



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCALERAS DE WANNIER-STARK EN SISTEMAS
ELÁSTICOS UNIDIMENSIONALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A:

FÍS. LUIS GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO MORALES MORI
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS,
UNAM-CAMPUS MORELOS

MÉXICO, D. F.

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A la memoria de mi madre
Catalina Gutiérrez

A Marisela, Kathya y Mariselita con amor

Agradecimientos

A los miembros del Grupo de Vibraciones Elásticas:

Dr. Jorge Andrés Flores Valdés, Instituto de Física, UNAM

Dr. Guillermo Monsivais Galindo, Instituto de Física, UNAM

Dr. Alejandro Morales Mori, Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus
Morelos

Dr. Rafael A. Méndez Sánchez, Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus
Morelos

así como también a:

Dr. Jesús Antonio del Río Portilla, Centro de Investigación en Energía,
UNAM-Campus Morelos

Dr. Sergio Cuevas García, Centro de Investigación en Energía, UNAM-Campus
Morelos

Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach, Facultad de Ciencias, UNAM

les debo valiosas observaciones, que amablemente me hicieron, al revisar la tesis.

Al otro miembro del Grupo de Vibraciones Elásticas:

M. en I. Alfredo Díaz de Anda, Centro de Investigación en Ingeniería y
Ciencias Aplicadas, UAEMor

mi agradecimiento por su ayuda en la realización de una parte de los experimentos.

Al técnico, Sr. Eladio Ortiz Santillón del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos, mi agradecimiento por la fabricación de las piezas necesarias para armar el sistema mecánico, así como por su disposición para ayudarme a ensamblarlo.

A mi maestro de licenciatura y amigo Fís. Juan Américo González Menéndez, mi agradecimiento y gratitud por sus enseñanzas y amistad desde los inicios de mis estudios en la Facultad de Ciencias, UNAM.

Mi agradecimiento a la UNAM por su apoyo a través del proyecto:

DGAPA-PAPIIT IN111307

Fís. Luis Gutiérrez

Índice general

1. Introducción	3
2. Vibraciones torsionales en una barra	10
3. EWS en ondas torsionales	17
4. Conclusiones	28
A. Diseño de los Sistemas A y B	30
A.1. Modelo de barra independiente	30
A.2. Construcción del Sistema A	32
A.3. Construcción del Sistema B	35
B. Método de la matriz de transferencia	42
C. Descripción del sistema experimental	54
C.1. Transductor electromagnético acústico (EMAT)	54
C.2. Transductor piezoeléctrico	70

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
C.3. Sistema mecánico	71
C.4. Sistema automatizado	79
D. Expresión de Navier	86

Capítulo 1

Introducción

Existe una analogía entre el comportamiento de partículas cuyo tamaño es del orden de las dimensiones atómicas y el comportamiento de una onda acústica. Lo anterior es particularmente cierto cuando los fenómenos de interferencia juegan un papel importante. En los primeros sistemas la dinámica está gobernada por la mecánica cuántica mientras que la ecuación de onda clásica es la que describe sistemas como los acústicos. Dado que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para describir el comportamiento de un electrón bajo la acción de un potencial constante es formalmente igual que la ecuación de onda independiente del tiempo, ecuación de Helmholtz, es posible establecer algunas analogías, como indica Maynard en la referencia [1].

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{r})\psi = E\psi. \quad (1.1)$$

En este caso la dependencia en el tiempo es $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. Al dividir la Ec. (1.1) por $-\hbar^2/2m$ se convierte en

$$\nabla^2\psi + [q^2 - V(\mathbf{r})]\psi = 0, \quad (1.2)$$

en donde $q = \sqrt{2mE/\hbar^2}$, y por lo tanto está relacionado con el eigenvalor de la energía.

Por otra parte, la ecuación para una onda escalar clásica independiente del tiempo es:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \quad (1.3)$$

donde se supone una dependencia en el tiempo $e^{-i\omega t}$, $k = \frac{\omega}{c}$ y c es la velocidad de propagación de la onda. Comparando las Ecs. (1.2) y (1.3) se antoja una analogía entre los fenómenos cuánticos y los fenómenos clásicos.

Los estudios experimentales de sistemas ondulatorios clásicos tienen algunas ventajas importantes sobre los estudios de sistemas cuánticos. En los análogos clásicos todas las condiciones se pueden controlar o medir con una precisión adecuada. Además, en un experimento con sistemas clásicos se pueden medir directamente los eigenvalores y las eigenfunciones, incluyendo su amplitud y fase, lo cual es en general imposible en mecánica cuántica.

En el predecesor del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos, esto es, en el Centro de Ciencias Físicas (1998-2006) se estableció en 1999 un Laboratorio de Vibraciones Elásticas para realizar experimentos a lo largo de estas líneas de pensamiento. Por ejemplo, se construyó una varilla circular a la que se le maquinaron muescas equidistantes para formar cilindros de igual longitud. Éstos constituyen el análogo elástico de la celda unitaria de un cristal unidimensional. Se encontró en la referencia [2] que, en efecto, el espectro de frecuencias normales de esta barra presenta bandas permitidas y prohibidas, como en el modelo Kronig-Penney. El resultado es válido no sólo para vibraciones compresionales y torsionales que obedecen la ecuación de onda, sino también para las flexionales que obedecen una ecuación más complicada [3]. En todos los casos se han medido las amplitudes de onda y sus fases.

Se han estudiado los análogos elásticos para otros problemas, por ejemplo el efecto de un defecto topológico [4], la barra diatómica, las resonancias gigantes y varios más. En esta tesis se presenta el estudio de dos barras especiales que permiten analizar el análogo del fenómeno conocido como escaleras de Wannier-Stark (EWS). Los resultados que se presentan aquí fueron publicados en las referencias [5, 6].

Se mostraron recientemente, con sistemas ondulatorios, los análogos de las oscilaciones de Bloch y de las EWS en varios campos de la física [7, 8, 9, 10, 11]. Bloch mostró que los electrones en un potencial periódico tienen soluciones

extendidas. Lo mismo es cierto para el comportamiento de un electrón bajo la acción de un campo eléctrico estático. En contraste, y contrario a la intuición, cuando tanto el potencial periódico como el campo eléctrico están presentes, las soluciones son localizadas. Esto sólo es cierto cuando el efecto túnel de banda a banda es despreciable o el sistema es suficientemente corto. El espectro entonces muestra resonancias igualmente espaciadas conocidas como escaleras de Wannier-Stark, con el espaciamiento entre niveles vecinos más cercanos proporcional a la intensidad del campo externo [12]. En el dominio del tiempo las escaleras de Wannier-Stark dan lugar a las así llamadas oscilaciones de Bloch, las cuales consisten de un efecto, no intuitivo, donde los electrones muestran un movimiento oscilatorio bajo la acción del campo eléctrico estático externo [13, 14].

Un sistema muy simple que muestra el espectro predicho por Wannier es el siguiente. Supóngase que un electrón de carga e está sujeto a un potencial periódico unidimensional $V(x + na) = V(x)$, donde n es un entero, y a un campo eléctrico estático de intensidad F . La ecuación de Schrödinger es entonces

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + [V(x) - eFx] \psi(x) = E\psi(x).$$

Si ahora se hace la transformación $x \rightarrow x + an$, dada la periodicidad del potencial $V(x)$, esta ecuación se transforma en

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + [V(x) - eFx] \psi(x) = [E + eFan] \psi(x),$$

lo que muestra que el espectro es un conjunto de niveles igualmente espaciados, con un espaciamiento proporcional a la intensidad del campo eléctrico F . Ésta es la escalera de Wannier-Stark (EWS).

Las predicciones de Bloch y Wannier dieron lugar a una larga controversia que duró más de 60 años para las oscilaciones de Bloch [15], y más de 20 años para las EWS [16, 17, 18]. Las escaleras se observaron antes que las oscilaciones de Bloch. Esto se hizo primero en experimentos numéricos usando modelos unidimensionales simples [19] y más tarde en el laboratorio [20]. Las oscilaciones de Bloch también se observaron más tarde [21]. El ingrediente más importante para explicar las EWS es el comportamiento de los electrones como una onda. Por lo tanto, estas escaleras también podrían ser observadas en sistemas ondulatorios clásicos. Algunos de estos sistemas clásicos se han analizado teóricamente [22, 23, 24].

Pasaron pues muchos años hasta que fue posible comprobar experimentalmente las EWS usando diferentes sistemas propios de la física de estado sólido. La primera vez que se logró fue usando una heteroestructura (super-rejilla de multicapas) formada con GaAs-GaAlAs [20]. En esta referencia los experimentos involucran transiciones ópticas entre las minibandas de valencia y las de conducción. Conforme el campo eléctrico aumenta, el confinamiento electrónico es más importante y el acoplamiento entre pozos cuánticos se reduce todavía más, haciendo que las funciones de onda electrónicas estén completamente localizadas en pozos aislados. Los autores muestran una EWS como picos de fotoluminiscencia o como picos de fotocorriente en función de la energía de excitación, teniendo el campo eléctrico, proporcional al voltaje aplicado a la super-rejilla, como parámetro. El valor de la energía de excitación a la que aparecen los picos indica en qué pozo cuántico está localizada la función de onda electrónica.

A continuación se comentan algunos estudios que reportan las EWS en sistemas ópticos. En la referencia [7] los autores reportan la fabricación de dos super redes ópticas de silicio poroso con 20 y 30 microcavidades cuyo ancho se incrementa linealmente desde el inicio hasta el final de la estructura. Los espectros de reflexión registrados sobre sus dos super redes muestran pendientes de reflexión igualmente espaciadas sobrepuestas a una banda prohibida de ancho 1 eV. Estas pendientes son una clara indicación de una escalera fotónica de Wannier-Stark. Los autores de la referencia [8], usan una muestra con 25 crestas de guías de onda. Para obtener un incremento lineal del índice de refracción efectivo variaron el ancho de las costillas, obteniendo una diferencia constante del índice entre guías adyacentes. Los eigenmodos lineales de su arreglo, con un gradiente lineal en el índice, tienen una extensión limitada y constante de propagación discretas (número de ondas y constante de acoplamiento) igualmente espaciadas, lo que da origen a una EWS. En la referencia [9] se usa una muestra con diez microcavidades. Se produce un gradiente lineal en el espesor óptico, que es la contra parte óptica del campo eléctrico usado en las super redes electrónicas. El gradiente cambia ligeramente la resonancia de cada microcavidad mientras preserva el acoplamiento del modo, lo cual causa una inclinación espacial de las minibandas y de los gaps fotónicos. De esta forma, los estados fotónicos forman una secuencia discreta de niveles de energía con espaciamiento entre niveles constante, obteniendo el equivalente óptico de una EWS. Ésta la obtienen como una serie de picos de transmisión equidistantes. Por otro lado, en la referencia [10], se empleó

una super red óptica de silicio poroso diseñada para tener un gradiente en el índice de refracción con el fin de formar dos EWS. Dicho gradiente inclina las bandas fotónicas de la super red. Los autores muestran las EWS en forma de modos discretos confinados espacialmente dando lugar a picos equidistantes en la medida de transmisión.

Tomando en cuenta la analogía entre la mecánica cuántica y las ondas acústicas y como antecedente los estudios realizados de las EWS en sistemas ópticos fue que se diseñaron dos barras elásticas especiales para medir las frecuencias de resonancia y las amplitudes de onda de las EWS en dichas barras. El estudio realizado al respecto y que se reporta en el presente trabajo de tesis se estructuró de la siguiente forma. En el Cap. 2 se hace una breve introducción de las ondas torsionales. Se presentan los tres tipos de onda que se propagan en una barra y se recuerda, en forma diferencial, la ecuación que describe la propagación de ondas torsionales en términos del momento de torsión, que a su vez depende de las dimensiones de la sección transversal de la barra. Usando la propagación de ondas torsionales en una barra con extremos libres y las condiciones a la frontera de Neumann, se calculan dos expresiones para la velocidad de propagación, la función de onda torsional y las frecuencias de los modos normales.

En el Cap. 3 se muestra que las EWS aparecen en las vibraciones elásticas en barras. Como se mostró arriba, recientemente se analizaron los análogos ópticos de las oscilaciones de Bloch y sus asociadas escaleras de Wannier-Stark. En este trabajo se propone una realización elástica de estas escaleras, empleando para este propósito vibraciones torsionales de sistemas elásticos unidimensionales diseñados especialmente. Se midieron, por primera vez, las amplitudes de onda de las escaleras, las cuales no son directamente accesibles en los casos de la mecánica cuántica ni en los ópticos. Las amplitudes de onda están localizadas espacialmente y coinciden muy bien con las amplitudes predichas teóricamente. Las barras que se analizan se pueden emplear para localizar diferentes frecuencias en diferentes partes de los sistemas elásticos y viceversa. Este capítulo presenta el contenido del artículo [5] del Grupo de Vibraciones Elásticas: *Wannier-Stark Ladders in One-Dimensional Elastic Systems*. Phys. Rev. Lett. **97**, 114301 (2006). La estrategia que se sigue en este capítulo consiste en referir al lector a los apéndices A, B, C, y D, donde se amplía el contenido del mismo al estudiar aspectos teóricos y experimentales que formaron parte de la investigación realizada. De la referencia [6]:

Elastic Wannier-Stark Ladders in Torsional Waves. Journal of Mechanics of Materials and Structures **2**, 1629-1638 (2007), también se tomaron algunos párrafos y aparecen a lo largo de este trabajo. Por completez, se hace a continuación una descripción del contenido de estos apéndices.

Empleando únicamente la expresión para las frecuencias de los modos normales y las dos expresiones de la velocidad de la onda torsional calculadas en el Cap. 2, en el apéndice A se describe el diseño y construcción de las dos barras con estructura, llamadas Sistema A y Sistema B, que se emplearon para el estudio del análogo acústico de las escaleras de Wannier-Stark. El diseño se hizo empleando, como idea central, el cálculo aproximado llamado modelo de barra independiente, apéndice A.1. Los valores de las velocidades y de las dimensiones de cada uno de los cuerpos que forman el Sistema A se dan en el apéndice A.2; los valores correspondientes para el Sistema B se dan en el apéndice A.3.

El apéndice B sitúa en el contexto de este trabajo el método de la matriz de transferencia para calcular los eigenmodos de una barra con estructura. Por un lado, se toman del Cap 2 las expresiones de la función de onda torsional, su velocidad de propagación y las condiciones a la frontera de Neumann. Por otro lado, se aplican simultáneamente dos ecuaciones de continuidad, para la función de onda y el momento de torsión, en cada uno de los puntos donde hay dos cuerpos contiguos que forman la estructura de la barra. Con estos dos ingredientes y empleando el método de la matriz de transferencia se calculan los eigenmodos de los Sistemas A y B.

En el apéndice C se presenta la técnica experimental empleada. En el apéndice C.1 se presenta el transductor electromagnético acústico (EMAT), desarrollado en el Laboratorio de Vibraciones Elásticas del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos [25]. Se estudia cualitativamente, haciendo una serie de aproximaciones, la forma como el EMAT funciona para detectar y/o excitar tanto vibraciones compresionales como torsionales. Pese a dichas aproximaciones, se puede entender que los parámetros relevantes en el funcionamiento del EMAT son la frecuencia, el flujo magnético y el voltaje de la bobina. Para excitar las vibraciones torsionales en el Sistema B se empleó un transductor piezoeléctrico, y dado que es un elemento ampliamente conocido, en el apéndice C.2 se hace una breve descripción de cómo se empleó para el mencionado propósito. La necesidad experimental de mover el detector y/o excitador, ya sea el EMAT o el piezoeléctrico, sobre una línea paralela al eje

de la barra para medir la amplitud de onda torsional, llevó a la construcción de lo que en este trabajo se reporta como el sistema mecánico, apéndice C.3. En éste se dan todos los detalles de construcción de las partes mecánicas que soportan la barra en estudio, así como las partes mecánicas y eléctricas que permiten mover al detector y/o excitador. Se diseñaron y armaron algunos circuitos sencillos, mismos que junto con la electrónica de medición están controlados por un CAMAC a través de una computadora que trabaja en Linux. Las descripciones del arreglo experimental y la interrelación entre las partes están en el apéndice C.4.

De suma importancia resultó la verificación experimental, en forma indirecta, de la expresión de Navier para calcular el momento de torsión de una barra con sección transversal rectangular, misma que se reporta en el Cap. 2 y se amplían detalles en el apéndice D.

En el Cap. 4 se presentan las conclusiones a este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Vibraciones torsionales en una barra

Los tres tipos de vibraciones u ondas que pueden excitarse en un sólido, particularmente en una barra redonda o una viga, que son los dos casos que se estudian en este trabajo, son: compresionales, torsionales y flexionales. En la literatura se les llama indistintamente vibraciones u ondas. La mayoría de las veces a las dos primeras se les llama, respectivamente, ondas compresionales y ondas torsionales porque están descritas por la ecuación de onda, mientras que las flexionales están descritas por una ecuación diferencial de cuarto orden en derivadas parciales y no sería propio llamarles ondas.

Las ondas compresionales también son conocidas como vibraciones longitudinales y se producen cuando una deformación longitudinal, uniforme a lo largo de la sección transversal de la barra, es simplemente una extensión o compresión del material. Las ondas compresionales consisten, pues, en la propagación de estas compresiones o extensiones a lo largo de la barra. Las vibraciones torsionales se producen al propagarse una torcedura de la sección transversal del material a lo largo de la barra. Las vibraciones flexionales consisten del movimiento transversal de la sección transversal de la barra, respecto al eje de la misma.

Como se explicó en el capítulo 1 el interés de este trabajo radica en el estudio de las ondas torsionales para conseguir un análogo acústico de las escaleras de Wannier-Stark.

Para encontrar la ecuación que describe las ondas torsionales en una barra con sección transversal de forma arbitraria,¹ pero constante a lo largo de la misma, se propone que al torcer una barra, los radios r de la sección transversal giran un ángulo φ como se muestra en la Fig. 2.1.

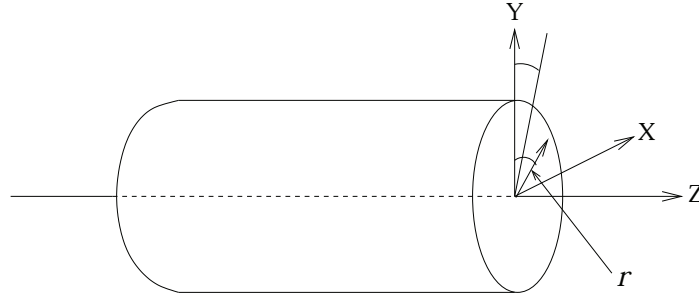


Figura 2.1: Diagrama para oscilaciones torsionales. La función que describe la onda torsional es $\varphi(z, t)$.

Para el caso de la Fig. 2.1: $0 \leq r \leq R$, con R el radio de la barra y θ el ángulo² que forma r con el eje Y ; la ecuación de movimiento [26, pág. 126] para esta barra, alrededor del eje Z fijo, es:

$$\frac{\partial M_T}{\partial z} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

donde M_T es el momento de torsión,³ o torca, total; ρ es la densidad en kg/m^3 e I es el momento polar de inercia⁴ respecto al eje longitudinal de

¹A manera de ejemplo se muestra en la Fig. 2.1 una barra de sección transversal circular, sin embargo, la ecuación para rotaciones en forma diferencial que se obtiene también se aplica a barras con otra geometría en su sección transversal.

²El ángulo θ interviene en el cálculo del momento de torsión para una barra de sección transversal circular como la de la Fig. 2.1, interviene a través de la integral $\int_0^{2\pi} d\theta$ y su valor ve reflejado en las Ecs. (2.2) y (2.3).

³El momento de torsión se produce cuando las fuerzas externas tienden a torcer un segmento de la barra con respecto a otro.

⁴El momento polar de inercia alrededor del eje Z , Fig. 2.1, se define como $I = \int r^2 dA$ y recibe este nombre porque mide la oposición de un objeto a la torsión. También en relación a la Fig. 2.1, el momento polar de inercia se calcula de la misma forma que el momento de inercia de área o segundo momento de área alrededor de los ejes X o Y .

la barra que pasa por su centro y es perpendicular a su sección transversal, sus unidades son m^4 . A partir de la Ec. (2.1) se puede obtener la ecuación diferencial que describe a las ondas torsionales en una barra en específico, con la geometría propia de su sección transversal, dando sus valores de M_T e I .

En este trabajo se consideran dos tipos de barras, una barra de sección transversal circular o cilíndrica que se denotará como Sistema A y una barra con sección transversal rectangular denotada como Sistema B. Conforme se desarrolle este trabajo se irán agregando más propiedades y características a los mencionados Sistemas. Para el caso de una barra cilíndrica se tiene que el momento polar de inercia [26, pág. 127] de su sección transversal circular, de radio R , que rota respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su sección transversal, es:

$$I = \frac{\pi}{2}R^4 \quad (2.2)$$

y su momento de torsión está dado por:

$$M_T = IG \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (2.3)$$

donde G es el módulo de corte. La barra circular es un caso especial para el cual en la expresión para M_T aparece también el momento polar de inercia I , razón por la cual la velocidad no depende del radio R de la barra. Sustituyendo $\frac{\partial M_T}{\partial z} = IG \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ e $I = \frac{\pi}{2}R^4$ en la Ec. (2.1) se tiene:

$$\frac{\pi}{2}R^4 G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho \frac{\pi}{2}R^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

De ésta última ecuación se obtiene la velocidad de fase, c_o , para las ondas torsionales en una barra circular:

$$c_o = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.6)$$

Para el caso de una barra de sección transversal rectangular con ancho w y altura h , se tiene que el momento de torsión M_T respecto al eje de la barra

se obtiene de una solución en serie que halló Navier en 1827. Según Byskov [27, pág. 25] el resultado de Navier que se presenta abajo proviene de muchas y tediosas manipulaciones, la expresión para M_T en este caso es:

$$M_T = G \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{256}{\pi^6} \sum_{j=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(jk)^2} \frac{hw}{\left(\frac{j}{h}\right)^2 + \left(\frac{k}{w}\right)^2} \quad (2.7)$$

donde G es el módulo de corte y donde definimos como α lo siguiente:

$$\alpha = \frac{256}{\pi^6} \sum_{j=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(jk)^2} \frac{hw}{\left(\frac{j}{h}\right)^2 + \left(\frac{k}{w}\right)^2}; \quad (2.8)$$

con esta última definición la Ec. (2.7) toma la siguiente forma:

$$M_T = G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.9)$$

El momento polar de inercia I para un rectángulo de ancho w y altura h , que rota respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su sección transversal está dado por:

$$I = \frac{hw^3 + h^3w}{12}. \quad (2.10)$$

Sustituyendo $\frac{\partial M_T}{\partial z} = G\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ en la Ec. (2.1) se tiene que:

$$G\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2.11)$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho I}{G\alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.12)$$

De esta última ecuación se obtiene la velocidad de fase, c_{\square} , para las ondas torsionales en una barra de sección transversal rectangular:

$$c_{\square} = \sqrt{\frac{G\alpha}{\rho I}}. \quad (2.13)$$

Esta velocidad se puede reescribir utilizando la Ec. (2.6) como:

$$c_{\square} = \sqrt{\frac{G\alpha}{\rho I}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{\frac{\alpha}{I}} = c_{\circ} \sqrt{\frac{\alpha}{I}}. \quad (2.14)$$

Más adelante se describe la verificación experimental de esta ecuación que relaciona c_o y c_{\square} , con el principal interés de verificar en forma implícita la expresión de Navier, Ec. (2.7).

En este trabajo se prefirió expresar la Ec. (2.8) usando un índice corrido para las sumas, esto es, se escribió $j = 2m + 1$, con $m = 0, 1, 2, \dots$; y se escribió $k = 2p + 1$ con $p = 0, 1, 2, \dots$ con lo cual la Ec. (2.8) es de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{hw}{\left[\frac{2m+1}{h}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}. \quad (2.15)$$

Es claro que la ecuación: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, Ec. (2.5), y que la ecuación: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho I}{G \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, Ec. (2.12), se pueden escribir como:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2.16)$$

donde la velocidad de la onda c toma los valores $c \equiv c_o = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ o $c \equiv c_{\square} = \sqrt{\frac{G \alpha}{\rho I}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{\frac{\alpha}{I}} = c_o \sqrt{\frac{\alpha}{I}}$, dependiendo de si se trata del Sistema A o del Sistema B, respectivamente.

Las condiciones a la frontera que se emplean para el Sistema A y para el Sistema B son tales que en $z = 0$ y en $z = L$ las barras oscilan libremente, ya que en los experimentos éstas se soportan con dos hilos de nailon muy delgados, mismos que no están en sus extremos. Lo anterior significa que el momento de torsión en los extremos de la barra es cero, esto es,

$$M_T |_{z=0} = 0 \quad \text{y} \quad M_T |_{z=L} = 0. \quad (2.17)$$

Sustituyendo tanto $M_T = IG \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, Ec. (2.3), para la barra circular, como $M_T = G \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, Ec. (2.9), para la barra rectangular, en la Ec. (2.17), en ambos casos se obtiene como resultado las condiciones a la frontera de Neumann:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=L} = 0. \quad (2.18)$$

La solución general para modos normales de oscilación de la Ec. (2.16) es de la forma:

$$\varphi(z, t) = \phi(z) e^{i\omega t}, \quad (2.19)$$

donde ω es la frecuencia angular. Calculando: $\frac{\partial^2 \varphi(z,t)}{\partial z^2} = e^{i\omega t} \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2}$ y $\frac{\partial^2 \varphi(z,t)}{\partial t^2} = i^2 \omega^2 e^{i\omega t} \phi(z) = -\omega^2 e^{i\omega t} \phi(z)$; se sustituyen estos valores en la Ec. (2.16) para obtener:

$$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \phi(z) \quad (2.20)$$

y empleando la relación entre w , c y el número de ondas k :

$$\omega = ck, \quad (2.21)$$

la Ec. (2.20) toma la forma:

$$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} = -k^2 \phi(z). \quad (2.22)$$

La solución general a la Ec. (2.20) está dada por:

$$\phi(z) = Ae^{i\frac{\omega}{c}z} + Be^{-i\frac{\omega}{c}z} \quad (2.23)$$

y empleando $k = \frac{\omega}{c}$ de la Ec. (2.21), la Ec. (2.23) también se puede expresar así:

$$\phi(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz}. \quad (2.24)$$

Las frecuencias de los modos normales (frecuencias de resonancia) de oscilación torsional para una barra con extremos libres se obtienen de aplicar las ecuaciones (2.19) y (2.23) a las condiciones a la frontera de Neumann, Ec. (2.18). Ahora ϕ ya sólo depende de z y aparecen derivadas totales, esto es:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i\omega t} \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

por lo que:

$$\frac{d\phi}{dz} = i\frac{\omega}{c} (Ae^{i\frac{\omega}{c}z} - Be^{-i\frac{\omega}{c}z}) \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=0} = i\frac{\omega}{c} (A - B) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

e incorporando este hecho a la Ec. (2.23), ésta se expresa como:

$$\phi(z) = A (e^{i\frac{\omega}{c}z} + e^{-i\frac{\omega}{c}z}). \quad (2.25)$$

Análogamente para la segunda condición a la frontera tenemos,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i\omega t} \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=L} = 0$$

donde

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi}{dz} = i\frac{\omega}{c}A(e^{i\frac{\omega}{c}z} - e^{-i\frac{\omega}{c}z}) &\Rightarrow \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=L} = i\frac{\omega}{c}A(e^{i\frac{\omega}{c}L} - e^{-i\frac{\omega}{c}L}) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \cos\frac{\omega}{c}L + i\operatorname{sen}\frac{\omega}{c}L - \left(\cos\frac{\omega}{c}L + i\operatorname{sen}\frac{\omega}{c}L\right) = 0 \\
 \Rightarrow 2i\operatorname{sen}\frac{\omega}{c}L = 0 &\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}L = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c}L = j\pi \Rightarrow \\
 \omega = \frac{c}{L}j\pi, \text{ con } j = 1, 2, \dots & \qquad (2.26)
 \end{aligned}$$

que son las frecuencias angulares de resonancia. El valor $j = 0$ no se toma en cuenta ya que corresponde a una rotación rígida de toda la barra alrededor de su eje. Como $\omega = 2\pi f$ la Ec. (2.26) se convierte en la conocida expresión:

$$f = \frac{c}{2L}j, \qquad (2.27)$$

donde como se explicó arriba c es la velocidad de la onda torsional y toma los valores c_o ó c_{\square} , L es la longitud de la barra y $j = 1, 2, \dots$ es el número de nodos en la amplitud de onda torsional.

