.i.d., entonces el problema de control (3.27) sujeto a (4.1) tiene solución.

Demostración. Sea $s = 0$, $q = 2p$ y $\lambda = rp$. Como $r \geq 2$ y $1 < p < p^*$, existe un elemento $\sigma \notin S_q$ tal que

$$\frac{2}{rp'} < \sigma < \text{mín}\left\{\frac{2}{r}, 2 - \frac{n}{2p'}\right\},$$

donde p' es el exponente dual de p. Bajo estas condiciones, podemos asegurar la existencia de una única solución $u \in L^{rp}(L^{2p}(\Omega))$ de (4.1) en un intervalo máximo I_h (véase [AQ05], pag. 22). Si fijamos $h \in \mathbb{U}_{ad}^{G}$, la solución es global y $|u|^p \in L^r([0,T], L^2(\Omega))$. Por la regularidad máxima de Sobolev para (3.26) (véase [Am95]) y por interpolación (véase [Am00]), tenemos que

$$\begin{gathered} u \in W^{1,r}([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^r([0,T], W_0^{2,2}(\Omega)) \\ \hookrightarrow \\ C([0,T], W_0^{1,2}(\Omega)) \cap C([0,T], W_0^{s,q}(\Omega)) \cap L^{rp}([0,T], L^{2p}(\Omega)) \end{gathered} \tag{3.34}$$

para cualquier

$$s < 2 - \frac{n}{2} + \frac{n}{q} - \frac{2}{r},$$

donde el encaje en $C([0,T], W_0^{s,q}(\Omega)) \cap L^{rp}([0,T], L^{2p}(\Omega))$ es compacto.

Para mostrar la segunda parte de la demostración, consideremos (u_k, h_k) una sucesión minimizante de (3.27). Como $\mathbb{U}_{ad}$ es débilmente compacto, podemos suponer que $\|h_k\|_{L^r([0,T],L^2(\Omega))} \leq C_r$ y $h_k \to h$ débilmente en $L^r([0,T], L^2(\Omega))$. Ahora bien, falta asegurar que u_k converge para cada h_k. De hecho, se puede probar (véase [AQ05]) que existe $t_0 > 0$ independiente de k tal que

$$u_k \text{ es uniformemente acotada en } L^{rp}([0,t_0], L^{2p}(\Omega))\ . \tag{3.35}$$

Sea $\tilde{h}_k(x,t) = h_k$ si $t \in [0,T]$ y $\tilde{h}_k(x,t) = 0$ si $t \in (T, 2T]$. Consideramos el problema (4.1) reemplazando $[0,T]$ por $[0,2T]$. Este problema tiene una única solución $L^{rp}(L^{2p})$ $\tilde{u}_k$ definida en un intervalo máximo de existencia $I_{\tilde{h}_k} \subset [0, 2T]$. De hecho, la función $w_k(t) = \tilde{u}_k(T+t)$ es la solución antes mencionada con $h \equiv 0$, condición inicial $w_k(0) = u_k(T)$ e intervalo máximo de existencia $I_0 \subset [0, T]$.

Ahora bien, a partir del hecho de que $J(u_k, h_k)$ esté acotado, podemos encontrar una cota para $u_k(T)$ en $L^q(\Omega)$ y el hecho de que (4.1) esté bien planteado en $L^q(\Omega)$, lo que garantiza el lema 3.3.1, podemos mostrar que existe una $t_1 > 0$ tal que $[0, t_1] \subset I_{w_k}$ para cualquier k.

Por lo anterior, podemos continuar todas las soluciones u_k en el intervalo $[T, T + t_1]$. Por el lema 3.3.2, tenemos que

$$\|u_k(\tau)\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q$$

para cualquier $\tau \in [0, T]$.

Sea $\tau^* = \tau^*(C_r, C_q)$ dada por el lema 3.3.1. Si $\delta \in (0, \text{mín}\{t_0, \tau^*\})$ fija y usando la última afirmación del lema 3.3.1 para $w_k(t) = u_k(\tau + t)$, $t \in [0, \tau^*]$ y $\tau^* \in [t_0 - \delta, T - \tau^*]$, obtenemos una cota uniforme para u_k en $L^{rp}([t_0, T], L^{2p}(\Omega))$. Esta cota y (3.35) muestra que $|u_k|^{p-1}u_k$ esta acotado en $L^r([0, T], L^2(\Omega))$. Como en (3.34), podemos notar que la sucesión $(|u_k|^{p-1}u_k)$ es compacta en $L^r([0, T], L^2(\Omega))$ y $u_k(T)$ es compacta en $L^q(\Omega)$. A partir de esto último, es fácil pasar al límite para obtener una solución de (3.27).

