
FACULTAD DE CIENCIAS

U.N.A.M.

**EL GRUPO ORTOGONAL EN N DIMENSIONES Y LA
ESTRUCTURA NUCLEAR**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
P R E S E N T A

ELPIDIO CHACON ESPONDA

México, D. F.

1968

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA
JUAN B. DE IDYASABAL





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MIS PADRES Y HERMANOS .

A MIS MAESTROS Y AMIGOS .

A G R A D E C I M I E N T O S .

EL AUTOR DE ESTA TESIS DESEA EXPRESAR SU AGRADECIMIENTO AL DR. M. MOSHINSKY , TANTO POR HABER SUGERIDO EL TEMA DE ELLA COMO POR SU VALIOSA ORIENTACION DURANTE EL TIEMPO DE ELABORACION DE LA MISMA .

DURANTE LA ELABORACION DE ESTA TESIS EL AUTOR CONTO CON EL PATROCINIO DE LA COMISION NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR DE MEXICO . LA AYUDA ECONOMICA DE ESTA INSTITUCION SE AGRA - DECE DEBIDAMENTE .

INTRODUCCION

En esta Tesis se hará uso de las propiedades de simetría que posee el Hamiltoniano de algunos sistemas físicos con el objeto de obtener información sobre ciertos observables asociados a dichos sistemas. Los procedimientos sistemáticos para hacer esto se designan usualmente con el nombre de "Aplicaciones de la Teoría de los Grupos a la Mecánica Cuántica", y los métodos que se aplican fueron desarrollados en gran parte por Wigner, Weyl, Racah, y otros.

Como ilustración de las técnicas empleadas en este campo revisaremos el problema del movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central. El Hamiltoniano del sistema

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \quad (1)$$

es invariante ante rotaciones en el espacio tridimensional. Esto significa que si P_R es un operador asociado a una rotación R , entonces

$$[H, P_R] = 0 \quad (2)$$

Se puede verificar además, que el conjunto de operadores P_R satisfacen los postulados de un grupo, y constituyen por lo tanto un grupo isomórfico al grupo de rotaciones en 3 dimensiones: R_3 . Supongamos ahora que las k funciones ortonormales $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ están asociadas al eigenvalor E del Hamiltoniano (1):

$$H\Psi_\nu = E\Psi_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

Aplicando el operador P_R sobre esta ecuación y recordando que H y P_R conmutan, se deduce que $P_R \Psi_\nu$ es también eigenfunción de H con eigenvalor E , y por lo tanto se tendrá

$$P_R \Psi_\nu = \sum_{\lambda=1}^k D(R)_{\lambda\nu} \Psi_\lambda \quad (4)$$

En el lenguaje de la Teoría de los grupos, esta ecuación nos dice que las k funciones $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ constituyen una base para una representación k -dimensional del grupo R_3 . Esta representación será en la mayoría de los casos irreducible; en nuestro problema vamos a suponer que efectivamente lo es. Aquí aparece ya una primera aplicación de la Teoría de los grupos al problema que estamos analizando, consistente en la clasificación de los eigenvalores y las eigenfunciones del Hamiltoniano (1), ya que estos se pueden clasificar, al menos parcialmente, de acuerdo con la Representación Irreducible (R I) de R_3 a la cual están asociados.

Otra aplicación aún más importante aparece en el cálculo de elementos de matriz del tipo

$$(\Psi_{nlm}, Q \Psi_{n'l'm'}) \quad (5)$$

Aquí hemos introducido la notación usual según la cual, l indica la R I de R_3 , m indica el renglón de la R I al que pertenece esa función, y el índice n distingue entre funciones diferentes asociadas a R I de R_3 equivalentes. Los elementos de matriz (5) aparecen por ejemplo, cuando se trata de determinar la probabilidad de transiciones en el sistema bajo la influencia de campos externos, o cuando se trata de calcular el corrimiento de un nivel de energía bajo la acción de una per-

turbación, etc. Muchos de los operadores de interés físico se pueden expresar como una combinación lineal de operadores de un tipo especial llamados "tensores irreducibles" que se caracterizan por la propiedad de que ante rotaciones se transforman de manera análoga a como se transforman las funciones de una base de una R I de R_3 . Si el operador Q en (5) es la componente τ de un tensor irreducible de rango k , el elemento de matriz se puede calcular por medio del Teorema de Wigner - Eckart

$$\left(\Psi_{n'l'm'}, Q_{\tau}^{(k)} \Psi_{nlm} \right) = \langle l k m \tau | l' m' \rangle M_{n'l', nl}^{(k)} \quad (6)$$

cuya demostración se puede dar con razonamientos totalmente basados en la Teoría de los grupos. Una de las consecuencias de la fórmula (6), son las llamadas "reglas de selección": el elemento de matriz puede ser diferente de cero solo cuando el coeficiente de Clebsch - Gordan es diferente de cero; esto restringe los valores de l' al intervalo $|l-k| \leq l' \leq l+k$.

Con relación a los operadores tensoriales mencionados en el párrafo anterior, diremos sin entrar en detalles, que se han desarrollado técnicas basadas en la Teoría de los grupos, para calcular elementos de matriz de estos operadores con respecto a funciones de varias partículas, clasificadas por R_3 . El extenso aparato matemático así elaborado se conoce generalmente bajo el nombre de "Algebra de Racah".

Del breve análisis anterior se deducen algunas de las aplicaciones de la Teoría de los Grupos en la Mecánica Cuántica. Es útil en la clasificación de los estados y describe sus propiedades de transformación. Permite analizar la degeneración de los niveles de energía, y su desdoblamiento bajo la acción de una perturbación. Además permite formular reglas de selección para transiciones entre eigenestados y simplificar el

cálculo de algunos elementos de matriz . Observemos que en el problema analizado (1) , no se utilizó para nada la forma explícita de $V(r)$, la única información que se usó fué que $V(r)$ es invariante ante rotaciones. Esta es una característica de los razonamientos basados en la simetría: dependen solo de cierta propiedad de invariancia del Hamiltoniano, y los resultados que provienen de ellos son rigurosamente exactos, aunque no sea posible en muchos casos calcular eigenfunciones ó eigenvalores exactos del mismo Hamiltoniano. Esto hace que las técnicas de la Teoría de los grupos sean particularmente apropiadas en campos como la Física Nuclear y la Física de las Partículas Elementales, en los cuales no se conoce actualmente la forma exacta de la interacción entre los cuerpos, aunque si se sabe (o se sospecha) que dicha interacción posee determinadas propiedades de simetría.

El objeto de esta Tesis es la aplicación de los razonamientos de simetría, i.e. de la Teoría de los grupos, para extraer algunos resultados concernientes al Hamiltoniano de un sistema de n partículas (nucleones) en el esquema del Modelo de Capas Nuclear. El Hamiltoniano no perturbado de nuestro sistema, como se demostrará más tarde, es invariante ante transformaciones del grupo unitario en r dimensiones :

U_r , donde r es el número de estados de una partícula en la capa nuclear que estamos analizando. Las eigenfunciones de este Hamiltoniano se pueden pues clasificar por medio de la R I de U_r a la cual pertenecen. De manera análoga a como en el ejemplo (1) los renglones de la R I de R_3 se clasificaban por el subgrupo R_2 , en este problema de n nucleones los renglones de la R I de U_r se pueden

clasificar por una cadena de subgrupos de U_r . La cadena que investigaremos en esta Tesis es la $U_r \supset R_r$. Se supondrá además que entre los nucleones opera una interacción residual, la cual se reemplazará por un modelo que presenta propiedades de simetría especiales que permiten un análisis eficaz usando técnicas de la Teoría de los grupos.

El plan de la Tesis es el siguiente. En los Capítulos I a IV estudiaremos la teoría matemática de los grupos de Rotaciones en general, siguiendo un método de análisis utilizado anteriormente por el Dr. M. Moshinsky en el caso de los grupos Unitarios. En el Capítulo V analizamos el problema de la construcción de bases de R I de U_r clasificadas por la cadena $U_r \supset R_r$. Finalmente, en los Capítulos VI y VII los resultados anteriores se aplican al problema de n nucleones en la aproximación del modelo de capas nuclear.

CAPITULO I

BASES PARA REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DEL
GRUPO ORTOGONAL EN r DIMENSIONES (R_r) .

Antes de entrar al tema central de este Capítulo, repasaremos el método empleado para construir las bases de Representaciones Irreducibles ($R I$) del Grupo unitario en r dimensiones: U_r , ya que este método ¹⁾ servirá de modelo para el grupo R_r . Empezaremos por introducir operadores de creación: $a_{\mu s}^+$ y de aniquilación: $a^{\mu s}$ que obedecen las reglas de conmutación

$$[a^{\mu s}, a_{\mu' s'}^+] = \delta_{\mu'}^{\mu} \delta_{s'}^s; [a^{\mu s}, a^{\mu' s'}] = [a_{\mu s}^+, a_{\mu' s'}^+] = 0 \quad (1)$$

$$\mu, \mu' = 1, 2, \dots, r$$

$$s, s' = 1, 2, \dots, \nu$$

El índice μ distingue las diferentes componentes de un vector, y el índice s distingue entre diferentes vectores. El valor de ν está indeterminado por el momento, pero más adelante se demostrará que en la $R I$ más general, $\nu = r$. Las funciones con las que tendremos que tratar serán siempre polinomios en $a_{\mu s}^+$: $P(a_{\mu s}^+)$. Con el objeto de definir el producto escalar de dos de estos polinomios, introducimos el estado de vacío $|0\rangle$ con la propiedad

$$a^{\mu s} |0\rangle = 0 \quad \text{para toda } \mu, s \quad (2)$$

De esta manera el producto escalar de $P_1(a_{\mu s}^+)$ y $P_2(a_{\mu s}^+)$ es

$$\langle 0 | \{P_1(a_{\mu s}^+)^{\dagger} P_2(a_{\mu' s}^+)|0\rangle = \langle 0 | P_1(a^{\mu s}) P_2(a_{\mu' s}^+)|0\rangle \quad (3)$$

y se evalúa usando las reglas de conmutación (1) hasta lograr que todos los operadores $a^{\mu s}$ estén aplicados directamente sobre $|0\rangle$; entonces se usa (2) y además el hecho de que $\langle 0|0\rangle = 1$. Los operadores que van a actuar sobre $P(a_{\mu s}^+)$ serán en general funciones de $a_{\mu s}^+$ y de $a^{\bar{\mu} \bar{s}}$; su efecto sobre P se calcula análogamente, es decir para evaluar

$$O(a_{\mu s}^+, a^{\bar{\mu} \bar{s}}) P(a_{\mu s}^+)|0\rangle \quad (4)$$

hay que mover todos los $a^{\bar{\mu} \bar{s}}$ hacia la derecha hasta que operen sobre $|0\rangle$ y desaparezcan. En particular, por este procedimiento se deduce que

$$a^{\mu s} P(a_{\mu s}^+)|0\rangle = \frac{\partial P(a_{\mu s}^+)}{\partial a_{\mu s}^+}|0\rangle \quad (5)$$

En lo sucesivo se suprimirá el estado $|0\rangle$ en fórmulas como la (4), y se interpretará $a^{\mu s}$ como $\frac{\partial}{\partial a_{\mu s}^+}$.

Los r^2 operadores

$$\mathcal{P}_{\mu}^{\mu'} \equiv \sum_{s=1}^r a_{\mu s}^+ a^{\mu' s} \quad ; \quad \mu, \mu' = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

dejan invariante a la forma bilineal $\sum_{\mu=1}^r a_{\mu s}^+ a^{\mu s}$ y se dice que son los generadores del grupo U_r . Sus reglas de conmutación son

$$[\mathcal{P}_{\mu}^{\mu'}, \mathcal{P}_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}'}] = \mathcal{P}_{\mu}^{\bar{\mu}'} \delta_{\bar{\mu}}^{\mu'} - \mathcal{P}_{\bar{\mu}}^{\mu'} \delta_{\mu}^{\bar{\mu}'} \quad (7)$$

Como caso particular, observamos que $[\mathcal{P}_{\mu}^{\mu}, \mathcal{P}_{\mu}^{\mu'}] = 0$, de modo que los r operadores $\mathcal{P}_1^1, \mathcal{P}_2^2, \dots, \mathcal{P}_r^r$ se pueden diagonalizar simultáneamente. Un generador de U_r actuando sobre una función que pertenece a una base de una R I de U_r , produce en general una combinación lineal de funciones

de la misma base. Podemos escoger la base de tal modo que cada elemento de ella sea eigenfunción de los r generadores \mathcal{E}_μ^μ :

$$\mathcal{E}_\mu^\mu P(a_{\mu s}^+) = w_\mu P(a_{\mu s}^+) \quad ; \quad \mu = 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

El conjunto de números $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ se llama el peso de la función $P(a_{\mu s}^+)$, y cada w_i es una componente del peso. Si otra función $P'(a_{\mu s}^+)$ tiene peso $\{w'_1, w'_2, \dots, w'_r\}$ diremos que P tiene mayor peso que P' si en el conjunto $\{w_1 - w'_1, w_2 - w'_2, \dots, w_r - w'_r\}$

el primer número diferente de cero que aparece, es positivo. Es posible entonces clasificar los generadores de U_r en tres categorías:

$$\mathcal{E}_\mu^{\mu'} \text{ con } \mu < \mu' ; \quad \mathcal{E}_\mu^\mu ; \quad \mathcal{E}_\mu^{\mu'} \text{ con } \mu > \mu' \quad (9a, b, c)$$

llamados generadores de ascenso, de peso, y de descenso, respectivamente.

La razón de esta designación es que un generador de $\begin{matrix} \text{ascenso} \\ \text{descenso} \end{matrix}$ operando sobre una función de peso dado produce otra función que tiene un peso $\begin{matrix} \text{mayor} \\ \text{menor} \end{matrix}$ que la función original. Esto se comprueba fácilmente usando las reglas de conmutación (7).

La función de la base de una $R I$ que tenga un peso mayor que el peso de cualquier otra función de la misma base, será aquella que satisfaga las ecuaciones

$$\mathcal{E}_\mu^\mu P = h_\mu P, \quad \mathcal{E}_\mu^{\mu'} P = 0 \quad \mu < \mu' \quad (\mu, \mu' = 1, 2, \dots, r) \quad (10)$$

donde hemos indicado con h_i a las componentes del máximo peso en la $R I$.

De acuerdo con un teorema fundamental de E. Cartan ²⁾ el máximo peso solo aparece asociado con una función de la base, cosa que en general no ocurre

con los otros pesos. El máximo peso puede, por lo tanto, servir para caracterizar la R I .

El operador definido a continuación

$$\Gamma = \sum_{\mu=1}^r \sum_{\mu'=1}^r \varrho_{\mu}^{\mu'} \varrho_{\mu'}^{\mu} \quad (11)$$

tiene la propiedad de conmutar con todos los generadores $\varrho_{\mu}^{\mu'}$; se llama operador de Casimir de U_r . De acuerdo con el Lema de Schur ³⁾ la matriz del operador Γ con respecto a las funciones que forman una base de una R I de U_r es una matriz escalar: $\gamma \| I \|$, donde γ solo depende de la R I y será por lo tanto una función de las h_i que caracterizan la R I, es decir, $\gamma = \gamma(h_i)$. Las funciones de la base de una R I se pueden escoger de tal modo que sean eigenfunciones de Γ ; entonces para averiguar el eigenvalor γ basta con aplicar Γ sobre la función de máximo peso de la base, la cual satisface las ecuaciones (10). De la definición de Γ se deduce

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{\mu=1}^r (\varrho_{\mu}^{\mu})^2 + \sum_{\mu} \sum_{\mu' < \mu} \varrho_{\mu}^{\mu'} \varrho_{\mu'}^{\mu} + \sum_{\mu} \sum_{\mu' > \mu} \varrho_{\mu}^{\mu'} \varrho_{\mu'}^{\mu} \\ &= \sum_{\mu=1}^r (\varrho_{\mu}^{\mu})^2 + 2 \sum_{\mu} \sum_{\mu' < \mu} \varrho_{\mu}^{\mu'} \varrho_{\mu'}^{\mu} + \sum_{\mu} \sum_{\mu' > \mu} [\varrho_{\mu}^{\mu'}, \varrho_{\mu'}^{\mu}] \\ &= \sum_{\mu=1}^r (\varrho_{\mu}^{\mu})^2 + 2 \sum_{\mu} \sum_{\mu' < \mu} \varrho_{\mu}^{\mu'} \varrho_{\mu'}^{\mu} + \sum_{\mu} \sum_{\mu' > \mu} (\varrho_{\mu}^{\mu} - \varrho_{\mu'}^{\mu'}) \end{aligned} \quad (12)$$

y aplicando el operador Γ descompuesto en esta forma, sobre \mathbb{P} y recordando (6) se encuentra que

$$\gamma = \sum_{\mu=1}^r h_{\mu}^2 + \sum_{\mu=1}^r \sum_{\mu' > \mu} (h_{\mu} - h_{\mu'}) \quad (13)$$

Ahora bien, expresando las $\varrho_{\mu}^{\mu'}$ en (11) en función de operadores de creación y aniquilación, y efectuando algunas transposiciones, se deduce

$$\Gamma = \sum_{\mu\mu' \neq \nu\nu'} \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}^{\dagger} a_{\mu\nu}^{\nu} a_{\mu'\nu'}^{\dagger} a_{\mu'\nu'}^{\nu} = \sum_{\mu\mu' \neq \nu\nu'} \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}^{\dagger} a_{\mu\nu}^{\nu} a_{\mu'\nu'}^{\dagger} a_{\mu'\nu'}^{\nu} + (r-\nu) \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}^{\dagger} a_{\mu\nu}^{\nu}$$

O en otras palabras:

$$\Gamma = \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s'=1}^{\nu} C_s^{s'} C_{s'}^s + (r-\nu)N \quad (14)$$

con

$$C_s^{s'} \equiv \sum_{\mu=1}^r a_{\mu s}^+ a^{\mu s'} \quad , \quad N \equiv \sum_{\mu=1}^r \sum_{s=1}^{\nu} a_{\mu s}^+ a^{\mu s} = \sum_{s=1}^{\nu} C_s^s \quad (15)$$

Usando estas definiciones es posible calcular las reglas de conmutación de los operadores $C_s^{s'}$ y se encuentra que son idénticas a las de los operadores $\mathcal{P}_{\mu}^{\mu'}$, i.e.

$$[C_s^{s'}, C_{\bar{s}}^{\bar{s}'}] = C_s^{\bar{s}'} \delta_{\bar{s}}^{s'} - C_{\bar{s}}^{s'} \delta_s^{\bar{s}'} \quad ; \quad s, s', \bar{s}, \bar{s}' = 1, 2, \dots, \nu \quad (16)$$

Por lo tanto, partiendo de (14) podemos expresar a Γ en una forma análoga a la que se obtuvo en (12), a saber:

$$\Gamma = \sum_{s=1}^{\nu} (C_s^s)^2 + 2 \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s' < s} C_s^{s'} C_{s'}^s + \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s' > s} (C_s^s - C_{s'}^{s'}) + (r-\nu)N \quad (17)$$

Como se mencionó antes, las funciones de la base de una R I van a ser eigenfunciones de Γ . Observando (13) y (17) se deduce que esto se puede lograr tomando $\nu = r$ y haciendo que toda función de la base satisfaga las ecuaciones

$$C_s^s P = h_s P, \quad C_s^{s'} P = 0 \quad s < s' \quad ; \quad s, s' = 1, 2, \dots, \nu \equiv r \quad (18)$$

El método seguido no excluye la posibilidad de que las soluciones de las ecuaciones (18) contengan también a una base para la R I

$[h_1' \ h_2' \ \dots \ h_r']$ de U_r , con h_{μ}' tales que $\gamma(h_{\mu}') = \gamma(h_{\mu})$. Para demostrar que esta posibilidad no ocurre, notemos que la función de máximo peso de la R I $[h_1' \ h_2' \ \dots \ h_r']$ tendría que satisfacer las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} C_s^s P &= h_s P, \quad C_s^{s'} P = 0 \quad s < s' \quad ; \quad s, s' = 1, 2, \dots, r \\ \mathcal{P}_{\mu}^{\mu} P &= h_{\mu}' P, \quad \mathcal{P}_{\mu}^{\mu'} P = 0 \quad \mu < \mu' \quad ; \quad \mu, \mu' = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Pero en la referencia (1) se demuestra que las ecuaciones (19) solo tienen solución cuando $h_1' = h_1$, $h_2' = h_2$, ..., $h_r' = h_r$; y la solución única de estas ecuaciones tiene la forma explícita

$$\mathbb{P} = \sqrt{\prod_{j=1}^r \prod_{i=1}^j \frac{(h_i - h_j + j - i)!}{(h_i - h_{j+1} + j - i)!}} (\Delta_{1,1})^{h_1 - h_2} (\Delta_{1,2})^{h_2 - h_3} (\Delta_{1,2,3})^{h_3 - h_4} \dots (\Delta_{1,2,\dots,r})^{h_r} \quad (20)$$

Aquí el radical es un factor de normalización, $h_{r+1} \equiv 0$, y las deltas se definen como

$$\Delta_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j}^{1, 2, \dots, j} \equiv \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} \mathcal{P} a_{\mu_1, 1}^+ a_{\mu_2, 2}^+ \dots a_{\mu_j, j}^+ \quad (21)$$

siendo \mathcal{P} una permutación de los índices $(1, 2, 3, \dots, j)$, o bien, ya que las $a_{\mu_s}^+$ conmutan entre sí, una permutación de $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j)$. Queda así demostrado que las soluciones linealmente independientes de las ecuaciones (18) constituyen una base para la R I $[h_1, h_2, \dots, h_r]$ del grupo U_r , y la función de máximo peso de esta R I es la función (20).

Los renglones de una R I de U_r se pueden clasificar por medio de una cadena de subgrupos de U_r . Los índices de las diversas R I de los subgrupos contenidas en la R I de U_r , sirven para caracterizar los renglones. Una clasificación completa se puede lograr por medio de la cadena de subgrupos ⁴⁾

$$U_r \supset U_{r-1} \supset U_{r-2} \supset \dots \supset U_2 \supset U_1 \quad (22)$$

Para construir la base completa de una R I de U_r se puede utilizar la técnica de los operadores de descenso ⁵⁾. Los operadores de descenso de U_n son ciertas funciones de los generadores de U_n que tienen la propiedad de que al ser aplicados sobre una función de máximo peso en una R I de U_{n-1} dan por resultado otra función que también es de máximo peso pero en otra diferente R I de U_{n-1} . La forma explícita de estos operadores ha sido obtenida por Nagel y Moshinsky, y aparece en la referencia 5). Por medio de los operadores de descenso es entonces posible generar la base completa de la R I $[h_1, h_2, \dots, h_r]$ de U_r a partir de la función (20) de máximo peso de la R I. En particular, usando esta técnica se encuentra que la

función de la base que tiene máximo peso en la R I $[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{r-1}]$ del subgrupo U_{r-1} es

$$P_q^h = N_q^h (\Delta'_1)^{q_1 - h_2} (\Delta'_r)^{h_1 - q_1} (\Delta'_{1,2})^{q_2 - h_3} (\Delta'_{1,r})^{h_2 - q_2} \dots \\ \cdot (\Delta'_{1,2 \dots r-2, r-1})^{q_{r-1} - h_r} (\Delta'_{1,2 \dots r-2, r})^{h_{r-1} - q_{r-1}} (\Delta'_{1,2 \dots r})^{h_r} \quad (23)$$

donde N_q^h es un factor de normalización. Como esta función debe ser un polinomio, el exponente de cada variable debe ser ≥ 0 , y así se obtiene la fórmula de Weyl ⁶⁾

$$h_1 \geq q_1 \geq h_2 \geq q_2 \geq \dots \geq h_{r-1} \geq q_{r-1} \geq h_r \geq 0 \quad (24)$$

la cual permite averiguar cuales R I $[q_i]$ de U_{r-1} están contenidas en la R I $[h_j]$ de U_r . Esta misma fórmula aplicada sucesivamente a $U_2 \supset U_1$, $U_3 \supset U_2$, $U_4 \supset U_3$, etc. permite calcular la dimensión de la R I $[h_j]$ de U_r . Es evidente pues, que el polinomio (23) es de importancia fundamental en la teoría.

En la referencia 1) se demuestra que el polinomio (23) se puede obtener por otro método más conveniente que el método de los operadores de descenso. Este segundo método consiste en encontrar la solución de las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} C_s^s P = h_s P, \quad C_s^{s'} P = 0 \quad s < s'; \quad s, s' = 1, 2, \dots, r \\ \mathcal{E}_\mu^\mu P = q_\mu P, \quad \mathcal{E}_\mu^{\mu'} P = 0 \quad \mu < \mu'; \quad \mu, \mu' = 1, 2, \dots, r-1 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Se llega a la conclusión de que la solución única de las ecuaciones (25) es justamente el polinomio dado en (23). Nótese que el sistema de ecuaciones (25) difiere del sistema (19) en que los índices μ, μ' no incluyen a $\mu = r$, es decir, en (25) las $\mathcal{E}_\mu^{\mu'}$ son los generadores de un subgrupo U_{r-1} de U_r .

En el resto de este Capítulo, y en los dos siguientes, se tratará de repetir el análisis anterior pero ahora aplicado al grupo R_r .

En el resto de este Capítulo, r significa $2n+1$ ó $2n$, i.e. $n = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$.

El grupo de rotaciones en r dimensiones (R_r) tiene por generadores a los operadores

$$\Lambda_m^{m'} \equiv \mathcal{E}_m^{m'} - \mathcal{E}_{-m'}^{-m} \quad (26)$$

con

$$m, m' = \begin{cases} n, n-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -(n-1), -n & \text{para } r=2n+1 \\ n, n-1, \dots, 1, -1, \dots, -(n-1), -n & \text{para } r=2n \end{cases} \quad (27)$$

De acuerdo con la definición (26), $\Lambda_m^{m'} = -\Lambda_{-m'}^{-m}$, y por lo tanto, el número de generadores $\Lambda_m^{m'}$ independientes es $\frac{1}{2}r(r-1)$. En particular, notemos que $\Lambda_m^{-m} \equiv 0$. El orden "natural" de los índices m se tomará siempre tal como aparece en (27). Usando las reglas de conmutación de las $\mathcal{E}_m^{m'}$

dadas en (7), se encuentra que las reglas de conmutación de las $\Lambda_m^{m'}$ son

$$[\Lambda_m^{m'}, \Lambda_{\bar{m}}^{\bar{m}'}] = \Lambda_{\bar{m}}^{\bar{m}'} \delta_{\bar{m}}^{m'} - \Lambda_{\bar{m}}^{m'} \delta_{\bar{m}'}^{\bar{m}} + \Lambda_{\bar{m}}^{-m'} \delta_{-m'}^{\bar{m}'} - \Lambda_{-m'}^{\bar{m}'} \delta_{\bar{m}}^{-m} \quad (28)$$

de modo que estos operadores efectivamente forman un algebra de Lie. Además se puede ver que las $\Lambda_m^{m'}$ dejan invariante a la forma bilineal

$$F_{SS'} \equiv \sum_{\bar{m}=n}^{-n} a_{\bar{m}S}^+ a_{-\bar{m}S'}^+, \text{ ya que}$$

$\Lambda_m^{m'} F_{SS'} = a_{mS}^+ a_{-m'S'}^+ + a_{mS}^+ a_{-m'S}^+ - a_{-m'S}^+ a_{mS}^+ - a_{-m'S}^+ a_{mS}^+ = 0$;
y esto justifica el designar a las $\Lambda_m^{m'}$ como generadores de R_r .

Como caso particular de (28) se obtiene $[\Lambda_m^m, \Lambda_{m'}^{m'}] = 0$, de modo que los n operadores $\Lambda_n^n, \Lambda_{n-1}^{n-1}, \dots, \Lambda_1^1$ se pueden diagonalizar simultáneamente. A las funciones que forman una base de una RI de R_r podemos imponerles la condición de que sean eigenfunciones de Λ_m^m :

$$\Lambda_m^m P = w_{n-m+1} P, \quad m = n, n-1, n-2, \dots, 1 \quad (29)$$

El conjunto de n números $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ se llama el peso de la función P . Entonces, de manera análoga al caso del grupo unitario, podemos definir la noción de peso relativo de dos funciones, y clasificar los generadores en tres categorías

$$\Lambda_m^{m'} \text{ con } m > m' > -m ; \Lambda_m^m \text{ con } m = n, n-1, \dots, 1 ; \Lambda_m^{m'} \text{ con } -m' < m < m' \quad (30abc)$$

los cuales son generadores de ascenso, de peso, y de descenso, respectivamente. En una base de una R I de R_r existirá entonces una función de máximo peso; indicaremos este peso máximo con $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Esta función posee la propiedad de que

$$\Lambda_m^m \mathbb{P} = \lambda_{n-m+1} \mathbb{P}, \quad \Lambda_m^{m'} \mathbb{P} = 0 \quad m > m' > -m ; \quad m = n, n-1, \dots, 1 \quad (31)$$

y además, de acuerdo con el Teorema de Cartan, el peso máximo ocurre una sola vez en una R I, de modo que puede servir para caracterizar la R I.

A continuación vamos a demostrar algunas propiedades de las λ_s que componen el máximo peso. El análisis será equivalente al efectuado por Moshinsky ⁷⁾ para el caso del grupo unitario. En primer lugar, como E_m^m al operar sobre un polinomio en a_{ms}^+ nos dice el grado del polinomio en a_{ms}^+ , se deduce que λ_s siendo la diferencia de dos números enteros, es también otro número entero. En segundo lugar, es evidente que siempre se cumple la desigualdad $\langle 0 | (\Lambda_m^{m'} \mathbb{P})^\dagger \Lambda_m^{m'} \mathbb{P} | 0 \rangle \geq 0$; supongamos ahora que la $\Lambda_m^{m'}$ que aparece aquí sea un generador de descenso, i.e. $-m' < m < m'$. Entonces, si \mathbb{P} está normalizado, se obtiene, de acuerdo con (28) y (31):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbb{P}^\dagger \Lambda_m^{m'} \Lambda_m^{m'} \mathbb{P} | 0 \rangle &= \langle 0 | \mathbb{P}^\dagger [\Lambda_m^m, \Lambda_m^{m'}] \mathbb{P} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \mathbb{P}^\dagger (\Lambda_{m'}^{m'} - \Lambda_m^m) \mathbb{P} | 0 \rangle = (\lambda_{n-m'+1} - \lambda_{n-m+1}) \geq 0 \quad (-m' < m < m'). \end{aligned} \quad (32)$$

De aquí se deduce que

$$\lambda_s \geq \lambda_{s'} \quad \text{si } s < s' \quad (33)$$

Para el grupo R_{2n+1} , si ponemos $m = 0$ en (32) y recordamos que $\Lambda_0^0 \equiv 0$, se obtiene $\lambda_s \geq 0$ para toda s . Es decir

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \geq 0 \quad \text{para } R_{2n+1} \quad (34)$$

En cambio, para R_{2n} no se puede llegar a la misma conclusión ya que m no toma el valor 0; en este caso hay que proceder de la siguiente manera.

Se tiene que $\langle 0 | \{ (\Lambda_1^m + \Lambda_{-1}^m) P \}^\dagger (\Lambda_1^m + \Lambda_{-1}^m) P | 0 \rangle \geq 0$; por lo tanto, si $m \geq 2$ las $\Lambda_{m'}^m$ que aparecen aquí son generadores de descenso y se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle 0 | P^\dagger (\Lambda_m^m + \Lambda_m^{-1}) (\Lambda_1^m + \Lambda_{-1}^m) P | 0 \rangle &= \langle 0 | P^\dagger [\Lambda_m^m + \Lambda_m^{-1}, \Lambda_1^m + \Lambda_{-1}^m] P | 0 \rangle \\ &= 2 \langle 0 | P^\dagger (\Lambda_m^m) P | 0 \rangle = 2 \lambda_{n-m+1} \geq 0 \quad \text{para } m \geq 2 \end{aligned} \quad (35)$$

Esto, combinado con (33) nos lleva a la conclusión de que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq 0, \quad \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \quad \text{para } R_{2n} \quad (36)$$

λ_n puede ser positiva o negativa. En el Capítulo II se encontrarán límites más precisos para λ_n . Ahí se demostrará que $\lambda_{n-1} \geq |\lambda_n|$.