Una vez que se obtuvieron las expresiones para las velocidades de propagación en los Sistemas A y B y la expresión para las frecuencias de los modos normales de oscilación torsional, en el siguiente capítulo se expone la forma en que se usaron para obtener el análogo elástico de las escaleras de Wannier-Stark.

Capítulo 3

EWS en ondas torsionales

En este trabajo se estudian barras elásticas especiales, con extremos libres, cuyas ondas torsionales presentan algunas analogías con las escaleras de Wannier-Stark (EWS).

El primer sistema, representado en la Fig. 3.1 (a) y que se referirá como Sistema A, consiste de un conjunto de N cilindros circulares de radio R con longitud variable l_n , $n = 1, 2, \dots, N$, separados por pequeños cilindros de longitud $\epsilon \ll l_n$ y radio $r < R \ll l_n$. Éste es el análogo elástico del sistema óptico con diferentes anchos usado en la referencia [7]. El Sistema B, mostrado en la Fig. 3.1 (b), es una viga formada por N cuboides¹ de ancho w y longitud l constantes. Tienen diferentes alturas h_n para $n = 1, 2, \dots, N$; con $w, h_n \ll l$. Estos cuboides están separados por otros pequeños cuboides de dimensiones $h', w', \epsilon' \ll l$. Éste es el análogo elástico de los sistemas ópticos con un gradiente en el índice de refracción a lo largo de la dirección de

¹En este trabajo se empleará el término cuboide haciendo una traducción libre del inglés *cuboid*. **1:** *approximately cubical in shape* or **2:** *like a cube, a rectangular solid contained by parallelograms*. En español los cuerpos geométricos que forman el Sistema B deben ser referidos como: paralelepípedos grandes con sección transversal rectangular de ancho w y longitud l constantes, etc. y paralelepípedos pequeños con sección transversal rectangular de dimensiones $h', w', \epsilon' \ll l$. Lo anterior es una buena razón para usar la palabra cuboide.

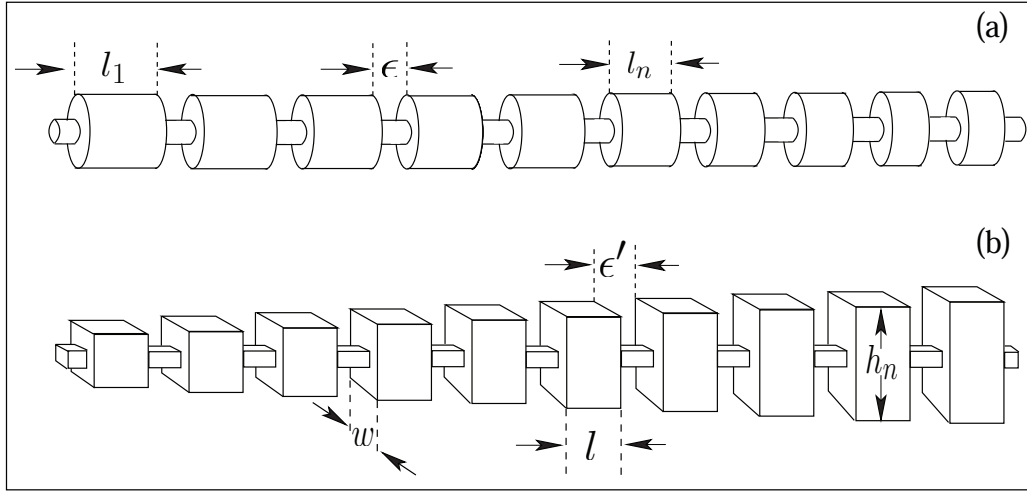


Figura 3.1: Barras usadas para obtener las escaleras de Wannier-Stark: (a) barra con celdas de longitud variable y (b) viga con celdas de igual longitud pero diferentes alturas. Para el Sistema A, $l_n = l/(1 + n\gamma)$, $n = 1, \dots, 14$; con $l = 10.8$ cm, $\gamma = 0.091$, $\epsilon = 2.52$ mm y $\sqrt{G/\rho} = 3104.7$ m/s. Los radios de los cilindros pequeños y grandes son $r = 2.415$ mm y $R = 6.425$ mm, respectivamente. En el Sistema B, $l = 5.0$ cm, $w = 1.905$ cm y $c_n = c(1 + n\gamma)$, $n = 1, \dots, 15$ con $c = 2027.3$ m/s y $\gamma = 0.02786$. El ancho, altura y longitud de los cuboides pequeños son $w' = 5.0$ mm, $h' = 5.0$ mm y $\epsilon' = 6.0$ mm, respectivamente.

propagación usado en las referencias [8, 9, 10], como se verá más abajo. Los Sistemas A y B se construyeron maquinando una pieza sólida de aluminio.

En primer lugar se discute el diseño de estos sistemas y, a continuación, desde un punto de vista cualitativo, las frecuencias de los modos normales y las amplitudes de onda para vibraciones torsionales. Más adelante se usa el método de la matriz de transferencia, que se discute en el apéndice B, y se obtienen las propiedades de los modos normales, que se compararán con las mediciones experimentales.

Con el fin de diseñar los Sistemas A y B se empieza con lo que podría llamarse un modelo de barra independiente en el cual cada cuerpo oscila independientemente del resto (ver el apéndice A.1). Las frecuencias de los modos normales torsionales $f_j^{(n)}$ de la barra n con longitud l_n y velocidad de onda c_n

están dadas por la bien conocida expresión [26, pág. 87]

$$f_j^{(n)} = \frac{c_n}{2l_n} j, \quad (3.1)$$

donde j es el número de nodos en la amplitud de onda. Para obtener un conjunto de frecuencias equidistantes se consideran dos opciones: ya sea que las longitudes l_n se varíen con una velocidad de onda fija o las longitudes se mantengan constantes y la velocidad de la onda se cambie. Para el Sistema A (ver apéndice A.2), se tomaron barras circulares con² $l_n = \frac{l}{1+n\gamma}$, $n = 1, \dots, N$ y $c_n = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ donde ρ es la densidad, G el módulo de corte y l una longitud arbitraria fija. Hay que hacer notar que en barras circulares la velocidad no depende del radio [26, pág. 127]. Para el Sistema B (ver apéndice A.3), se tomó $l_n = l$ y $c_n = \frac{c}{1+n\gamma}$, siendo c una velocidad constante arbitraria. El parámetro γ es adimensional y ajustable.

Para construir el Sistema B se usó la expresión de Navier para la velocidad torsional del cuboide n :

$$c_n = \sqrt{\frac{G\alpha_n}{\rho I_n}}, \quad (3.2)$$

donde $I_n = \frac{h_n w^3 + h_n^3 w}{12}$ es el momento de inercia con respecto al eje del sistema y α_n está dada por:

$$\alpha_n = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \times \frac{h_n w}{\left[\frac{2m+1}{h_n}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}. \quad (3.3)$$

Dado que no había evidencia experimental para las Ecs. (3.2) y (3.3) se decidió verificarlas empleando varias barras (vigas) lisas, sin estructura. En la Fig. 3.2 se muestra el resultado y como puede observarse se obtuvo un excelente acuerdo entre teoría y experimento. Véase el apéndice D para más detalles.

²Se emplea la letra l en dos contextos diferentes. En el Sistema A para designar una longitud arbitraria fija, $l = 10.8$ cm, y se emplea en el Sistema B para designar la longitud constante de los cuboides grandes, $l = 5.0$ cm, en la Fig. 3.1 (b).

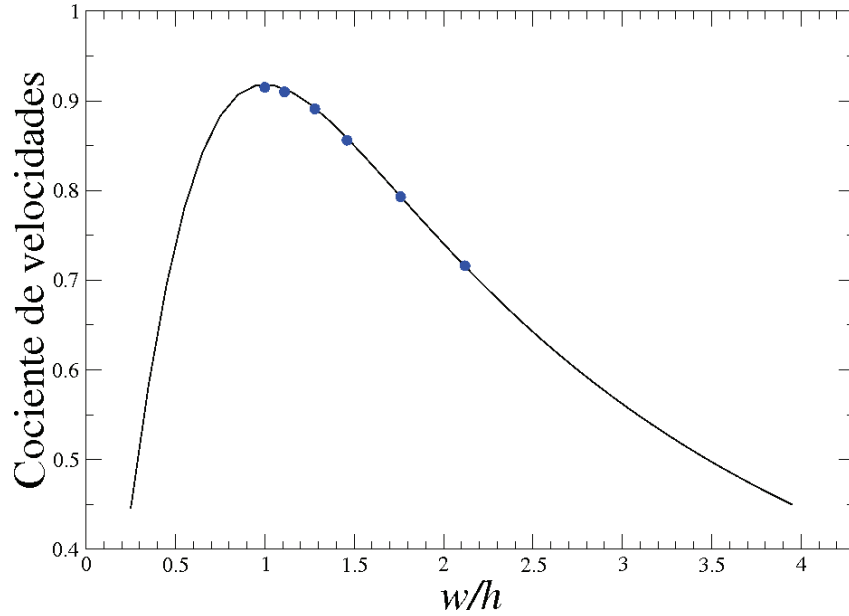


Figura 3.2: Verificación experimental de la expresión de Navier para calcular el momento de torsión M_T , Ec. (2.7). Dicha expresión permite calcular la Ec. (3.2). En el eje de las abscisas $w = 1.91$ cm y h son el ancho y la altura, respectivamente, de varias barras (vigas) lisas, sin estructura, con sección transversal rectangular. En el eje de las ordenadas se graficó el cociente de velocidades (puntos azules) $c_{\square}^{\text{exp}}/c_{\circ}^{\text{exp}}$, donde $c_{\circ}^{\text{exp}} = 3190$ m/s, y de la teoría se graficó el cociente (línea continua) $c_{\square}/c_{\circ} = \sqrt{\frac{\alpha}{I}}$, tomado de la Ec. (2.14), donde α está dada por la Ec. (2.8) e I por la Ec. (2.10). Ver más detalles en el apéndice D.

Al resolver las Ecs. (3.2) y (3.3) se obtuvieron los valores de h_n tales que $c_n = \frac{c}{1+n\gamma}$.

Entonces

$$f_j^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{G}{\rho}} (1+n\gamma) j/2l & \text{para el Sistema A} \\ c(1+n\gamma) j/2l & \text{para el Sistema B,} \end{cases} \quad (3.4)$$

y las diferencias $\Delta f_j^{(n)} = f_j^{(n+1)} - f_j^{(n)}$ son iguales a:

$$\Delta_j \equiv \Delta f_j^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \gamma j/2l & \text{para el Sistema A} \\ c\gamma j/2l & \text{para el Sistema B,} \end{cases} \quad (3.5)$$

las cuales son independientes del índice n .

Ahora se discute el Sistema A. Cuando el parámetro arbitrario γ es igual a cero, se forma una barra localmente periódica. Esta barra localmente periódica muestra un espectro de bandas [2]. Cuando $\gamma \neq 0$ aparece un espectro completamente diferente. El nuevo espectro es semejante a la escalera de Wannier-Stark.

Antes de presentar los cálculos de los modos normales para este sistema, y luego mostrar los resultados numéricos y experimentales, se hará un análisis cualitativo para ver qué tipo de espectro se podría esperar del modelo de barra independiente. Para las frecuencias más bajas, la longitud de onda λ es del mismo orden de magnitud que $L \approx \sum_{n=1}^N l_n$, y la barra completa se excita. Pero cuando λ disminuye y llega a ser del orden de $l_1 = \frac{l}{1+\gamma}$, la barra más larga, la barra 1, se excita en un estado equivalente a su modo normal más bajo. El resto de las barras están fuera de resonancia, por lo que su amplitud disminuye a medida que se está más lejos de la barra 1. Por lo tanto, el estado se localiza alrededor de esta última. En cierto sentido esto era de esperarse ya que se está perturbando una estructura periódica para obtener un sistema unidimensional desordenado, que muestra siempre amplitudes de onda localizadas. Aumentando la frecuencia excitadora por Δ_1 , Ec. (3.5), la barra con longitud $l_2 = \frac{l}{1+2\gamma}$, esto es, la barra 2, se excitará ahora y el resto estará fuera de resonancia. Por lo tanto las amplitudes de las vibraciones disminuyen conforme su distancia a la barra 2 se incrementa. La amplitud de onda nuevamente está localizada pero ahora alrededor de la barra 2; ésta tiene una forma similar a la amplitud de onda que la barra 1 tenía antes, pero está ligeramente deformada, comprimida, y trasladada de la barra 1 a la barra 2. El mismo argumento se aplica cuando la barra n de longitud $l_n = \frac{l}{1+n\gamma}$ se excita.

Lo que se ha hecho es producir una EWS finita, esto es, N estados localizados con una diferencia de frecuencias constante dada por la Ec. (3.5). Sin embargo, existen más escaleras ya que modos normales con dos o más nodos también se pueden excitar en cada barra. Por ejemplo, tomando $j = 2$ en la Ec. (3.4) se obtiene una segunda escalera. Esta escalera es diferente de la primera debido a que la diferencia de frecuencias es ahora el doble que en la escalera más baja, como se ve de la Ec. (3.5). Los estados son nuevamente localizados y todos tienen una forma similar aunque comprimidos. Existe una tercera escalera con $\Delta_3 = 3\Delta_1$ y así para otros valores de j . Un argumento

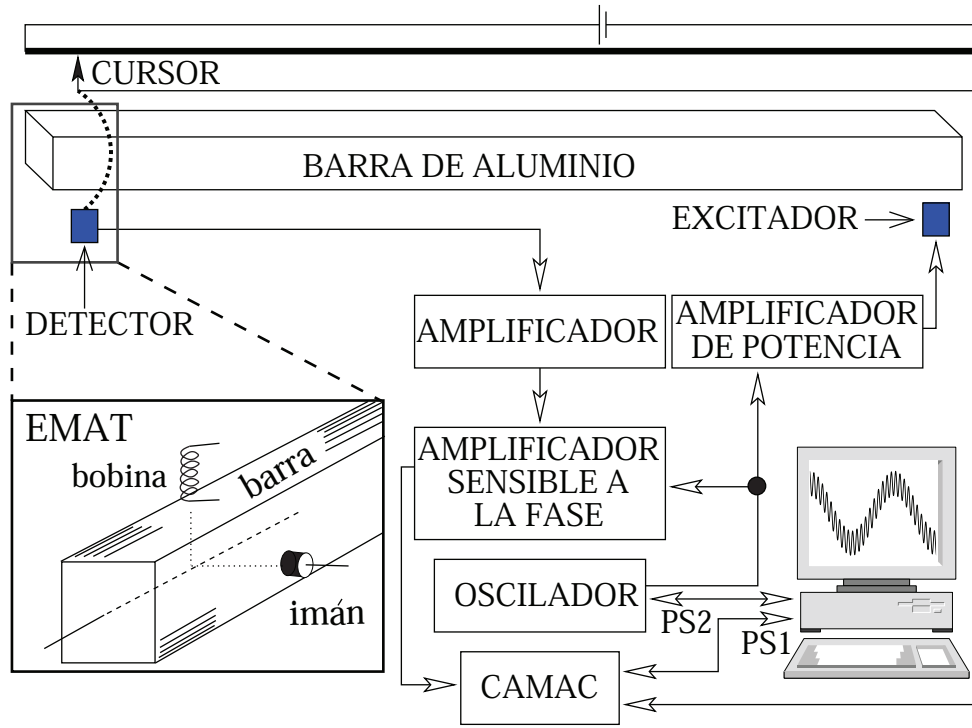


Figura 3.3: Diagrama de bloques del dispositivo experimental. Para el Sistema A tanto el detector como el excitador son EMATs, mientras que para el Sistema B el excitador fue un transductor piezoeléctrico, ver el apéndice C.2.

similar para el Sistema B muestra también la existencia de varias EWS. La diferencia entre las escaleras de la mecánica cuántica y las elásticas es que en las últimas el espaciamiento entre resonancias no es la misma para diferentes escaleras.

Se calcularon las propiedades de los eigenmodos de las barras de las Figs. 3.1 (a) y (b) con condiciones a la frontera de extremos libres usando el método de la matriz de transferencia para ondas torsionales, método discutido en la referencia [2] y desarrollado aquí en el apéndice B. Se midieron las frecuencias y las amplitudes de los modos normales usando el sistema experimental descrito en la Fig. 3.3. En los apéndices C.3 y C.4 se dan más detalles al respecto. Se usó un transductor electromagnético acústico (EMAT) que es muy versátil y funciona a bajas frecuencias. El EMAT consiste de un imán

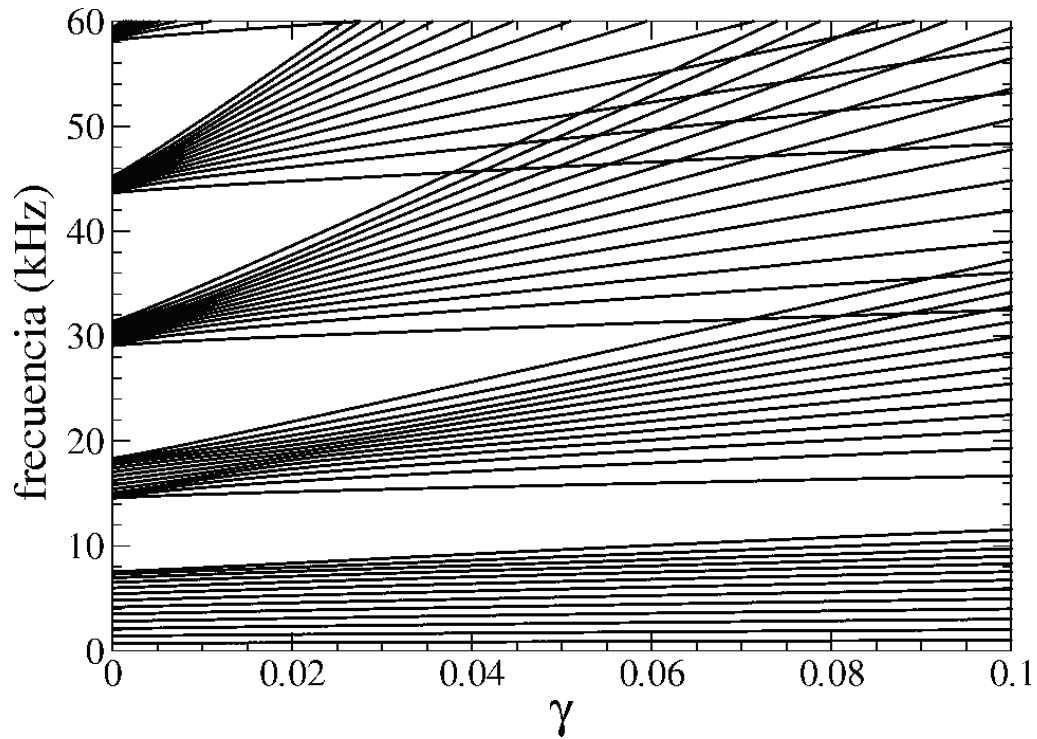


Figura 3.4: Frecuencias de los modos normales del Sistema A como función del parámetro adimensional γ .

permanente y una bobina y fue desarrollado recientemente en el Laboratorio de Vibraciones Elásticas³ [25]. Puede excitar o detectar selectivamente vibraciones compresionales, torsionales o flexionales. En el apéndice C.1 se discute en forma cualitativa el funcionamiento del EMAT como excitador y detector de vibraciones acústicas. En el recuadro de la Fig. 3.3 el EMAT se configuró para detectar vibraciones torsionales; véase la referencia [2].

³En el Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos.

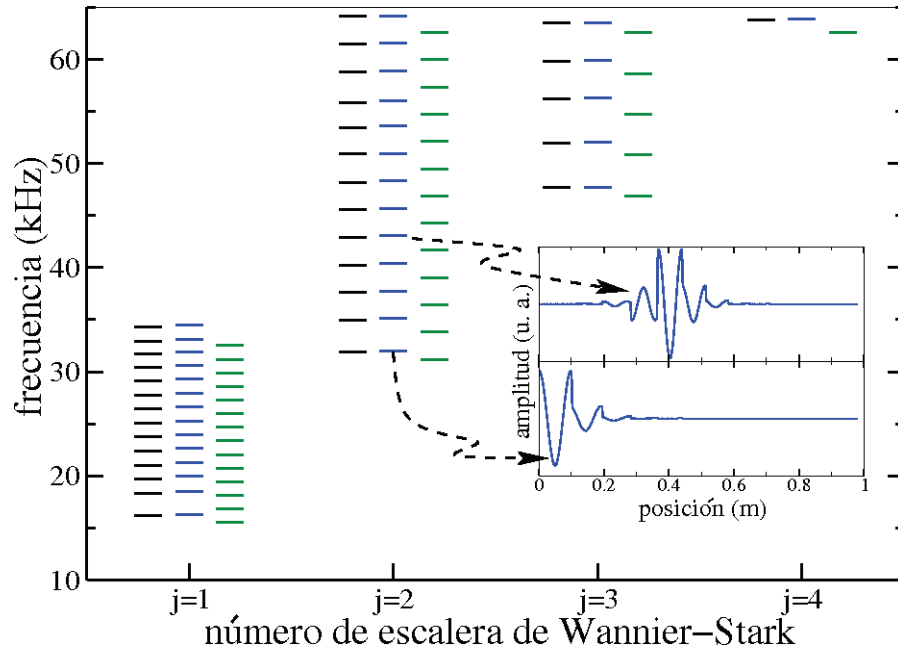


Figura 3.5: Frecuencias de los modos normales del Sistema A que dan el efecto de escalera elástica de Wannier-Stark. Para cada valor de j la columna de la izquierda corresponde a los valores experimentales, la columna de en medio al resultado numérico que se obtiene de emplear el método de la matriz de transferencia y la columna de la derecha muestra los resultados aproximados siguiendo el modelo de barra independiente. En los cálculos se usó un valor efectivo de r/R igual a 0.353 [2], ver el apéndice B. La incertidumbre en los valores experimentales es menor que 0.01%. En los recuadros se muestran las amplitudes de onda teóricas para un estado en el extremo de la escalera y otro en el centro de ésta.

En la Fig. 3.4 se muestra el espectro del Sistema A como función del parámetro adimensional γ . Como se mencionó anteriormente, para $\gamma = 0$ aparece un espectro de bandas, y conforme γ aumenta los niveles de cada banda se separan para formar la EWS. Las frecuencias de los modos normales de la barra que se muestra en la Fig. 3.1 (a) se dan en la Fig. 3.5 para $\gamma = 0.091$. En primer lugar hay que notar que los resultados teóricos coinciden muy bien con los experimentales. Además, el tratamiento cualitativo proporciona una primera aproximación bastante buena. Se puede ver de esta figura que los estados forman un conjunto de escaleras de Wannier-Stark, como se

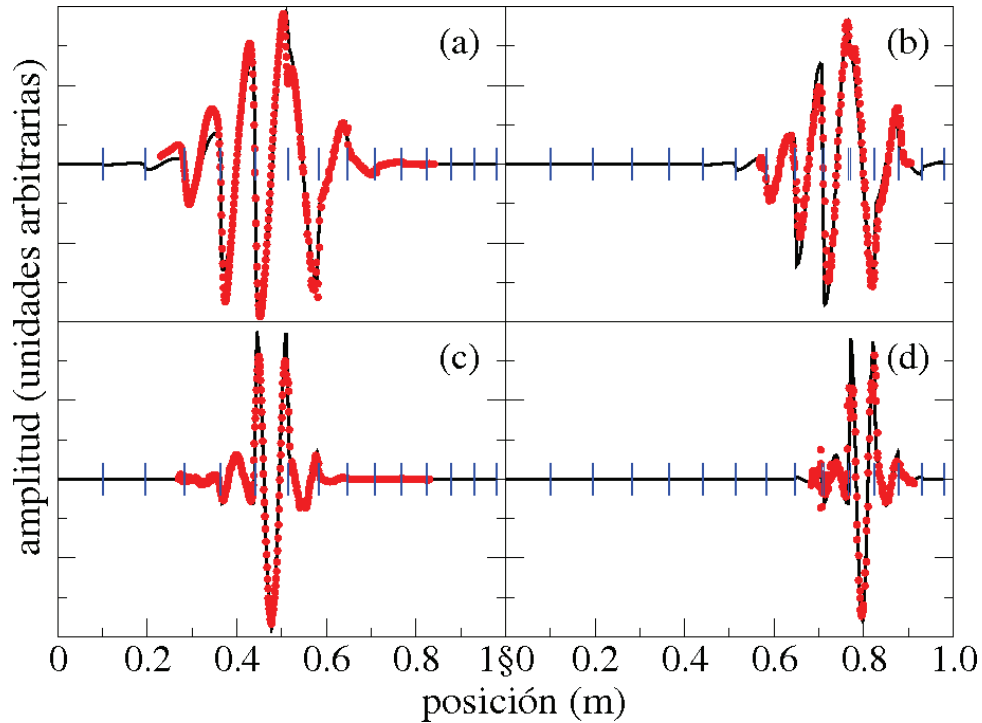


Figura 3.6: Sistema A: comparación de las amplitudes de onda experimentales (puntos) con las calculadas por el método de la matriz de transferencia (curva continua). Las líneas verticales indican la posición de los cuerpos cilíndricos pequeños (muescas).

discutió antes.