□

Si ahora consideramos (3.27) sujeto a

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_t - \Delta u - |u|^{p-1}u - uh = 0 & \text{en} & Q \\ u(0, x) = u_0 & \text{en} & \Omega \\ u = 0 & \text{en} & \Sigma \end{array} \right. \tag{3.36}$$

tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.2 *Con las mismas condiciones que en el teorema 3.3.1 para p, q y la condición de coercividad para J, sea $u_0 \in W_0^{2,q}(\Omega)$ y $\mathbb{U}_{ad} \subset L^\infty(Q)$ w^* secuencialmente compacto con $\mathbb{U}_{ad}^G \neq \emptyset$. Si $J(u, h) = J_T(u(\cdot, T), h)$, donde $J_T : L^q(\Omega) \times L^\infty(Q) \to \mathbb{R}$ es s.s.i.d., entonces el problema de control (3.27) sujeto a (3.36) tiene solución.*

Demostración. Se sigue de forma análoga a la demostración del teorema 3.3.1 con la correspondiente modificación al lema 3.3.2.

□

Ahora, haremos la modificación mencionada en el teorema anterior del lema 3.3.2, ya que ésta sólo depende de las estimaciones sobre la función V (que definiremos a continuación) y la norma en $L^2(\Omega)$ de u_t. Para ver la demostración del resultado se puede consultar [AQ05] pags 11-13.

Supongamos que $u \in C([0, T+t_1]; W_0^{1,2}(\Omega))$ es solución de (4.1) con $t_1 > 0$ fijo. Como $\mathbb{U}_{ad}$ es acotado en $L^\infty(\Omega)$, existe $M > 0$ tal que $\|h\|_{L^\infty} \leq M$ $\forall h \in \mathbb{U}_{ad}$. Definimos $V(t)$ como

$$V(t) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} \,\mathrm{d}x.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} V'(t) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t - |u|^{p-1} u u_t \,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\int_\Omega u_t^2 + u h u_t \,\mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

Por las desigualdades de Young y Hölder, vemos que

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -\int_\Omega u_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (hu)^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 \,\mathrm{d}x + \frac{M^2}{2}\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Sea $0 < \tau < 1$ con $\tau < T + t_1$ y $t \in [0, \tau]$. Denotemos por $C_0 = \int_\Omega u^2(x,0)\,\mathrm{d}x$ y notemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^2(t)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u^2(0)\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u^2(t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^t \int_\Omega u u_t \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \int_0^\tau \int_\Omega u^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_\Omega u_t^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Integrando la desigualdad anterior de 0 a τ con respecto a t, obtenemos

$$\int_0^\tau \int_\Omega u^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \tau C_0 + \tau \int_0^\tau \int_\Omega u^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \tau \int_0^\tau \int_\Omega u_t^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Por lo anterior y por (3.37)

$$\int_0^\tau \int_\Omega u^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \frac{\tau C_0}{1-\tau} + \frac{\tau}{1-\tau}\int_0^\tau \int_\Omega u_t^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3.38}$$

Sea $\tau_1 \in (0,1)$ definida por $\tau_1 = \frac{1}{1+2M^2}$ con $\tau \in [0,\tau_1]$. Notemos que $\frac{\tau_1}{1-\tau_1}M^2 = \frac{1}{2}$. Podemos suponer que $\tau_1 \leq T + t_1$ (tomando una M suficientemente grande si fuera necesario). Si integramos (3.37) y usamos (3.38), vemos que

$$V(\tau) - V(0) \leq \frac{C_0}{4} - \frac{1}{4}\int_0^\tau \int_\Omega u_t^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.39}$$

para $\tau \in [0,\tau_1]$. Con ésta estimación garantizamos que $V(t) \leq V(0) + C_0/4$ en $[0,\tau_1]$.

Para mostrar que $V(t)$ esta acotado inferiormente, lo haremos por contradicción. Consideremos $\delta \in (0, \text{mín}\{t_1,\tau_1\})$ y supongamos que $V(t_0) << -1$ para alguna $t_0 \in [0,\tau_1-\delta]$. Entonces por (3.39), podemos deducir que $V(t) \leq -K << -1$ para toda $t \in [\tau_1-\delta,\tau_1]$ y K una constante suficientemente grande. Si multiplicamos (4.1) por u e integramos sobre todo Ω, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x &= -2V(t) + c_1\int_\Omega |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega hu^2\,\mathrm{d}x \\
&\geq K + c_2\left(\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}$$

para cualquier $t \in [\tau_1-\delta,\tau_1]$. Sea $U(t) = \int_{\tau_1-\delta}^t \int_\Omega u_t^2(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. Si integramos la desigualdad anterior, obtenemos

$$U' \geq c_3 U^{\frac{p+1}{2}} + 2K(t-\tau_1+\delta) - C_3.$$

Sea $K \geq C_3/t_1$. Integrando $U' \geq 2K(t-\tau_1+\delta)-C_3$ en $[\tau_1-\delta,\tau_1-\delta+t_1/2]$, obtenemos