Continuando la analogía con el análisis efectuado para U_r , el siguiente paso será la introducción del operador de Casimir del grupo R_r . Indicaremos con Φ a este operador; su definición es

$$\Phi = \sum_{m=n}^{-n} \sum_{m'=n}^{-n} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m \quad (37)$$

La matriz de este operador con respecto a la base de funciones que generan una R I del grupo R_r , es una matriz escalar: $\|\Phi\| = \varphi \|I\|$, siendo φ una función de las λ_s . Podemos elegir las funciones de la base de tal modo que sean eigenfunciones de Φ , el eigenvalor φ se puede entonces calcular aplicando Φ sobre la función de máximo peso de la R I. De

la definición (37) se deduce

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{m,m'} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m = 2 \sum_{m=n}^1 (\Lambda_m^m)^2 + 2 \sum_{m'=n}^1 \sum_{m=m'-1}^{-(m'-1)} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m + 2 \sum_{m=n}^1 \sum_{m'=m-1}^{-(m-1)} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m \\ &= 2 \sum_{m=n}^1 (\Lambda_m^m)^2 + 4 \sum_{m'=n}^1 \sum_{m=m'-1}^{-(m'-1)} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m + 2 \sum_{m=n}^1 \sum_{m'=m-1}^{-(m-1)} [\Lambda_m^{m'}, \Lambda_{m'}^m] \\ &= 2 \sum_{m=n}^1 (\Lambda_m^m)^2 + 4 \sum_{m'=n}^1 \sum_{m=m'-1}^{-(m'-1)} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m + 2 \sum_{m=n}^1 \sum_{m'=m-1}^{-(m-1)} (\Lambda_m^m - \Lambda_{m'}^{m'}) \end{aligned} \quad (38)$$

Aplicando el operador descompuesto de esta manera, sobre la función de máximo peso de la R I la cual satisface las ecuaciones (31), y teniendo en cuenta que $\Lambda_{-m'}^{-m'} = -\Lambda_{m'}^{m'}$, se obtiene esta expresión para el eigenvalor del operador de Casimir de R_r :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 2 \sum_{m=n}^1 \lambda_{n-m+1} (\lambda_{n-m+1} + 2m - 1) = 2 \sum_{s=1}^n \lambda_s (\lambda_s + 2n + 1 - 2s) \quad \text{para } R_{2n+1} \\ \varphi &= 2 \sum_{m=n}^1 \lambda_{n-m+1} (\lambda_{n-m+1} + 2m - 2) = 2 \sum_{s=1}^n \lambda_s (\lambda_s + 2n - 2s) \quad \text{para } R_{2n} \end{aligned} \right\} (39)$$

Ahora bien, podemos escribir a Φ de esta manera

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{mm'} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m = \sum_{mm'} (\mathcal{E}_m^{m'} - \mathcal{E}_{-m}^{-m'}) (\mathcal{E}_{m'}^m - \mathcal{E}_{-m'}^{-m'}) \\ &= 2 \sum_{mm'} \mathcal{E}_m^{m'} \mathcal{E}_{m'}^m - 2 \sum_{mm'} \mathcal{E}_m^{m'} \mathcal{E}_{-m}^{-m'} = 2\Gamma - 2 \sum_{mm'} \mathcal{E}_m^{m'} \mathcal{E}_{-m}^{-m'} \end{aligned} \quad (40)$$

donde Γ es el operador de Casimir de U_r definido en (11). Expresando las $\mathcal{E}_{\bar{m}}^{\bar{m}'}$ que aparecen en (40) en función de operadores de creación y aniquilación, y efectuando algunas transposiciones, se llega a esta expresión para Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\Gamma - 2 \sum_{mm'} \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s'=1}^{\nu} a_{ms}^+ a^{m's} a_{-ms'}^+ a^{-m's'} \\ &= 2\Gamma - 2 \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s'=1}^{\nu} \left(\sum_{m=n}^{-n} a_{ms}^+ a_{-ms'}^+ \right) \left(\sum_{m'=n}^{-n} a^{m's} a^{-m's'} \right) - 2 \sum_{m=n}^{-n} \sum_{s=1}^{\nu} a_{ms}^+ a^{ms}, \end{aligned}$$

o en otras palabras:

$$\Phi = 2\Gamma - 2 \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s'=1}^{\nu} D_{ss'}^+ D^{ss'} - 2N \quad (41)$$

siendo N el mismo operador que se definió en (15), y las D^+, D son

$$D_{ss'}^+ \equiv \sum_{m=n}^{-n} a_{ms}^+ a_{-ms'}^+, \quad D^{ss'} \equiv \sum_{m=n}^{-n} a^{ms} a^{-m's'} = (D_{ss'}^+)^{\dagger} \quad (42)$$

Notemos que debido a la conmutatividad de las a_{ms}^+ entre sí, y de las $a^{m's'}$ entre sí, solo hay $\frac{1}{2} \nu(\nu+1)$ operadores $D_{ss'}^+$ o $D^{ss'}$ independientes, es decir $D_{ss'}^+ = D_{s's}^+$ y $D^{ss'} = D^{s's}$. De manera análoga a como se hizo en el análisis para el grupo unitario, en (41) hemos dejado indeterminado por el momento el número ν de vectores que se necesitan para definir una R I de R_r , pero el valor de ν se determinará a continuación.

Si en la fórmula (41) escribimos a Γ en la forma dada por (14),

se obtiene esta expresión para el operador de Casimir de R_T

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \sum_{s=1}^{\nu} (C_s^s)^2 + 4 \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s' < s} C_s^{s'} C_s^s + 2 \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s' > s} (C_s^s - C_s^{s'}) \\ & - 2 \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{s'=1}^{\nu} D_{s s'}^+ D^{s s'} + 2(r - \nu - 1)N \end{aligned} \quad (43)$$

A las funciones de una base para una R I de R_T vamos a imponerles la condición de que sean eigenfunciones de Φ con el eigenvalor φ dado en (39). Comparando (39) y (43) se observa que esta condición se puede cumplir si tomamos $\nu = n$ y además hacemos que cada elemento P de la base satisfaga las ecuaciones

$$C_s^s P = \lambda_s P^{(*)}, \quad C_s^{s'} P = 0 \quad s < s', \quad D^{s s'} P = 0 \quad ; \quad s, s' = 1, 2, \dots, n \quad (44)$$

(Nota: El significado del asterisco que aparece en algunas de las ecuaciones (44) y (46) será explicado al final del Capítulo). La comprobación de que esta afirmación es correcta, se obtiene aplicando el operador Φ en la forma (43) sobre P : si se supone que son válidas las ecuaciones (44) entonces en el segundo miembro se obtiene φP con φ idéntica a la expresión (39). En un paso intermedio de esta verificación hay que tener en cuenta que

$$\sum_{s=1}^n \sum_{s' > s} (\lambda_s - \lambda_{s'}) = \sum_{s=1}^n (n+1-2s)\lambda_s \quad (45)$$

y que $NP = \left(\sum_{s=1}^n C_s^s \right) P = \left(\sum_{s=1}^n \lambda_s \right) P$.

Como en el caso de U_T , el método seguido no excluye la posibilidad de que las ecuaciones (44) pudieran dar origen también a una base para la R I $(\lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_n)$ de R_T con λ'_s tales que $\varphi(\lambda'_s) \equiv \varphi(\lambda_s)$. Para demostrar que esta posibilidad no ocurre, debemos buscar la función de máximo peso de la hipotética R I $(\lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_n)$ contenida en las soluciones de las ecuaciones (44); esta función de máximo peso tendría que satisfacer las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} C_s^s P &= \lambda_s P^{(*)}, \quad C_s^{s'} P = 0 \quad s < s', \quad D^{s s'} P = 0 \quad (s=1, 2, \dots, n) \\ \Lambda_{n-s+1}^{n-s+1} P &= \lambda'_s P, \quad \Lambda_m^{m'} P = 0 \quad m > m' > -m \quad (m=n, \dots, 1, (0), -1, \dots, -n) \end{aligned} \right\} (46)$$

En el Capítulo siguiente demostraremos que las ecuaciones (46):

- a) cuando $r = 2n+1$ solo tienen solución no trivial si $\lambda'_s = \lambda_s, s=1, \dots, n$.
 b) cuando $r = 2n$ solo tienen solución no trivial si $\lambda'_s = \lambda_s, s=1, \dots, n-1,$
 $\lambda'_n = |\lambda_n|$ ó $-\lambda_n$.

Se demostrará también que la solución en estos casos es unívoca; y con esto quedará demostrado que: Las soluciones linealmente independientes de las ecuaciones (44) constituyen una base para la R I $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n+1} o bien, una base para las dos R I $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, |\lambda_n|)$ y $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, -|\lambda_n|)$ de R_{2n} . Lo que establece la diferencia entre un caso y el otro es el rango de valores del índice m .

Finalmente, vamos a explicar cual es el significado del asterisco que aparece junto a las ecuaciones $C_s^s P = \lambda_s P$ en (44) y en (46). Cuando interpretamos a los operadores de aniquilación a^{m_s} como $\partial/\partial a_{m_s}^+$ estas ecuaciones son equivalentes al Teorema de Euler sobre las funciones homogéneas; como P va a ser un polinomio homogéneo en las variables $a_{m_s}^+$ se deduce que las λ_s deben ser números enteros no-negativos. Para el caso de R_{2n+1} se demostró en (34) que los índices λ_s de la R I son todos ellos enteros no-negativos, de modo que se pueden satisfacer todas las ecuaciones $C_s^s P = \lambda_s P, s = 1, 2, \dots, n$. Por otra parte, para el caso de R_{2n} en que solo los $(n-1)$ primeros índices de la R I son siempre no-negativos, la ecuación correspondiente a $s = n$ debe escribirse $C_n^n P = |\lambda_n| P$ ya que existe la posibilidad de que $\lambda_n < 0$; el asterisco tiene por objeto recordarnos este hecho. Nótese además que en el eigenvalor φ del operador de Casimir de R_{2n} dado en (39), λ_n aparece en la forma $(\lambda_n)^2$, y por lo tanto el reemplazar λ_n por $|\lambda_n|$ en (44) no altera las conclusiones obtenidas después de (44).

CAPITULO II

LA FUNCION DE MAXIMO PESO DE
UNA RI DE R_r .

En el Capítulo anterior llegamos a la conclusión de que las soluciones linealmente independientes de las ecuaciones (44-I) constituyen una base para la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_r , y que en principio existe la posibilidad de que estas soluciones incluyan también una base para otra RI $(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$ con λ'_s tales que el eigenvalor φ del operador de Casimir de R_r sea idéntico para las dos RI : $\varphi(\lambda'_s) = \varphi(\lambda_s)$. La función de máximo peso de la RI $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ tendría que satisfacer a las ecuaciones (46-I). Vamos enseguida a encontrar la solución de las ecuaciones (46-I) y a demostrar así que el sistema de ecuaciones (44-I) determinan una sola RI de R_r si $r = 2n+1$, o dos RI si $r = 2n$. Como el análisis es ligeramente diferente según que $r = 2n+1$ ó $r = 2n$, estudiaremos por separado cada caso. En todo este Capítulo $n = \left[\frac{r}{2} \right]$.

A) EL CASO DE R_{2n+1}

Se trata de encontrar la solución \mathbb{P} de las siguientes ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} C_s^s \mathbb{P} = \lambda_s \mathbb{P} \quad , \quad C_s^{s'} \mathbb{P} = 0 \quad s < s' \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_s^{\bar{m}} \mathbb{P} = 0 \end{array} \right. \quad (1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{n-s+1}^{n-s+1} \mathbb{P} = \lambda'_s \mathbb{P} \end{array} \right. \quad (1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{ss'} \mathbb{P} = 0 \end{array} \right. \quad (1d)$$

$$s, s' = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad \bar{m} = s-1, s-2, \dots, 1, 0, -1, \dots, -(s-2), -(s-1).$$

La solución general de las ecuaciones (1a) ha sido obtenida por Moshinsky ⁷⁾ y está dada por

$$P = (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{n-1}^{1,2})^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{n-1, n-2}^{1,2,3})^{\lambda_3 - \lambda_4} \dots (\Delta_{n \dots 1}^{1 \dots n})^{\lambda_n} Z \quad (2)$$

donde Z es una función arbitraria de las $n \cdot (3n+1)/2$ variables

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_{n-1}^1}{\Delta_n^1}, \frac{\Delta_{n-2}^1}{\Delta_n^1}, \dots, \frac{\Delta_{-n}^1}{\Delta_n^1}; \frac{\Delta_{n, n-2}^{1,2}}{\Delta_{n, n-1}^{1,2}}, \frac{\Delta_{n, n-3}^{1,2}}{\Delta_{n, n-1}^{1,2}}, \dots, \frac{\Delta_{n, n-1}^{1,2}}{\Delta_{n, n-1}^{1,2}}; \frac{\Delta_{n, n-1, n-3}^{1,2,3}}{\Delta_{n, n-1, n-2}^{1,2,3}}, \frac{\Delta_{n, n-1, n-4}^{1,2,3}}{\Delta_{n, n-1, n-2}^{1,2,3}}, \dots, \frac{\Delta_{n, n-1, n}^{1,2,3}}{\Delta_{n, n-1, n-2}^{1,2,3}}; \\ & \dots; \frac{\Delta_{n, n-1, \dots, 2, 0}^{1,2, \dots, n-1, n}}{\Delta_{n, \dots, 1}^{1, \dots, n}}, \frac{\Delta_{n, n-1, \dots, 2, -1}^{1,2, \dots, n-1, n}}{\Delta_{n, \dots, 1}^{1, \dots, n}}, \dots, \frac{\Delta_{n, n-1, \dots, 2, -n}^{1,2, \dots, n-1, n}}{\Delta_{n, \dots, 1}^{1, \dots, n}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Las Δ son determinantes en a_{ms}^+ cuya definición fué dada en (21-I).

Definamos ahora $n(n+1)/2$ nuevas variables X_{pq} de la siguiente forma

$$X_{11} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_m^1 \Delta_{-m}^1 \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{21} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, m}^{1,2} \Delta_{-m}^1 \\ X_{22} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, m}^{1,2} \Delta_{n, -m}^{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{31} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, n-1, m}^{1,2,3} \Delta_{-m}^1 \\ X_{32} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, n-1, m}^{1,2,3} \Delta_{n, -m}^{1,2} \\ X_{33} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, n-1, m}^{1,2,3} \Delta_{n, n-1, -m}^{1,2,3} \end{aligned} \right\} \quad (4c)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{n1} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, n-1, \dots, 2, m}^{1,2, \dots, n-1, n} \Delta_{-m}^1 \\ X_{n2} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, n-1, \dots, 2, m}^{1,2, \dots, n-1, n} \Delta_{n, -m}^{1,2} \\ &\vdots \\ X_{nn} &\equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n, n-1, \dots, 2, m}^{1,2, \dots, n-1, n} \Delta_{n, n-1, \dots, 2, -m}^{1,2, \dots, n-1, n} \end{aligned} \right\} \quad (4n)$$

Escribiendo cada X_{pq} en forma desarrollada, es fácil comprobar que las $n(n+1)/2$ variables

$$\frac{\Delta_{n \ n-1 \ \dots \ n-s+2 \ \alpha}^1 \quad 2 \ \dots \ s-1 \quad s}{\Delta_{n \ n-1 \ \dots \ n-s+2 \ n-s+1}^1 \quad 2 \ \dots \ s-1 \quad s} ; \alpha = -n, -(n-1), \dots, -(n-s+1), \quad S = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

que aparecen en la lista (3) pueden expresarse en función de las X_{pq} y de otras variables que están en la misma lista. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{n \ n-1 \ \dots \ n-1}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1} &= \frac{1}{2} \frac{X_{11}}{(\Delta_{n \ n-1}^1)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_{n \ 0}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1} \right)^2 - \frac{\Delta_{n \ 1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1} - \frac{\Delta_{n \ 2}^1 \Delta_{n \ n-2}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1} - \dots - \frac{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1} \\ \frac{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2} &= \frac{X_{21}}{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1} - \frac{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1} - \dots - \frac{\Delta_{n \ n-2}^1 \Delta_{n \ n-2}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1} - \frac{\Delta_{n \ n-1}^1}{\Delta_{n \ n-1}^1} \\ \frac{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2} &= \frac{1}{2} \frac{X_{22}}{(\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_{n \ 0}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2} \right)^2 - \frac{\Delta_{n \ 1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2 \Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2} - \dots - \frac{\Delta_{n \ n-2}^1 \Delta_{n \ n-2}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2 \Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{n \ n-1 \ \dots \ 2 \ n}^1}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1} &= \frac{X_{n1}}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1 \Delta_{n \ \dots \ 1}^1} - \frac{\Delta_{n \ \dots \ 2 \ n-1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1 \Delta_{n \ \dots \ 1}^1} - \dots - \frac{\Delta_{n \ \dots \ 2 \ 0}^1 \Delta_{n \ 0}^1}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1 \Delta_{n \ \dots \ 1}^1} - \frac{\Delta_{n \ 1}^1}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_{n \ n-1 \ \dots \ 2 \ n}^1}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1} &= \frac{1}{2} \frac{X_{nn}}{(\Delta_{n \ \dots \ 1}^1)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_{n \ \dots \ 2 \ 0}^1 \quad n}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1} \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Como la dependencia de Z en las variables (3) es arbitraria hasta este momento, se puede reemplazar en el argumento de Z a cada una de las variables en (5) por el primer término del miembro derecho de las fórmulas

precedentes. Así se puede afirmar que Z depende de las variables

$$\left\{ \frac{\Delta_{n-1}^1}{\Delta_n^1}, \frac{\Delta_{n-2}^1}{\Delta_n^1}, \dots, \frac{\Delta_{-(n-1)}^1}{\Delta_n^1}; \frac{\Delta_{n \ n-2}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2}, \frac{\Delta_{n \ n-3}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2}, \dots, \frac{\Delta_{n \ n-2}^1 \quad 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2}; \right. \\ \left. \frac{\Delta_{n \ n-1 \ n-3}^1 \quad 2 \quad 3}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2}^1 \quad 2 \quad 3}, \frac{\Delta_{n \ n-1 \ n-4}^1 \quad 2 \quad 3}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2}^1 \quad 2 \quad 3}, \dots, \frac{\Delta_{n \ n-1 \ n-3}^1 \quad 2 \quad 3}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2}^1 \quad 2 \quad 3}; \dots; \frac{\Delta_{n \ n-1 \ \dots \ 2 \ 0}^1 \quad n}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1} \right\}; \quad (7a)$$

$$\left\{ \frac{X_{11}}{(\Delta_n^1)^2}; \frac{X_{21}}{\Delta_{n \ n-1}^1 \Delta_n^1}, \frac{X_{22}}{(\Delta_{n \ n-1}^1 \quad 2)^2}; \frac{X_{31}}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2}^1 \Delta_n^1}, \frac{X_{32}}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2}^1 \Delta_{n \ n-1}^1}, \frac{X_{33}}{(\Delta_{n \ n-1 \ n-2}^1 \quad 2)^2}; \right. \\ \left. \dots; \frac{X_{n1}}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1 \Delta_n^1}, \frac{X_{n2}}{\Delta_{n \ \dots \ 1}^1 \Delta_{n \ n-1}^1}, \dots, \frac{X_{nn}}{(\Delta_{n \ \dots \ 1}^1)^2} \right\} \quad (7b)$$

Obsérvese que aquí aparecen n^2 variables del tipo $\frac{\Delta}{\Delta}$ y $n(n+1)/2$

variables del tipo $\frac{X_{pq}}{\Delta \Delta}$.

La utilidad de haber introducido las variables X_{pq} resulta evidente cuando se trata de hacer que \mathbb{P} dado en (2) satisfaga a las ecuaciones (1b). En efecto, todas las variables X_{pq} tienen la propiedad de que cualquier operador de ascenso de R_{2n+1} , i.e. cualquiera de los n^2 operadores $\Lambda_S^{\bar{m}}$ de (1b'), aplicado sobre X_{pq} dá cero. Demostración de esta afirmación: si desarrollamos las dos Δ que aparecen en cada X_{pq} por cofactores de los elementos Δ_m^s y $\Delta_{-m}^{s'}$, cada X_{pq} queda expresada como una combinación lineal de términos del tipo

$$\left(\sum_{m=n}^{-n} \Delta_m^{s_p} \Delta_{-m}^{s'_q} \right) \Delta_{n \ n-1 \ \dots \ n-p+2}^{s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{p-1}} \Delta_{n \ n-1 \ \dots \ n-q+2}^{s'_1 \ s'_2 \ \dots \ s'_{q-1}} \quad (8)$$

$\Lambda_S^{\bar{m}}$ aplicada sobre $\left(\sum_m \Delta_m^{s_p} \Delta_{-m}^{s'_q} \right)$ dá cero, según se demostró en el Capítulo I, después de (28-I). Por lo que respecta a las otras dos Δ que aparecen en (8), teniendo en cuenta que $\Lambda_S^{\bar{m}} = \mathcal{E}_S^{\bar{m}} - \mathcal{E}_{-m}^{-s}$ y que en este análisis las dos $\mathcal{E}_m^{m'}$ que aparecen aquí son de ascenso y por lo tanto al operar sobre una $\Delta_{m_1 \ m_2 \ \dots \ m_\alpha}^{s_1 \ s_2 \ \dots \ s_\alpha}$ cambian un índice m_i en otro índice mayor, se deduce que $\Lambda_S^{\bar{m}}$ también dá cero al operar sobre las dos últimas Δ en (8); ya que en estas Δ los índices inferiores toman todos los valores entre n y un cierto valor mínimo, de modo que al cambiar uno de estos índices en otro índice mayor van a quedar en la Δ dos índices iguales y esto será un determinante con dos renglones iguales, el cual vale cero. Con esto queda demostrado que para las $\Lambda_S^{\bar{m}}$ de (1b)

$$\Lambda_S^{\bar{m}} X_{pq} = \Lambda_S^{\bar{m}} \Delta_{n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ n-\alpha+1}^{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ \alpha} = 0 \quad (9)$$

Los n^2 operadores $\Lambda_S^{\bar{m}}$ por lo tanto, solo dan resultados diferentes de cero cuando operan sobre las n^2 variables de la lista en (7a). El índice $-n$ no aparece en ninguna de estas variables, y debido a esto $\Lambda_n^{\bar{m}}$ al actuar sobre ellas es equivalente a $\mathcal{E}_n^{\bar{m}}$. Entonces las ecuaciones

$\Lambda_n^{\bar{m}} \mathbb{P} = 0 \quad \bar{m} = n-1, \dots, -(n-1)$ equivalen a $\frac{\partial Z}{\partial \left(\frac{\Delta_n^1}{\Delta_n^1}\right)} = 0$, lo cual nos indica que Z no depende de ninguna de las variables $\left(\frac{\Delta_n^1}{\Delta_n^1}\right) \quad \bar{m} = n-1, n-2, \dots, -(n-1)$.

Suprimiendo estas variables en la lista (7a), el índice $-(n-1)$ no aparece en ninguna de las variables que quedan, por lo tanto al actuar sobre ellas $\Lambda_{n-1}^{\bar{m}}$ equivale a $\mathcal{E}_{n-1}^{\bar{m}}$, y las ecuaciones $\Lambda_{n-1}^{\bar{m}} \mathbb{P} = 0 \quad \bar{m} = n-2, \dots, -(n-2)$

equivalen a $\frac{\partial Z}{\partial \left(\frac{\Delta_{n-1}^1}{\Delta_{n-1}^1}\right)} = 0$, lo cual nos dice que Z tampoco depende de ninguna de las variables $\frac{\Delta_{n-1}^1}{\Delta_{n-1}^1}$ en (7a). Por un procedimiento análogo,

las ecuaciones $\Lambda_{n-2}^{\bar{m}} \mathbb{P} = 0 \quad \bar{m} = n-3, \dots, -(n-3)$ nos dicen que Z no depende de ninguna de las variables $\frac{\Delta_{n-2}^1}{\Delta_{n-2}^1}$ en (7a); y continuando el análisis a lo largo de líneas similares para $\Lambda_s^{\bar{m}} \mathbb{P} = 0 \quad s = n-3, n-4, \dots, 2$

se llega finalmente a la conclusión de que $\Lambda_1^0 \mathbb{P} = 0$ implica que Z tampoco depende de la última variable $\frac{\Delta_1^1}{\Delta_1^1}$ en (7a). En resumen,

la solución general de las ecuaciones (1a) y (1b) está dada por (2), pero con Z siendo una función arbitraria de solo las $n(n+1)/2$ variables que aparecen en la lista (7b). Escribiendo a Z en la forma de una serie de potencias en las variables (7b) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P} = & \sum_{k_{11} \dots k_{nn}} A_{k_{pq}} X_{11}^{k_{11}} X_{21}^{k_{21}} X_{22}^{k_{22}} \dots X_{n1}^{k_{n1}} \dots X_{nn}^{k_{nn}} (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - \lambda_2 - 2k_{11} - k_{21} - k_{31} - \dots - k_{n1}} \\ & \times (\Delta_{n-1}^1)^{\lambda_2 - \lambda_3 - k_{21} - 2k_{22} - k_{32} - \dots - k_{n2}} (\Delta_{n-1}^1)^{\lambda_3 - \lambda_4 - k_{31} - k_{32} - 2k_{33} - \dots - k_{n3}} \\ & \times \dots \times (\Delta_{n-1}^1)^{\lambda_n - k_{n1} - k_{n2} - \dots - k_{n-1} - 2k_{nn}} \end{aligned} \tag{9}$$

donde las k_{pq} representan a números enteros no-negativos.

Vamos ahora a imponer la condición de que el polinomio \mathbb{P} dado en (9) satisfaga las n ecuaciones (1c). Es fácil verificar que todas las va-

$$\sum_{s=1}^n \{ \lambda_s (\lambda_s + 2n + 1 - 2s) - \lambda'_s (\lambda'_s + 2n + 1 - 2s) \} = 0 \quad (14)$$

En un paso intermedio se usa la fórmula (45-I). La ecuación (14) obviamente expresa el hecho de que el eigenvalor del operador de Casimir es idéntico para las dos RI (λ_s) y (λ'_s) . Ahora bien, podemos re-escribir a (14) de esta manera

$$\sum_{s=1}^n \{ (\lambda_s - \lambda'_s) (\lambda_s + \lambda'_s + 2n + 1 - 2s) \} = 0 \quad (15)$$

Pero la ecuación (12) nos dice que $(\lambda_s - \lambda'_s) \geq 0$, y además en el Capítulo I demostramos que para R_{2n+1} todas las $\lambda_s \geq 0$, por lo tanto todos los sumandos en (15) son no-negativos y esa ecuación solo puede satisfacerse cuando

$$(\lambda_s - \lambda'_s) (\lambda_s + \lambda'_s + 2n + 1 - 2s) = 0 \quad \text{para } s=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

El segundo factor es positivo definido y en consecuencia se llega a la conclusión de que las ecuaciones (16) se pueden satisfacer si y solo si

$$\lambda'_s = \lambda_s \quad s=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

Pero entonces, substituyendo estos valores de λ'_s en (11) se deduce que todas las k_{pq} valen cero, y de (9) obtenemos el resultado final: Las ecuaciones (1a,b,c,d) solo tienen solución cuando $\lambda'_s = \lambda_s \quad s=1, 2, \dots, n$ y la solución en este caso tiene la forma explícita

$$\mathbb{P} = \sqrt{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)!}{(\lambda_i - \lambda_{j+1} + j - i)!}} (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_n^1 \ 2)^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{n-1}^1 \ 2 \ 3)^{\lambda_3 - \lambda_4} \dots (\Delta_{n \dots 1})^{\lambda_n} \quad (18)$$

Esto constituye la demostración de que las soluciones linealmente independientes de las ecuaciones (1a) ,(1d) constituyen una base para la RI $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$ de R_{2n+1} , y la función de máximo peso de esta RI es el polinomio (18).

B) EL CASO de R_{2n} .

Se trata ahora de encontrar la solución \mathbb{P} de las ecuaciones

$$C_s^s \mathbb{P} = \lambda_s \mathbb{P}^{(*)}, \quad C_s^{s'} \mathbb{P} = 0 \quad s < s' \quad (19a)$$

$$\Delta_s^{\bar{m}} \mathbb{P} = 0 \quad (19b)$$

$$\Delta_{n-s+1}^{n-s+1} \mathbb{P} = \lambda'_s \mathbb{P} \quad (19c)$$

$$D^{s s'} \mathbb{P} = 0 \quad (19d)$$

$s, s' = 1, 2, \dots, n$; $\bar{m} = s-1, s-2, \dots, 1, -1, \dots, -(s-2), -(s-1)$.

Como se explicó al final del Capítulo I, el asterisco en las ecuaciones

$C_s^s \mathbb{P} = \lambda_s \mathbb{P}$ significa que la ecuación correspondiente a $s = n$ debe escribirse $C_n^n \mathbb{P} = |\lambda_n| \mathbb{P}$. Obsérvese que la principal diferencia entre las ecuaciones (1) y las (19) es que en estas últimas el índice \bar{m} no toma el valor 0; es decir, mientras que en (1b) se tenían n^2 ecuaciones, en (19b) se tienen $n(n-1)$ ecuaciones.

La solución general de las ecuaciones (19a) es

$$\mathbb{P} = (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{n-1}^1)^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{n-1}^2)^{\lambda_3 - \lambda_4} \dots (\Delta_{n-1}^{1 \dots n-1})^{|\lambda_n|} Z \quad (20)$$

donde Z es una función arbitraria de las $n(3n-1)/2$ variables que quedan en la lista (3) al suprimir las n variables

$$\frac{\Delta_n^1}{\Delta_n^1}, \frac{\Delta_{n-1}^1}{\Delta_{n-1}^1}, \frac{\Delta_{n-1}^2}{\Delta_{n-1}^2}, \dots, \frac{\Delta_{n-1}^{1 \dots n-1}}{\Delta_{n-1}^{1 \dots n-1}} \quad (21)$$

Se definen a continuación $n(n+1)/2$ variables X_{pq} análogas a las que aparecen en (4a, b, ..., n), con la única diferencia de que ahora el índice m no toma el valor $m = 0$. En particular, nótese que

$$X_{nn} = 2 \Delta_{n-1}^{1 \dots n-1} \Delta_{n-1}^{1 \dots n-1} \quad (22)$$

Entonces, de manera semejante a lo que se encontró para R_{2n+1} , las

reflejado $-\lambda'_n$. Se puede entonces proceder como si $\lambda'_n > 0$. La última fórmula se puede re-escribir como

$$\left[\sum_{s=1}^n (\lambda_s - \lambda'_s)(\lambda_s + \lambda'_s + 2n - 2s) \right] + [\lambda_n^2 - (\lambda'_n)^2] = 0 \quad (26)$$

Ahora bien, en el Capítulo I se demostró que para R_{2n} los índices $\lambda_s \geq 0$ si $s = 1, 2, \dots, n-1$; esto, combinado con (25) nos permite afirmar que todos los sumandos en (26) son no-negativos, y por lo tanto, para satisfacer a esa ecuación se debe tener

$$(\lambda_s - \lambda'_s)(\lambda_s + \lambda'_s + 2n - 2s) = 0 \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \quad ; \quad [\lambda_n^2 - (\lambda'_n)^2] = 0 \quad (27)$$

Como $(\lambda_s + \lambda'_s + 2n - 2s) > 0$ para $s = 1, 2, \dots, n-1$, se llega finalmente a la conclusión de que las ecuaciones (27) solo se satisfacen en estos dos casos

$$\lambda'_s = \lambda_s \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \quad ; \quad \lambda'_n = |\lambda_n| \quad (28a)$$

$$\lambda'_s = \lambda_s \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \quad ; \quad \lambda'_n = -|\lambda_n| \quad (28b)$$

De (24) se deduce que en el caso (28a) todas las k_{pq} valen cero; y en el caso (28b) todas las k_{pq} excepto k_{nn} , valen cero, y $k_{nn} = |\lambda_n|$. Substituyendo estos valores en (23), y recordando la ecuación (22) para el caso (28b), se obtiene la forma explícita de la solución de las ecuaciones (19a,b,c,d) en los dos casos:

a) Cuando $\lambda'_s = \lambda_s \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \quad ; \quad \lambda'_n = |\lambda_n|$

$$\mathbb{P} = \sqrt{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)!}{(\lambda_i - \lambda_{j+1} + j - i)!}} (\Delta_n)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{nn-1})^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{nn-1-n-2})^{\lambda_3 - \lambda_4} \cdots (\Delta_{n \dots 2 \ 1})^{|\lambda_n|} \quad (29a)$$

b) Cuando $\lambda'_s = \lambda_s \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \quad ; \quad \lambda'_n = -|\lambda_n|$

$$\mathbb{P} = \sqrt{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j \frac{(\lambda_i - \lambda_j + j - i)!}{(\lambda_i - \lambda_{j+1} + j - i)!}} (\Delta_n)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{nn-1})^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{nn-1-n-2})^{\lambda_3 - \lambda_4} \cdots (\Delta_{n \dots 2 \ -1})^{|\lambda_n|} \quad (29b)$$

Con esto se ha demostrado que: Las soluciones linealmente independientes de las ecuaciones (19a) y (19d) constituyen una base para las dos $R I$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, |\lambda_n|)$ y $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, -|\lambda_n|)$ de R_{2n} , y la función de máximo peso de cada R I está dada en (29a), (29b), respectivamente.

Para terminar, deseamos hacer notar que este resultado establece límites más precisos para el último índice de la R I $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n} . En efecto, en el Capítulo I solo se pudo demostrar que $\lambda_{n-1} \geq \lambda_n$; aquí hemos demostrado que siempre existen las dos R I $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y $(\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$, por lo tanto, ya que $\lambda_{n-1} \geq \lambda_n$ debe cumplirse siempre, se deduce que $\lambda_{n-1} \geq |\lambda_n|$, es decir para los índices de una R I de R_{2n} se tiene

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq |\lambda_n| \quad (30)$$

CAPITULO III

REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE R_{r-1} CONTENIDASEN UNA REPRESENTACION IRREDUCIBLE DE R_r .