La primera banda compuesta por los modos extendidos no se muestra en esta gráfica. Nótese que las frecuencias en los extremos de cada escalera no tienen la misma diferencia en frecuencia como aquellas a la mitad de la escalera. Esto se debe al efecto de borde en las amplitudes de onda localizadas cerca de los extremos libres. Como se muestra en los recuadros de la Fig. 3.5 la amplitud en el borde carece de una porción de la amplitud de onda que los estados en el centro de la escalera tienen.

En la Fig. 3.6 se muestra la comparación de las amplitudes de onda teóricas y experimentales. Éstas se localizan alrededor de la barra n . Por ejemplo, en la Fig. 3.6 (a) la sexta barra resuena y en la Fig. 3.6 (b) otro estado

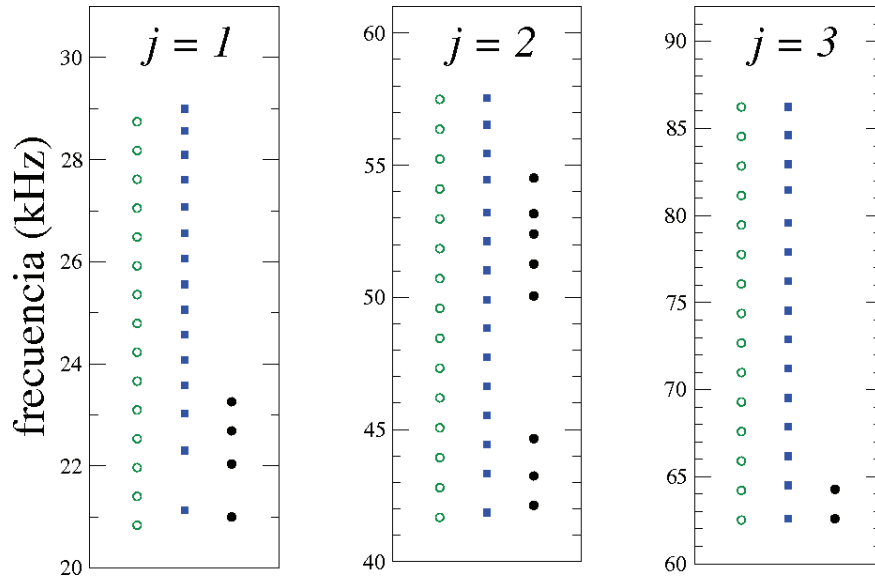


Figura 3.7: Frecuencias de resonancia del Sistema B para las tres primeras escaleras elásticas de Wannier-Stark. Para cada gráfica la columna izquierda: modelo de barra independiente, columna de en medio: método de la matriz de transferencia y columna de la derecha: medidas en el laboratorio.

correspondiente a la misma escalera está localizado alrededor de la décima barra. Ambas tienen la misma forma pero la (b) está más comprimida. Las Figs. 3.6 (c) y (d) muestran dos estados de la segunda escalera, con $n = 6$ y $n = 11$, respectivamente. La localización se observa nuevamente y, como era de esperarse, las amplitudes ahora muestran dos nodos en las barras que resuenan. Nótese el excelente acuerdo entre teoría y experimento después de ajustar la altura de la amplitud de onda teórica en un solo punto.

Como se mencionó anteriormente, el Sistema B muestra propiedades similares a las del Sistema A. En la Fig. 3.7 se muestra que las frecuencias de los modos normales forman un conjunto de escaleras de Wannier-Stark. En esta figura, la columna de la izquierda corresponde al modelo de barra independiente, la columna de en medio al cálculo con el método de la matriz de transferencia y la columna de la derecha a las medidas en el laboratorio. Sólo se midieron algunas frecuencias de resonancia, aquellas que eran candidatas para ilustrar algunas amplitudes de onda. Para este sistema, para cada valor de j hay $N = 15$ estados, $n = 1, 2, \dots, N$ numerados de abajo hacia arriba conforme

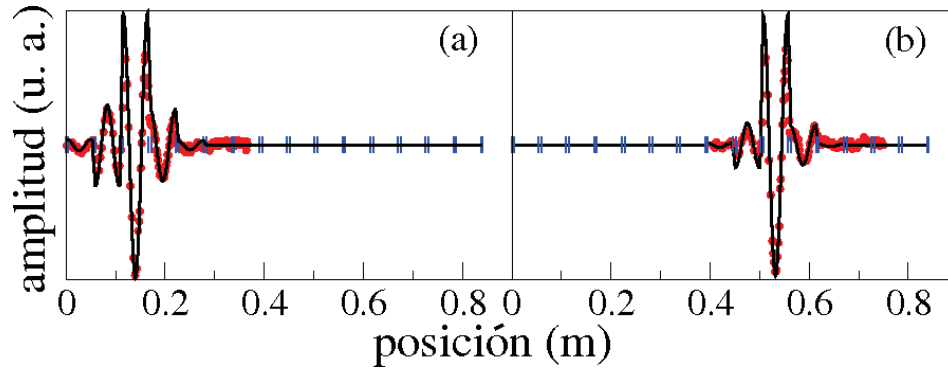


Figura 3.8: Dos amplitudes de onda del Sistema B; (a) una localizada en la tercera barra con frecuencia $f = 44.256$ kHz y (b) otra localizada en la décima barra con frecuencia $f = 51.258$ kHz. Las líneas verticales dobles a lo largo del eje de la barra indican la posición de las muescas.

crece la frecuencia y que corresponden a cada uno de los quince cuboides grandes como los ilustrados en la Fig. 3.1(b). Como en el Sistema A, aquí tampoco se muestran las frecuencias de resonancia de los modos extendidos. Éstos modos extendidos ocurren a bajas frecuencias para las que la longitud de onda λ es del mismo orden de magnitud que $L \approx lN$ y la barra en su conjunto se excita.

Después de un primer intervalo de frecuencias en que aparecen los modos extendidos, conforme crece la frecuencia y la longitud de onda λ es del orden de l , la longitud de los cuboides grandes, se empiezan a excitar los modos normales más bajos de la primera escalera de Wannier-Stark elástica, Ec. (A.2) con $j = 1$.

Como se mencionó anteriormente, el sistema B muestra propiedades similares. Se presentan en la Fig. 3.8, como un ejemplo, dos amplitudes de onda para la primera EWS del Sistema B. En contraste con el Sistema A, estas amplitudes de onda tienen casi la misma forma, pero están trasladadas y no están comprimidas. Nótese que el método de la matriz de transferencia unidimensional ajusta las amplitudes de onda experimentales a pesar del hecho que w y h_n no son mucho más pequeños que l .

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se presentó la construcción de dos sistemas elásticos que presentan algunas analogías con el fenómeno cuántico conocido como escaleras de Wannier-Stark (EWS). Es un ejemplo de un análogo clásico a un sistema cuántico. Dado que se han encontrado en sólidos y en sistemas ópticos, el haberlas encontrado también en sistemas elásticos, hace de las escaleras de Wannier-Stark un fenómeno unificador, presente en muchos sistemas físicos, clásicos y cuánticos.

Las ondas torsionales estudiadas para producir las EWS están caracterizadas por su espectro equiespaciado. Existen para números de escalera de Wannier-Stark $j \geq 1$ y las amplitudes de onda están localizadas. Como aplicaciones se puede pensar en una barra con una cierta estructura y formada por cierto número de cuerpos separados por otros cuerpos más pequeños que hacen las veces de acoplamiento entre los primeros. En este contexto dando un golpe en alguno de los cuerpos de dicha barra se obtiene una cierta frecuencia, la frecuencia propia del cuerpo que fue golpeado y que forma parte de dicha estructura. También se puede pensar en enviar una frecuencia específica a través de la mencionada barra con estructura y obtener como resultado la vibración de un determinado cuerpo de la misma.

En contraste con el análogo óptico de las referencias [7, 8, 9, 10] donde sólo pueden observar la intensidad de la función de onda, en este trabajo se observaron las EWS directamente como se muestra en las Figs. 3.6 y 3.8.

Además, se midieron por primera vez las amplitudes de onda, incluyendo sus fases (signo). Las amplitudes muestran localización. También se observaron escaleras de Wannier-Stark de orden superior.

Una continuación natural de este trabajo consiste en medir las oscilaciones de Bloch. Recordando lo mencionado en los capítulos 1 y 3, las oscilaciones de Bloch se refieren a un comportamiento que tienen los electrones en un cristal, los cuales están bajo la acción de un campo eléctrico estático externo: este campo estático produce un movimiento oscilatorio de los electrones dentro del cristal. La idea sería producir en el EMAT excitador una combinación de oscilaciones sinusoidales con diferentes frecuencias y estudiar su evolución en el tiempo para medir cómo van interfiriendo entre ellas a lo largo de la barra, con una cierta estructura, dando lugar a las oscilaciones de Bloch. Este estudio requeriría analizar la evolución en el tiempo de la propagación de ondas acústicas a través de una varilla.

Apéndice A

Diseño de los Sistemas A y B

El diseño y construcción de las dos barras elásticas especiales, llamadas Sistema A y Sistema B, cuyas ondas torsionales presentan analogías con las escaleras de Wannier-Stark se hizo empleando, como idea central, el modelo de barra independiente que se presenta aquí y usando el método de la matriz de transferencia que se presenta en el apéndice B.

A.1. Modelo de barra independiente

Lo que caracteriza a las escaleras de Wannier-Stark es que un sistema periódico en presencia de un campo eléctrico estático externo, tiene un espectro de energías equidistantes y con amplitudes de onda localizadas en cada uno de los pozos de potencial. En el análogo acústico que aquí se presenta, lo que se busca es que las frecuencias de resonancia de los modos normales sean equidistantes y que las amplitudes de onda se vayan localizando en cada uno de los cuerpos de la barra.

Las barras que se diseñaron se presentan en la Fig. 3.1. Cabe mencionar que cada una de las barras está maquinada a partir de una sola pieza de aluminio y que se les dio la forma empleando un torno o una fresadora. Las descripciones que se dan a continuación son para hacer de ellas un estudio sistemático. A la primera de las barras se le llamará Sistema A, Fig. 3.1 (a),

y consiste de un conjunto de N barras circulares de radio R con longitud variable l_n , $n = 1, 2, \dots, N$ y separadas por pequeños cilindros de longitud $\epsilon \ll l_n$ y radio $r < R \ll l_n$. Éste es el análogo acústico de la referencia [1] donde se usó un sistema óptico con anchos variables. A la segunda barra se le llamará Sistema B, Fig. 3.1 (b), y consiste de una barra rectangular formada por N cuboides¹ grandes de ancho constante w y longitud constante l . Tienen diferentes alturas h_n para $n = 1, 2, \dots, N$; con $w, h_n \ll l$. Estos cuboides están separados por otros pequeños cuboides de dimensiones $h', w', \epsilon' \ll l$. Éste es el análogo elástico de los sistemas ópticos con un gradiente en el índice de refracción a lo largo de la dirección de propagación que se usó en las referencias [8, 9, 10]. Ambas barras se maquinaron a partir de una pieza sólida de aluminio y más adelante se explica el procedimiento para hacerlas.

A fin de diseñar las dos barras que se emplearon, se discute aquí lo que podría llamarse un modelo de barra independiente en el cual cada uno de los cuerpos grandes que forman una barra oscila en forma independiente del resto. Para cada uno de los n cuerpos con longitud l_n que forman la barra, se tiene una expresión para las frecuencias de las ondas torsionales en modos normales $f_j^{(n)}$, con velocidad de onda torsional c_n y j nodos en la amplitud de onda en el cuerpo n . Dicha expresión para las frecuencias se tomó de la ecuación: $f = \frac{c}{2L}j$, Ec. (2.27), agregándole los índices apropiados, de la siguiente manera:

$$f_j^{(n)} = \frac{c_n}{2l_n}j. \quad (\text{A.1})$$

A partir de la Ec. (A.1) se puede obtener un conjunto de frecuencias de resonancia equidistantes considerando dos casos: se toma una velocidad de onda fija, $c_n = \text{constante} \forall n$, y se varía la longitud l_n ; o se toma una longitud fija, $l_n = \text{cte} \forall n$, y se varía la velocidad de la onda c_n . Para el Sistema A se tomaron barras circulares con longitudes $l_n = l/(1 + n\gamma)$, $n = 1, 2, \dots, N$ y $c_n \equiv c_o = \sqrt{G/\rho}$ donde ρ es la densidad, G es el módulo de corte; l es una longitud inicial arbitraria. Como ya se dijo arriba, en barras circulares

¹En este trabajo se empleará el término cuboide haciendo una traducción libre del inglés *cuboid*. **1:** *approximately cubical in shape* or **2:** *like a cube, a rectangular solid contained by parallelograms*. En español los cuerpos geométricos que forman el Sistema B deben ser referidos como: paralelepípedos grandes con sección transversal rectangular de ancho constante w y longitud constante l , etc. y paralelepípedos pequeños con sección transversal rectangular de dimensiones $h', w', \epsilon' \ll l$. Lo anterior es una buena razón para usar: cuboide.

la velocidad no depende del radio. Para el Sistema B se tomó $l_n = l$ y $c_n = c(1 + n\gamma)$, con c una velocidad constante arbitraria. El parámetro γ es adimensional en ambos casos.

Entonces, sustituyendo en la Ec. (A.1), $l_n = l/(1 + n\gamma)$ y $c_n = \sqrt{G/\rho}$ para el Sistema A y sustituyendo $l_n = l$ con $c_n = c(1 + n\gamma)$ para el Sistema B se obtiene:

$$f_j^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{G}{\rho}}(1 + n\gamma)j/2l & \text{para el Sistema A} \\ c(1 + n\gamma)j/2l & \text{para el Sistema B,} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

y las diferencias $\Delta f_j^{(n)} = f_j^{(n+1)} - f_j^{(n)}$ son iguales a:

$$\Delta_j \equiv \Delta f_j^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{G}{\rho}}\gamma j/2l & \text{para el Sistema A} \\ c\gamma j/2l & \text{para el Sistema B,} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

las cuales son independientes del índice n , el número de cuerpo en la barra. En cada caso, para una l y una j dados, los valores Δ_j sólo dependen del valor del parámetro adimensional γ . Antes se dijo que las energías entre niveles consecutivos en las escaleras de Wannier-Stark dependían de la intensidad del campo eléctrico estático externo bajo el cual estaba sometido el electrón. En el caso elástico γ hace las veces del campo eléctrico. Si $\gamma = 0$ en Ec. (A.2) se obtiene una barra localmente periódica [2] y los estados son extendidos. Si $\gamma \neq 0$ se obtienen las escaleras de Wannier-Stark elásticas y los estados son localizados.

A.2. Construcción del Sistema A

A partir de los valores seleccionados para obtener las frecuencias apropiadas: $l = 10.8$ cm y $\gamma = 0.091$, se calcularon las longitudes $l_n = l/(1 + n\gamma)$ de los diferentes cuerpos. Por experiencia en el laboratorio se sabe que dejando como separación entre los cuerpos de longitud l_n otras barras más pequeñas de longitud $\epsilon = 2.52$ cm y radio $r = 2.415$ mm, se consigue que cada uno de los cuerpos de longitud l_n quede débilmente acoplado con el resto, comportándose el sistema como un modelo de cuerpo independiente para cada l_n . En la Tabla (A.1) se muestran los valores medidos de l_n que se obtuvieron. La máxima discrepancia entre el valor calculado de l_n y el medido es

de 0.1 mm. Cada uno de estos cuerpos de longitud l_n está separado de su contiguo por la cantidad $\epsilon = 2.52$ cm. Para los cálculos con el método de la matriz de transferencia se midió la velocidad de las ondas torsionales en una barra redonda de la misma aleación que la barra de la Fig. 3.1 (a) obteniendo el valor experimental² de $c_n \equiv c_o^{exp} = 3104.7$ m/s. Cuando se discute más abajo el Sistema B se explica como se miden estas velocidades.

Cuadro A.1: Longitudes medidas de los cuerpos cilíndricos grandes del Sistema A, Fig. 3.1 (a).

Número de cuerpo cilíndrico (n)	l_n (cm)
1	9.90
2	9.14
3	8.48
4	7.92
5	7.42
6	6.99
7	6.60
8	6.25
9	5.94
10	5.66
11	5.40
12	5.16
13	4.95
14	4.75

Para el proceso de maquinado se utilizó un torno con reglas numéricas en sus dos ejes de movimiento. Se tomó una barra redonda de diámetro 12.85 cm y se le fueron haciendo los cuerpos con las longitudes l_n previamente calculadas y dejando como separaciones las pequeñas barras de longitud $\epsilon = 2.52$ cm y radio $r = 2.415$ mm. Las coordenadas que dan la posición de los cambios de área (s o S) o de radio (r o R) para los diferentes cuerpos de acuerdo a los valores de z_i en la Fig. B.1 se presentan en la Tabla (A.3). Estos valores son los que se usan para implementar el método de la matriz de transferencia.

²Este valor de la velocidad también se usa para los cuerpos cilíndricos pequeños en el cálculo con el método de la matriz de transferencia. Por diseño todos los cuerpos cilíndricos pequeños tienen las mismas dimensiones: radio $r = 2.415$ mm y largo $\epsilon = 2.52$ cm, excepto en los extremos de la barra donde la longitud es $\epsilon/2$.

Cuadro A.3: Coordenadas de los cambios de radio de la barra del Sistema A, donde $z_0 = 0$ y $z_{2n+1}=L$, Fig B.1. Como $i = 2n + 1$, con $i = 29$ se obtiene $n = 14$, que es el número de cilindros de radio R . En la Fig. 3.1 (a) y la Fig. B.1 sólo se muestran diez de éstos.

i	$z_i(\text{mm})$
0	0
1	1.32
2	100.278
3	102.778
4	194.142
5	196.622
6	281.458
7	283.918
8	363.166
9	365.626
10	439.921
11	442.381
12	512.269
13	514.729
14	580.718
15	583.178
16	645.586
17	648.056
18	707.543
19	710.003
20	766.543
21	769.003
22	822.978
23	825.428
24	877.041
25	879.491
26	928.945
27	931.415
28	978.913
29	980.233

A.3. Construcción del Sistema B

Dado que la velocidad de propagación de las ondas torsionales depende, en general, del momento polar de inercia respecto al eje de la barra se vio la posibilidad de diseñar una segunda barra a la que se le fuera cambiando el área de la sección transversal. En consecuencia, el momento polar de inercia cambia y por lo tanto la velocidad de propagación de las ondas torsionales.

Como se dijo arriba, la sección transversal de este sistema es un rectángulo que va aumentando su área conforme vamos pasando de izquierda a derecha por cada uno de los cuboides que forman la barra. Por sencillez y por razones de fabricación de la barra se escogió que sólo una de las dimensiones de los rectángulos fuera cambiando. Se eligió la altura h mientras que su ancho w se mantiene constante; de esta manera, el n -ésimo cuboide tendrá un área dada por el producto $h_n w$. Se escogió que las velocidades de los diferentes cuboides estén dadas por $c_{\square(n)} = c(1 + n\gamma)$, y para calcular estas velocidades se reescribieron las Ecs. (2.14), (2.15) y (2.10) en términos de un índice n que numera los cuboides³ para los que va aumentando h_n , y por lo tanto $c_{\square(n)}$, mientras w se mantiene constante. Entonces, para la Ec. (2.14), se tiene que:

$$c_{\square(n)} = c_o \sqrt{\frac{\alpha_n}{I_n}}, \quad (\text{A.4})$$

donde $c_o = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ es la velocidad de la onda torsional en una barra redonda y no tiene el índice n porque como ya se vio en el Cap. 2 esta velocidad no depende del radio de la barra. También en relación a la ecuación anterior, la Ec. (2.15) toma la forma:

$$\alpha_n = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{h_n w}{\left[\frac{2m+1}{h_n}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}. \quad (\text{A.5})$$

³La expresión que se obtiene para la velocidad también se usa para los cuboides pequeños en el cálculo con el método de la matriz de transferencia. Por diseño todos los cuboides pequeños tienen las mismas dimensiones: lados $w' = 5.0$ mm, $h' = 5.0$ mm y largo $\epsilon' = 6.0$ mm, excepto en los extremos que es $\epsilon'/2$.

Finalmente, para el momento polar de inercia, de la Ec. (2.10), tenemos

$$I_n = \frac{h_n w^3 + h_n^3 w}{12}. \quad (\text{A.6})$$

Al sustituir $c_{\square(n)} = c(1 + n\gamma)$ en la Ec. (A.4), los valores de h_n se obtienen de resolver la ecuación:

$$c(1 + n\gamma) = c_o \sqrt{\frac{\alpha_n}{I_n}}, \quad (\text{A.7})$$

esto es, sustituyendo las Ecs. (A.5) y (A.6) en la Ec. (A.7):

$$c(1 + n\gamma) = c_o \sqrt{\frac{\frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{h_n w}{\left[\frac{2m+1}{h_n}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}}{\frac{h_n w^3 + h_n^3 w}{12}}}. \quad (\text{A.8})$$

Hay que recordar que en la Ec. (A.8) c , γ y w son valores fijos conocidos pero no así c_o , la velocidad de una onda torsional para una barra redonda. Ante la opción de determinar los valores de ρ y de G para calcular $c_o = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, lo que se hizo en este trabajo fue tomar una barra redonda de aluminio de la misma aleación que la barra de la Fig.3.1 (b) y medir c_o , esto es, se determinó c_o^{exp} . Se tomó una barra redonda de aluminio de longitud $L = 1.005$ m de largo y 1/2" de diámetro y se excitaron y detectaron ondas torsionales. Empleando la Ec. (2.27) formamos la ecuación: $f = \frac{c_o^{exp}}{2L} j$, donde f es la frecuencia de los modos normales de oscilación torsional, j el número de nodos de la amplitud de onda y L la longitud de la barra. Graficando “ f vs j ”, Fig. A.1;⁴ se puede calcular: $c_o^{exp} = 3190.1$ m/s.

Con este último dato reescribimos la Ec. (A.8) que finalmente permite calcular los valores h_n , esto es:

$$c(1 + n\gamma) = c_o^{exp} \sqrt{\frac{\frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{h_n w}{\left[\frac{2m+1}{h_n}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}}{\frac{h_n w^3 + h_n^3 w}{12}}}. \quad (\text{A.9})$$

⁴En la Fig. A.1 el origen de la gráfica corresponde al hecho de que la barra esté en reposo, situación que es solución de la ecuación diferencial.

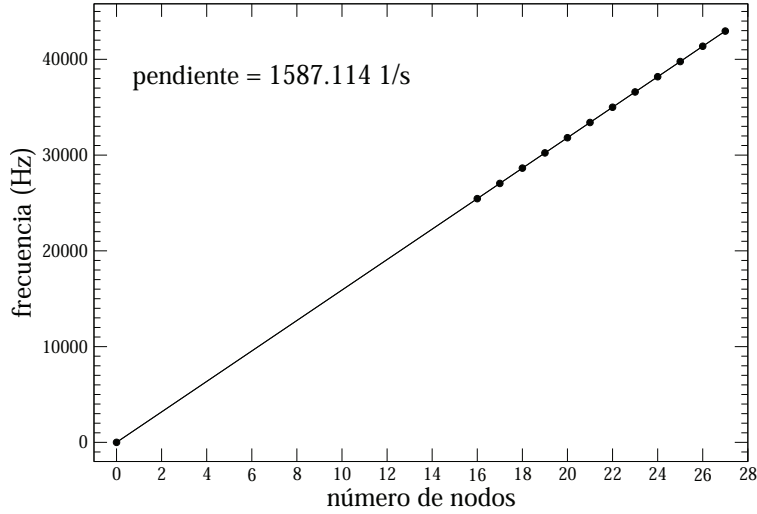


Figura A.1: Determinación de la velocidad de la onda torsional, c_{\circ}^{exp} , en una barra redonda de radio $R = 1/2''$ y longitud $L = 1.005$ m. Excepto el cero, los puntos son las frecuencias de resonancia medidas y la línea continua es un ajuste por mínimos cuadrados.

Cambiar el área de la sección transversal ($h_n w$) de los cuboides es lo que hace que vaya cambiando la velocidad de la onda torsional a lo largo de la barra. A manera de ejemplo se indica cómo calcular los dos primeros valores de h_n .

La velocidad del primer cuboide, $n = 1$, partiendo de la velocidad arbitraria $c = 2027.3$ m/s, el parámetro adimensional $\gamma = 0.02786$ y de la expresión $c_{\square(n)} = c(1 + n\gamma)$ es: $c_{\square(1)} = c(1 + \gamma) = 2083.8$ m/s y para una $w = 1.905$ cm que se mantiene fija para todos los cuboides que forman la barra. Su altura h_1 se obtiene de resolver la ecuación $c_{\square(1)} = c_{\circ}^{exp} \sqrt{\frac{\alpha_1}{I_1}}$, esto es:

$$c_{\square(1)} = c_{\circ}^{exp} \sqrt{\frac{\frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{h_1 w}{\left[\frac{2m+1}{h_1}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}}{\frac{h_1 w^3 + h_1^3 w}{12}}}$$

Esto se hace utilizando la instrucción de Mathematica:

$$\text{Solve} \left[c_{\square(1)} == c_{\circ}^{exp} \sqrt{\frac{\alpha_1}{I_1}}, h_1 \right],$$

de donde se obtiene que $h_1 = 0.781$ cm.

Ahora se quiere que la velocidad del segundo cuboide tenga el valor dado por: $c_{\square(2)} = c(1 + 2\gamma) = 2140.3$ m/s, así que su altura h_2 se obtiene de resolver la ecuación $c_{\square(2)} = c_o^{exp} \sqrt{\frac{\alpha_2}{I_2}}$, esto es:

$$c_{\square(2)} = c_o^{exp} \sqrt{\frac{\frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{h_2 w}{\left[\frac{2m+1}{h_2}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}}{\frac{h_2 w^3 + h_2^3 w}{12}}},$$

y usando análogamente la misma instrucción de Mathematica se obtiene el valor $h_2 = 0.812$ cm.

Para calcular los valores h_n en las expresiones que se dan arriba fue suficiente

hacer las sumas con los ocho primeros términos, $\sum_{m=0}^7 \sum_{p=0}^7$. Al resolver las

ecuaciones se obtienen cien raíces, cuatro valores reales y el resto son números imaginarios. Las cuatro raíces reales tienen dos valores repetidos, uno menor que otro, y aparecen positivos y negativos; de éstos, el menor positivo es el que se toma como la altura h_n del n -ésimo cuboide y es el valor que se reporta, ya que ocurre que este valor hace que la velocidad de la onda torsional vaya aumentando conforme n crece. El otro valor positivo hace que la velocidad vaya disminuyendo.

