UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Aspectos de la Teoría de Retículas relevantes en la Teoría de Módulos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JUAN ANTONIO NAVA RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA

2009

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Aspectos de la Teoría de Retículas relevantes en la Teoría de Módulos

realizado por **Nava Ramírez Juan Antonio** con número de cuenta **0-9416168-1** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Tutor		
Propietario	Dr. Juan Morales Rodríguez	Juan Morales R
Propietario	Dr. Alejandro Alvarado García	
Suplente	M. en C. Alejandro Bravo Mojica	
Suplente	Mat. Ernesto Mayorga Saucedo	Ernesto Mayorga

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 27 de julio de 2009
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Nava
Ramírez
Juan Antonio
54 41 63 54
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
94161681

2. Datos del tutor
Dr.
Hugo Alberto
Rincón
Mejía

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Juan
Morales
Rodríguez

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Alejandro
Alvarado
García

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Alejandro
Bravo
Mojica

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Ernesto
Mayorga
Saucedo

7. Datos del trabajo escrito
Aspectos de la Teoría de Retículas relevantes en la Teoría de Módulos
75 p
2009

Abstract.

Muchos objetos de estudio en álgebra guardan propiedades retículares, tales como los subespacios vectoriales, los subgrupos, los subanillos, los ideales de un anillo o los submódulos. De aquí la importancia del estudio de las retículas y su caracterización.

En la presente tesis se estudian propiedades de algunas retículas conocidas y la estructura algebraica generada por las operaciones supremo e ínfimo en una retícula. Se aborda la caracterización y representación de las retículas modulares y distributivas, así como las condiciones de cadena y las retículas neterianas y artinianas.

De manera central se analizan aspectos retículares en la teoría de módulos y retículas tales como los submódulos, las clases hereditarias y cohereditarias, las clases naturales y conaturales.

Índice

1. Conjuntos Ordenados

Definición 1.1. *Sea P un conjunto. Un* ***orden (parcial)*** *en P es una relación binaria $\leq$ tal que, para todo $x, y, z \in P$, se cumplen las propiedades de:*

- ***Reflexividad*** $(x \leq x)$
- ***Antisimetría*** $(x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y)$
- ***Transitividad*** $(x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

Un conjunto P con una relación de orden $\leq$ es llamado ***conjunto ordenado*** *(o bien,* ***conjunto parcialmente ordenado****).*

Definición 1.2. *Sea P un conjunto ordenado, sean $a, b \in P$.*

- *Si $a \leq b$, pero $a \neq b$, escribiremos $a < b$.*
- *Si $a < b$ y no existe $x \in P$ tal que $a < x < b$, diremos que "b* ***cubre a*** *a" y lo denotaremos por $a \prec b$.*

Definición 1.3. *Sea P un conjunto ordenado. Entonces,*

- *P es una* ***cadena*** *(o bien,* ***conjunto totalmente ordenado****) si, para cualesquiera $x, y \in P$, tenemos que $x \leq y$ o $y \leq x$ (es decir, cualesquiera dos elementos en P son comparables).*
- *P es una* ***anticadena*** *si $x \leq y$ sólo cuando $x = y$.*

Definición 1.4. *Sean P, Q conjuntos ordenados. Una función $\varphi : P \to Q$ es:*

- ***monótona*** *(o bien,* ***preserva el orden****) si $x \leq y$ en P implica $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ en Q;*
- *una* ***inmersión de órdenes*** *si $x \leq y$ en P si y sólo si $\varphi(x) \leq \varphi(y)$en Q;*
- *un* ***isomorfismo de órdenes*** *si es una inmersión de órdenes suprayectiva.*

*Cuando existe un isomorfismo de órdenes de P en Q, decimos que P y Q son **isomorfos** (bajo el orden dado) y escribimos $P \cong Q$.*

Definición 1.5. *Sea P un conjunto ordenado y sea $Q \subseteq P$. Entonces:*

- *$a \in Q$ es un elemento **máximo** si $a \leq x \in Q$ implica $a = x$.*
- *$a \in Q$ es un elemento **mayor** de Q si $x \leq a$ para cada $x \in Q$.*

De manera dual (esto es, intercambiando en las definiciones anteriores $\leq$ por $\geq$) se define un elemento **mínimo** de Q y un elemento **menor** de Q.

Observaciones.

- Si existe un elemento mayor (menor), éste es único.
- El elemento mayor (menor) es también un elemento máximo (mínimo).

Notación. Sea P un conjunto ordenado, al elemento mayor de P (si existe) lo denotaremos por $\top$, y al elemento menor (si existe) por $\perp$.

1.1. Diagramas.

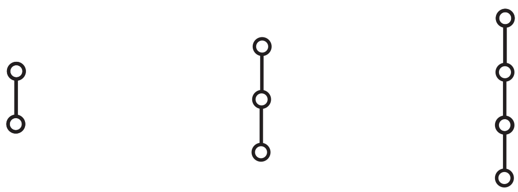
Si P es un conjunto ordenado finito, podemos representarlo gráficamente de la siguiente forma:

- Asignamos puntos en el plano para los elementos de P.
- Si un elemento cubre a otro, trazamos una línea que una a los puntos que los representan, ubicando al elemento que cubre por encima del otro.
- La línea descrita anteriormente no contendrá a otro punto, ni intersecará a alguna otra línea.

Ejemplos.

- Todos los conjuntos ordenados de tres elementos son:

- Las cadenas $\mathbf{n}$ de n elementos:



2 **3** **4**

- Las anticadenas $\bar{\mathbf{n}}$ de n elementos:

$\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{4}$

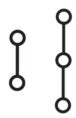
1.2. Sumas de Conjuntos Ordenados.

Definición 1.6. *Si P, Q son conjuntos ordenados tales que $P \cap Q = \emptyset$, definimos:*

- *La* ***unión*** *de P y Q, $P \cup Q$ con el orden: $x \leq y$ en $P \cup Q \Leftrightarrow$ $(x, y \in P$ y $x \leq y)$ o $(x, y \in Q$ y $x \leq y)$.*
- *La* ***suma lineal*** *de P y Q, $P \oplus Q$ con el orden: $x \leq y$ en $P \oplus Q$ $\Leftrightarrow$ $(x, y \in P$ y $x \leq y)$ o $(x, y \in Q$ y $x \leq y)$ o $(x \in P$ y $y \in Q)$.*

Ejemplos.

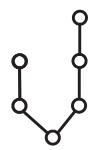
- $2 \cup 3$, $2 \oplus 3 = 5$



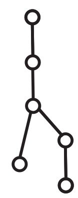
2∪3

2⊕3=5

- $1 \oplus (2 \cup 3)$, $(1 \cup 2) \oplus 3$

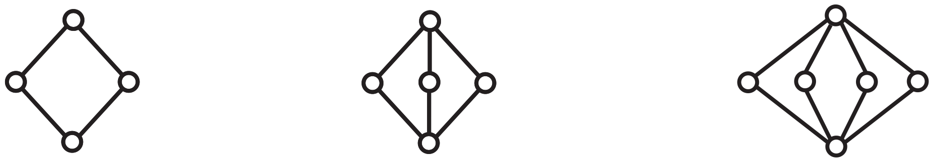


1⊕(2∪3)



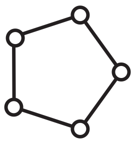
(1∪2)⊕3

- Denotaremos por M_n a la suma $1 \oplus \bar{n} \oplus 1$



$\mathbf{M_2}$ $\mathbf{M_3}$ $\mathbf{M_4}$

- $1 \oplus (2 \cup 1) \oplus 1$ es



Por la forma de su diagrama, el conjunto M_3 recibe el nombre de **diamante** y el conjunto del último ejemplo recibe el nombre de **pentágono** y es denotado por N_5.

$\mathbf{M_3}$
Diamante

$\mathbf{N_5}$
Pentágono

2. Retículas

2.1. Retículas y Retículas Completas.

Definición 2.1. *Sea P un conjunto ordenado y sea $S \subseteq P$.*

- *Un elemento $x \in P$ es una* ***cota superior*** *de S si $s \leq x$ para toda $s \in S$. Una* ***cota inferior*** *se define de manera dual.*
- *El conjunto de todas las cotas superiores de S se denota por S^s y el conjunto de todas las cotas inferiores por S^i :*

$$S^s := \{\, x \in P \mid s \leq x,\ \forall s \in S\}$$
$$S^i := \{\, x \in P \mid x \leq s,\ \forall s \in S\}$$

- *Si $x \in S$ es un elemento tal que:*
  1. $x \in S^s$
  2. $x \leq y$ *, para toda* $y \in S^s$

  entonces decimos que x es la ***menor cota superior*** *(o* ***supremo****) de S y lo denotamos por* ***SupS****. Dualmente se define la* ***mayor cota inferior*** *(o* ***ínfimo****) de S, denotado por* ***Inf S****.*

Notación. Adoptaremos la siguiente notación:
Escribiremos $x \vee y$ en lugar de $Sup\{x, y\}$ si éste existe, y $x \wedge y$ en lugar de $Inf\,\{x, y\}$ si existe.
Similarmente escribimos $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ para referirnos a $Sup\,S$ y a $Inf\ S$, respectivamente, cuando éstos existen.

Definición 2.2. *Sea P un conjunto ordenado no vacío*

- *P es una* ***retícula*** *si para cada $x, y \in P$, $x \vee y$ y $x \wedge y$ existen en P.*
- *P es una* ***retícula completa*** *si para cada $S \subseteq P$, $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ existen en P.*

Definición 2.3. *Sea R una retícula, si R tiene elemento mayor $\top$ y elemento menor $\bot$, entonces decimos que R es una* ***retícula acotada****.*

Observación. En la definición de retícula completa se toma en cuenta el caso $S = \emptyset$. Así $\bigvee \emptyset$ es el elemento menor de $\emptyset^s = \{ x \in P \mid s \leq x, \ \forall s \in \emptyset\}$ que es todo P, de aquí que P tiene elemento menor. Dualmente puede verse que P debe tener elemento mayor. De aquí, toda retícula completa es acotada.

Ejemplos:

- Las cadenas son retículas donde $x \vee y$ y $x \wedge y$ son el elemento mayor y el elemento menor, respectivamente, de $\{x, y\}$.
  Así: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ son retículas pero ninguna es completa.
  En $\mathbb{R}$, $[a, b]$ es retícula completa si $-\infty < a < b < \infty$ (axioma de completez de $\mathbb{R}$). Pero en $\mathbb{Q}$, $[-2, 2] \cap \mathbb{Q}$ no es retícula completa a pesar de ser acotada, pues $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ tiene cotas superiores pero no supremo en $\mathbb{Q}$.
- Sea X un conjunto, entonces el conjunto ordenado $\wp(X)$ de subconjuntos de X es una retícula completa en la cual

$$\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

y

$$\bigwedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i$$

- **Retículas de subgrupos:**
  - Sea G un grupo y consideremos $\langle SubG; \subseteq\rangle$ el conjunto ordenado de subgrupos de G. Es cierto que para $H, K \in SubG$, $H \cap K \in SubG$, de aquí $H \wedge K$ existe y es igual a $H \cap K$. Por el contrario, $H \cup K$ no siempre es un subgrupo, sin embargo $H \vee K$ existe en $SubG$ como el subgrupo generado por $H \cup K$: $\langle H \cup K\rangle$.
  - Sea G un grupo, consideremos ahora $\langle \mathcal{N}SubG; \subseteq\rangle$ el conjunto ordenado de subgrupos normales de G. $H \wedge K$ de nuevo está dado por $H \cap K$. Además tenemos que si $H, K \in \mathcal{N}SubG$, entonces

$$HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\} \in \mathcal{N}SubG$$

  De aquí, podemos ver que $H \vee K = HK$.

2.2. Estructuras-Intersección.

Lema 2.4. *Sea P conjunto ordenado tal que $\bigwedge S$ existe en P para cada S subconjunto no vacío de P. Entonces $\bigvee S$ existe en P para todo S subconjunto con una cota superior en P (es decir $S^s \neq \emptyset$). De hecho $\bigvee S = \bigwedge S^s$*

Demostración.
Sea $S \subseteq P$ tal que $S^s \neq \emptyset$, entonces, por hipótesis $\bigwedge S^s$ existe en P. Sea $s \in S$, entonces $s \leq t, \forall t \in S^s$. De aqui, s es cota inferior de S^s y $s \leq \bigwedge S^s$. Esto significa que $\bigwedge S^s$ es cota superior de S. Además, $\bigwedge S^s \leq t$ para toda t cota superior de S. Por tanto $\bigwedge S^s$ es la menor cota superior de S, es decir $\bigvee S = \bigwedge S^s$. □

Teorema 2.5. *Sea P conjunto ordenado no-vacío. Entonces son equivalentes:*

1. *P es una retícula completa*
2. *$\bigwedge S$ existe en P para cada S subconjunto de P*
3. *P tiene un elemento mayor $\top$ y $\bigwedge S$ existe en P para cada S subconjunto no vacío de P.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2\rfloor$
Por definicion de retícula completa.
$2 \Rightarrow 3\rfloor$
Por hipótesis $\bigwedge \emptyset$ existe en P. Pero $\bigwedge \emptyset$ es el elemento mayor de $\emptyset^i = \{\, p \in P \mid p \leq s,\ \forall s \in \emptyset\} = P$. Asi que P tiene elemento mayor. Además, por (ii), $\bigwedge S$ existe en P para cada $S \neq \emptyset$ subconjunto de P.
$3 \Rightarrow 1\rfloor$
Sea $S \subseteq P$. Por hipótesis $\bigwedge S$ existe para todo $S \neq \emptyset$ y, si $S = \emptyset$, entonces $\bigwedge S = \bigwedge \emptyset = \top$. Así que $\bigwedge S$ existe para todo $S \subseteq P$. Sea $S \subseteq P$, como P tiene elemento mayor $\top$, entonces $p \leq \top, \forall p \in S$. Por tanto $\top \in S^s$ y $S^s \neq \emptyset$, usando el lema anterior tenemos que $\bigvee S$ existe en P. □

Corolario 2.6. *Sea X un conjunto y sea $\Re$ una familia de subconjuntos de X, ordenados con la inclusión de conjuntos, y tal que*

1. $\bigcap_{i\in I} A_i \in \Re$ *para cada familia no-vacía* $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Re$
2. $X \in \Re$

Entonces $\Re$ *es una retícula completa en la cual*

$$\bigwedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i$$

$$\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap \{B \in \Re \mid \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B\}$$

Demostración.
Tenemos que $A \subseteq X, \forall A \in \Re$ y $X \in \Re$, así que X es elemento mayor de $\Re$.

Sea $\{A_i\}_{i\in I} \in \Re$ una familia no-vacía. Por hipótesis $\bigcap_{i\in I} A_i \in \Re$. Además $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i, \forall i \in I$ y, si $B \subseteq A_i, \forall i \in I$ con $B \in \Re$, entonces $B \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$. De aquí que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es el ínfimo de $\{A_i\}_{i\in I}$, es decir, $\bigwedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i$. Entonces, por el teorema anterior, $\Re$ es una retícula completa.

Usando el lema 2.4., tenemos que
$\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = \bigwedge \{A_i \mid i \in I\}^s = \bigwedge \{B \in \Re \mid A_i \subseteq B, \forall i \in I\} = \bigwedge \{B \in \Re \mid \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B\} = \bigcap \{B \in \Re \mid \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B\}$. $\square$

Definición 2.7. *Si* $\Re$ *es una familia no-vacía de subconjuntos de* X *tal que satisface la condición* 1 *del corolario anterior, entonces diremos que* $\Re$ *es una* ***estructura intersección (***$\bigcap$***-estructura)*** *en* X*. Si además satisface la condición* 2*, entonces la llamaremos* ***estructura intersección con elemento mayor (***$\bigcap^{\top}$***-estructura)****.*

Ejemplos. Algunas $\bigcap^{\top}$-estructuras (y por tanto retículas completas) son:

- Los subgrupos, $SubG$, de un grupo G.
- Los subgrupos normales, $\mathcal{N}SubG$, de un grupo G.
- Los subeespacios de un espacio vectorial.
- Los subanillos de un anillo.
- Los ideales de un anillo.

2.3. Completación.

Definición 2.8. *Sea X un conjunto.*

- *Una función $C : \wp(X) \to \wp(X)$ es un* ***operador cerradura*** *en X si, para cada $A, B \subseteq X$:*

  1. $A \subseteq C(A)$
  2. *Si $A \subseteq B$, entonces $C(A) \subseteq C(B)$*
  3. $C(C(A)) = C(A)$

- *Un subconjunto A de X es* ***cerrado*** *(con respecto a C) si $C(A) = A$.*

Teorema 2.9. *Sea C un operador cerradura sobre un conjunto X. Entonces la familia*

$$\Re_C := \{A \subseteq X \mid C(A) = A\}$$

de subconjuntos cerrados de X es una $\bigcap^\top$-estructura y así, una retícula completa ordenada por la inclusión, en la que

$$\bigwedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i$$

y

$$\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = C(\bigcup_{i \in I} A_i)$$

Inversamente, dada una $\bigcap^\top$-estructura $\Re$ en X,

$$C_\Re(A) := \bigcap \{B \in \Re \mid A \subseteq B\}$$

define un operador cerradura $C_\Re$ en X.

Demostración.
Claramente $C(X) \subseteq X$ y como C es operador cerradura, $X \subseteq C(X)$. Por tanto $X = C(X)$ y $X \in \Re_C$. Además $A \subseteq X$ para todo $A \in \Re_C$, así que X es elemento mayor de $\Re_C$.

Sea $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Re_C$ familia no-vacía. Entonces $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq C(\bigcap_{i\in I} A_i)$. Además, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i, \forall i \in I \Rightarrow C(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq C(A_i) = A_i, \forall i \in I \Rightarrow C(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} A_i \in \Re_C$.

De lo anterior se sigue que $\Re_C$ es una $\bigcap^\top$-estructura y así, una retícula completa en la que:

$$\bigwedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i$$

y

$$\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap\{B \in \Re_C \mid \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B\}$$

Veamos ahora que $\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = C(\bigcup_{i\in I} A_i)$:

Tenemos que $C(\bigcup_{i\in I} A_i) \subseteq C(B) = B$, para cada $B \in \Re_C$ tal que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$, entonces $C(\bigcup_{i\in I} A_i) \subseteq \bigvee \{A_i \mid i \in I\}$.
Por otra parte $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i, \forall i \in I$, de lo cual se sigue que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es cota superior de $\{A_i \mid i \in I\}$ y $\bigvee \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq C(\bigcup_{i\in I} A_i)$.

Para probar la segunda parte del teorema consideremos ahora una $\bigcap^\top$-estructura $\Re$ en X. Veamos que $C_\Re : X \to X$ dado por $C_\Re(A) = \bigcap\{B \in \Re \mid A \subseteq B\}$ es un operador cerradura:

(1) Claramente $A \subseteq \bigcap\{B \in \Re \mid A \subseteq B\} = C_\Re(A)$.
(2) Supongamos que $A \subseteq B$, entonces: $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$. Por tanto

$$\{C \in \Re \mid B \subseteq C\} \subseteq \{C \in \Re \mid A \subseteq C\}$$

y

$$\bigcap\{C \in \Re \mid A \subseteq C\} \subseteq \bigcap\{C \in \Re \mid B \subseteq C\}$$

es decir, $C_\Re(A) \subseteq C_\Re(B)$.
(3) $C_\Re(A) = \bigcap\{B \in \Re \mid A \subseteq B\}$ y como $\Re$ es una $\bigcap$-estructura, entonces $C_\Re(A) \in \Re$. Por tanto $C_\Re(A) \in \{B \in \Re \mid C_\Re(A) \subseteq B\}$ y $C_\Re(C_\Re(A)) \subseteq C_\Re(A)$. Esto prueba que $C_\Re(C_\Re(A)) = C_\Re(A)$.