$$U(\tau_1-\delta+t_1/2) \geq Kt_1^2/4 - C_3t_1/2 \geq Kt_1^2/5.$$

También tenemos

$$U' \geq c_3U^{\frac{p+1}{2}} \quad \text{para } t \geq \tau_1-\delta+t_1/2.$$

Como la solución de $Z' = c_3Z^{\frac{p+1}{2}}$ para $t \geq 0$, $Z(0) = Kt_1^2/5$ explota para $t < t_1/2$ si K es suficientemente grande, también U explota para $t < T + t_1$. Así llegamos a la contradicción deseada. Por consiguiente,

$$V(t) \geq -C \quad \text{para toda } t \in [0,\tau_1-\delta].$$

Por otro lado, (3.39) implica que $\int_0^{\tau_1-\delta}\int_\Omega u_t^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C$ y por consiguiente $\int_\Omega u^2(t)\,\mathrm{d}x \le C$ para toda $t\in[0,\tau_1-\delta]$. En particular, $\int_\Omega u^2(\tau_1-\delta)\,\mathrm{d}x \le C_1$, donde C_1 no depende de h. Podemos repetir este argumento en el intervalo $[\tau_1-\delta, 2\tau_1-\delta]$ en lugar de $[0,\tau_1]$ y así sucesivamente, obtenemos las cotas para $V(t)$, $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$, $t\in[0,T]$ y $\|u_t(t)\|_{L^2(Q)}$.

$\square$

3.3.2. Control de una Ecuación Elíptica del Tipo Logístico

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un dominio regular y acotado. Consideremos la ecuación del tipo Lotka-Volterra

$$\begin{cases} u_t-\Delta u-u(a-h-bu)=0 & \text{en} \quad \Omega\times(0,T)\\ u(0,x)=u_0 & \text{en} \quad \Omega\\ u=0 & \text{en} \quad \partial\Omega\times(0,T). \end{cases}$$

Esta ecuación es utilizada para modelar el crecimiento poblacional de cierto tipo de especies [Sm91]. La función u representa la concentración de la especie, a es la tasa de crecimiento, b la tasa de saturación, h es el control y u_0 es la población inicial. Interpretamos la condición de frontera como el hecho de que ningún miembro de la especie habita en ese lugar y al control h como la inferencia que puede tener un depredador conciente (i.e. granjero, pescador, etc.).

Nosotros estamos interesados en el problema de control óptimo asociado al sistema estacionario

$$\begin{cases} -\Delta u-u(a-h-bu)= & 0 \quad \text{en } \Omega\\ u= & 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.40}$$

donde $a,b\in L^\infty(\Omega)$ y $h\in L^\infty_+(\Omega)=\{g\in L^\infty(\Omega)\,|\,g\ge 0 \text{ c.s. en } \Omega\}$.

De hecho, queremos ver bajo qué condiciones podemos encontrar h y u de manera que

$$J(h)=\int_\Omega \lambda u_h h-h^2\,\mathrm{d}x, \tag{3.41}$$

alcance su máximo sujeto a (3.40). J representa la diferencia entre la renta y el costo por explotar la especie, $\lambda>0$ describe el cociente entre el precio de la especie y el costo por controlar, cuyo papel es influenciar la tasa de crecimiento para obtener un mejor resultado en el proceso de explotación.

Primero daremos algunos resultados auxiliares de (3.40), y posteriormente, abordaremos el problema de controlabilidad.

Si $q \in L^\infty(\Omega)$, definimos $\sigma_1(q)$ el primer valor propio de

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = & \sigma u \quad \text{en } \Omega \\ \qquad\quad u = & 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.42}$$

que tiene una expresión de la forma

$$\sigma_1(q) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + q|u|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{3.43}$$

Se puede probar que la multiplicidad de σ_1 es uno y que la función propia asociada $\phi_1(q)$ pertenece a $C^{1,\alpha}(\Omega)$ para todo $\alpha \in (0,1)$ con $\phi_1(q) > 0$ en Ω y $\|\phi_1\|_{L^\infty} = 1$.

Por lo anterior, tenemos como consecuencia las siguientes propiedades:

1. $\sigma_1(q)$ es creciente con respecto a q,
2. $\forall M \in \mathbb{R}$, $\sigma_1(q + M) = \sigma_1(q) + M$,
3. $\sigma_1(q)$ es continua con respecto a q en $L^\infty(\Omega)$.

Usando la técnica de sub-supersoluciones, se puede mostrar que (3.40) tiene una solución no negativa u_h si y solamente si $\sigma_1(-a + h) < 0$. Sean $\overline{c} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} c$, $\underline{c} = \operatorname{ess\,ínf}_{x\in\Omega} c$ y $\underline{b} > 0$. Si u_h es la única solución no negativa, tenemos que

$$\frac{-\sigma_1(-a+h)}{\overline{b}} \phi_1(-a+h) \leq u_h \leq \frac{\overline{a} - h}{\underline{b}} \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.44}$$

Más aún, cualquier subsolución acotada w de (3.40) debe satisfacer $w \leq u_h$. Si $\sigma_1(-a + h) < 0$, entonces $u_h > 0$ para toda $x \in \Omega$ y por 1, tenemos que

$$\sigma_1(-a + h + 2bu_h) > \sigma_1(-a + h + bu_h) = 0. \tag{3.45}$$

La condición anterior nos da la estabilidad de la linealización del problema parabólico (véase [CGM98]).