Los valores de las velocidades $c_{\square(n)}$, las alturas h_n calculadas y las alturas h_n medidas para la barra del Sistema B se presentan en la Tabla (A.4).

Para maquinar el Sistema B se partió de una barra de aluminio cuadrada de una pulgada por lado. Se comprenderá que resultó más laborioso hacer este sistema que el Sistema A. Usando una fresadora y varias piezas de apoyo hechas ex profeso para ajustar los desniveles que iba teniendo la barra en el proceso de maquinado, se fueron rebajando dos de los lados, uno opuesto del otro, de la barra cuadrada original para formar los cuboides de igual longitud pero con alturas que iban aumentando a lo largo de la barra y separados por la misma distancia uno del otro.⁵ Como se puede ver en la Tabla (A.4) la

⁵Tanto la barra del Sistema A como la del Sistema B las hizo el maestro mecánico Sr. Eladio Ortíz en el taller del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos.

Cuadro A.4: Velocidades calculadas y alturas calculadas y medidas, para los cuboides grandes del Sistema B, Fig. 3.1 (b).

Número de cuboide (n)	$c_{\square(n)}$ (m/s)	h_n calculada (cm)	h_n medida (cm)
1	2,083.8	0.781	0.784
2	2,140.3	0.812	0.818
3	2,196.7	0.845	0.844
4	2,253.2	0.880	0.882
5	2,309.7	0.916	0.916
6	2,366.2	0.955	0.960
7	2,422.7	0.996	0.982
8	2,479.1	1.039	1.040
9	2,535.6	1.087	1.072
10	2,592.1	1.139	1.142
11	2,648.6	1.196	1.194
12	2,705.1	1.270	1.258
13	2,761.5	1.338	1.334
14	2,818.0	1.432	1.428
15	2,874.5	1.562	1.578

mínima discrepancia entre la altura calculada y la medida es cero para h_5 y la máxima es de -0.016 cm para h_{15} . El valor medido de w es $w_{med} = 1.905$ cm y el de la longitud de la barra es de 84.0 cm. Como se verá en los resultados, estas discrepancias no fueron ningún problema para conseguir un excelente acuerdo entre teoría y experimento.

Para el Sistema B, las coordenadas z_i que dan la posición de los cambios de área (s o S) de la sección transversal para los diferentes cuboides de acuerdo a la Fig. B.2 se presentan en la Tabla (A.6). Estos valores son los que se usan para implementar el método de la matriz de transferencia.

Los valores medidos de z_i se hicieron con una cinta métrica graduada en milímetros (flexómetro), las fracciones de milímetros que se reportan para algunos valores son cifras estimadas y se puede decir que un ojo entrenado puede hacer lecturas con una incertidumbre de ± 0.2 mm. El valor de z_i

con un asterisco (*) en la Tabla A.6 y que corresponde a $z_{12} = 333$ mm indica que la barra en ese punto tiene un ligero defecto, el extremo opuesto a ese punto tiene una reducción de aproximadamente 2 mm como parte de un error accidental en el proceso de maquinado. Como se puede observar de la comparación entre teoría y experimento, tanto para las frecuencias de resonancia como para las amplitudes de onda medidas, el pequeño defecto en z_{12} y las pequeñas discrepancias en z_{21} , z_{26} , z_{27} , z_{28} , z_{29} , z_{30} y z_{31} entre las z_i 's calculadas y medidas no influyen significativamente en los resultados.

Cuadro A.6: Coordenadas z_i que dan la posición de los cambios de área (s o S) de la sección transversal para los diferentes cuboides de acuerdo a la Fig. B.2, donde $z_0 = 0$ y $z_{2n+1} = L$. Como $i = 2n + 1$, con $i = 31$ se obtiene $n = 15$, que es el número de cuboides de dimensiones: $l = 5.0$ cm, $w = 1.905$ cm y h_n . En la Fig. 3.1 (b) y en la Fig. B.2 sólo se muestran diez de éstos. El valor con asterisco se explica en el texto.

i	z_i calculada (mm)	z_i medida (mm)
0	0	0
1	3	3
2	53	53
3	59	59
4	109	109
5	115	115
6	165	165
7	171	171
8	221	221
9	227	227
10	277	277
11	283	283
12	333	333 *
13	339	339
14	389	389
15	395	395
16	445	445
17	451	451
18	501	501
19	507	507
20	557	557
21	563	562.8
22	613	613
23	619	619
24	669	669
25	675	675
26	725	724.6
27	731	730.8
28	781	780.8
29	787	786.8
30	837	836.5
31	840	839.5

Apéndice B

Método de la matriz de transferencia

El análisis que se hizo de los Sistemas A y B en el apéndice A está basado en el cálculo aproximado llamado modelo de barra independiente. En este apéndice se presenta el método de la matriz de transferencia, mismo que se empleó para el diseño de los Sistemas A y B. Variando los parámetros involucrados se optimizaron los valores de las longitudes de las barras, el tamaño de los cuerpos, la separación entre ellos y en general todas las demás dimensiones involucradas para finalmente mandar construir las barras al taller mecánico del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos.

Los cálculos de las frecuencias de los modos normales de oscilación torsional y de las amplitudes de onda correspondientes se hicieron con la técnica de la matriz de transferencia. Primero se presenta la forma como se analizaron el Sistema A y el Sistema B para posteriormente mostrar la manera en que se hacen los cálculos.

La barra llamada Sistema A se analizó como formada por N celdas, cada una formada por tres cuerpos cilíndricos: un cuerpo central que va disminuyendo su longitud conforme recorremos la barra de izquierda a derecha y en sus extremos dos cuerpos siempre de longitud $\frac{\epsilon}{2}$, ver Fig. B.1. En dicha figura S y R son respectivamente el área de la barra y su radio; y s y r son respectivamente el área de los cilindros pequeños y su radio. La longitud de cada celda

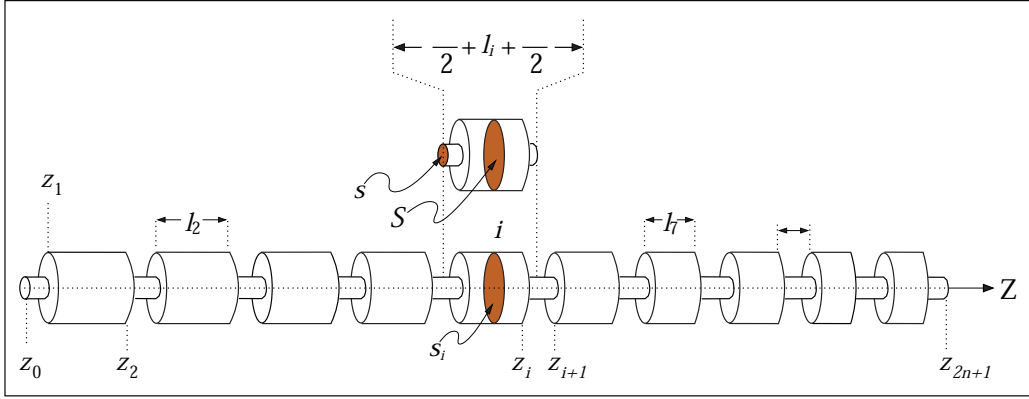


Figura B.1: Geometría de la barra llamada Sistema A. Aquí z_i denota la posición de los cambios de radio y s_i es el área (s o S) de la sección transversal del i -ésimo cilindro de radio r_i (r o R). Se toma $z_0 = 0$ y $z_{2n+1} = L$.

está dada por: $\frac{\epsilon}{2} + l_i + \frac{\epsilon}{2}$. Este Sistema A se comporta en forma unidimensional ya que $R \ll l_i$, siendo l_i la longitud de la barra i y $R \ll \lambda = 2\pi/k$, con λ la longitud de onda del modo normal de oscilación torsional y k su número de onda.

La barra llamada Sistema B se analizó como si estuviera formada por un arreglo de N celdas unitarias de igual longitud, cada una de ellas formada por tres cuboides, ver Fig (B.2), donde la altura del cuboide que está en el centro de la celda unitaria va aumentado conforme recorremos la barra de izquierda a derecha. El área de la sección transversal de los cuboides pequeños es s y el área de la sección transversal de los otros cuboides es S . La longitud de cada celda unitaria está dada por: $\frac{\epsilon'}{2} + l + \frac{\epsilon'}{2}$. Este Sistema B también se comporta en forma unidimensional ya que $w, h_n \ll l$ y $l \ll \lambda$.

En un esquema muy general para cualquiera de los dos sistemas, Fig. B.3, la amplitud de onda en el cilindro i para el Sistema A o para el cuboide i en el Sistema B se toma de la ecuación: $\varphi(z, t) = \phi(z)e^{i\omega t}$, Ec. (2.19); y de la ecuación: $\phi(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz}$, Ec. (2.24); agregándoles el subíndice i , esto es, respectivamente:

$$\varphi_i(z, t) = \phi_i(z)e^{i\omega t}, \quad (\text{B.1})$$

$$\phi_i(z) = A_i e^{ik(z-z_{i-1})} + B_i e^{-ik(z-z_{i-1})} \quad (\text{B.2})$$

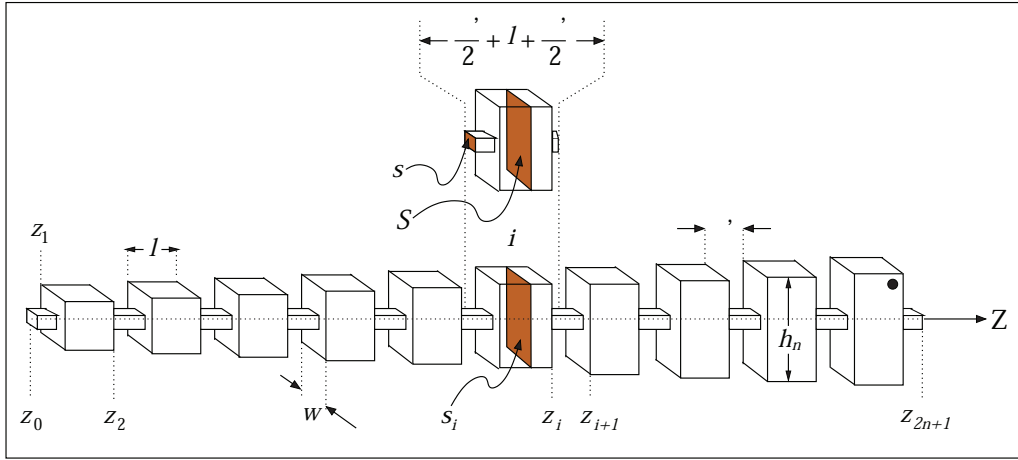


Figura B.2: Geometría de la barra llamada Sistema B. Aquí z_i denota la posición de los cambios del área s_i (s o S) de la sección transversal del i -ésimo cuboide, ya sea de lados w', h' (no mostrados y con $h' = w'$) o de lados w, h_n . Se toma $z_0 = 0$ y $z_{2n+1} = L$. El significado del punto negro en la parte superior del cuerpo de la extrema derecha se explica en el apéndice C.2.

para $z_{i-1} \leq z \leq z_i, i = 1, 2, \dots, 2n+1$; donde no hay que confundir la $i = \sqrt{-1}$ en la exponencial con la i del i -ésimo cuerpo de la barra. Las condiciones de continuidad en $z = z_i$ son las siguientes:

1) Que la amplitud de onda en z_i en un cuerpo sea igual a la amplitud de onda, también en z_i , en el cuerpo que sigue significa que:

$$\begin{aligned} \varphi_i|_{z_i} = \varphi_{i+1}|_{z_i} &\Rightarrow e^{i\omega t} \phi_i|_{z_i} = e^{i\omega t} \phi_{i+1}|_{z_i} \Rightarrow \\ \phi_i|_{z_i} &= \phi_{i+1}|_{z_i}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

misma condición que la satisfacen tanto el Sistema A como el Sistema B.

2) Que el momento de torsión que ejerce un cuerpo en z_i sobre el cuerpo contiguo, también en z_i , sean iguales entre si, significa que:

$$M_T|_{z_i} (\text{cuerpo } i) = M_T|_{z_i} (\text{cuerpo } i + 1). \quad (\text{B.4})$$

Se toma aquí la estrategia de empezar analizando la segunda ecuación de continuidad para cada uno de los Sistemas. Para el Sistema A: Ec. (2.3):

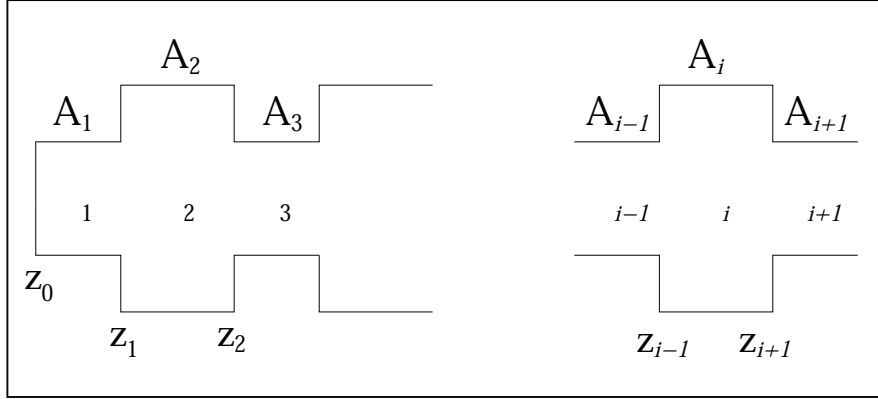


Figura B.3: Esquema general para los Sistemas A y B.

$M_T = IG \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, y considerando que cada cuerpo cilíndrico tiene sus propios valores de I y φ , esto significa que: $M_T = I_i G \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}$ y empleando la Ec. (B.1): $M_T = I_i G \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = e^{i\omega t} I_i G \frac{d\phi_i}{dz}$. Tomando en cuenta lo anterior la Ec. (B.4) significa que, para el cuerpo i y para el cuerpo $i + 1$, respectivamente:

$$M_T|_{z_i} = e^{i\omega t} I_i G \left. \frac{d\phi_i}{dz} \right|_{z_i} \quad y \quad M_T|_{z_i} = e^{i\omega t} I_{i+1} G \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z_i}, \quad (\text{B.5})$$

donde $I_i = (\pi/2) r_i^4$ es el momento polar de inercia para una sección transversal circular de radio r_i que gira alrededor de un eje que pasa por su centro; análogamente $I_{i+1} = (\pi/2) r_{i+1}^4$. Sustituyendo estos valores en la Ec. (B.5) y los resultados a su vez sustituidos en la Ec. (B.4), se obtiene la segunda ecuación de continuidad para el Sistema A:

$$r_i^4 \left. \frac{d\phi_i}{dz} \right|_{z_i} = r_{i+1}^4 \left. \frac{d\phi_{i+1}}{dz} \right|_{z_i}. \quad (\text{B.6})$$

En la Ec. (B.6) se puede formar el cociente:

$$\frac{r_i^4}{r_{i+1}^4} = \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4, \quad (\text{B.7})$$

y definir:

$$\eta^A = \frac{r_i}{r_{i+1}} \quad (\text{B.8})$$

para reescribir la Ec. (B.7) de la siguiente manera:

$$(\eta^A)^4 \left. \frac{d\phi_i}{dz} \right|_{z_i} = \left. \frac{d\phi_{i+1}}{dz} \right|_{z_i}. \quad (\text{B.9})$$

La utilidad de estas últimas expresiones se ve un poco más adelante en este trabajo, en los cálculos aparece el cociente de la Ec. (B.7).

Es importante destacar que la condición de continuidad expresada en la Ec. (B.6) es aproximada ya que en z_i la amplitud de onda φ es función tanto de z como de la coordenada radial, lo que hace que en z_i la condición de continuidad esté mezclada. Este hecho ya había sido notado por el Grupo de Vibraciones Elásticas en el curso de los trabajos sobre modos normales en barras con estructuras periódicas y fue reportado en la referencia [2].

La discrepancia que encontramos entre valores teóricos y experimentales para una barra localmente periódica se resolvió considerando un “valor efectivo” para η^A , esto es, se consideró una η_{ef}^A . Entonces, en lugar de usar en los cálculos una η^A real, medida sobre la barra se usó un valor dado por:

$$\eta_{\text{ef}}^A = \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)_{\text{ef}}, \quad (\text{B.10})$$

donde de acuerdo al modelo desarrollado en [2] y en relación a la Ec. (B.9) se obtuvo que:

$$(\eta_{\text{ef}}^A)^4 = \frac{(\eta^A)^4}{1 + \sigma/\epsilon} \quad \text{o} \quad \eta_{\text{ef}}^A = \frac{\eta^A}{(1 + \sigma/\epsilon)^{1/4}} \quad (\text{B.11})$$

donde σ es una constante que no depende del módulo de corte y ϵ es la longitud de los cuerpos cilíndricos pequeños de radio r en el Sistema A, Fig. 3.1 (a) o Fig. B.1.

Para el Sistema A, las Ecs. (B.8) y (B.10), en términos de los radios r y R se traducen en:¹

$$\eta^A = \frac{r}{R} \quad \text{y} \quad \eta_{\text{ef}}^A = \left(\frac{r}{R} \right)_{\text{ef}}$$

¹Al recorrer la barra de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, siempre se inicia con un cuerpo cilíndrico pequeño de radio r . Por esta razón se hace referencia al cociente r/R en relación al cociente r_i/r_{i+1} cuando se recorre la barra como se indicó.

y por lo tanto la Ec. (B.11) toma la forma:

$$\left(\frac{r}{R}\right)_{\text{ef}} = \frac{\left(\frac{r}{R}\right)}{(1 + \sigma/\epsilon)^{1/4}}. \quad (\text{B.12})$$

Con el valor para σ de 0.88 mm [2] y con los valores de $\epsilon = 2.52$ mm, $r = 2.415$ mm y $R = 6.425$ mm se obtiene para el Sistema A un valor de $\left(\frac{r}{R}\right)_{\text{ef}} = 0.349$, mismo que se incorporó en los cálculos con el método de la matriz de transferencia.

Retomando la segunda ecuación de continuidad, Ec. (B.4), pero ahora aplicada al Sistema B, escribimos la Ec. (2.9): $M_T = G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ de la forma:

$$M_T = G\alpha_{h,w} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{B.13})$$

donde se reescribió α como $\alpha_{h,w}$ para recordar que su valor depende de las dimensiones h y w de la sección transversal rectangular. En este caso el cuboide i y el cuboide contiguo $i + 1$ tienen sus propios valores de $\alpha_{h,w}$ y φ de tal forma que la Ec. (B.4) significa que:

$$M_T|_{z_i} = G\alpha_{h_i,w_i} \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right|_{z_i} \quad \text{y} \quad M_T|_{z_i} = G\alpha_{h_{i+1},w_{i+1}} \left. \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z} \right|_{z_i}. \quad (\text{B.14})$$

Aquí las expresiones para α_{h_i,w_i} y $\alpha_{h_{i+1},w_{i+1}}$ se toman de la Ec. (2.15) agregándole los subíndices adecuadamente y son las siguientes:

$$\alpha_{h_i,w_i} = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{h_i w_i}{\left[\frac{2m+1}{h_i}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w_i}\right]^2}, \quad (\text{B.15})$$

$$\alpha_{h_{i+1},w_{i+1}} = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{h_{i+1} w_{i+1}}{\left[\frac{2m+1}{h_{i+1}}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w_{i+1}}\right]^2}. \quad (\text{B.16})$$

Empleando la Ec. (B.1): $\varphi_i(z, t) = \phi_i(z)e^{i\omega t}$, se calculan los dos términos de la Ec. (B.14):

$$M_T|_{z_i} = G\alpha_{h_i,w_i} \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right|_{z_i} = e^{i\omega t} G\alpha_{h_i,w_i} \left. \frac{d\phi_i}{dz} \right|_{z_i}$$

y

$$M_T \Big|_{z_i} = G \alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z} \Big|_{z_i} = e^{i\omega t} G \alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}} \frac{d\phi_{i+1}}{dz} \Big|_{z_i}$$

para sustituirlos en la Ec. (B.4) y obtener la segunda ecuación de continuidad para el Sistema B:

$$\alpha_{h_i, w_i} \frac{d\phi_i}{dz} \Big|_{z_i} = \alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}} \frac{d\phi_{i+1}}{dz} \Big|_{z_i}. \quad (\text{B.17})$$

En la Ec. (B.17) se puede formar el cociente $\alpha_{h_i, w_i} / \alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}$ y definir:

$$\eta^B \equiv \frac{\alpha_{h_i, w_i}}{\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}} \quad (\text{B.18})$$

para reescribir esta segunda condición a la frontera como:

$$\eta^B \frac{d\phi}{dz} \Big|_{z_i} = \frac{d\phi_{i+1}}{dz} \Big|_{z_i}. \quad (\text{B.19})$$

Hay que observar que tanto en la Ec. (B.6) como en la Ec. (B.17) aparecen en ambos lados de las igualdades, a la izquierda de las derivadas, parámetros que dependen de la geometría del Sistema A o del Sistema B, esto es, aparecen r_i^A , r_{i+1}^A en un caso, y aparecen α_{h_i, w_i} , $\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}$ en el otro caso, respectivamente.

Con propósitos de notación y de simplificar algunas de las expresiones que aparecen más adelante, la segunda condición de continuidad aplicada a los Sistemas A y B, Ecs. (B.6) y (B.17), respectivamente, se representarán siguiendo la siguiente notación:

$$\Gamma_i^F \frac{d\phi_i}{dz} \Big|_{z_i} = \Gamma_{i+1}^F \frac{d\phi_{i+1}}{dz} \Big|_{z_i}, \quad (\text{B.20})$$

donde para el Sistema A: $F = A$ y por lo tanto $\Gamma_i^A = r_i^A$ y $\Gamma_{i+1}^A = r_{i+1}^A$; mientras que para el Sistema B: $F = B$ y ahora $\Gamma_i^B = \alpha_{h_i, w_i}$ y $\Gamma_{i+1}^B = \alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}$.

Incorporando esta notación en la Ec. (B.20) se puede formar el cociente $\Gamma_i^F / \Gamma_{i+1}^F$ para relacionarlo con la Ec. (B.8), haciendo $F = A$, para obtener:

$$\frac{\Gamma_i^A}{\Gamma_{i+1}^A} \equiv (\eta^A)^4 = \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4 \quad (\text{B.21})$$

y también relacionarlo con la Ec. (B.18), con $F = B$, para escribir:

$$\frac{\Gamma_i^B}{\Gamma_{i+1}^B} \equiv \eta^B = \frac{\alpha_{h_i, w_i}}{\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}}. \quad (\text{B.22})$$

Una vez que se obtuvo una expresión general, Ec. (B.20), para la segunda condición de continuidad y retomando la primera condición de continuidad, válidas ambas tanto para el Sistema A como para el Sistema B, se puede pasar a evaluarlas dentro de este contexto. Para la primera condición de continuidad, Ec. (B.3): $\phi_i|_{z_i} = \phi_{i+1}|_{z_i}$, se tiene

$$\phi_i|_{z_i} \equiv \phi_i(z_i) = A_i e^{ik(z_i - z_{i-1})} + B_i e^{-ik(z_i - z_{i-1})}$$

$$\phi_{i+1}|_{z_i} \equiv \phi_{i+1}(z_i) = A_{i+1} + B_{i+1}$$

y sustituyendo en la Ec. (B.3) se obtiene:

$$A_i e^{ik(z_i - z_{i-1})} + B_i e^{-ik(z_i - z_{i-1})} = A_{i+1} + B_{i+1}. \quad (\text{B.23})$$

Para la segunda ecuación de continuidad, Ec. (B.20): $\Gamma_i^F \frac{d\phi_i}{dz}|_{z_i} = \Gamma_{i+1}^F \frac{d\phi_{i+1}}{dz}|_{z_i}$ y empezando con $\phi_i(z)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_i(z) &= A_i e^{ik(z - z_{i-1})} + B_i e^{-ik(z - z_{i-1})}, \\ \frac{d\phi_i}{dz} &= ik A_i e^{ik(z - z_{i-1})} - ik B_i e^{-ik(z - z_{i-1})}, \\ \frac{d\phi_i}{dz} \Big|_{z_i} &= ik A_i e^{ik(z_i - z_{i-1})} - ik B_i e^{-ik(z_i - z_{i-1})}; \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

y para $\phi_{i+1}(z)$:

$$\begin{aligned} \phi_{i+1}(z) &= A_{i+1} e^{ik(z - z_i)} + B_{i+1} e^{-ik(z - z_i)}, \\ \frac{d\phi_{i+1}}{dz} &= ik A_{i+1} e^{ik(z - z_i)} - ik B_{i+1} e^{-ik(z - z_i)}, \\ \frac{d\phi_{i+1}}{dz} \Big|_{z_i} &= ik A_{i+1} - ik B_{i+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Sustituyendo las Ecs. (B.24) y (B.25) en la Ec. (B.20) se obtiene:

$$\Gamma_i^F A_i e^{ik(z_i - z_{i-1})} - \Gamma_i^F B_i e^{-ik(z_i - z_{i-1})} = \Gamma_{i+1}^F A_{i+1} - \Gamma_{i+1}^F B_{i+1}. \quad (\text{B.26})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las Ecs. (B.23) y (B.26) se obtienen las expresiones para los coeficientes A_{i+1} y B_{i+1} en términos de los coeficientes A_i y B_i de la amplitud de onda:

$$A_{i+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right) e^{ik(z_i - z_{i-1})} A_i + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right) e^{-ik(z_i - z_{i-1})} B_i, \quad (\text{B.27})$$

$$B_{i+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right) e^{ik(z_i - z_{i-1})} A_i + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right) e^{-ik(z_i - z_{i-1})} B_i. \quad (\text{B.28})$$

Las Ecs. (B.27) y (B.28) en forma matricial toman la forma:

$$\begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix} = M_{i \rightarrow i+1}^F \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

donde:

$$M_{i \rightarrow i+1}^F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[1 + \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 - \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \\ \left[1 - \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 + \frac{\Gamma_i^F}{\Gamma_{i+1}^F} \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

y a su vez, para el Sistema A: $F = A$ con $\Gamma_i^A/\Gamma_{i+1}^A = r_i^4/r_{i+1}^4$, la Ec. (B.30) toma la forma:

$$M_{i \rightarrow i+1}^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4 \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4 \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \\ \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4 \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^4 \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Como se explicó arriba, para este sistema es necesario emplear en los cálculos un valor $(r_i/r_{i+1})_{ef}$. La Ec. (B.31) se escribe entonces como:

$$M_{i \rightarrow i+1}^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[1 + (\eta_{ef}^A)^4 \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 - (\eta_{ef}^A)^4 \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \\ \left[1 - (\eta_{ef}^A)^4 \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 + (\eta_{ef}^A)^4 \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

Para el Sistema B: $F = B$ con $\Gamma_i^B/\Gamma_{i+1}^B \equiv \eta^B = \alpha_{h_i, w_i}/\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}$, la Ec. (B.30) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 M_{i \rightarrow i+1}^B &= \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[1 + \frac{\alpha_{h_i, w_i}}{\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}} \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 - \frac{\alpha_{h_i, w_i}}{\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}} \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \\ \left[1 - \frac{\alpha_{h_i, w_i}}{\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}} \right] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & \left[1 + \frac{\alpha_{h_i, w_i}}{\alpha_{h_{i+1}, w_{i+1}}} \right] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

o también:

$$M_{i \rightarrow i+1}^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [1 + \eta^B] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & [1 - \eta^B] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \\ [1 - \eta^B] e^{ik(z_i - z_{i-1})} & [1 + \eta^B] e^{-ik(z_i - z_{i-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}. \tag{B.34}$$

Los coeficientes de la amplitud de la onda torsional en el extremo derecho de la barra se obtienen multiplicando las ecuaciones (B.29) para distintos valores del índice i en forma sucesiva. En el extremo de la barra, Figs. B.1 y B.2, la coordenada es z_{2n+1} , así que el subíndice $i + 1$ en la Ec. (B.29) debe cumplir con que: $i + 1 = 2n + 1$, siendo el valor que lo antecede: $i = 2n$. Como la Ec. (B.30) pasa de $i \rightarrow i + 1$, en el extremo de la barra dicha ecuación pasa de $2n \rightarrow 2n + 1$; haciendo las multiplicaciones de matrices finalmente se obtiene una expresión para los coeficientes A_{2n+1} y B_{2n+1} en términos de los coeficientes A_1 y B_1 . Esto es:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} &= M_{1 \rightarrow 2}^F \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} &= M_{2 \rightarrow 3}^F \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M_{2 \rightarrow 3}^F M_{1 \rightarrow 2}^F \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Aplicando sucesivamente este procedimiento se tiene:

$$\begin{pmatrix} A_{2n+1} \\ B_{2n+1} \end{pmatrix} = M_{2n \rightarrow 2n+1}^F M_{2n-1 \rightarrow 2n}^F \cdots \cdots M_{2 \rightarrow 3}^F M_{1 \rightarrow 2}^F \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

que en forma abreviada se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} A_{2n+1} \\ B_{2n+1} \end{pmatrix} = M^F \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \tag{B.35}$$

donde

$$M^F = M_{2n \rightarrow 2n+1}^F M_{2n-1 \rightarrow 2n}^F \cdots M_{2 \rightarrow 3}^F M_{1 \rightarrow 2}^F. \quad (\text{B.36})$$

La matriz resultante, M^F , es una matriz de 2×2 y la Ec. (B.35) toma la forma:

$$\begin{pmatrix} A_{2n+1} \\ B_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^F & M_{12}^F \\ M_{21}^F & M_{22}^F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.37})$$

o también

$$A_{2n+1} = M_{11}^F A_1 + M_{12}^F B_1 \quad (\text{B.38})$$

$$B_{2n+1} = M_{21}^F A_1 + M_{22}^F B_1, \quad (\text{B.39})$$

donde A_{2n+1} y B_{2n+1} son los coeficientes de la amplitud de onda, Ec. (B.2): $\phi_i(z) = A_i e^{ik(z-z_{i-1})} + B_i e^{-ik(z-z_{i-1})}$ con $z_{i-1} \leq z \leq z_i$, $i = 1, 2, \dots, 2n+1$, en el extremo derecho de la barra.