SECCION A)

Los generadores del grupo R_{2n+1} son los $n(2n+1)$ operadores $\Lambda_m^{m'}$ (ascenso), $\Lambda_{m'}^m$ (descenso), Λ_m^m (peso), $m > m' > -m$; $|m|, |m'| = 0, 1, 2, \dots, n$. Suprimiendo los n generadores de ascenso Λ_m^0 y los n generadores de descenso Λ_0^m quedan los $n(2n-1)$ generadores de R_{2n} . En el Capítulo II se demostró que una RI de R_{2n+1} queda caracterizada por los n números enteros $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, y que una RI de R_{2n} queda a su vez definida por los n números enteros $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ con $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq |\mu_n|$. En este Capítulo vamos a plantear y resolver el siguiente problema: Dada una RI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n+1} averiguar que RIs $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ del subgrupo R_{2n} están contenidas en ella. Para ello empezaremos por hacer notar que una función P que pertenece a la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n+1} y que al mismo tiempo es la función de máximo peso de la RI $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ de R_{2n} , debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$C_s^s P = \lambda_s P, C_s^{s'} P = 0 \quad s < s'; \quad (1a)$$

$$\Lambda_m^{m-1} P = \Lambda_m^{m-2} P = \dots = \Lambda_m^1 P = \Lambda_m^{-1} P = \dots = \Lambda_m^{-(m-1)} P = 0, \quad m = 2, 3, \dots, n \quad (1b)$$

$$\Lambda_{n-s+1}^{n-s+1} P = \mu_s P \quad (1c)$$

$$D^{ss'} P = 0 \quad s \leq s'; \quad s, s' = 1, 2, \dots, n \quad (1d)$$

Las ecuaciones (1a),(1d), indican que P pertenece a la RI $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n+1} , mientras que las ecuaciones (1b), (1c), indican que P tiene un peso $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ en el grupo R_{2n} y que este peso es máximo, es decir, que P es la función de máximo peso de la RI (μ_1, \dots, μ_n) de R_{2n} .

Comparando las ecuaciones (1a,b,c,d) con las ecuaciones (1a,b,c,d) del Capítulo II, observamos que la única diferencia esencial entre ellas es que las n ecuaciones $\Lambda_m^{\circ} P = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n$ que aparecen en la discusión del Capítulo II, se han suprimido en el análisis del caso presente. Debido a esta semejanza parcial podemos aprovechar algunos resultados del Capítulo II. Por ejemplo, la solución general de (1a) está dada en las ecuaciones (2-II) y (3-II). Se introducen a continuación las variables X_{pq} definidas en (4a,...,n - II) y se llega a la expresión de Z como función de las variables en (7a,b-II). En el Capítulo II la aplicación de las ecuaciones (1b-II) nos llevaba a la conclusión de que Z no dependía de ninguno de los cocientes

$$\frac{\Delta_{n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ n-k+1 \ k}^1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k \ \alpha}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ n-k+1}^1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k} \quad \text{y quedaba una expresión para Z en función de las}$$

variables (7b-II), exclusivamente. En el caso presente, debido a que no

estamos aplicando las n condiciones $\Lambda_m^{\circ} P = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n$

la conclusión a que llegamos después de satisfacer las ecuaciones (1b)

es que Z depende de las variables (7b-II), y además de las n variables

$$\frac{\Delta_{n \ 0}^1}{\Delta_n^1}, \quad \frac{\Delta_{n \ 0}^1 \ 2}{\Delta_{n \ n-1}^1 \ 2}, \quad \frac{\Delta_{n \ n-1 \ 0}^1 \ 2 \ 3}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2}^1 \ 2 \ 3}, \quad \dots, \quad \frac{\Delta_{n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ n-1 \ n}^1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-1 \ n}{\Delta_{n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ n-1 \ n}^1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-1 \ n}$$

Por lo tanto, en el caso presente la solución de las ecuaciones (1a,b) es

$$\begin{aligned}
P = & \sum_{k_{pq}} \sum_{m_s} A_{k_{pq} m_s} X_{11}^{k_{11}} X_{21}^{k_{21}} X_{22}^{k_{22}} \dots X_{n1}^{k_{n1}} \dots X_{nn-1}^{k_{nn-1}} (\Delta_n)^{\lambda_1 - \lambda_2 - 2k_{11} - k_{21} - k_{31} - \dots - k_{n1} - m_1} \\
& \cdot (\Delta_{n-1}^1)^{\lambda_2 - \lambda_3 - k_{21} - 2k_{22} - k_{32} - \dots - k_{n2} - m_2} \dots (\Delta_{n-1}^1 \dots n)^{\lambda_n - k_{n1} - k_{n2} - \dots - k_{nn} - m_n} \\
& \cdot (\Delta_0^1)^{m_1} (\Delta_{n0}^1)^{m_2} (\Delta_{n-1}^1 \dots 3)^{m_3} \dots (\Delta_{nn-1}^1 \dots 2 \ 0)^{m_n} (\Delta_{n-1}^1 \dots n \ 2 \ -1)^{k_{nn}} \quad (2)
\end{aligned}$$

donde las k_{pq} , m_1 , \dots , m_n representan a números enteros no-negativos. Debido a que $X_{nn} = (\Delta_{nn-1}^1 \dots n \ 2 \ 0)^2 + 2 \Delta_{nn-1}^1 \dots n \ 2 \ 1 \Delta_{nn-1}^1 \dots n \ 2 \ -1$, en este caso es posible reemplazar a X_{nn} por el producto

$\Delta_{nn-1}^1 \dots n \ 2 \ 0 \Delta_{nn-1}^1 \dots n \ 2 \ -1$, y esto fué lo que se hizo efectivamente en (2); el susodicho producto sigue poseyendo la propiedad, como X_{nn} , de que todos los operadores de ascenso que aparecen en (1b) actuando sobre él dan cero.

Al aplicar ahora las ecuaciones (1c) sobre el polinomio (2) se llega a la conclusión de que

$$\begin{cases}
\mu_1 = \lambda_1 - m_1 - 2k_{11} - k_{21} - k_{31} - k_{41} - \dots - k_{n1} \\
\mu_2 = \lambda_2 - m_2 - k_{21} - 2k_{22} - k_{32} - k_{42} - \dots - k_{n2} \\
\mu_3 = \lambda_3 - m_3 - k_{31} - k_{32} - 2k_{33} - k_{43} - \dots - k_{n3} \\
\mu_n = \lambda_n - m_n - k_{n1} - k_{n2} - k_{n3} - \dots - k_{nn-1} - 2k_{nn}
\end{cases} \quad (3)$$

Una consecuencia de estas ecuaciones es que, dado que k_{pq} , m_s representan a números no-negativos, se tiene

$$\lambda_s \geq \mu_s, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Usando ahora las ecuaciones (3) para expresar las m_s en función de las k_{pq} , y substituyendo en (2), se llega a la conclusión de que la solución general de (1a,b,c) es

$$P = (\Delta'_n)^{\mu_1 - \lambda_2} (\Delta'_{n-1})^{\mu_2 - \lambda_3} (\Delta'_{n-1 \ n-2})^{\mu_3 - \lambda_4} \dots (\Delta'_{n-1 \dots 2})^{\mu_{n-1} - \lambda_n} G \quad (5a)$$

con

$$G = \sum_{k_{pq}} A_{k_{pq}} X_{11}^{k_{11}} X_{21}^{k_{21}} X_{22}^{k_{22}} \dots X_{n1}^{k_{n1}} \dots X_{nn-1}^{k_{nn-1}} (\Delta'_{n-1 \dots 2 \ 1})^{k_{nn}} (\Delta'_{n-1 \dots 2 \ 1})^{\mu_n + k_{nn}} \cdot (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2k_{11} - k_{21} - k_{31} - \dots - k_{n1}} (\Delta'_{n0})^{\lambda_2 - \mu_2 - k_{21} - 2k_{22} - \dots - k_{n2}} \dots (\Delta'_{n-1 \dots 2 \ 0})^{\lambda_n - \mu_n - k_{n1} - \dots - 2k_{nn}} \quad (5b)$$

Falta únicamente hacer que el polinomio P dado en (5) satisfaga las ecuaciones (1d). Nótese que en la suma que define a G aparecen $n(n+1)/2$ índices mudos, a saber: 1 índice k_{1q} + 2 índices k_{2q} + 3 índices k_{3q} + ... + n índices k_{nq} . Ahora bien, el número de operadores $D^{ss'}$ independientes es también $n(n+1)/2$. Es de esperarse por lo tanto, que los coeficientes $A_{k_{pq}}$ del polinomio G queden unívocamente determinados al imponer la condición de que P satisfaga las ecuaciones $D^{ss'} P = 0$. La demostración rigurosa de esta conjetura es bastante difícil ya que cada ecuación $D^{ss'} P = 0$ conduce a una fórmula de recurrencia para los coeficientes $A_{k_{pq}}$ y de la solución simultánea de estas recurrencias se obtiene la forma explícita $A_{k_{pq}} = F(k_{pq}!)$. En el Capítulo siguiente se analizarán los casos particulares de R_4 y R_5 para ilustrar el procedimiento. Admitiendo que la conjetura es válida en general, entonces después de haber satisfecho las ecuaciones (1d), el polinomio G es una función unívoca y perfectamente definida para valores dados de λ_s y μ_s . De (5a) se deduce entonces que para que P sea polinomio se debe tener $\mu_s \geq \lambda_{s+1}$ $s = 1, 2, \dots, n-1$; y de (5b): $\lambda_n - \mu_n \geq 2k_{nn} \geq 0$, y por lo tanto $\lambda_n + \mu_n \geq 2(k_{nn} + \mu_n) \geq 0$. Es decir, en conjunto

$$\mu_s \geq \lambda_{s+1} \quad s=1, 2, \dots, n-1 \quad ; \quad |\mu_n| \leq \lambda_n \quad (6)$$

El hecho de que μ_n pueda ser negativa está en concordancia con lo demostrado en el Capítulo II en el cual se vió que para el grupo R_{2n} el último índice de la R I $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ puede ser negativo.

Reuniendo los resultados dados en (4) y (6) se deduce que la R I $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n+1} contiene a todas aquellas R Is de R_{2n} $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ con μ_s tales que

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n \geq |\mu_n| \quad (7)$$

y cada R I de R_{2n} aparece una sola vez. Este resultado se conoce con el nombre de ley de ramificación ("branching law") ⁸⁾ para el grupo ortogonal.

Examinaremos ahora el caso del grupo R_{2n} , y trataremos de averiguar que R Is $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$ de R_{2n-1} están contenidas en la R I $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n} . Ante todo hay que exhibir los generadores del subgrupo R_{2n-1} de una manera apropiada. En este caso para obtener los generadores de R_{2n-1} no basta con suprimir ciertos generadores de R_{2n} , ya que algunos generadores del subgrupo son combinaciones lineales de generadores de R_{2n} . Por ejemplo, si numeramos los índices del espacio donde están definidos los generadores de R_{2n} en el orden $m = n-1, n-2, \dots, 1, \theta, -\theta, -1, \dots, -(n-1)$; entonces los generadores del subgrupo R_{2n-1} serán todas las $\Lambda_m^{m'}$ con $m, m' \neq \theta, -\theta$, y además las $(2n-2)$ combinaciones lineales $\Lambda_m^0 \equiv (\Lambda_m^\theta + \Lambda_m^{-\theta})$ y $\Lambda_0^m \equiv (\Lambda_\theta^m + \Lambda_{-\theta}^m)$ $m = 1, 2, \dots, n-1$. Sin embargo, en el análisis que sigue podemos evitar el uso de estas combinaciones lineales adoptando el siguiente método alternativo. Hay que efectuar una transformación lineal en los operadores de creación y aniquilación $a_{\pm\theta}^+, a^{\pm\theta}$ para obtener nuevos operadores $\dot{a}_{\theta}^+, \dot{a}_{\theta'}^+, \dot{a}^{\theta}, \dot{a}^{\theta'}$ que satisfagan la condición de que

$$\begin{cases} a_{\theta s}^+ a_{-\theta s'}^+ + a_{-\theta s}^+ a_{\theta s'}^+ = \dot{a}_{\theta s}^+ \dot{a}_{\theta s'}^+ + \dot{a}_{\theta' s}^+ \dot{a}_{\theta' s'}^+ \\ a^{\theta s} a^{-\theta s'} + a^{-\theta s} a^{\theta s'} = \dot{a}^{\theta s} \dot{a}^{\theta s'} + \dot{a}^{\theta' s} \dot{a}^{\theta' s'} \end{cases} \quad (8)$$

Un modo de satisfacer esta condición es por medio de la transformación unitaria

$$\begin{aligned} a_{\theta s}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{a}_{\theta s}^+ + i \dot{a}_{\theta' s}^+) & \dot{a}_{\theta s}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\theta s}^+ + a_{-\theta s}^+) \\ a_{-\theta s}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{a}_{\theta s}^+ - i \dot{a}_{\theta' s}^+) & \dot{a}_{\theta' s}^+ &= \frac{1}{i\sqrt{2}} (a_{\theta s}^+ - a_{-\theta s}^+) \\ a^{\theta s} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{a}^{\theta s} - i \dot{a}^{\theta' s}) & \dot{a}^{\theta s} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a^{\theta s} + a^{-\theta s}) \\ a^{-\theta s} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{a}^{\theta s} + i \dot{a}^{\theta' s}) & \dot{a}^{\theta' s} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (a^{\theta s} - a^{-\theta s}) \end{aligned} \quad (9)$$

Bajo esta transformación se obtienen en particular estas equivalencias:

$$\dot{\Lambda}_0^{o'} = i \Lambda_{\theta}^{\theta}, \quad \dot{\Lambda}_m^{o'} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\Lambda_m^{\theta} - \Lambda_m^{-\theta}) \quad m \neq 0, \quad \dot{\Lambda}_0^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda_{\theta}^m + \Lambda_{-\theta}^m) \quad m \neq 0' \quad (10)$$

Por tratarse de una transformación unitaria, las reglas de conmutación de

\dot{a}^+ y \dot{a} siguen siendo las mismas que las de a^+ y a . Los operadores a_{ms}^+ y a^{ms} con $m \neq \theta, -\theta$ permanecen sin cambio, pero por uniformidad en la notación se indicarán también con un punto encima.

Los generadores de R_{2n} serán ahora $\Lambda_m^{m'} = \sum_s (\dot{a}_{ms}^+ \dot{a}^{m's} - \dot{a}_{-m's}^+ \dot{a}^{-ms})$

con $m, m' = n-1, n-2, \dots, 1, 0, 0', -1, \dots, -(n-1)$. Suprimiendo todos los generadores que tengan un índice $0'$, los restantes serán los generadores de R_{2n-1} . En la discusión que sigue se usarán siempre los operadores \dot{a}^+, \dot{a} pero por comodidad en la escritura se suprimirá el punto encima de ellos; una función de \dot{a}^+, \dot{a} es fácilmente identificable por la presencia del índice $0'$ que es exclusivo de estos operadores.

El polinomio P que pertenece a la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n} y que es al mismo tiempo el polinomio de máximo peso de la RI $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$ de R_{2n-1} deberá satisfacer las ecuaciones

$$C_s^s P = \lambda_s P^{(*)}, C_s^{s'} P = 0 \quad s < s'; \quad (11a)$$

$$\Lambda_m^{m-1} P = \dots = \Lambda_m^1 P = \Lambda_m^0 P = \Lambda_m^{-1} P = \dots = \Lambda_m^{-(m-1)} P = 0 \quad (11b)$$

$$\Lambda_{n-s}^{n-s} P = \mu_s P \quad (11c)$$

$$D^{ss'} P = 0 \quad s < s'; \quad ss' = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (11d)$$

El asterisco en las ecuaciones (11a) es para recordar que cuando se trate de $s = n$ debemos escribir $C_n^n P = |\lambda_n| P$ ya que según se demostró en el Capítulo II, para el grupo R_{2n} el último índice de la RI puede ser negativo, pero los eigenvalores de C_s^s son no-negativos. Además recordemos que las ecuaciones (11a,d) definen bases para las dos RIs $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \pm \lambda_n)$ de R_{2n} , por lo cual es de esperarse que cuando $\lambda_n \neq 0$ el sistema de ecuaciones (11) tenga dos soluciones independientes, y en efecto, en el Capítulo siguiente obtendremos estas dos soluciones en el caso particular de R_4 .

Con los operadores \dot{a}^+, \dot{a} definidos en (9) se tiene

$$\begin{aligned} & \Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ \theta}^1 \ 2 \ \dots \ \alpha \ \Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ -\theta}^1 \ 2 \ \dots \ \beta + \Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ -\theta}^1 \ 2 \ \dots \ \alpha \ \Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ \theta}^1 \ 2 \ \dots \ \beta = \\ & = \dot{\Delta}_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 0}^1 \ 2 \ \dots \ \alpha \ \dot{\Delta}_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 0}^1 \ 2 \ \dots \ \beta + \dot{\Delta}_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 0'}^1 \ 2 \ \dots \ \alpha \ \dot{\Delta}_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 0'}^1 \ 2 \ \dots \ \beta \end{aligned} \quad (12)$$

En el análisis que sigue van a aparecer las variables X_{pq} definidas en (4a, ..., n-II) con la única diferencia de que la suma sobre m que aparece en cada una de ellas se va a efectuar ahora sobre los valores

$m = n-1, n-2, \dots, 1, \theta, -\theta, -1, \dots, -(n-1)$; la fórmula (12) muestra los

cambios que hay que hacer en las variables X_{pq} al usar los operadores

$$\dot{a}^+, \dot{a}. \text{ En particular, } X_{nn} = (\Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0}^1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)^2 + (\Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0'}^1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)^2,$$

de modo que usaremos el cociente $(\Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 0'}^1 \ 2 \ \dots \ n / \Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 0}^1 \ 2 \ \dots \ n)^2$ en lugar de

$$X_{nn} / (\Delta_{n-1 \ n-2 \ \dots \ 1 \ 0}^1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)^2.$$

Del análisis para obtener el polinomio de máximo peso de R_{2n} , efectuado en el Capítulo II, sabemos que la solución de las ecuaciones

(11a,b) es

$$P = \sum_{k_{pq}} \sum_{m_s} A_{k_{pq} m_s} X_{11}^{k_{11}} X_{21}^{k_{21}} X_{22}^{k_{22}} \dots X_{n1}^{k_{n1}} \dots X_{nn-1}^{k_{nn-1}} (\Delta_{n-1}^1)^{\lambda_1 - \lambda_2 - 2k_{11} - k_{21} - k_{31} - \dots - k_{n1} - m_1} \\ \cdot (\Delta_{n-1}^1 \ 2)^{\lambda_2 - \lambda_3 - k_{21} - 2k_{22} - k_{32} - \dots - k_{n2} - m_2} \dots (\Delta_{n-1}^1 \dots n-1 \ n)^{|\lambda_{n1}| - k_{n1} - k_{n2} - \dots - k_{nn-1} - 2k_{nn}} \\ \cdot (\Delta_{0'}^1)^{m_1} (\Delta_{n-1}^1 \ 0')^{m_2} (\Delta_{n-1 \ n-2}^1 \ 0')^{m_3} \dots (\Delta_{n-1}^1 \dots n-2 \ n-1)^{m_{n-1}} (\Delta_{n-1}^1 \dots n-1 \ n)^{2k_{nn}} \quad (13)$$

donde k_{pq} y m_s representan a números enteros no-negativos. Al hacer ahora que P satisfaga a las $n-1$ ecuaciones (11c) se obtiene

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 - m_1 - 2k_{11} - k_{21} - k_{31} - \dots - k_{n1} \\ \mu_2 = \lambda_2 - m_2 - k_{21} - 2k_{22} - k_{32} - \dots - k_{n2} \\ \mu_3 = \lambda_3 - m_3 - k_{31} - k_{32} - 2k_{33} - \dots - k_{n3} \\ \dots \\ \mu_{n-1} = \lambda_{n-1} - m_{n-1} - k_{n-1,1} - k_{n-1,2} - \dots - k_{n-1,n-2} - 2k_{n-1,n-1} - k_{n,n-1} \end{cases} \quad (14)$$

De aquí se deduce que, en vista de que λ_s, k_{pq}, m_s representan a cantidades no-negativas, deben verificarse las relaciones

$$\lambda_s \geq \mu_s, \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \quad (15)$$

Utilizando las ecuaciones (14) para expresar las m_s en términos de las otras letras, el polinomio (13) queda en esta forma

$$P = (\Delta_{n-1}^1)^{\mu_1 - \lambda_2} (\Delta_{n-1}^1 \ 2)^{\mu_2 - \lambda_3} (\Delta_{n-1 \ n-2}^1 \ 0')^{\mu_3 - \lambda_4} \dots (\Delta_{n-1}^1 \ 2 \dots n-1)^{\mu_{n-1} - |\lambda_{n1}|} G \quad (16a)$$

con

$$G = \sum_{k_{pq}} A_{k_{pq}} X_{11}^{k_{11}} X_{21}^{k_{21}} X_{22}^{k_{22}} \dots X_{n1}^{k_{n1}} \dots X_{nn-1}^{k_{nn-1}} (\Delta_{0'}^1)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2k_{11} - k_{21} - \dots - k_{n1}} \\ \cdot (\Delta_{n-1}^1 \ 2)^{\lambda_2 - \mu_2 - k_{21} - 2k_{22} - \dots - k_{n2}} \dots (\Delta_{n-1}^1 \dots n-2 \ n-1)^{\lambda_{n-1} - \mu_{n-1} - k_{n-1,1} - \dots - k_{n-1,n-2} - 2k_{n-1,n-1} - k_{n,n-1}} \\ \cdot (\Delta_{n-1}^1 \dots n-1 \ n)^{2k_{nn}} (\Delta_{n-1}^1 \dots n-1 \ n)^{|\lambda_{n1}| - k_{n1} - k_{n2} - \dots - k_{nn-1} - 2k_{nn}} \quad (16b)$$

Falta únicamente hacer que el polinomio (16a) satisfaga también a las ecuaciones (11d). Ahora bien, tal como en el caso de $R_{2n+1} \supset R_{2n}$, la sumatoria que define a G contiene $n(n+1)/2$ índices mudos; los operadores $D^{SS'}$ independientes también son en total $n(n+1)/2$ operadores. Cada ecuación $D^{SS'} P = 0$ conduce a una fórmula de recurrencia entre los coeficientes $A_{k_{pq}}$ de (16b), y es de suponerse que las $n(n+1)/2$ fórmulas de recurrencia así obtenidas determinen, al ser resueltas, la forma explícita de los coeficientes $A_{k_{pq}} = F(k_{pq}!)$. Admitiremos este resultado en general aunque solo lo verificaremos, en el Capítulo siguiente, en el caso de R_4 . Entonces, después de haber satisfecho las ecuaciones (11d), el factor G en (16b) es un polinomio unívoco y bien definido para valores dados de λ_s y μ_s ; de modo que para que la expresión (16a) sea un polinomio los índices λ_s, μ_s deben satisfacer

$$\mu_s \geq \lambda_{s+1} \quad s = 1, 2, \dots, n-2; \quad \mu_{n-1} \geq |\lambda_n| \quad (17)$$

Reuniendo (15) y (17) se llega a la conclusión de que la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de R_{2n} contiene a todas aquellas RIs $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$ de R_{2n-1} en las que las μ_s son tales que

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq |\lambda_n| \quad (18)$$

y cada RI de R_{2n-1} ocurre una sola vez. Esta es la Ley de ramificación para $R_{2n} \supset R_{2n-1}$.

Aparte de los casos de R_4 y R_5 que serán analizados en el Capítulo siguiente, el único caso particular de la reducción $R_r \supset R_{r-1}$ en que se obtienen resultados relativamente sencillos es aquél en que la RI de R_r es de la forma $(\lambda_1, 0, 0, \dots, 0)$, es decir, un diagrama de Young de un solo renglón. Daremos a continuación la forma explícita de la solución de las ecuaciones (11a,b,c,d) y (1a,b,c,d) en este caso especial.

De (3), (14) y (16b) se deduce que $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-1} = (\mu_n)$
 $= m_2 = m_3 = \dots = m_{n-1} = (m_n) = k_{21} = k_{22} = \dots = k_{nn} = 0$. El polinomio
 G en (5b) ó (16b) es una suma sobre un solo índice: $k_{11} = k$, y la so-
 lución completa tiene la forma

$$P = (\Delta'_n)^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_{11}^k (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2k} \quad \text{para } R_{2n+1} \quad (19a)$$

$$P = (\Delta'_{n-1})^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_{11}^k (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2k} \quad \text{para } R_{2n} \quad (19b)$$

las ecuaciones $D^{ss'}P=0$ $s' \geq 2$, se satisfacen automáticamente, y
 la ecuación $D''P=0$ nos da esta fórmula de recurrencia para los coefi-
 cientes A_k :

$$2k(z\lambda_1 + r - 2 - 2k)A_k + (\lambda_1 - \mu_1 - 2k + 1)(\lambda_1 - \mu_1 - 2k + 2)A_{k-1} = 0 \quad (20)$$

con $r = 2n$ ó $2n+1$. La solución de esta recurrencia es

$$A_k = (-)^k \frac{(z\lambda_1 + r - 4 - 2k)!!}{(\lambda_1 - \mu_1 - 2k)! 2^k k!} A_0 \quad (21)$$

Las ecuaciones (19) y (21) nos dan la solución completa del problema, ex-
 cepto por un coeficiente de normalización A_0 .

SECCION B)

DIMENSION DE LAS R I DE R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 .

Las R Is del grupo R_2 son unidimensionales, ya que en R_2
 tenemos un solo generador: Λ_θ^θ . La solución de $D''P=0$ y
 $C'P = |\lambda|P$ es $P = c_1 (\Delta'_\theta)^{|\lambda|} + c_2 (\Delta'_{-\theta})^{|\lambda|}$, y la condición adi-
 cional de que $\Lambda_\theta^\theta P = \mu P$ nos lleva a la conclusión de que $\mu = \pm |\lambda|$.
 Si μ es positivo, la base de la R I (μ) de R_2 es $P = (\Delta'_\theta)^{\mu}$,
 y si μ es negativo, la base de la R I (μ) de R_2 es $P = (\Delta'_{-\theta})^{|\mu|}$.

Con esta información podemos averiguarla dimensión de una R I de R_3 . De (7) se deduce que la R I (λ) de R_3 contiene una vez a todas aquellas R Is (μ) de R_2 con $-\lambda \leq \mu \leq \lambda$ y por lo tanto, la dimensión de la R I (λ) de R_3 será igual al número de μ s que satisfacen la desigualdad anterior, es decir $D = 2\lambda + 1$.

Por el mismo procedimiento podemos averiguar la dimensión de la R I (μ_1, μ_2) de R_4 . De acuerdo con (18) esta R I contiene una vez a todas aquellas R Is (λ) de R_3 con $\mu_1 \geq \lambda \geq |\mu_2|$, de modo que la dimensión de la R I (μ_1, μ_2) de R_4 será

$$D = \sum_{\lambda=|\mu_2|}^{\mu_1} (2\lambda+1) = (\mu_1+1)^2 - (\mu_2)^2 = (\mu_1+1+\mu_2)(\mu_1+1-\mu_2) \quad (22)$$

En el siguiente paso podemos averiguar la dimensión de la R I (λ_1, λ_2) de R_5 . Usando nuevamente (7) se deduce que la dimensión de esta R I es igual a la suma de las dimensiones de las R I (μ_1, μ_2) de R_4 que contiene; es decir

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\mu_1=\lambda_2}^{\lambda_1} \sum_{\mu_2=-\lambda_2}^{\lambda_2} \{(\mu_1+1)^2 - \mu_2^2\} \\ &= \sum_{\mu_1=\lambda_2}^{\lambda_1} \left\{ (2\lambda_2+1)(\mu_1+1)^2 - \frac{1}{3}\lambda_2(\lambda_2+1)(2\lambda_2+1) \right\} \\ &= (2\lambda_2+1) \left\{ \frac{1}{6}(\lambda_1+1)(\lambda_1+2)(2\lambda_1+3) - \frac{1}{6}\lambda_2(\lambda_2+1)(2\lambda_2+1) - \frac{2}{6}\lambda_2(\lambda_2+1)(\lambda_1-\lambda_2+1) \right\} \\ &= \frac{1}{6}(2\lambda_2+1)(2\lambda_1+3) \{(\lambda_1+1)(\lambda_1+2) - \lambda_2(\lambda_2+1)\} = \frac{1}{6}(2\lambda_2+1)(2\lambda_1+3)(\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2) \quad (23) \end{aligned}$$

Finalmente calcularemos la dimensión de la R I (μ_1, μ_2, μ_3) de R_6 . Siguiendo un método análogo, se encuentra que

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\lambda_1=\mu_3}^{\mu_1} \sum_{\lambda_2=|\mu_3|}^{\mu_2} \left\{ (2\lambda_2+1) \sum_{\nu=1}^{\lambda_1+1} \nu^2 - (2\lambda_1+3) \sum_{\nu=1}^{\lambda_2} \nu^2 \right\} \\ &= [(\mu_2+1)^2 - \mu_3^2] \sum_{\lambda_1=\mu_3}^{\mu_1} \sum_{\nu=1}^{\lambda_1+1} \nu^2 - [(\mu_1+1)^2 - (\mu_2+1)^2] \sum_{\lambda_2=|\mu_3|}^{\mu_2} \sum_{\nu=1}^{\lambda_2} \nu^2 \\ &= \frac{1}{12} (\mu_2+1+\mu_3)(\mu_2+1-\mu_3)(\mu_1-\mu_2+1)(\mu_1+\mu_2+3)(\mu_1+2+\mu_3)(\mu_1+2-\mu_3) \quad (24) \end{aligned}$$

No intentaremos deducir la fórmula general para la dimensión de una RI de R_r . Citaremos únicamente el resultado ⁹⁾. Para R_{2n+1} la dimensión de la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ es

$$D = \frac{2^n}{(2n-1)!(2n-3)! \dots 5!3!} \prod_{p=1}^n (\lambda_p + n - p + \frac{1}{2}) \prod_{p < q = 1}^n (\lambda_p - \lambda_q + q - p)(\lambda_p + \lambda_q + 2n + 1 - p - q) \quad (25a)$$

y para R_{2n} la dimensión de la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ es

$$D = \frac{2^{n-1}}{(2n-2)!(2n-4)! \dots 4!2!} \prod_{p < q = 1}^n (\lambda_p - \lambda_q + q - p)(\lambda_p + \lambda_q + 2n - p - q) \quad (25b)$$

SECCION C)

OPERADORES DE DESCENSO DE R_4 , R_5 , R_6

Otro método para obtener los polinomios de máximo peso de una RI de R_{r-1} contenida en una RI de R_r , consiste en el uso de operadores de descenso del tipo de los introducidos por Nagel y Moshinsky ⁵⁾ en el caso del grupo unitario. Los operadores de descenso se construyen con los generadores de R_r sujetos a la condición de que al actuar sobre una función de máximo peso en R_{r-1} dan por resultado otra función que también es de máximo peso en R_{r-1} pero uno de cuyos índices está disminuido en una unidad. No intentaremos dar una deducción general de los operadores de descenso de R_r , sino que analizaremos solo los casos de R_4 , R_5 , y R_6 . Un análisis general ha sido elaborado por Pang y Hecht ¹⁰⁾.

Para el caso de R_4 los generadores son

$$\Lambda_1^1, \Lambda_1^0, \Lambda_0^1; \Lambda_1^{0'}, \Lambda_0^{0'}, \Lambda_{-1}^{0'} \quad (26)$$

Estamos empleando los operadores \hat{a}^+ , \hat{a} definidos en la Sección A.

Los tres primeros operadores en (26) son a su vez los generadores del subgrupo R_3 contenido en R_4 , y por lo tanto estos tres generadores al actuar sobre una función que pertenece a una R I de R_3 no cambian los índices de R_3 , es decir, dan una función que pertenece a la misma R I de R_3 . El operador de descenso que buscamos trataremos entonces de construirlo con los tres últimos generadores en (26). Lo más obvio sería intentar que el operador de descenso L_4^1 fuera una combinación lineal de $\Lambda_s^{o'}$, $s = 1, 0, -1$; sin embargo tenemos las restricciones adicionales de que

$$L_4^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle = |\lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad \Lambda_1^0 L_4^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle = 0, \quad (27a, b)$$

donde $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$ indica una función que pertenece a la R I (λ_1, λ_2) de R_4 y que es de máximo peso en la R I (λ) de R_3 contenida en la anterior. Aplicando Λ_1^1 en ambos miembros de (27a) y teniendo en cuenta que $\Lambda_1^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle = \lambda |\lambda_1, \lambda_2\rangle$, se obtiene

$$\Lambda_1^1 L_4^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle = (\lambda - 1) |\lambda_1, \lambda_2\rangle = L_4^1 \{(\lambda - 1) |\lambda_1, \lambda_2\rangle\} = L_4^1 \{\Lambda_1^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle - |\lambda_1, \lambda_2\rangle\}$$

es decir

$$[\Lambda_1^1, L_4^1] |\lambda_1, \lambda_2\rangle = -L_4^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (28)$$

y de (27b) se obtiene, teniendo en cuenta que $\Lambda_1^0 |\lambda_1, \lambda_2\rangle = 0$:

$$[\Lambda_1^0, L_4^1] |\lambda_1, \lambda_2\rangle = 0. \quad (29)$$

Si L_4^1 fuera una combinación lineal de $\Lambda_s^{o'}$ $s = 1, 0, -1$ no se podrían satisfacer las ecuaciones (28) y (29). Pero si suponemos que L_4^1 es una combinación lineal de términos del tipo $(\Lambda_0^1)^{n_s} \Lambda_s^{o'}$ $s = 1, 0, -1$, entonces, consultando una tabla de conmutadores $[\Lambda_1^1, \Lambda_m^{o'}]$ se deduce fácilmente que para satisfacer a (28) solo existen estas tres posibilidades: $n_{-1} = 0$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$. Es decir, la forma más

general de L_4^1 que satisface la condición (28) es

$$L_4^1 = \alpha \Lambda_{-1}^{\circ'} + \beta \Lambda_0^1 \Lambda_0^{\circ'} + (\Lambda_0^1)^2 \Lambda_1^{\circ'} \quad (30)$$

Calculando ahora el conmutador $[\Lambda_1^{\circ'}, L_4^1]$ y recordando que $\Lambda_1^{\circ'} |\lambda_1, \lambda_2\rangle = 0$ se llega al resultado

$$(-\alpha + \beta\lambda) \Lambda_0^{\circ'} |\lambda_1, \lambda_2\rangle + (\beta + 2\lambda + 1) \Lambda_0^1 \Lambda_1^{\circ'} |\lambda_1, \lambda_2\rangle = 0$$

lo cual solo puede verificarse cuando $(-\alpha + \beta\lambda) = (\beta + 2\lambda + 1) = 0$. De aquí deducimos que $\beta = -(2\lambda + 1)$, $\alpha = -\lambda(2\lambda + 1)$, obteniéndose así el resultado final:

$$L_4^1 = -\Lambda_{-1}^{\circ'} \Lambda_1^1 (2\Lambda_1^1 + 1) - \Lambda_0^1 \Lambda_0^{\circ'} (2\Lambda_1^1 + 1) + (\Lambda_0^1)^2 \Lambda_1^{\circ'} \quad (31)$$

donde hemos substituido $\lambda |\lambda_1, \lambda_2\rangle$ por $\Lambda_1^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle$. El operador L_4^1 dado en (31) hay que multiplicarlo por un factor de normalización adecuado, con el objeto de que al ser aplicado sobre un estado normalizado dé por resultado otro estado normalizado.