$\square$

Nota. Este teorema nos permite definir la cerradura de un conjunto A como $C(A) = \bigcap\{B \in \Re_C \mid A \subseteq B\}$. Y así $C_{\Re_C} = C$.

Ejemplo. Sea G un grupo. Entonces el operador cerradura correspondiente a la $\bigcap^{\top}$-estructura $Sub\, G$ asigna a un subconjunto A de G el subgrupo generado por A, $\langle A \rangle$.

Definición 2.10. *Sea P un conjunto ordenado. Si $\varphi : P \hookrightarrow R$ es una inmersión de órdenes (es decir, $x \leq y$ en P si y sólo si $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ en R) y R es una retícula completa, entonces decimos que R es una* ***completación*** *de P (vía φ).*

Lema 2.11. *Sean A y B subconjuntos de un conjunto ordenado P, entonces:*

1. $A \subseteq A^{si}$ *y* $A \subseteq A^{is}$
2. *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $B^s \subseteq A^s$ *y* $B^i \subseteq A^i$
3. $A^s = A^{sis}$ *y* $A^i = A^{isi}$

Demostración.
1⌋ $a \in A \Rightarrow a \leq x, \forall x \in A^s \Rightarrow a \in (A^s)^i$;
$a \in A \Rightarrow x \leq a, \forall x \in A^i \Rightarrow a \in (A^i)^s$.

2⌋ Supongamos $A \subseteq B$, entonces:
$x \in B^s \Rightarrow x \geq b, \forall b \in B \Rightarrow x \geq a, \forall a \in A \Rightarrow x \in A^s$, y
$x \in B^i \Rightarrow x \leq b, \forall b \in B \Rightarrow x \leq a, \forall a \in A \Rightarrow x \in A^i$.

3⌋ $A^s \subseteq (A^s)^{is}$ y $A^i \subseteq (A^i)^{si}$ (por (1)). Además $A \subseteq A^{si}$ y $A \subseteq A^{is}$, de aquí $A^{sis} \subseteq A^s$ y $A^{isi} \subseteq A^i$ (por (2)).

□

Teorema 2.12. *Sea P un conjunto ordenado, sea $C : \wp(P) \to \wp(P)$ dada por $C(A) := A^{si}$, entonces C define un operador cerradura en P. De esto se sigue que*

$$\boldsymbol{DM}(P) := \left\{ A \subseteq P \mid A^{si} = A \right\}$$

es una $\bigcap^{\top}$-estructura en P y, por tanto, $\langle \boldsymbol{DM}(P); \subseteq \rangle$ es una retícula completa, llamada la ***completación de Dedekind-MacNeille*** *de P.*

Demostración.
Veamos que $C(A) = A^{si}$ define un operador cerradura:

(1) $A \subseteq A^{si} = C(A)$.
(2) $A \subseteq B \Rightarrow B^s \subseteq A^s \Rightarrow A^{si} \subseteq B^{si} \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$.
(3) $C(C(A)) = C(A^{si}) = (A^{si})^{si} = (A^{sis})^i = A^{si} = C(A)$.

Por lo tanto $\{A \subseteq P \mid C(A) = A\} = DM(P)$ es una retícula completa.

$\square$

2.4. Estructura Algebraica de las Retículas.

Dada una retícula R, podemos definir dos operaciones binarias:

$$a \vee b := sup\,\{a, b\}$$

y

$$a \wedge b := inf\,\{a, b\}$$

En esta sección estudiaremos las propiedades algebraicas de estas operaciones.

Lema 2.13. *Sea R una retícula y sean $a, b \in R$. Entonces son equivalentes:*

1. $a \leq b$
2. $a \vee b = b$
3. $a \wedge b = a$

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$ y $3 \rfloor$
Si $a \leq b$, entonces a es cota inferior y b es cota superior de $\{a, b\}$. Sean $c \in \{a, b\}^i$ y $d \in \{a, b\}^s$, entonces $c \leq a$ y $b \leq d$. Por tanto $a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$.
$2 \Rightarrow 1 \rfloor$
$a \vee b = b \Rightarrow b \in \{a, b\}^s \Rightarrow a \leq b$.

$3 \Rightarrow 1\rfloor$
$a \wedge b = a \Rightarrow a \in \{a, b\}^i \Rightarrow a \leq b.$ $\square$

Teorema 2.14. *Sea R una retícula. Entonces $\vee$ y $\wedge$ satisfacen, para cualesquiera $a, b, c \in R$:*

1. ***Ley Asociativa*** $((a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c))$
2. ***Ley Conmutativa*** $(a \vee b = b \vee a)$
3. ***Ley de Idempotencia*** $(a \vee a = a)$
4. ***Ley de Absorción*** $(a \vee (a \wedge b) = a)$

Demostración.

$1\rfloor$ $d \in \{a \vee b, c\}^s \Leftrightarrow a \vee b \leq d$ y $c \leq d \Leftrightarrow d \in \{a, b\}^s$ y $c \leq d \Leftrightarrow a \leq d, b \leq d, c \leq d \Leftrightarrow a \leq d$ y $d \in \{b, c\}^s \Leftrightarrow a \leq d$ y $b \vee c \leq d \Leftrightarrow d \in \{a, b \vee c\}^s$. De aquí se sigue que $(a \vee b) \vee c = men\{a \vee b, c\}^s = men\{a, b \vee c\}^s = a \vee (b \vee c)$.

$2\rfloor$ $a \vee b = men\{a, b\}^s = men\{b, a\}^s = b \vee a$.

$3\rfloor$ $a \leq a$, por tanto $a \in \{a\}^s$. Además si $b \in \{a\}^s$, entonces $a \leq b$. Así tenemos que $a = men\{a\}^s = men\{a, a\}^s = a \vee a$.

$4\rfloor$ $a \leq a$ y $a \wedge b \leq a$, así que $a \in \{a, a \wedge b\}^s$. Si $c \in \{a, a \wedge b\}^s$, entonces $a \leq c$. Por tanto $a = men\{a, a \wedge b\}^s = a \vee (a \wedge b)$. $\square$

Dualmente, tenemos:

Teorema 2.15. *Sea R retícula, tenemos que para cada $a, b, c \in R$ se cumple:*

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
2. $a \wedge b = b \wedge a$
3. $a \wedge a = a$
4. $a \wedge (a \vee b) = a$

Definición 2.16. *Sea R una retícula. Decimos que R tiene:*

- *elemento **unidad**, si existe $1 \in R$ tal que $a = a \wedge 1$, $\forall a \in R$.*
- *elemento **cero** si existe $0 \in R$ tal que $a = a \vee 0$, $\forall a \in R$.*

Observaciones.

- Como $a = a \wedge 1 \Leftrightarrow a \leq 1$, $\forall a \in R$, entonces si R tiene unidad, tiene elemento mayor $\top = 1$
- Dualmente, si R tiene elemento cero, éste debe ser el elemento menor de R, $\perp = 0$.
- A partir de este momento, usaremos **0** para referirnos al elemento menor de una retícula (si existe) y **1** para el elemento mayor (si existe). Diremos que una retícula es acotada si tiene elemento cero **0** y tiene unidad **1**.

Definición 2.17. *Sean R, P retículas. Una función $h : R \to P$ es un **homomorfismo** si preserva las dos operaciones $\vee$ y $\wedge$, es decir:*

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

y

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

*Un homomorfismo biyectivo es un **isomorfismo**.*
*Si $h : R \to P$ es un homomorfismo uno-a-uno, entonces diremos que h es una **inmersión** (de R en P).*

Observaciones. Se sigue que si h es un homomorfismo entonces $h(R)$ es una subretícula de P, pues $h(a) \vee h(b) = h(a \vee b) = h(c)$ para algun $c \in R$ y $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) = h(d)$ para algun $d \in R$.
Si h es inmersión, entonces $h(R)$ es retícula isomorfa a R.

Teorema 2.18. *Sean R y P retículas y $h : R \to P$ una función. Entonces son equivalentes:*

1. *h preserva el orden*

2. $h(a \vee b) \geq h(a) \vee h(b)$, $\forall a, b \in R$
3. $h(a \wedge b) \leq h(a) \wedge h(b)$, $\forall a, b \in R$

Demostración.
$1 \Rightarrow 2\rfloor$
$a, b \leq a \vee b \Rightarrow h(a), h(b) \leq h(a \vee b) \Rightarrow h(a \vee b) \in \{h(a), h(b)\}^s \Rightarrow h(a) \vee h(b) \leq h(a \vee b)$.
$1 \Rightarrow 3\rfloor$
$a, b \geq a \wedge b \Rightarrow h(a), h(b) \geq h(a \wedge b) \Rightarrow h(a \wedge b) \in \{h(a), h(b)\}^i \Rightarrow h(a) \wedge h(b) \geq h(a \wedge b)$.
$2 \Rightarrow 1\rfloor$
$a \leq b \Rightarrow a \vee b = b \Rightarrow h(b) = h(a \vee b) \geq h(a) \vee h(b) \geq h(a) \Rightarrow h(a) \leq h(b)$. Entonces h preserva el orden.
$3 \Rightarrow 1\rfloor$
$a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a \Longrightarrow h(a) = h(a \wedge b) \leq h(a) \wedge h(b) \leq h(b) \Rightarrow h(a) \leq h(b)$. Entonces h preserva el orden. $\square$

Corolario 2.19. *En particular, si h es homomorfismo, entonces preserva el orden.*

Corolario 2.20. *Sean R y P retículas y $f : R \to P$ una función. Entonces son equivalentes:*

1. *f es un isomorfismo de órdenes*
2. *f es biyectiva y una inmersión de órdenes*
3. *f es un isomorfismo de retículas*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2\rfloor$
Recordemos que f es una inmersión de órdenes si:
$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$ $\forall a, b \in R$ y f es un isomorfismo de órdenes si es una inmersión de órdenes y es sobre. Entonces basta con probar que f es inyectiva:
$f(a) = f(b) \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ y $f(b) \leq f(a) \Rightarrow a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$.
Entonces f es inyectiva.

$2 \Rightarrow 3\rfloor$
Sea f una inmersión de órdenes biyectiva, entonces f preserva el orden y $f(a) \vee f(b) \leq f(a \vee b)$. Así $f(a \vee b) \in \{f(a), f(b)\}^s$.

Sea $p \in P$ tal que $p \in \{f(a), f(b)\}^s$. Como f es sobre, entonces $p = f(c)$ para alguna $c \in R$. Además
$f(a), f(b) \leq f(c) \Rightarrow a, b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c \Rightarrow f(a \vee b) \leq f(c) = p$. Por lo tanto $f(a \vee b) = men\{f(a), f(b)\}^s = f(a) \vee f(b)$.
Dualmente se prueba que $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, esto muestra que f es un homomorfismo y, como es biyectivo, un isomorfismo de retículas.

$3 \Rightarrow 1]$ Sea f un isomorfismo de retículas, entonces:
$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow f(b) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$.
Por lo tanto f es una inmersión y biyectiva, es decir, un isomorfismo de órdenes.

□

Relaciones de equivalencia. Recordemos que una relación de equivalencia en un conjunto X es una relación binaria, la cual es reflexiva, simétrica y transitiva. Escribimos $a \equiv b \ (mod\theta)$, para indicar que a está relacionado con b bajo la relacion θ. Una relación de equivalencia θ en X genera una partición de X en subconjuntos disjuntos. Estos subconjuntos son las clases de equivalencia de θ, dadas por
$[a]_\theta := \{x \in X \mid x \equiv a \ (mod\theta)\}$
.

Proposición 2.21. *Sean R, P retículas y $f : R \to P$ un homomorfismo. Entonces la relación θ en R dada por*

$$a \equiv b \ (mod\theta) \Longleftrightarrow f(a) = f(b) \quad \forall a, b \in R$$

es una relación de equivalencia.

Demostración.
(1) $f(a) = f(a) \Rightarrow a \equiv a \ (mod\theta)$.
(2) $a \equiv b \ (mod\theta) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow b \equiv a \ (mod\theta)$.
(3) $a \equiv b \ (mod\theta)$ y $b \equiv c \ (mod\theta) \Rightarrow f(a) = f(b)$ y $f(b) = f(c) \Rightarrow$
$f(a) = f(c) \Rightarrow a \equiv c \ (mod\theta)$. □

Teorema 2.22. *Sean R, P, f, θ como en la proposición anterior. Entonces θ es compatible con las operaciones $\vee$ y $\wedge$ en R, es decir, que para toda $a, b, c, d \in R$,*

$$a \equiv b \ (mod\theta)$$

y
$$c \equiv d\ (mod\theta)$$
implican
$$a \vee c \equiv b \vee d\ (mod\theta)$$
y
$$a \wedge c \equiv b \wedge d\ (mod\theta)$$

Demostración.
Sean $a, b, c, d \in R$ tales que $a \equiv b\ (mod\theta)$ y $c \equiv d\ (mod\theta)$. Entonces $f(a) = f(b)$ y $f(c) = f(d)$, y
$f(a \vee c) = f(a) \vee f(c) = f(b) \vee f(d) = f(b \vee d)$
$f(a \wedge c) = f(a) \wedge f(c) = f(b) \wedge f(d) = f(b \wedge d)$.
Por tanto $a \vee c \equiv b \vee d\ (mod\theta)$ y $a \wedge c \equiv b \wedge d\ (mod\theta)$ □

Observaciones. Como consecuencia de este resultado podemos definir en $R_\theta =: \{[a] \mid a \in R\}$ las operaciones $[a]\vee[b] =: [a\vee b]$ y $[a]\wedge[b] =: [a\wedge b]$ pues no dependen de los representantes tomados. Así que R_θ es una retícula.

2.5. Subretículas.

Definición 2.23. *Sea R una retícula y sea $S \subseteq R$ ($S \neq \emptyset$). Entonces S es una **subretícula** de R si $a \vee b \in S$ y $a \wedge b \in S$, $\forall a, b \in S$.*

Notación. Denotaremos por $SubR$ a la colección de todas las subretículas de la retícula R y por Sub_0R a $SubR \cup \{\emptyset\}$.

Teorema 2.24. *Sean I un conjunto no vacío y $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq SubR$, entonces $\bigcap_{i\in I} S_i \in Sub_0R$.*

Demostración.
Si $\bigcap_{i\in I} S_i = \emptyset$, entonces $\bigcap_{i\in I} S_i \in Sub_0R$.

Supongamos que $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset$. Entonces $a, b \in \bigcap_{i\in I} S_i \Rightarrow a, b \in S_i$, $\forall i \in I \Rightarrow a \vee b, a \wedge b \in S_i$, $\forall i \in I \Rightarrow a \vee b, a \wedge b \in \bigcap_{i\in I} S_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} S_i \in SubR$.

$\square$

Observación. Este resultado nos dice que la intersección de subretículas, si no es vacía, es también una subretícula. Así, la intersección de todas las subretículas que contienen algún subconjunto A de la retícula es subretícula y es la menor subretícula que contiene a A (con respecto a la contención de conjuntos). Por lo anterior tenemos la siguiente:

Definición 2.25. *Sean R una retícula y $\emptyset \neq A \subseteq R$, entonces $[A] := \bigcap\{S \in SubR \mid A \subseteq S\}$ es la* ***subretícula generada*** *por A. Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ escribimos $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ en lugar de $[A]$.*

Teorema 2.26. *Sea R una retícula, entonces $\langle Sub_0 R\,,\, \subseteq\rangle$ es una retícula completa.*

Demostración.
Sea $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq Sub_0 R$ familia no-vacía.
Si $\bigcap_{i\in I} S_i = \emptyset$, entonces $\bigcap_{i\in I} S_i \in Sub_0 R$.
Supongamos que $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset$. Entonces $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq SubR$ y como vimos en el teorema anterior $\bigcap_{i\in I} S_i \in SubR$.
Además $R \in Sub_0 R$. Esto prueba que $Sub_0 R$ es una $\bigcap^{\top}$-estructura y así una retícula completa en la cual

$$\bigwedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i$$

$$\bigvee \{A_i \mid i \in I\} = \left[\bigcup_{i\in I} A_i\right]$$

$\square$

Definición 2.27. *Sea S subretícula de la retícula R*

- *S es* ***propia*** *si $S \neq R$.*
- *S es* ***convexa*** *si y sólo si $a, b \in S, c \in R$ y $a \leq c \leq b \Longrightarrow c \in S$.*
- *S es un* ***ideal*** *si y sólo si $x \in R$ y $a \in S \Longrightarrow a \wedge x \in S$.*
- *Si S es ideal propia, entonces es* ***prima*** *si y sólo si $a, b \in R$ y $a \wedge b \in S \Longrightarrow a \in S$ o $b \in S$.*

Notación. Denotaremos con IdR a la colección de todas las subretículas ideales de la retícula R y con Id_0R a $IdR \cup \{\emptyset\}$.

Teorema 2.28. *Sean R una retícula e I una subretícula de R, entonces son equivalentes:*

1. *I es ideal*
2. *$x \leq a \Longrightarrow x \in I, \ \ \forall a \in I, \forall x \in R$*
3. *$a \vee b \in I \Longrightarrow a, b \in I, \ \ \forall a, b \in R$*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2 \rfloor$
Sean $a \in I$ y $x \in R$ tales que $x \leq a$, entonces $x = a \wedge x \in I$.
$2 \Rightarrow 3 \rfloor$
Sean $a, b \in R$ tales que $a \vee b \in I$. Tenemos que $a, b \leq a \vee b \in I$, entonces $a, b \in I$.
$3 \Rightarrow 1 \rfloor$
Sean $a \in I$ y $x \in R$. Tenemos que $a \vee (a \wedge x) = a \in I$, entonces $a \wedge x \in I$. □

Teorema 2.29. *Sea R una retícula. Si $A, B \in IdR$, entonces $\emptyset \neq A \cap B \in IdR$.*

Demostración.
Tenemos que $A, B \neq \emptyset$, sean $a \in A$ y $b \in B$. Como $A, B \in IdR$, entonces $a \wedge b \in A$, $a \wedge b \in B$ y así $A \cap B \neq \emptyset$. Por tanto $A \cap B \in SubR$. Además: $x \in R$ y $a \in A \cap B \Rightarrow x \in R$ y $a \in A, B \Rightarrow x \wedge a \in A, B$ (pues $A, B \in IdR$)$\Rightarrow x \wedge a \in A \cap B$. Por lo tanto $A, B \in IdR$. □

Observación. A partir del teorema anterior se sigue que la intersección de un número finito de subretículas ideales es no vacía y también es una subretícula ideal. Pero para intersecciones no finitas en general no es cierto, como vemos en el siguiente:

Ejemplo.
Sea R la retícula de los números naturales $\mathbb{N}$ con el orden $x \leq y \Leftrightarrow y \mid x$ (y divide a x), entonces $x \wedge y = mcm(x, y)$ y $x \vee y = MCD(x, y)$.
Sea $I_p := \{np \mid n \in \mathbb{N}\}$ para $p \in \mathbb{P}$ (el conjunto de números primos).
Tenemos que $I_p \in IdR$ $\forall p \in \mathbb{P}$ pero $\bigcap_{p \in \mathbb{P}} I_p = \emptyset$, pues: $x \in \bigcap_{p \in \mathbb{P}} I_p \Rightarrow$ para cada $p \in \mathbb{P}$, $x = np$ para alguna $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ para cada $p \in \mathbb{P}, p \mid x$. Lo cual no puede ocurrir para $x \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.30. *Sean R una retícula, I un conjunto no vacío y $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq SubR$, tales que $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$.*

1. *Si S_i es convexa para toda $i \in I$, entonces $\bigcap_{i \in I} S_i$ es subretícula convexa.*
2. *Si S_i es ideal para toda $i \in I$, entonces $\bigcap_{i \in I} S_i$ es subretícula ideal.*

Demostración.
1. Sean $a, b \in \bigcap_{i \in I} S_i$ y $c \in R$ tales que $a \leq c \leq b$, entonces $a, b \in S_i$ subretícula convexa,$\forall i \in I$. Por lo tanto, $c \in S_i, \forall i \in I$ y $c \in \bigcap_{i \in I} S_i$.