Como ya se explicó anteriormente este trabajo se restringe a barras con extremos libres. En esta situación, las condiciones a la frontera de Neumann, Ec. (2.18), en términos del índice i toman la forma:

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (\text{B.40})$$

donde la Ec. (B.1): $\varphi_i(z, t) = \phi_i(z) e^{i\omega t}$ y la Ec. (B.2): $\phi_i(z) = A_i e^{ik(z-z_{i-1})} + B_i e^{-ik(z-z_{i-1})}$ implican que para $i = 1$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = e^{i\omega t} \frac{d\phi_1}{dz} = e^{i\omega t} [ikA_1 e^{ik(z-z_{i-1})} - ikB_1 e^{-ik(z-z_{i-1})}].$$

Evaluando en $z = 0$, con $z_0 = 0$, y sustituyendo en la parte izquierda de la Ec. (B.40) se obtiene como resultado:

$$A_1 - B_1 = 0 \quad (\text{B.41})$$

y para el extremo derecho de la barra donde $i = 2n+1$ se obtiene:

$$\frac{\partial \varphi_{2n+1}}{\partial z} = e^{i\omega t} \frac{d\phi_{2n+1}}{dz} = e^{i\omega t} [ikA_{2n+1} e^{ik(z-z_{2n})} - ikB_{2n+1} e^{-ik(z-z_{2n})}].$$

Evaluando en $z = z_{2n+1} = L$ y sustituyendo en la parte derecha de la Ec. (B.40) resulta que:

$$A_{2n+1} e^{ik(L-z_{2n})} - B_{2n+1} e^{-ik(L-z_{2n})} = 0. \quad (\text{B.42})$$

Sustituyendo las Ecs. (B.38) y (B.39) en la Ec. (B.42) se obtiene la otra ecuación para A_1 y B_1 :

$$(M_{11}^F e^{ik(L-z_{2n})} - M_{21}^F e^{-ik(L-z_{2n})}) A_1 + (M_{12}^F e^{ik(L-z_{2n})} - M_{22}^F e^{-ik(L-z_{2n})}) B_1 = 0. \quad (\text{B.43})$$

En conclusión, se obtiene el sistema de ecuaciones homogéneas para A_1 y B_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ M_{11}^F e^{ik(L-z_{2n})} - M_{21}^F e^{-ik(L-z_{2n})} & M_{12}^F e^{ik(L-z_{2n})} - M_{22}^F e^{-ik(L-z_{2n})} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = 0$$

o también:

$$P \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.44})$$

donde:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ M_{11}^F e^{ik(L-z_{2n})} - M_{21}^F e^{-ik(L-z_{2n})} & M_{12}^F e^{ik(L-z_{2n})} - M_{22}^F e^{-ik(L-z_{2n})} \end{pmatrix}.$$

Como las Ecs. (B.44) son homogéneas, los valores permitidos de k corresponden a las raíces de: $\det(P) = 0$. Las frecuencias angulares ω , Ec. (2.21), de los modos normales de las ondas torsionales $\omega = v_T k$ se obtienen numéricamente barriendo $\det(P)$ como función de k . Cuando para un valor $k = k_R$ se obtiene $\det(P) = 0$, entonces la frecuencia angular de resonancia es $\omega_R = v_T k_R$ o $f_R = \frac{1}{2\pi} v_T k_R$ la frecuencia de resonancia. Con las raíces k_R se calculan las amplitudes de onda usando la Ec. (B.2), esto es, se evalúa la función:

$$\phi_i(z) = A_i e^{ik_R(z-z_{i-1})} + B_i e^{-ik_R(z-z_{i-1})} \quad (\text{B.45})$$

para $z_{i-1} \leq z \leq z_i$, $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$; donde hay que recordar la diferencia entre $i = \sqrt{-1}$ en la exponencial y la i del i -ésimo cuerpo de la barra o la i -ésima coordenada z .

Apéndice C

Descripción del sistema experimental

En este apéndice se presenta la sistema experimental empleado. Se explica cualitativamente el principio de funcionamiento del transductor electromagnético acústico (EMAT) desarrollado en el Laboratorio de Vibraciones Elásticas del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos [25]. Se hace un breve comentario sobre el uso de un transductor piezoeléctrico para realizar una parte de los experimentos. Se describe el sistema mecánico utilizado para soportar las barras de aluminio en estudio así como los implementos necesarios para mover tanto el excitador como el detector. Se presenta la electrónica utilizada para medir las frecuencias de resonancia y las amplitudes de las ondas torsionales.

C.1. Transductor electromagnético acústico (EMAT)

El EMAT consta de una bobina y de un imán permanente que produce un campo magnético no homogéneo. Este dispositivo es versátil en el sentido de que con diferentes configuraciones de la bobina y el imán se pueden excitar o detectar ondas compresionales, torsionales y flexionales. En la Fig. C.1

sólo se muestran los dos primeros casos ya que la excitación-detección de flexionales es similar a la de las compresionales. Para flexionales se coloca la configuración del EMAT de la Fig. C.1 (a) en el manto de la barra. Nótese que no hay contacto mecánico entre el EMAT y la barra.

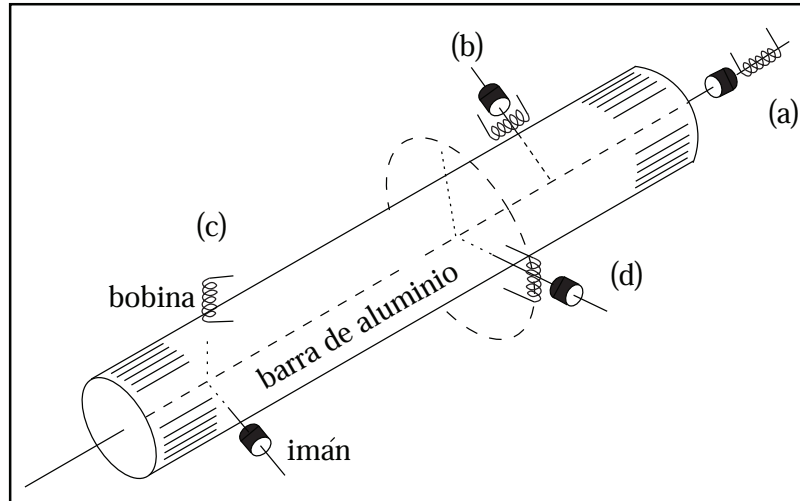


Figura C.1: Diferentes configuraciones del EMAT. Cambiando la configuración de la bobina y el imán así como su posición se pueden excitar o detectar diferentes tipos de ondas: (a) y (b) compresionales, (c) y (d) torsionales. Este trabajo se concreta sólo al uso de la configuración (c).

En los experimentos de vibraciones acústicas en barras o vigas ocurre que con ligeras desalineaciones del EMAT se producen los tres tipos de ondas mencionados arriba, con la salvedad de que se produce muy eficientemente la onda para la cual se configuró el EMAT y aparecen muy disminuidas las otras. Entender cualitativamente la forma como funciona el EMAT para excitar-detectar cada uno de los tipos de onda ayuda a entender los espectros experimentales. Con este propósito se discute primero cómo actúa este dispositivo si se usa para detectar y excitar vibraciones compresionales, ya que para las flexionales ocurre algo similar. Posteriormente se analiza también en forma cualitativa como funciona el EMAT para excitar y detectar vibraciones torsionales.

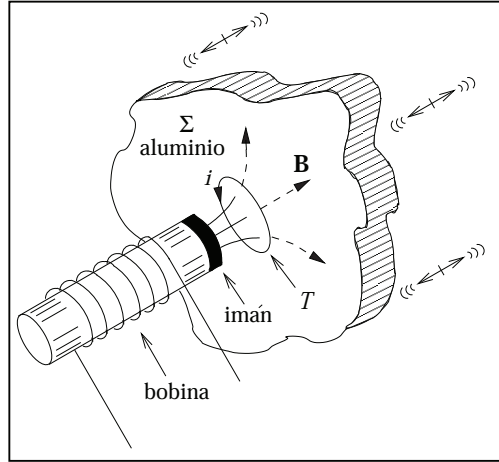


Figura C.2: Diagrama del EMAT. La superficie Σ representa una porción de la barra de aluminio oscilando. Se indica un lazo cualquiera con la letra T y con \mathbf{B} la inducción magnética no homogénea producida por el imán permanente.

Para excitar y detectar ondas compresionales en una barra metálica se emplea la configuración (a) de la Fig. C.1. Aquí se analiza su funcionamiento como detector de dichas ondas. La Fig. C.2 muestra un diagrama esquemático del EMAT [25, 28]. Cuando la superficie metálica Σ oscila en la misma dirección que el eje de la bobina, la inducción magnética \mathbf{B} , no homogénea, del imán permanente produce un flujo magnético cambiante Φ_T a través de cualquier lazo, como el marcado T en la Fig. C.2. Esto, de acuerdo a la ley de Faraday,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{C.1})$$

origina una fem, $\mathcal{E}_T = - \frac{d\Phi_T}{dt}$, que a su vez genera una corriente de remolino o de Foucault i . Esta corriente i es proporcional a la derivada temporal del flujo magnético Φ_T : $i \propto \frac{d\Phi_T}{dt}$, y esta variación de flujo magnético es proporcional, en una primera aproximación, a la velocidad de la superficie Σ , es decir: $\frac{d\Phi_T}{dt} \propto v_\Sigma$; juntando estas dos ideas se puede afirmar que: $i \propto v_\Sigma$. Por otro lado, la corriente de remolino i generada por el flujo magnético Φ_T cambiante da origen a una inducción magnética que varía con el tiempo, $\mathbf{B}_i(t)$, que entonces produce un flujo variable en la bobina, $\Phi_{\text{bobina}} \equiv \Phi_b$, que a su vez induce una fem en ésta y por lo que se puede decir que: $\Phi_b \propto i$. Si dicha fem

se entiende como el voltaje entre las terminales de la bobina se tendrá que: $V_{\text{bobina}} \equiv V_b = -\frac{d\Phi_b}{dt}$. Aquí se puede decir a manera de conclusión, otra vez en primera aproximación, que: $V_b = -\frac{d\Phi_b}{dt} \propto \frac{d}{dt}i \propto \frac{d}{dt}v_\Sigma$, es decir, que el voltaje inducido en la bobina es proporcional a la aceleración de la superficie Σ .

Ahora se analiza el funcionamiento del EMAT como excitador de las ondas compresionales siguiendo la Fig. C.2 que muestra un diagrama esquemático del EMAT. En este caso la superficie Σ está inicialmente en reposo y ahora se aplica un voltaje alterno a la bobina, $V'_{\text{bobina}} \equiv V'_b$, haciendo que circule una corriente eléctrica por las espiras de ésta. La corriente eléctrica en la bobina produce a su vez una inducción magnética divergente $\mathbf{B}'_{\text{bobina}} \equiv \mathbf{B}'_b$ que induce un flujo magnético Φ'_T variable en el tiempo sobre la superficie Σ a través de un lazo T cualquiera como el marcado en la Fig. C.2. De esto se puede ver que: $V'_b \propto \frac{d\Phi'_T}{dt}$. La variación temporal del flujo magnético Φ'_T induce a través de la ley de Faraday una fem, $\mathcal{E}'_T = -\frac{d\Phi'_T}{dt}$, que a su vez produce en el lazo T una corriente de remolino i' ; por lo que: $i' \propto \frac{d\Phi'_T}{dt}$, y de la relación anterior: $V'_b \propto i'$. Esta corriente de remolino i' experimenta una fuerza debida a la inducción magnética del imán permanente \mathbf{B} a través de la parte magnética de la fuerza de Lorentz, [29, pág. 194]: $\mathbf{F}_L = i' \oint_T d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$, donde $d\boldsymbol{\ell}$ es el vector diferencial de longitud sobre el lazo T por el que circula la corriente i' , ver Fig. C.2 donde hay que pensar a i como i' . De la expresión para \mathbf{F}_L y de la relación entre V'_b e i' se puede afirmar que: $V'_b \propto \|\mathbf{F}_L\|$. Dado que el eje del imán permanente es perpendicular a la superficie Σ y dado que \mathbf{B} atraviesa el lazo T , este vector se puede escribir como una componente paralela a la superficie Σ más una componente perpendicular a dicha superficie, esto es: $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_\parallel)_\Sigma + (\mathbf{B}_\perp)_\Sigma$. Por otro lado, para el vector $d\boldsymbol{\ell}$: $d\boldsymbol{\ell} = (d\boldsymbol{\ell}_\parallel)_\Sigma$. De lo anterior se puede ver que, por simetría, para dos puntos p y q opuestos sobre el lazo T se tiene que, para el punto p : $d\boldsymbol{\ell} = (d\boldsymbol{\ell}_\parallel)_\Sigma$ y $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_\parallel)_\Sigma + (\mathbf{B}_\perp)_\Sigma$, mientras que para el punto q : $d\boldsymbol{\ell} = -(d\boldsymbol{\ell}_\parallel)_\Sigma$ y $\mathbf{B} = -(\mathbf{B}_\parallel)_\Sigma + (\mathbf{B}_\perp)_\Sigma$. Así que de la expresión para la fuerza de Lorentz se pueden escribir las contribuciones $(d\mathbf{F}_L)_p$ y $(d\mathbf{F}_L)_q$, esto es, para la primera de ellas:

$$\begin{aligned} (d\mathbf{F}_L)_p &= i' \left\{ (d\boldsymbol{\ell}_\parallel)_\Sigma \times [(\mathbf{B}_\parallel)_\Sigma + (\mathbf{B}_\perp)_\Sigma] \right\} = \\ &= i' \left\{ (d\boldsymbol{\ell}_\parallel)_\Sigma \times [(\mathbf{B}_\parallel)_\Sigma] + (d\boldsymbol{\ell}_\parallel)_\Sigma \times [(\mathbf{B}_\perp)_\Sigma] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

y para $(d\mathbf{F})_q$:

$$\begin{aligned} (d\mathbf{F}_L)_q &= i' \left\{ - (d\ell_{\parallel})_{\Sigma} \times [- (\mathbf{B}_{\parallel})_{\Sigma} + (\mathbf{B}_{\perp})_{\Sigma}] \right\} = \\ &= i' \left\{ (d\ell_{\parallel})_{\Sigma} \times [(\mathbf{B}_{\parallel})_{\Sigma}] - (d\ell_{\parallel})_{\Sigma} \times [(\mathbf{B}_{\perp})_{\Sigma}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

De las Ecs. (C.2) y (C.3) se ve que al sumarlas sólo quedan los primeros términos de las mismas y que el resultado es un vector paralelo al eje del imán permanente y por lo tanto perpendicular a la superficie Σ . De lo anterior es claro que para el lazo T sólo habría que hacer la integral: $\mathbf{F}_L = i' \oint_T \left\{ (d\ell_{\parallel})_{\Sigma} \times (\mathbf{B}_{\parallel})_{\Sigma} \right\}$. Para calcular la fuerza total sobre la barra, $(\mathbf{F}_L)_{\text{total}}$, se deberían considerar todas las contribuciones de las fuerzas sobre todas las superficies encerradas por lazos paralelos al lazo T , más todas las contribuciones en el interior de la barra. Este cálculo es demasiado laborioso e innecesario. En este trabajo se utiliza solamente la fuerza \mathbf{F}_L sobre el área encerrada por T ya que es representativa del funcionamiento del EMAT. Para los propósitos de esta sencilla descripción del EMAT como excitador de ondas compresionales es suficiente hacer notar que: $V_b' \propto \|(\mathbf{F}_L)_{\text{total}}\|$, donde $(\mathbf{F}_L)_{\text{total}}$ es un vector perpendicular a la superficie Σ .

Se considera ahora la configuración del EMAT para excitar y detectar ondas torsionales. Se analiza primero cualitativamente el proceso de detección de ondas torsionales [30] empleando la posición (c) de la Fig. C.1. Primero se obtendrá una expresión de la función $\varphi(z, t)$ que describe a las ondas torsionales. Retomando la solución general para modos normales Ec. (2.19): $\varphi(z, t) = \phi(z)e^{i\omega t}$, donde después de aplicar las condiciones a la frontera de Neumann se obtuvo la Ec. (2.25): $\phi(z) = A \left(e^{i\frac{\omega}{c}z} + e^{-i\frac{\omega}{c}z} \right)$. Es decir que $\varphi(z, t)$ toma la forma: $\varphi(z, t) = 2A \cos \frac{\omega}{c}z (\cos \omega t + i \text{sen} \omega t)$. Al tomar la parte real: $\varphi(z, t) \equiv \text{Re} [\varphi(z, t)] = 2A \cos \frac{\omega}{c}z \cos \omega t = \varphi_0(z) \cos \omega t$, donde $\varphi_0(z) = 2A \cos \frac{\omega}{c}z$. En estos términos se supondrá que la varilla oscila torsionalmente con una frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ y que:

$$\varphi(z, t) = \varphi_0(z) \cos \omega t, \quad (\text{C.4})$$

con $\varphi_0(z) \ll 1$, esto es, las oscilaciones son pequeñas. En la discusión simplificada que se da a continuación, se supone que la longitud de onda λ es grande con respecto al radio R de la varilla y que este radio es mucho menor que la longitud típica en la cual cambia la inducción magnética \mathbf{B} , que es paralela al eje Y de la Fig. C.3.

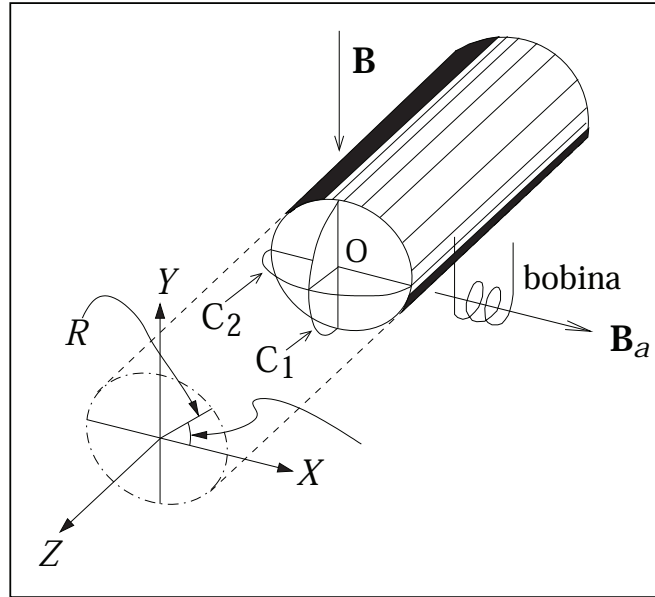


Figura C.3: Esquema simplificado para entender funcionamiento del EMAT en la configuración (c) de la Fig. C.1. La inducción magnética del imán permanente es \mathbf{B} y \mathbf{B}_a es la inducción magnética debida a la oscilación de la barra de aluminio. La figura muestra un punto sobre la barra que giró un ángulo φ expresado por: $\varphi(z, t) = \varphi_0(z) \cos \omega t$ con $\varphi_0(z) \ll 1$. Los círculos C_1 y C_2 están dibujados para $\varphi = 0$.

En esta figura se muestran, para el valor $\varphi = 0$, los círculos C_1 y C_2 perpendiculares entre sí, centrados en el punto O y con radio R . A medida que la varilla oscila torsionalmente, la inducción magnética homogénea¹ \mathbf{B} produce un flujo magnético variable en estos círculos.

Considerando que, para una z fija, la sección transversal de la barra, y por lo tanto los círculos C_1 y C_2 , giran un ángulo φ dado por la Ec. (C.4), primero se calculará el flujo magnético a través del círculo C_1 de área A_{C_1} , esto es, Φ_{C_1} : $\Phi_{C_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_{C_1} = BA_{C_1} \cos [\angle(\mathbf{B}, \mathbf{A}_{C_1})]$ expresión para la que: $\mathbf{B} = -B\hat{j}$ y $\angle(\mathbf{B}, \mathbf{A}_{C_1}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

¹Cabe hacer notar que a diferencia de las vibraciones compresionales y flexionales, para este caso no es necesario que la inducción magnética sea no homogénea.

$\Phi_{C_1} = BA_{C_1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ y por lo tanto:

$$\Phi_{C_1} = BA_{C_1} \text{sen}\varphi, \quad (\text{C.5})$$

de donde:

$$\frac{d\Phi_{C_1}}{dt} = \dot{\varphi} BA_{C_1} \cos\varphi. \quad (\text{C.6})$$

Ahora se calcula el flujo magnético a través del círculo C_2 de área A_{C_2} , esto es, $\Phi_{C_2}: \Phi_{C_2} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_{C_2} = BA_{C_2} \cos[\angle(\mathbf{B}, \mathbf{A}_{C_2})]$, expresión para la que: $\mathbf{B} = -B\hat{j}$ y $\angle(\mathbf{B}, \mathbf{A}_{C_2}) = \varphi$. Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$\Phi_{C_2} = BA_{C_2} \cos\varphi, \quad (\text{C.7})$$

de donde:

$$\frac{d\Phi_{C_2}}{dt} = -\dot{\varphi} BA_{C_2} \text{sen}\varphi. \quad (\text{C.8})$$

De las Ecs. (C.6) y (C.8) se puede ver que la razón de cambio máxima del flujo magnético, en valor absoluto, ocurre en el círculo C_1 . Como $A_{C_1} = A_{C_2}$ y recordando la Ec. (C.4): $\varphi(z, t) = \varphi_0(z) \cos \omega t$ con $\varphi_0(z) \ll 1$, se puede afirmar que para una z fija y para todo tiempo t se cumple que: $\cos \varphi(z, t) > \text{sen}\varphi(z, t)$ y por lo tanto: $\left| \frac{d\Phi_{C_1}}{dt} \right| > \left| \frac{d\Phi_{C_2}}{dt} \right|$. De aquí se puede concluir que la variación del flujo magnético a través del círculo C_1 es la que contribuye mayoritariamente a producir una fem.

De acuerdo al análisis que se está haciendo, dentro del círculo C_1 se pueden considerar otros muchos lazos. Aquí se considerará un lazo circular T , de radio R_T . La variación del flujo magnético Φ_{A_T} a través del área $A_T = \pi R_T^2$ del lazo T es la que contribuye mayoritariamente a producir una fem. De acuerdo con la ley de Faraday: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, Ec. (C.1), la corriente I_T inducida por \mathcal{E} circula alrededor del lazo T , en el plano YZ .

Si se denota con x' a la posición de lazos centrados en el eje X entonces el lazo T estará en $x' = 0$. Al considerar lazos con $x' \neq 0$, estos no necesariamente serán círculos, basta pensar que para $x' \approx R_T$ un lazo “sentiría” la frontera de la barra, Fig. C.3, y dicho lazo tendría la forma de un “círculo doblado” que sigue la curvatura del manto de la barra redonda. Al considerar todos estos lazos, que llenarían el volumen de la barra, habría que considerar

una distribución continua de corriente descrita por la densidad de corriente² $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Sin embargo, pese a no tomar en cuenta el hecho anterior, con la sencilla descripción que se está haciendo se puede entender razonablemente el funcionamiento del EMAT como detector de vibraciones torsionales.

Es importante comentar que la solución completa al problema de calcular el flujo magnético y la inducción magnética se obtiene aplicando las ecuaciones de Maxwell, con las condiciones a la frontera apropiadas. Sin embargo, para este trabajo es suficiente la descripción aproximada que se hace y que destaca, como se verá más adelante, cuales son los parámetros relevantes en el funcionamiento del EMAT.