Ahora, para cada $h \in L^\infty_+(\Omega)$ (análogamente para cada $h \in L^\infty(\Omega)$), denotamos a u_h la solución máxima no negativa de (3.40). Entonces $u_h \equiv 0$ si y sólamente si $\sigma_1(-a+h) \geq 0$ y $u_h > 0$ en Ω si y sólamente si $\sigma_1(-a+h) < 0$.

Por otro lado, es fácil mostrar la propiedad de monotonía con respecto a u_h, es decir, si $h, g \in L^\infty(\Omega)$ con $h \leq g$, entonces $u_h \geq u_g$.

A continuación, presentamos un resultado de existencia de soluciones:

Lema 3.3.3 *Supongamos que* $q \in L^\infty(\Omega), \quad \sigma_1(q) > 0$. *Entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) Para cada $f \in L^2(\Omega)$*, el problema*

$$(3.46) \qquad \begin{cases} -\Delta u + qu = & f \quad \textit{en } \Omega \\ \qquad\quad u = & 0 \quad \textit{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in H^1_0(\Omega)$*. De hecho, si* $f \in L^\infty(\Omega)$*, tenemos que* $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ *para toda* $\alpha \in (0,1)$*.*

(ii) Sean $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ *con* $u_2 \leq u_1$ *en* $\partial\Omega$ *y* $-\Delta u_2 + qu_2 \leq -\Delta u_1 + qu_1$ *en el sentido débil. Entonces* $u_2 \leq u_1$ *en* Ω*.*

(iii) Sean $p \in L^\infty(\Omega)$ *y* $f \in L^2(\Omega)$ *con* $f \geq 0$*,* $p \geq q$ *en* Ω*. Si* $w(p)$ *y* $w(q)$ *son las respectivas soluciones del problema (3.46), entonces* $w(p) \leq w(q)$ *en* Ω*.*

Demostración. Primero, (ii) y (iii) son consecuencia del principio del máximo para EDP elípticas. Para (i), podemos usar el teorema de Lax-Milgram en la forma bilineal $L : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$L(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega quv \, \mathrm{d}x$$

y al funcional $I : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(v) = \int_\Omega fv \, \mathrm{d}x.$$

De hecho, la caracterización para $\sigma_1(q)$ dada por (3.43) nos da la estimación

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega qu^2 \, \mathrm{d}x \geq c \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$, donde

$$c = \frac{\sigma_1(q)}{\sigma_1(q) + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}}.$$

$\square$

Si en particular, q en (3.46) pertenece a una $A \subset L^\infty(\Omega)$ tal que existen dos constantes positivas M y μ con la propiedad

$$\|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad \sigma_1(q) \geq \mu$$

para toda $q \in A$, entonces $c = \frac{\mu}{M+\mu}$ es independiente de $q \in A$, ya que

$$\frac{\mu}{M+\mu} \leq \frac{\sigma_1(q)}{\sigma_1(q) + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}}$$

para toda $q \in A$.

Para continuar, necesitamos dar un resultado de la diferenciabilidad de la función u_h con respecto a h:

Teorema 3.3.3 *Sea $h \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\sigma_1(-a+h) < 0$. Entonces*

$$\frac{u_{h+\beta g} - u_h}{\beta} \to v$$

en $H_0^1(\Omega)$ para cualquier $g \in L^\infty(\Omega)$ si $\beta \to 0$. De hecho, v es la única solución del problema

$$(3.47) \qquad \begin{cases} -\Delta v + [-a + h + 2bu_h]v = & -gu_h \quad \text{en } \Omega \\ v = & 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En particular, ésto último es cierto para cada $h \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que $J(h) > 0$.

Demostración. Sea $\beta \neq 0$ y

$$v_\beta = \frac{u_{h+\beta g} - u_h}{\beta}.$$

u_h y $u_{h+\beta g}$ satisfacen

$$(3.48) \qquad \begin{aligned} -\Delta u_h + [-a + h + b(u_h)]u_h = & \; 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u_h = & \; 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

y

$$-\Delta u_{h+\beta g} + [-a + h + \beta g + b(u_{h+\beta g})]u_h = 0 \quad \text{en } \Omega, \qquad (3.49)$$
$$u_{h+\beta g} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

respectivamente. Más aún, podemos notar que v_β satisface

$$-\Delta v_\beta + [-a + h + b(u_{h+\beta g} + u_h)]v_\beta = -g u_{h+\beta g} \quad \text{en } \Omega, \qquad (3.50)$$
$$v_\beta = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Como $\sigma(q)$ es creciente con respecto a $q \in L^\infty(\Omega)$ y u_h es decreciente con respecto a h, para cada $\epsilon > 0$ tenemos que