En el caso de R_5 indicaremos con $|\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2\rangle$ a un estado que pertenece a la R I (λ_1, λ_2) de R_5 y que es el estado de máximo peso de la R I (μ_1, μ_2) de R_4 contenida en la anterior. En este caso habrá dos operadores de descenso: L_5^1 y L_5^2 , definidos por la propiedad

$$L_5^1 |\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2\rangle = |\lambda_1, \lambda_2, \mu_1 - 1, \mu_2\rangle, \quad L_5^2 |\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2\rangle = |\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 - 1\rangle \quad (32)$$

Los generadores de R_5 son los operadores

$$\Lambda_2^2, \Lambda_2^1, \Lambda_2^{-1}, \Lambda_1^1, \Lambda_1^2, \Lambda_{-1}^2; \Lambda_2^{\circ}, \Lambda_1^{\circ}, \Lambda_0^2, \Lambda_0^1 \quad (33)$$

de los cuales, los seis primeros son los generadores del subgrupo R_4 y por lo tanto no cambian los índices de una R I de R_4 . Los

operadores de descenso L_5^1 , L_5^2 trataremos de construirlos por combinación lineal de los cuatro últimos generadores en (33). Sin embargo, análogamente al caso de R_4 , debido a las restricciones adicionales

$$\Lambda_2^m L_5^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = 0, \quad \Lambda_2^m L_5^2 |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = 0, \quad m=1, -1 \quad \text{i. e.}$$

$$[\Lambda_2^m, L_5^1] |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = 0, \quad [\Lambda_2^m, L_5^2] |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = 0, \quad m=1, -1 \quad (34a, b)$$

se llega a la conclusión de que una simple combinación lineal de Λ_5^0 y Λ_0^s $s=1, 2$ no es suficiente; y por eso intentaremos una combinación lineal de términos del tipo $(\Lambda_1^2)^{n_s} (\Lambda_{-1}^2)^{n'_s} \Lambda_5^0$ y $(\Lambda_1^2)^{q_s} (\Lambda_{-1}^2)^{q'_s} \Lambda_0^s$ $s=1, 2$, donde Λ_1^2 y Λ_{-1}^2 son operadores de descenso de R_4 . Esta idea es análoga a la idea utilizada por Nagel y Moshinsky en el caso del grupo unitario 5).

Escribiendo a (32) en la forma equivalente

$$[\Lambda_2^2, L_5^1] |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = -L_5^1 |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2}, \quad [\Lambda_1^1, L_5^1] |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = 0 \quad (35a)$$

$$[\Lambda_2^2, L_5^2] |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = 0, \quad [\Lambda_1^1, L_5^2] |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} = -L_5^2 |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{\mu_1, \mu_2} \quad (35b)$$

y consultando una tabla de conmutadores $[\Lambda_5^s, \Lambda_m^{m'}]$ se puede encontrar fácilmente que los únicos términos del tipo especial mencionado en el párrafo anterior y que satisfacen las condiciones (35a) son los que aparecen en la siguiente combinación lineal

$$L_5^1 = \alpha \Lambda_{-1}^2 \Lambda_1^0 + \beta \Lambda_1^2 \Lambda_0^1 + \gamma \Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 \Lambda_{-1}^2 \Lambda_2^0 \quad (36)$$

Análogamente, se encuentra que los únicos términos que satisfacen las condiciones (35b) son los de esta combinación lineal

$$L_5^2 = \delta \Lambda_0^1 + \Lambda_{-1}^2 \Lambda_2^0 \quad (37)$$

Imponiendo ahora sobre L_5^1 , L_5^2 dados en (36) y (37), las condiciones (34a) y (34b) respectivamente, se llega a

$$\{(\mu_1+1-\mu_2)+\alpha\} \Lambda_{-1}^z \Lambda_2^0 |\lambda_1 \lambda_2\rangle_{\mu_1 \mu_2} + \{\beta(\mu_1-\mu_2+1)-\gamma\} \Lambda_0^1 |\lambda_1 \lambda_2\rangle_{\mu_1 \mu_2} = 0$$

$$\text{y } \{(\mu_1+\mu_2+1)-\beta\} \Lambda_1^z \Lambda_2^0 |\lambda_1 \lambda_2\rangle_{\mu_1 \mu_2} + \{\alpha(\mu_1+\mu_2+1)+\gamma\} \Lambda_1^0 |\lambda_1 \lambda_2\rangle_{\mu_1 \mu_2} = 0$$

en el primer caso; y $\{(\mu_1+\mu_2+1)-\delta\} \Lambda_2^0 |\lambda_1 \lambda_2\rangle_{\mu_1 \mu_2} = 0$ en el segundo

caso. Igualando a cero cada paréntesis de llaves, se obtienen suficientes ecuaciones para determinar unívocamente a los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en (36) y (37). De esta manera se llega a los resultados finales

$$\begin{aligned} L_5^1 = & -\Lambda_{-1}^z \Lambda_1^0 (\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 1) + \Lambda_1^z \Lambda_0^1 (\Lambda_2^z + \Lambda_1^1 + 1) \\ & + \Lambda_0^z (\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 1) (\Lambda_2^z + \Lambda_1^1 + 1) + \Lambda_1^z \Lambda_{-1}^z \Lambda_2^0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$L_5^z = \Lambda_0^1 (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 1) + \Lambda_{-1}^z \Lambda_2^0 \quad (39)$$

Por medio de estos operadores de descenso es posible construir todos los polinomios de la R I (λ_1, λ_2) de R_5 que son de máximo peso en la R I (μ_1, μ_2) de R_4 , aplicando L_5^1, L_5^z consecutivamente sobre el polinomio de máximo peso de la R I de R_5 , i. e.

$$|\lambda_1 \lambda_2\rangle_{\mu_1 \mu_2} = N_{\lambda \mu} (L_5^1)^{\lambda_1 - \mu_1} (L_5^z)^{\lambda_2 - \mu_2} |\lambda_1 \lambda_2\rangle_{\lambda_1 \lambda_2} \quad (40)$$

Para el caso de R_6 se pueden construir también dos operadores de descenso: L_6^1, L_6^z definidos por la propiedad

$$L_6^1 |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_{\mu_1 \mu_2} = |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_{\mu_1 - 1, \mu_2}, \quad L_6^z |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_{\mu_1 \mu_2} = |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_{\mu_1, \mu_2 - 1} \quad (41a, b)$$

siendo $|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_{\mu_1 \mu_2}$ un estado que pertenece a la R I $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 y que es de máximo peso en la R I (μ_1, μ_2) de R_5 contenida en la anterior. El método que hay que seguir para determinar a

L_6^1 y L_6^z ya fué ilustrado suficientemente con el caso de R_5 de modo que no repetiremos los detalles y citaremos únicamente los resultados finales:

$$\begin{aligned}
L_6^1 = & (\Lambda_1^z)^2 (\Lambda_0^1)^2 \Lambda_2^{o'} - \Lambda_1^z \Lambda_0^z \Lambda_0^1 \Lambda_2^{o'} (2\Lambda_1^1 - 1) \\
& + \Lambda_1^z \Lambda_{-1}^z \Lambda_2^{o'} \{2(\Lambda_2^z)^2 + 4\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 2\} - (\Lambda_0^z)^2 \Lambda_2^{o'} (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 1)(\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 1) \\
& - \Lambda_{-1}^z \Lambda_1^{o'} (\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 1)(\Lambda_2^z + 1)(2\Lambda_2^z + 3) - \Lambda_1^z (\Lambda_0^1)^2 \Lambda_1^{o'} (2\Lambda_2^z + 3) \\
& - \Lambda_0^z \Lambda_0^1 \Lambda_1^{o'} (\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 1)(2\Lambda_2^z + 3) - \Lambda_1^z \Lambda_{-1}^{o'} (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 2)(2\Lambda_2^z + 3)(\Lambda_2^z + 1) \\
& + \Lambda_{-2}^{o'} (\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 1)(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 2)(2\Lambda_2^z + 3)(\Lambda_2^z + 1) \\
& + \Lambda_1^z \Lambda_0^1 \Lambda_0^{o'} (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 2)(2\Lambda_2^z + 3) \\
& + \Lambda_0^z \Lambda_0^{o'} (\Lambda_2^z - \Lambda_1^1 + 1)(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 2)(2\Lambda_2^z + 3)
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
L_6^z = & \Lambda_0^1 \Lambda_0^z \Lambda_2^{o'} (2\Lambda_1^1 + 1) + (\Lambda_0^1)^2 \Lambda_1^{o'} (\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 2) - \Lambda_{-1}^z \Lambda_2^{o'} \Lambda_1^1 (2\Lambda_1^1 + 1) \\
& - (\Lambda_0^1)^2 \Lambda_1^z \Lambda_2^{o'} + \Lambda_{-1}^{o'} \Lambda_1^1 (2\Lambda_1^1 + 1)(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 2) - \Lambda_0^1 \Lambda_0^{o'} (2\Lambda_1^1 + 1)(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^z + 2)
\end{aligned} \tag{43}$$

Los generadores $\Lambda_m^{m'}$ que aparecen en L_6^1 y L_6^z se construyen con los operadores \hat{a}^+ , \hat{a} de la Sección A ; este hecho es evidente debido a la ocurrencia del índice $0'$. El polinomio de máximo peso en la RI (μ_1, μ_2) de R_5 contenida en la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 se expresará simbólicamente

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \end{array} \right\rangle = N_{\lambda\mu} (L_6^1)^{\lambda_1 - \mu_1} (L_6^z)^{\lambda_2 - \mu_2} \left| \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \end{array} \right\rangle \tag{44}$$

CAPITULO IV

CONSTRUCCION DE LAS BASES PARA R I
 DE LOS GRUPOS R_4 , R_5 y R_6 .

SECCION A) EL GRUPO R_4

En este caso se construirá la base por dos métodos diferentes. En el primer método la base se clasificará por la cadena canónica de subgrupos $R_4 \supset R_3 \supset R_2$; por lo tanto el primer paso consiste en construir el polinomio que pertenece a la R I (λ_1, λ_2) de R_4 y que es de máximo peso en la R I (ℓ) de R_3 contenida en la anterior. Según se demostró en el Capítulo anterior, este polinomio satisface a las ecuaciones

$$C_1' P = \lambda_1 P, \quad C_1^2 P = 0, \quad C_2^2 P = |\lambda_2| P \quad (1a)$$

$$\Lambda_1' P = \ell P, \quad \Lambda_1^0 P = 0 \quad (1b)$$

$$D^{11} P = D^{12} P = D^{22} P = 0 \quad (1c)$$

Emplearemos los operadores \hat{a}^+ , \hat{a} definidos en (9-III), solo que por comodidad en la escritura, suprimiremos el punto encima de ellos.

La solución general de las ecuaciones (1a) es ⁷⁾ :

$$P = (\Delta_1')^{|\lambda_1 - |\lambda_2||} (\Delta_{10'}^{12})^{|\lambda_2|} \sum \left(\frac{\Delta_{0'}^1}{\Delta_1'}, \frac{\Delta_0^1}{\Delta_1'}, \frac{\Delta_{-1}^1}{\Delta_1'}, \frac{\Delta_{10'}^{12}}{\Delta_{10'}^1}, \frac{\Delta_{1-1}^{12}}{\Delta_{10'}^1} \right) \quad (2)$$

De acuerdo con la técnica empleada en el Capítulo III, hay que introducir las variables

$$X_{11} = 2\Delta'_1 \Delta'_{-1} + (\Delta'_{0'})^2 + (\Delta'_{0'})^2 \quad ; \quad X_{z1} \equiv \Delta'_1 \Delta'_{-1}{}^2 + \Delta'_{0'} \Delta'_{10'}{}^2 + \Delta'_{0'} \Delta'_{10'}{}^2 \quad (3)$$

y reemplazar en el argumento de Z a los cocientes (Δ'_{-1}/Δ'_1) y $\Delta'_{-1}{}^2/\Delta'_{10'}{}^2$ por $X_{11}/(\Delta'_1)^2$ y $X_{z1}/\Delta'_1 \Delta'_{10'}{}^2$, respectivamente. De esta manera, la ecuación $\Lambda'_0 P = 0$ nos dice que Z no depende de $(\Delta'_{0'}/\Delta'_1)$, y la ecuación $\Lambda'_1 P = \ell P$ nos dá una relación lineal entre los exponentes de las 4 variables restantes que aparecen en Z. Se llega así a la conclusión de que la solución de las ecuaciones (1a) y (1b) es

$$P = (\Delta'_1)^{\ell - |\lambda_{z1}|} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} (\Delta'_{0'})^{\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{10'})^{|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{10'})^{n_2} X_{z1}^{n_3} \quad (4)$$

Falta ahora hacer que este polinomio satisfaga también a las ecuaciones (1c). Aplicando D^{z2} sobre P dado en (4) se obtiene

$$D^{z2} P = (\Delta'_1)^{\ell - |\lambda_{z1}| + z} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} \cdot \left\{ \begin{aligned} & n_2 (n_2 - 1) (\Delta'_{0'})^{\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{10'})^{|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{10'})^{n_2 - 2} X_{z1}^{n_3} \\ & + (|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3) (|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3 - 1) (\Delta'_{0'})^{\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{10'})^{|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3 - 2} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{10'})^{n_2} X_{z1}^{n_3} \\ & - n_3 (n_3 - 1) (\Delta'_{0'})^{\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{10'})^{|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3} X_{11}^{n_1 + 1} (\Delta'_{10'})^{n_2} X_{z1}^{n_3 - 2} \end{aligned} \right\}$$

Igualando a cero este resultado se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia para los coeficientes A_{n_1, n_2, n_3} :

$$(|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3) (|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3 - 1) A_{n_1, n_2, n_3} + (n_2 + 1) (n_2 + 2) A_{n_1, n_2 + 2, n_3} - (n_3 + 1) (n_3 + 2) A_{n_1 + 1, n_2, n_3 + 2} = 0 \quad (5)$$

A continuación, aplicando D^{12} sobre P se obtiene

$$D^{12} P = -(\Delta'_z/\Delta'_1) D^{z2} P + (\Delta'_1)^{\ell - |\lambda_{z1}| + 1} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} \cdot \left\{ \begin{aligned} & n_3 (\lambda_1 + |\lambda_{z1}| + 1 - 2n_1 - n_3) (\Delta'_{0'})^{\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{10'})^{|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{10'})^{n_2} X_{z1}^{n_3 - 1} \\ & + (|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3) (\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3 - 1) (\Delta'_{0'})^{\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3 - 1} (\Delta'_{10'})^{|\lambda_{z1}| - n_2 - n_3 - 1} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{10'})^{n_2} X_{z1}^{n_3} \end{aligned} \right\}$$

Igualando a cero el miembro derecho, y suponiendo que P satisface a

$$D^{z2} P = 0, \text{ se obtiene la segunda fórmula de recurrencia:}$$

$$(n_3+1)(\lambda_1+|\lambda_2|-2n_1-n_3)A_{n_1, n_2, n_3+1} + (\lambda_2|-n_2-n_3)(\lambda_1-l-2n_1-n_3)A_{n_1, n_2, n_3} = 0 \quad (6)$$

Por último, aplicando D'' sobre P se obtiene

$$D''P = -\left(\frac{\Delta_1^z}{\Delta_1'}\right)^2 D^{zz}P - 2\frac{\Delta_1^z}{\Delta_1'} D^{1z}P + (\Delta_1')^{l-|\lambda_2|} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} \cdot$$

$$\cdot \left\{ 4n_1(\lambda_1+1-n_1) (\Delta_{0'}^1)^{\lambda_1-l-2n_1-n_3} (\Delta_{10'}^{1z})^{|\lambda_2|-n_2-n_3} X_{11}^{n_1-1} (\Delta_{10'}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3} \right.$$

$$+ 2n_3(\lambda_1-l-2n_1-n_3) (\Delta_{0'}^1)^{\lambda_1-l-2n_1-n_3-1} (\Delta_{10'}^{1z})^{|\lambda_2|-n_2-n_3+1} X_{11}^{n_1} (\Delta_{10'}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3-1}$$

$$+ n_3(n_3-1) (\Delta_{0'}^1)^{\lambda_1-l-2n_1-n_3} (\Delta_{10'}^{1z})^{|\lambda_2|-n_2-n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta_{10'}^{1z})^{n_2+2} X_{21}^{n_3-2}$$

$$+ n_3(n_3-1) (\Delta_{0'}^1)^{\lambda_1-l-2n_1-n_3} (\Delta_{10'}^{1z})^{|\lambda_2|-n_2-n_3+2} X_{11}^{n_1} (\Delta_{10'}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3-2}$$

$$\left. + (\lambda_1-l-2n_1-n_3)(\lambda_1-l-2n_1-n_3-1) (\Delta_{0'}^1)^{\lambda_1-l-2n_1-n_3-2} (\Delta_{10'}^{1z})^{|\lambda_2|-n_2-n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta_{10'}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3} \right\}$$

y de aquí se deduce la tercera fórmula de recurrencia :

$$(\lambda_1-l-2n_1-n_3)(\lambda_1-l-2n_1-n_3-1)A_{n_1, n_2, n_3} + 2(n_3+1)(\lambda_1-l-2n_1-n_3-1)A_{n_1, n_2, n_3+1} + (n_3+1)(n_3+2)A_{n_1, n_2, n_3+2}$$

$$+ (n_3+1)(n_3+2)A_{n_1, n_2-2, n_3+2} + 4(n_1+1)(\lambda_1-n_1)A_{n_1+1, n_2, n_3} = 0 \quad (7)$$

La fórmula (6) nos dá inmediatamente la dependencia de los coeficientes A_{n_1, n_2, n_3} con respecto al índice n_3 ; resolviéndola, podemos escribir

$$A_{n_1, n_2, n_3} = (-)^{n_3} \frac{(\lambda_1+|\lambda_2|-2n_1-n_3)!}{(|\lambda_2|-n_2-n_3)!(\lambda_1-l-2n_1-n_3)!n_3!} B_{n_1, n_2} \quad (8)$$

siendo B_{n_1, n_2} independiente de n_3 . Substituyendo A_{n_1, n_2, n_3} en la forma anterior, en las fórmulas de recurrencia (5) y (7), estas se transforman respectivamente en

$$B_{n_1, n_2} + (n_2+1)(n_2+2)B_{n_1, n_2+2} - B_{n_1-1, n_2} = 0 \quad (5a)$$

$$(\lambda_1-2n_1+n_2-1)(\lambda_2|-2n_1+n_2)B_{n_1, n_2} + B_{n_1, n_2-2} + 4(n_1+1)(\lambda_1-n_1)B_{n_1+1, n_2} = 0 \quad (7a)$$

Si en (5a) se pone $B_{n_1, n_2} = \frac{1}{n_2!} C_{n_1, n_2}$, la fórmula de recurrencia para

C_{n_1, n_2} es

$$C_{n_1, n_2} + C_{n_1, n_2+z} - C_{n_1-1, n_2} = 0 \quad (9)$$

Usando la "condición inicial" : $C_{-1, n_2} = 0$, se deduce que

$C_{0, n_2} + C_{0, n_2+z} = 0$, de modo que se obtienen dos soluciones independientes para C_{0, n_2} , que llamaremos par y non; a saber :

$$\text{solución par: } C_{0, n_2} = (-)^{\frac{n_2}{2}} C_{0,0} \quad n_2 = 0, 2, 4, \dots \quad (10a)$$

$$\text{solución non: } C_{0, n_2} = (-)^{\frac{n_2-1}{2}} C_{0,1} \quad n_2 = 1, 3, 5, \dots \quad (10b)$$

El hecho de que las ecuaciones (1a) y (1c) tienen dos soluciones independientes ya había sido mencionado en los Capítulos II y III ; aquí hemos puesto de manifiesto como aparecen esas dos soluciones.

Poniendo $n_1 = 1$, $n_1 = 2$, etc. en (9) , se obtienen fácilmente fórmulas explícitas para C_{1, n_2} , C_{2, n_2} , etc. , las cuales sugieren la expresión general siguiente

$$\text{solución par: } C_{n_1, n_2} = (-)^{\frac{n_2}{2}} \sum_{k=0}^{\min(n_1, \frac{n_2}{2})} (-)^k \binom{\frac{n_2}{2}}{k} C_{n_1-k, 0} \quad (11a)$$

$$\text{solución non: } C_{n_1, n_2} = (-)^{\frac{n_2-1}{2}} \sum_{k=0}^{\min(n_1, \frac{n_2-1}{2})} (-)^k \binom{\frac{n_2-1}{2}}{k} C_{n_1-k, 1} \quad (11b)$$

Estas dos expresiones han sido verificadas por el método de inducción.

Finalmente, solo falta encontrar la forma explícita de los coeficientes

$C_{n_1, 0} \equiv B_{n_1, 0}$ y $C_{n_1, 1} \equiv B_{n_1, 1}$. Estos se determinan por la fórmula (7a) y la condición inicial $B_{n_1, -1} = B_{n_1, -2} = 0$, que nos dan estas recurrencias

$$(\lambda_1 - 2n_1 - 1)(|\lambda_2| - 2n_1) B_{n_1, 0} + 4(n_1 + 1)(\lambda_1 - n_1) B_{n_1+1, 0} = 0$$

$$(\lambda_1 - 2n_1)(|\lambda_2| - 2n_1 + 1) B_{n_1, 1} + 4(n_1 + 1)(\lambda_1 - n_1) B_{n_1+1, 1} = 0$$

Resolviendo, se obtiene

$$\text{solución par: } B_{n_1,0} = (-)^{n_1} \frac{(\lambda_1 - n_1)!}{4^{n_1} n_1! (\lambda_1 - 1 - 2n_1)!! (\lambda_2 - 2n_1)!!} \quad (12a)$$

$$\text{solución non: } B_{n_1,1} = (-)^{n_1} \frac{(\lambda_1 - n_1)!}{4^{n_1} n_1! (\lambda_1 - 2n_1)!! (\lambda_2 + 1 - 2n_1)!!} \quad (12b)$$

En conclusión, reuniendo los resultados parciales, la forma explícita de los coeficientes A_{n_1, n_2, n_3} en (4) es:

$$\begin{aligned} \text{solución par: } A_{n_1, 2n_2, n_3} &= \frac{(-)^{n_1 + n_2 + n_3} (\lambda_1 + |\lambda_2| - 2n_1 - n_3)! n_2!}{(|\lambda_2| - 2n_2 - n_3)! (\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3)! n_3! (2n_2)!} \\ &\times \sum_{k=0}^{\min(n_1, n_2)} \frac{4^k (\lambda_1 - n_1 + k)! A_{0,0,0}}{k! (n_2 - k)! (n_1 - k)! (\lambda_1 - 1 - 2n_1 + 2k)!! (|\lambda_2| - 2n_1 + 2k)!!} \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \text{solución non: } A_{n_1, 2n_2+1, n_3} &= \frac{(-)^{n_1 + n_2 + n_3} (\lambda_1 + |\lambda_2| - 2n_1 - n_3)! n_2!}{(|\lambda_2| - 2n_2 - n_3 - 1)! (\lambda_1 - \ell - 2n_1 - n_3)! n_3! (2n_2 + 1)!} \\ &\times \sum_{k=0}^{\min(n_1, n_2)} \frac{4^k (\lambda_1 - n_1 + k)! A_{0,1,0}}{k! (n_2 - k)! (n_1 - k)! (\lambda_1 - 2n_1 + 2k)!! (|\lambda_2| + 1 - 2n_1 + 2k)!!} \end{aligned} \quad (13b)$$

$n_2 = 0, 1, 2, \dots$

Una vez que ha sido completamente determinado el polinomio

(4) de la base de la RI (λ_1, λ_2) de R_4 con máximo peso en la RI (ℓ) de R_3 , el siguiente paso en la construcción de la base completa

consiste en la aplicación del operador de descenso de $R_3 \supset R_2$:

$\Lambda_0^1 = \mathcal{E}_0^1 - \mathcal{E}_{-1}^0$. Aplicando este operador $(1-m)$ veces sobre el polinomio dado en (4) se obtiene el polinomio general de la base, con peso m en el subgrupo R_2 .

El segundo método por el cual se puede construir la base de la RI (λ_1, λ_2) de R_4 es aprovechando el homomorfismo entre los grupos $SU_2 \times SU_2$ y R_4 . Para demostrar la existencia de este homomorfismo, observemos que de los 6 generadores de R_4 : $\Lambda_1^1, \Lambda_\theta^\ominus, \Lambda_1^\ominus, \Lambda_\theta^1, \Lambda_{-1}^\ominus, \Lambda_{-1}^1$ se pueden construir estas 6 combinaciones lineales:

$$M_+ \equiv \Lambda_1^{-\theta} \quad M_- \equiv \Lambda_{-\theta}^1 \quad M_0 \equiv \frac{1}{2}(\Lambda_1^1 + \Lambda_{\theta}^{\theta}) \quad (14a)$$

$$N_+ \equiv \Lambda_1^{\theta} \quad N_- \equiv \Lambda_{\theta}^1 \quad N_0 \equiv \frac{1}{2}(\Lambda_1^1 - \Lambda_{\theta}^{\theta}) \quad (14b)$$

Calculando todos los conmutadores, se encuentra que los 3 operadores M_q tienen las mismas reglas de conmutación que los 3 generadores del grupo SU_2 (i.e. las mismas reglas de conmutación que los operadores L_+ , L_0 , L_- del momento angular), siendo M_+ el generador de ascenso, M_- el de descenso, y M_0 el de peso. De la misma manera se encuentra que los 3 operadores N_q también tienen las mismas reglas de conmutación que los generadores del grupo SU_2 ; y además se encuentra que cualquier generador M_q conmuta con cualquier otro generador N_q . Con esto queda demostrado que efectivamente las álgebras de los generadores de R_4 y de $SU_2 \times SU_2$ son homomórficas.

Una RI de SU_2 queda caracterizada por su máximo peso:

j = número entero o semientero no-negativo; y la dimensión de la RI $[j]$ es $D = 2j+1$. Para averiguar que RIs $\{j_1, j_2\}$ de $SU_2 \times SU_2$ están contenidas en la RI (λ_1, λ_2) de R_4 , buscaremos el polinomio P que pertenece a la RI (λ_1, λ_2) de R_4 y que al mismo tiempo es el polinomio de máximo peso de la RI $\{j_1, j_2\}$ de $SU_2 \times SU_2$ contenida en la anterior. Este polinomio deberá satisfacer estas ecuaciones

$$C_1^1 P = \lambda_1 P, \quad C_2^2 P = \lambda_2 P, \quad C_1^2 P = 0 \quad (15a)$$

$$D^{11} P = D^{12} P = D^{22} P = 0 \quad (15b)$$

$$M_0 P = j_1 P, \quad M_+ P = 0, \quad N_0 P = j_2 P, \quad N_+ P = 0 \quad (\alpha)$$

Pero de acuerdo con (14a,b) las ecuaciones (α) equivalen a

$$\Lambda_1^1 P = (j_1 + j_2) P, \quad \Lambda_{\theta}^{\theta} P = (j_1 - j_2) P, \quad \Lambda_1^{\theta} P = \Lambda_{-\theta}^1 P = 0 \quad (15c)$$

y por lo tanto, el conjunto de ecuaciones (15a,b,c) es idéntico a las ecuaciones que aparecen al buscar el polinomio de máximo peso de la RI (λ_1, λ_2) de R_4 , y este último problema ya fué resuelto en el Capítulo II. Del análisis efectuado en ese Capítulo, sabemos que las ecuaciones (15a,b,c) solo tienen solución en estos dos casos:

a) si $\lambda_2 \geq 0$ solo existe solución cuando $j_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$, $j_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$
y dicha solución es

$$P = (\Delta'_1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta'_1 \begin{matrix} z \\ \theta \end{matrix})^{\lambda_2} \quad (16a)$$

b) si $\lambda_2 < 0$ solo existe solución cuando $j_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - |\lambda_2|)$, $j_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + |\lambda_2|)$
y dicha solución es

$$P = (\Delta'_1)^{\lambda_1 - |\lambda_2|} (\Delta'_1 \begin{matrix} z \\ -\theta \end{matrix})^{|\lambda_2|} \quad (16b)$$

Llegamos así a la conclusión de que la RI (λ_1, λ_2) de R_4 corresponde a la RI $\left\{ \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \right\}$ de $SU_2 \times SU_2$. La dimensión de esta última RI es $D = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2 + 1) = (\lambda_1 + 1)^2 - \lambda_2^2$ y el resultado concuerda con la dimensión de la RI (λ_1, λ_2) de R_4 encontrada en el Capítulo anterior.

Para obtener la base completa de la RI (λ_1, λ_2) de R_4 por este segundo método, podemos aplicar sobre los polinomios de máximo peso de la RI dados en (16a,b), los operadores de descenso de cada grupo SU_2 , i.e. M_- y N_- . El polinomio general de la base tiene por expresión:

a) Cuando $\lambda_2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
 P_{m_1, m_2}^{(\lambda_1, \lambda_2)} &= N'_{\lambda m} (\Lambda_{-\theta}^1)^{\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - m_1} (\Lambda_{\theta}^1)^{\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) - m_2} (\Delta_1^1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{1, \theta}^1)^{\lambda_2} \\
 &= N_{\lambda m} \sum \frac{(-)^{n_1 + n_3} (\Delta_1^1)^{\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) + m_2 - n_1} (\Delta_{\theta}^1)^{\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) - m_2 - n_2} (\Delta_{-\theta}^1)^{n_1} (\Delta_1^1)^{n_2}}{n_1 n_2 n_3 n_1! n_2! n_3! [\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) + m_2 - n_1]! [\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) - m_2 - n_2]!} \\
 &\quad \times \frac{(\Delta_{1, \theta}^1)^{m_1 + n_1 + n_2 + n_3 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)} (\Delta_{-\theta - 1}^1)^{n_3} (\Delta_{-1}^1 + \Delta_{\theta - \theta}^1)^{\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - m_1 - n_1 - n_2 - 2n_3}}{[m_1 + n_1 + n_2 + n_3 - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)]! [\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - n_1 - n_2 - 2n_3 - m_1]!} \quad (17a) \\
 &\quad |m_1| \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad , \quad |m_2| \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) .
 \end{aligned}$$

b) Cuando $\lambda_2 < 0$

$$P_{m_1, m_2}^{(\lambda_1, \lambda_2)} = N'_{\lambda m} (\Lambda_{-\theta}^1)^{\frac{1}{2}(\lambda_1 - |\lambda_2|) - m_1} (\Lambda_{\theta}^1)^{\frac{1}{2}(\lambda_1 + |\lambda_2|) - m_2} (\Delta_1^1)^{\lambda_1 - |\lambda_2|} (\Delta_{1 - \theta}^1)^{|\lambda_2|} \quad (17b)$$

La forma desarrollada de este polinomio se obtiene de (17a) intercambiando m_1 con m_2 , θ con $-\theta$ y escribiendo $|\lambda_2|$ en lugar de λ_2 .

SECCION B) EL GRUPO R_5

En este caso también propondremos dos métodos diferentes para construir la base de la RI (λ_1, λ_2) de R_5 . En el primer método se usará la cadena de grupos $R_5 \supset R_4 \supset R_3 \supset R_2$ para clasificar los renglones de la RI. El primer paso en este método consiste en encontrar un polinomio que pertenezca a la RI (λ_1, λ_2) de R_5 y que sea el polinomio de máximo peso de la RI (μ_1, μ_2) de R_4 contenida en la anterior. Este polinomio satisface a las siguientes ecuaciones:

$$C_1^1 P = \lambda_1 P, \quad C_1^2 P = 0, \quad C_2^2 P = \lambda_2 P \quad (18a)$$

$$\Lambda_2^2 P = \mu_1 P, \quad \Lambda_1^1 P = \mu_2 P, \quad \Lambda_2^1 P = \Lambda_2^{-1} P = 0 \quad (18b)$$

$$D'' P = D^{12} P = D^{22} P = 0 \quad (18c)$$

El análisis de estas ecuaciones es bastante parecido al efectuado en la Sección anterior para el caso de R_4 , por lo tanto solo citaremos los resultados esenciales.