El flujo magnético Φ_{A_T} a través del lazo T de área $A_T = \pi R_T^2$ es, en concordancia con la Ec. (C.5):

$$\Phi_{A_T} = A_T B \sin \varphi \approx A_T B \varphi = A_T B \varphi_0(z) \cos \omega t, \quad (\text{C.9})$$

donde se sustituyó la Ec. (C.4). Al aplicar la Ec. (C.1) se obtiene la fem \mathcal{E}_T en el lazo T :

$$\mathcal{E}_T = A_T B \omega \varphi_0(z) \sin \omega t. \quad (\text{C.10})$$

Si se asocia una resistencia \mathcal{R} a dicho lazo, la corriente eléctrica I_T es:

$$I_T = \frac{A_T B \omega \varphi_0(z) \sin \omega t}{\mathcal{R}}. \quad (\text{C.11})$$

Como ya se dijo arriba, para obtener el valor total de I_T se deberían sumar las contribuciones de muchos lazos semejantes a T hasta que se cubriera todo el volumen de la barra. Cada lazo, sobre un plano paralelo al plano YZ tendría una resistencia \mathcal{R} efectiva distinta. Es posible que estos lazos no estén todos localizados en superficies planas, pero en cualquier caso todas las contribuciones a I_T serían proporcionales a B , ω y $\varphi_0(z)$. La dependencia en $\varphi_0(z)$ es lo que hace posible, como se explicará un poco más adelante, que se pueda medir la amplitud de la oscilación torsional en cada punto a lo largo de toda la barra. Todas las contribuciones a la corriente I_T darían origen a una distribución continua que estaría descrita por una densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, misma que habría de tomarse en cuenta en la ley de Biot y Savart, a través

²La relación entre la corriente eléctrica I y la densidad de corriente \mathbf{J} a través de una superficie S , con elemento diferencial de área $d\mathbf{A}$, es: $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$.

de una integral de volumen, para calcular la inducción magnética $\mathbf{B}_{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$. Posteriormente habría que calcular el flujo magnético variable $\Phi_{\mathbf{J}}$ producido por $\mathbf{B}_{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$ a través del área de la bobina, donde a su vez dicho flujo magnético produciría una fem, $\mathcal{E}_{\mathbf{J}}$, entendida ésta, como el voltaje inducido, $V_{\mathbf{J}}$, en las terminales de la bobina. Nuevamente se utiliza una I_T representativa en lugar de $\mathbf{J}(\mathbf{r})$.

Se calcula entonces la inducción magnética \mathbf{B}_T , en puntos sobre el eje X , producida por la corriente I_T , Ec. (C.11), empleando la ley de Biot y Savart:

$$\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0}{4\pi} I_T \oint_T \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (\text{C.12})$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética.³ A continuación se detallan los demás términos. Dado que el lazo T está en el plano YZ , y que el vector de posición \mathbf{r} en la Ec. (C.12) va desde el elemento diferencial de longitud $d\boldsymbol{\ell}$, sobre el lazo T por el que circula la corriente I_T , hasta un punto sobre el eje X , mismo que coincide con el eje de la bobina, Fig. C.3; por simetría, para dos puntos opuestos sobre el lazo T , los vectores $d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}$ tienen una componente neta que está sobre el eje X . Tomando el resultado de la referencia [29, pp. 200-201] para el cálculo de \mathbf{B}_T en términos del área A_T del lazo T :

$$\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0 I_T A_T}{2\pi (R_T^2 + x^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}} \quad (\text{C.13})$$

donde sustituyendo I_T de la Ec. (C.11) se obtiene finalmente que:

$$\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0 A_T^2 B \omega \varphi_0(z) \text{sen } \omega t}{2\pi \mathcal{R} (R_T^2 + x^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}}. \quad (\text{C.14})$$

Este valor de \mathbf{B}_T sería uno de los tantos valores de $\mathbf{B}_{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$. Sin embargo, continuando con el estudio aproximado que se está haciendo del EMAT el valor de \mathbf{B}_T permite calcular la fem que se induce en la bobina.

El voltaje V inducido en una bobina, como la de la Fig. C.3, se puede obtener calculando primero el flujo magnético a través del área $A_{\text{bobina}} \equiv A_b$ de

³La relación entre μ y μ_0 es: $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$, donde χ_m es la susceptibilidad magnética. Para el aluminio: $\mu/\mu_0 = 1.000022$ y la permeabilidad o grado de magnetización es: $\mu = 1.2566650 \times 10^{-6} \text{ H/m}$.

la sección transversal de la bobina, producido por la inducción magnética variable \mathbf{B}_T , esto es, calcular Φ_{A_b} ; y después aplicando la ley de Faraday calcular la fem producida debida a este flujo variable. El flujo magnético variable Φ_{A_b} es entonces: $\Phi_{A_b} = \mathbf{B}_T \cdot \mathbf{A}_b = B_T A_b \cos [\angle(\mathbf{B}_T, \mathbf{A}_b)]$, expresión para la que: $\mathbf{B}_T = B_T \hat{\mathbf{i}}$ y $\angle(\mathbf{B}_T, \mathbf{A}_b) = 0$. Sustituyendo en la expresión para Φ_{A_b} se tiene que: $\Phi_{A_b} = B_T A_b$, y tomando la magnitud de \mathbf{B}_T de la Ec. (C.14) se obtiene:

$$\Phi_{A_b} = \frac{\mu_0 A_b A_T^2 B \omega \varphi_0(z) \text{sen } \omega t}{2\pi \mathcal{R} (R_T^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.15})$$

Finalmente, aplicando la Ec. (C.1): $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ a Φ_{A_b} , y si por la fem se entiende el voltaje V inducido en las terminales de la bobina, entonces se tiene que:

$$V(x, z, t) = -\frac{\mu_0 A_b A_T^2 B \omega^2 \varphi_0(z) \cos \omega t}{2\pi \mathcal{R} (R_T^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.16})$$

Ya se mencionó que empleando las ecuaciones de Maxwell y las condiciones a la frontera apropiadas se puede obtener una solución completa al problema. También se mencionaron, dentro de éstos cálculos aproximados, en términos generales, las dificultades para determinar tanto la forma como la resistencia \mathcal{R} efectiva asociadas a lazos diferentes al lazo T , así como las dificultades para determinar sus contribuciones a B_T . Pese a lo anterior, lo que importa aquí es que el resultado de la Ec. (C.16) muestra que el voltaje $V(x, z, t)$ es proporcional a la inducción magnética B del imán permanente, cosa que experimentalmente es muy clara ya que al cambiar dicho imán por otro más potente el voltaje $V(x, z, t)$ medido aumenta. También muestra que la sensibilidad del transductor aumenta con ω^2 . Que $V(x, z, t)$ sea proporcional a la amplitud de la oscilación torsional $\varphi_0(z)$ es lo que permite medirla en cualquier punto a lo largo de la barra. Para una frecuencia angular de resonancia $\omega_R = 2\pi f_R$ dada y al recorrer con el EMAT-detector la barra, a lo largo del eje Z , se obtiene la amplitud de onda torsional correspondiente.

Nótese que la expresión de $V(x, z, t)$ en la Ec. (C.16) es válida a pesar de que en este cálculo aproximado no se ha tomado en cuenta la auto inductancia,⁴ $d\Phi/dI$, ni la inductancia mutua,⁵ $M_{ij} = d\Phi_{ij}/dI_j$, $i \neq j$; de los

⁴La debida al propio flujo magnético, I es la corriente eléctrica.

⁵La debida al flujo magnético de un lazo sobre otro, I es la corriente eléctrica.

diferentes lazos. Estas inductancias inducen una fase temporal en la respuesta del EMAT así como una dependencia en ω que es diferente para frecuencias altas. Incluir estas inductancias da lugar al efecto piel que depende de la frecuencia. La profundidad de efecto piel, definida como la distancia δ para la cual la amplitud de una onda plana viajera disminuye por un factor $1/e$, está dada por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}, \quad (\text{C.17})$$

donde como antes $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular, para el aluminio la permeabilidad magnética es: $\mu = 1.2566650 \times 10^{-6}$ H/m y la conductividad, a 20 °C, es: $\sigma = 3.78 \times 10^7$ S/m,⁶ con estos datos la Ec. (C.17) queda como:

$$\delta = \frac{0.08185956}{\sqrt{f}}. \quad (\text{C.18})$$

Por ejemplo, para una aleación típica de aluminio, si $f = 100$ Hz, la profundidad de efecto piel es: $\delta = 0.819$ cm y con $f = 100$ kHz, este valor es $\delta = 0.0260$ cm. Por lo tanto, a frecuencias altas el campo magnético podría no penetrar lo suficiente. En este caso, la configuración (d) de la Fig. C.1, con la cual también se pueden excitar y detectar ondas torsionales, es más apropiada para frecuencias altas y también para valores grandes del radio R de la barra.

En esta última parte de la sección se discute cualitativamente cómo funciona el EMAT como excitador de ondas torsionales en una barra. Si se coloca el transductor como en la Fig.C.1 (c) y se aplica un voltaje alterno a la bobina, ésta producirá una inducción magnética variable: $\mathbf{B}_{\text{bobina}} \equiv \mathbf{B}_b(x, y, z, t) \equiv \mathbf{B}_b(x, y, z)\cos\omega t = \left[(\mathbf{B}_b)_x \hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{B}_b)_y \hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{B}_b)_z \hat{\mathbf{k}} \right] \cos\omega t$, la cual no se indicada en la Fig. C.3. Se está considerando de manera muy general que es posible evaluar la inducción magnética que produce la bobina en cualquier punto de coordenadas (x, y, x) y a cualquier tiempo t . Dado que la barra está inicialmente en reposo, los círculos C_1 y C_2 están también inicialmente en reposo, como los dibujados en la Fig. C.3, y para los cuales los vectores asociados a sus áreas, también inicialmente, son: $\mathbf{A}_{C_1} = -A_{C_1}\hat{\mathbf{i}}$ y $\mathbf{A}_{C_2} = -A_{C_2}\hat{\mathbf{j}}$,

⁶Del sistema internacional de unidades: henry $\equiv \text{H} = V \cdot s/A = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ y siemens $\equiv \text{S} = \Omega^{-1} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$, así que la profundidad de efecto piel δ está en metros.

respectivamente. Primero se calcula el flujo magnético a través del círculo C_1 de radio R , centrado en $x = 0$ con $0 \leq y \leq R$ y $0 \leq z \leq R$; producido por $\mathbf{B}_b(x = 0, y, z, t)$; esto es, $\Phi'_{C_1} = \Phi'_{C_1} = [\mathbf{B}_b(x = 0, y, z, t)] \cdot \mathbf{A}_{C_1} = \left(\left[(\mathbf{B}_b)_{x=0} \hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{B}_b)_y \hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{B}_b)_z \hat{\mathbf{k}} \right] \cos \omega t \right) \cdot \left(-A_{C_1} \hat{\mathbf{i}} \right) = -(\mathbf{B}_b)_{x=0} A_{C_1} \cos \omega t$, o sea que:

$$\Phi'_{C_1} = -(\mathbf{B}_b)_{x=0} A_{C_1} \cos \omega t. \quad (\text{C.19})$$

El flujo magnético a través del círculo C_2 de radio R , centrado en $y = 0$ con $0 \leq x \leq R$ y $0 \leq z \leq R$; es, Φ'_{C_2} . Al ser la inducción magnética $\mathbf{B}_b(x, y, z, t)$ divergente resulta obvio de la Fig. C.3 que $\Phi'_{C_2} = 0$. Aquí lo que interesan son las componentes de $\mathbf{B}_b(x, y, z, t)$ en el plano en el que se encuentra el círculo C_2 , es decir el plano XZ , para el cual $y = 0$ y también $(\mathbf{B}_b)_y = 0$, entonces: $\Phi'_{C_2} = (\mathbf{B}_b(x, y = 0, z, t)) \cdot \mathbf{A}_{C_2} = \left(\left[(\mathbf{B}_b)_x \hat{\mathbf{i}} + (0) \hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{B}_b)_z \hat{\mathbf{k}} \right] \cos \omega t \right) \cdot \left(-A_{C_2} \hat{\mathbf{j}} \right) = 0$, por lo que:

$$\Phi'_{C_2} = 0. \quad (\text{C.20})$$

Ya se mostró que sólo hay flujo magnético a través del círculo C_1 . Como se dijo arriba, dentro del círculo C_1 hay otros muchos lazos de los cuales se considerará uno en particular, el llamado lazo T de radio R_T y que engloba un área $A_T = \pi R_T^2$. El flujo magnético a través del área A_T del lazo T producido por la inducción magnética $\mathbf{B}_b(x, y, z, t)$, esto es, Φ'_{A_T} , en concordancia con la Ec. (C.19), está dado por:

$$\Phi'_{A_T} = -A_T (\mathbf{B}_b)_{x=0} \cos \omega t. \quad (\text{C.21})$$

De acuerdo a la ley de Faraday: $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$, Ec. (C.1), la fem \mathcal{E}'_T producida por el flujo variable Φ'_{A_T} , es:

$$\mathcal{E}'_T = -\omega A_T (\mathbf{B}_b)_{x=0} \text{sen } \omega t. \quad (\text{C.22})$$

Esta fem \mathcal{E}'_T produce una corriente I'_T en el lazo T , que al igual que T se encuentran alojados en el plano YZ . Asociando una resistencia \mathcal{R} al lazo T , la corriente es:

$$I'_T = \frac{\omega A_T (\mathbf{B}_b)_{x=0} \text{sen } \omega t}{\mathcal{R}}. \quad (\text{C.23})$$

Ahora se tiene que las cargas que dan origen a la corriente I'_T experimentan un momento de torsión o torque τ debido a la parte magnética de la fuerza de Lorentz [29, pág. 194]: $\mathbf{F}_L = \oint_T I'_T d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$, donde $\mathbf{B} = -B\hat{\mathbf{j}}$ es la inducción magnética del imán permanente, Fig. C.3. De acuerdo a la referencia [29, pp. 196-197], la torca τ está dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = \left[\frac{1}{2} I'_T \oint_C \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell} \right] \times \mathbf{B}, \quad (\text{C.24})$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición que va desde el elemento diferencial de longitud $d\boldsymbol{\ell}$, sobre el lazo T por el que circula la corriente I'_T , hasta un punto sobre el eje X donde está la bobina. Recordando que el lazo T está sobre el plano YZ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad d\boldsymbol{\ell} = (d\ell)_y\hat{\mathbf{j}} + (d\ell)_z\hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell} &= x(d\ell)_y\hat{\mathbf{k}} - x(d\ell)_z\hat{\mathbf{j}} + y(d\ell)_z\hat{\mathbf{i}} - z(d\ell)_y\hat{\mathbf{i}}, \\ \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell} &= \left(y(d\ell)_z - z(d\ell)_y \right) \hat{\mathbf{i}} - x(d\ell)_z\hat{\mathbf{j}} + x(d\ell)_y\hat{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

donde integrando:

$$\oint_T \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell} = \oint_T \left[y(d\ell)_z - z(d\ell)_y \right] \hat{\mathbf{i}} - \oint_T \left[x(d\ell)_z \right] \hat{\mathbf{j}} + \oint_T \left[x(d\ell)_y \right] \hat{\mathbf{k}}$$

y recordando el valor de $\mathbf{B} = -B\hat{\mathbf{j}}$ se obtiene de la Ec. (C.24):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} B I'_T \oint_T \left[x(d\ell)_y \right] \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2} B I'_T \oint_T \left[y(d\ell)_z - z(d\ell)_y \right] \hat{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.25})$$

En lo que sigue se considera un valor fijo de z , esto es, $z = z_p$. Para un punto sobre el eje Y : $y = R_T$, el radio del lazo T . De otra forma, las coordenadas de este punto son (x, R_T, z_p) y para el cual $(d\ell)_{y=R_T} = 0$ y $(d\ell)_z = (d\ell)_{z_p}$. Sustituyendo en la Ec. (C.25), donde hay que cambiar \oint_T por una simple integral, se tiene que:

$$\boldsymbol{\tau}(x, R_T, z_p) = \frac{1}{2} B I'_T \int \left[x(d\ell)_{y=R_T} \right] \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2} B I'_T \int \left[R_T \left\{ (d\ell)_{z_p} \right\} - z_p (d\ell)_{y=R_T} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

y simplificando:

$$\boldsymbol{\tau}(x, R_T, z_p) = -\frac{1}{2} B I'_T \int \left[R_T (d\ell)_{z_p} \right] \hat{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.26})$$

Para el punto simétrico: $y = -R_T$, con coordenadas $(x, -R_T, z_p)$, para el cual $(d\ell)_{y=-R_T} = 0$ pero $(d\ell)_z = -(d\ell)_{z_p}$; sustituyendo en la Ec. (C.25) se obtiene ahora:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(x, -R_T, z_p) &= \frac{1}{2}BI'_T \int \left[x (d\ell)_{y=-R_T} \right] \hat{\mathbf{i}} - \\ &- \frac{1}{2}BI'_T \int \left[(-R_T) \left\{ -(d\ell)_{z_p} \right\} - z_p (d\ell)_{y=-R_T} \right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

de donde:

$$\boldsymbol{\tau}(x, -R_T, z_p) = -\frac{1}{2}BI'_T \int \left[R_T \left\{ (d\ell)_{z_p} \right\} \right] \hat{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.27})$$

Haciendo la suma de las Ecs. (C.26) y (C.27) se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau}(x, R_T, z_p) + \boldsymbol{\tau}(x, -R_T, z_p) = -BI'_T \int \left[R_T \left\{ (d\ell)_{z_p} \right\} \right] \hat{\mathbf{k}}, \quad (\text{C.28})$$

donde se muestra que para este par de puntos simétricos sobre el eje Y , ésta contribución a la torca neta está a lo largo del eje Z y por lo tanto el lazo circular T tiende a girar alrededor del eje Z produciendo la torsión de la sección transversal de la barra en $z = z_p$. Es claro que z_p es cualquier punto a lo largo de la barra.

Se consideran ahora otro par de puntos simétricos. Si se considera primero el punto sobre el lazo T con coordenadas $(x, 0, z_p + R_T)$, donde R_T es el radio del lazo, como $y = 0$ sólo queda analizar en la Ec. (C.25) que: $(d\ell)_y = -(d\ell)_{y=0}$ y sustituyendo en la Ec. (C.25) se obtiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(x, 0, z_p + R_T) &= \frac{1}{2}BI'_T \int \left[x \left\{ -(d\ell)_{y=0} \right\} \right] \hat{\mathbf{i}} + \\ &+ \frac{1}{2}BI'_T \int \left[(z_p + R_T) \left\{ -(d\ell)_{y=0} \right\} \right] \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

El punto simétrico al punto anterior tendrá coordenadas $(x, 0, z_p - R_T)$, para el cual: $(d\ell)_y = (d\ell)_{y=0}$ y sustituyendo en la Ec. (C.25) queda:

$$\boldsymbol{\tau}(x, 0, z_p - R_T) = \frac{1}{2}BI'_T \int \left[x (d\ell)_{y=0} \right] \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}BI'_T \int \left[(z_p - R_T) (d\ell)_{y=0} \right] \hat{\mathbf{k}}. \quad (\text{C.30})$$

Sumando las Ecs. (C.29) y (C.30) se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau}(x, 0, z_p + R_T) + \boldsymbol{\tau}(x, 0, z_p - R_T) = -BI'_T \int \left[(R_T) (d\ell)_{y=0} \right] \hat{\mathbf{k}}, \quad (\text{C.31})$$

donde otra vez se muestra que la sección transversal de la barra tiende a girar alrededor del eje Z para producir la torsión de la barra, hecho que está de acuerdo con la Ec. (C.28).

En lo anterior se consideró un lazo representativo T , de radio R_T que está dentro del círculo C_1 y por el que circula la corriente I'_T , para calcular algunos valores de la torca neta $\boldsymbol{\tau}_n$ aplicada a la barra cuando el eje de la bobina está en $z = z_p$. Otras contribuciones a $\boldsymbol{\tau}_n$ vendrían de sumar las torcas debidas a todos los lazos dentro del círculo C_1 , cada uno de ellos con su propio radio y con una corriente eléctrica asociada. Si se denota con x' el centro de círculos paralelos a C_1 , éste estaría centrado en $x' = 0$. Con la notación anterior, contribuciones adicionales a la torca neta provendrían de la suma de todas las torcas producidas por todos lazos, sobre planos paralelos al plano YZ , que se encuentran en círculos entrados en $x' \neq 0$, es decir, $-R \leq x' < 0$ y $0 < x' \leq R$, y que llenan el volumen de la barra; nuevamente cada uno de los lazos con su propio radio y con una corriente eléctrica asociada. Considerar lazos centrados en $x' \cong R$ serían como “círculos doblados” que seguirían la forma de la frontera de la barra y el análisis sería más complicado. Siguiendo con la línea de esta descripción aproximada, permítase considerar que los lazos son círculos para toda x' para que por medio de las Ecs. (C.28) y (C.31) se puedan calcular los diferentes valores de la torca para círculos centrados en $x = x'$ con $|x'| \leq R$. Las Ecs. (C.28) y (C.31) no dependen explícitamente de x , así que para tomar en cuenta la información de los diferentes lazos circulares que llenan el volumen de la barra habría que cambiar en dichas ecuaciones: $R_T \rightarrow R_{\text{lazo}}$ e $I'_T \rightarrow I'_{\text{lazo}}$ y junto con esto último cambiar $(\mathbf{B}_b)_{x=0} \rightarrow (\mathbf{B}_b)_x$ lo que a su vez implica considerar una resistencia efectiva \mathcal{R} para cada una de las corrientes eléctricas en los lazos. De acuerdo con lo anterior, la Ec. (C.28) se convierte en: $\boldsymbol{\tau}(x, R_{\text{lazo}}, z_p) + \boldsymbol{\tau}(x, -R_{\text{lazo}}, z_p) = -BI'_{\text{lazo}} \int \left[R_{\text{lazo}} \left\{ (d\ell)_{z_p} \right\} \right] \hat{\mathbf{k}}$, la Ec. (C.31) en: $\boldsymbol{\tau}(x, 0, z_p + R_{\text{lazo}}) + \boldsymbol{\tau}(x, 0, z_p - R_{\text{lazo}}) = -BI'_{\text{lazo}} \int \left[(R_T) (d\ell)_{y=0} \right] \hat{\mathbf{k}}$ y la Ec. (C.23) se convierte en: $I'_{\text{lazo}} = \frac{\omega A_{\text{lazo}} (\mathbf{B}_b)_x \text{sen } \omega t}{\mathcal{R}}$, donde A_{lazo} es el área de cada uno de los lazos.

Juntando esta serie de ideas aproximadas se puede afirmar que la torca neta, τ_n , producida por la inducción magnética, \mathbf{B} , del imán permanente sobre las corrientes eléctricas, I'_{lazo} , en los diferentes lazos que llenan el volumen de la barra produce la torsión inicial de ésta alrededor del eje Z en el punto $z = z_p$, que es la posición del eje de la bobina del EMAT-excitador. Esta torca neta, τ_n , que es función del tiempo a través de la expresión para la corriente eléctrica, I'_{lazo} , es la que comunica la torsión al resto del material de la barra conforme transcurre el tiempo. Cuando se inyecta en la bobina, situada en z_p , un voltaje continuo de frecuencia angular ω que coincide con una frecuencia angular de resonancia de la barra, $\omega \equiv \omega_R = 2\pi f_R$, la torca neta, τ_n , aplicada en ese punto comunica la torsión al resto de la barra para producir una onda torsional estacionaria en la barra en el momento en que las pérdidas del sistema igualan a la energía inyectada. La onda torsional estacionaria, en $z = z_p$, se puede escribir a partir de la Ec. (C.4): $\varphi(z, t) = \varphi_0(z) \cos \omega t$ con $\varphi_0(z) = 2A \cos \frac{\omega}{c} z \ll 1$, como:

$$\varphi(z_p, t) = 2A \cos \frac{\omega_R}{c} z_p \cos \omega_R t = 2A \cos k_N z_p \cos \omega_R t, \quad (\text{C.32})$$

donde c es la velocidad de la onda torsional, $k_N = \frac{\omega_R}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_N}$ es el número de onda, $\lambda_N = \frac{2L}{N}$ es la longitud de onda, L es la longitud de la barra y $N = 1, 2, \dots$, es el número de nodos en la amplitud de la onda torsional.

En principio, el punto z_p donde se coloca el eje de la bobina puede ser cualquier punto sobre la barra, sin embargo, hay que tomar en cuenta que puede darse el caso de una onda torsional estacionaria que tenga uno de sus nodos justo en z_p , esto es, $z_p \equiv z_{\text{nodo}}$ y en este caso jamás se excitaría dicha onda. Supóngase que la onda estacionaria tiene $N = 3$ nodos, entonces: $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$, $k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3} = \frac{3\pi}{L}$ y empleando la Ec. (C.32) se tendrá que: $\varphi(z_{\text{nodo}}, t) = 2A \cos k_3 z_{\text{nodo}} \cos \omega_R t = 2A \cos \frac{3\pi}{L} z_{\text{nodo}} \cos \omega_R t \equiv 0$ para $z_{\text{nodo}} = \frac{L}{6}$, $z_{\text{nodo}} = \frac{L}{2}$ y $z_{\text{nodo}} = \frac{5L}{6}$. Si el EMAT-excitador se posiciona en cualquiera de estos tres valores de z_{nodo} la amplitud de la onda torsional en esos puntos es cero y por lo tanto no se podrá excitar dicha onda. Típicamente el EMAT-excitador se posiciona en los extremos libres de la barra donde $\varphi(z, t)$ es máxima. Si por alguna razón es de interés excitar una onda en un punto que no sea uno de los extremos de la barra, hay que evitar situar el EMAT-excitador en un nodo debido a la razón expuesta arriba. ¿Cómo saber dónde están los nodos en la amplitud de una onda estacionaria? Aquí es dónde el cálculo teórico ayuda a contestar la pregunta. Experimentalmente, si se

sospecha que se está en un nodo, lo que se hace es mover el EMAT-excitador alrededor de ese punto. Lo anterior es la descripción sobre cómo excitar la onda. Análogamente, el EMAT-detector no debe posicionarse en un nodo de la amplitud de la onda torsional.

C.2. Transductor piezoeléctrico

Para estudiar el Sistema B se empleó como excitador un transductor piezoeléctrico. El efecto piezoeléctrico [31] se crea por un esfuerzo mecánico en un material piezoeléctrico, usualmente un cristal, cuando se aplica un campo eléctrico por medio de un voltaje a través de éste, o en forma inversa, el material piezoeléctrico crea un voltaje cuando se le aplica un esfuerzo mecánico. Un voltaje oscilante produce un esfuerzo oscilante que excita la propagación de ondas sobre un objeto que está en contacto con el transductor piezoeléctrico.