2. Sean $a \in R$ y $x \in \bigcap_{i \in I} S_i$, entonces $x \in S_i$ ideal, $\forall i \in I$ y $a \wedge x \in S_i, \forall i \in I$. Por lo tanto $a \wedge x \in \bigcap_{i \in I} S_i$. $\square$

Definición 2.31. *De esta forma para $P \subseteq R$ no-vacío definimos la **subretícula convexa generada** por P como la intersección (de conjuntos) de todas las subretículas convexas que contienen a P.*
*De manera similar definimos el **ideal generado** por P que será denotado por $(P]$, si $P = a$ con $a \in R$, entonces escribiremos simplemente $(a]$ y se dirá que es un **ideal principal**.*

Teorema 2.32. *Sea R una retícula, entonces:*

1. $\langle IdR\,,\subseteq\rangle$ *es una retícula con elemento mayor.*
2. $\langle IdR_0\,,\subseteq\rangle$ *es una retícula completa.*

Demostración.
1. Sean $A, B \in IdR$. Tenemos que $A \cap B$ es también un ideal y es el mayor ideal contenido tanto en A como en B, entonces $A \wedge B = A \cap B \in IdR$. Además $(A \cup B]$ es el menor ideal que contiene a $A \cup B$, entonces $A \vee B = (A \cup B] \in IdR$. Además tenemos que $R \in IdR$ e $I \subseteq R$, $\forall I \in IdR$ y así R es el elemento mayor de IdR.

2. Sea $\mathcal{I} \subseteq Id_0R$, sabemos que $\bigcap \mathcal{I}$ es vacía o pertenece a IdR. Además R es elemento mayor de Id_0R. Por tanto, Id_0R es una $\bigcap^{\top}$-estructura y así una retícula completa en la cual

$$\bigwedge \mathcal{I} = \bigcap \mathcal{I}$$
$$\bigvee \mathcal{I} = \left(\bigcup \mathcal{I}\right]$$

□

Teorema 2.33. *Sea R una retícula con elemento $\mathbf{0}$, entonces:*

1. $\mathbf{0} \in I$, $\forall I \in IdR$
2. $\{\mathbf{0}\} \in IdR$
3. $\langle IdR\,,\subseteq\rangle$ *es una retícula completa.*

Demostración.
1⌋ Sean $I \in IdR$ y $a \in I$. Tenemos que $\mathbf{0} \leq a$, entonces $\mathbf{0} \in I$.

2⌋ Para cada $x \in R$, $\mathbf{0} \wedge x = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\{\mathbf{0}\} \in IdR$.

3⌋ Sea $\mathcal{I} \subseteq IdR$, por el inciso (1) tenemos que $\bigcap \mathcal{I} \neq \emptyset$ y así, $\bigcap \mathcal{I} \in IdR$. De lo cual se sigue que IdR es una $\bigcap^{\top}$-estructura (R como sabemos es el elemento mayor de IdR). Por lo tanto IdR es una retícula completa cuyo elemento menor es $\{\mathbf{0}\}$. □

Teorema 2.34. *El conjunto de los ideales principales de una retícula R contituye una subretícula de $\langle IdR\,,\subseteq\rangle$.*

Demostración. Sean $a, b \in R$. Entonces:

$x \in (a] \wedge (b] \Leftrightarrow x \in (a] \cap (b] \Leftrightarrow$
$x \in (\bigcap\{A \in IdR \mid a \in A\}) \cap (\bigcap\{B \in IdR \mid b \in B\}) \Leftrightarrow$
$x \in \bigcap\{A \cap B \mid A, B \in IdR, a \in A \ y \ b \in B\} \Leftrightarrow$
$x \in \bigcap\{C \in IdR \mid a \wedge b \in C\} \Leftrightarrow x \in (a \wedge b]$.

$x \in (a] \vee (b] \Leftrightarrow x \in ((a] \cup (b]] \Leftrightarrow x \in \bigcap\{A \in IdR \mid (a], (b] \subseteq A\} \Leftrightarrow x \in \bigcap\{B \in IdR \mid a, b \in B\} \Leftrightarrow x \in \bigcap\{C \in IdR \mid a \vee b \in C\} \Leftrightarrow x \in (a \vee b]$.

Entonces el conjunto de ideales principales es cerrado bajo $\wedge$ y $\vee$, además es un subconjunto de IdR. Por lo tanto es una subretícula de $\langle IdR, \subseteq\rangle$ en la cual:

$$(a] \wedge (b] = (a \wedge b] \quad y \quad (a] \vee (b] = (a \vee b]$$

$\square$

3. Retículas Distributivas

Definición 3.1. *Sea R una retícula. Si se cumple la* ***Ley Distributiva****:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\,, \quad \forall\ a, b, c \in R$$

Entonces R es una ***Retícula Distributiva****.*

Teorema 3.2. *Una retícula R es distributiva si y sólo si se cumple la ley distributiva para cada $a, b, c \in R$ con $a \neq b \neq c \neq a$.*

Demostración.
Si $a = b$, tenemos que $a \wedge (b \vee c) = a \wedge (a \vee c) = a = a \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Es decir, se cumple la ley distributiva para a, b, c.
Si $a = c$, un razonamiento similar al anterior mostrará que también se cumple la ley distributiva en este caso.
Por último, si $b = c$, tenemos que $a \wedge (b \vee c) = a \wedge b = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
Entonces, tenemos que la ley distributiva se cumple en cualquier retícula si $a = b$ o $a = c$ o $b = c$.
Así que para que una retícula sea distributiva, basta con que la ley distributiva se cumpla para elementos distintos. $\square$

Ejemplos.

- La retícula de subconjuntos de un conjunto dado ordenados por la inclusión de conjuntos es una retícula distributiva.
- Las cadenas son retículas distributivas.

Lema 3.3. ***(Desigualdad Distributiva)*** *Sea R una retícula, sean $a, b, c \in R$. Entonces:*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$$

Demostración.
Tenemos que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge c \leq a$, entonces $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a$. Por otra parte $a \wedge b \leq b$ y $a \wedge c \leq c$, entonces $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq b \vee c$. Por tanto $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \in \{a, b \vee c\}^i$ y así $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. $\square$

Teorema 3.4. *Sea R una retícula, R es distributiva si y sólo si:*

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \forall\, a, b, c \in R$$

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Si R es distributiva, cumple la igualdad y en particular debe cumplir la desigualdad dada.
$\Leftarrow\rfloor$ El lema anterior nos da la desigualdad $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para cada $a, b, c \in R$ y por hipótesis tenemos la otra desigualdad. Por lo tanto, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para cada $a, b, c \in R$ y así R es distributiva. $\square$

Teorema 3.5. *Sea R una retícula. Entonces son equivalentes:*

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \forall\, a, b, c \in R$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \forall\, a, b, c \in R$

Demostración.
$1 \Rightarrow 2\rfloor$
Sean $a, b, c \in R$, tenemos que
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee (c \wedge (a \vee b)) = a \vee ((c \wedge a) \vee (c \wedge b)) = (a \vee (c \wedge a)) \vee (c \wedge b) = a \vee (b \wedge c)$.

$2 \Rightarrow 1\rfloor$
Se demuestra dualmente. $\square$

Nota. Este teorema nos dice que la Ley Distributiva puede enunciarse de forma dual. Además muestra que en una retícula distributiva, tanto $\wedge$ como $\vee$ se distribuyen.

Teorema 3.6. *Sea R una retícula distributiva*

1. *Si S es una subretícula de R, entonces S es distributiva.*
2. *Si f es un homomorfismo definido en R, entonces $f(R)$ es distributiva.*

Demostración.
1. Se sigue inmediatamente del hecho que la ley distributiva se cumple para todos los elementos de R, en particular para los elementos de S.

2. Sean $a, b, c \in f(R)$, entonces existen $x, y, z \in R$ tales que $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$. Además $a \wedge (b \vee c) = f(x) \wedge (f(y) \vee f(z)) = f(x) \wedge f(y \vee z) = f(x \wedge (y \vee z)) = f((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) = f(x \wedge y) \vee f(x \wedge z) = (f(x) \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge f(z)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. $\square$

4. Retículas Modulares

Definición 4.1. *Si una retícula R satisface la **Ley Modular**:*

$$c \leq a \Longrightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c, \quad \forall\, a, b, c \in R$$

*Entonces decimos que es una **Retícula Modular**.*

Teorema 4.2. *Toda retícula distributiva es también modular.*

Demostración.
Si $c \leq a$ entonces $a \wedge c = c$. De lo cual se sigue que
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c$. □

Lema 4.3. ***(Desigualdad Modular)*** *Sea R una retícula, sean $a, b, c \in R$, entonces:*

$$c \leq a \Longrightarrow (a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c)$$

Demostración. Supongamos $a \geq c$, entonces $a \wedge c = c$. Usando esto último y la desigualdad distributiva tenemos que
$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c$. □

Teorema 4.4. *Sea R una retícula. R es modular si y sólo si:*

$$c < a \Longrightarrow a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee c \quad \forall\, a, b, c \in R$$

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$
Si R es modular y $c < a$, entonces se cumple la igualdad
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ y en particular la desigualdad pedida.

$\Leftarrow\rfloor$
Por otro lado, para $c < a$ tenemos, por el lema anterior que

$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c)$ y por hipótesis se cumple la otra desigualdad. Si $c = a$, $a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee a) = a = (a \wedge b) \vee a = (a \wedge b) \vee c$.
Por lo tanto, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ siempre que $c \leq a$. $\square$

Teorema 4.5. *Sea R una retícula. Entonces son equivalentes:*

1. $a \geq c \Longrightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c \quad \forall\, a, b, c \in R$
2. $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \forall\, a, b, c \in R$

Demostración.
$1 \Rightarrow 2\rfloor$
Sean $a, b, c \in R$, se cumple que $a \geq a \wedge c$. Sustituyendo $a, b, a \wedge c$ en (1), tenemos que $a \geq a \wedge c \Longrightarrow a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
$2 \Rightarrow 1\rfloor$
Supongamos que $a \geq c$, entonces $a \wedge c = c$. Por lo tanto
$a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c$. $\square$

Nota. Este teorema nos da una equivalencia para la Ley Modular como una identidad.

Teorema 4.6. *Sea R una retícula modular*

1. *Si S es subretícula de R, entonces S es modular.*
2. *Si f es un homomorfismo, entonces $f(R)$ es modular.*

Demostración.
$1\rfloor$ Como la ley modular se cumple en toda la retícula R, también se cumple en S.

$2\rfloor$ Sean $a, b, c \in f(R)$, entonces existen $x, y, z \in R$ tales que $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$. Entonces:
$a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = f(x) \wedge (f(y) \vee (f(x) \wedge f(z))) = f(x) \wedge (f(y) \vee f(x \wedge z)) = f(x) \wedge f(y \vee (x \wedge z)) = f(x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = f((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) = f(x \wedge y) \vee f(x \wedge z) = (f(x) \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge f(z)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. $\square$

Definición 4.7. *Sea R una retícula.*

- *Sean $a, b \in R$ tales que $a \leq b$, entonces el conjunto*
$$[a, b] := \{\, x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$
es llamado el ***intervalo*** *de a a b.*
- *Si $a \prec b$, entonces decimos que el intervalo $[a, b]$ es* ***simple****.*

Observación. Si R es una retícula acotada, entonces $[0, 1] = R$. Esto es porque $0 \leq x \leq 1$, $\forall x \in R$.

Teorema 4.8. *Sea R una retícula modular, sean $a, b \in R$. Los mapeos $\alpha(x) := x \wedge a$ y $\beta(x) := x \vee b$ son isomorfismos inversos de $[b, a \vee b]$ a $[a \wedge b, a]$ y viceversa.*

Demostración.
Consideremos $\alpha(x) := x \wedge a$.
1. $\alpha : [b, a \vee b] \longrightarrow [a \wedge b, a]$
$x \in [b, a \vee b] \Rightarrow b \leq x \leq a \vee b \Rightarrow a \wedge b \leq x \wedge a \leq (a \vee b) \wedge a = a \Rightarrow \alpha(x) = x \wedge a \in [a \wedge b, a]$.

2. α es uno a uno
Si $\alpha(x) = \alpha(y)$ para $b \leq x, y \leq a \vee b$, entonces $x \wedge a = y \wedge a$. Por lo tanto $x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee b = (y \wedge a) \vee b = y \wedge (a \vee b) = y$.

3. α es sobre:
Sea $x \in [a \wedge b, a]$, consideremos el elemento $x \vee b$.
Como $a \wedge b \leq x \leq a$, entonces $b = (a \wedge b) \vee b \leq x \vee b \leq a \vee b$ y así $x \vee b \in [b, a \vee b]$. Además, $\alpha(x \vee b) = (x \vee b) \wedge a = a \wedge (b \vee x) = (a \wedge b) \vee x = x$.

4. α preserva a $\wedge$:
Si $x, y \in [b, a \vee b]$, entonces $\alpha(x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge a = (x \wedge y) \wedge (a \wedge a) = (x \wedge a) \wedge (y \wedge a) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$.

5. α preserva a $\vee$:
Sean $x, y \in [b, a \vee b]$, entonces $\alpha(x), \alpha(y) \in [a \wedge b, a]$ y tomando el supremo tenemos que $\alpha(x) \vee \alpha(y) \in [a \wedge b, a]$. Como α es sobre, existe $z \in [b, a \vee b]$ tal que $\alpha(z) = \alpha(x) \vee \alpha(y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$, por la modularidad esta última expresión es igual a $a \wedge (x \vee (a \wedge y)) = \alpha(x \vee (a \wedge y))$ y también es igual a $a \wedge (y \vee (a \wedge x)) = \alpha(y \vee (a \wedge x))$.

Así, tenemos que $\alpha(z) = \alpha(x \vee (a \wedge y)) = \alpha(y \vee (a \wedge x))$ y como α es uno a uno, entonces $z = x \vee (a \wedge y) = y \vee (a \wedge x)$. Entonces $z = z \vee z = (x \vee (a \wedge y)) \vee (y \vee (a \wedge x)) = (x \vee (a \wedge x)) \vee (y \vee (a \wedge y)) = x \vee y$.
Por lo tanto $\alpha(x \vee y) = \alpha(z) = \alpha(x) \vee \alpha(y)$.
Por lo tanto α es un isomorfismo de $[b, a \vee b]$ a $[a \wedge b, a]$.

Para $\beta(x) = x \vee b$, por dualidad, tenemos que β es un isomorfismo de $[a \wedge b, a]$ a $[b, a \vee b]$.

Por último veamos que α y β son inversos:
Sea $x \in [b, a \vee b]$, entonces $\beta(\alpha(x)) = \beta(x \wedge a) = (x \wedge a) \vee b = x \wedge (a \vee b) = x$. Además, para $y \in [a \wedge b, a]$ $\alpha(\beta(y)) = \alpha(y \vee b) = (y \vee b) \wedge a = a \wedge (b \vee y) = (a \wedge b) \vee y = y$. $\square$

Corolario 4.9. *Sea R una retícula modular. Si $a, b \in R$, $a \neq b$ y existe $c \in R$ tal que $c \prec a$ y $c \prec b$, entonces $c = a \wedge b$, $a \prec a \vee b$ y $b \prec a \vee b$.*

Demostración.
Supongamos $c \neq a \wedge b$. Como $c < a$ y $c < b$, entonces $c \leq a \wedge b \leq a$, pero $c \prec a$ así que $c = a \wedge b$ o $a \wedge b = a$. Por tanto $a = a \wedge b$, es decir $a \leq b$. De forma similar tenemos $c \leq a \wedge b \leq b$, de lo cual se sigue bajo los mismos argumentos que $b \leq a$. En conclusión, tenemos $a = b$. Esto contradice al hecho que $a \neq b$. y por lo tanto, $c = a \wedge b$.
Además, $c \prec a, b \Rightarrow a \wedge b \prec a, b \Rightarrow [a \wedge b, a]$ y $[b \wedge a, b]$ son simples, y por el teorema anterior éstos intervalos son isomorfos a $[b, a \vee b]$ y a $[a, b \vee a]$,respectivamente. Así que también deben ser simples $[b, a \vee b]$ y $[a, b \vee a]$ y, por lo tanto, $b \prec a \vee b$ y $a \prec a \vee b$. $\square$

Observación. Dualmente tenemos que:

$$a \prec c \;\; y \;\; b \prec c \Longrightarrow c = a \vee b, \;\; a \vee b \prec a \;\; y \;\; a \vee b \prec b$$

Definición 4.10. *Sea R una retícula de longitud finita.*

- *Si para cada $a, b \in R$ se cumple:*
  $c \prec a$ *y* $c \prec b \Longrightarrow a \prec a \vee b$ *y* $b \prec a \vee b$ $(c \in R)$,
  entonces R es una ***retícula semimodular***.
- *Si para cada $a, b \in R$ se cumple:*
  $a \prec c$ *y* $b \prec c \Longrightarrow a \vee b \prec a$ *y* $a \vee b \prec b$ $(c \in R)$,
  entonces R es una ***retícula semimodular dual***.

Corolario 4.11. *Toda retícula modular es semimodular y semimodular dual.*

Demostración.
Por el corolario anterior tenemos que cualquier retícula modular es semimodular y, por dualidad, tenemos que también es semimodular dual. $\square$

5. Complementos

Definición 5.1. *Sea R una retícula*

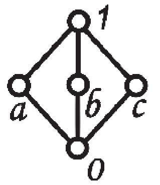
- *Si $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots c_n\} \subseteq R$ es una cadena con n elementos, entonces decimos que C tiene **longitud** $n-1$, C tiene **longitud finita** y escribimos $\ell(C) = n-1$.*
- *Si $a, b \in R$, $a \leq b$ y C es una cadena tal que $a, b \in C \subseteq [a, b]$, entonces C es una **cadena de a** a **b**.*
- *Si entre todas las cadenas de a a b hay una de longitud mayor **n**, diremos que el intervalo $[a, b]$ es de **longitud finita** denotada por $\ell([a, b]) = n$.*
- *Si para cada par de elementos $a, b \in R$ con $a \leq b$, el intervalo $[a, b]$ es de longitud finita, entonces decimos que R es de **longitud finita localmente**.*
- *Si R es acotada y $\ell([0, 1]) = n$, entonces R tiene **longitud finita** n.*

Definición 5.2. *Sean R retícula, $a, b \in R$ con $a \leq b$ y x un elemento del intervalo $[a, b]$. Si existe $y \in R$ tal que $x \wedge y = a$ y $x \vee y = b$ entonces y es **complemento** de x relativo a $[a, b]$.*

Observaciones.

- Bajo las condiciones de la definición anterior $y \in [a, b]$ ya que $a = x \wedge y \leq y \leq x \vee y = b$.
- Como $\wedge, \vee$ son conmutativas, la relación complemento es simétrica, es decir y complemento de x implica que x es complemento de y.
- Relativos al intervalo $[a, b]$, a y b son complemento uno del otro y en este caso dichos complementos son únicos.
- El único caso en que un elemento x sea complemento de sí mismo es el intervalo $[x, x] = \{x\}$.Pues $x \wedge x = x \vee x = x$.
- En general, el complemento de un elemento en $[a, b]$ no siempre es único. Por ejemplo, consideremos el conjunto M_3

("diamante"). Tiene tres elementos a, b, c tales que
$a \wedge b = a \wedge c = 0$ y $a \vee b = a \vee c = 1$, pero $b \neq c$.