$$\sigma_1(-a + h + b(u_{h+\beta g} + u_h)) \geq \sigma_1(-a + h + b(u_{h+\epsilon\|g\|_{L^\infty(\Omega)}} + u_h)) \equiv \mu,$$

si $|\beta| \leq \epsilon$. Podemos escoger ϵ de tal forma que $\mu > 0$, ya que por continuidad de $\sigma_1(q)$ con respecto a q y por hipótesis sobre σ_1, obtenemos

$$\sigma_1(-a + h + \epsilon \|g\|_{L^\infty(\Omega)}) < 0$$

para ϵ suficientemente pequeña. Como consecuencia, tenemos que la función $bu_{h+\epsilon\|g\|_{L^\infty(\Omega)}}$ es estrictamente positiva en Ω y por monotonía de σ_1 y de u_h con respecto a h, vemos que

$$\sigma_1(-a + h + b(u_{h+\epsilon\|g\|_{L^\infty(\Omega)}} + u_h)) \geq \sigma_1(-a + h + b(u_h)) = 0.$$

Ahora, por (3.50) y por el lema anterior, existe una constante c independiente de $\beta \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} c\,\|v_\beta\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \int_\Omega |v_\beta|^2 + [-a + h + 2b(u_{h+\beta g} + u_h)]v_\beta^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega -g u_{h+\beta g} v_\beta \,\mathrm{d}x \leq K \|v_\beta\|_{H^1_0(\Omega)}, \end{aligned}$$

para alguna K positiva por (3.44). Por lo anterior, v_β es acotada en $H^1_0(\Omega)$ y obtenemos que $u_{h+\beta g} \to u_h$ en $H^1_0(\Omega)$ si $\beta \to 0$. Recordemos que la condición $bu_h > 0$ implica que $\sigma_1(-a + h + 2bu_h) > \sigma_1(-a + h + bu_h) = 0$, llegamos a que $v_\beta \rightharpoonup v$ en $H^1_0(\Omega)$ por unicidad de las soluciones de (3.47). De hecho, si reescribimos (3.50)

$$\begin{array}{lll} -\Delta v_\beta + [-a + h + 2bu_h]v_h = -g u_h - \beta[g + bv_\beta]v_\beta & \text{en} & \Omega, \\ v_\beta = 0 & \text{en} & \partial\Omega, \end{array}$$

vemos que $v_\beta \to v$ en $H^1_0(\Omega)$.

□

Ahora abordaremos el problema de la controlabilidad que mencionamos al principio. Sea $\lambda > 0$ y $J : L_+^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ el funcional definido por (3.41). Tenemos el siguiente resultado de existencia de un control óptimo para J:

Teorema 3.3.4 *Si a, b, h satisfacen las condiciones antes mencionadas, entonces existe un control óptimo $h \in L_+^\infty(\Omega)$ del problema* $\sup_{g\in L_+^\infty(\Omega)} J(g)$ *sujeto a (3.40).*

Demostración. Véase [CGM98].

□

La idea de la demostración es ver que los posibles controles óptimos deben ser acotados. De hecho, si $h \in L_+^\infty(\Omega)$ y $g = \min\{h, \frac{\lambda\overline{a}}{\underline{b}}\}$, entonces $J(g) \geq J(h)$. Para ésto, consideremos dos casos:

Si $u_h \equiv 0$, entonces

$$J(h) = -\int_\Omega h^2 \, \mathrm{d}x \leq -\int_\Omega g^2 \, \mathrm{d}x \leq J(g).$$

Si $u_h > 0$ en Ω, entonces la condición de monotonía de u_h con respecto a h, tenemos que $u_g \geq u_h > 0$ en Ω. En [CGM98] se prueba que

$$\lambda u_g g - g^2 \geq \lambda u_h h - h^2 \quad \text{c.s. en} \quad \Omega,$$

lo cual implica que $J(g) \geq J(h)$. Si en particular $h \in L_+^\infty(\Omega)$ es un control óptimo y $\overline{a} > 0$, podemos suponer que

$$h \leq \frac{\lambda\overline{a}}{\underline{b}} \quad \text{c.s. en } \Omega. \tag{3.51}$$

De lo anterior y de (3.44), se puede probar que si h_m es cualquier sucesión maximizante de J en $L_+^\infty(\Omega)$, entonces existe $h \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que para una subsucesión $h_m \rightharpoonup h$ débilmente en $L^2(\Omega)$ y $u_{h_m} \to u_h$ en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, $J(h) = \sup_{g\in L_+^\infty(\Omega)} J(g)$.