La solución de las ecuaciones (18a) y (18b) es

$$P = (\Delta'_z)^{\mu_1 - \lambda_2} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} (\Delta'_{z1})^{\mu_2 + n_2} (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{z0})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{z-1})^{n_2} X_{z1}^{n_3} \quad (19)$$

con $X_{11} \equiv \sum_{m=2}^{-2} \Delta'_m \Delta'_{-m}$, $X_{z1} \equiv \sum_{m=2}^{-2} \Delta'_m \Delta'_{z-m}$. Al aplicar D^{zz} sobre este polinomio se obtiene

$$D^{zz} P = (\Delta'_z)^{\mu_1 - \lambda_2 + 2} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3}$$

$$\times \left\{ (\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3)(\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3 - 1) (\Delta'_{z1})^{\mu_2 + n_2} (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{z0})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3 - 2} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{z-1})^{n_2} X_{z1}^{n_3} \right. \\ \left. - n_3(n_3 - 1) (\Delta'_{z1})^{\mu_2 + n_2} (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{z0})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3} X_{11}^{n_1 + 1} (\Delta'_{z-1})^{n_2} X_{z1}^{n_3 - 2} \right. \\ \left. + 2n_2(n_2 + \mu_2) (\Delta'_{z1})^{\mu_2 + n_2 - 1} (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{z0})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{z-1})^{n_2 - 1} X_{z1}^{n_3} \right\}$$

Al igualar a cero se deduce esta fórmula de recurrencia para los coeficientes A_{n_1, n_2, n_3} :

$$(\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3)(\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3 - 1) A_{n_1, n_2, n_3} \\ - (n_3 + 1)(n_3 + 2) A_{n_1, n_2, n_3 + 2} + 2(n_2 + 1)(n_2 + 1 + \mu_2) A_{n_1, n_2 + 1, n_3} = 0 \quad (20)$$

A continuación, aplicando D^{12} sobre P se obtiene

$$D^{12} P = - \frac{\Delta'_z}{\Delta'_1} D^{zz} P + (\Delta'_z)^{\mu_1 - \lambda_2 + 1} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} \\ \times \left\{ (\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3)(\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3) (\Delta'_{z1})^{\mu_2 + n_2} (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3 - 1} (\Delta'_{z0})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3 - 1} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{z-1})^{n_2} X_{z1}^{n_3} \right. \\ \left. + n_3(\lambda_1 + \lambda_2 - 2n_1 - n_3 + 2) (\Delta'_{z1})^{\mu_2 + n_2} (\Delta'_0)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta'_{z0})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta'_{z-1})^{n_2} X_{z1}^{n_3 - 1} \right\}$$

Esto nos da la segunda fórmula de recurrencia

$$(\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3)(\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3) A_{n_1, n_2, n_3} + (n_3 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 1 - 2n_1 - n_3) A_{n_1, n_2, n_3 + 1} = 0 \quad (21)$$

Por último, aplicando D^{11} sobre P se obtiene

$$\begin{aligned}
D''P &= -\left(\frac{\Delta_2^z}{\Delta_2^1}\right)^2 D^{2z}P - z\left(\frac{\Delta_2^z}{\Delta_2^1}\right) D^{1z}P + (\Delta_2^1)^{\mu_1 - \lambda_2} \sum_{n_1, n_2, n_3} A_{n_1, n_2, n_3} \\
&\times \left\{ 2n_1(2\lambda_1 + 3 - 2n_1) (\Delta_{21}^{1z})^{\mu_2 + n_3} (\Delta_0^1)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta_{20}^{1z})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3} X_{11}^{n_1 - 1} (\Delta_{2-1}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3} \right. \\
&+ (\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3)(\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3 - 1) (\Delta_{21}^{1z})^{\mu_2 + n_3} (\Delta_0^1)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3 - 2} (\Delta_{20}^{1z})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta_{2-1}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3} \\
&+ 2n_3(\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3) (\Delta_{21}^{1z})^{\mu_2 + n_3} (\Delta_0^1)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3 - 1} (\Delta_{20}^{1z})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3 + 1} X_{11}^{n_1} (\Delta_{2-1}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3 - 1} \\
&+ n_3(n_3 - 1) (\Delta_{21}^{1z})^{\mu_2 + n_3} (\Delta_0^1)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta_{20}^{1z})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3 + 2} X_{11}^{n_1} (\Delta_{2-1}^{1z})^{n_2} X_{21}^{n_3 - 2} \\
&\left. + 2n_3(n_3 - 1) (\Delta_{21}^{1z})^{\mu_2 + n_3 + 1} (\Delta_0^1)^{\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3} (\Delta_{20}^{1z})^{\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3} X_{11}^{n_1} (\Delta_{2-1}^{1z})^{n_2 + 1} X_{21}^{n_3 - 2} \right\}
\end{aligned}$$

lo cual nos conduce a la tercera fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned}
2n_1(2\lambda_1 + 3 - 2n_1)A_{n_1, n_2, n_3} + (\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3 + 2)(\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3 + 1)A_{n_1 - 1, n_2, n_3} + (n_3 + 1)(n_3 + 2)A_{n_1 - 1, n_2, n_3 + 2} \\
+ 2(n_3 + 1)(\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3 + 1)A_{n_1 - 1, n_2, n_3 + 1} + 2(n_3 + 1)(n_3 + 2)A_{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 + 2} = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

De la fórmula (21) se deduce la dependencia de A_{n_1, n_2, n_3} con respecto al índice n_3 ; esta fórmula nos permite escribir

$$A_{n_1, n_2, n_3} = (-)^{n_3} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + 1 - 2n_1 - n_3)!}{(\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3)! (\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3)! n_3!} B_{n_1, n_2} \quad (23)$$

siendo B_{n_1, n_2} independiente de n_3 . Substituyendo (23) en (20) y (22), estas dos recurrencias se transforman respectivamente en

$$B_{n_1, n_2} + 2(n_2 + 1)(n_2 + 1 + \mu_2) B_{n_1, n_2 + 1} - B_{n_1 - 1, n_2} = 0 \quad (20a)$$

$$2n_1(2\lambda_1 + 3 - 2n_1) B_{n_1, n_2} + (\lambda_1 + \mu_2 + 3 - 2n_1 + 2n_2)(\lambda_1 + \mu_2 + 2 - 2n_1 + 2n_2) B_{n_1 - 1, n_2} + 2B_{n_1 - 1, n_2 - 1} = 0 \quad (22a)$$

La (20a) se resuelve de manera análoga a como se resolvió la (5a) de la Sección anterior. El resultado a que se llega es

$$B_{n_1, n_2} = (-)^{n_2} \frac{1}{n_2! (n_2 + \mu_2)! 2^{n_2}} \sum_{k=0}^{\min(n_1, n_2)} (-)^k \binom{n_2}{k} B_{n_1 - k, 0} \quad (24)$$

Los coeficientes $B_{n_1, 0}$ se determinan de (22a) empleando la condición

inicial $B_{n_1, -1} = 0$, esto nos dá la recurrencia

$$2n_1(2\lambda_1 + 3 - 2n_1)B_{n_1, 0} + (\lambda_1 + \mu_2 + 3 - 2n_1)(\lambda_1 + \mu_2 + 2 - 2n_1)B_{n_1, -1} = 0$$

cuya solución es

$$B_{n_1, 0} = (-)^{n_1} \frac{(2\lambda_1 + 2 - 2n_1)!}{n_1! (\lambda_1 + 1 - n_1)! (\lambda_1 + \mu_2 + 1 - 2n_1)!} B_{0, 0} \quad (25)$$

En conclusión, el valor explícito del coeficiente A_{n_1, n_2, n_3} en (19) es

$$A_{n_1, n_2, n_3} = (-)^{n_1 + n_2 + n_3} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + 1 - 2n_1 - n_3)!}{2^{n_2} (\lambda_1 - \mu_1 - 2n_1 - n_3)! (\lambda_2 - \mu_2 - 2n_2 - n_3)! n_3! (n_2 + \mu_2)!} \times \sum_{k=0}^{\min(n_1, n_2)} \frac{(2\lambda_1 + 2 - 2n_1 + 2k)!}{k! (n_2 - k)! (n_1 - k)! (\lambda_1 + 1 - n_1 + k)! (\lambda_1 + \mu_2 + 1 - 2n_1 + 2k)!} \quad (26)$$

Para terminar de construir la base completa de la R I (λ_1, λ_2) de R_5 , debemos descender ahora a los subgrupos R_3 y R_2 . Esto lo podemos lograr aplicando los operadores de descenso de $R_4 \supset R_3$ y de $R_3 \supset R_2$, construidos en el Capítulo anterior. Con un cambio apropiado de notación, estos operadores son

$$\mathcal{L}_1 = 2(\Lambda_2' - \Lambda_2^{-1})\Lambda_2^z(2\Lambda_2^z + 1) + 2(\Lambda_1^z + \Lambda_{-1}^z)\Lambda_1'(2\Lambda_2^z + 1) - (\Lambda_1^z + \Lambda_{-1}^z)^2(\Lambda_2' - \Lambda_2^{-1}) \quad (27a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \Lambda_1^z + \Lambda_{-1}^z \quad (27b)$$

El primero aplicado sucesivamente sobre el polinomio (19), nos dá todos los polinomios de máximo peso en R_3 contenidos en la R I (μ_1, μ_2) de R_4 ; y el segundo, aplicado posteriormente nos dá los polinomios de máximo peso en R_2 , y por lo tanto logramos así la base completa.

El segundo método que se discutirá para construir la base de la R I (λ_1, λ_2) de R_5 consiste en el empleo de la cadena de grupos $R_5 \supset R_3 \supset R_2$ para clasificar los renglones de la R I. Sin embargo, hay que aclarar que el grupo R_3 que aparece aquí no es mismo R_3 que aparecía en el análisis anterior de la cadena canónica $R_5 \supset R_4 \supset R_3 \dots$

El grupo R_3 en el caso presente es el grupo formado por las matrices de la R I $D^{(2)}(R_3)$ de dimensión 5 del grupo de rotaciones en tres dimensiones; las matrices 5 X 5 de esta representación son ortogonales y constituyen un subgrupo de todas las matrices ortogonales 5 X 5 que forman el grupo R_5 . Una desventaja de la cadena $R_5 \supset R_3$ es que en general ella no determina unívocamente las funciones de la base; es decir, una R I de R_3 puede aparecer contenida más de una vez en una R I de R_5 , y es necesario encontrar operadores tales que al exigir que las funciones de la base sean eigenfunciones de esos operadores adicionales, se logre una clasificación completa de la base. Aquí no se atacará el problema de encontrar los operadores adicionales; las soluciones degeneradas que se encuentren, simplemente se pueden ortogonalizar por el método de Schmidt. A pesar de estos inconvenientes, la cadena $R_5 \supset R_3$ es la que hay que emplear en las aplicaciones físicas, ya que el grupo R_3 que aparece aquí es el que tiene por generadores a las componentes del momento angular orbital, y por lo tanto en problemas en los cuales los eigenvalores de L^2 y L_z son buenos números cuánticos, estos números aparecen en la clasificación de los renglones de la R I.

Las funciones de la base en la cadena $R_5 \supset R_3$ se indicarán con la notación $|\omega, \lambda_1, \lambda_2, LM\rangle$, donde ω significa el conjunto de eigenvalores de los operadores adicionales necesarios para clasificar unívocamente las funciones, L es el momento angular orbital, y M es su proyección sobre el eje Z . Para construir estas funciones empezaremos por escribir los 10 generadores de R_5 : $\Lambda_m^{m'}$ en una

forma apropiada para esa cadena, a saber :

$$L_q = \sqrt{\frac{5}{2}} \sum_{mm'} (-)^{m'} \langle 22 m -m' | 1 q \rangle \Lambda_m^{m'} \quad q=1, 0, -1 \quad (28a)$$

$$T_\tau = \sqrt{\frac{5}{2}} \sum_{mm'} (-)^{m'} \langle 22 m -m' | 3 \tau \rangle \Lambda_m^{m'} \quad \tau=3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 \quad (28b)$$

Calculando los conmutadores, se encuentra que los 3 operadores L_q tienen las mismas reglas de conmutación que las componentes del momento angular, mientras que los 7 operadores T_τ satisfacen las reglas de conmutación de las componentes de un tensor de Racah de rango 3, es decir

$$[L_q, T_\tau] = \sqrt{12} \langle 31 \tau -q, q | 3 \tau \rangle T_{q+\tau} \quad (29)$$

Los 3 operadores L_q son por lo tanto, los generadores del subgrupo $\mathcal{D}^{(2)}(R_3)$ de R_5 . De (28a) se encuentra que $L_0 = 2\Lambda_2^2 + \Lambda_1^1$ y L_1 es una combinación lineal de operadores de ascenso de R_5 , de modo que el estado de máximo peso de la RI (λ_1, λ_2) de R_5 posee la propiedad de que

$$L_1 | \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\text{máx. peso}} = 0, \quad L_0 | \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\text{máx. peso}} = (2\lambda_1 + \lambda_2) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\text{máx. peso}} \quad (30)$$

y es por lo tanto, un estado de momento angular definido: $L = 2\lambda_1 + \lambda_2$ y de máxima proyección: $M = L$.

A partir de este estado construiremos los otros estados de máxima proyección correspondientes a otros momentos angulares contenidos en la RI de R_5 , por medio de un operador de descenso: $\mathcal{M}_{LL'}^{(3)}$. Este operador se construye de tal modo que aplicado sobre una función con momento angular L y máxima proyección, dé por resultado otra función con momento angular L' y máxima proyección. Como los generadores T_τ son los únicos que cambian el momento angular, podríamos suponer que el operador $\mathcal{M}_{LL'}^{(3)}$ es una combinación lineal de T_τ . Sin

embargo, estos operadores deben combinarse con potencias apropiadas de L_{-1} para poder satisfacer las condiciones de que la función resultante sea de momento angular L' y de máxima proyección. El análisis necesario es muy parecido al efectuado en la Sección C del Capítulo anterior, por lo cual citaremos únicamente el resultado final ¹⁴⁾ :

$$m_{LL'}^{(3)} = \sum_{\tau=3}^{-3} (-)^{\tau} \sqrt{\frac{(3+\tau)!}{2^{3-\tau} (3-\tau)!}} \frac{(L-L'+3)!(L+L'+4)!}{(L-L'+\tau)!(L+L'+1+\tau)!} (L_{-1})^{\tau+L-L'} T_{\tau} \quad (31)$$

Por aplicación sucesiva de este operador sobre la función de máximo peso de la RI (λ_1, λ_2) de R_5 , cambiando los valores de L y L' de manera apropiada en cada aplicación, es factible construir todos los estados $|\lambda_1, \lambda_2; \omega; LL\rangle$ de la RI (λ_1, λ_2) de R_5 . Aún en el caso de que un momento angular dado: L' ocurriera más de una vez en la RI, es posible obtener todos los estados de momento angular L' aplicando el operador $m_{LL'}^{(3)}$ sobre funciones con diferentes valores de L ; los diferentes estados así obtenidos deberán luego ortogonalizarse por el método de Schmidt. Finalmente, para completar la construcción de la base, habrá que aplicar el operador de descenso de $R_3 \supset R_2$: L_{-1} , tantas veces como sea necesario, sobre las funciones de máxima proyección que se acaban de construir.

Mencionaremos ahora un método alternativo para construir los estados $|\lambda_1, \lambda_2; \omega; LM\rangle$ que se acaban de discutir. Este método consiste en construir la matriz del operador $L^2 = \sum_{q=1}^{-1} (-)^q L_q L_{-q}$ en la base $|\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; \tau\rangle$ clasificada por la cadena canónica $R_5 \supset R_4 \supset R_3 \dots$. Los elementos de matriz de L^2 en esta base se obtienen usando los resultados de Gel'fand y Zetlin ⁸⁾ para los elementos de matriz de

los generadores de R_r con respecto a la base clasificada por la cadena canónica $R_r \supset R_{r-1} \supset R_{r-2} \dots$, y recordando que las L_q , de acuerdo con (28a), son funciones lineales de los generadores de R_5 ; explícitamente: $L_{+1} = -\sqrt{2}\Lambda_2^1 - \sqrt{3}\Lambda_1^0$, $L_0 = 2\Lambda_2^2 + \Lambda_1^1$, $L_{-1} = \sqrt{2}\Lambda_1^2 + \sqrt{3}\Lambda_0^1$.

Una vez construida la matriz de L^2 en la base canónica, se diagonaliza y se calculan sus eigenvectores; las componentes del eigenvector asociado al eigenvalor $L(L+1)$, son los coeficientes del desarrollo del estado $|\lambda_1 \lambda_2 \rangle_{\omega; LM}$ como combinación lineal de estados $|\lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle_{\omega}$.

SECCION C) EL GRUPO R_6

De nuevo en este caso propondremos dos métodos diferentes para construir la base de la RI $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ de R_6 . El primer método consiste en aprovechar el homomorfismo entre SU_4 y R_6 , y clasificar los renglones de la RI de R_6 por la cadena de grupos $SU_4 \supset SU_3 \supset SU_2$. Empezaremos por demostrar la existencia del homomorfismo mencionado.

Con los 15 generadores $\Lambda_m^{m'}$ $m, m' = 2, 1, 0, -0, -1, -2$ de R_6 , podemos construir estas combinaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 C_1^1 &= \frac{1}{2}(\Lambda_2^2 + \Lambda_1^1 - \Lambda_0^0) & C_2^2 &= \frac{1}{2}(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^1 + \Lambda_0^0) \\
 C_3^3 &= \frac{1}{2}(-\Lambda_2^2 + \Lambda_1^1 + \Lambda_0^0) & C_4^4 &= \frac{1}{2}(-\Lambda_2^2 - \Lambda_1^1 - \Lambda_0^0) \\
 C_1^2 &= \Lambda_1^0 & C_1^3 &= -\Lambda_2^0 & C_1^4 &= \Lambda_2^{-1} \\
 C_2^3 &= \Lambda_2^1 & C_2^4 &= \Lambda_2^{-0} & C_3^4 &= \Lambda_1^{-0} \\
 C_2^1 &= \Lambda_0^1 & C_3^1 &= -\Lambda_0^2 & C_4^1 &= \Lambda_{-1}^2 \\
 C_3^2 &= \Lambda_1^2 & C_4^2 &= \Lambda_{-0}^2 & C_4^3 &= \Lambda_{-0}^1
 \end{aligned} \tag{32}$$

Calculando los conmutadores, se encuentra que los 16 operadores $C_s^{s'}$ obedecen las mismas reglas de conmutación que los generadores del grupo U_4 , y como $C_1^1 + C_2^2 + C_3^3 + C_4^4 \equiv 0$, los 15 operadores linealmente independientes que quedan al considerar $(C_s^s - C_4^4)$ $s = 1, 2, 3$ en lugar de las 4 C_s^s originales, tienen las reglas de conmutación de los generadores del grupo unimodular unitario en 4 dimensiones: SU_4 . $(C_s^s - C_4^4)$ $s = 1, 2, 3$ son los operadores de peso, $C_s^{s'}$ con $s < s'$ son los operadores de ascenso, y $C_s^{s'}$ con $s > s'$ son los operadores de descenso. Así hemos verificado que las álgebras de los generadores de R_6 y de SU_4 son homomórficas.

Para averiguar la correspondencia entre RI de SU_4 y de R_6 , buscaremos el polinomio P que pertenece a la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 y que es al mismo tiempo el polinomio de máximo peso de una RI $[h_1, h_2, h_3]$ de SU_4 contenida en la anterior. Este polinomio debe satisfacer a las ecuaciones

$$C_1^1 P = \lambda_1 P, C_2^2 P = \lambda_2 P, C_3^3 P = \lambda_3 P, C_1^2 P = C_1^3 P = C_2^3 P = 0 \quad (33a)$$

$$D^{11} P = D^{22} P = D^{33} P = D^{12} P = D^{13} P = D^{23} P = 0 \quad (33b)$$

$$(C_1^1 - C_4^4) P = h_1 P, (C_2^2 - C_4^4) P = h_2 P, (C_3^3 - C_4^4) P = h_3 P \quad (\alpha)$$

$$C_1^2 P = C_1^3 P = C_2^3 P = C_1^4 P = C_2^4 P = C_3^4 P = 0 \quad (\beta)$$

Pero debido a las definiciones de las $C_s^{s'}$ dadas en (32), las ecuaciones (α) y (β) equivalen a

$$\Lambda_2^2 P = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 - h_3) P, \Lambda_1^1 P = \frac{1}{2}(h_1 - h_2 + h_3) P, \Lambda_{\theta}^{\theta} P = \frac{1}{2}(-h_1 + h_2 + h_3) P \quad (33c)$$

$$\Lambda_2^1 P = \Lambda_2^{\theta} P = \Lambda_2^{-\theta} P = \Lambda_2^{-1} P = \Lambda_1^{\theta} P = \Lambda_1^{-\theta} P = 0 \quad (33d)$$

Se llega así a la conclusión de que las ecuaciones (33a,b,c,d) son idénticas al conjunto de ecuaciones que definen al polinomio de máximo peso de la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 , y que fueron analizadas en el Capítulo II. Usando los resultados de ese Capítulo podemos afirmar ahora que las ecuaciones (33a,b,c,d) solo tienen solución en alguno de estos 2 casos:

- a) si $\lambda_3 > 0$, $h_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $h_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, $h_3 = \lambda_2 + \lambda_3$, dicha solución es

$$P = (\Delta_z^1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{z1}^{1z})^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{z1\theta}^{1z3})^{\lambda_3} \quad (34a)$$

- b) si $\lambda_3 < 0$, $h_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $h_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, $h_3 = \lambda_2 + \lambda_3$, dicha solución es

$$P = (\Delta_z^1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{z1}^{1z})^{\lambda_2 + \lambda_3} (\Delta_{z1\theta}^{1z3})^{|\lambda_3|} \quad (34b)$$

Hemos demostrado de esta manera que a la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 le corresponde la RI $[\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3]$ de SU_4 . Las RIs de SU_4 las estamos denotando por medio del diagrama de Young $[h_1, h_2, h_3]$ con $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq 0$. Una verificación adicional de la correspondencia anterior se tiene en el hecho de que las dimensiones de las dos RIs puestas en correspondencia, son iguales. En efecto, si en la fórmula de dimensionalidad ⁹⁾ para la RI $[h_1, h_2, h_3]$ de SU_4 , i.e.

$D = (h_1 - h_2 + 1)(h_1 - h_3 + 2)(h_1 + 3)(h_2 - h_3 + 1)(h_2 + 2)(h_3 + 1)/12$, se pone $h_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $h_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, $h_3 = \lambda_2 + \lambda_3$, se obtiene

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 3)[(\lambda_2 + 1)^2 - \lambda_3^2][(\lambda_1 + 2)^2 - \lambda_3^2]/12$$

lo cual coincide con la fórmula para la dimensión de la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 , deducida en el Capítulo anterior.

Para construir el resto de la base de la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 se pueden utilizar a continuación los operadores de descenso del

grupo Unitario construidos por Nagel y Moshinsky ⁵⁾. El operador de descenso L_4^s $s = 1, 2, 3$ aplicado sobre una función de máximo peso en la RI $[h_1, h_2, h_3]$ de U_3 , reduce en una unidad el índice h_s y conserva a la función en máximo peso. Puesto que el polinomio (34) es de máximo peso en la RI $[\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3]$ de U_3 , aplicando sobre él potencias apropiadas de los operadores de descenso L_4^1 , L_4^2 y L_4^3 , se obtienen todos los polinomios de máximo peso en las diferentes RI de U_3 contenidas en la RI $[\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, 0]$ de U_4 original. La forma explícita de los operadores L_4^s está dada en la referencia (5) en términos de los generadores de U_4 : $C_5^{s'}$. Traduciendo estos operadores a la notación de las $\Lambda_m^{m'}$ por medio de la Tabla (32) se encuentran estas fórmulas explícitas:

$$L_4^1 = \Lambda_{-1}^2 (\Lambda_1^1 - \Lambda_\theta^0 + 1) (\Lambda_2^2 - \Lambda_\theta^0 + 2) + \Lambda_\theta^1 \Lambda_{-\theta}^2 (\Lambda_2^2 - \Lambda_\theta^0 + 2) - \Lambda_\theta^2 \Lambda_{-\theta}^1 (\Lambda_1^1 + \Lambda_\theta^0 + 1) + \Lambda_\theta^1 \Lambda_1^2 \Lambda_{-\theta}^1 \quad (35a)$$

$$L_4^2 = \Lambda_{-\theta}^2 (\Lambda_2^2 - \Lambda_1^1 + 1) + \Lambda_1^2 \Lambda_{-\theta}^1 \quad (35b)$$

$$L_4^3 = \Lambda_{-\theta}^1 \quad (35c)$$

Una vez encontrados todos los polinomios de máximo peso en las RIs de U_3 contenidas en la RI de U_4 original, se pueden calcular a partir de ellos los polinomios de máximo peso en U_2 , por medio de otros dos operadores de descenso:

$$L_3^1 = -\Lambda_\theta^2 (\Lambda_1^1 - \Lambda_\theta^0 + 1) + \Lambda_\theta^1 \Lambda_1^2 \quad (36a)$$

$$L_3^2 = \Lambda_1^2 \quad (36b)$$

L_3^s aplicado sobre una función de máximo peso en la RI $[q_1, q_2]$ de U_2 produce la función de máximo peso en la RI de U_2 con el índice

q_s disminuido en una unidad. Finalmente, por aplicación sobre los polinomios de máximo peso en U_2 obtenidos por el procedimiento anterior, de una potencia apropiada del operador de descenso de $U_2 \supset U_1$: Λ'_θ , se obtiene la base completa de la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 con los renglones clasificados por la cadena de grupos $U_3 \supset U_2 \supset U_1$. La expresión simbólica de una función de la base es

$$\left| \begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, 0 \\ h_1 \quad h_2 \quad h_3 \\ q_1 \quad q_2 \\ r_1 \end{array} \right\rangle = N (\Lambda'_\theta)^{q_1 - r_1} (\Lambda'_1)^{h_2 - q_2} \left[-\Lambda'_\theta (\Lambda'_1 - \Lambda'_\theta + 1) + \Lambda'_\theta \Lambda'_1 \right]^{h_1 - q_1} \\ \times (\Lambda'_\theta)^{\lambda_2 + \lambda_3 - h_3} \left[\Lambda'_\theta (\Lambda'_2 - \Lambda'_1 + 1) + \Lambda'_1 \Lambda'_\theta \right]^{\lambda_1 + \lambda_2 - h_2} \left(\Lambda'_1 \right)^{\lambda_1 + \lambda_2 - h_1} \left| \begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right\rangle \quad (37)$$

El segundo método para construir la base de la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 consiste en el empleo de la cadena de grupos $R_6 \supset R_5 \supset R_3$ para clasificar los renglones de la RI; el grupo R_3 a que nos referimos es el de las matrices $D^{(2)}(R_3)$. Esta cadena es la de interés físico puesto que aquí las funciones de la base se clasifican con los eigenvalores del cuadrado del momento angular orbital y de su proyección sobre el eje Z. El primer paso en la construcción de la base consiste en la obtención de los polinomios de máximo peso de cada una de las RIs de R_5 contenidas en la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 . Estas RIs de R_5 son, como demostraremos al final de este Capítulo, aquellas cuyos índices (μ_1, μ_2) satisfacen las desigualdades

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq |\lambda_3| \quad (38)$$

y los polinomios de máximo peso correspondientes, se obtienen aplicando sobre el polinomio (34) potencias de los operadores de descenso

L_6^1, L_6^2 de $R_6 \supset R_5$, obtenidos en el Capítulo anterior. La función (34) es también la función de máximo peso de la RI (λ_1, λ_2) de R_5 , de modo que ella se puede tomar como punto de partida para construir las otras funciones de máximo peso en R_5 . Solo que hay que tomar en cuenta que, como se explicó en el Capítulo III, para definir apropiadamente el subgrupo R_5 de R_6 , hay que pasar de la numeración de índices 2, 1, 0, -1, -2 a la 2, 1, 0, 0', -1, -2, y bajo este cambio de métrica la función (34) se transforma a

$$P = (\Delta_2^1)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{21}^{12})^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{210}^{123} \pm i \Delta_{210'}^{123})^{|\lambda_3|} \quad \lambda_3 \geq 0 \quad (39)$$

La forma explícita de los operadores de descenso L_6^1, L_6^2 está dada en (42-III) y en (43-III). Una vez que han sido obtenidos todos los polinomios de máximo peso en R_5 , el procedimiento que se sigue con cada uno de ellos es exactamente el mismo que fué descrito en la Sección B de este Capítulo, es decir la aplicación del operador $\mathcal{M}_{L'L'}^{(3)}$ dado en (31), y posteriormente la aplicación del operador L_- en (28a).

Para finalizar este Capítulo, daremos una demostración de la ley de ramificación (38) para $R_6 \supset R_5$. Para este fin, vamos a invertir las fórmulas (32) y expresar los generadores de R_6 como combinaciones lineales de generadores de SU_4 ; y además como aquí nos interesa el subgrupo R_5 , vamos a introducir los operadores \dot{a}^+, \dot{a} del Capítulo III por medio de los cuales se obtiene explícitamente el subconjunto de generadores de R_6 que describen a R_5 . Procediendo de esta manera, se llega a estos resultados:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_2^2 &= \frac{1}{2}(\rho_1^1 + \rho_2^2 - \rho_3^3 - \rho_4^4) & \Lambda_1^1 &= \frac{1}{2}(\rho_1^1 - \rho_2^2 + \rho_3^3 - \rho_4^4) \\ \Lambda_2^1 &= \rho_2^3 & \Lambda_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_2^4 - \rho_1^3) & \Lambda_2^{-1} &= \rho_1^4 & \Lambda_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1^2 + \rho_3^4) \\ \Lambda_1^2 &= \rho_3^2 & \Lambda_0^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_4^2 - \rho_1^1) & \Lambda_{-1}^2 &= \rho_4^1 & \Lambda_0^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_2^1 + \rho_4^3) \end{aligned} \right\} \quad (40a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_0^0 &= \frac{i}{2}(\rho_1^1 + \rho_2^2 + \rho_3^3 - \rho_4^4) & \Lambda_1^0 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\rho_1^2 - \rho_3^4) & \Lambda_2^0 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\rho_2^4 + \rho_1^3) \\ \Lambda_0^1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\rho_4^3 - \rho_2^1) & \Lambda_0^2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\rho_4^2 + \rho_3^1) \end{aligned} \right\} \quad (40b)$$

Las $\Lambda_m^{m'}$ en (40a) son los generadores de R_5 . Todos los operadores $\rho_\mu^{m'}$ en (40a,b) son funciones de \dot{a}^+ , \dot{a} pero tal como se hizo anteriormente, por comodidad en la escritura hemos suprimido el punto encima de ellos. Además estamos empleando la notación $\rho_\mu^{m'}$ en lugar de las $C_\mu^{m'}$ de (32).

Como es sabido ⁷⁾, las soluciones linealmente independientes de las ecuaciones $C_s^s P = h_s P$, $C_{s'}^{s'} P = 0$ $s < s'$, $s, s' = 1, 2, 3$ constituyen una base para la RI $[h_1, h_2, h_3]$ de SU_4 , y de acuerdo con (34) esta RI es homomórfica a la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 si $h_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $h_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, $h_3 = \lambda_2 + \lambda_3$. De modo que el polinomio P que es de máximo peso en la RI (μ_1, μ_2) de R_5 contenida en la RI $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de R_6 , satisface a las ecuaciones

$$C_1^1 P = (\lambda_1 + \lambda_2) P, \quad C_2^2 P = (\lambda_1 + \lambda_3) P, \quad C_3^3 P = (\lambda_2 + \lambda_3) P, \quad C_s^{s'} P = 0 \quad s < s', \quad s, s' = 1, 2, 3 \quad (41a)$$

$$\Lambda_2^2 P = \frac{1}{2}(\rho_1^1 + \rho_2^2 - \rho_3^3 - \rho_4^4) P = \mu_1 P, \quad \Lambda_1^1 P = \frac{1}{2}(\rho_1^1 - \rho_2^2 + \rho_3^3 - \rho_4^4) P = \mu_2 P \quad (41b)$$

$$\Lambda_2^1 P = \rho_2^3 P = 0, \quad \Lambda_2^0 P = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_2^4 - \rho_1^3) P = 0, \quad \Lambda_2^{-1} P = \rho_1^4 P = 0, \quad \Lambda_1^0 P = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1^2 + \rho_3^4) P = 0 \quad (41c)$$

La solución de las ecuaciones (41a) es

$$P = (\Delta_1)^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{12}^{12})^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{123}^{123})^{\lambda_2 + \lambda_3} Z \left(\frac{\Delta_2^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_3^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_4^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_{13}^{12}}{\Delta_{12}^{12}}, \frac{\Delta_{14}^{12}}{\Delta_{12}^{12}}, \frac{\Delta_{123}^{123}}{\Delta_{123}^{123}} \right) \quad (42)$$

Definamos ahora estas dos nuevas variables

$$\chi \equiv \Delta_{14}^{12} - \Delta_{23}^{12} \quad \therefore \frac{\Delta_3^1}{\Delta_1^1} = \frac{\chi}{\Delta_{12}^{12}} + \frac{\Delta_2^1 \Delta_{13}^{12}}{\Delta_1^1 \Delta_{12}^{12}} - \frac{\Delta_{14}^{12}}{\Delta_{12}^{12}} \quad (43a)$$

$$\gamma \equiv \Delta_1^1 \Delta_{124}^{123} - \Delta_2^1 \Delta_{123}^{123} \quad \therefore \frac{\Delta_{124}^{123}}{\Delta_{123}^{123}} = \frac{\gamma}{\Delta_1^1 \Delta_{123}^{123}} + \frac{\Delta_2^1}{\Delta_1^1} \quad (43b)$$

Como Z en (42) es hasta el momento completamente arbitraria, las fórmulas (43a,b) nos permiten re-escribir a (42) como

$$P = (\Delta_1)^{\lambda_2 - \lambda_3} (\Delta_{12}^{12})^{\lambda_1 - \lambda_2} (\Delta_{123}^{123})^{\lambda_2 + \lambda_3} Z \left(\frac{\Delta_2^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_4^1}{\Delta_1^1}, \frac{\Delta_{13}^{12}}{\Delta_{12}^{12}}, \frac{\Delta_{14}^{12}}{\Delta_{12}^{12}}, \frac{\chi}{\Delta_{12}^{12}}, \frac{\gamma}{\Delta_1^1 \Delta_{123}^{123}} \right) \quad (44)$$

Las variables Δ_1^1 , Δ_{12}^{12} , Δ_{123}^{123} , χ , γ , tienen la propiedad de que cualquier generador de ascenso de R_5 operando sobre ellas dá cero.