El transductor piezoeléctrico empleado como excitador de las ondas torsionales se colocó en un extremo de la barra del Sistema B, sobre uno de los cuboides grandes cerca de uno de sus bordes para que el momento de torsión M_T aplicado fuera máximo. Concretamente, se colocó sobre la barra en la posición marcada con un punto negro en la Fig. B.2. Una vez posicionado el transductor piezoeléctrico se le aplicó un voltaje alterno proveniente de la secuencia: “oscilador → amplificador de potencia → excitador”, en relación a la Fig. 3.3, para que éste a su vez produjera una fuerza oscilante que excitara la propagación de las ondas torsionales en la barra del Sistema B.

Por un lado, resulta claro que en la barra redonda del Sistema A no se puede usar el transductor piezoeléctrico para excitar las ondas torsionales, y por otro lado, aunque en el Sistema B se puede emplear el EMAT como excitador de las mismas, se empleó el transductor piezoeléctrico porque a éste sí fue posible aplicarle la máxima potencia del amplificador de potencia con que se cuenta en el laboratorio y que aparece en la Fig. 3.3. A la barra del Sistema B se requiere comunicarle mayor energía por ser más masiva que la barra del Sistema A. Como se sabe, es común usar un acoplador entre el piezoeléctrico y la superficie con la que éste tiene contacto; típicamente se usan

como acopladores agua, grasa o algún tipo de aceites. En este experimento el piezoeléctrico funcionó perfectamente sin emplear un acoplador.

Si se deseara emplear un EMAT como excitador de las ondas torsionales en el Sistema B se requeriría hacer una bobina con alambre de mayor diámetro para que soportara aplicarle mayor potencia. En el momento de hacer el experimento resultó más rápido emplear el transductor piezoeléctrico que hacer una nueva bobina.

Cabe mencionar que el transductor piezoeléctrico se tomó de un encendedor comercial al cual se le hicieron tanto sus conexiones como un soporte adecuado.

C.3. Sistema mecánico⁷

Se le llama sistema mecánico [32] al conjunto de estructuras y piezas necesarias para: (1) soportar la barra de aluminio en estudio, (2) mover y medir las posiciones del excitador y del detector, (3) fijar y conectar cuatro chumaceras al conjunto número dos y (4) fijar y conectar dos destornilladores eléctricos, modificados, al conjunto número tres. Cabe destacar que los cuatro conjuntos están anclados, en forma independiente uno de otro, a dos pilares de construcción del edificio del laboratorio buscando que las vibraciones que reciba o genere cada uno de los conjuntos no las transmita a otro. Los pilares tienen un ancho de 37 cm y en su parte interna están separados 3.48 m.

El conjunto (1) está constituido por dos varillas de aluminio, cada una de 3.24 m de largo y 1/4" de diámetro, que corren paralelas entre los dos pilares del edificio. Sobre las varillas de aluminio hay varias piezas (piezas sujetadoras de hilo) que se pueden desplazar y sirven para atorar un hilo de nailon, su posición sobre cada varilla de aluminio se fija apretando un tornillo que apoya sobre ésta. A cada varilla de aluminio de este conjunto se le maquinó en sus

⁷El diseño del sistema mecánico se debe al autor de este trabajo con base en la experiencia obtenida en el laboratorio con un primer sistema para medir más sencillo. La gran mayoría de piezas que se describen en la Sección 4.3 fueron hechas por el Sr. Eladio Ortíz, y unas pocas por el autor, en el taller mecánico del Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos.

extremos una rosca de tornillo para acoplarla a dos barras de acero inoxidable de 1/2" de diámetro. Cada barra de acero tiene en un extremo rosca interior y en el otro tiene rosca exterior. Por un lado se hace la unión: barra de acero - varilla de aluminio en los extremos de esta última. Por otro lado, el extremo libre de la barra de acero con rosca exterior se pasa a través de un soporte que permite tensar a la unión: barra de acero - varilla de aluminio barra de acero. Éstos dos soportes están fijos a los pilares de construcción. Dos hilos de nailon muy delgados atravesados entre las varillas de aluminio se fijan a éstas por medio de cuatro piezas sujetadoras de hilo. Este par de hilos son los que soportan la barra a la que se le van a medir sus frecuencias de resonancia y las correspondientes amplitudes de onda torsionales. Para estudiar barras de hasta 1.20 m de longitud y una pulgada de diámetro es suficiente usar un par de hilos para soportarlas.

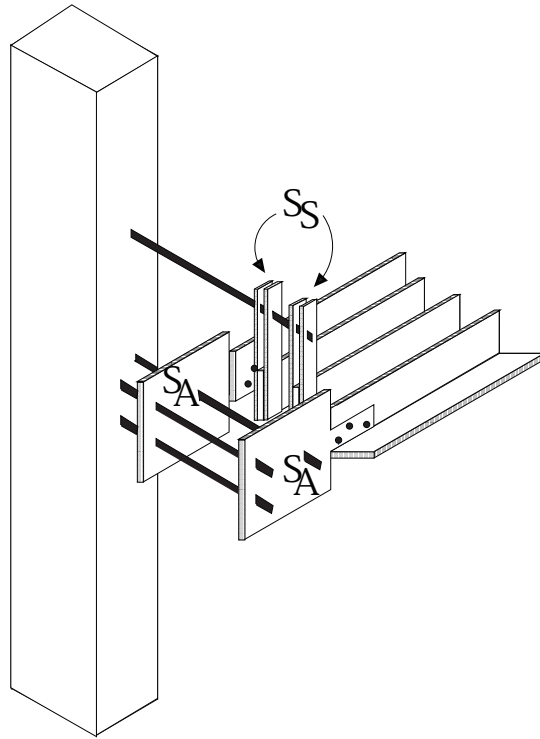


Figura C.4: Vista parcial del sistema mecánico. S_A es el soporte del ángulo, mismo que está sostenido por medio de tres varillas roscadas de $1/2''$ empotradas al muro. El ángulo corre hacia la derecha y es sobre el cuál se moverá un deslizador. S_S es el soporte de la solera, que a su vez está sostenido por un varilla roscada de $1/4''$. Cada uno de los soportes S_S puede moverse hacia arriba y hacia abajo. A la mitad de la longitud de la solera un perno fijo a ésta carga al ángulo de aluminio para mantenerlo horizontal.

El conjunto (2) es más laborioso de describir, razón por la que se presentan algunas figuras y fotografías. El alma de este conjunto son dos ángulos de aluminio de largo 3.66 m,⁸ espesor $1/4''$ y lados $2'' \times 2''$. Para compensar lo que en forma natural se pandea cada ángulo, sendas soleras también de aluminio ($1/4''$, $2''$, 3.66 m), colocadas verticalmente y con un perno fijo a la mitad de su longitud cargan a cada uno de los ángulos. Un hilo tensado,

⁸Por convención las dimensiones se dan en el siguiente orden: espesor, lado o lados y longitud, a menos que se indique lo contrario.

a manera de nivel, sobre los ángulos de aluminio fija su horizontalidad. Si el ángulo está pandeado se suben las soleras para que el perno suba a su vez al ángulo de aluminio. Los soportes de cada ángulo S_A y los soportes de las soleras S_S , un par de cada uno de ellos en cada extremo, están aislados mecánicamente y fijos a dos pilares de construcción del edificio por medio de varias varillas roscadas de 1/4" de diámetro, Fig. C.4. Cada uno de los soportes S_S se puede mover verticalmente sobre la varilla roscada para subir o bajar la solera deseada.

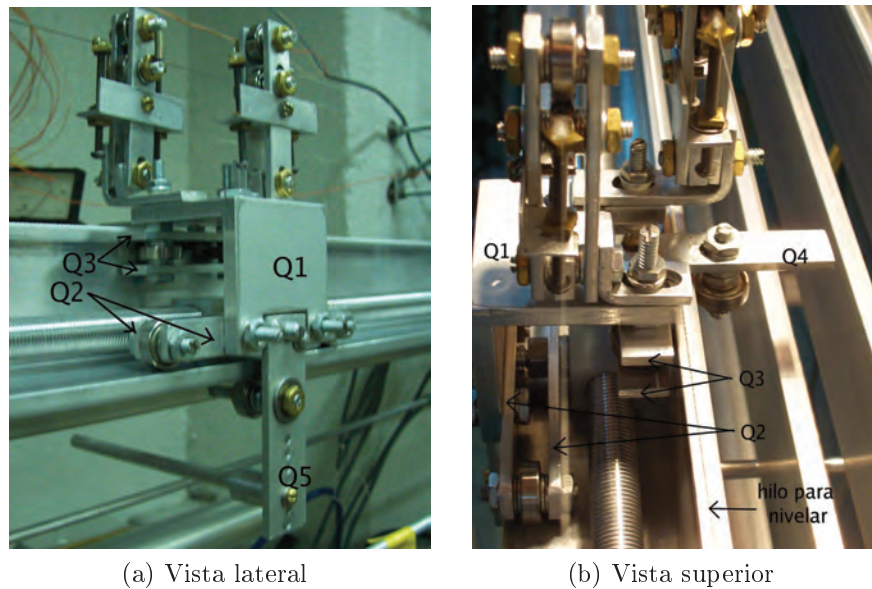


Figura C.5: Deslizador y "mecanismos" del nicromel y del alambre común. Para el deslizador: Q1 es ángulo de lados iguales, Q2 y Q3 son pares de soleras que forman los ejes. (a) La solera Q5 sirve para fijar un rodamiento inferior, que hace las veces de contra, y sirve para fijar una varilla que a su vez soporta el detector. En la parte de arriba se muestran los "mecanismos" del nicromel y del alambre común. (b) Q4 es una solera para fijar el rodamiento posterior del deslizador que hace las veces de contra. Se aprecian el tubo roscado con la tuerca de nailon. El hilo tensado para nivelar está sobre el ángulo de aluminio. Arriba a la izquierda se ve completo el "mecanismo" del alambre de nicromel.

Sobre cada uno de los ángulos de aluminio se mueve un deslizador,⁹ uno para fijar el detector de las vibraciones y otro deslizador para fijar el excitador de las mismas. Cada deslizador, Fig. C.5, está armado con varias piezas de aluminio (ángulo y solera), varilla roscada y 6 rodamientos. Las piezas necesarias para armar un deslizador se dan en la Tabla C.1.

Cuadro C.1: Construcción del deslizador. Se emplea varilla roscada de 3/16" cortada a la medida para armar el deslizador, Fig. C.5.

Ángulo	Solera	Rodamiento
Q1, una pieza 1/4", 2", 2", 5 cm	Q2, dos piezas 1/8", 1/2", 10 cm	seis piezas diám. ext. 16 mm diám. int. 5 mm ancho 5 mm
	Q3, dos piezas 1/8", 1/2", 6.5 cm	
	Q4, una pieza 1/8", 1/2", 5.5 cm	
	Q5, una pieza 1/8", 2 cm, 8 cm	

Ajustar el deslizador para que en su movimiento a lo largo del ángulo de aluminio de 3.66 m no cambie su posición relativa respecto a éste es una tarea laboriosa. En la Fig. C.5 (a) y en la parte inferior de Q1 se ven tres varillas roscadas, la central es el perno que ancla el deslizador a la tuerca de nailon, las de sus lados fijan la estructura y sirven para soportar el chasis del amplificador del EMAT detector, Fig. C.7. También en la Fig. C.5 (a) se ve una pequeña varilla sujeta de la solera Q5 que sirve para soportar el EMAT detector, empleado para los Sistemas A y B. Análogamente, en el otro deslizador hay una solera del tipo de Q5 y otra pequeña varilla para sujetar el excitador de las ondas torsionales, que para el Sistema A fue un EMAT y para el Sistema B fue transductor piezoeléctrico.

⁹En este trabajo se entiende por “deslizador” una especie de carrito armado con seis rodamientos, soleras y ángulos de aluminio, tornillos y tuercas metálicos y una tuerca de nailon. El deslizador unido a un tubo roscado a través de la tuerca de nailon permite su tracción. Este deslizador sirve como soporte del detector (o del excitador) y sirve como soporte de dos “mecanismos”. Cada mecanismo está armado con un rodamiento, una rueda de cobre, soleras de aluminio, tornillos y tuercas metálicos y dos resortes. Ver Fig. C.5. Un mecanismo permite el contacto eléctrico con nicromel y el otro con alambre común, ambos dan la posición del deslizador a través de un divisor de voltaje. El par de mecanismos forman lo que se llama CURSOR en la Fig. 3.3.

En este punto se debe describir la forma cómo se le comunica tracción a los deslizadores o describir la forma cómo se mide su posición. La primera descripción relaciona los conjuntos número dos, número tres y número cuatro en los que se dividió el llamado sistema mecánico, descritos al inicio de ésta sección. Medir la posición de los deslizadores es algo que está dentro del conjunto número dos, razón por la cual se describirá primero.

Para medir la posición del excitador de las vibraciones se emplea un divisor de voltaje hecho con alambre de nicromel¹⁰ calibre¹¹ # de 5000 Ω /m y alambre común. Hay otro divisor de voltaje para el detector. Los extremos de cada uno de estos alambres están enredados sobre pequeños postes cilíndricos hechos de tubo de acrílico, hay cuatro de éstos postes por cada divisor. Dos de los pequeños postes cilíndricos están fijos, no giran; por su diámetro interior entran a presión sendas barras metálicas que los sujetan de alguna manera a la placa de aluminio S_A , lado izquierdo, que se aprecia en la Fig. C.4. Por los centros de los otros dos pequeños postes cilíndricos están metidas a presión sendas clavijas.¹² Los postes con las clavijas están sujetos de alguna manera a la otra placa de aluminio S_A , lado derecho en la Fig. C.4. Por medio de éstas clavijas se puede dar la tensión deseada tanto al nicromel como al alambre común. Los pequeños postes cilíndricos son de acrílico para aislar eléctricamente. Típicamente se aplican 10 VDC en los extremos del nicromel y un cursor, que se describe en el siguiente párrafo, entre el nicromel y el alambre común proporciona el voltaje dividido que es proporcional a la posición del excitador, Fig. C.8, mismo que se lee con un sistema de adquisición de datos. Para medir la posición del detector de las vibraciones se construyó otro divisor de voltaje como el descrito anteriormente.

El cursor que proporciona el voltaje dividido que es proporcional a la posición del excitador está formado por dos puntos de contacto mecánico-eléctrico, uno sobre el nicromel, Mn, y otro sobre el alambre común, Ma. Los términos

¹⁰Nicromel es el nombre que se emplea en México, por usos y costumbres, para designar a la marca comercial registrada: nichrome. Esta marca comercial produce, particularmente alambre, de una aleación de níquel, cromo e hierro con las propiedades de tener una alta temperatura de fusión y valores grandes de resistencia por unidad de longitud.

¹¹Se hicieron pruebas con nicromel de otros calibres y valores de resistencia por unidad de longitud pero el que se reporta funciona bastante bien.

¹²Una clavija es la pieza que se emplea para tensar la cuerda de una guitarra. Un clavijero de guitarra tiene cuatro clavijas y simplemente se cortaron para separarlas, empleándose una clavija para cada alambre en los divisores de voltaje.

Ma y Mn se explican más adelante. Uno de estos puntos de contacto y las piezas que los forman se referirán como: "mecanismo". Hay dos mecanismos por cada divisor. Los dos mecanismos están fijos, pero aislados eléctricamente, sobre el deslizador del excitador y conectados eléctricamente entre ellos por medio de un caimán. En la parte alta de la Fig. C.5 (a) se aprecian los dos mecanismos (o el cursor) para leer el voltaje dividido. Cada mecanismo tiene en la parte inferior un rodamiento¹³ cuyo eje se mueve hacia arriba y hacia abajo, y en la parte superior tiene una rueda de cobre¹⁴ que no gira y cuyo eje también está fijo. El nicromel (o el alambre común) pasa entre el rodamiento y la rueda de cobre. Los ejes del conjunto: rodamiento - rueda de cobre están unidos por medio de dos resortes para que el eje del rodamiento suba y obligue a que haya contacto entre el rodamiento, el nicromel (o el alambre común) y la rueda de cobre. Con tubo capilar de acrílico se hizo una guía para centrar el nicromel (o el alambre común) sobre cada rodamiento-rueda de cobre. Hay dos guías para cada mecanismo. En las Figs. C.5 (a) y (b) se aprecian estas guías pegadas a la tuerca de un tornillo de 1/8" de diámetro. La tuerca está horizontal. El tornillo en posición vertical está sujeto a un ángulo de aluminio colocado en posición horizontal. Al desplazarse el deslizador y los mecanismos, cada alambre va arrastrando sobre la rueda de cobre mientras que el rodamiento va girando. Con un caimán entre los ejes de las dos ruedas de cobre se ponen en contacto eléctrico los mecanismos. Se aplica voltaje entre los puntos uno y dos de la Fig. C.8 y el voltaje dividido se lee entre los puntos dos y tres de la misma figura. Al desplazarse el deslizador este voltaje dividido va cambiando y el ADC del CAMAC lo va leyendo, mismo que la PC lo graba en un archivo de datos. Una descripción análoga ocurre para medir la posición del detector de las vibraciones torsionales.

Los conjuntos (3) y (4) del sistema mecánico están relacionados porque tienen que ver con la tracción de los deslizadores del excitador y del detector de las vibraciones. Regresando al deslizador del excitador se verá la forma en que se le comunica tracción, su construcción está descrita arriba, Tabla C.1. Este deslizador se mueve sobre uno de los ángulos de aluminio de 1/4", 2"X2", 3.66 m; está anclado, usando un perno, a una tuerca de nailon, que no gira, pero que por cuyo interior pasa un tubo roscado. Éste tiene acoplado en sus extremos dos flechas de acero inoxidable que llegan a dos chumaceras que

¹³De 16 mm de diámetro exterior, 5 mm de diámetro interior y 5 mm de ancho.

¹⁴Inicialmente se pusieron en cada "mecanismo" dos rodamientos, pero el mejor resultado se obtuvo poniendo arriba una rueda de cobre.

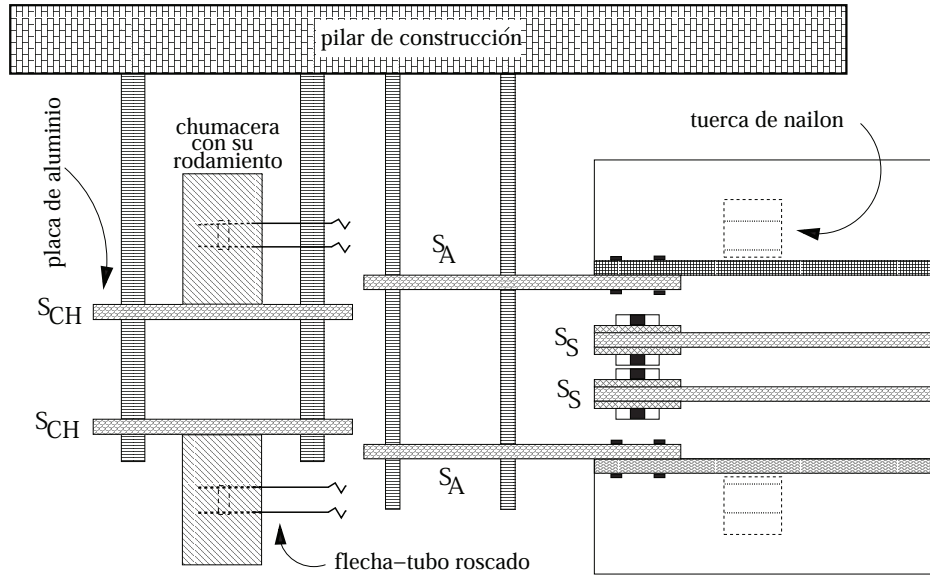


Figura C.6: Vista superior: chumaceras y ángulos con sus soportes, y soleras para nivelar. Soporte de la chumacera S_{CH} , soporte del ángulo S_A y soporte de la solera S_S . La flecha está fija al rodamiento de la chumacera. La unión: flecha-tubo roscado se hizo con un taquete expansivo. El tubo roscado pasa a través de la tuerca de nailon, misma que está fija al deslizador, no mostrado, al girar el tubo, proporciona la tracción al deslizador.

forman parte del conjunto (3), Fig. C.6. Por el rodamiento de la chumacera de la izquierda pasa una flecha. A través del rodamiento de la chumacera de la derecha, no mostrada, pasa una flecha más larga que la anterior. Esta flecha del lado derecho está acoplada por medio de una manguera a un destornillador eléctrico que forma parte del conjunto (3). Cuando gira el destornillador lo hace también el tubo roscado dentro de la tuerca de nailon¹⁵ y le comunica movimiento al deslizador del excitador. Una descripción análoga se tiene para la tracción del deslizador del detector. El tubo roscado está maquinado a partir de un tubo de aluminio de 1.2 mm, 1/2", 3.66 m; al que se le hizo rosca exterior de 1/2" con 20 hilos por pulgada. Este tubo

¹⁵Tiene que ser otro material porque tuerca y tornillo de aluminio tienden a atascarse al girar frecuentemente.

gira en ambas direcciones y hay que tener cuidado en cómo se acopla a la flecha de acero inoxidable. La solución que se dio fue la siguiente: maquinar en un extremo de la flecha una rosca exterior de 1/4", acoplarla a un taquete¹⁶ expansivo de 1/4" y éste al tubo roscado. La tuerca del taquete se coloca en el interior del tubo roscado y el extremo de la flecha con rosca exterior de 1/4" se atornilla en esta tuerca. El otro extremo de la flecha tiene maquinada rosca exterior de 1/2" y va hacia una chumacera, la flecha de la derecha es más larga. Las tuercas de 1/2" en las flechas asientan sobre los rodamientos de las chumaceras. Al apretar un poco una de las tuercas de 1/2" se tensa el conjunto "flecha \longleftrightarrow tubo roscado \longleftrightarrow flecha" y los taquetes expansivos se abren garantizando la unión flecha \longleftrightarrow tuboroscado. En relación a la Fig. C.6, no se muestran del lado derecho los soportes de las chumaceras S_{CH} y los soportes de los destornilladores. Éstos están aislados mecánicamente de los soportes S_A y S_S , ya descritos, para evitar vibraciones indeseables. Un circuito controla a los destornilladores, Fig. C.9.

C.4. Sistema automatizado

En la Fig. 3.3 se presenta el diagrama de bloques del arreglo experimental y a lo largo de la presente sección se explica la interrelación entre las diferentes partes. Una PC con sistema operativo Linux y por medio de un puerto serial RS-232, denotado por PS1, controla al CAMAC (*Computer Automated Measurement and Control*) y por medio de otro puerto serial RS-232, denotado por PS2, controla al oscilador. Se cuenta con dos programas para la PC: un programa, PG1, hace barridos de frecuencia y el segundo programa, PG2, mide la amplitud de onda. Ambos programas se utilizan para estudiar los modos de oscilación compresional, torsional y flexional presentes en una barra; si el detector y el excitador están en la configuración para estudiar modos torsionales como es el caso del presente estudio, los programas PG1 y PG2 registran barridos de frecuencia o amplitudes de ondas torsionales.

El CAMAC consiste de un sistema de módulos conectados a través de un bus común de datos de 28 bits y un megahertz. En este experimento se usaron

¹⁶La palabra correcta en español es: taco. En este trabajo por usos y costumbres se usa la palabra: taquete.

dos módulos, el modelo 3527,¹⁷ es un convertidor analógico a digital (ADC o A/D Converter) de 14 bits de resolución del cual se usaron dos canales, uno para leer el voltaje que es proporcional a la amplitud de vibración de la barra y que proviene de la secuencia: “detector→amplificador (Fig. C.7)→ amplificador sensible a la fase→CAMAC→PC” y el otro canal para leer el voltaje dividido en la secuencia: cursor (Fig. C.8)→CAMAC→PC(PS1)”, que es proporcional a la posición del detector a lo largo de la barra en estudio. Este segundo canal del ADC también se usa para medir la posición del excitador, ya que sólo se mueve uno de ellos a la vez. En un archivo de la PC se graban los datos leídos. El segundo módulo del CAMAC es el modelo 3063 IGOR¹⁸ (Input Gate/Output Register) del cual se usaron seis canales o salidas, tres para controlar el motor que mueve al detector y otros tres canales o salidas para controlar el motor que mueve al excitador, Fig. C.9.

En la Fig. 3.3 la secuencia: “PC(PS2) ↔ oscilador” indica que los programas PG1 o PG2 hechos en FORTRAN para la PC controlan al oscilador: un programa fija, entre otros parámetros, la amplitud de voltaje de la señal sinusoidal, hace un barrido de frecuencia (PG1) o mantiene fija una frecuencia (PG2). En esta misma figura la secuencia:

$$\text{“oscilador} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{amplificador sensible a la fase} \\ \text{amplificador de potencia} \rightarrow \text{excitador} \end{array} \right\} \text{”}$$

por un lado, indica que el oscilador proporciona la frecuencia de referencia que necesita el amplificador sensible a la fase para funcionar; y por otro lado indica que el valor de amplitud de voltaje de la señal sinusoidal, previamente seleccionada en el oscilador, se envía al amplificador de potencia y después al EMAT empleado como excitador en el Sistema A o se envía al transductor piezoeléctrico empleado como excitador en el Sistema B para producir, en cualquiera de los dos casos, un espectro torsional (PG1) o la medida de una onda torsional (PG2).

¹⁷Tiene 32 canales y es auto intervalo de ± 10 mV a ± 10.24 V.

¹⁸El módulo IGOR tiene 16 bits de resolución y permite encender o apagar selectivamente sus 16 salidas de voltaje de 5 VDC.

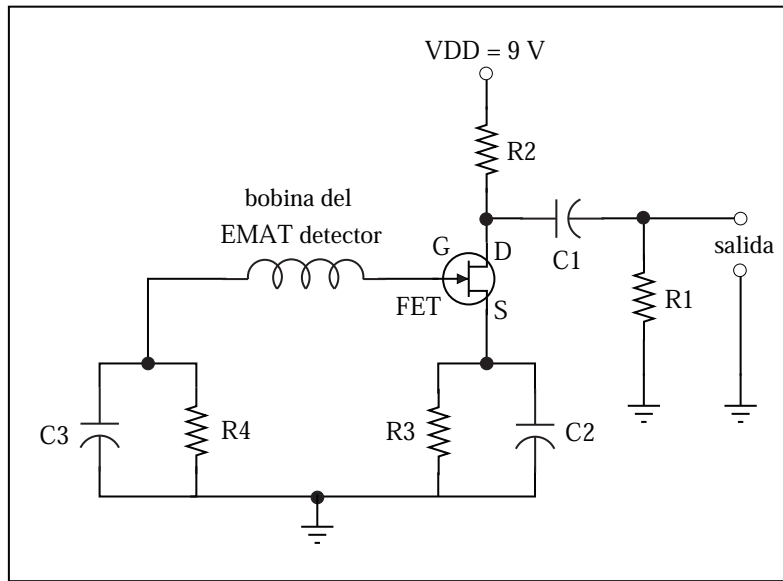


Figura C.7: Amplificador de alta impedancia de entrada. Los valores de las componentes empleadas son: FET 2N5484, $R_1=75\text{ k}\Omega$, $R_2=6.1\text{ k}\Omega$, $R_3=1.6\text{ k}\Omega$, $R_4=1.6\text{ M}\Omega$, $C_1=C_2=C_3=4.7\text{ }\mu\text{F}$ de tantalio. Se usó una batería recargable de 9 V.