Ahora, daremos condiciones para que $J(h) = \sup_{g\in L_+^\infty(\Omega)} J(g) > 0$. Por un lado, si lo anterior es cierto, entonces existe una $h \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que $J(h) > 0$, por tanto $u_h > 0$ y $\sigma_1(-a) \leq \sigma_1(-a+h) < 0$. Por otro lado, si $\sigma_1(-a) < 0$, entonces para cualquier $f \in L_+^\infty(\Omega)$ podemos escribir

$$\lambda u_f f - f^2 = \frac{\lambda^2 u_f^2}{4} + \left(f - \frac{\lambda u_f}{2}\right)^2.$$

La condición $\sigma_1(-a) < 0$ implica la existencia de una función positiva f tal que $f = \frac{\lambda u_f}{2}$ y podemos concluir que $J(f) > 0$. De hecho,

$$\sup_{g \in L^\infty_+(\Omega)} J(g) > 0 \Leftrightarrow \sigma(-a) < 0,$$

con esto último justificamos la hipótesis $\sigma_1(-a) < 0$.

El teorema 3.3.3 nos permite dar una forma explícita del control óptimo:

Lema 3.3.4 *Supongamos que $\sigma_1(-a) < 0$ y que $h \in L^\infty_+(\Omega)$ es un control óptimo. Entonces,*

$$h = \frac{\lambda}{2} u_h (1 - P_h)^+ \quad \textit{c.s. en} \quad \Omega, \tag{3.52}$$

donde P_h es la única solución del problema lineal

$$\begin{cases} -\Delta P_h + [-a + h + 2bu_h] P_h = h & \textit{en} \quad \Omega \\ P_h = 0 & \textit{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.53}$$

Demostración. Sea $h \in L^\infty_+(\Omega)$ un control óptimo y $g \in L^\infty(\Omega)$, tal que $h + \beta g \in L^\infty_+(\Omega)$ si $\beta \to 0^+$. Entonces

$$J(h + \beta g) - J(h) \leq 0.$$

Si dividimos por β la expresión anterior, obtenemos

$$\int_\Omega \lambda \frac{u_{h+\beta g} - u_h}{\beta}(h + \beta g) + \lambda u_h g - 2gh - \beta g^2 \,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Si $\beta \to 0^+$ y usando el teorema 3.3.3, tenemos que

$$\int_\Omega \lambda v h + \lambda u_h g - 2gh \,\mathrm{d}x \leq 0 \tag{3.54}$$

donde v es la solución de (3.47). Ahora, si multiplicamos (3.47) por P_h, (3.53) por v, integramos y restamos ambas expresiones, podemos ver que

$$\int_\Omega hv + g u_h P_h \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.55}$$

En particular, combinando (3.54) y (3.55), deducimos que

$$\int_\Omega g[\lambda u_h (1 - P_h) - 2h] \,\mathrm{d}x \leq 0 \quad \forall g \in L^\infty_+(\Omega),$$

por tanto,

$$h \geq \frac{\lambda}{2} u_h (1 - P_h) \quad \text{c.s. en} \quad \Omega. \tag{3.56}$$

Por otro lado, si $g = -h$, entonces $h + \beta g \in L_+^\infty(\Omega)$ para toda $\beta \in (0,1)$. Entonces, análogamente a lo realizado anteriormente, tenemos que

$$\int_{\Omega \cap \{h>0\}} h[\lambda u_h(1 - P_h) - 2h]\, \mathrm{d}x = \int_\Omega h[\lambda u_h(1 - P_h) - 2h]\, \mathrm{d}x \geq 0.$$

De (3.56) debemos tener que

$$h = \frac{\lambda}{2} u_h (1 - P_h) \quad \text{c.s. en} \quad \Omega \cap \{h > 0\}. \tag{3.57}$$

con ésto último, concluimos el resultado.

$\square$

Para continuar caracterizando el control óptimo h, el lema 3.3.3 será de gran utilidad. De hecho, por el inciso (ii), $P_h \geq 0$. Para obtener una cota superior de P_h, primero necesitamos establecer cotas para h y $-a+h+2bu_h$. Por (3.51), tenemos una cota superior para cualquier control óptimo.

En el siguiente resultado obtendremos una cota inferior, la cual, es una consecuencia de la continuidad de u_h con respecto a h:

Lema 3.3.5 *Si $\sigma_1(-a) < 0$ y $0 < \epsilon < \frac{\sigma_1(-a)+2bu_0}{2\underline{b}}$, entonces existe una constante $D = D(a, b, \Omega)$ tal que si $\lambda \leq D$, P_h satisface*

$$0 \leq P_h \leq \lambda Q \quad \textit{c.s. en} \quad \Omega,$$

para cualquier control óptimo h, donde Q es la única solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta Q + [-a + h + 2b(u_0 - \epsilon)]Q = \frac{\overline{a}}{\underline{b}} & en \quad \Omega \\ Q = 0 & en \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.58}$$