Al hacer ahora que el polinomio (44) satisfaga a las ecuaciones (41c), se deduce: de $\Lambda_2^{-1} P = 0$ que Z no depende de Δ_4^1 / Δ_1^1 , de $\Lambda_2^0 P = 0$ que Z no depende de $\Delta_{14}^{12} / \Delta_{12}^{12}$, de $\Lambda_2^1 P = 0$ que Z no depende de $\Delta_{13}^{12} / \Delta_{12}^{12}$, y de $\Lambda_1^0 P = 0$ que Z no depende de Δ_2^1 / Δ_1^1 . La solución de las ecuaciones (41a,c) tiene pues la forma

$$P = \sum_{n_1, n_2} A_{n_1, n_2} (\Delta_1^1)^{\lambda_2 - \lambda_3 - n_2} (\Delta_{12}^{12})^{\lambda_1 - \lambda_2 - n_1} (\Delta_{123}^{123})^{\lambda_2 + \lambda_3 - n_2} \chi^{n_1} \gamma^{n_2}$$

y al hacer que este polinomio satisfaga también a las ecuaciones (41b), quedan unívocamente determinados los exponentes n_1 , n_2 llegándose al resultado final:

$$P = (\Delta_1^1)^{\mu_2 - \lambda_3} (\Delta_{12}^{12})^{\mu_1 - \lambda_2} (\Delta_{123}^{123})^{\mu_2 + \lambda_3} \chi^{\lambda_1 - \mu_1} \gamma^{\lambda_2 - \mu_2} \quad (45)$$

Del hecho de que los exponentes de todas las variables en este polinomio deben ser no-negativos, se deduce la ley de ramificación para

$R_6 \supset R_5$ dada en (38).

CAPITULO V

LA REDUCCION $U_n \supset R_n$.A) EL CASO DE LA RI $[h_1 \ h_2 \ 0 \ \dots \ 0]$ DE U_n .

En este Capítulo encontraremos las RI del subgrupo R_n contenidas en una RI del grupo U_n . Para ilustrar el método que se va a seguir en esta sección, consideraremos primero el caso $U_3 \supset R_3$. Los nueve generadores de U_3 son $\mathcal{E}_m^{m'}$ $m, m' = 1, 0, -1$; con ellos podemos construir estas combinaciones lineales

$$\Lambda_1^0 = \mathcal{E}_1^0 - \mathcal{E}_0^{-1}, \quad \Lambda_1^1 = \mathcal{E}_1^1 - \mathcal{E}_0^{-1}, \quad \Lambda_0^1 = \mathcal{E}_0^1 - \mathcal{E}_{-1}^0 \quad (1a)$$

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_0^0 + \mathcal{E}_{-1}^{-1} \quad (1b)$$

$$Q_2 = \mathcal{E}_1^{-1}, \quad Q_1 = \mathcal{E}_1^0 + \mathcal{E}_0^{-1}, \quad Q_0 = 3\mathcal{E}_0^0 - \mathcal{H}_0, \quad Q_{-1} = \mathcal{E}_0^1 + \mathcal{E}_{-1}^0, \quad Q_{-2} = \mathcal{E}_{-1}^{-1} \quad (1c)$$

Usando las reglas de conmutación de las $\mathcal{E}_m^{m'}$ se comprueba que

$$[\Lambda_1^1, \Lambda_1^0] = \Lambda_1^0, \quad [\Lambda_1^1, \Lambda_0^1] = -\Lambda_0^1, \quad [\Lambda_1^0, \Lambda_0^1] = \Lambda_1^1 \quad (2)$$

de modo que los operadores $\Lambda_1^0, \Lambda_1^1, \Lambda_0^1$ son los generadores de un subgrupo de U_3 ; y aún se puede ir más lejos y afirmar que las $\Lambda_m^{m'}$ generan un subgrupo de SU_3 , ya que \mathcal{H}_0 conmuta con todas las $\Lambda_m^{m'}$ y las Q_τ , y por lo tanto los ocho operadores $\{\Lambda_m^{m'}, Q_\tau\}$ son los generadores de SU_3 . Toda RI de U_3 es también RI de SU_3 , pero las dos RI $[h_1, h_2, h_3]$ y $[h_1 - h_3, h_2 - h_3, 0]$ que son inequivalentes frente a U_3 , son en cambio equivalentes frente a SU_3 . Debido a esto, en el análisis que sigue no se pierde generalidad si nos restringimos

a considerar R I de U_3 con $h_3 = 0$; e igualmente más adelante en el caso de U_4 consideraremos exclusivamente R I en las que $h_4 = 0$. El subgrupo generado por las $\Lambda_m^{m'}$ se identifica con el grupo de rotaciones en tres dimensiones; la conexión entre los operadores L_m del momento angular orbital y las $\Lambda_m^{m'}$ es la siguiente

$$\Lambda_1^1 = L_0, \quad \Lambda_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + iL_y), \quad \Lambda_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x - iL_y) \quad (3)$$

Nos proponemos ahora encontrar un polinomio P que pertenezca a una base para la R I $[h_1 \ h_2 \ 0]$ de U_3 , y que al mismo tiempo sea el polinomio de máximo peso de la R I (λ) del subgrupo R_3 contenida en la mencionada R I de U_3 . Este polinomio P tendría que satisfacer las ecuaciones

$$C_1^1 P = h_1 P, \quad C_2^2 P = h_2 P, \quad C_1^2 P = 0 \quad (4a)$$

$$\Lambda_1^1 P = \lambda P, \quad \Lambda_1^0 P = 0 \quad (4b)$$

Las ecuaciones (4a) indican que P pertenece a la R I $[h_1 \ h_2 \ 0]$ de U_3 , y las (4b) indican que P tiene un peso $\{\lambda\}$ en el grupo R_3 y que este peso es máximo. Si este conjunto de ecuaciones no tuvieran solución, esto indicaría que la R I (λ) de R_3 no está contenida en la R I $[h_1 \ h_2 \ 0]$ de U_3 ; pero por otra parte, si las ecuaciones (4) tuvieran n soluciones independientes esto indicará que la R I (λ) de R_3 está contenida n veces en la R I $[h_1 \ h_2 \ 0]$ de U_3 .

Bargmann y Moshinsky ¹¹⁾ han demostrado que la solución general de las ecuaciones (4) está dada por

$$P = \left\{ \sum_{q=0}^{\lambda} A_q (\Delta_1^1)^{\lambda-h_2+2q} (\Delta_{10}^{12})^{h_2-2q} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1-\lambda)-q} Y_{22}^q \right. \quad (5a)$$

$$\left. X_{21} \sum_{q=0}^{\lambda} B_q (\Delta_1^1)^{\lambda-h_2+2q} (\Delta_{10}^{12})^{h_2-2q-1} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1-\lambda-1)-q} Y_{22}^q \right\} \quad (5b)$$

siendo

$$X_{11} = \sum_{m=1}^{-1} \Delta_m^1 \Delta_{-m}^1, \quad X_{21} = \sum_{m=1}^{-1} \Delta_{1m}^{12} \Delta_{-m}^1, \quad Y_{22} = \sum_{m=1}^{-1} \sum_{m'=1}^{-1} \Delta_{mm'}^{12} \Delta_{-m-m'}^1 \quad (6)$$

Como P debe ser un polinomio, es obvio que (5a) es válido solo cuando $(h_1 - \lambda)$ es par, y (5b) vale solo cuando $(h_1 - \lambda)$ es non. Las $R I(\lambda)$ de R_3 contenidas en la $R I [h_1 \ h_2 \ 0]$ de U_3 se obtienen tomando cada término de la suma en (5a, b) correspondiente a un valor dado de q , y dándole a la λ todos aquellos valores que den por resultado un exponente no-negativo para todas las variables que figuran en P .

Vamos a presentar ahora un método alternativo para llegar a las soluciones (5a, b); este método será el que se aplicará en el caso general de $U_n \supset R_n$. Aunque este segundo método todavía no ha sido demostrado rigurosamente para $R I$ de U_n con $h_s \neq 0 \ s \geq 3$, los resultados obtenidos por este método siempre se pueden verificar a posteriori, confirmándose así que se han obtenido los resultados correctos. El método consiste en lo siguiente: Se encuentran primero todas las soluciones elementales V de las ecuaciones

$$C_1^2 V = 0 \quad , \quad \Lambda_1^0 V = 0 \quad (7)$$

las cuales son las dos ecuaciones de ascenso que aparecen en (4). La ecuación $C_1^2 V = 0$ queda satisfecha con cualquier función de Δ_m^1 y $\Delta_{m'm}^{1'2}$, y enseguida para satisfacer a $\Lambda_1^0 V = 0$ estas deltas deben combinarse de un modo tal que los índices m inferiores estén todos contraídos por pares; o en caso de que no se puedan contraer todos los índices inferiores, los índices libres deben ser: ó 1, ó 10 en la misma delta. Se encuentra así que las únicas soluciones elementales independientes de las ecuaciones (7) son las 5 siguientes

$$V = \left\{ \Delta_1^1, \Delta_{10}^{1'2}, X_{11} \equiv \sum_{m=1}^{-1} \Delta_m^1 \Delta_{-m}^1, X_{21} \equiv \sum_{m=1}^{-1} \Delta_{1m}^{1'2} \Delta_m^1, Y_{22} \equiv \sum_{m=1}^{-1} \sum_{m'=1}^{-1} \Delta_{mm'}^{1'2} \Delta_{-m-m'}^1 \right\} \quad (8)$$

Existe además esta relación entre las 5 soluciones elementales

$$(X_{21})^2 = X_{11} (\Delta_{10}^{1'2})^2 - \frac{1}{2} (\Delta_1^1)^2 Y_{22} \quad (8a)$$

La solución de las ecuaciones (4) será una combinación de las cinco soluciones elementales con exponentes indeterminados, i. e.

$$P = \sum_{q, n_i} B_{q, n_i} (\Delta'_1)^{n_1} (\Delta'_{10})^{n_2} X_{11}^{n_3} X_{21}^{n_4} Y_{22}^q ;$$

pero debido a la identidad (8a), cualquier potencia de X_{21} se puede reducir a la forma $X_{21}^n = f_1(\Delta'_1, \Delta'_{10}, X_{11}, Y_{22}) + X_{21} f_2(\Delta'_1, \Delta'_{10}, X_{11}, Y_{22})$, de modo que con toda generalidad se tiene

$$P = \begin{cases} \sum B_{q, n_i} (\Delta'_1)^{n_1} (\Delta'_{10})^{n_2} X_{11}^{n_3} Y_{22}^q \\ X_{21} \sum B'_{q, n_i} (\Delta'_1)^{n_1} (\Delta'_{10})^{n_2} X_{11}^{n_3} Y_{22}^q \end{cases} \quad (9)$$

Este polinomio con exponentes arbitrarios satisface automáticamente a las ecuaciones $C_1^2 P = \Lambda_1^0 P = 0$, ya que cada una de las variables que figuran en el polinomio satisface a (7). Al hacer ahora que el polinomio (9) satisfaga a $C_1 P = h_1 P$, $C_2 P = h_2 P$ y $\Lambda_1 P = \lambda P$ se obtienen tres relaciones entre los exponentes indeterminados que permiten expresar a tres de ellos, por ejemplo n_1 , n_2 , n_3 , en función del exponente restante: q . De esta manera se llega precisamente a la solución dada en (5a, b).

Aplicaremos a continuación este método de las "soluciones elementales" con exponentes indeterminados para encontrar la solución general al problema de la reducción $U_n \supset R_n$ en el caso particular en que la R I de U_n es $[h_1 \ h_2 \ 0 \ \dots \ 0]$. Empezaremos por analizar el caso $U_{2n+1} \supset R_{2n+1}$. Las ecuaciones que P debe satisfacer son

$$C_1 P = h_1 P, \quad C_2 P = h_2 P, \quad C_1^2 P = 0 \quad (10a)$$

$$\Lambda_s^{s-1} P = \dots = \Lambda_s^0 P = \dots = \Lambda_s^{-s+1} P = 0 \quad s=1, 2, \dots, n \quad (10b)$$

$$\Lambda_{n-s+1}^{n-s+1} P = \lambda_s P \quad s=1, 2, \dots, n \quad (10c)$$

donde las $\Lambda_m^{m'} \equiv \mathcal{E}_m^{m'} - \mathcal{E}_{-m'}^{-m}$, $m, m' = n, n-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -n$ son

los generadores del subgrupo R_{2n+1} de U_{2n+1} . Las ecuaciones (10a) indican que P pertenece a la RI $[h_1 h_2 0 \dots 0]$ de U_{2n+1} , y las ecuaciones (10b) y (10c) indican que P es el polinomio de máximo peso de la RI $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$ de R_{2n+1} que está contenida en la anterior RI de U_{2n+1} . Las soluciones elementales \mathcal{U} para este problema, son aquellas que satisfacen a $C_i^z \mathcal{U} = 0$ y además a todas las ecuaciones (10b). La ecuación $C_i^z \mathcal{U} = 0$ queda satisfecha si \mathcal{U} es una función arbitraria de Δ_m^1 y de $\Delta_{m,m'}^{1,z}$; y para satisfacer a las ecuaciones (10b) hay que formar combinaciones de Δ_m^1 y $\Delta_{m,m'}^{1,z}$ en las cuales todos los índices inferiores estén contraídos por pares, o en caso de que no se puedan contraer todos los índices, los que queden libres deben ser: ó n , ó $(n, n-1)$ en la misma delta. Se encuentra así que las soluciones elementales son

$$\mathcal{U} = \left\{ \Delta_n^1, \Delta_{n,n-1}^{1,z}, X_{11} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_m^1 \Delta_{-m}^1, X_{21} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n,m}^{1,z} \Delta_{-m}^1, \right. \\ \left. X_{22} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{n,m}^{1,z} \Delta_{n-m}^{1,z}, Y_{22} \equiv \sum_{m,m'=n}^{-n} \Delta_{m,m'}^{1,z} \Delta_{-m,-m'}^{1,z} \right\} \quad (11)$$

Existe la siguiente identidad entre las soluciones elementales

$$(X_{21})^2 = X_{11} X_{22} - \frac{1}{2} (\Delta_n^1)^2 Y_{22} \quad (12)$$

Escribiendo a continuación la solución de (10a,b,c) como un polinomio en las seis variables que aparecen en (11) con exponentes indeterminados, y teniendo en cuenta que debido a la identidad (12) cualquier potencia de X_{21} se puede transformar a $X_{21}^n = f_1(\Delta_n^1, X_{11}, X_{22}, Y_{22}) + X_{21} f_2(\Delta_n^1, X_{11}, X_{22}, Y_{22})$ se tiene como expresión más general

$$P = \begin{cases} \sum A_{q n_i} (\Delta_n^1)^{n_1} (\Delta_{n,n-1}^{1,z})^{n_2} X_{11}^{n_3} X_{22}^{n_4} Y_{22}^{n_5} \\ X_{21} \sum A'_{q n_i} (\Delta_n^1)^{n_1} (\Delta_{n,n-1}^{1,z})^{n_2} X_{11}^{n_3} X_{22}^{n_4} Y_{22}^{n_5} \end{cases} \quad (13)$$

Debemos ahora hacer que este polinomio satisfaga a las ecuaciones

$C_1'P = h_1P$, $C_2^2P = h_2P$, y a las (10c). Con respecto a las (10c) se encuentra que todas las $\Lambda_{n-s+1}^{n-s+1}P = \lambda_s P$ con $s = 3, 4, \dots, n$ se satisfacen automáticamente con $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n = 0$. Queda entonces únicamente

el problema de hacer que el polinomio (13) satisfaga a las 4 ecuaciones

$$C_1'P = h_1P, \quad C_2^2P = h_2P, \quad \Lambda_n^n P = \lambda_1 P \quad \text{y} \quad \Lambda_{n-1}^{n-1} P = \lambda_2 P.$$

Estas ecuaciones establecen ciertas relaciones entre los exponentes indeterminados, las cuales nos permiten expresar cuatro de ellos, por ejemplo n_1, n_2, n_3, n_4 , en función del exponente restante: q . Se llega así a la conclusión de que el polinomio que satisface a todas las ecuaciones (10a,b,c) es

$$P = \begin{cases} (\Delta_{n,n-1}^1 z)^{\lambda_2} \sum_q A_q (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - h_2 + 2q} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1) - q} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2) - q} Y_{22}^q & (14a) \\ X_{21} (\Delta_{n,n-1}^1 z)^{\lambda_2} \sum_q A'_q (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - h_2 + 2q} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1 - 1) - q} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2 - 1) - q} Y_{22}^q & (14b) \end{cases}$$

Como P debe ser un polinomio, se deduce que (14a) se aplica solo cuando $(h_1 - \lambda_1)$ y $(h_2 - \lambda_2)$ son simultáneamente pares; y (14b) se aplica solo cuando $(h_1 - \lambda_1)$ y $(h_2 - \lambda_2)$ son ambos nones. Recordemos además que se encontró antes que $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n = 0$, de modo que la RI $\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ de U_{2n+1} contiene solo RI de R_{2n+1} del tipo $(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$.

Los valores de (λ_1, λ_2) compatibles con una pareja dada de (h_1, h_2) se pueden deducir de (14a,b) tomando cada término de la suma y dándole a λ_1, λ_2 todos los valores posibles que hagan que ese término sea un polinomio, i. e. que los exponentes de las variables sean no-negativos. Para demostrar que los polinomios (14a,b) con la condición acabada de mencionar, constituyen la solución completa de las ecuaciones (10a,b,c), vamos a efectuar un análisis parecido al que se hace en la referencia 7)

para el caso de $U_3 \supset R_3$. La solución de las ecuaciones (10a,b,c) obtenida por un método sistemático análogo al de la referencia 7) es

$$P = \sum_r B_r (\Delta'_n)^{\lambda_1 h_2} (\Delta'_{n-1})^{\lambda_2} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1 - r)} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2 - r)} X_{21}^r \equiv \sum_r B_r P_r \quad (15)$$

Si consideramos todos los monomios P_r con exponente $r \geq 0$ no obtenemos todas las soluciones posibles de las ecuaciones (10), ya que existe la posibilidad de formar una solución aceptable de (10) por combinación lineal de dos o más P_r que separadamente no son soluciones aceptables de (10). Por ejemplo, usando la identidad (12) deducimos que

$$P_r - P_{r+2} = \frac{1}{2} (\Delta'_n)^{\lambda_1 - h_2 + 2} (\Delta'_{n-1})^{\lambda_2} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1 - r) - 1} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2 - r) - 1} X_{21}^r Y_{22}$$

y esta combinación lineal es un polinomio aún si $\lambda_1 < h_2$, mientras que las P_r separadas son polinomios solo cuando $\lambda_1 \geq h_2$. Con el objeto de evitar posibilidades como la acabada de mencionar, transformaremos la solución (15) de la siguiente manera:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \sum A_r (\Delta'_n)^{\lambda_1 h_2} (\Delta'_{n-1})^{\lambda_2} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1) - r} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2) - r} X_{21}^{2r} \end{array} \right. \quad (16a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{21} \sum A'_r (\Delta'_n)^{\lambda_1 h_2} (\Delta'_{n-1})^{\lambda_2} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1) - r} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2) - r} X_{21}^{2r} \end{array} \right. \quad (16b)$$

La $\left\{ \begin{array}{l} \text{primera} \\ \text{segunda} \end{array} \right\}$ expresión es equivalente a los términos de (15) en los que X_{21} tiene exponente $\left\{ \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{non} \end{array} \right\}$. Usando (12) podemos escribir

$$X_{21}^{2r} = \sum C_q (\Delta'_n)^{2q} Y_1^q (X_{11} X_{21})^{r-q} \text{ y substituyendo esto en (16a,b) estas}$$

se convierten en las expresiones (14a,b). En esta última forma no se presenta la posibilidad que había con las (15) de formar un nuevo polinomio independiente por combinación lineal de dos o más monomios P_q . Finalmente, mencionaremos que en el caso $n = 1$, i. e. para $U_3 \supset R_3$, se tiene $X_{22} = (\Delta'_{n-1})^2 \equiv (\Delta'_{10})^2$ y la solución dada en las ecuaciones (14a,b) coincide exactamente con la solución (5a,b) encontrada anteriormente.

Veamos ahora la reducción $U_{2n} \supset R_{2n}$, en el caso particular en el que la R I de U_{2n} es $[h_1 \ h_2 \ 0 \ \dots \ 0]$. El análisis es muy parecido al caso del caso $U_{2n+1} \supset R_{2n+1}$ que se acaba de discutir, de modo que no daremos muchos detalles. El polinomio que se busca satisface a las siguientes ecuaciones

$$C_1^1 P = h_1 P, \quad C_2^2 P = h_2 P, \quad C_1^2 P = 0 \quad (17a)$$

$$\Lambda_s^{s-1} P = \dots = \Lambda_s^1 P = \Lambda_s^{-1} P = \dots = \Lambda_s^{-s+1} P = 0 \quad s=1, 2, \dots, n \quad (17b)$$

$$\Lambda_{n-s+1}^{n-s+1} P = \lambda_s P \quad s=1, 2, \dots, n. \quad (17c)$$

Las soluciones elementales \mathcal{U} , que satisfacen a $C_1^2 \mathcal{U} = 0$ y a (17b), son

$$\mathcal{U} = \left\{ \Delta_n^1, \Delta_{n-1}^{1z}, X_{11} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_m^1 \Delta_{-m}^{-1}, X_{21} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{nm}^{1z} \Delta_{-m}^{-1}, \right. \\ \left. X_{22} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \Delta_{nm}^{1z} \Delta_{-m}^{-2}, Y_{22} \equiv \sum_{m=n}^{-n} \sum_{m'=n}^{-n} \Delta_{mm'}^{1z} \Delta_{-m-m'}^{-2} \right\} \quad (18)$$

y están conectadas por la identidad

$$(X_{21})^2 = X_{11} X_{22} - \frac{1}{2} (\Delta_n^1)^2 Y_{22} \quad (19)$$

La solución final a la cual se llega es

$$P = \left\{ (\Delta_{nn-1}^{1z})^{\lambda_2} \sum_q A_q (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - h_2 + 2q} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1) - q} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2) - q} Y_{22}^q \right. \quad (20a)$$

$$\left. X_{21} (\Delta_{nn-1}^{1z})^{\lambda_2} \sum_q A'_q (\Delta_n^1)^{\lambda_1 - h_2 + 2q} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1) - q} X_{22}^{\frac{1}{2}(h_2 - \lambda_2) - q} Y_{22}^q \right. \quad (20b)$$

y se obtiene el resultado adicional de que $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n = 0$. Obsérvese

que la solución del caso $U_{2n} \supset R_{2n}$ resulta idéntica a la del caso

$U_{2n+1} \supset R_{2n+1}$, excepto por el hecho de que en las variables definidas en (18) la suma sobre m no incluye el valor $m = 0$. En el caso de $n=2$,

i. e. $U_4 \supset R_4$, las expresiones (20a, b) deben modificarse, ya que

$X_{22} = 2 \Delta_{21}^{1z} \Delta_{2-1}^{1z}$ y esto se combina con la Δ_{21}^{1z} de la izquierda para dar $(\Delta_{21}^{1z})^{n_1} (\Delta_{2-1}^{1z})^{n_2}$. Sin embargo, no escribiremos la fórmula resultante ya que

esta es simplemente un caso particular del resultado que se obtendrá en

la siguiente Sección.

B) LA REDUCCION $U_4 \supset R_4$ EN GENERAL.

Lo que se intenta ahora es encontrar la solución general de las ecuaciones

$$C_1^1 P = h_1 P, \quad C_2^2 P = h_2 P, \quad C_3^3 P = h_3 P \quad (21a)$$

$$C_1^2 P = 0, \quad C_1^3 P = 0, \quad C_2^3 P = 0 \quad (21b)$$

$$\Lambda_2^2 P = \lambda_1 P, \quad \Lambda_1^1 P = \lambda_2 P \quad (21c)$$

$$\Lambda_1^2 P = 0, \quad \Lambda_2^1 P = 0 \quad (21d)$$

Utilizaremos el método de las "soluciones elementales" \mathcal{U} , las cuales son soluciones de las ecuaciones (21b) y (21d). Las ecuaciones (21b) quedan satisfechas si \mathcal{U} es una función arbitraria de $\Delta_m^1, \Delta_{mm'}^{12}, \Delta_{mm'm''}^{123}$; y para satisfacer a las ecuaciones (21d) hay que formar combinaciones de estas deltas en las cuales todos los índices inferiores estén contraídos por pares, o en caso de que queden algunos índices libres estos deben ser: ó (2), ó (2,1), ó (2,-1), ó (2,1,-1) en la misma delta. Se llega así a la conclusión de que existen trece soluciones elementales que son las siguientes

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \left\{ \Delta_2^1, \Delta_{21}^{12}, \Delta_{2-1}^{12}, \Delta_{21-1}^{123}, X_{11} \equiv \sum_{m=2}^{-2} \Delta_m^1 \Delta_{-m}^1 \right. \\ & X_{21} \equiv \sum_{m=2}^{-2} \Delta_{2m}^{12} \Delta_{-m}^1, \quad X_{31}^{(\pm)} \equiv \sum_{m=2}^{-2} \Delta_{2\pm 1m}^{123} \Delta_{-m}^1, \quad Y_{22} \equiv \sum_{m=2}^{-2} \sum_{m'=2}^{-2} \Delta_{mm'}^{12} \Delta_{-m-m'}^{12} \\ & \left. Y_{32} \equiv \frac{1}{2} \sum_{mm'} \Delta_{2mm'}^{123} \Delta_{-m-m'}^{12}, \quad Y_{321}^{(\pm)} \equiv \sum_{mm'} \Delta_{2\pm 1m}^{123} \Delta_{m'-m}^{12} \Delta_{-m'}^1, \quad Z_{33} \equiv \sum_{mm'm''} \Delta_{mm'm''}^{123} \Delta_{-m-m'-m''}^{123} \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

Estas soluciones elementales están conectadas entre sí por varias identidades; son de especial importancia aquellas que expresan el cuadrado de una variable en función de otras variables. Estas son

$$(X_{21})^2 = 2 \Delta_{21}^{\prime 2} \Delta_{2-1}^{\prime 2} X_{11} - \frac{1}{2} (\Delta_{21}^{\prime})^2 Y_{22} \quad (23a)$$

$$(Y_{32})^2 = -\frac{1}{3} \Delta_{21}^{\prime 2} \Delta_{2-1}^{\prime 2} Z_{33} - \frac{1}{2} (\Delta_{21-1}^{\prime 2 3})^2 Y_{22} \quad (23b)$$

$$(Y_{321}^{(+)})^2 = -\frac{1}{6} (\Delta_{21}^{\prime 2})^2 X_{11} Z_{33} - \frac{1}{2} (X_{31}^{(+)})^2 Y_{22} \quad (23c)$$

$$(Y_{321}^{(-)})^2 = -\frac{1}{6} (\Delta_{2-1}^{\prime 2})^2 X_{11} Z_{33} - \frac{1}{2} (X_{31}^{(-)})^2 Y_{22} \quad (23d)$$

El polinomio que buscamos será una combinación de las variables que aparecen en (22) con exponentes indeterminados. En la expresión final para este polinomio, por razones que serán explicadas al final de esta sección, debe aparecer una suma sobre dos índices mudos: q_1, q_2 . Como las ecuaciones que faltan por aplicar: (21a) y (21c) son cinco en total, propondremos una expresión en la que figuren siete exponentes indeterminados, las ecuaciones (21a) y (21c) establecen cinco relaciones entre los exponentes, las cuales nos permiten expresar a cinco de ellos en función de los dos restantes. Debido a las identidades (23a,b,c,d) se presentan estas posibilidades

$$P = \begin{matrix} 1 \\ X_{21} \\ Y_{32} \\ X_{21} Y_{32} \end{matrix} \cdot \left\{ \sum_{n_i q} A_{n_i q} (\Delta_2^{\prime})^{n_1} (\Delta_{21}^{\prime 2})^{n_2} (\Delta_{2-1}^{\prime 2})^{n_3} (\Delta_{21-1}^{\prime 2 3})^{n_4} X_{11}^{n_5} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2} \right. \quad (24a, b, c, d)$$

$$P = \begin{matrix} 1 \\ Y_{321}^{(+)} \end{matrix} \cdot \left\{ \sum_{n_i q} A'_{n_i q} (\Delta_2^{\prime})^{n_1} (\Delta_{21}^{\prime 2})^{n_2} (X_{31}^{(+)})^{n_3} (\Delta_{21-1}^{\prime 2 3})^{n_4} X_{11}^{n_5} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2} \right. \quad (24e, f)$$

$$P = \begin{matrix} 1 \\ Y_{321}^{(-)} \end{matrix} \cdot \left\{ \sum_{n_i q} A''_{n_i q} (\Delta_2^{\prime})^{n_1} (\Delta_{2-1}^{\prime 2})^{n_2} (X_{31}^{(-)})^{n_3} (\Delta_{21-1}^{\prime 2 3})^{n_4} X_{11}^{n_5} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2} \right. \quad (24 g, h)$$

En los casos (24e) y (24g) el exponente n_3 debe ser ≥ 1 pues si fuera cero, el polinomio sería idéntico al (24a) con $n_3 = 0$. Al aplicar sobre los polinomios (24) las condiciones (21a) y (21c), los exponentes n_1, n_2, n_3, n_4 y n_5 quedan determinados en función de q_1, q_2 , llegándose a estos resultados

$$P_1 = \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 - h_2 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{2-1})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 - \lambda_2) - q_1} (\Delta'_{21})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 + \lambda_2) - q_1} \\ \cdot (\Delta'_{21-1})^{h_3 - 2q_2} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1) - q_1 - q_2} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

$$P_2 = X_{21} \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 - h_2 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{21})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 + \lambda_2 - 1) - q_1} (\Delta'_{2-1})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 - \lambda_2 - 1) - q_1} \\ \cdot (\Delta'_{21-1})^{h_3 - 2q_2} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1 - 1) - q_1 - q_2} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

$$P_3 = Y_{32} \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 - h_2 + 1 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{21})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 + \lambda_2 - 1) - q_1} (\Delta'_{2-1})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 - \lambda_2 - 1) - q_1} \\ \cdot (\Delta'_{21-1})^{h_3 - 2q_2 - 1} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1 - 1) - q_1 - q_2} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

$$P_4 = X_{21} Y_{32} \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 - h_2 + 1 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{21})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 + \lambda_2) - 1 - q_1} (\Delta'_{2-1})^{\frac{1}{2}(h_2 - h_3 - \lambda_2) - 1 - q_1} \\ \cdot (\Delta'_{21-1})^{h_3 - 2q_2 - 1} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 - \lambda_1) - 1 - q_1 - q_2} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

$$P_5 = \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 - h_2 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{21})^{h_2 - h_3 - 2q_1} (\Delta'_{21-1})^{h_2 - \lambda_2 - 2q_1 - 2q_2} \\ \cdot (X_{31}^{(+)})^{\lambda_2 - h_2 + h_3 + 2q_1} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 + h_2 - h_3 - \lambda_1 - \lambda_2) - 2q_1 - q_2} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

$$P_6 = Y_{321}^{(+)} \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 - h_2 + 1 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{21})^{h_2 - h_3 - 1 - 2q_1} (\Delta'_{21-1})^{h_2 - \lambda_2 - 1 - 2q_1 - 2q_2} \\ \cdot (X_{31}^{(+)})^{\lambda_2 - h_2 + h_3 + 2q_1} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 + h_2 - h_3 - \lambda_1 - \lambda_2) - 1 - 2q_1 - 2q_2} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

$$P_7 = \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 - h_2 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{2-1})^{h_2 - h_3 - 2q_1} (\Delta'_{21-1})^{\lambda_2 + h_2 - 2q_1 - 2q_2} \\ \cdot (X_{31}^{(-)})^{-\lambda_2 - h_2 + h_3 + 2q_1} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 + h_2 - h_3 - \lambda_1 + \lambda_2) - 2q_1 - q_2} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

$$P_8 = Y_{321}^{(-)} \sum_{q_1, q_2} A_{q_1, q_2} (\Delta'_2)^{\lambda_1 + 1 - h_2 + 2q_1 + 2q_2} (\Delta'_{2-1})^{h_2 - h_3 - 1 - 2q_1} (\Delta'_{21-1})^{\lambda_2 + h_2 - 1 - 2q_1 - 2q_2} \\ \cdot (X_{31}^{(-)})^{-\lambda_2 - h_2 + h_3 + 2q_1} X_{11}^{\frac{1}{2}(h_1 + h_2 - h_3 - \lambda_1 + \lambda_2) - 2q_1 - q_2 - 1} Y_{22}^{q_1} Z_{33}^{q_2}$$

Los resultados obtenidos por medio de estas fórmulas se pueden verificar fácilmente por el método de la dimensionalidad. La dimensión de la R I (λ_1, λ_2) de R_4 es $D(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 + 1)^2 - \lambda_2^2$, y la suma de las dimensiones de todas las R I de R_4 permitidas por las soluciones $(25a, \dots, h)$ debe ser igual a la dimensión de la R I $[h_1 \ h_2 \ h_3 \ 0]$ de U_4 , la cual es

$$D(h_1, h_2, h_3, 0) = (h_1 - h_2 + 1)(h_1 - h_3 + 2)(h_1 + 3)(h_2 - h_3 + 1)(h_2 + 2) \times (h_3 + 1)/12 .$$

Finalmente explicaremos porqué en las expresiones (25) debe aparecer una suma sobre dos índices libres. El número de operadores necesarios para determinar completamente los renglones de la R I $[h_1 \dots h_k \ 0 \dots 0]$ de U_r es $N_U = k(2r - 1 - k)/2$, y el número de operadores necesarios para definir una función perteneciente a una base de la R I $(\lambda_1 \dots \lambda_k \ 0 \dots 0)$ de R_r es $N_R = k(r - k)$. Entonces, si los renglones de la R I $[h_1 \dots h_k \ 0 \dots 0]$ de U_r van a ser clasificados por las diferentes R I $(\lambda_1 \dots \lambda_k \ 0 \dots 0)$ de R_r que contiene, el número de operadores adicionales que se necesitan para completar la clasificación es

$$N_U - N_R = \frac{1}{2}k(k-1) \quad \text{si } k \leq \left[\frac{r}{2}\right]$$

$$N_U - (N_R)_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2}(2r-1-k)k - \frac{1}{4}r^2 & \text{si } k > \left[\frac{r}{2}\right], r \text{ par} \\ \frac{1}{2}(2r-1-k)k - \frac{1}{4}(r^2-1) & \text{si } k > \left[\frac{r}{2}\right], r \text{ non} \end{cases} \quad (26)$$

Para $k = 3$, $r = 4$, que corresponde a la reducción general $U_4 \supset R_4$, se deduce que son necesarios dos operadores adicionales. Para $k = 3$, $r \geq 5$, que corresponde a la reducción $U_r \supset R_r$ $r \geq 5$, cuando la R I de U_r es $[h_1 \ h_2 \ h_3 \ 0 \dots 0]$, se necesitan tres operadores adicionales.

les. Los dos operadores adicionales necesarios en el caso de $U_4 \supset R_4$ han sido determinados explícitamente por Moshinsky y Nagel ¹²⁾, llamémoslos Ω y Φ . Al imponer la condición de que los polinomios P en (24) sean eigenfunciones de los dos operadores Ω y Φ , esta condición suplementaria determinará la dependencia de los coeficientes A_{q_1, q_2} con respecto a q_1 y q_2 .