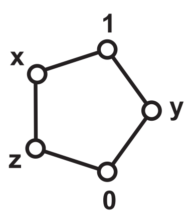
M₃

Definición 5.3. *Si cada $x \in [a, b]$ tiene al menos un complemento relativo a $[a, b]$ entonces este intervalo es* ***complementado****. Si cada intervalo en una retícula R es complementado, se dice que R es una* ***retícula con complementos relativos****.*

Definición 5.4. *Si R es retícula acotada y para $x \in R$ existe $y \in R$ tal que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$, entonces y es un* ***complemento*** *de x en R. Si cada elemento en R tiene al menos un complemento, R es una* ***retícula complementada****.*

Observación. Una retícula R acotada con complementos relativos es complementada, pues $R = [0, 1]$ es complementado. Pero el recíproco no es cierto en general:

Ejemplo. Consideremos el "pentágono"$\{0, x, y, z, 1\}$, tenemos que y es complemento para x y para z, 1 es complemento de 0 y recíprocamente. Así cada elemento tiene un complemento y R es complementado. Pero el intervalo $[o, x] = \{0, z, x\}$ no es complementado, pues z no tiene complemento relativo a $[0, x]$.



N₅

Teorema 5.5. *Cualquier retícula R modular y complementada es también una retícula con complementos relativos.*

Demostración.
Sean $a, b \in R$ tales que $a \leq b$. Sea $x \in [a, b]$, como R es complementada, existe $y \in R$ tal que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$. Consideremos el elemento $(b \wedge y) \vee a$, entonces:
$x \wedge ((b \wedge y) \vee a) = (x \wedge (b \wedge y)) \vee a = ((x \wedge y) \wedge b)) \vee a = (0 \wedge b) \vee a = 0 \vee a = a$.
Además, $x \vee ((b \wedge y) \vee a) = (x \vee a) \vee (b \wedge y) = x \vee (b \wedge y) = (x \vee y) \wedge b = 1 \wedge b = b$.
Por lo tanto $(b \wedge y) \vee a$ es un complemento para x relativo al intervalo $[a, b]$. □

Lema 5.6. *Sean R una retícula distributiva y $x, y \in R$. Si existe $a \in R$ tal que: $a \wedge x = a \wedge y$, $a \vee x = a \vee y$, entonces $x = y$.*

Demostración.
Tenemos que $x = x \wedge (a \vee x) = x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = (y \wedge a) \vee (x \wedge y) = y \wedge (a \vee x) = y \wedge (a \vee y) = y$. □

Teorema 5.7. *En una retícula R distributiva acotada un elemento puede tener a lo más un complemento.*

Demostración.
Sea $x \in R$. Supongamos que x tiene un complemento $y \in R$, es decir $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$. Sea $z \in R$ tal que $x \wedge z = 0$ y $x \vee z = 1$, entonces $x \wedge y = x \wedge z$ y $x \vee y = x \vee z$ y por el lema anterior, $y = z$. Por lo tanto, si el complemento existe, éste es único. □

Definición 5.8. *Sea R una retícula acotada, sea $x \in R$. Si existe $y \in R$ tal que $x \wedge y = 0$ donde y es un elemento máximo con esta propiedad, entonces y es un* ***pseudo-complemento*** *de x en R. Si cada elemento en R tiene un pseudo-complemento, R es una retícula* ***pseudo-complementada***.

Teorema 5.9. *Sea R una retícula modular acotada, entonces cada complemento de $x \in R$ es pseudo-complemento de x en R.*

Demostración. Sea y un complemento de x en R. Supongamos que $x \wedge z = 0$ y $y \leq z$ para alguna $z \in R$, entonces $y = (z \wedge x) \vee y = z \wedge (x \vee y) = z \wedge 1 = z$. Por lo tanto y es máxima con la propiedad $x \wedge y = 0$, es decir, es pseudocomplemento de x. $\square$

Teorema 5.10. *Sea R una retícula acotada, entonces $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son pseudocomplementos únicos mutuamente.*

Demostración.
Tenemos que $0 \wedge x = 0$ para toda $x \in R$, además 1 es el elemento mayor de R. Por lo tanto el único pseudocomplemento de 0 es 1.
Por otra parte, $1 \wedge x = x$ para toda $x \in R$, así que 0 es el único elemento con la propiedad $1 \wedge x = 0$. Por lo tanto el único pseudocomplemento de 1 es 0. $\square$

Definición 5.11. *Sea R una retícula*

- *Un subconjunto A de R es **Dirigido** si para cada $a, b \in A$ existe alguna $c \in A$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.*
- *Si R es completa y para cada subconjunto dirigido A de R y cada $x \in R$ se tiene que $x \wedge (\bigvee A) = \bigvee_{a \in A}(x \wedge a)$, entonces se dice que R es **Continua Superiormente**.*
- *Dualmente quedan definidos los conceptos: conjunto **Dualmente Dirigido** y retícula **Continua Inferiormente**.*
- *Decimos que una retícula es **Continua** si es tanto continua superiormente como continua inferiormente.*

Lema 5.12. *Si C es una cadena de la retícula R, entonces C es un conjunto dirigido.*

Demostración. Sean $a, b \in C$, entonces $a \leq b$ o $b \leq a$. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $a \leq b$, entonces $a, b \leq b \in C$. $\square$

Teorema 5.13. *Si R es una retícula modular y continua superiormente, entonces cada elemento en R tiene un pseudo-complemento.*

Demostración.
Sea $x \in R$, consideremos el conjunto $A := \{a \in R \mid x \wedge a = \mathbf{0}\}$.
Sea $C \subseteq A$ una cadena, por el lema anterior, C es dirigida y por la continuidad superior tenemos $x \wedge (\bigvee C) = \bigvee_{a \in C}(x \wedge a)$. Pero para cada $a \in C \subseteq A$, $x \wedge a = 0$ y así $\bigvee_{a \in C}(x \wedge a) = 0$, entonces $x \wedge (\bigvee C) = 0$ y $(\bigvee C) \in A$. Por lo tanto cada cadena C en A tiene una cota superior en A, es decir, A es inductivo.
Por el Lema de Zorn tenemos que existe $z \in A$ $(x \wedge z = 0)$ elemento máximo, es decir, existe z pseudocomplemento de x. $\square$

6. Retículas Booleanas

Definición 6.1. *Si una retícula R es distributiva y complementada, entonces decimos que R es una **Retícula Booleana**.*

Teorema 6.2. *Sea R una retícula booleana. Cada elemento de R tiene un único complemento en R.*

Demostración. Como R es boolena, entonces es complementada y distributiva, y así cada elemento tiene al menos un complemento, además por el teorema 5.7., éste complemento es único. $\square$

Notación. Denotaremos al único complemento de $x \in R$ por x'.

Teorema 5.13. *Si R es una retícula modular y continua superiormente, entonces cada elemento en R tiene un pseudo-complemento.*

Demostración.
Sea $x \in R$, consideremos el conjunto $A := \{a \in R \mid x \wedge a = \mathbf{0}\}$.
Sea $C \subseteq A$ una cadena, por el lema anterior, C es dirigida y por la continuidad superior tenemos $x \wedge (\bigvee C) = \bigvee_{a \in C}(x \wedge a)$. Pero para cada $a \in C \subseteq A$, $x \wedge a = 0$ y así $\bigvee_{a \in C}(x \wedge a) = 0$, entonces $x \wedge (\bigvee C) = 0$ y $(\bigvee C) \in A$. Por lo tanto cada cadena C en A tiene una cota superior en A, es decir, A es inductivo.
Por el Lema de Zorn tenemos que existe $z \in A$ $(x \wedge z = 0)$ elemento máximo, es decir, existe z pseudocomplemento de x. $\square$

6. Retículas Booleanas

Definición 6.1. *Si una retícula R es distributiva y complementada, entonces decimos que R es una* ***Retícula Booleana****.*

Teorema 6.2. *Sea R una retícula booleana. Cada elemento de R tiene un único complemento en R.*

Demostración. Como R es boolena, entonces es complementada y distributiva, y así cada elemento tiene al menos un complemento, además por el teorema 5.7., éste complemento es único. $\square$

Notación. Denotaremos al único complemento de $x \in R$ por x'.

Teorema 6.3. *Sea R una retícula booleana, sean $x, y \in R$. Tenemos que:*

1. $x \wedge x' = 0$
2. $x \vee x' = 1$
3. $(x')' = x$
4. $y = x' \Longleftrightarrow x = y'$
5. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
6. $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
7. $x \leq y \Longleftrightarrow x' \vee y = 1$
8. $x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y' = 0$
9. $x \leq y \Longleftrightarrow y' \leq x'$
10. *El mapeo $\varphi(a) = a'$ para $a \in R$ es un automorfismo dual de R.*

Demostración.
1 y 2⌋ Por la definición de complemento.

3⌋ Tenemos que x' es complemento de x y x es complemento de x'. Además, el complemento de x' es $(x')'$ y como el complemento es único, entonces $x = (x')'$.

4⌋ Si $y = x'$, entonces $y' = (x')' = x$. Intercambiando x por y en lo anterior tenemos además que $x = y' \Rightarrow x' = y$.

5⌋ Consideremos $(x \wedge y) \wedge (x' \vee y')$. Por la distributividad $(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = ((x \wedge y) \wedge x') \vee ((x \wedge y) \wedge y')) = ((x \wedge x') \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge y')) = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$.
Además $(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = ((x \wedge y) \vee x') \vee y' = ((x \vee x') \wedge (y \vee x')) \vee y' = (1 \wedge (y \vee x')) \vee y' = (y \vee x') \vee y' = (y \vee y') \vee x' = 1 \vee x' = 1$.
De lo anterior se sigue que el complemento de $x \wedge y$ es $(x \wedge y)' = (x' \vee y')$.

6⌋ Esta afirmación es el dual de (5).

7⌋ $x \leq y \Rightarrow x = x \wedge y \Rightarrow 1 = x' \vee x = x' \vee (x \wedge y) = (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) = 1 \wedge (x' \vee y) = x' \vee y$.
Además $x' \vee y = 1 \Rightarrow x = x \wedge 1 = x \wedge (x' \vee y) = (x \wedge x') \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y \Rightarrow x = x \wedge y \Rightarrow x \leq y$.

8⌋ Es el dual de (7).

9⌋ $x \leq y \Leftrightarrow y \vee x' = 1 \Rightarrow y' \wedge (y \vee x') = y' \wedge 1 = y' \Rightarrow$
$y' = (y' \wedge y) \vee (y' \wedge x') = 0 \vee (y' \wedge x') = y' \wedge x' \Rightarrow y' \leq x'$. Por tanto $x \leq$

$y \Rightarrow y' \leq x'$. De lo anterior se sigue $y' \leq x' \Rightarrow (x')' \leq (y')' \Rightarrow x \leq y$.

10] $\varphi(x \wedge y) = (x \wedge y)' = x' \vee y' = \varphi(x) \vee \varphi(y)$.
$\varphi(x \vee y) = (x \vee y)' = x' \wedge y' = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.
Así que φ es homomorfismo dual.
Sea $x \in R$, entonces $\varphi(x') = (x')' = x$. Esto muestra que φ es sobre.
$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x' = y' \Rightarrow x' \leq y'$ y $y' \leq x' \Rightarrow y \leq x$ y $x \leq y \Rightarrow x = y$.
Por tanto φ es uno a uno.
Por último $\varphi(x) = x' \in R$. Esto muestra que φ es un automorfismo dual en R. □

Observaciones.

- De lo anterior se sigue que cada retícula booleana es dualmente isomorfa con ella misma, es decir, autodual.
- En una retícula distributiva, los elementos que tienen complemento cumplen también todas las propiedades del teorema anterior.
- Dado que cada elemento en una retícula booleana tiene un único complemento, $'$ (complemento) es una operación unaria. Entonces con las operaciones $\wedge$, $\vee$ y $'$, y con los elementos **0**,**1** la retícula puede ser vista como un álgebra.

Definición 6.4. *Un* ***Álgebra Booleana*** *B es una estructura con dos operaciones binarias $\wedge$, $\vee$, una operación unaria $'$, un elemento cero* ***0*** *y un elemento unidad* ***1****, en la que se cumple:*

1. *B es una retícula distributiva*
2. *$a \vee 0 = a$ y $a \wedge 1 = a$, $\forall a \in B$*
3. *$a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$, $\forall a \in B$*

Una ***subálgebra*** *(booleana) de A álgebra booleana es un subconjunto no vacío de A que es cerrado bajo $\wedge, \vee, '$.*

Definición 6.5.

- *Un* ***anillo*** *de conjuntos es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X cerrada bajo intersección y unión (de conjuntos).*
- *Un* ***campo*** *de conjuntos es un anillo de conjuntos que además es cerrado bajo complementos (de conjuntos).*

Teorema 6.6. *Se tiene que:*

1. *Cualquier anillo de conjuntos ordenado por la contención de conjuntos es una retícula distributiva.*
2. *Cualquier campo de conjuntos es un álgebra booleana.*

Demostración.
1. Sea $\mathcal{F}$ un anillo de subconjuntos de un conjunto X, tenemos que $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \wedge B = A \cap B \in \mathcal{F}$ y $A \vee B = A \cup B \in \mathcal{F}$. Además $A \wedge (B \vee C) = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una retícula distributiva.

2. Sea $\mathcal{F}$ un campo, por lo anterior $\mathcal{F}$ es una retícula distributiva.
Además, si $A \in \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$ (complemento de conjuntos) y es tal que: $A \wedge (X \setminus A) = A \cap (X \setminus A) = \emptyset = \mathbf{0}$ en $\mathcal{F}$, y $A \vee (X \setminus A) = A \cup (X \setminus A) = X = \mathbf{1}$ en . Por lo tanto $(X \setminus A)$ es complemento de A y así $\mathcal{F}$ es complementada. Entonces $\mathcal{F}$ es un álgebra booleana. □

Observaciones. En particular el conjunto potencia de cualquier conjunto es un álgebra booleana. Cualquier subálgebra de un álgebra booleana es también álgebra booleana.

Teorema 6.7. *Los elementos con complemento en una retícula distributiva R acotada forman una subretícula.*

Demostración.
Consideremos el conjunto $C :=\{x \in R \mid x$ tiene complemento en $R\}$.
$C \neq \emptyset$ pues $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in C$ y $C \subseteq R$.
Sean $x, y \in C$, entonces x tiene un único complemento x' y y tiene

también un único complemento y'.
Tenemos que $x \wedge y = ((x \wedge y)')' = (x' \vee y')'$, así que $x' \vee y'$ es el complemento de $x \wedge y$. Dualmente, tenemos que $x' \wedge y'$ es el complemento de $x \vee y$. Por lo tanto, $x \wedge y, x \vee y \in C$ y tenemos que C es subretícula de R. □

Corolario 6.8. *Para cada retícula distributiva R acotada existe una subálgebra booleana mayor (respecto a la contención de conjuntos) contenida en R.*

Demostración. Consideremos C como en el teorema anterior el conjunto de todos los elementos en R con un complemento, el cual demostramos es cerrado bajo $\wedge$ y $\vee$. Además, tenemos que para cualquier $x \in C$, $x = (x')'$, es decir, x es el complemento de x'. Por lo tanto $x' \in C$ y C es cerrado bajo $'$.
Por el teorema anterior tenemos que C es subretícula de R distributiva y $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in C$, por lo tanto C también es distributiva y acotada. Además C es complementada, pues consta exactamente de aquellos elementos en R que tienen complemento y C es cerrado bajo la operación $'$.
Por todo lo anterior tenemos que C forma un álgebra booleana contenida en R. Y debe ser la mayor álgebra booleana contenida en R, pues C contiene a todos los elementos con complemento. □

Observación.

- Una subretícula de un álgebra booleana no necesariamente es una subálgebra.

Por ejemplo, consideremos la retícula M_2 (vista en la sección 1.2.) de 4 elementos $R := \{0, a, b, 1\}$ tal que $a \nleq b$ y $b \nleq a$. Con elemento menor 0 y elemento mayor 1 ($0 < 1$). Tenemos que $0' = 1$ y $a' = b$, y así, cada elemento en R tiene complemento. Además, se cumple la ley distributiva para cualesquiera $x, y, z \in R$. Así que R es una retícula booleana. Consideremos el subconjunto $S := \{0, a, 1\}$ de R, tenemos que S es cerrado bajo $\wedge$ y $\vee$. Pero a no tiene complemento en S. Por lo tanto, S es subretícula, pero no es subálgebra.

Teorema 6.9. *Sea R una retícula acotada, sea h un homomorfismo definido en R. Tenemos que:*

1. *$h(R)$ es retícula acotada, tal que $h(0)$ en su elemento cero y $h(1)$ es su elemento unidad.*
2. *Si R es complementada, entonces $h(R)$ es complementada.*

Demostración.
1⌋ Como h es homomorfismo, $h(R)$ es retícula. Además:
$h(0) \in h(R)$, es tal que $h(0) \vee h(a) = h(0 \vee a) = h(a)$ para toda $a \in R$.
$h(1) \in h(R)$, es tal que $h(1) \wedge h(a) = h(1 \wedge a) = h(a)$ para toda $a \in R$.
Así tenemos que $h(0) \vee h(a) = h(a)$ y $h(1) \wedge h(a) = h(a)$ para toda $h(a) \in h(A)$, es decir, $h(0)$ en el elemento cero y $h(1)$ es el elemento unidad de $h(R)$.
2⌋ Sea $a \in h(R)$, entonces $a = h(x)$ para alguna $x \in R$. Como R es complementada, existe $y \in R$ complemento de x y tenemos que: $h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) = h(0)$ y $h(x) \vee h(y) = h(x \vee y) = h(1)$. Por lo tanto, $h(y)$ es complemento para $h(x)$ en $h(R)$. □

Corolario 6.10. *Si R es un álgebra booleana y h es un homomorfismo en R, entonces $h(R)$ es álgebra booleana en la cual $(h(a))' = h(a')$ para cada $a \in R$.*

Demostración. Si R es álgebra booleana, entonces R es distributiva y complementada, sabemos que la imagen bajo un homomorfismo de R es distributiva y por el teorema anterior también es complementada. Por lo tanto $h(R)$ es un álgebra booleana.
Además, los complementos en un álgebra booleana son únicos y como vimos en la demostración de la parte 2 del teorema anterior, $h(x')$ es complemento para $h(x)$ en $h(R)$. Entonces $(h(x))' = h(x')$ para cada $x \in R$. □

Teorema 6.11. *Un álgebra booleana es una retícula con complementos relativos.*

Demostración. Un álgebra booleana es distributiva y complementada, en particular es modular y complementada, y por el teorema 5.5. es una retícula con complementos relativos. □

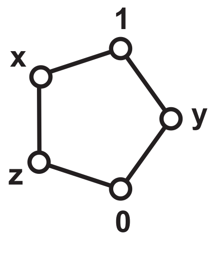
Corolario 6.12. *Cada intervalo de un álgebra booleana es una subálgebra.*

Demostración. Por el teorema anterior, cada intervalo en una retícula booleana es complementado. Además cada intervalo en una retícula distributiva es una subretícula distributiva. □

7. Teoremas de Caracterización y Representación

Lema 7.1. *El pentágono N_5 es una retícula no modular, y por tanto, no distributiva.*

Demostración.
N_5 es una retícula acotada con cinco elementos: $N_5 = \{0, 1, x, y, z\}$, pues es tal que $x \wedge y = z \wedge y = 0$, $x \vee y = z \vee y = 1$ y $x \wedge z = z$. Entonces tenemos que $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$ y $(x \wedge y) \vee z = 0 \vee z = z$. Por lo tanto $z < x$ pero $x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee z$ y así, N_5 no es modular. □



N5

Lema 7.2. *El diamante M_3 es una retícula no distributiva.*

Demostración.
M_3 es una retícula acotada con cinco elementos: $M_3 = \{0, 1, p, q, r\}$, pues es tal que $p \wedge q = p \wedge r = q \wedge r = 0$, $p \vee q = p \vee r = q \vee r = 1$. Entonces tenemos que $p \wedge (q \vee r) = p \wedge 1 = p$ y $(p \wedge q) \vee r = 0 \vee r = r$. Por lo tanto $p \wedge (q \vee r) \neq (p \wedge q) \vee r$ y así, M_3 no es distributiva. □

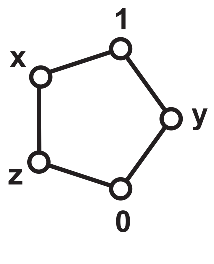
Corolario 6.12. *Cada intervalo de un álgebra booleana es una subálgebra.*

Demostración. Por el teorema anterior, cada intervalo en una retícula booleana es complementado. Además cada intervalo en una retícula distributiva es una subretícula distributiva. □

7. Teoremas de Caracterización y Representación

Lema 7.1. *El pentágono N_5 es una retícula no modular, y por tanto, no distributiva.*

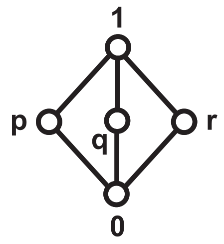
Demostración.
N_5 es una retícula acotada con cinco elementos: $N_5 = \{0, 1, x, y, z\}$, pues es tal que $x \wedge y = z \wedge y = 0$, $x \vee y = z \vee y = 1$ y $x \wedge z = z$. Entonces tenemos que $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$ y $(x \wedge y) \vee z = 0 \vee z = z$. Por lo tanto $z < x$ pero $x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee z$ y así, N_5 no es modular. □



N5

Lema 7.2. *El diamante M_3 es una retícula no distributiva.*

Demostración.
M_3 es una retícula acotada con cinco elementos: $M_3 = \{0, 1, p, q, r\}$, pues es tal que $p \wedge q = p \wedge r = q \wedge r = 0$, $p \vee q = p \vee r = q \vee r = 1$. Entonces tenemos que $p \wedge (q \vee r) = p \wedge 1 = p$ y $(p \wedge q) \vee r = 0 \vee r = r$. Por lo tanto $p \wedge (q \vee r) \neq (p \wedge q) \vee r$ y así, M_3 no es distributiva. □



M3

Lema 7.3. *Si R es una retícula no modular, entonces existe una subretícula de R isomorfa al pentágono.*

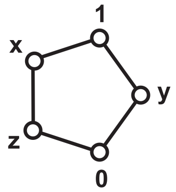
Demostración.
Como R no es modular, existen $a, b, c \in R$ (distintos entre si) tales que $c < a$ y $(a \wedge b) \vee c < a \wedge (b \vee c)$.
Sean $d := (a \wedge b) \vee c$, $e := a \wedge (b \vee c)$, $f := b \wedge d$ y $g := b \vee d$.