Demostración. Por la condición en σ_1, u_0 es estríctamente positiva en Ω y por consiguiente, $\sigma_1(-a+bu_0) = 0$ y $\sigma_1(-a+2bu_0) > 0$. Por un lado, como la función $h \to u_h$ es continua de $L_+^\infty(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$, existe una constante D tal que

$$g \in L_+^\infty(\Omega), \quad g \leq D\frac{\overline{a}}{\underline{b}} \Rightarrow u_g \geq u_0 - \epsilon \quad \text{c.s. en} \quad \Omega, \tag{3.59}$$

con la hipótesis para ϵ. Por la misma condición para ϵ y el lema (3.3.3) (i), el problema (3.58) tiene una única solución Q y la función λQ satisface

$$-\Delta(\lambda Q) + [-a + h + 2b(u_0 - \epsilon)](\lambda Q) = \lambda \frac{\overline{a}}{\underline{b}}.$$

Si $\lambda \leq D$ y h es un control óptimo, de (3.59), (3.51), y (ii) del lema (3.3.3), concluimos el resultado.

$\square$

Del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.3.1 *Si $\sigma_1(-a) < 0$ y*

$$\lambda \leq \text{mín}\left\{D, \frac{1}{\|Q\|_{L^\infty(\Omega)}}\right\} = D_1,$$

entonces P_h satisface $0 \leq P_h \leq 1$ c.s. en Ω, para cualquier control óptimo $h \in L^\infty_+(\Omega)$.

Ahora presentamos el resultado principal de esta sección:

Teorema 3.3.5 *Si $\sigma_1(-a) < 0$ y $\lambda \leq D_1$, entonces cualquier control óptimo $h \in L^\infty_+(\Omega)$ se puede expresar de la forma*

$$h = \frac{\lambda}{2} u_h (1 - P_h),$$

donde la pareja $(u_h, P_h) = (u, p)$ satisface $0 < u$, $0 \leq p \leq 1$ c.s. en Ω y

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u = u\left(a - \left[b + \frac{\lambda}{2}u(1-p)\right] u\right) & en & \Omega \\ -\Delta p + p[-a + 2bu = \frac{\lambda}{2}u(1-p)^2 & en & \Omega \\ u = p = 0 & en & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.60}$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de los resultados anteriores.

$\square$

Del resultado anterior, se pueden deducir las siguientes afirmaciones:

1. Se puede probar que la regularidad de los controles es $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para $\alpha \in (0, 1)$.

2. Si $\lambda < D_1$, todo control es positivo c.s. en Ω.

3. Se puede aproximar el control a partir de la expresión dada por el teorema anterior y la unicidad de éste, si λ es suficientemente pequeña (véase [CGM98]). Para profundizar más en el problema, se puede consultar la referencia antes dada.

Con ésto último concluimos esta sección.

Capítulo 4

Conclusiones

Antes de enunciar la conjetura mencionada al final de la sección pasada, haremos algunas observaciones relevantes.

1. El problema de formación de patrones se analizó en la esfera por simplicidad, en particular, el primer resultado es cierto para cualquier dominio que admita soluciones positivas. Respecto al segundo resultado (la caracterización de los centros), no se puede caracterizar el comportamiento de los centros tan fácilmente debido a la geometría del dominio. En particular, se requirió el resultado para la ecuación elíptica asociada: para un dominio muy general, no se sabe la dinámica de los centros. Vale la pena realizar el mismo análisis para variedades sin frontera y sin singularidades en coordenadas locales.[1]

2. Por otro lado, una de las ventajas de nuestro enfoque es que podríamos considerar otro tipo de no linealidades que admitan formación de patrones usando el mismo procedimiento y bajo la presencia de estos, tratar de controlar la ecuación.

Ahora bien, si consideramos el funcional

$$J \;=\; \int_\Omega |u(x,T) - u_d(x)|^q \,\mathrm{d}x + N \int_0^T \int_\Omega h^2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

[1]Ésto puede representar un problema serio. En nuestro caso, la singularidad es removible. Véase [GP07].

sujeto a

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - |u|^{p-1}u - h = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T), \\ u(0,x) = u_0 & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,T), \end{cases}$$

o a

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - |u|^{p-1}u - uh = 0 & \text{en} \quad Q \\ u(0,x) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \Sigma \end{cases}$$

podemos usar los resultados de concentración para reducir estos sistemas a sistemas finito-dimensionales y así controlarlos. Para el caso particular del funcional anterior, podríamos dar cotas o incluso en ocasiones un valor exacto, dependiendo de la condición inicial y la función $u_d(x)$, para el valor del funcional en el óptimo. Esto se debe a que podemos relacionarlo con el problema de la mejor constante de Sobolev.

En general, dependiendo de la estructura del funcional, es decir, la dependencia de este con respecto a las normas involucradas para mostrar los resultados de concentración, se podría controlar a partir del problema finito dimensional.