C) LA REDUCCION $U_6 \supset R_6$

Este caso es de importancia en la teoría del modelo de capas nuclear, por lo cual daremos una discusión de él. El caso particular en que la R I de U_6 es $[h_1 h_2 0 \dots 0]$ ya fué analizado en la Sección A de este Capítulo; el resultado está contenido en las ecuaciones (20a, b). Para el caso de la R I $[h_1 h_2 h_3 0 0]$ de U_6 aplicaremos el método de las "soluciones elementales", solo que no llegaremos a obtener una fórmula explícita para los polinomios como se hizo en la Sección B para $U_4 \supset R_4$. Más bien lo que haremos será construir, en términos de las soluciones elementales, el polinomio de máximo peso de cada R I de R_6 contenida en las R I de U_6 que son de interés en el modelo de capas nuclear. Estas R I de U_6 son aquellas que corresponden a diagramas de Young en los que el número de cuadros en cada renglón es menor o igual a 4, y en los que los renglones superiores tienen 4 cuadros si el número de partículas es suficiente.

Las soluciones elementales para este caso son aquellos polinomios \mathcal{U} que satisfacen a las ecuaciones

$$C_1^2 \mathcal{U} = C_1^3 \mathcal{U} = C_2^3 \mathcal{U} = 0 \quad (27a)$$

$$\Lambda_3^2 \mathcal{U} = \Lambda_3^1 \mathcal{U} = \Lambda_3^{-1} \mathcal{U} = \Lambda_3^{-2} \mathcal{U} = \Lambda_2^1 \mathcal{U} = \Lambda_2^{-1} \mathcal{U} = 0 \quad (27b)$$

Las ecuaciones (27a) quedan satisfechas cuando \mathcal{U} es una función arbitraria de Δ_m^1 , $\Delta_{mm'}^{12}$ y $\Delta_{mm'm''}^{123}$; y luego para satisfacer a (27b) estas deltas deben combinarse de tal modo que todos los índices inferiores estén contraídos por pares, o en caso de que queden uno o más índices libres estos deben ser: ó 3, ó 3,2, ó 3,2,1, ó 3,2,-1, en la misma delta. Se encuentra así que, cuando la RI de U_6 es $[h_1 h_2 h_3 0 0]$, existen estas quince soluciones elementales

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \left\{ \Delta_3^1, \Delta_{32}^{12}, \Delta_{321}^{123}, \Delta_{32-1}^{123}, X_{11} \equiv \sum_{m=3}^{-3} \Delta_m^1 \Delta_{-m}^1, \right. \\ & X_{21} \equiv \sum_{m=3}^{-3} \Delta_{3m}^{12} \Delta_{-m}^1, X_{31} \equiv \sum_{m=3}^{-3} \Delta_{32m}^{123} \Delta_{-m}^1, X_{32} \equiv \sum_{m=3}^{-3} \Delta_{32m}^{123} \Delta_{3-m}^{12} \\ & X_{22} \equiv \sum_{m=3}^{-3} \Delta_{3m}^{12} \Delta_{3-m}^{12}, Y_{22} \equiv \sum_{mm'} \Delta_{mm'}^{12} \Delta_{-m-m'}^{12}, Y_{32} \equiv \frac{1}{2} \sum_{mm'} \Delta_{3mm'}^{123} \Delta_{-m-m'}^{12} \\ & Y_{33} \equiv \sum_{mm'} \Delta_{3mm'}^{123} \Delta_{3-m-m'}^{123}, Y_{321} \equiv \sum_{mm'} \Delta_{32m}^{123} \Delta_{m'-m}^{12} \Delta_{-m'}^1 \\ & \left. Y_{331} \equiv \sum_{mm'} \Delta_{32m}^{123} \Delta_{3m'-m}^{123} \Delta_{-m'}^1, Z_{33} \equiv \sum_{mm'm''} \Delta_{mm'm''}^{123} \Delta_{-m-m'-m''}^{123} \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

El paso siguiente será formar todas las combinaciones posibles de estas variables, que sean eigenfunciones de C_s^s con eigenvalor h_s , $s = 1, 2, 3$; el peso que tenga cada combinación con respecto a R_6 será al mismo tiempo el índice de la RI de R_6 de la cual esa combinación particular es el polinomio de máximo peso. Para facilitar el cálculo es conveniente tener a la vista la siguiente tabla que muestra los eigenvalores h_s de cada solución elemental, así como su peso con respecto a R_6 .

	$[h_1 h_2 h_3]$	Peso en R_6		$[h_1 h_2 h_3]$	Peso en R_6
Δ_3^1	[100]	(100)	X_{31}	[211]	(110)
X_{11}	[200]	(000)	Y_{32}	[221]	(110)
Δ_{32}^{12}	[110]	(110)	X_{32}	[221]	(210)
X_{21}	[210]	(100)	Y_{321}	[321]	(110)
Δ_{321}^{123}	[111]	(111)	Z_{33}	[222]	(000)
Δ_{32-1}^{123}	[111]	(1,1,-1)	Y_{33}	[222]	(200)
X_{22}	[220]	(200)	Y_{331}	[322]	(210)
Y_{22}	[220]	(000)			

Una vez formadas todas las combinaciones posibles de soluciones elementales que tengan eigenvalores dados h_1, h_2, h_3 , en caso de que resulte que alguna RI de R_6 aparece más de una vez en esa RI de U_6 , es conveniente verificar la independencia lineal de los correspondientes polinomios de máximo peso. En esta verificación son útiles las siguientes identidades entre soluciones elementales

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{21}^2 = X_{11} X_{22} - \frac{1}{2} (\Delta_3^1)^2 Y_{22} \\ Y_{32}^2 = -\frac{1}{6} X_{22} Z_{33} + \frac{1}{4} Y_{22} Y_{33} \\ Y_{321}^2 = -\frac{1}{6} (\Delta_{32}^{12})^2 X_{11} Z_{33} - \frac{1}{2} X_{31}^2 Y_{22} + \Delta_{321}^{123} \Delta_{32-1}^{123} X_{11} Y_{22} \\ X_{32}^2 = 2 X_{22} \Delta_{321}^{123} \Delta_{32-1}^{123} - \frac{1}{2} (\Delta_{32}^{12})^2 Y_{33} \\ Y_{331}^2 = \frac{1}{2} X_{31}^2 Y_{33} - \frac{1}{3} (\Delta_3^1)^2 Z_{33} \Delta_{321}^{123} \Delta_{32-1}^{123} + X_{11} Y_{33} \Delta_{321}^{123} \Delta_{32-1}^{123} \end{array} \right. \quad (29)$$

Estas identidades sirven para eliminar inmediatamente a cualquier combinación de soluciones elementales que contenga a $X_{21}, X_{32}, Y_{32}, Y_{321}, Y_{331}$

a una potencia superior a la primera; en algunos casos hay que utilizar otras identidades no contenidas en (29). Otra verificación de los resultados obtenidos es por medio de la prueba de dimensionalidad: la suma de las dimensiones de todas las R I de R_6 que se obtengan debe ser igual a la dimensión de la R I $[h_1 h_2 h_3]$ de U_6 . Estas dimensiones son, para R_6 : $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{12} (\lambda_1 - \lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 3)[(\lambda_1 + 2)^2 - \lambda_3^2][(\lambda_2 + 1)^2 - \lambda_3^2]$,

$$\text{para } U_6 : D(h_1, \dots, h_6) = \prod_{1 \leq i < j \leq 6} \left(\frac{h_i - h_j + j - i}{j - i} \right).$$

Por el procedimiento anterior fueron obtenidos los datos que figuran en las Tablas siguientes. Los números en el cuerpo de las Tablas indican el número de veces que una R I de R_6 aparece contenida en la R I de U_6 indicada a la izquierda. Nótese que las dos R I $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ y $(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3)$ con $\lambda_3 \neq 0$ siempre aparecen simultáneamente, y se indican en la misma columna de las Tablas.

A continuación de las Tablas se presenta una lista de los polinomios de máximo peso en R_6 , para algunas de las R I de $R_6 \subset U_6$ seleccionadas de las Tablas. Estos polinomios se expresan de dos maneras: primero en función de los operadores bosónicos $a_{\mu 5}^+$ usando las variables (28); y luego están dados también en función de operadores fermiónicos $b_{\mu 5}^+$ que se definirán por medio de las fórmulas (1) y (21) del Capítulo siguiente. Este segundo modo de expresión es el que se utiliza en las aplicaciones a problemas de Física Nuclear; asimismo por razones físicas las funciones deben clasificarse según los subgrupos $R_5 \supset D^{(2)}(R_3)$ de modo que usamos los índices 2, 1, 0, -1, -2, 0 para las coordenadas del espacio orbital en el segundo caso.

R.I. $R_6 \rightarrow$		(100)	(210)	(300)	(320)	(33±1)	(42±1)	(43±2)	(44±3)
Dimension \rightarrow		6	64	50	300	270	630	640	396
R.I. U_6		(11±1)	(22±1)	(31±1)	(32±2)	(410)	(430)	(44±1)	
Dimension		10	70	126	140	384	960	770	
6	[1]	1							
56	[3]	1		1					
70	[21]	1	1						
20	[111]		1						
504	[41]	1	1	1		1			
420	[32]	1	1	1	1				
336	[311]		1	1	1				
1764	[43]	1	1	1	1	1	1		
2520	[421]	1	2	1	1	1	1	1	
4704	[441]	1	1	1	1	1	1	1	1
5880	[432]	1	2	1	1	1	2	1	1
7056	[443]	1	1	1	1	1	1	1	1
10080	[4421]	1	2	2	1	1	3	1	1

R.I. $R_6 \rightarrow$		Dimensión \rightarrow									
		(000)	(200)	(220)	(310)	(330)	(400)	(420)	(43±1)	(440)	(44±4)
R.I. $U_6 \rightarrow$		Dimensión \rightarrow									
		(110)	(21±1)	(22±2)	(32±1)	(33±2)	(41±1)	(42±2)	(43±3)	(44±2)	
		1	20	84	175	300	105	729	875	825	165
		15	45	35	256	189	280	360	315	616	
21	[2]	1	1								
15	[11]		1								
126	[4]	1	1				1				
210	[31]		1	1	1						
105	[22]	1	1	1							
105	[211]		1	1							
1134	[42]	1	2	1	1		1	1			
840	[411]		1	1	1			1			
1764	[44]	1		1			1	1		1	
4410	[431]		1	1	1	2	1	1	1	1	
2520	[422]	1	2	2	1	1	1	1	1	1	
7056	[442]	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1
5040	[4411]		1	1	1	1	1	1	1	1	1
4410	[433]		1	1		1	1	1	1	1	
4116	[444]	1	1	1	1			1	1	1	1

Con el objeto de abreviar algunas expresiones, emplearemos la siguiente notación para algunos polinomios de la lista:

$$\Delta_{\pm\theta}^{12\dots k} = \Delta_{\theta}^{12\dots k} \pm i \Delta_{\theta'}^{12\dots k} ;$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} \Delta_{\alpha m_1}^{12\dots} \Delta_{\beta m_2}^{12\dots} \Delta_{\gamma m_3}^{12\dots} =$$

$$\left(\Delta_{\alpha m_1}^{12\dots} \Delta_{\beta m_2}^{12\dots} \Delta_{\gamma m_3}^{12\dots} + \Delta_{\gamma m_1}^{12\dots} \Delta_{\alpha m_2}^{12\dots} \Delta_{\beta m_3}^{12\dots} + \Delta_{\beta m_1}^{12\dots} \Delta_{\gamma m_2}^{12\dots} \Delta_{\alpha m_3}^{12\dots} - \Delta_{\alpha m_1}^{12\dots} \Delta_{\gamma m_2}^{12\dots} \Delta_{\beta m_3}^{12\dots} - \Delta_{\gamma m_1}^{12\dots} \Delta_{\beta m_2}^{12\dots} \Delta_{\alpha m_3}^{12\dots} - \Delta_{\beta m_1}^{12\dots} \Delta_{\alpha m_2}^{12\dots} \Delta_{\gamma m_3}^{12\dots} \right)$$

Finalmente debemos mencionar que los polinomios de la lista no están normalizados.

RI [1] de U_6

$$(100) \begin{cases} P = \Delta_2' \\ P' = \Delta_2' \end{cases}$$

RI [2] de U_6

$$(000) \begin{cases} P = \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1, \mu = 2, 1, \theta, -\theta, -1, -2 \\ P' = \sum_m (-)^m \Delta_{m-m}^{12}, m = 2, 1, 0, -1, -2, 0' \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = (\Delta_2')^2 \\ P' = \Delta_{22}^{12} \end{cases}$$

RI [11] de U_6

$$(110) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \\ P' = \Delta_2^1 \Delta_1^1 \end{cases}$$

R I [3] de U_6

$$(300) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^3 \\ P' = \Delta_2^1 \Delta_2^2 \Delta_2^3 \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum_m (-)^m \Delta_2^1 \Delta_{m-m}^2 \Delta_2^3 \end{cases}$$

R I [21] de U_6

$$(210) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \Delta_{21}^2 \\ P' = \Delta_{22}^1 \Delta_2^2 \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu}^1 \Delta_{2-\mu}^2 \\ P' = \sum (-)^m \Delta_{m-m}^1 \Delta_{m-m}^2 \Delta_2^1 \end{cases}$$

R I [111] de U_6

$$(1,1,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \Delta_1^2 \Delta_{\pm 0}^3 \\ P' = \Delta_2^1 \Delta_1^1 \Delta_{\pm 0}^1 \end{cases}$$

R I [4] de U_6

$$(200) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^2 \sum \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m \Delta_2^1 \Delta_2^2 \Delta_{m-m}^3 \Delta_{m-m}^4 \end{cases}$$

$$(400) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^4 \\ P' = \Delta_2^1 \Delta_2^2 \Delta_2^3 \Delta_2^4 \end{cases}$$

$$(000) \begin{cases} P = (\sum \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1)^2 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-m}^1 \Delta_{m-m}^2 \Delta_{m'-m'}^3 \Delta_{-m'}^4 \end{cases}$$

R I [31] de U_6

$$(310) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} (\Delta_2^1)^2 \\ P' = \Delta_{222}^{123} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \sum \Delta_\mu^1 \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \sum (-)^m \Delta_{2m-m}^{123} \Delta_2^1 \end{cases}$$

$$(110) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_\mu^1 \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{2m-m}^{123} \Delta_1^1 - \Delta_{1m-m}^{123} \Delta_2^1) \end{cases}$$

R I [22] de U_6

$$(220) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \\ P' = \Delta_{22}^{12} \Delta_{11}^{12} \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{22}^{12} \sum (-)^m \Delta_{m-m}^{12} \end{cases}$$

$$(000) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'}^1 \Delta_{-\mu-\mu'}^2 \\ P' = (\sum (-)^m \Delta_{m-m}^{12})^2 \end{cases}$$

R I [211] de U_6

$$(2, 1, \pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21 \pm 0}^{123} \Delta_2^1 \\ P' = \Delta_{22}^{12} \Delta_1^1 \Delta_{\pm 0}^1 \end{cases}$$

$$(110) \begin{cases} P = \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m \Delta_{m-m}^{12} \Delta_2^1 \Delta_1^1 \end{cases}$$

RI [41] de U_6

$$(410) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} (\Delta_2^1)^3 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(300) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^2 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_2^1 \end{cases}$$

$$(210) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \Delta_2^1 \sum \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_1^1 - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_2^1) \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{-\mu}^1 \Delta_{\mu'}^1 \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-m}^{1234} \Delta_2^1 \end{cases}$$

RI [32] de U_6

$$(320) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \Delta_2^1 \\ P' = \Delta_{222}^{123} \Delta_{11}^{12} \end{cases}$$

$$(210) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m}^{123} \Delta_{1-m}^{12} - \Delta_{21m}^{123} \Delta_{2-m}^{12}) \end{cases}$$

$$(300) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \sum (-)^m \Delta_{222}^{123} \Delta_{m-m}^{12} \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{2m-m}^{123} \Delta_{m'-m'}^{12} \end{cases}$$

RI [42] de U_6

$$(420) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 (\Delta_2^1)^2 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{11}^{12} \end{cases}$$

$$(220) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{11}^{12} - 2 \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{21}^{12} + \Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{22}^{12}) \end{cases}$$

$$(400) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^2 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \sum (-)^m \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{m-m}^1 \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^2 \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{m'-m'}^1 \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^1 \Delta_{\mu'}^1 \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \Delta_{22}^{12} \end{cases}$$

$$(000) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \Delta_{\nu}^1 \Delta_{-\nu}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-m\ m'-m'}^{1234} \Delta_{m''-m''}^1 \end{cases}$$

$$(310) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \Delta_2^1 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{21}^{12} - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{22}^{12}) \end{cases}$$

R I [411] de U_6 .

$$(4,1,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} (\Delta_2^1)^3 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1\pm\theta}^1 \Delta_{\pm\theta}^1 \end{cases}$$

$$(2,1,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_2^1 \sum \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{1\pm\theta}^1 \Delta_{\pm\theta}^1 - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_2^1 \Delta_{\pm\theta}^1 + \Delta_{2\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_2^1 \Delta_{\pm\theta}^1) \end{cases}$$

$$(310) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^2 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_2^1 \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(110) \begin{cases} P = \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^1 \Delta_{\mu'}^1 \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \Delta_2^1 \Delta_1^1 \end{cases}$$

R I [43] de U_6

$$(430) \begin{cases} P = \Delta_2^1 (\Delta_{21}^{12})^3 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{111}^{123} \end{cases}$$

$$(320) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{211}^{123} - 2 \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{221}^{123} + \Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{222}^{123}) \end{cases}$$

$$(410) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \Delta_2^1 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m \Delta_{1m-m}^{123} \end{cases}$$

$$(210) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \Delta_2^1 \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{1m'-m'}^{123} - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{2m'-m'}^{123}) \end{cases}$$

$$(300) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \Delta_{2\mu'}^1 \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{2m'-m'}^{123} \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \Delta_{2\mu''}^{12} \Delta_{-\mu''}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \Delta_{2m''-m''}^{123} \end{cases}$$

R I [421] de U_6

$$(42, \pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21 \pm \theta}^{123} \Delta_{21}^{12} (\Delta_2^1)^2 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{11}^{12} \Delta_{\pm \theta}^1 \end{cases}$$

$$(2, 2, \pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21 \pm \theta}^{123} \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{\mu}^1 \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^m (\Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{11}^{12} \Delta_{\pm \theta}^1 - \Delta_{1m-m}^{1234} \Delta_{22}^{12} \Delta_{\pm \theta}^1) \end{cases}$$

$$(3, 1, \pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21 \pm \theta}^{123} \sum \Delta_2^1 \Delta_{-\mu}^1 \Delta_{2\mu}^{12} \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^m \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{22}^{12} \Delta_{\pm \theta}^1 \end{cases}$$

$$(410) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^2 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m \Delta_{m-m}^{12} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(300) \begin{cases} P = (\Delta_2^1)^2 \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{m'-m'}^{12} \Delta_2^1 \end{cases}$$

$$(210) \begin{cases} P = \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^{12} \Delta_{\mu'}^1 \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \Delta_{22}^{12} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \Delta_{\mu''}^1 \Delta_{-\mu''}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \Delta_{m''-m''}^{12} \Delta_2^1 \end{cases}$$

$$(210) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu\mu'}^1 \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{m'-m'}^{12} \Delta_1^1 - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{m'-m'}^{12} \Delta_2^1) \end{cases}$$

$$(320) \begin{cases} P = \Delta_2^1 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^1 \Delta_{21}^{12} \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{11}^{12} - 2 \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{21}^{12}) \Delta_2^1 \end{cases}$$

RI [44] de U_6

$$(440) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^4 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} \end{cases}$$

$$(420) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m \Delta_{11m-m}^{1234} \end{cases}$$

$$(220) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{11m'-m'}^{1234} - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{21m'-m'}^{1234}) \end{cases}$$

$$(400) \begin{cases} P = (\sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12})^2 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \end{cases}$$

$$(000) \begin{cases} P = (\sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12})^2 \\ P' = (\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234})^2 \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \Delta_{\nu\nu'}^{12} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{m'-m'm''-m''}^{1234} \end{cases}$$

RI [431] de U_6

$$(4,3,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} (\Delta_{21}^{12})^2 \Delta_2^1 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{123} \Delta_{\pm\theta}^1 \end{cases}$$

$$(3,2,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^m \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{21}^{123} \Delta_{\pm\theta}^1 \end{cases}$$

$$(4,1,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_2^1 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m (\Delta_{m-m\pm\theta}^{123} \Delta_1^1 - \Delta_{m-m}^{123} \Delta_{\pm\theta}^1) \end{cases}$$

$$(2,1,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_2^1 \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{m'-m'}^{123} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(310) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \Delta_2^1 \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-m'm'-m'}^{1234} \Delta_{222}^{123} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(310) \begin{cases} P = \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^1 \Delta_{2\mu'}^{12} \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_1^1 - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_2^1) \Delta_{2m'-m'}^{123} \end{cases}$$

$$(420) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \Delta_2^1 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m \Delta_{1m-m}^{123} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(330) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^1 \\ P' = \sum (-)^m (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{111}^{123} + 3\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{221}^{123} - 3\Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{211}^{123}) \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(110) \begin{cases} P = \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^1 \Delta_{\nu\nu'}^{12} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-m'm'-m''}^{1234} (\Delta_{2m''-m''}^{123} \Delta_1^1 - \Delta_{1m''-m''}^{123} \Delta_2^1) \end{cases}$$

$$(220) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu\mu'}^1 \Delta_{-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{11m'}^{123} - 2\Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{21m'}^{123} + \Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{22m'}^{123}) \Delta_{-m}^1 \end{cases}$$

RI [441] de U_6

$$(4,4,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} (\Delta_{21}^{12})^3 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} \Delta_{\pm\theta}^1 \end{cases}$$

$$(430) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m \Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(320) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \\ P' = \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{11m'-m'}^{1234} - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{21m'-m'}^{1234}) \Delta_2^1 \end{cases}$$

$$(2,2,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{\mu\mu'}^1 \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{1m'-m'}^{1234} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(410) \begin{cases} P = \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^{12} \Delta_{2\mu'}^1 \Delta_{2-\mu'}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-m'm'-m'}^{1234} \Delta_1^1 \end{cases}$$

$$(300) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^1 \Delta_{2\nu}^{12} \Delta_{2-\nu}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{m'-m''-m''}^{1234} \Delta_2^1 \end{cases}$$

$$(210) \begin{cases} P = \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^{12} \Delta_{\nu\nu'}^{12} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-mm'-m''}^{1234} (\Delta_{22m''-m''}^{1234} \Delta_{11}^{12} - \Delta_{21m''-m''}^{1234} \Delta_{22}^{12}) \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \Delta_{\nu\nu'}^{12} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = (\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234})^2 \Delta_{22}^{12} \end{cases}$$

RI [442] de U_6 .

$$(4,4,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{21}^{12})^2 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} (\Delta_{00}^{12} - \Delta_{0'0'}^{12} \pm i2\Delta_{00'}^{12}) \end{cases}$$

$$(4,2,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^2 \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{\theta-\theta}^{12} - 2\Delta_{1\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_{1\pm\theta}^{12} + \Delta_{1\theta\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_{11}^{12}) \end{cases}$$

$$(440) \begin{cases} P = \Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123} (\Delta_{21}^{12})^2 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} (\Delta_{00}^{12} + \Delta_{0'0'}^{12}) \end{cases}$$

$$(420) \begin{cases} P = \Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123} \sum \Delta_{2\mu}^{12} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum_m (-)^m (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{\theta-\theta}^{12} - \Delta_{1\theta m-m}^{1234} \Delta_{1-\theta}^{12} - \Delta_{1-\theta m-m}^{1234} \Delta_{1\theta}^{12} + \Delta_{\theta-\theta m-m}^{1234} \Delta_{11}^{12}) \end{cases}$$

$$(2,2,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^2 \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{1m'-m'}^{1234} \Delta_{1\pm\theta}^{12} \end{cases}$$

$$(220) \begin{cases} P = \Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123} \sum \Delta_{\mu\mu'}^{12} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{11m'-m'}^{1234} \Delta_{\theta-\theta}^{12} - \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{21m'-m'}^{1234} \Delta_{\theta-\theta}^{12} \\ + \Delta_{2\theta m-m}^{1234} \Delta_{21m'-m'}^{1234} \Delta_{1-\theta}^{12} + \Delta_{2-\theta m-m}^{1234} \Delta_{21m'-m'}^{1234} \Delta_{1\theta}^{12} - \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{1\theta m'-m'}^{1234} \Delta_{1-\theta}^{12} \\ - \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{1-\theta m'-m'}^{1234} \Delta_{1\theta}^{12} + \Delta_{21m-m}^{1234} \Delta_{1\theta m'-m'}^{1234} \Delta_{2-\theta}^{12} + \Delta_{1-\theta m-m}^{1234} \Delta_{21m'-m'}^{1234} \Delta_{2\theta}^{12} \\ - \Delta_{2\theta m-m}^{1234} \Delta_{11m'-m'}^{1234} \Delta_{2-\theta}^{12} - \Delta_{2-\theta m-m}^{1234} \Delta_{11m'-m'}^{1234} \Delta_{2\theta}^{12}) \end{cases}$$

$$(43,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{2\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{1\pm\theta}^{12} - \Delta_{1\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_{11}^{12}) \end{cases}$$

$$(3,2,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{1m'-m'}^{1234} \Delta_{2-\theta}^{12} \end{cases}$$

$$(310) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \Delta_{21\nu}^{123} \Delta_{2-\nu}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \sum (-)^{m''} (\Delta_{22m''-m''}^{1234} \Delta_{21}^{12} - \Delta_{21m''-m''}^{1234} \Delta_{22}^{12}) \end{cases}$$

$$(420) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \Delta_{11}^{12} \end{cases}$$

$$(220) \begin{cases} P = (\Delta_{21}^{12})^2 \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \\ P' = \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-mm'-m''}^{1234} (\Delta_{22m''-m''}^{1234} \Delta_{11}^{12} - 2\Delta_{21m''-m''}^{1234} \Delta_{21}^{12} + \Delta_{11m''-m''}^{1234} \Delta_{22}^{12}) \end{cases}$$

$$(400) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \Delta_{2\nu}^{12} \Delta_{2-\nu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-mm'-m''}^{1234} \Delta_{m''-m''}^{12} \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \Delta_{\nu\nu'}^{12} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = \left(\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \right)^2 \Delta_{22}^{12} \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \Delta_{2\nu}^{12} \Delta_{2-\nu}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'+n+n'} \Delta_{22m-m}^{1234} \Delta_{m'-m'-n-n'}^{1234} \Delta_{n'-n'}^{12} \end{cases}$$

$$(000) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \Delta_{\nu\nu'}^{12} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = \left(\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234} \right)^2 \sum (-)^{m''} \Delta_{m''-m''}^{12} \end{cases}$$

RI [443] de U_6

$$(4,4,\pm 3) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^3 \Delta_{21}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} (\Delta_{000}^{123} \pm 3i \Delta_{000'}^{123} - 3\Delta_{00'0'}^{123} \mp i \Delta_{0'0'0'}^{123}) \end{cases}$$

$$(4,4,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123} \Delta_{21}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} (\Delta_{000}^{123} \pm i \Delta_{000'}^{123} + \Delta_{00'0'}^{123} \pm i \Delta_{0'0'0'}^{123}) \end{cases}$$

$$(4,2,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{\pm\theta m'-m'}^{123} - \Delta_{\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_{1m'-m'}^{123}) \end{cases}$$

$$(2,2,\pm 1) \begin{cases} P = \Delta_{21\pm\theta}^{123} \Delta_{21}^{12} \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \\ P' = \Delta_{21\pm\theta}^{1234} \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{\pm\theta m'-m'}^{1234} \Delta_{m''-m''}^{123} \end{cases}$$

$$(4,3,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^2 \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{2-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{\pm\theta\pm\theta}^{123} - 2\Delta_{\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_{1\pm\theta}^{123} + \Delta_{\pm\theta\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_{111}^{123}) \end{cases}$$

$$(3,2,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^2 \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{\dots m-m}^{1234} \Delta_{\dots m'-m'}^{1234} \Delta_{\dots 2}^{123} \end{cases}$$

$$(430) \begin{cases} P = \Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123} \sum \Delta_{21\mu}^{123} \Delta_{-\mu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^m (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{1\theta-\theta}^{123} - \Delta_{1\theta m-m}^{1234} \Delta_{11-\theta}^{123} + \Delta_{\theta-\theta m-m}^{1234} \Delta_{111}^{123} - \Delta_{1-\theta m-m}^{1234} \Delta_{11\theta}^{123}) \end{cases}$$

$$(320) \begin{cases} P = \Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123} \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'}^{12} \\ P' = A_{2,1,\theta} A_{2,1,-\theta} \sum (-)^{m+m'} \Delta_{\dots m-m}^{1234} \Delta_{\dots m'-m'}^{1234} \Delta_{\dots 2}^{123} \end{cases}$$

$$(410) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \Delta_{21\nu}^{123} \Delta_{2-\nu}^{12} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{m-mm'-m''}^{1234} \Delta_{1m''-m''}^{123} \end{cases}$$

$$(300) \begin{cases} P = \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \Delta_{2\nu\nu'}^{123} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = (\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234})^2 \Delta_{222}^{123} \end{cases}$$

$$(210) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \Delta_{21\nu}^{123} \Delta_{2-\nu}^{12} \\ P' = \sum (-)^{m+m'+n+n'} \Delta_{m-mm'-m''}^{1234} (\Delta_{22n-n}^{1234} \Delta_{1n'-n'}^{123} - \Delta_{21n-n}^{1234} \Delta_{2n'-n'}^{123}) \end{cases}$$

$$(100) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \Delta_{2\nu\nu'}^{123} \Delta_{-\nu-\nu'}^{12} \\ P' = (\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234})^2 \sum (-)^{m''} \Delta_{2m''-m''}^{123} \end{cases}$$

R I [444] de U₆

$$(4,4,\pm 4) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^4 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} (\Delta_{0000}^{1234} \pm 4i \Delta_{0000}^{1234} - 6 \Delta_{0000}^{1234} + 4i \Delta_{0000}^{1234} + \Delta_{0'0'0'0'}^{1234}) \end{cases}$$

$$(4,4,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^2 \Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} (\Delta_{0000}^{1234} \pm 2i \Delta_{0000}^{1234} \pm 2i \Delta_{0000}^{1234} - \Delta_{0'0'0'0'}^{1234}) \end{cases}$$

$$(440) \begin{cases} P = (\Delta_{21\theta}^{123} \Delta_{21-\theta}^{123})^2 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \Delta_{1111}^{1234} (\Delta_{0000}^{1234} + 2 \Delta_{0000}^{1234} + \Delta_{0'0'0'0'}^{1234}) \end{cases}$$

$$(4,3,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^2 \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{\pm\theta\pm\theta m'-m'}^{1234} - \Delta_{1\pm\theta m-m}^{1234} \Delta_{1\pm\theta m'-m'}^{1234}) \end{cases}$$

$$(22,\pm 2) \begin{cases} P = (\Delta_{21\pm\theta}^{123})^2 \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \\ P' = A_{2,1,\pm\theta} \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{\dots 2m-m}^{1234} \Delta_{\dots 1m'-m'}^{1234} \Delta_{\dots \theta m''-m''}^{1234} \end{cases}$$

$$(420) \begin{cases} P = \Delta_{210}^{123} \Delta_{21-0}^{123} \sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123} \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} \sum (-)^{m+m'} (\Delta_{11m-m}^{1234} \Delta_{0-\theta m'-m'}^{1234} - \Delta_{1\theta m-m}^{1234} \Delta_{1-\theta m'-m'}^{1234}) \end{cases}$$

$$(220) \begin{cases} P = \Delta_{210}^{123} \Delta_{21-0}^{123} \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \\ P' = A_{2,1,0} \sum (-)^{m+m'+m''} \Delta_{2m-m}^{1234} \Delta_{1m'-m'}^{1234} \Delta_{\theta m''-m''}^{1234} \end{cases}$$

$$(400) \begin{cases} P = (\sum \Delta_{2\mu\mu'}^{123} \Delta_{2-\mu-\mu'}^{123})^2 \\ P' = \Delta_{2222}^{1234} (\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234})^2 \end{cases}$$

$$(200) \begin{cases} P = \sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123} \Delta_{2\nu\nu'}^{123} \Delta_{2-\nu-\nu'}^{123} \\ P' = (\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234})^2 \sum (-)^{m''} \Delta_{22m''-m''}^{1234} \end{cases}$$

$$(000) \begin{cases} P = (\sum \Delta_{\mu\mu'\mu''}^{123} \Delta_{-\mu-\mu'-\mu''}^{123})^2 \\ P' = (\sum (-)^{m+m'} \Delta_{m-mm'-m'}^{1234})^3 \end{cases}$$

CAPÍTULO V I

APLICACIONES AL MODELO DE CAPAS NUCLEAR .