Una breve descripción de cómo se inician los experimentos es la siguiente. Se utiliza un osciloscopio para monitorizar dos señales importantes: la señal del oscilador que se envía tanto al amplificador sensible a la fase como al amplificador de potencia, y la señal del detector tomada entre el amplificador y el detector sensible a la fase, Fig. 3.3 y Fig. C.7, ya sea que se mida un espectro de resonancias o una amplitud de onda para algún modo normal. Una vez que está alineada la barra en estudio sobre el sistema mecánico se mide el espectro de resonancias torsionales en un intervalo de frecuencias. Para lo anterior se corre el programa PG1 en la PC donde se fija el valor del voltaje de la señal del oscilador, el número de canal del ADC que lee el voltaje del amplificador sensible a la fase y las frecuencias inicial y final para hacer el barrido. El espectro a medir, en tiempo real, se va guardando en un archivo de la PC y se analiza en su monitor para ir tomando las decisiones pertinentes. Identificadas las resonancias torsionales sobre el espectro se procede a seleccionar una de ellas para realizar la medida de la amplitud de onda correspondiente a lo largo de la barra. Para esta medida de la amplitud

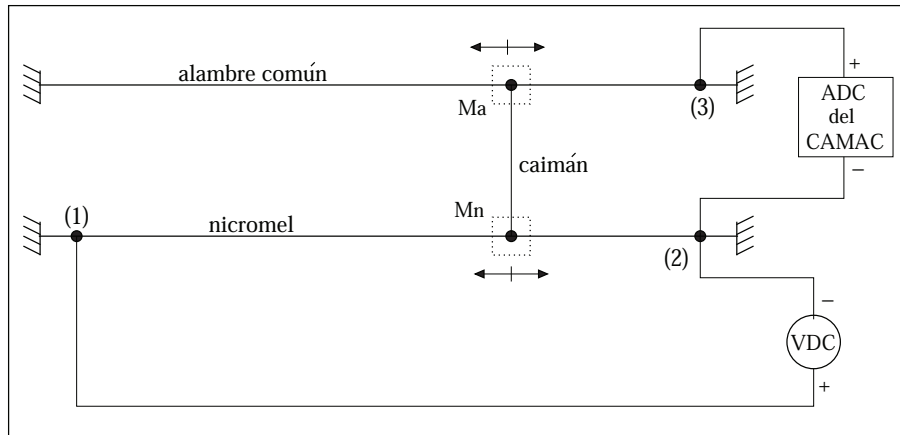


Figura C.8: Diagrama eléctrico del divisor de voltaje. Los cuadrados punteados son los "mecanismos" con sus puntos de contacto (●) Mn y Ma. El punto de contacto entre el rodamiento, el nichromel y la rueda de cobre es Mn. El punto de contacto entre el rodamiento, el alambre común y la rueda de cobre es Ma. Con un caimán entre los ejes de las dos ruedas de cobre se ponen en contacto eléctrico los mecanismos (cursor). Éstos, fijos al deslizador del EMAT excitador, se mueven solidariamente a la izquierda y a la derecha.

de onda se ajustan primero los interruptores de seguridad en los extremos de la barra y se corre el programa PG2 en la PC que pide decidir si mover el detector o el excitador, el número de canal del ADC que lee el voltaje del amplificador sensible a la fase, el número de canal del ADC que lee el voltaje dividido del divisor de voltaje y que es proporcional a la posición del detector/excitador sobre la barra, el valor de la frecuencia de resonancia y las posiciones inicial y final entre las que se va a mover el deslizador del detector/excitador. También la medida de la amplitud de onda, en tiempo real, se va guardando en otro archivo de la PC y se analiza en su monitor para ir tomando decisiones.

Es conveniente regresar a los circuitos de las Figs. C.7, C.8 y C.9 para agregar alguna información importante.

Comentario al circuito amplificador de alta impedancia de entrada, Fig. C.7. Los valores de las componentes usadas son: FET 2N5484, $R_1=75\text{ k}\Omega$, $R_2=6.1\text{ k}\Omega$, $R_3=1.6\text{ k}\Omega$, $R_4=1.6\text{ M}\Omega$, $C_1=C_2=C_3=4.7\text{ }\mu\text{F}$ de tantalio. Se usó una batería recargable de 9 V. La experiencia que se tubo fue que para cada FET

que se usó en las pruebas había que cambiar los valores de las resistencias R2 y R3 para optimizar la ganancia del circuito. Con los valores reportados se obtuvo una ganancia de alrededor de 11 en el intervalo de frecuencias de 0.1 a 100 kHz. El amplificador está dentro de una caja de aluminio, las tierras del circuito y la de la caja son las mismas. La caja de aluminio se fija al deslizador del detector por medio de dos varillas roscadas, las de los extremos, que aparecen en la parte inferior de Q1 en la Fig. C.5 (a).

Comentario al diagrama eléctrico del divisor de voltaje, Fig. C.8. La línea vertical entre Mn y Ma indica contacto eléctrico y en la práctica es un caimán. En la Fig. 3.3 el CURSOR está formado por Mn y Ma y es el mismo cursor del que se habló arriba en el sexto párrafo de la Sección 4.3. Siguiendo con la Fig. C.8, el punto de contacto (1) se hizo con dos pequeñas placas de cobre, entre las que pasa el nicromel, fuertemente apretadas por dos tornillos y tuercas de 1/8". Sobre una de las pequeñas placas se suelda un alambre forrado que va hacia el + de VDC; lo análogo se hizo con los puntos de contacto (2) y (3). La distancia entre (1) y (2) se ajusta de acuerdo a la longitud de la barra a la que se le van a medir sus frecuencias de resonancia y amplitudes de onda torsionales. Asociado al excitador se tiene un diagrama igual de componentes como el descrito en esta figura.

Comentario al circuito para controlar el motor de destornillador que mueve el deslizador del detector, Fig. C.9. Para controlar el movimiento del deslizador del excitador se tiene otro circuito igual. En la parte superior izquierda de la Fig. C.9 se muestra la fuente de 12 VDC que se empleó; se tomó de una fuente de voltaje comercial y que proporciona 44 VDC. El MC7824CT es un regulador de voltaje que baja a 24 VDC y el L781CV otro regulador de voltaje que baja a los 12 VDC. La fuente de voltaje de 12 VDC es común a los dos circuitos para la opción de "MANUAL". En el circuito del detector, cada uno de los tres relevadores son alimentados por tres salidas del módulo 3063 IGOR (Input Gate/Output Register) del CAMAC: una salida para el relevador B de encendido/apagado y en el que el interruptor de seguridad representa en la práctica a dos interruptores de proximidad colocados sobre el ángulo de aluminio por donde se mueve el deslizador, cuando éste llega a un extremo de la barra en estudio acciona el interruptor de proximidad y detiene el motor de destornillador. Una segunda salida del módulo IGOR es para el cambio de velocidad lento/rápido y una tercera salida para cambiar el sentido de giro del motor, mismo que se traduce en un movimiento del deslizador hacia a

la izquierda o hacia la derecha; se debe recordar que el motor hace girar al tubo roscado sobre el que se mueve una tuerca de nailon fija al deslizador, Fig. C.5(b). Para el circuito del excitador se usan otras tres salidas del módulo IGOR.

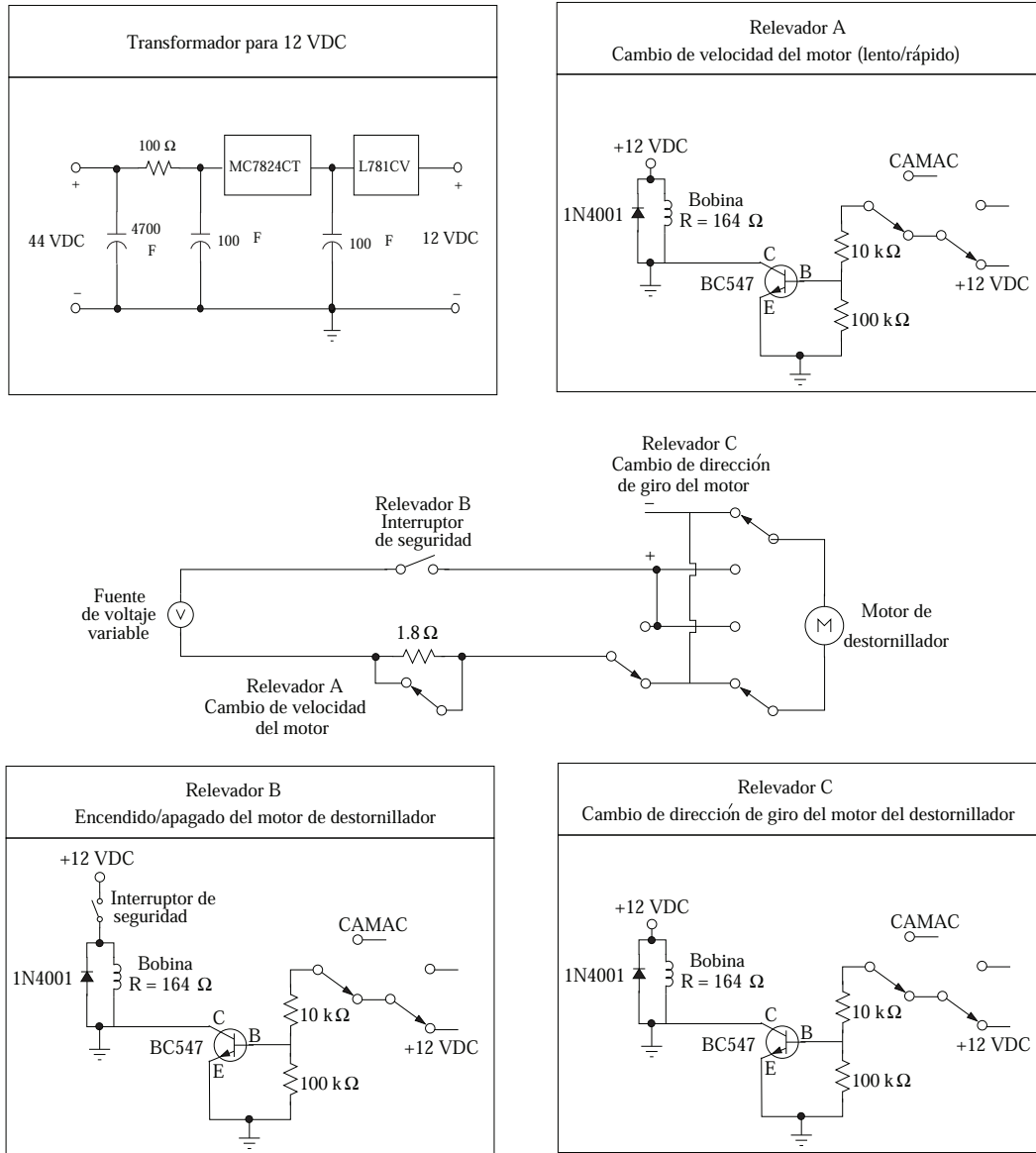


Figura C.9: Circuito para controlar el motor de destornillador que hace mover al deslizador del detector. Con los interruptores en la posición de CAMAC el programa PG2 de la PC controla al motor, mientras que en la posición mostrada se hace en forma “MANUAL”. Otro circuito idéntico se emplea para el deslizador del excitador.

Apéndice D

Expresión de Navier

La expresión de Navier [27, pág. 25] para calcular el momento de torsión M_T de una barra con sección transversal rectangular de ancho w y altura h está dada por la Ec. (2.7):

$$M_T = G \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{256}{\pi^6} \sum_{j=1,3}^{\infty} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(jk)^2} \frac{hw}{\left(\frac{j}{h}\right)^2 + \left(\frac{k}{w}\right)^2}, \quad (\text{D.1})$$

donde G es el módulo de corte y $\varphi(z, t)$ es la función que describe la onda torsional, ver la Fig. 2.1.

Como se mostró en el Cap. 2, la Ec. (D.1) conduce a la expresión para calcular la velocidad de las ondas torsionales en dicha barra, Ec. (2.14):

$$c_{\square} = \sqrt{\frac{G\alpha}{\rho I}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{\frac{\alpha}{I}} = c_{\circ} \sqrt{\frac{\alpha}{I}}. \quad (\text{D.2})$$

En esta ecuación ρ es la densidad, $c_{\circ} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, Ec. (2.6), es la velocidad de la onda torsional en una barra con sección transversal circular, la expresión para α en términos de los índices corridos $m = 0, 1, 2, \dots$ y $p = 0, 1, 2, \dots$ está dada por la Ec. (2.15):

$$\alpha = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{hw}{\left[\frac{2m+1}{h}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2} \quad (\text{D.3})$$

e I en la Ec. (D.2) es el momento polar de inercia de un rectángulo de ancho w y altura h , que rota respecto a un eje, que pasa por su centro (eje de la barra, Fig. 3.1 (b) y Fig. B.2), y es perpendicular a su sección transversal, este momento de inercia está dado por la Ec. (2.10)

$$I = \frac{hw^3 + h^3w}{12}. \quad (\text{D.4})$$

En el estudio de las escaleras de Wannier-Stark para el Sistema B, Fig. 3.1 (b), el buen acuerdo entre teoría y experimento en las frecuencias de resonancia, Fig. 3.7, dio confianza en emplear la Ec. (D.1), y por lo tanto la Ec. (D.2), para calcular las frecuencias de resonancia teóricas, Ec. (2.27) y Ecs. (A.1) y (A.2). Pese al buen acuerdo, se decidió hacer una verificación experimental de dichas ecuaciones con la idea de disipar dudas que surgieron sobre su validez [6], dado que se encontró poca información en la literatura acerca de la Ec. (D.1).

Sustituyendo en la Ec. (D.2) a las Ecs. (D.3) y (D.4), y despejando el cociente $\frac{c_{\square}}{c_{\circ}}$, se tiene que:

$$\frac{c_{\square}}{c_{\circ}} = \sqrt{\frac{\alpha}{I}} = \sqrt{\frac{\frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{hw}{\left[\frac{2m+1}{h}\right]^2 + \left[\frac{2p+1}{w}\right]^2}}{\frac{hw^3+h^3w}{12}}}, \quad (\text{D.5})$$

donde se observa que cada una de las velocidades en el lado izquierdo de la ecuación se pueden medir mientras que el lado derecho de la misma se puede calcular trivialmente. Con esta idea y con el propósito de que aparezca el cociente $\frac{w}{h}$, la ecuación anterior se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{c_{\square}}{c_{\circ}} &= \sqrt{\frac{\alpha}{I}} = \\ &= \sqrt{\frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{12}{\left[1 + \left(\frac{w}{h}\right)^{-2}\right] \left[(2m+1)^2 \left(\frac{w}{h}\right)^2 + (2p+1)^2\right]}}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Para realizar el experimento, consistente en verificar la Ec. (D.6), se emplearon dos barras de aluminio de la misma aleación, lisas, sin estructura.

Una barra con sección transversal circular se empleó para medir la velocidad de las ondas torsionales, velocidad que no depende del radio de la barra, Ec. (2.6). La segunda barra, inicialmente con sección transversal cuadrada, se fue maquinando en el taller mecánico para cambiar la geometría de su sección transversal. Así que por un lado se midieron c_{\circ}^{exp} y c_{\square}^{exp} para calcular la parte izquierda de la Ec. (D.6), mientras que por otro lado simplemente se evaluó en lado derecho de la Ec. (D.6).

Primero se determinó la velocidad de las ondas torsionales en la barra redonda, c_{\circ}^{exp} , de dimensiones: 18.7 mm de diámetro y 0.85 m de largo, siguiendo la idea expuesta en el apéndice A.3 en relación a la Fig. A.1. El valor obtenido fue: $c_{\circ}^{exp} = 3190$ m/s. A continuación se tomó la barra cuadrada de dimensiones: 1.905 cm por 1.905 cm por 1.0 m de largo y se midió la velocidad de las ondas torsionales $c_{\square}^{exp}(1)$ de la manera antes expuesta. Posteriormente, empleando una fresadora, a la barra cuadrada se le rebajó uno de sus lados y se volvió a medir la velocidad de las ondas torsionales, $c_{\square}^{exp}(2)$. A la barra anterior, ya con sección transversal rectangular, se le rebajó una vez más el mismo lado que antes y se midió $c_{\square}^{exp}(3)$. El proceso anterior se realizó tres veces más.

Los valores obtenidos después de éstas series de mediciones se reportan en la Tabla D.1. El resultado de evaluar el lado derecho de la Ec. (D.6) variando el cociente w/h entre 0.25 y 4.0 y las mediciones se presentaron ya en la Fig. 3.2. Como se ve de la figura, el acuerdo entre la teoría y el experimento es muy bueno.

Cuadro D.1: Valores medidos de h empleando $w = 1.91$ cm y valores medidos de c_{\square}^{exp} empleando $c_{\circ}^{exp} = 3190$ m/s.

w/h	1.00	1.11	1.28	1.46	1.76	2.12
$c_{\square}^{exp}/c_{\circ}^{exp}$	0.915	0.910	0.891	0.856	0.793	0.712

Bibliografía

- [1] Maynard, J. D. Acoustical analogs of condensed-matter problems. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 401-417 (2001).
- [2] A. Morales, J. Flores, L. Gutiérrez, and R. A. Méndez-Sánchez, Compressional and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures. *J. Acoust. Soc. Am.* **112**, 1961-1967 (2002).
- [3] A. Díaz-de-Anda, A. Pimentel, J. Flores, A. Morales, L. Gutiérrez, and R. A. Méndez-Sánchez. Locally periodic Timoshenko rod: experiment and theory. *J. Acoust. Soc. Am.* **117**, 2814-2819 (2005).
- [4] A. Morales, R. A. Méndez-Sánchez, and J. Flores. Topological defects in 1D elastic waves. *Physica E.* **19**, 289-291 (2003).
- [5] L. Gutiérrez, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales. Wannier-Stark ladders in one-dimensional elastic systems, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 114301 (2006).
- [6] Monsivais, Guillermo; Méndez-Sánchez, Rafael A.; Díaz-de-Anda, Alfredo; Flores, Jorge; Gutiérrez, Luis; and Morales, Alejandro. Elastic Wannier-Stark ladders in torsional waves. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* **2**, 1629-1638 (2007).
- [7] V. Agarwal, J. A. del Río, G. Malpuech, M. Zamfirescu, A. Kavokin, D. Coquillat, D. Scalbert, M. Vladimirova, and B. Gil, *Phys. Photon Bloch oscillations in porous silicon optical superlattices. Rev. Lett.* **92**, 097401 (2004).

- [8] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg. Experimental observation of linear and nonlinear optical Bloch oscillations. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4756 (1999).
- [9] R. Sapienza, P. Costantino, D. Wiersma, M. Ghulinyan, C. J. Oton, and L. Pavesi. Optical analogue of electronic Bloch oscillations. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 263902 (2003).
- [10] M. Ghulinyan, C. J. Oton, Z. Gaburro, L. Pavesi, C. Toninelli, and D. S. Wiersma. Zener tunneling of lightwaves in an optical superlattice. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 127401 (2005).
- [11] N. D. Lanzillotti Kimura, A. Fainstein, and B. Jusserand. Phonon Bloch oscillations in acoustic-cavity structures. *Phys. Rev. B* **71**, 041305(R) (2005).
- [12] G. H. Wannier. Wave functions and effective hamiltonian for Bloch electrons in an electric field. *Phys. Rev.* **117**, 432 (1960); G. H. Wannier. Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields. *Rev. Mod. Phys.* **34**, 645 (1962); G. H. Wannier. *Elements of Solid State Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1959), p. 190; A. G. Chynoweth, G. H. Wannier, R. A. Logan, and D. E. Thomas. Observation of Stark splitting of energy bands by means of tunnelling transitions. *Phys. Rev. Lett.* **5**, 57 (1960)
- [13] F. Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Z. Phys.* **52**, 555 (1928).
- [14] C. Zener. A Theory of the electrical breakdown of solid dielectrics. *Proc. R. Soc. A* **145**, 523 (1934).
- [15] C. F. Hart and D. Emin. Time evolution of a Bloch electron in a constant electric field. *Phys. Rev. B* **37**, 6100 (1988); J. Zak. Comment on the existence proofs of the Wannier-Stark ladder. *Phys. Rev. B* **43**, 4519 (1991); C. F. Hart and D. Emin. Reply to “Comment on the existence proofs of the Wannier-Stark ladder”. *Phys. Rev. B* **43**, 4521 (1991).
- [16] H. Fukuyama, R. A. Bari, and H. C. Froggedby. Tightly bound electrons in a uniform electric field. *Phys. Rev. B* **8**, 5579 (1973).

- [17] A. Rabinovitch. Stark ladders in finite crystals. *Phys. Lett. A* **59**, 475 (1977).
- [18] J. R. Banavar and Darryl D. Coon. Widths and spacing of Stark ladder levels. *Phys. Rev. B* **17**, 3744 (1978).
- [19] S. Nagai and J. Kondo. Electrons in infinite one-dimensional crystals in a uniform electric field. *J. Phys. Soc. Jpn.* **49**, 1255 (1980).
- [20] E. E. Méndez, F. Agulló-Rueda, and J. M. Hong. Stark localization in GaAs-GaAlAs superlattices under an electric field. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2426 (1988); J. Bleuse, G. Bastard, and P. Voisin. Electric-field-induced localization and oscillatory electro-optical properties of semiconductor superlattices. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 220 (1988).
- [21] J. Feldmann, K. Leo, J. Shah, D. A. B. Miller, J-E. Cunningham, T. Meier, G. von Plessen, A. Schulze, P. Thomas, and S. Schmitt-Rink. Optical investigation of Bloch oscillations in a semiconductor superlattice. *Phys. Rev. B* **46**, 7252 (1992); K. Leo, P. H. Bolivar, F. Brüggemann, R. Schwedler, and K. Köhler. Observation of Bloch oscillations in a semiconductor superlattice. *Solid State Commun.* **84**, 943 (1992); T. Dekorsy, P. Leisching, K. Köhler, and H. Kurz. Electro-optic detection of Bloch oscillations. *Phys. Rev. B* **50**, 8106 (1994).
- [22] G. Monsivais, M. del Castillo-Mussot, and F. Claro. Stark-ladder resonances in the propagation of electromagnetic waves. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1433 (1990).
- [23] J. L. Mateos and G. Monsivais. Stark-ladder resonances in elastic waves. *Physica A (Amsterdam)* **207**, 445 (1994).
- [24] G. Monsivais, R. Rodríguez-Ramos, R. Esquivel-Sirvent, and L. Fernández-Álvarez. Stark-ladder resonances in piezoelectric composites. *Phys. Rev. B* **68**, 174109 (2003).
- [25] A. Morales, L. Gutiérrez, and J. Flores. Improved eddy current driver-detector for elastic vibrations. *Am. J. Phys.* **69**, 517-522 (2001).
- [26] K. F. Graff, *Wave motion in elastic solids* (Dover, New York, 1991).

- [27] Byskov, E. Unconstrained torsion and finite element analysis. Preliminary. Aalborg Universitet, Danmark. September 30, 2004.
- [28] A. Morales, L. Gutiérrez y J. Flores. Vibraciones de una barra elástica: teoría y experimentos. Escuela de Verano en Física: La Visión Molecular de la Materia. Cuernavaca, Mor., 7 a 12 de agosto de 2000; pp. 115-136. Editores: Rocío Jáuregui Renaud y José Fco. Récamier Angelini. ISBN 968-36-9250-8.
- [29] Reitz, J. R., Milford, F. J. y Christy, R. W. Fundamentos de la teoría electromagnética. (Cuarta edición. Addison-Wesley Iberoamericana, 1996).
- [30] R. A. Méndez-Sánchez, A. Morales, J. Flores y L. Gutiérrez. Estructura de bandas para ondas torsionales en una varilla localmente periódica. X Escuela de Verano en Física: La Visión Molecular de la Materia. Cuernavaca, Mor., 22 a 27 de julio de 2002; pp. 74-87. Editores: Rocío Jáuregui Renaud y José Récamier Angelini.
- [31] Lempriere, Brian M. Ultrasound and elastic waves (Academic Press, USA, 2002).
- [32] Gutiérrez, L., Morales, A., Díaz-de-Anda, A., Flores, J., Méndez-Sánchez, R. A. Sistema para medir frecuencias de resonancia y amplitudes de onda en una barra. Congreso de Instrumentación SOMI XXI. Ensenada, Baja California, 22 al 25 de octubre de 2006.

Índice alfabético

- Amplitud de onda
 - torsional, 9, 43, 44, 46, 50
 - Barra redonda, 25
 - Localizada, 21
- Cálculo aproximado, *véase* Modelo de barra independiente
- Conclusiones, 28
- Construcción del Sistema A, 32
- Construcción del Sistema B, 35
- Descripción del sistema experimental, 54
- Detector de ondas
 - compresionales, 56
- Detector de ondas torsionales, 58
- Diagramas, 18
 - Barra cuadrada, 18, 43
 - Barra redonda, 11, 18, 43
 - Excitación-detección, 55
 - General para las barras, 44
- Diseño de los Sistemas A y B, 30
- EMAT, *véase* Transductor electromagnético acústico
- EWS en ondas torsionales, 17
- Excitador de ondas
 - compresionales, 57
- Excitador de ondas torsionales, 64
- Expresión de Navier, 19, 86
- Frecuencias de los modos normales torsionales, 8, 15, 18, 30, 31, 40
 - Barra cuadrada, 26, 87
 - Barra redonda, 24
- Grupo de Vibraciones Elásticas, 7, 46
- Instituto de Ciencias Físicas, UNAM-Campus Morelos, 4, 8, 42, 54, 71
- Introducción, 3
- Laboratorio de Vibraciones Elásticas, 8, 54
- Método de la matriz de transferencia, 42
- Modelo de barra independiente, 30
- Modelo de barra independiente, 8, 18, 21, 23, 26, 30, 31
- Sistema automatizado, 79
- Sistema experimental, 22
 - Diagrama de bloques, 22
- Sistema mecánico, 71
 - Deslizador de excitador y/o detector, 74
 - Vista parcial, 73
 - Vista superior, 77
- Transductor electromagnético acústico (EMAT), 8, 22, 54, 59, 61–64, 69, 80
 - Diferentes configuraciones, 55

Transductor piezoeléctrico, 8, 54, 70, 71, 75, 80

Velocidad de ondas torsionales, 19

 Barra cuadrada, 13, 19, 35, 86

 Barra redonda, 12, 19, 31, 33

Verificación experimental de la
 expresión de Navier, 86

Vibraciones torsionales
en una barra, 10