Tenemos que
$a \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = (a \wedge b) \wedge b \leq_{(a \wedge b \leq d)} d \wedge b \leq_{(d<e)} e \wedge b = (a \wedge (b \vee c)) \wedge b = a \wedge ((b \vee c)) \wedge b) = a \wedge b$.
Por lo tanto, $a \wedge b = e \wedge b = d \wedge b = f$. (1)

Además
$b \vee c = (b \vee (a \wedge b)) \vee c = b \vee ((a \wedge b) \vee c) = b \vee d \leq_{(d<e)} b \vee e \leq_{(e \leq b \vee c)} b \vee (b \vee c) = (b \vee b) \vee c = b \vee c$.
Por lo tanto, $b \vee c = b \vee e = b \vee d = g$. (2)

Veamos ahora que $f \neq b \neq g$, $e \neq g$ y $d \neq f$:
$f = b \Rightarrow a \wedge b = b \Rightarrow d = (a \wedge b) \vee c = b \vee c \Rightarrow e = a \wedge (b \vee c) = a \wedge d \Rightarrow e \leq d$. Lo cual es una contradicción.
$b = g \Rightarrow b \vee c = b \Rightarrow e = a \wedge (b \vee c) = a \wedge b \Rightarrow d = (a \wedge b) \vee c = e \vee c \Rightarrow e \leq d$. Lo cual es una contradicción.
$e = g \Rightarrow b \vee e = e \Rightarrow b \leq e \Rightarrow e \wedge b = b \Rightarrow f = b$. Lo cual es una contradicción.
$d = f \Rightarrow d \wedge b = d \Rightarrow d \leq b \Rightarrow d \vee b = b \Rightarrow g = b$. Lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, $f < b < g$ y $f < d < e < g$. (3)
Además, como $d \wedge b = e \wedge b = f$, b no está relacionado (bajo $\leq$) ni con d ni con e. (4)

Consideremos la función $h : N_5 \to R$ dada por
$h(0) = f$, $h(1) = g$, $h(x) = e$, $h(y) = b$, $h(z) = d$.



N$_5$

Por (1) tenemos que
$h(x) \wedge h(y) = h(z) \wedge h(y) = h(0) = h(x \wedge y) = h(z \wedge y)$,
Por (2), $h(x) \vee h(y) = h(z) \vee h(y) = h(1) = h(x \vee y) = h(z \vee y)$.
Además, $h(x) \wedge h(z) = e \wedge d = d = h(z) = h(x \wedge z)$,
$h(x) \vee h(z) = e \vee d = e = h(x) = h(x \vee z)$.
Y $f < e, b, d < g \Rightarrow h(0) < h(x), h(y), h(z) < h(1)$.

Con esto se prueba que h preserva las operaciones $\wedge$ y $\vee$. Por otra parte h es uno a uno, pues por (3) y (4) b, d, e, f, g son cinco elementos distintos. Por lo tanto h es una inmersión y $\{b, d, e, f, g\}$ es una subretícula de R isomorfa a N_5.

$\square$

Lema 7.4. *Si R es una retícula modular y no distributiva, entonces existe una subretícula de R isomorfa al diamante.*

Demostración.
Como R no es distributiva, existen
$a, b, c \in R$ (distintos entre si) tales que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) < a \wedge (b \vee c)$. Sean:

$u := (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$,
$v := (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$,
$x := (a \wedge v) \vee u$,
$y := (b \wedge v) \vee u$,
$z := (c \wedge v) \vee u$.

Tenemos que:

(1) $a \wedge v = a \wedge (b \vee c)$, $b \wedge v = b \wedge (c \vee a)$ y $c \wedge v = c \wedge (a \vee b)$,

pues:
Como $a \leq a \vee b, c \vee a$, entonces $a \wedge v = a \wedge ((a \vee b) \wedge (c \vee a)) \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c)$. Las demás igualdades se obtienen usando argumentos similares.

(2) $x = ((b \vee c) \wedge a) \vee (b \wedge c) = (b \vee c) \wedge (a \vee (b \wedge c))$,
$y = (b \wedge (c \vee a)) \vee (c \wedge a) = (c \vee a) \wedge (b \vee (c \wedge a))$ y
$z = (c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b) = (a \vee b) \wedge (c \vee (a \wedge b))$, pues:
$x = (a \wedge v) \vee u = (a \wedge (b \vee c)) \vee ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c)$ (dado que $a \wedge b, a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$).
Entonces $x = ((b \vee c) \wedge a) \vee (b \wedge c) = (b \vee c) \wedge (a \vee (b \wedge c))$ (dado que $b \wedge c \leq b \vee c$ y R es modular).
Análogamente tenemos las otras igualdades.

(3) $a \vee u = a \vee (b \wedge c)$, $b \vee u = b \vee (c \wedge a)$ y $c \vee u = c \vee (a \wedge b)$, pues:
Como $a \wedge b, c \wedge a \leq a$, entonces $a \vee u = a \vee ((a \wedge b) \vee (c \wedge a) \vee (b \wedge c)) = a \vee (b \wedge c)$.
Las otras igualdades se obtienen similarmente.

(4) $u = x \wedge y = y \wedge z = x \wedge z$, pues:
$x \wedge y = ((b \vee c) \wedge (a \vee (b \wedge c))) \wedge ((c \vee a) \wedge (b \vee (c \wedge a))) = ((b \vee c) \wedge (b \vee (c \wedge a)) \wedge ((c \vee a) \wedge (a \vee (b \wedge c))) = (b \vee (c \wedge a)) \wedge (a \vee (b \wedge c)) = (b \vee u) \wedge (a \vee u) = ((b \vee u) \wedge a) \vee u)$ (pues $u \leq b \vee u$ y R es modular).
Pero $(b \vee u) \wedge a = (b \vee (a \wedge c)) \wedge a = (a \wedge b) \vee a \wedge c)$ (pues $a \wedge c \leq a$).
Por lo tanto, $x \wedge y = ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \vee u = u$.
De forma análoga podemos ver que $x \wedge z = y \wedge z = u$.

(5) $v = x \vee y = y \vee z = x \vee z$, pues:
$x \vee y = ((a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c)) \vee ((b \wedge (c \vee a)) \vee (c \wedge a)) = ((a \wedge (b \vee c)) \vee (c \wedge a)) \vee ((b \wedge c) \vee (b \wedge (c \vee a))) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge (c \vee a)) = (v \wedge a) \vee (b \wedge v) = v \wedge (a \vee (b \wedge v))$ (pues $b \wedge v \leq v$ y R modular). Pero $a \vee (b \wedge v) = a \vee (b \wedge (c \vee a)) = (a \vee b) \wedge (c \vee a)$ (pues $a \leq c \vee a$ y R es modular).
Por lo tanto, $x \vee y = v \wedge ((a \vee b) \wedge (c \vee a)) = v$.
Análogamente, $x \vee z = y \vee z = v$.
Entonces $u \leq x, y, z \leq v$

(6) $u \neq v$, pues:
$u = v \Rightarrow a \wedge u = a \wedge v$, pero $a \wedge v = a \wedge (b \vee c)$ y $a \wedge u = a \wedge ((b \wedge c) \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge a)) = (a \wedge (b \wedge c)) \vee ((a \wedge b) \vee (c \wedge a))$ (pues $(a \wedge b) \vee (c \wedge a) \leq a$ y R es modular) y como $a \wedge b \wedge c \leq a \wedge b, c \wedge a$,

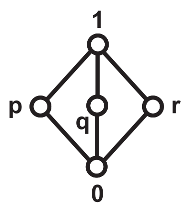
entonces $a \wedge u = (a \wedge b) \vee (c \wedge a)$. Por lo tanto $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Lo cual es una contradicción.

(7) $u \neq x, u \neq y, u \neq z$, pues:
$u = x \Rightarrow u = (a \wedge v) \vee u \Rightarrow a \wedge v \leq u \Rightarrow (a \wedge v) \vee (b \wedge v) \leq u \vee (b \wedge v) = y$.
Además, como $b \wedge v \leq v$, $a \leq c \vee a$ y R es modular, entonces
$(v \wedge a) \vee (b \wedge v) = v \wedge (a \vee (b \wedge v)) = v \wedge (a \vee (b \wedge (c \vee a)) = v \wedge ((a \vee b) \wedge (c \vee a)) = v$. Por lo tanto, $v \leq y$ y así $v = y$.
De manera análoga, se tiene que $v = z$.
Entonces $u = y \wedge z = v \wedge v = v$. Lo cual es una contradicción.
Usando argumentos similares tendremos que $y \neq u \neq z$.

(8) $x \neq v, y \neq v, z \neq v$, pues:
$x = v \Rightarrow x \vee y = v = x \Rightarrow u = x \wedge y = y$. Lo cual es una contradicción.
Análogamente, $y \neq v \neq z$.

(9) x, y, z son tres elementos distintos:
Supongamos que dos de estos elementos son iguales, digamos $x = y$, entonces $u = x \wedge y = x \wedge x = x$. Lo cual es una contradicción. De la misma forma tendremos que $x \neq z$ y $y \neq z$.

Por último, consideremos la función $h : M_3 \to R$ dada por
$h(0) = u$, $h(1) = v$, $h(p) = x$, $h(q) = y$, $h(r) = z$.



$\mathbf{M_3}$

Tenemos que:
$h(p) \wedge h(q) = x \wedge y = u = h(0) = h(p \wedge q)$, similarmente se prueba que $h(p) \wedge h(r) = h(p \wedge r)$ y $h(q) \wedge h(r) = h(q \wedge r)$.
$h(p) \vee h(q) = x \vee y = v = h(1) = h(p \vee q)$, similarmente se prueba que $h(p) \vee h(r) = h(p \vee r)$ y $h(q) \vee h(r) = h(q \vee r)$.
Además $u \leq x, y, z \leq v \Rightarrow h(0) \leq h(p), h(q), h(r) \leq h(1)$.
De lo anterior se sigue que h preserva las operaciones $\wedge$ y $\vee$.

Tenemos que h es uno a uno, pues u, v, x, y, z son cinco elementos distintos.
Por lo tanto h es una inmersión y $\{u, v, x, y, z\}$ es una subretícula de R isomorfa a M_3. $\square$

Teorema 7.5. *Una retícula R es modular si y sólo si no contiene subretículas isomorfas al pentágono.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$
Sea S una subretícula de R, entonces S es modular y la imagen de S bajo cualquier homomorfismo es también modular. Como N_5 no es modular, no puede haber un isomorfismo entre S y N_5.
$\Leftarrow\rfloor$
Esta parte es el enunciado contrapuesto del lema 7.3. $\square$

Teorema 7.6. *Una retícula R es distributiva si y sólo si no contiene subretículas isomorfas al pentágono o al diamante.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$
Sea S una subretícula de R, entonces S es distributiva y la imagen de S bajo cualquier homomorfismo es también distributiva. Como M_3 y N_5 no son distributivas, no puede haber un isomorfismo entre S y N_5 o M_3.
$\Leftarrow\rfloor$
Contraponiendo el enunciado del lema 7.4. tenemos que si R no tiene subretículas isomorfas a M_3, entonces R es distributiva o no es modular. Pero por el teorema anterior, si R no tiene subretículas isomorfas a N_5, entonces R es modular. Por lo tanto, R debe ser distributiva. $\square$

Corolario 7.7. *Una retícula modular R es distributiva si y sólo si no contiene subretículas isomorfas al diamante.*

Teorema 7.8. *Una retícula R es distributiva si y sólo si cada elemento de R tiene a lo más un complemento relativo en cada intervalo.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$
Sea $x \in R$ tal que tiene un complemento y relativo al intervalo $[a, b]$ en R. Si z es complemento de x relativo a $[a, b]$, entonces $x \wedge y = a = x \wedge z$ y $x \vee y = b = x \vee z$. Por el lema 5.6. se sigue que $y = z$.
$\Leftarrow\rfloor$
Como cada elemento en R tiene a lo más un complemento en cada intervalo, entonces R no puede tener subretículas isomorfas ni al pentágono ni al diamante (pues estas retículas tienen elementos con más de un complemento). Por lo tanto, R tiene que ser distributiva. $\square$

8. Condiciones de Cadena en Retículas

Definición 8.1. *Sea P subconjunto no vacío del intervalo $[a, b]$ tal que cualesquiera dos elementos en P son comparables y $a, b \in P$. Entonces diremos que P es una **cadena de** a **a** b. Si P es finita y tiene n elementos, diremos que P tiene **longitud** $n - 1$.*

Definición 8.2. *Sea P una cadena finita de a a b de elementos $a = x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \ldots \prec x_{n-1} \prec x_n = b$. Entonces decimos que P es **máxima**.*

Definición 8.3. *Si todas las cadenas de a a b en una retícula son de longitud finita y entre las cadenas máximas hay una de longitud mayor n, diremos que el intervalo $[a, b]$ es de longitud n denotada por $\ell([a, b]) = n$. Si R es una retícula acotada, entonces el intervalo $[0, 1]$ es toda R y si $\ell\left([0, 1]\right) = n$, entonces R tiene **longitud finita** $\ell\left(R\right) = n$*

Demostración.
$\Rightarrow \rfloor$
Sea $x \in R$ tal que tiene un complemento y relativo al intervalo $[a, b]$ en R. Si z es complemento de x relativo a $[a, b]$, entonces $x \wedge y = a = x \wedge z$ y $x \vee y = b = x \vee z$. Por el lema 5.6. se sigue que $y = z$.
$\Leftarrow \rfloor$
Como cada elemento en R tiene a lo más un complemento en cada intervalo, entonces R no puede tener subretículas isomorfas ni al pentágono ni al diamante (pues estas retículas tienen elementos con más de un complemento). Por lo tanto, R tiene que ser distributiva. $\square$

8. Condiciones de Cadena en Retículas

Definición 8.1. *Sea P subconjunto no vacío del intervalo $[a, b]$ tal que cualesquiera dos elementos en P son comparables y $a, b \in P$. Entonces diremos que P es una* ***cadena de** a **a** b. Si P es finita y tiene n elementos, diremos que P tiene* ***longitud*** *$n - 1$.*

Definición 8.2. *Sea P una cadena finita de a a b de elementos $a = x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \ldots \prec x_{n-1} \prec x_n = b$. Entonces decimos que P es* ***máxima****.*

Definición 8.3. *Si todas las cadenas de a a b en una retícula son de longitud finita y entre las cadenas máximas hay una de longitud mayor n, diremos que el intervalo $[a, b]$ es de longitud n denotada por $\ell([a, b]) = n$. Si R es una retícula acotada, entonces el intervalo $[0, 1]$ es toda R y si $\ell([0, 1]) = n$, entonces R tiene* ***longitud finita*** *$\ell(R) = n$*

Definición 8.4. *Sea R retícula, si para cada par de elementos $a, b \in R$ con $a \leq b$ el intervalo $[a, b]$ es de longitud finita, entonces R es* ***localmente de longitud finita****. Si R es localmente de longitud finita y tiene elemento 0, entonces para cada $x \in R$ el intervalo $[0, x]$ tiene longitud finita, digamos n_x. Este número es llamado la* ***altura*** *de x y es denotado por $h(x)$.*

Definición 8.5. *Sea P un conjunto ordenado.*

- *Si C es una cadena finita en P tal que C tiene n elementos, entonces decimos que la* ***longitud*** *de C es $n - 1$.*
- *Si la longitud de la cadena más larga en P es n, entonces decimos que la* ***longitud*** *de P es n, P es de* ***longitud finita*** *y escribimos $\ell(P) = n$.*
- *Si dada cualquier sucesión $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ de elementos de P sucede que $x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, decimos que P satisface la* ***Condición de Cadena Ascendente****,(****CCA****).*
- *El dual de la condición de cadena ascendente es llamada la* ***Condición de Cadena Descendente****, (****CCD****).*

Teorema 8.6. *Sea P un conjunto ordenado, entonces P satisface la* ***CCA*** *si y sólo si cada subconjunto no vacío de P tiene un elemento máximo. Dualmente, P satisface la* ***CCD*** *si y sólo si cada subconjunto no vacío de P tiene un elemento mínimo.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que hay un subconjunto no vacío A de P que no tiene elemento máximo. Como $A \neq \emptyset$, existe $a_1 \in A$. Pero a_1 no es máximo, así que existe $a_2 \in A$ tal que $a_1 < a_2$. De nuevo a_2 no es máximo, entonces existe a_3 tal que $a_2 < a_3$. Continuando este procedimiento (por el axioma de elección) tenemos una cadena infinita ascendente $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ en P que no satisface la **CCA**.