De hecho, es razonable hablar de otro tipo de problemas de controlabilidad i.e. controlabilidad a trayectorias, controlabilidad distribuida, etc, con ciertas restricciones. Más aún, la segunda ecuación está relacionada con los valores propios del laplaciano, que a su vez determina la existencia global o local de soluciones. Se puede pensar en controlar cualquier dato inicial llevando la solución a una solución estacionaria.

Todo lo que mencionamos anteriormente nos da ideas para resolver ciertos problemas que aún siguen abiertos, así como planteamiento de problemas que no se han considerado o bien, porque no se tenía idea de como plantearlos para que tuvieran sentido. Con esto concluimos el trabajo y nuestras aportaciones por el momento.

Bibliografía

[ABKQ] Ackermann, N., Bartsch, T., Kaplický, P., Quittner, P.: *A Priori Bounds, Nodal Equilibria and Connecting Orbits in Indefinite Superlinear Parabolic Problems*, por aparecer en Trans. AMS.

[Am95] Amann, H.: *Linear and Quasilinear Parabolic problems vol. I: Abstract Linear Theory*, Birkhäuser, Basel, 1995.

[Am00] Amann, H.: *Compact Embeddings of Vector-valued Sobolev and Besov Spaces*, Glasnik Matematicki, Vol. 35, No. 1, pags 161-177, 2000.

[AQ05] Amann, H., Quittner, P.: *Optimal Control Problems with Final Observation Governed by Explosive Parabolic Equations*, SIAM Journal on Control and Optimization; vol. 44, No. 4, pags 1215-1238, 2005.

[CGM98] Cañada, A., Gámez, J.L., Montero, J.A.: *Study of an Optimal Control Problem for Diffusive Nonlinear Elliptic Equations of Logistic Type*, SIAM Journal on Control and Optimization , Volume 36, Number 4 (1998), pp. 1171-1189.

[Ca93] do Carmo, M. P.: *Riemannian Geometry*, Mathemathics: Theory & Applications, Birkhäuser, Boston, Mass., 1993.

[Ch05] Chang, K. C.: *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[E02] Evans, L. C.: *Partial Differencial Equations* Graduated Studies in Mathemathics, Vol.19, AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

[FR75] Fleming, W. H., Rishel, R. W.: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Applications of mathematics; 1, Springer-Verlag, New York, 1975

[FS92] Fleming, W. H., Soner, H. M.: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Applications of mathematics; 25, Springer-Verlag, New York, 1992.

[Fo99] Folland, G. B.: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York 2da edition, 1999.

[GP07] Garza-Hume, C. E., Padilla, P.: *A Pattern Formation Problem on the Sphere*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 15 (2007), pp. 97-106. http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu

[GW05] Gazzola, F., Weth, T.: *Finite Time Blow-up and Global Solutions for Semilinear Parabolic Equations with initial Data at High Energy Level*, Differential and Integral Equations, Volume 18, Number 9 (2005), pp. 961-990.

[I00] Ikehata, R.: *The Palais-Smale Condition for the Energy of Some Semilinear Parabolic Equations*, Hiroshima Mathematical Journal; Vol. 30, pp. 117-127, 2000.

[IS00] Ikehata, R., Suzuki, T.: *Semilinear Parabolic Equations Involving Critical Sobolev Exponent: Local and Asymptotic Behavior of Solutions*, Differential and Integral Equations; Vol. 13, pp. 869-901, 2000.

[I02] Ize, J.: *Cálculo de variaciones*, Serie FENOMEC, 2002.

[Ja03] Jabri, Youssef: *The Mountain Pass Theorem*, Encyclopedia of Mathematics and tit's Applications, Vol.95, Cambride University Press, Cambridge 2003.

[Jo05] Jost, J.: *Postmodern Analysis*, Universitext, Springer-Verlag, New York, third edition, 2005.

[KSh91] Kamien, M. I., Schwartz, N. L.: *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*, Advanced textbooks in economics; 31, North-Holland, Amsterdam-New York, second edition, 1991.

[LiLo01] Lieb, E. H., Loss, M.: *Analysis*, Graduated Studies in Mathemathics, Vol. 14, AMS, Providence, Rhode Island, 2001.

[MiZu] Micu, S., Zuazua, E.: *An Introduction to Controllability of Partial Differential Equations*, Notas de Cursos, http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/

[Øk00] Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, fifth edition, 2000.

[Ru91] Rudin, W.: *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, second edition, 1991.

[Si87] Simon, J.: *Compact Sets in the Space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol.CXLVI, pp. 65-96, 1987.

[Sm91] Smoller, J.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics: 258, Springer-Verlag, Second Edition, 1991.

[St90] Struwe, M.: *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Vol. 34 A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Second Edition, 1990.

[S00] Suzuki, T.: *Semilinear Parabolic Equation on Bounded domain with Critical Sobolev Exponent*, por aparecer en Indiana University Mathematics Journal, 2008.

[Zh04] Zheng, S.: *Nonlinear Evolution Equations*, Vol. 133 Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall / CRC, 2004.