$\Leftarrow\rfloor$ Si P no satisface la **CCA**, entonces existe una cadena infinita ascendente $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ en P. Entonces el conjunto $A := \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ no tiene elemento máximo (pues $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$). $\square$

Corolario 8.7. *Sea P un conjunto ordenado, entonces P no tiene cadenas infinitas si y sólo si satisface la **CCA** y la **CCD**.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$ Sea $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ...$ una sucesión de elementos en P. Tenemos que $x_1, x_2, x_3, ...$ forman una cadena en P. Como toda cadena en P es finita y además, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m \Rightarrow x_n \leq x_m$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x_n$ si $k \leq n$. Por lo tanto la sucesión cumple la **CCA**. Dualmente tenemos que si P no tiene cadenas infinitas, entonces satisface la **CCD**.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que P satisface la **CCA** y la **CCD**, pero contiene una cadena C infinita. Por el teorema anterior cada subconjunto no vacío de P contiene un elemento máximo, sea x_1 el elemento máximo de C. Como C es infinita, entonces $C \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$ y tiene un elemento máximo, digamos x_2. Tenemos que $C \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$ entonces tiene elemento máximo x_3. Continuando este procedimiento, obtenemos una sucesión $x_1, x_2, x_3, ...$ de elementos en C distintos (pues $x_n \in C \setminus \{x_1, x_2, ... , x_{n-1}\}$). Además, como C es cadena, tenemos que $x_n \leq x_{n-1}$ o $x_{n-1} \leq x_n$. Pero $x_n \in C \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{n-2}\}$ cuyo elemento máximo es x_{n-1} y si $x_{n-1} \leq x_n$, entonces $x_{n-1} = x_n$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x_n < x_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces C tiene una subcadena $x_1 > x_2 > x_3 > ...$ descendente que no satisface la **CCD**. Lo cual es una contradicción. □

Teorema 8.8. *Sea R una retícula en la que se satisface la **CCA**, entonces:*

1. *Para cada A subconjunto no vacío de R, $\bigvee A$ existe y $\bigvee A = \bigvee F$ para algún subconjunto finito $F \subseteq A$.*
2. *Si R tiene **0**, entonces es una retícula completa.*

Demostración.
1. Sea $\emptyset \neq A \subseteq R$. Como R es retícula, $\bigvee F$ existe en R para cada $F \subseteq R$ finito no vacío.
Sea $B := \{\bigvee F \mid \emptyset \neq F \subseteq A,\ F finito\}$. Como $A \neq \emptyset$, entonces $B \neq \emptyset$ y por el teorema 8.6., B tiene elemento máximo digamos $\bigvee F_0$ para algún F_0 subconjunto no vacío de A.
Sea $a \in A$, entonces $\bigvee(F_0 \cup \{a\}) \in B$ y $\bigvee F_0 \leq \bigvee(F_0 \cup \{a\})$. Pero $\bigvee F_0$ es máximo, así que $\bigvee F_0 = \bigvee(F_0 \cup \{a\})$ y $a \leq \bigvee F_0$. Por lo tanto $\bigvee F_0$ es cota superior para A.
Supongamos que x es cota superior para A, entonces también es cota

superior para F_0 y, por lo tanto, $\bigvee F_0 \leq x$.
De lo anterior se sigue que $\bigvee F_0$ es la minima cota superior de A, es decir $\bigvee A = \bigvee F_0$.
2. Supongamos que R tiene **0**. Por el inciso 1, para cada subconjunto no vacío A de R existe $\bigvee A$. Por el dual del teorema 2.5, tenemos que R es retícula completa. $\square$

Dualmente tenemos:

Teorema 8.9. *Sea R una retícula en la que se satisface la **CCD**, entonces:*

1. *Para cada A subconjunto no vacío de R, $\bigwedge A$ existe y $\bigwedge A = \bigwedge F$ para algún subconjunto finito $F \subseteq A$.*
2. *Si R tiene **1**, entonces es una retícula completa.*

Corolario 8.10. *Sea R una retícula que no contiene cadenas infinitas, entonces R es una retícula completa.*

Demostración.
Como R no tiene cadenas infinitas, entonces satisface la **CCA** y la **CCD**.
Que R satisfaga la **CCD** implica que $\bigwedge R$ existe.
Entonces R tiene **0** y satisface la **CCA**. Por lo tanto, R es una retícula completa. $\square$

Definición 8.11. *Sea R una retícula*

- *Si R satisface la **Condición de Cadena Ascendente**, decimos que R es una **Retícula Neteriana***
- *Si R satisface la **Condición de Cadena Descendente**, decimos que R es una **Retícula Artiniana***

Teorema 8.12. *Sea R una retícula neteriana [artiniana]*

1. *Si S es una subretícula de R, entonces S es neteriana [artiniana].*
2. *Si h es un homomorfismo en R, entonces $h(R)$ es retícula neteriana [artiniana].*

Demostración.

1. Se sigue del hecho que cualquier cadena en S es cadena en R.

2. Sea $h(r_1) \leq h(r_2) \leq h(r_3) \leq ....$ cadena en $h(R)$ ($r_i \in R, \forall i \in \mathbb{N}$). Sea $y_i := \bigvee\{r_1, r_2, ..., r_i\}$. Tenemos que $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq ...$ es una cadena ascendente en R, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y_n = y_{n+k}$, es decir $h(y_n) = h(y_{n+k})$, para toda $k \in \mathbb{N}$.
Pero $h(y_i) = h(\bigvee\{r_1, r_2, ..., r_i\}) = \bigvee\{h(r_1), h(r_2), ..., h(r_i)\} = h(r_i)$.
Entonces $h(r_n) = h(r_{n+k})$, para toda $k \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $h(R)$ cumple la **CCA** y así, es neteriana.
De forma dual se demuestra el caso artiniano. $\square$

Teorema 8.13. *Sea R una retícula modular, sea $a \in R$. Entonces R es una retícula neteriana [artiniana] si y sólo si $R_1 := \{x \in R \mid x \leq a\}$ y $R_2 := \{x \in R \mid a \leq x\}$ son retículas neterianas [artinianas].*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$
Sean $x, y \in R_1$, tenemos que $x \wedge y, x \vee y \in R$ y $x, y \leq a$. Entonces $x \wedge y \leq x \vee y \leq a$ y así $x \wedge y, x \vee y \in R_1$.
Sean $x, y \in R_2$, tenemos que $x \wedge y, x \vee y \in R$ y $a \leq x, y$. Entonces $a \leq x \wedge y \leq x \vee y$ y así $x \wedge y, x \vee y \in R_2$.
De lo anterior tenemos que R_1 y R_2 son subretículas de R retícula neteriana. Por tanto también son neterianas.
$\Leftarrow\rfloor$
Sea $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ...$ una cadena ascendente en R, entonces tenemos que $x_1 \wedge a \leq x_2 \wedge a \leq x_3 \wedge a \leq ...$ y $x_1 \vee a \leq x_2 \vee a \leq x_3 \vee a \leq ...$ son cadenas ascendentes en R_1 y R_2 respectivamente. Por hipótesis satisfacen la **CCA**, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \wedge a = x_{n+k} \wedge a$ y $x_n \vee a = x_{n+k} \vee a$, para toda $k \in \mathbb{N}$.
Como $x_{n+k} \wedge a = x_n \wedge a \leq x_n \leq x_{n+k} \leq x_{n+k} \vee a = x_n \vee a$ ($\forall k \in \mathbb{N}$), entonces $x_n = (x_{n+k} \wedge a) \vee x_n = x_{n+k} \wedge (a \vee x_n)$ (pues $x_n \leq x_{n+k}$ y R es modular). Además $x_{n+k} = x_{n+k} \wedge (a \vee x_n)$, por lo tanto, $x_n = x_{n+k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto R cumple la **CCA** y así, es neteriana.
De forma dual se demuestra el caso artiniano. $\square$

9. Átomos

Definición 9.1. *Sea R una retícula*

- *Si R tiene* ***0*** *y $a \in R$ es tal que* ***0*** $\prec a$*, entonces a es un* ***átomo****.*
- *Si R es acotada y continua superiormente y* ***1*** $= \bigvee A$ *donde A es un conjunto de átomos en R, entonces R es una retícula* ***semi-atómica****.*
- *Si para cada elemento en $x \in R$ se tiene que $x = \bigvee A$ para algún un conjunto A de átomos en R, entonces R es una retícula* ***localmente atómica****.*

Definición 9.2. *Sea R una retícula completa*

- *Si $x \in R$ es tal que para cada conjunto dirigido $A \subseteq R$ con $x \leq \bigvee A$ existe $a \in A$ tal que $x \leq a$, entonces decimos que x es* ***compacto****.*
- *Si R tiene* ***1*** *y éste es compacto, entonces R es una retícula* ***compacta*** *o* ***finitamente generada****.*
- *Si para cada elemento en $x \in R$ se tiene que $x = \bigvee A$ para algún conjunto A de elementos compactos en R , entonces R es una retícula* ***compactamente generada****.*

Teorema 9.3. *Sean $x, y \in R$ retícula. Si x, y son compactos, también lo es $x \vee y$.*

Demostración.
Sea A subconjunto dirigido de R tal que $x \vee y \leq \bigvee A$, entonces $x, y \leq \bigvee A$. Como x y y son compactos, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $x \leq a_1$ y $y \leq a_2$. Dado que A es dirigido, existe $a \in A$ tal que $a_1 \vee a_2 \leq a$.
Por lo tanto $x \vee y \leq a_1 \vee a_2 \leq a$. Entonces $x \vee y$ es compacto. $\square$

Teorema 9.4. *Si R es una retícula continua superiormente, entonces cada átomo es compacto.*

Demostración.
Sean a un átomo de R y D un subconjunto dirigido de R tales que $a \leq \bigvee D$, entonces $a = a \wedge (\bigvee D) = \bigvee_{d \in D}(a \wedge d)$. Como a es átomo $a \wedge d$ es igual a 0 ó a, además $a \neq 0$ y así existe $d \in D$ tal que $a \wedge d = a$.
Por lo tanto $a \leq d$ y a es compacto. $\square$

Teorema 9.5. *Si R es una retícula modular semi-atómica, entonces es complementada.*

Demostración.
Sea $x \in R$.
Supongamos $a \leq x$ para cada a átomo de R. Como R es semi-atómica entonces $1 = \bigvee A$ para algún conjunto A de átomos. Por lo tanto $1 = \bigvee A \leq x$ y $x = 1$ tiene complemento en R.

Supongamos $a \not\leq x$ para algún a átomo de R, entonces $a \wedge x = 0$.
Por lo tanto la familia $\mathcal{A} := \{A \textit{ conjunto de átomos} \mid x \wedge (\bigvee A) = 0\}$ es no vacía.
Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una cadena no vacía en $\mathcal{A}$. Como $A_i \subseteq A_j$ implica $\bigvee A_i \leq \bigvee A_j$, entonces $\{\bigvee A_i\}_{i \in I}$ es un conjunto dirigido.
Por ser R continua superiormente tenemos:

$$x \wedge \left(\bigvee \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right) = x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \left(\bigvee A_i\right)\right) = \bigvee_{i \in I} \left(x \wedge \left(\bigvee A_i\right)\right) = 0$$

pues $A_i \in \mathcal{A}, \ \forall i \in I$.

Por lo tanto $\bigcup_{i \in I} \{A_i\} \in \mathcal{A}$ y por el Lema de Zorn $\mathcal{A}$ tiene un elemento máximo M. Sea $y := \bigvee M$.
Supongamos existe a átomo tal que $a \not\leq x \vee y$. Entonces $a \wedge (x \vee y) = 0$.
Además, por ser R modular, tenemos que:
$x \wedge (y \vee a) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee a) = ((x \vee y) \wedge a) \vee y = y$, entonces $x \wedge (y \vee a) \leq x \wedge y = 0$ y $M \cup \{a\} \in \mathcal{A}$. Lo cual es una contradicción pues M es máximo.
Por lo tanto $a \leq x \vee y$ para cada a átomo y $1 = \bigvee A \leq x \vee y$ (A el conjunto de átomos), es decir, y es complemento de x. $\square$

10. Módulos

Nota. A lo largo de esta sección A representará un anillo con 1.

Definición 10.1. *Un **A-módulo derecho** es un grupo abeliano* $(M,+)$ *con una operación de* $M \times A$ *en* M *dada por* $(x,a) \mapsto xa$ *que satisface las siguientes propiedades:*

1. $(x+y)a = xa + ya$
2. $x(a+b) = xa + xb$
3. $x(ab) = (xa)b$
4. $x1 = x$

para cualesquiera $x, y \in M$, $a, b \in A$.

Similarmente definimos un **A-módulo izquierdo** tomando la operación de $A \times M$ en M, dada por $(a,x) \mapsto ax$.
Concentraremos nuestro estudio en los A-módulos derechos, así que nos referiremos a ellos simplemente como A-módulos.

Notación. La clase de todos los A-módulos será denotada por **A-mod**.

Definición 10.2. *Si* $M \in$ *A-mod. Un subconjunto no vacío* L *de* M *es un **submódulo** de* M *si:*

1. L *es subgrupo aditivo de* M.
2. $x \in L,\ a \in A \Longrightarrow xa \in L$

Es decir, $L \in$ *A-mod bajo las operaciones heredadas de* M.

Definición 10.3. *Si* L *es un submódulo del* A*-módulo* M*, definimos el **módulo cociente** como el grupo cociente* M/L *con la operación de* $M/L \times A$ *en* M/L *dada por* $(\bar{x}, a) \mapsto \overline{xa}$.

Nota. La operación $(\bar{x}, a) \mapsto \overline{xa}$ está bien definida, pues:
$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x - y \in L \Rightarrow xa - ya = (x - y)a \in L$. Tenemos además que M/L es un A-módulo.

Definición 10.4. *Si M, $N \in A$-mod, una función $\varphi : M \to N$ es:*

- ***homomorfismo*** *(o bien,* ***A-lineal****) si para $x, y \in M$, $a \in A$ se tiene que:*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(xa) = \varphi(x)a$$

- *un* ***monomorfismo*** *si φ es un homomorfismo uno a uno.*
- *un* ***epimorfismo*** *si φ es un homomorfismo sobre N.*
- *un* ***isomorfismo*** *si es tanto monomorfismo como epimorfismo.*

Notación. Escribiremos:
$M \hookrightarrow N$ si existe un monomorfismo de M en N,
$M \twoheadrightarrow N$ si existe un epimorfismo de M en N,
$M \cong N$ cuando exista un isomorfismo entre M y N.

10.1. La Retícula de Submódulos.

Notación. Si $M \in A$-*mod*, denotaremos por **Sub M** al conjunto de todos los submódulos de M.

Lema 10.5. *Si* $M \in A$-*mod y* $\{N_\alpha\} \subseteq SubM$, *entonces* $\bigcap_\alpha N_\alpha \in SubM$.

Demostración.
1. $\bigcap_\alpha N_\alpha$ es un subgrupo aditivo pues así lo es cada N_α.
2. $x \in \bigcap_\alpha N_\alpha$ y $a \in A \Rightarrow x \in N_\alpha$ y $a \in A$ para cada $\alpha \Rightarrow xa \in N_\alpha$ para cada $\alpha \Rightarrow xa \in \bigcap_\alpha N_\alpha$. □

Observación. Por el resultado anterior tenemos que si $M \in A$-*mod* y $L \subseteq M$, entonces existe el menor submódulo de M que contiene a L, dado por:

$$SUB(L) =: \bigcap\{N \in SubM \mid L \subseteq N\}$$

Este submódulo es llamado el **submódulo de M generado por L**.

Lema 10.6. *Si* $(M, +) \in A$-*mod y* $\{N_\alpha\} \subseteq SubM$, *entonces*

$$SUB(\bigcup_\alpha N_\alpha) = \Sigma_\alpha N_\alpha$$

donde $\Sigma_\alpha N_\alpha =: \{\Sigma_\alpha n_\alpha \mid n_\alpha \in N_\alpha\ \forall\alpha,\ n_\alpha = 0$ *para todas las* α, *excepto para un número finito*$\}$

Demostración.
$\subseteq\rfloor$
1. Como N_α es subgrupo aditivo para cada α, entonces $\Sigma_\alpha N_\alpha$ es también un subgrupo aditivo.
2. Supongamos que $\Sigma_\alpha n_\alpha \in \Sigma_\alpha N_\alpha$ y $a \in A$, entonces $n_\alpha \in N_\alpha\ \forall\alpha$ y $n_\alpha = 0$ para todas las α, excepto para un número finito. Por lo tanto, $(\Sigma_\alpha n_\alpha)a = \Sigma_\alpha(n_\alpha a)$ (pues es una suma finita).
Además $n_\alpha = 0 \Rightarrow n_\alpha a = 0$ y $n_\alpha a \in N_\alpha\ \forall\alpha$ (pues N_α es submódulo).
Así que $(\Sigma_\alpha n_\alpha)a \in \Sigma_\alpha N_\alpha$.
De lo anterior se sigue que $\Sigma_\alpha N_\alpha \in SubM$.

Además, como $N_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha N_\alpha$ para cada α, entonces $\cup N_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha N_\alpha$ que es submódulo.
Por lo tanto $SUB(\bigcup_\alpha N_\alpha) \subseteq \Sigma_\alpha N_\alpha$.

$\supseteq \rfloor$
Tenemos que $\cup_\alpha N_\alpha \subseteq SUB(\cup_\alpha N_\alpha)$.
Si $\Sigma_\alpha n_\alpha \in \Sigma_\alpha N_\alpha$, entonces es una suma finita con $n_\alpha \in N_\alpha \subseteq SUB(\cup_\alpha N_\alpha)$.
Por lo tanto, $\Sigma_\alpha n_\alpha \in SUB(\cup_\alpha N_\alpha)$. $\square$

Teorema 10.7. *Si $(M, +) \in A$-mod, entonces $SubM$ es una retícula completa en la cual:*

$$\bigwedge_{\alpha \in I} N_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha$$

y

$$\bigvee_{\alpha \in I} N_\alpha = \Sigma_{\alpha \in I} N_\alpha$$

para $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq SubM$.

En particular:

$$L \wedge N = L \cap N$$

y

$$L \vee N = L + N =: \{l + n \mid l \in L,\ n \in N\}$$

para L, $N \in SubM$.

Observación. Por lo anterior, tenemos que $SubM$ es una retícula acotada, con $\mathbf{0} = \{0\}$ y $\mathbf{1} = M$.

Teorema 10.8. *Si $M \in A$-mod, entonces $SubM$ es una retícula modular.*

Demostración. Sean $K, L, N \in SubM$ con $N \subseteq K$. Tenemos que:
Si $m \in K \cap (L + N)$, entonces $m \in K$ y $m = l + n$ con $l \in L$ y $n \in N$. Entonces $l = m + (-n)$ con $m \in K$ y $-n \in N \subseteq K$, así que $l = m + (-n) \in K \cap L$.

Por lo tanto $l + n \in (K \cap L) + N$ y tenemos que
$K \wedge (L \vee N) = K \cap (L + N) \subseteq (K \cap L) + N = (K \wedge L) \vee N$. $\square$

Lema 10.9. *Si $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia dirigida, entonces*

$$\Sigma_{\alpha \in I} N_\alpha = \cup_{\alpha \in I} N_\alpha$$

Demostración.
$\subseteq \rfloor$
Si $\Sigma_{\alpha \in I} n_\alpha \in \Sigma_{\alpha \in I} N_\alpha$, entonces es una suma finita, digamos $\Sigma_{i=1}^{m} n_{\alpha_i}$ con $n_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}, \forall i$.
Como la familia es dirigida, entonces para α_1, α_2 existe $\beta_1 \in I$ tal que $N_{\alpha_1}, N_{\alpha_2} \subseteq N_{\beta_1}$. Para α_3, β_1 existe $\beta_2 \in I$ tal que $N_{\alpha_3}, N_{\beta_1} \subseteq N_{\beta_2}$, además $N_{\alpha_1}, N_{\alpha_2} \subseteq N_{\beta_2}$. Para α_4, β_2 existe $\beta_3 \in I$ tal que $N_{\alpha_4}, N_{\beta_2} \subseteq N_{\beta_3}$, además $N_{\alpha_1}, N_{\alpha_2}, N_{\alpha_3} \subseteq N_{\beta_3}$. Continuando este procedimiento tendremos que para α_m, β_{m-2} existe $\beta \in I$ tal que $N_{\alpha_m}, N_{\beta_{m-2}} \subseteq N_\beta$, además $N_{\alpha_1}, N_{\alpha_2}, ..., N_{\alpha_m} \subseteq N_\beta$.
Por lo tanto $n_{\alpha_i} \in N_\beta, \forall i$, así que $\Sigma_{i=1}^{m} n_{\alpha_i} = \Sigma_{\alpha \in I} n_\alpha \in N_\beta \subseteq \cup_{\alpha \in I} N_\alpha$.
$\supseteq \rfloor$
Se sigue del hecho que $N_\alpha \subseteq \Sigma_{\alpha \in I} N_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. $\square$

Teorema 10.10. *Si $M \in A$-mod, entonces $SubM$ es una retícula pseudo-complementada.*

Demostración.
Veremos que $SubM$ es continua superiormente.
Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq SubM$ una familia dirigida, sea $N \in SubM$, tenemos que $\{N \cap N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es también una familia dirigida, entonces:

$N \wedge (\bigvee_{\alpha \in I} N_\alpha) = N \cap (\Sigma_{\alpha \in I} N_\alpha) = N \cap (\bigcup_{\alpha \in I} N_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (N \cap N_\alpha) = \Sigma_{\alpha \in I} (N \wedge N_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} (N \wedge N_\alpha)$.

Por lo anterior, tenemos que $SubM$ es continua superiormente y como además es modular, por el Teorema 5.13. tenemos que $SubM$ es pseudo-complementada. $\square$

Definición 10.11.

- *Si* $\{0\} \neq M \in A$*-mod no tiene más submódulos que* $\{0\}$ *y* M *mismo (es decir,* M *es un átomo de* $SubM$*), decimos que es un módulo* ***simple****.*
- *Si* $M \in A$*-mod es una suma de submódulos simples (es decir,* $SubM$ *es semi-atómica), entonces decimos que es un módulo* ***semi-simple****.*

Teorema 10.12. *Si* $M \in A$*-mod, entonces son equivalentes:*

1. M *es semi-simple.*
2. M *es una suma directa de módulos simples.*
3. *Cada submódulo de* M *es un sumando directo.*

Demostración. Se sigue de los hechos que cualquier retícula modular semi-atómica es complementada (teorema 9.5.) y que si cada submódulo es sumando directo, entonces cada submódulo contiene un submódulo simple, y además la suma de todos los submódulos simples es un sumando directo de M. □

Lema 10.13. $N \in SubM$ *tiene un complemento en* $SubM$ *si y sólo si* N *es sumando directo de* M*.*

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$
Sea N' complemento de N en $SubM$, entonces $N \wedge N' = N \cap N' = \mathbf{0}$ y $N \vee N' = N + N' = \mathbf{1} = M$. Por lo tanto N es sumando directo de M.
$\Leftarrow\rfloor$
Supongamos que $M = \Sigma_{\alpha \in I} M_\alpha$ suma directa con $M_\alpha \in SubM$ para cada $\alpha \in I$ y $M_\beta = N$ para alguna $\beta \in I$. Sea $N' =: \Sigma_{\alpha \neq \beta} M_\alpha$, entonces $\mathbf{0} = N \cap N' = N \wedge N'$ y $N \vee N' = N + N' = \Sigma_{\alpha \in I} M_\alpha = M = 1$.
Por lo tanto $N' \in SubM$ es complemento de N. □

Teorema 10.14. *Si* $M \in A$*-mod, entonces* $SubM$ *es una retícula complementada si y sólo si* M *es un módulo semi-simple.*

Demostración.
Por el lema anterior $SubM$ es complementada si y sólo si cada elemento de $SubM$ es sumando directo de M. Por el Teorema 10.12., esto es equivalente a que M sea semi-simple. $\square$

10.2. A-Her, A-Coh.

Definición 10.15.

- *Una clase de A-módulos es llamada **clase hereditaria** si es cerrada bajo submódulos y bajo isomorfismos.*
- *Una clase de A-módulos es llamada **clase cohereditaria** si es cerrada bajo imágenes homomorfas, es decir, bajo cocientes.*

Notación.
Denotaremos a la clase de todas las clases hereditarias de A-módulos por **A-her**.
Y a la clase de todas las clases cohereditarias por **A-coh**.

Definición 10.16. *Definimos en A-her (A-coh) un orden parcial dado por:*

$$\forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in A - her\ (A - coh), \quad \mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$$

Teorema 10.17.

1. $\{\{0\}\} \in$ *A-her (A-coh).*
2. *A-mod* $\in$ *A-her (A-coh).*
3. $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq$ *A-her (A-coh)* $\Longrightarrow \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{H}_\alpha,\ \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{H}_\alpha \in$ *A-her (A-coh).*

Demostración.
1. Se sigue de los siguientes hechos: $\{0\}$ no contiene submódulos propios y la imagen bajo cualquier homomorfismo de $\{0\}$ es $\{0\}$.

2. Se tiene que cualquier submódulo de un A-módulo es también un A-módulo y cualquier imagen homomorfa de un A-módulo, es A-módulo. Por tanto, A-*mod* es cerrado bajo submódulos, isomorfismos e imágenes homomorfas.

3. Sea $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq A\text{-}her$, sea $H \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$, sea $K \in A\text{-}mod$ tal que K es submódulo de H ,o bien $H \cong K$. Tenemos que $H \in H_\alpha \in A\text{-}her$ para cada $\alpha \in I$, entonces $K \in H_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Por lo tanto $K \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$.
Por otra parte, si $H \in \bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$ y $K \in A\text{-}mod$ tal que K es submódulo de H o $H \cong K$. Tenemos que $H \in H_\beta \in A\text{-}her$ para alguna $\beta \in I$, entonces $K \in H_\beta$. Por lo tanto $K \in \bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$.
Análogamente tendremos para $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq A\text{-}coh$ que $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$ y $\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$ son cerradas bajo imágenes homomorfas. $\square$

Notación. Denotaremos con $\mathbb{O}$ a $\{\{0\}\}$ y con $\mathbb{I}$ a A-*mod*.

Corolario 10.18. *A-her y A-coh son retículas grandes completas (es decir, se comportan como retículas completas, salvo el hecho que en general no son conjuntos), en las cuales:*

$$\bigwedge_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$$

$$\bigvee_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$$

Definición 10.19. *Dada una clase $\mathcal{M} \subseteq A$-mod, denotaremos por:*

- *$HER(\mathcal{M})$ a la clase hereditaria generada por $\mathcal{M}$ (intersección de todas las clases hereditarias que contienen a $\mathcal{M}$).*
- *$COHER(\mathcal{M})$ a la clase cohereditaria generada por $\mathcal{M}$ (intersección de todas las clases cohereditarias que contienen a $\mathcal{M}$).*

Teorema 10.20. *Si $\mathcal{M} \subseteq A$-mod, entonces:*

1. $HER(\mathcal{M}) = \{N \in A - mod \mid N \hookrightarrow M,\ para\ algún\ M \in \mathcal{M}\}$.
2. $COHER(\mathcal{M}) = \{N \in A - mod \mid M \twoheadrightarrow N,\ para\ algún\ M \in \mathcal{M}\}$.

Demostración.
1. Sea $\mathcal{A} := \{N \in A - mod \mid N \hookrightarrow M,\ para\ algún\ M \in \mathcal{M}\}$.
Tenemos que para cada $M \in \mathcal{M}$, $M \overset{Id}{\hookrightarrow} M$ (homomorfismo identidad). Por lo tanto, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$.
Además $\mathcal{A} \in A$-*her*, pues si $N \in \mathcal{A}$ y K es submódulo de N o $N \cong K$, entonces $K \overset{Id}{\hookrightarrow} N \hookrightarrow M$ o $K \overset{\varphi}{\to} N \hookrightarrow M$ (φ isomorfismo) para algún $M \in \mathcal{M}$. En cualquier caso tenemos que $K \hookrightarrow M$.
De todo lo anterior se sigue que $HER(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}$.
Por otra parte, tenemos:
$N \in \mathcal{A} \Rightarrow N \hookrightarrow M$ para algún $M \in \mathcal{M} \subseteq HER(\mathcal{M}) \Rightarrow N \cong K$ para algún submódulo K de $M \in HER(\mathcal{M}) \in A$-*her* $\Rightarrow N \in HER(\mathcal{M})$ (pues $HER(\mathcal{M})$ es cerrada bajo submódulos y bajo isomorfismos).
Por lo tanto $\mathcal{A} \subseteq HER(\mathcal{M})$.

2. Sea $\mathcal{B} := \{N \in A - mod \mid M \twoheadrightarrow N,\ para\ algún\ M \in \mathcal{M}\}$.
Tenemos que para cada $M \in \mathcal{M}$, $M \overset{Id}{\twoheadrightarrow} M$. Por lo tanto, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$.
Además $\mathcal{B} \in A$-*coh*, pues si $N \in \mathcal{B}$ y $K = \varphi(N)$ (φ homomorfismo), entonces $M \twoheadrightarrow N \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} K \in A$-*mod* para algún $M \in \mathcal{M}$. Por lo tanto $M \twoheadrightarrow K$ y así $K \in \mathcal{B}$.
De todo lo anterior se sigue que $COHER(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{B}$.
Por otra parte, tenemos:
$N \in \mathcal{B} \Rightarrow M \twoheadrightarrow N$ para algún $M \in \mathcal{M} \subseteq COHER(\mathcal{M}) \Rightarrow$
N es una imagen homomorfa de $M \in COHER(\mathcal{M}) \in A$-*coher* $\Rightarrow$
$N \in COHER(\mathcal{M})$ (pues $COHER(\mathcal{M})$ es cerrada bajo imágenes homomorfas). Por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq COHER(\mathcal{M})$.

$\square$

Teorema 10.21. *Si $\mathcal{H} \in A$-her, entonces tiene un único pseudocomplemento en A-her denotado por $\mathcal{H}^{\perp_{her}}$ y dado por:*

$$\mathcal{H}^{\perp_{her}} = \{N \in A - mod \mid (H \in \mathcal{H}\ \ y\ \ H \hookrightarrow N) \Rightarrow H = \{0\}\}$$

Demostración.
Sea $\mathcal{A} := \{N \in A-mod \mid (H \in \mathcal{H} \ \ y \ \ H \hookrightarrow N) \Rightarrow H = \{0\}\}$ tenemos que:
1. $\mathcal{A} \in A\text{-}her$, pues
Si $N \in \mathcal{A}$ y $K \in A\text{-}mod$ es un submódulo de N o $N \cong K$, entonces $K \hookrightarrow N$. Sea $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \hookrightarrow K$, entonces $H \hookrightarrow K \hookrightarrow N \Rightarrow$
$H \hookrightarrow N \in \mathcal{A} \Rightarrow H = \{0\}$. Por tanto $K \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{H} \wedge \mathcal{A} = \mathbf{0}$, pues
Si $H \in \mathcal{H} \wedge \mathcal{A} = \mathcal{H} \cap \mathcal{A}$, entonces $H \overset{Id}{\hookrightarrow} H$ con $H \in \mathcal{H}$ y como $H \in \mathcal{A}$, $H = \{0\}$. Por lo tanto $\mathcal{H} \cap \mathcal{A} = \mathbf{0}$.
3. $\mathcal{A}$ es un elemento mayor con la propiedad $\mathcal{H} \wedge \mathcal{A} = \mathbf{0}$, pues:
Si $\mathcal{K} \in A\text{-}her$ tal que $\mathcal{H} \wedge \mathcal{K} = \mathbf{0}$, $N \in \mathcal{K}$ y
si $H \in \mathcal{H}$ es tal que $H \hookrightarrow N$, entonces $H \in \mathcal{K}$ (pues H es isomorfo a un submódulo de $N \in \mathcal{K} \in A\text{-}her$). Por lo tanto $H \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \mathbf{0} \Rightarrow H = \{0\} \Rightarrow N \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{K} \leq \mathcal{A}$.
4. De esto último se sigue que $\mathcal{A}$ es máximo y así un pseudocomplemento, además se tiene la unicidad (pues cualquier pseudocomplemento es máximo, pero $\mathcal{A}$ es elemento mayor). $\square$

Corolario 10.22. *Si $\mathcal{H} \in A\text{-}her$, entonces:*
$$\mathcal{H}^{\perp_{her}} = \{N \in A-mod \mid \{0\} \neq H \hookrightarrow N \Rightarrow H \notin \mathcal{H}\}$$

Corolario 10.23. *Si $\mathcal{H}, \mathcal{K} \in A\text{-}her$ y $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$, entonces $\mathcal{K}^{\perp_{her}} \leq \mathcal{H}^{\perp_{her}}$.*

Demostración. Sea $N \in \mathcal{K}^{\perp_{her}}$, sea $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \hookrightarrow N$. Por tanto $H \in \mathcal{K}$ (pues $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$) y como $H \hookrightarrow N$ y $N \in \mathcal{K}^{\perp_{her}}$, entonces $H = \{0\}$. Así que $N \in \mathcal{H}^{\perp_{her}}$ y $\mathcal{K}^{\perp_{her}} \subseteq \mathcal{H}^{\perp_{her}}$. $\square$

Teorema 10.24. *Si $\mathcal{C} \in A\text{-}coh$, entonces $\mathcal{C}$ tiene un único pseudocomplemento en A-coh denotado por $\mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ y dado por:*

$$\mathcal{C}^{\perp_{coh}} = \{N \in A-mod \mid (C \in \mathcal{C} \ \ y \ \ N \twoheadrightarrow C) \Rightarrow C = \{0\}\}$$

Demostración.
Sea $\mathcal{B} := \{N \in A-mod \mid (C \in \mathcal{C} \ \ y \ \ N \twoheadrightarrow C) \Rightarrow C = \{0\}\}$, tenemos que:

1. $\mathcal{B} \in A$-*coh*, pues
Si $N \in \mathcal{B}$ y $K = \varphi(N)$ con φ homomorfismo, entonces $N \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} K$. Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $K \twoheadrightarrow C$, entonces $N \twoheadrightarrow K \twoheadrightarrow C \Rightarrow N \twoheadrightarrow C$ y $N \in \mathcal{B} \Rightarrow C = \{0\}$. Por tanto $K \in \mathcal{B}$.
2. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{B} = \mathbf{0}$, pues
Si $C \in \mathcal{C} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$, entonces $C \overset{Id}{\twoheadrightarrow} C$ con $C \in \mathcal{C}$ y como $C \in \mathcal{B}$, $C = \{0\}$. Por lo tanto $\mathcal{C} \cap \mathcal{B} = \mathbf{0}$.
3. $\mathcal{B}$ es un elemento mayor con la propiedad $\mathcal{C} \wedge \mathcal{B} = \mathbf{0}$, pues:
Si $\mathcal{K} \in A$-*coh* tal que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{K} = \mathbf{0}$, $N \in \mathcal{K}$ y
si $C \in \mathcal{C}$ es tal que $N \twoheadrightarrow C$, entonces $C \in \mathcal{K}$ (pues C es imagen homomorfa de $N \in \mathcal{K} \in A$-*coh*). Por lo tanto $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{K} = \mathbf{0} \Rightarrow C = \{0\} \Rightarrow N \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{K} \leq \mathcal{B}$.
4. De esto último se sigue que $\mathcal{B}$ es máximo y así un pseudocomplemento, además se tiene la unicidad (pues cualquier pseudocomplemento es máximo, pero $\mathcal{B}$ es elemento mayor). □

Corolario 10.25. *Si $\mathcal{C} \in A$-coh, entonces:*

$$\mathcal{C}^{\perp_{coh}} = \{N \in A - mod \mid N \twoheadrightarrow C \neq \{0\} \Rightarrow C \notin \mathcal{C}\}$$

Corolario 10.26. *Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \in A$-coh y $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$, entonces $\mathcal{D}^{\perp_{coh}} \leq \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$.*

Demostración. Sea $N \in \mathcal{D}^{\perp_{coh}}$, sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $N \twoheadrightarrow C$. Por tanto $C \in \mathcal{D}$ (pues $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$) y como $N \twoheadrightarrow C$ y $N \in \mathcal{D}^{\perp_{coh}}$, entonces $C = \{0\}$. Así que $N \in \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$. Por lo tanto $\mathcal{D}^{\perp_{coh}} \subseteq \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$. □

Corolario 10.27. *A-her y A-coh son retículas grandes pseudocomplementadas.*

10.3. A-Nat, A-Conat.

Definición 10.28.

- *El* ***esqueleto*** *de una retícula (grande) pseudocomplementada es la clase de todos sus pseudocomplementos.*
- *El esqueleto de A-her será denotado por A-nat y sus elementos serán llamados* ***clases naturales****.*
- *El esqueleto de A-coh será denotado por A-conat y sus elementos serán llamados* ***clases conaturales****.*

Lema 10.29. *Sea* $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq$ *A-her tenemos que:*

$$\bigcap_{\alpha\in I} {\mathcal{H}_\alpha}^{\perp_{her}} = \left(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha\right)^{\perp_{her}}$$

Demostración.
$\subseteq]$
Sea $N \in \bigcap_{\alpha\in I} {\mathcal{H}_\alpha}^{\perp_{her}}$, sea $H \in \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha$ tal que $H \hookrightarrow N$.
Tenemos que $H \in \mathcal{H}_\beta$ para algún $\beta \in I$, $N \in {\mathcal{H}_\beta}^{\perp_{her}}$ y $H \hookrightarrow N$. Por lo tanto, $H = \{0\}$ y así, $N \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha\right)^{\perp_{her}}$.
$\supseteq]$
Sea $N \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha\right)^{\perp_{her}}$. Sean $\alpha \in I$ y $H \in \mathcal{H}_\alpha$ tal que $H \hookrightarrow N$.
Tenemos que $H \in \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha$ y como $N \in \left(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{H}_\alpha\right)^{\perp_{her}}$, entonces $H = \{0\}$ y así, $N \in {\mathcal{H}_\alpha}^{\perp_{her}}$ para toda $\alpha \in I$. $\square$

Lema 10.30. *Sea* $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq$ *A-coh tenemos que:*

$$\bigcap_{\alpha\in I} {\mathcal{C}_\alpha}^{\perp_{coh}} = \left(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{C}_\alpha\right)^{\perp_{coh}}$$

Demostración.
$\subseteq]$
Sea $N \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{C_\alpha}^{\perp_{coh}}$, sea $C \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha$ tal que $N \twoheadrightarrow C$.
Tenemos que $C \in \mathcal{C}_\beta$ para algún $\beta \in I$, $N \in \mathcal{C_\beta}^{\perp_{coh}}$ y $N \twoheadrightarrow C$. Por lo tanto, $C = \{0\}$ y así, $N \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha\right)^{\perp_{coh}}$.
$\supseteq]$
Sea $N \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha\right)^{\perp_{coh}}$. Sean $\alpha \in I$ y $C \in \mathcal{C}_\alpha$ tal que $N \twoheadrightarrow C$.
Tenemos que $C \in \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha$ y como $N \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\alpha\right)^{\perp_{coh}}$, entonces
$C = \{0\}$ y así, $N \in \mathcal{C_\alpha}^{\perp_{coh}}$ para toda $\alpha \in I$. $\square$

Teorema 10.31.

1. *$\mathbb{O} \in A$-nat (A-conat).*
2. *$\mathbb{I} \in A$-nat (A-conat).*
3. *$\{\mathcal{N}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq A$-nat ($A$-conat) $\Longrightarrow \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{N}_\alpha \in A$-nat ($A$-conat).*

Demostración.
1 y 2. Tenemos que $\mathbb{O}, \mathbb{I} \in A$-*her* ($A$-*coh*). Además $\mathbb{O}$ es pseudocomplemento de $\mathbb{I}$ y viceversa.
3. Tenemos que para cada $\mathcal{N} \in A$-*nat* (A-*conat*), $\mathcal{N} = \mathcal{H}^{\perp_{her}}$ ($\mathcal{N} = \mathcal{H}^{\perp_{coh}}$) para alguna $\mathcal{H} \in A$-*her* (A-*coh*), y por los lemas anteriores tenemos que la intersección de pseudocomplementos en A-*her* (A-*coh*) es también un pseudocomplemento. $\square$

Definición 10.32. *Dada una clase $\mathcal{M} \subseteq A$-mod, denotaremos por:*

- *$NAT(\mathcal{M})$ a la clase natural generada por $\mathcal{M}$ (intersección de todas las clases naturales que contienen a $\mathcal{M}$).*
- *$CONAT(\mathcal{M})$ a la clase conatural generada por $\mathcal{M}$ (intersección de todas las clases conaturales que contienen a $\mathcal{M}$).*

Corolario 10.33. *A-nat es una retícula completa. En la cual:*

$$\bigwedge_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha$$

$$\bigvee_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha = NAT\left(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{H}_\alpha\right)$$

Corolario 10.34. *A-conat es una retícula completa. En la cual:*

$$\bigwedge_{\alpha\in I}\mathcal{C}_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{C}_\alpha$$

$$\bigvee_{\alpha\in I}\mathcal{C}_\alpha = CONAT\left(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{C}_\alpha\right)$$

Teorema 10.35. *Si $\mathcal{H} \in$ A-her, entonces $(\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$ es igual a la clase:*
$\{N \in A - mod \mid \{0\} \neq H \hookrightarrow N \Rightarrow K \hookrightarrow H \text{ para algún } \{0\} \neq K \in \mathcal{H}\}$

Demostración. Usando el teorema 10.21. y su corolario, tenemos que:
$N \in (\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} \Leftrightarrow (\{0\} \neq H \hookrightarrow N \Rightarrow H \notin \mathcal{H}^{\perp_{her}}) \Leftrightarrow$
$(\{0\} \neq H \hookrightarrow N \Rightarrow \exists K \in \mathcal{H}$ tal que $K \neq \{0\}$ y $K \hookrightarrow H) \Leftrightarrow$
N pertenece a la clase dada. □

Corolario 10.36. *Si $\mathcal{H} \in$ A-her, entonces $\mathcal{H} \subseteq (\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$*

Demostración. Tenemos que si $N \in \mathcal{H}$ y $\{0\} \neq H \hookrightarrow N$, entonces $H \in \mathcal{H}$, si ponemos $K = H$ en el teorema anterior, tendremos que $N \in (\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$. □

Teorema 10.37. *Si $\mathcal{C} \in$ A-coh, entonces $(\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$ es igual a la clase:*
$\{N \in A - mod \mid N \twoheadrightarrow C \neq \{0\} \Rightarrow C \twoheadrightarrow K \text{ para algún } \{0\} \neq K \in \mathcal{C}\}$

Demostración. Usando el teorema 10.24. y su corolario, tenemos que:
$N \in (\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}} \Leftrightarrow (N \twoheadrightarrow C \neq \{0\} \Rightarrow C \notin \mathcal{C}^{\perp_{coh}}) \Leftrightarrow$
$(N \twoheadrightarrow C \neq \{0\} \Rightarrow \exists K \in \mathcal{C}$ tal que $K \neq \{0\}$ y $C \twoheadrightarrow K) \Leftrightarrow$
N pertenece a la clase dada. $\square$

Corolario 10.38. *Si* $\mathcal{C} \in A$*-coh, entonces* $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$

Demostración. Tenemos que si $N \in \mathcal{C}$ y $N \twoheadrightarrow C \neq \{0\}$, entonces $C \in \mathcal{C}$, si ponemos $K = C$ en el teorema anterior, tendremos que $N \in (\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$. $\square$

Definición 10.39. *Una clase* $\mathcal{M}$ *de A-módulos satisface:*

- *La condición* ***(N)*** *si:*

$$[\{0\} \neq M \hookrightarrow N \Rightarrow (\exists L \in \mathcal{M})(\exists \{0\} \neq K \in Amod)\ M \hookleftarrow K \hookrightarrow L]$$

  implica que $N \in \mathcal{M}$.

- *La condición* ***(CN)*** *si:*

$$[N \twoheadrightarrow M \neq \{0\} \Rightarrow (\exists L \in \mathcal{M})(\exists \{0\} \neq K \in A-mod)\ M \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow L]$$

  implica que $N \in \mathcal{M}$.

Teorema 10.40. *Si* $\mathcal{M} \in A$*-mod, entonces son equivalentes:*

1. $\mathcal{M} \in A$*-nat.*
2. $\mathcal{M}$ *satisface* ***(N)****.*
3. $\mathcal{M} \in A$*-her y* $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$.

Demostración.
$1 \Rightarrow 2\rfloor$
Si $\mathcal{M} \in A$-*nat*, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{H}^{\perp_{her}}$ para alguna $\mathcal{H} \in A$-*her*.
Supongamos que se satisface:
$(\{0\} \neq M \hookrightarrow N \Rightarrow (\exists L \in \mathcal{M})(\exists \{0\} \neq K \in A-mod) M \hookleftarrow K \hookrightarrow L)$
pero $N \notin \mathcal{H}^{\perp_{her}}$, entonces:
Existe $\{0\} \neq M \in \mathcal{H}$ tal que $M \hookrightarrow N$ y por hipótesis, existen $L \in \mathcal{M}$ y $\{0\} \neq K \in A-mod$ tales que $M \hookleftarrow K \hookrightarrow L$. Entonces $L \in \mathcal{H}^{\perp_{her}}$ y $\{0\} \neq K \hookrightarrow L$ y por lo tanto, $K \notin \mathcal{H}$. Lo cual es una contradicción (pues $K \hookrightarrow M$ y $M \in \mathcal{H} \in A$-*her* $\Rightarrow K \in \mathcal{H}$).

Por lo tanto $N \in \mathcal{H}^{\perp_{her}} = \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ satisface **(N)**.
$2 \Rightarrow 3\rfloor$
Sea $N \in \mathcal{M}$, si M es submódulo de N, o bien, $N \cong M$, entonces $M \hookrightarrow N$. Supongamos que $\{0\} \neq K \hookrightarrow M$. Tenemos que $K \hookleftarrow K \hookrightarrow N$ con $N \in \mathcal{M}$ y $\{0\} \neq K \in A - mod$. Entonces por la condición **(N)** tenemos que $M \in \mathcal{M}$ y por lo tanto, $\mathcal{M} \in A$-her.
Por otra parte:
$N \in (\mathcal{M}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} \Leftrightarrow (\{0\} \neq M \hookrightarrow N \Rightarrow (\exists \{0\} \neq K \in \mathcal{M})\ K \hookrightarrow M)$.
Entonces, como $\{0\} \neq K \in \mathcal{M}$, poniendo $L = K$ en la condición **(N)** tendremos que $N \in \mathcal{M}$.
Por lo tanto $(\mathcal{M}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} \subseteq \mathcal{M}$ y como $\mathcal{M} \in A$-her (por el corolario 10.36.) tendremos que $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$.
$3 \Rightarrow 1\rfloor$
Se sigue del hecho que $\mathcal{M}$ es pseudocomplemento de $\mathcal{M}^{\perp_{her}} \in A$-$her$.
□

Corolario 10.41. *Dada $\mathcal{H} \in A$-her, $NAT(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$.*

Demostración.
Tenemos que $\mathcal{H} \subseteq (\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$ (corolario 10.36.) y $(\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} \in A$-$nat$.
Por lo tanto $NAT(\mathcal{H}) \subseteq (\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$.
Por otra parte:
Como $\mathcal{H} \subseteq NAT(\mathcal{H})$, entonces (por el corolario 10.23.)
$(NAT(\mathcal{H}))^{\perp_{her}} \subseteq \mathcal{H}^{\perp_{her}}$ y $(\mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} \subseteq ((NAT(\mathcal{H}))^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} = NAT(\mathcal{H})$
(pues $NAT(\mathcal{H}) \in A$-nat). □

Teorema 10.42. *Si $\mathcal{M} \in A$-mod, entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{M} \in A$-conat.*
2. *$\mathcal{M}$ satisface **(CN)**.*
3. *$\mathcal{M} \in A$-coh y $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2\rfloor$
Si $\mathcal{M} \in A$-$conat$, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ para alguna $\mathcal{C} \in A$-coh.
Supongamos que se satisface:
$(N \twoheadrightarrow M \neq \{0\} \Rightarrow (\exists L \in \mathcal{M})(\exists \{0\} \neq K \in A - mod) M \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow L)$
pero $N \notin \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$, entonces:
Existe $\{0\} \neq M \in \mathcal{C}$ tal que $N \twoheadrightarrow M$ y por hipótesis, existen $L \in \mathcal{M}$ y $\{0\} \neq K \in A - mod$ tales que $M \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow L$. Entonces $L \in \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ y

$L \twoheadrightarrow K \neq \{0\}$ y por lo tanto, $K \notin \mathcal{C}$. Lo cual es una contradicción (pues $M \twoheadrightarrow K$ y $M \in \mathcal{C} \in A\text{-}coh \Rightarrow K \in \mathcal{C}$). Por lo tanto $N \in \mathcal{C}^{\perp_{coh}} = \mathcal{M}$.
$2 \Rightarrow 3\rfloor$
Sea $N \in \mathcal{M}$, sea M tal que $N \twoheadrightarrow M$. Supongamos que $M \twoheadrightarrow K \neq \{0\}$. Tenemos que $K \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow N$ con $N \in \mathcal{M}$ y $\{0\} \neq K \in A - mod$. Entonces por la condición **(CN)** tenemos que $M \in \mathcal{M}$ y por lo tanto, $\mathcal{M} \in A\text{-}coh$.
Por otra parte:
$N \in (\mathcal{M}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}} \Leftrightarrow (N \twoheadrightarrow M \neq \{0\} \Rightarrow (\exists \{0\} \neq K \in \mathcal{M})\ M \twoheadrightarrow K)$.
Entonces, como $\{0\} \neq K \in \mathcal{M}$, poniendo $L = K$ en la condición **(CN)** tendremos que $N \in \mathcal{M}$.
Por lo tanto $(\mathcal{M}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}} \subseteq \mathcal{M}$ y como $\mathcal{M} \in A\text{-}coh$ (por el corolario 10.38.) tendremos que $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$.
$3 \Rightarrow 1\rfloor$
Se sigue del hecho que $\mathcal{M}$ es pseudocomplemento de $\mathcal{M}^{\perp_{coh}} \in A\text{-}coh$. □

Corolario 10.43. *Dada $\mathcal{C} \in A\text{-}coh$, $CONAT(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$.*

Demostración.
Tenemos que $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$ (corolario 10.38.) y $(\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}} \in A\text{-}conat$.
Por lo tanto $CONAT(\mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$.
Por otra parte:
Como $\mathcal{C} \subseteq CONAT(\mathcal{C})$, entonces (por el corolario 10.26.) $(CONAT(\mathcal{C}))^{\perp_{coh}} \subseteq \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ y $(\mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}} \subseteq ((CONAT(\mathcal{C}))^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}} = CONAT(\mathcal{C})$ (pues $CONAT(\mathcal{C}) \in A\text{-}conat$). □

Teorema 10.44. *Si $\mathcal{H} \in A\text{-}nat$, entonces $\mathcal{H}^{\perp_{her}}$ es complemento de $\mathcal{H}$ en $A\text{-}nat$.*

Demostración.
Tenemos que $\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}^{\perp_{her}} = \mathbb{O}$.
Por otra parte:
$\mathcal{H} \vee \mathcal{H}^{\perp_{her}} = NAT(\mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{\perp_{her}}) = ((\mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}})^{\perp_{her}} =$
$\left\{N \in Amod \mid \{0\} \neq H \hookrightarrow N \Rightarrow K \hookrightarrow H \text{ para algún } \{0\} \neq K \in \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{\perp_{her}}\right\}$.
Supongamos $N \in A\text{-}mod$ y $N \notin \mathcal{H} \vee \mathcal{H}^{\perp_{her}}$. Entonces $N \neq \{0\}$ y existe $\{0\} \neq H \hookrightarrow N$ tal que si $\{0\} \neq K \hookrightarrow H$, entonces $K \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{\perp_{her}}$.
Pero $\{0\} \neq H \hookrightarrow H$, entonces:

$H \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{\perp_{her}} \Rightarrow H \notin \mathcal{H}^{\perp_{her}} \Rightarrow K \hookrightarrow H$ para algún $\{0\} \neq K \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H} \cup \mathcal{H}^{\perp_{her}}$ (lo cual es una contradicción). Por lo tanto
$N \in A\text{-}mod \Rightarrow N \in \mathcal{H} \vee \mathcal{H}^{\perp_{her}}$ y así, $\mathcal{H} \vee \mathcal{H}^{\perp_{her}} = A\text{-}mod = \mathbb{I}$.
Por todo lo anterior, tenemos que $\mathcal{H}^{\perp_{her}}$ es complemento de $\mathcal{H}$. $\square$

Teorema 10.45. *Si $\mathcal{C} \in A$-conat, entonces $\mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ es complemento de $\mathcal{C}$ en A-conat.*

Demostración.
Tenemos que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}^{\perp_{coh}} = \mathbb{O}$.
Por otra parte:
$\mathcal{C} \vee \mathcal{C}^{\perp_{coh}} = CONAT(\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{coh}}) = ((\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}} =$
$\left\{N \in Amod \mid N \twoheadrightarrow C \neq \{0\} \Rightarrow C \twoheadrightarrow K \text{ para algún } \{0\} \neq K \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{coh}}\right\}$.
Supongamos $N \in A\text{-}mod$ y $N \notin \mathcal{H} \vee \mathcal{H}^{\perp_{coh}}$. Entonces $N \neq \{0\}$ y existe $\{0\} \neq C$ cociente de N tal que cualquier cociente $\{0\} \neq K$ de C no pertenece a $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$.
Pero como C es cociente de sí mismo, entonces:
$C \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{coh}} \Rightarrow C \notin \mathcal{C}^{\perp_{coh}} \Rightarrow C \twoheadrightarrow K$ para algún $\{0\} \neq K \in \mathcal{C} \Rightarrow K$ es cociente de C y $\{0\} \neq K \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ (lo cual es una contradicción).
Por lo tanto $N \in A\text{-}mod \Rightarrow N \in \mathcal{C} \vee \mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ y así, $\mathcal{C} \vee \mathcal{C}^{\perp_{coh}} = A\text{-}mod = \mathbb{I}$.
Por todo lo anterior, tenemos que $\mathcal{C}^{\perp_{coh}}$ es complemento de $\mathcal{C}$. $\square$

Lema 10.46. *Si $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in A$-nat, entonces:*

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{her}} = \mathbb{O}$$

Demostración.
$\Rightarrow \rfloor$
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ y $M \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{her}} \Rightarrow M \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ y $M \in \mathcal{N}^{\perp_{her}}$
$\Rightarrow M \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{her}} = \mathbb{O} \Rightarrow M = \{0\}$

$\Leftarrow \rfloor$
Supongamos que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{her}} = \mathbb{O}$ y $M \in \mathcal{M}$ pero $M \notin \mathcal{N}$.
Como $\mathcal{N} \in A\text{-}nat$, entonces $\mathcal{N} = (\mathcal{N}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$. Así que $M \notin (\mathcal{N}^{\perp_{her}})^{\perp_{her}}$, lo cual significa (teorema 10.35.) que existe $\{0\} \neq N \hookrightarrow M$ tal que $[\{0\} \neq H \hookrightarrow N \Rightarrow H \notin \mathcal{N}]$, de esta implicación se sigue (corolario 10.22.) que $N \in \mathcal{N}^{\perp_{her}}$.

Por otra parte, como $\mathcal{M} \in A$-*nat*, entonces satisface la condición **(N)** (teorema 10.40.). Supongamos que $\{0\} \neq K \hookrightarrow N$, entonces $K \hookleftarrow K \hookrightarrow N \hookrightarrow M \in \mathcal{M}$. Entonces se cumple el antecedente en la condición **(N)**, por lo tanto, $N \in \mathcal{M}$.
Por lo anterior tenemos que $\{0\} \neq N \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{her}} = \mathbb{O}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathcal{N}$ y así $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. □

Teorema 10.47. *A-nat es una retícula booleana completa.*

Demostración.
Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in A$-nat. Demostraremos que $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.
Sea $\mathcal{D} =: (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$. Sea $\mathcal{E} =: \mathcal{A} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{her}}$.
Tenemos que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Entonces, por el lema anterior,
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{her}} = \mathbb{O} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{her}} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{E} = \mathbb{O} = \mathcal{C} \wedge \mathcal{E}$. Por lo tanto $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}^{\perp_{her}}$, entonces $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}^{\perp_{her}}$ y $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{her}}$.
Pero como $\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{her}} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{her}} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{her}} = \mathbb{O}$, entonces (lema anterior) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{her}} \subseteq \mathcal{D} = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.
Por lo tanto $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$. Así que *A-nat* es una retícula distributiva y como es complementada (Teorema 10.44.), entonces es una retícula booleana completa (Teorema 10.33.). □

Lema 10.48. *Si $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in A$-conat, entonces:*

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{coh}} = \mathbb{O}$$

Demostración.
$\Rightarrow\rfloor$
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ y $M \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{coh}} \Rightarrow M \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ y $M \in \mathcal{N}^{\perp_{coh}}$
$\Rightarrow M \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{coh}} = \mathbb{O} \Rightarrow M = \{0\}$

$\Leftarrow\rfloor$
Supongamos que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{coh}} = \mathbb{O}$ y $M \in \mathcal{M}$ pero $M \notin \mathcal{N}$.
Como $\mathcal{N} \in A$-*conat*, entonces $\mathcal{N} = (\mathcal{N}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$. Así que $M \notin (\mathcal{N}^{\perp_{coh}})^{\perp_{coh}}$, lo cual significa (teorema 10.37.) que existe $M \twoheadrightarrow N \neq \{0\}$ tal que $[N \twoheadrightarrow H \neq \{0\} \Rightarrow H \notin \mathcal{N}]$, de esta implicación se sigue (corolario 10.25.) que $N \in \mathcal{N}^{\perp_{coh}}$.
Por otra parte, como $\mathcal{M} \in A$-*conat*, entonces satisface la condición **(CN)** (teorema 10.42.). Supongamos que $N \twoheadrightarrow K \neq \{0\}$, entonces

$K \twoheadrightarrow K \twoheadleftarrow N \twoheadleftarrow M \in \mathcal{M}$. Entonces se cumple el antecedente en la condición **(CN)**, por lo tanto, $N \in \mathcal{M}$.
Por lo anterior tenemos que $\{0\} \neq N \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{N}^{\perp_{coh}} = \mathbb{O}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathcal{N}$ y así $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. □

Teorema 10.49. *A-conat es una retícula booleana completa.*

Demostración.
Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in A$-conat. Demostraremos que $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.
Sea $\mathcal{D} =: (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$. Sea $\mathcal{E} =: \mathcal{A} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{coh}}$.
Tenemos que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Entonces, por el lema anterior,
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{coh}} = \mathbb{O} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{coh}} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{E} = \mathbb{O} = \mathcal{C} \wedge \mathcal{E}$. Por lo tanto $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}^{\perp_{coh}}$, entonces $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}^{\perp_{coh}}$ y $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{coh}}$.
Pero como $\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{coh}} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{coh}} \wedge \mathcal{D}^{\perp_{coh}} = \mathbb{O}$, entonces (lema anterior) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{E}^{\perp_{coh}} \subseteq \mathcal{D} = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.
Por lo tanto $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$. Así que *A-conat* es una retícula distributiva y como es complementada (Teorema 10.45.), entonces es una retícula booleana completa (Teorema 10.34.). □

Bibliografía

G. Birkhoff, Lattice Theory, American Mathematical Society, NY, USA, 1940.

B.A. Davey & H.A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, NY, USA, 1990.

T. Donnellan, Lattice Theory, Oxford, Pergamon, 1968.

G. Gratzer, General Lattice Theory, Academic Press, NY, USA, 1978.

N. Jacobson, Basic Algebra I, W.H. Freeman and Company, NY, USA, 1985.

C. Nastasescu & F. van Oystaeyen, Dimensions of Ring Theory, D. Reidel Publishing Company, Holland, 1987.

H. A. Rincón, A. Alvarado G., J. Ríos M., On the Lattices of Natural and Conatural Classes in R-mod, Communications in Algebra, 29:2, 541–556, México DF, 2001.

H. A. Rincón, A. Alvarado G., J. Ríos M., On Some Lattices of Module Classes, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 5, No. 1 2006 105-117, 2006.

J.J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Springer-Verlag, NY, USA, 1995.

B.S.W. Schroder, Ordered Sets, Birkhauser, Boston, USA, 2003.

B. Stenstrom, Rings of Quotients, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

G. Szasz, Theorie des Treillis, Monographies Universitaires de Mathematiques, Dunod, Paris, 1971.