En este Capítulo analizaremos el cálculo, en la aproximación del modelo de capas, de niveles de energía de núcleos en la capa 2s - 1d ; es decir, de sistemas de A nucleones ($17 \leq A \leq 40$) en los que se supone que los 16 nucleones que llenan las capas 1s y 1p forman un carozo inerte y el espectro de energía se debe a las excitaciones de los N nucleones en la capa 2s - 1d. El problema consiste en encontrar los eigenvalores del Hamiltoniano del sistema de N nucleones. Las correspondientes eigenfunciones deben satisfacer el Principio de Exclusión de Pauli, es decir, deben ser antisimétricas ante el intercambio de las coordenadas de posición, spin e isospín de cualquier par de nucleones.

Un método conveniente de atacar este problema consiste en el uso del esquema de segunda cuantización ¹³⁾. En el se introducen operadores de creación b_{ρ}^{\dagger} y de aniquilación b^{ρ} de fermiones, que satisfacen las reglas de anticonmutación

$$\{b_{\rho}^{\dagger}, b^{\rho'}\} = b_{\rho}^{\dagger} b^{\rho'} + b^{\rho'} b_{\rho}^{\dagger} = \delta_{\rho}^{\rho'} \quad , \quad \{b_{\rho}^{\dagger}, b_{\rho'}^{\dagger}\} = \{b^{\rho}, b^{\rho'}\} = 0 \quad (1)$$

y un estado base $|0\rangle$ con la propiedad de que

$$b^{\rho} |0\rangle = 0 \quad \text{para toda } \rho \quad (2)$$

El índice ρ toma un número de valores igual al número total de estados de una partícula en las capas que estemos considerando, lo cual es igual

a 24 en el caso presente de las capas 2s y 1d . El producto escalar de dos polinomios $P(b_p^+)$ se define como

$$(P_1, P_2) = \langle 0 | P_1(b_p^+) P_2(b_p^+) | 0 \rangle \quad \text{y se evalúa usando las reglas de anticonmutación (1), (2), y la normalización } \langle 0 | 0 \rangle = 1 .$$

Los estados de N partículas serán polinomios formados por combinaciones lineales de monomios del tipo

$$b_{p_1}^+ b_{p_2}^+ b_{p_3}^+ \dots b_{p_N}^+ | 0 \rangle \quad (3)$$

Debido a la propiedad de anticonmutación de las b_p^+ , es fácil comprobar que estos polinomios satisfacen efectivamente el Principio de Exclusión. El conjunto de todos los polinomios linealmente independientes que tienen la forma anterior, constituyen una base para la $R I [1^N]$ de U_{24} . El problema que intentamos resolver consiste en construir la matriz del Hamiltoniano de los N nucleones con respecto a esta base, y luego diagonalizar esta matriz.

Ahora bien, un método conveniente de construir una base de una $R I$ consiste en introducir una cadena de subgrupos para clasificar los renglones de la $R I$. Este procedimiento presenta varias ventajas entre las que podemos mencionar:

- a) algunos de los subgrupos pueden tener un significado físico (e.g. el momento angular orbital está asociado a un subgrupo R_3), y las funciones de la base se relacionan así con eigenvalores de observables físicos;
- b) algunas interacciones de importancia son diagonales con respecto a una base clasificada por una cadena determinada de subgrupos, y si estas interacciones aparecen en el Hamiltoniano se logra una simplificación

considerable en la construcción de la matriz de la Energía usando la base mencionada.

c) como en general la base original es extremadamente grande, hay que truncarla de alguna manera; el método de clasificación propuesto proporciona un criterio para truncar la base, restringiéndola a una sola R I de alguno de los subgrupos.

Varias cadenas de subgrupos de U_{24} se pueden utilizar. Mencionaremos a continuación tres cadenas diferentes que diagonalizan a ciertas interacciones de importancia física ^{13,14} .

I) La Cadena de acoplamiento $j - j$:

$$\begin{aligned}
 U_{24} &\supset U_{12}(L, S) \times SU_2(T) \supset \left(\begin{array}{c|c|c} SU_6 & & \\ \hline & SU_4 & \\ \hline & & SU_2 \end{array} \right) \times SU_2(T) \supset \\
 &\supset \left(\begin{array}{c|c|c} D^{5/2} & & \\ \hline & D^{3/2} & \\ \hline & & D^{1/2} \end{array} \right) \times SU_2(T) \quad (4)
 \end{aligned}$$

El grupo $U_{12}(L, S)$ es el de transformaciones unitarias en el espacio spin-orbital, y el $SU_2(T)$ es el de transformaciones en el espacio isotópico. Si introducimos la notación explícita.

$\rho = (l j m; \tau)$, $l j = 0\frac{1}{2}, 2\frac{3}{2}, 2\frac{5}{2}$; $m = j, j-1, \dots, -j$; $\tau = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
 en los operadores b_{ρ}^+ , b_{ρ} , la expresión para el operador de la interacción spin-órbita $W_{s.o.} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i \cdot \vec{s}_i$ en segunda cuantización, es ¹³⁾

$$W_{s.o.} = \sum_{ljm\tau} \sum_{l'j'm'\tau'} \langle ljm\tau | \vec{l} \cdot \vec{s} | l'j'm'\tau' \rangle b_{ljm\tau}^+ b^{l'j'm'\tau'} \quad (5)$$

De las propiedades de anticonmutación en (1) se deduce que los (24)² operadores $C_p^{p'} \equiv b_p^+ b^{p'}$ satisfacen las reglas de conmutación de los generadores de U_{24} . De manera análoga se encuentra que los operadores

$$C_{ljm}^{l'j'm'} = \sum_{\tau=\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} C_{ljm\tau}^{l'j'm'\tau'} \quad , \quad C_{\tau}^{\tau'} = \sum_{ljm} C_{ljm\tau}^{ljm\tau'} \quad (6a)$$

tienen las reglas de conmutación de los generadores de U_{12} y U_2 respectivamente; y los subconjuntos de operadores

$$C_{0\frac{1}{2}m}^{0\frac{1}{2}m'} \quad m, m' = \pm\frac{1}{2} \quad ; \quad C_{2\frac{3}{2}m}^{2\frac{3}{2}m'} \quad m, m' = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2} \quad ; \quad C_{2\frac{5}{2}m}^{2\frac{5}{2}m'} \quad m, m' = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2} \quad (6b)$$

satisfacen las reglas de conmutación de generadores de U_2 , U_4 y U_6 respectivamente. Finalmente, los generadores de los subgrupos $D^{\frac{1}{2}}$, $D^{\frac{3}{2}}$, $D^{\frac{5}{2}}$ de transformaciones ortogonales en los orbitales $j = 1/2, 3/2, 5/2$ son ciertas combinaciones lineales de las C en cada subconjunto (6b).

Introduciendo en (5) el valor bien conocido del elemento de matriz de $\vec{l} \cdot \vec{s}$, se obtiene

$$W_{s.o.} = \frac{1}{2} \sum_{ljm} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] C_{ljm}^{ljm} \quad (7)$$

Este operador conmuta con todas las C en (6b) y esto demuestra que la interacción spin-órbita es diagonal con respecto a estados clasificados por la cadena de grupos (4).

II) La Cadena U_3 .

$$\begin{aligned}
 U_{24} &\supset U_6(L) \times U_4(S,T) \supset D^{[200]}(U_3) \times \{SU_2(S) \otimes SU_2(T)\} \\
 &\supset \left(\frac{D^2}{D^0} \right) \times \{SU_2(S) \otimes SU_2(T)\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

El primer paso en esta cadena es la clasificación según la teoría de los supermultipletes de Wigner ¹⁵⁾ que separa el espacio orbital del espacio de spin-isospin. Luego se introducen nuevos subgrupos en cada espacio.

En el $U_4(S,T)$ se introduce el subgrupo de transformaciones separadas de spin y de isospin. En el $U_6(L)$ se introducen el grupo de simetrías U_3 del oscilador armónico en la forma de su R I [200] de dimensión 6, y el grupo de rotaciones en el espacio físico.

En este caso es conveniente usar en los operadores $b_p^+, b^{p'}$ la notación $p = (\mu, \sigma, \tau)$, $\mu = 1, 2, \dots, 6$; $\sigma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; $\tau = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

La expresión para cualquier interacción $V = \sum_{i < j}^N V_{ij}$ entre pares de partículas, es en el lenguaje de la segunda cuantización ¹³⁾:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \sum_{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2} \sum_{\mu'_1, \mu'_2, \sigma'_1, \sigma'_2, \tau'_1, \tau'_2} \langle \mu_1, \sigma_1, \tau_1, \mu_2, \sigma_2, \tau_2 | V_{12} | \mu'_1, \sigma'_1, \tau'_1, \mu'_2, \sigma'_2, \tau'_2 \rangle \times \\
 &\times \left\{ C_{\mu_1, \sigma_1, \tau_1}^{\mu'_1, \sigma'_1, \tau'_1} C_{\mu_2, \sigma_2, \tau_2}^{\mu'_2, \sigma'_2, \tau'_2} - \delta_{\mu_2}^{\mu'_2} \delta_{\sigma_2}^{\sigma'_2} \delta_{\tau_2}^{\tau'_2} C_{\mu_1, \sigma_1, \tau_1}^{\mu'_1, \sigma'_1, \tau'_1} \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

donde $C_{\mu\sigma\tau}^{\mu'\sigma'\tau'} \equiv b_{\mu\sigma\tau}^+ b^{\mu'\sigma'\tau'}$ son los generadores de U_{24} . Se puede verificar fácilmente que los operadores

$$\begin{aligned}
 C_{\mu}^{\mu'} &= \sum_{\sigma\tau} C_{\mu\sigma\tau}^{\mu'\sigma\tau} \quad , \quad C_{\sigma\tau}^{\sigma'\tau'} = \sum_{\mu} C_{\mu\sigma\tau}^{\mu\sigma\tau'} \quad , \\
 C_{\sigma}^{\sigma'} &= \sum_{\mu\tau} C_{\mu\sigma\tau}^{\mu\sigma'\tau} \quad , \quad C_{\tau}^{\tau'} = \sum_{\mu\sigma} C_{\mu\sigma\tau}^{\mu\sigma\tau'} \quad (10)
 \end{aligned}$$

son los generadores de los grupos $U_6(L)$, $U_4(S,T)$, $U_2(S)$ y $U_2(T)$, respectivamente. Si la interacción V es independiente de spin e isospin, el elemento de matriz de V_{12} en (9) es proporcional a $\delta_{\sigma_1 \sigma_1'} \delta_{\sigma_2 \sigma_2'} \delta_{\tau_1 \tau_1'} \delta_{\tau_2 \tau_2'}$, y por lo tanto en este caso V es una función de los generadores de $U_6(L)$.

Ahora bien, en el problema del oscilador armónico es usual introducir los operadores de creación a_q^+ y aniquilación a_q^- definidos por

$$a_q^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_q - iP_q), \quad a_q^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_q + iP_q) \quad q = 1, 0, -1 \quad (11)$$

Los 9 operadores $a_q^+ a_{q'}$ son los generadores del grupo de simetrías U_3 del oscilador. Si el índice orbital μ se refiere ahora a los 6 estados en la capa s - d del oscilador, la expresión de los operadores $a_q^+ a_{q'}$ en segunda cuantización es

$$G_q^{q'} = \sum_{\mu \mu'} \langle \mu | a_q^+ a_{q'} | \mu' \rangle \mathcal{E}_\mu^{\mu'} \quad q, q' = 1, 0, -1 \quad (12)$$

Estos operadores $G_q^{q'}$ tienen las mismas reglas de conmutación que los $a_q^+ a_{q'}$, y como además son un subconjunto de los generadores $\mathcal{E}_\mu^{\mu'}$ de U_6 , podemos afirmar que $G_q^{q'}$ son los generadores de un subgrupo U_3 de U_6 . En el mismo problema del oscilador armónico, el operador del momento angular orbital es $L_q = \sum_{q' q''} (-)^{q'} \mathcal{E}_{q' q''} a_q^+ a_{q''}$ y por un razonamiento análogo, la expresión de este operador en segunda cuantización es $L_q = \sum_{q' q''} (-)^{q'} \mathcal{E}_{q' q''} G_q^{q''}$, indicando que L_q son los generadores de un subgrupo R_3 de U_3 . Hemos puesto en evidencia así a los diferentes subgrupos de esta cadena U_3 . Mencionaremos

que hay una interacción que es diagonal con respecto a estados clasificados por esta cadena. Esta es la interacción cuadrupolo - cuadrupolo Q^2 cuya expresión en segunda cuantización es ^{13,14)} $Q^2 = \sum_{\tau=2}^{-2} Q_{\tau}^{\dagger} Q_{-\tau}$

$$\text{con } Q_{\tau} = \sqrt{\frac{32\pi}{15}} \sum_{\mu\mu'} \langle \mu | Y_{2\tau}(\vec{r}) | \mu' \rangle \rho_{\mu}^{\mu'} = \sqrt{\frac{5}{3}} \sum_{qq'} \langle 12q\tau | 1q' \rangle G_q^{q'} \quad (13)$$

Finalmente analizaremos la tercera cadena de subgrupos, que es la que más nos concierne en esta Tesis.

III) La Cadena R_6 .

$$U_{24} \supset U_6(L) \times U_4(S,T) \supset R_6 \times \{SU_2(S) \otimes SU_2(T)\} \supset$$

$$\supset \left(\begin{array}{c|c} R_5 & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \times \{SU_2(S) \otimes SU_2(T)\} \supset \left(\begin{array}{c|c} D^2 & \\ \hline & D^0 \end{array} \right) \times \{SU_2(S) \otimes SU_2(T)\} \quad (14)$$

En el primer paso en esta cadena se usa el esquema de los supermultipletes de Wigner, igual que en la cadena U_3 ; la parte de spin-isospin es también la misma que en el caso anterior. Los generadores de $U_6(L)$ son los operadores $\rho_{\mu}^{\mu'}$ de (10), y si empleamos la notación $\mu, \mu' = \pm 2, \pm 1, \pm 0$ los generadores del subgrupo R_6 son

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \rho_{\mu}^{\mu'} - \rho_{-\mu'}^{-\mu} \quad \mu, \mu' = 2, 1, 0, -0, -1, -2 \quad (15)$$

En lo que respecta a los siguientes subgrupos de esta cadena, en el Capítulo IV ya demostramos que efectivamente R_6 y R_5 admiten los subgrupos indicados en (14), y dimos la expresión de los correspondientes generadores.

Mencionaremos ahora que existe una interacción de importancia física que es diagonal con respecto a estados clasificados por la cadena R_6 . Se trata de la fuerza de apareamiento orbital, la cual es una interacción entre pares de partículas $P = \sum_{i < j=1}^N P_{ij}$ cuyos elementos de matriz entre estados de dos partículas tienen por valor

$$\langle l_1 m_1, l_2 m_2 | P_{12} | l'_1 m'_1, l'_2 m'_2 \rangle = (-)^{m_1+m'_1} \delta_{l_1 l'_1} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{m_1, -m_2} \delta_{m'_1, -m'_2} \quad (16)$$

La expresión de la interacción de apareamiento en el esquema de segunda cuantización es ¹³⁾

$$P = \frac{1}{2} \sum_{ss'} \sum_m (-)^m \dot{b}_{ms}^+ \dot{b}_{-ms}^+ \sum_{m'} (-)^{m'} \dot{b}^{m's'} \dot{b}^{-m's} \quad m, m' = 2, 1, 0, 0', -1, -2 \quad (17)$$

donde los índices 2, 1, 0, -1, -2 se refieren a los 5 estados orbitales de la capa 1d, y el índice 0' se refiere al estado de la capa 2s. Los operadores \dot{b}^+ , \dot{b} de (17) se definen de manera análoga a los operadores \dot{a}^+ , \dot{a} del Capítulo III, de modo que por una transformación como la (III - 9) podemos llevar la expresión (17) a la forma

$$P = \frac{1}{2} \sum_{ss'} \left(\sum_{\mu} b_{\mu s}^+ b_{-\mu s'}^+ \right) \left(\sum_{\mu'} b^{\mu's'} b^{-\mu's} \right) \quad \mu, \mu' = 2, 1, 0, -0, -1, -2 \quad (18)$$

En el Capítulo I demostramos que los generadores $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$ de R_6 conmutan con las formas bilineales $\sum_{\mu} b_{\mu s}^+ b_{-\mu s'}^+$, y por un procedimiento análogo se demuestra que también conmutan con las expresiones

$\sum_{\mu'} b^{\mu's'} b^{-\mu's}$, y por lo tanto los generadores de R_6 conmutan con P . Así queda confirmado que la interacción de apareamiento P de (18) es invariante bajo R_6 , y en consecuencia esta interacción es diagonal en una base clasificada por la cadena de grupos (14).

El Modelo de Interacción .

El problema que tenemos ahora frente a nosotros es escoger alguna cadena de subgrupos para clasificar las funciones de la base, y escoger el Hamiltoniano del sistema que se va a diagonalizar. Con relación a este segundo punto, recientemente se han hecho cálculos en que se utilizan las llamadas "interacciones realistas" entre nucleones ¹⁶⁾. En esta Tesis tomaremos un punto de vista menos ambicioso y adoptaremos un modelo de interacción ¹⁴⁾ que ofrece la doble particularidad de, por una parte simular en cierto grado el efecto de interacciones centrales entre pares de partículas, y por otra parte presentar propiedades de simetría especiales que permiten aplicar métodos de la Teoría de Grupos en el cálculo de la matriz de Energía. El Hamiltoniano del modelo es

$$H = H_0 - V_0 (\chi Q^2 + \gamma P + z W_{s.o.}) \quad (19)$$

El término H_0 es la energía cinética del sistema más la energía potencial de las N partículas en el campo central común, el cual se elegirá como un campo de fuerzas del tipo de oscilador armónico; por lo tanto H_0 es el Hamiltoniano de N osciladores armónicos independientes. El término restante en (19) representa a la interacción residual atractiva, y es una combinación lineal de las tres interacciones que resultan diagonales en cada una de las tres cadenas de subgrupos mencionadas anteriormente; es decir la interacción cuadrupolo-cuadrupolo Q^2 , la interacción de apareamiento orbital P , y la interacción spin-órbita $W_{s.o.}$. Los parámetros x, y, z se van a hacer variar independientemente en el rango de valores $0 \leq x, y, z \leq 1$ pudiéndose estudiar así el efecto de una mezcla arbitraria de las tres interacciones.

Con relación a la semejanza entre el Hamiltoniano (19) y un Hamiltoniano con interacciones centrales entre pares de partículas, mencionaremos que en la referencia 14 se han comparado los eigenvalores $E(x)$ del Hamiltoniano (19) con $z=0, y=1-x$, con los eigenvalores $E(\alpha)$ del Hamiltoniano

$$H = H_0 - V_0 \frac{4}{\sqrt{\pi} \alpha^3} \sum_{i < j=1}^N \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{\alpha^2}\right) \quad (20)$$

La comparación se efectuó para sistemas de 2, 3, y 4 partículas. Los resultados muestran una semejanza en la tendencia general de las curvas $E(x)$ y $E(\alpha)$, poniendo de manifiesto que la interacción P reproduce en buena medida el efecto de las interacciones residuales de corto alcance, mientras que la interacción Q^2 por su parte, reproduce los efectos de una interacción residual de largo alcance.

Se han efectuado cálculos muy extensos ^{14,17)} de niveles de energía de núcleos en la capa $2s-1d$ usando el Hamiltoniano (19). En todos estos cálculos se ha elegido la cadena U_3 para clasificar las bases de funciones. Estas bases se han truncado siguiendo el siguiente criterio: en primer lugar, de las varias $R I$ de $U_6 \times U_4$ contenidas en la $R I$ $[1^N]$ de U_{24} se considera solo aquella $R I$ que corresponda al diagrama de Young más simétrico posible en U_6 , sujeto a la restricción de que la $R I$ de U_4 asociada contenga el isospin T correspondiente a los niveles de energía más bajos del núcleo en que estamos interesados. Cuando la $R I$ de $U_6 \times U_4$ seleccionada de esta manera tiene dimensión muy grande, la base se restringe aún más considerando solo una $R I$ de U_3 , a saber, la $R I$ más simétrica de U_3 entre las varias $R I$ de U_3 contenidas en la $R I$ original de U_6 .

Cálculos muy completos de niveles de energía de núcleos non-non en la capa 2s-1d han sido efectuados por Berrondo y Pineda ¹⁷⁾ a lo largo de estas líneas. Los resultados son satisfactorios en lo que respecta al orden de los niveles más bajos, en la mayoría de los casos. Sin embargo hay unos pocos casos, particularmente el caso del Na^{24} en que no se logra obtener el spin correcto ($J = 4$) del estado base con ningún valor de los parámetros x, y, z en (19). Ahora bien, por razones que serán mencionadas más adelante, es posible que si en el problema del Na^{24} se utiliza en lugar de la base clasificada por U_3 , otra base clasificada por la cadena R_6 y restringida a una sola $R I$ de R_6 elegida convenientemente, se pueda lograr obtener el spin correcto del estado base. Es pues de interés analizar la construcción de bases clasificadas por la cadena R_6 , y la construcción de la matriz del Hamiltoniano (19) con respecto a estas bases, lo cual haremos a continuación.

En el Capítulo V se analizó el problema de reducción

$U_6 \supset R_6$ y se obtuvieron Tablas de $R I$ de R_6 contenidas en una $R I$ de U_6 , así como los correspondientes polinomios de máximo peso en cada $R I$ de R_6 , para los casos de interés en las aplicaciones a la Física Nuclear. A continuación se presenta la lista de estos polinomios en términos de los operadores fermiónicos b^+, b introducidos en este Capítulo, y empleando los índices $m = 2, 1, 0, 0', -1, -2$ para el espacio orbital, y $s = 1, 2, 3, 4$ para el espacio de spin-isospin. La definición de las deltas es

$$\Delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{s_1 s_2 \dots s_k} = \sum_{P_s} (-)^{P_s} P_s b_{\mu_1 s_1}^+ b_{\mu_2 s_2}^+ \dots b_{\mu_k s_k}^+ \quad (21)$$

siendo P_s una permutación de los índices (s_1, s_2, \dots, s_k) .

Cada uno de los polinomios de la lista anterior es de máximo peso en R_6 y en $U_4(S,T)$. Para descender en cada uno de estos grupos y construir la base completa, se usa la técnica de los operadores de descenso. Para el caso de R_6 , aplicando potencias de los operadores L_6^1 , L_6^2 del Capítulo III, Sección C, descendemos al subgrupo R_5 ; luego con el operador $M_{LL'}^{(3)}$ del Capítulo IV, Sección B, descendemos al subgrupo R_3 , y finalmente con el operador L_- terminamos de construir la base de la R I de R_6 . Debemos aclarar aquí que los índices m se refieren a componentes esféricas, y que cuando se utilizan ellos la expresión para los generadores de R_6 ó R_5 es $\Lambda_m^{m'} = \rho_m^{m'} - (-)^{m+m'} \rho_{-m'}^{-m}$. Los operadores de descenso necesarios para descender en $U_4(S,T)$ al subgrupo $SU_2(S) \otimes SU_2(T)$, han sido construidos por Moshinsky ¹³⁾, con ayuda de ellos y de S_- y T_- podemos construir la base completa de la R I de $U_4(S,T)$.

Veamos ahora la construcción de la matriz del Hamiltoniano (19) con respecto a la base construida por el método que se acaba de explicar. Para empezar, la interacción de apareamiento P es diagonal en esta base. Efectuando algunas transposiciones en (18) se puede llegar a esta expresión

$$P = \frac{1}{2} \Gamma - \frac{1}{4} \Phi - \frac{1}{2} N \quad (22)$$

siendo Γ y Φ los operadores de Casimir de U_6 y R_6 , respectivamente, y que fueron definidos en el Capítulo I. Los eigenvalores de Γ y Φ se obtuvieron en el Capítulo I, por lo tanto el eigenvalor de P resulta ser

$$E(P) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^6 h_{\mu} (h_{\mu} - 2\mu) + 3N - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \lambda_m (\lambda_m + 6 - 2m) \quad (23)$$

donde $[h_1 \dots h_6]$ indica la R I de U_6 , y $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ la R I de R_6 .

Para construir la matriz de Q^2 en la base R_6 existen dos métodos posibles. Uno consiste en escribir las funciones de la base en la forma de combinaciones lineales de monomios como (3); cada monomio es un determinante de Slater y se pueden aplicar fórmulas generales¹⁸⁾ para los elementos de matriz de interacciones de uno y dos cuerpos entre determinantes de Slater. J. Flores y R. Perez Pascual han desarrollado programas para efectuar estas operaciones en una computadora electrónica; sus cálculos han sido efectuados usando la cadena U_3 , pero es de suponerse que sus programas puedan adaptarse a la cadena R_6 . El otro método consiste en construir la base en la cadena U_3 ; los productos escalares de las funciones clasificadas por U_3 con las funciones clasificadas por R_6 , son los paréntesis de transformación de una base a la otra; como la matriz de Q^2 en la base U_3 es diagonal y con elementos conocidos, por medio de los paréntesis de transformación se puede traducir esa matriz a la base R_6 .

Finalmente, para construir la matriz de la interacción spin-órbita $W_{s.o.}$ se pueden aplicar los dos métodos del caso de Q^2 ; es decir, el método de los determinantes de Slater, y el de los paréntesis de transformación entre las cadenas (4) y (14). En este caso existe además una tercera posibilidad basada en el carácter de tensor irreducible que tiene la interacción $W_{s.o.}$. En efecto, en la referencia 17 se demuestra que

$$W_{s.o.} = \sum_{q=1}^{-1} (-)^q \mathcal{T} \left[[h_1 \dots h_4] = [1, 0^4, -1], (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (110), (\mu_1, \mu_2) = (11), L=1, M_L=7; \right. \\ \left. \{v_1 \dots v_4\} = \{1, 0^2, -1\}, S=1, M_S=-7, T=M_T=0 \right] \quad (24)$$

donde \mathcal{T} es la componente de un tensor irreducible en $U_6 \times U_4$, cuya clasificación es la indicada en (24). Los elementos de matriz de $W_{s.o.}$ se calculan ahora aplicando el Teorema de Wigner - Eckart ; este método tiene el inconveniente de que los coeficientes de Clebsch - Gordan de R_6 necesarios para la aplicación del Teorema de Wigner - Eckart no están disponibles en el momento actual.

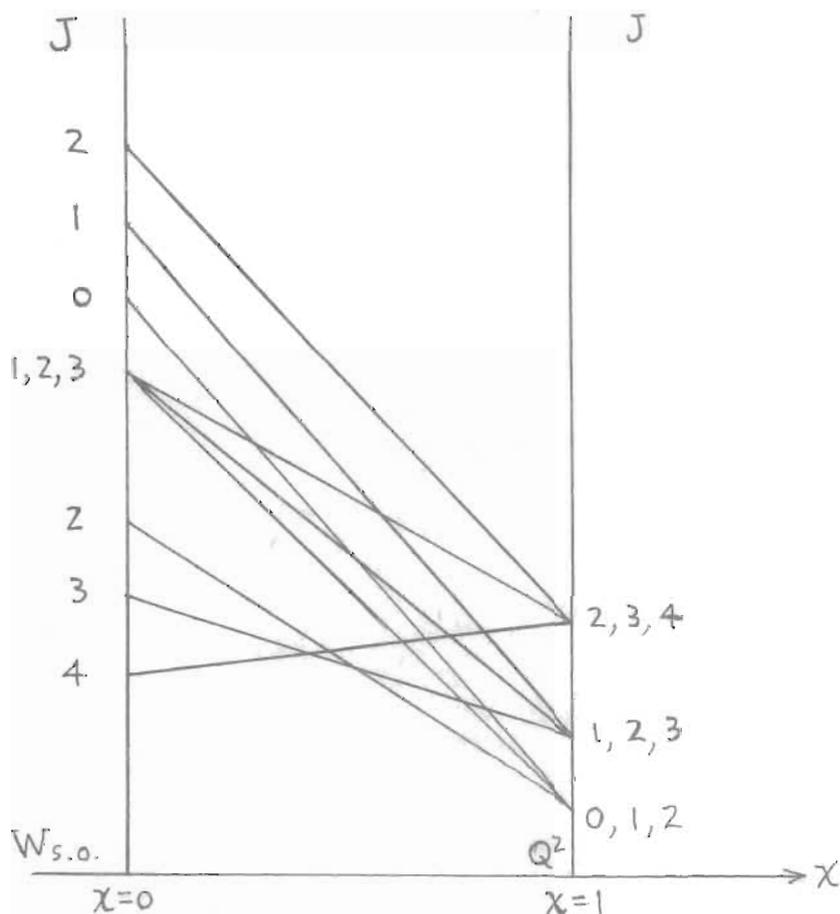
Para ilustrar la discusión precedente, analizaremos un problema específico: la diagonalización del Hamiltoniano (19) en un problema de dos partículas con $S = T = 1$; la base que utilizaremos se restringirá reduciéndola a una sola R I de R_6 . Este problema de dos partículas, aunque según los criterios usualmente adoptados para truncar las bases, no corresponde a un núcleo determinado, se resolverá porque sugiere posibilidades interesantes para el problema del Na^{24} en el cual, según se mencionó antes, los cálculos usando la cadena U_3 no dan el valor correcto ($J = 4$) del momento angular total del estado base ¹⁷⁾.

Problema de dos Partículas con $S = T = 1$.

La R I $[1,1]$ de U_{24} contiene a las R I $[2] \times \{11\}$ y $\{11\} \times \{2\}$ de $U_6 \times U_4$. La R I $\{11\}$ de U_4 contiene a las R I $(S, T) = (1, 0), (0, 1)$ de $SU_2(S) \otimes SU_2(T)$; y la R I $\{2\}$ de U_4 contiene a las R I $(S, T) = (1, 1), (0, 0)$ de $SU_2(S) \otimes SU_2(T)$. Los estados con $S = T = 1$ tienen pues la clasificación $[11] \times \{2\}$ en

$U_6 \times U_4$; serán por lo tanto combinaciones lineales de términos como $b_{\mu_1 S}^+ b_{\mu_2 S_2}^+ \equiv \Delta_{\mu_1}^{S_1} \Delta_{\mu_2}^{S_2}$. La R I $[1, 1]$ de U_6 es isomór-

fica a la R I (110) de R_6 , y ésta contiene a las R I de R_3 correspondientes a los momentos angulares $L = 1, 2, 3$. La base completa de nuestro problema se puede construir por el método señalado en páginas anteriores. Por un accidente, en este caso la R I $[1, 1]$ de U_6 también es isomórfica a la R I $[3 1 0]$ de U_3 , de modo que en esta base tanto Q^2 como P son diagonales, y sus eigenvalores son: $E(Q^2) = (32/3) - L(L+1)/2$, $E(P) = 0$. Construyendo la matriz de $W_{s.o.}$ y diagonalizando el Hamiltoniano (19) con $z=1-x$, se llega a un esquema de eigenvalores de H como el indicado en el siguiente diagrama.



El resultado interesante es que se puede lograr que el nivel más bajo sea $J = 4$, con un valor pequeño de x . La R I de R_6 que aparece en este problema, es decir la (110), es la misma R I que daría los eigenvalores más bajos para la fuerza de apareamiento en el problema del Na^{24} , y por lo tanto sería la R I de R_6 que se escogería al truncar la base en este problema. El resultado obtenido en el problema de dos partículas hace parecer plausible que se pueda lograr un estado base con $J = 4$ en el Na^{24} al efectuar el cálculo usando una base clasificada por R_6 .

CAPITULO VII

ESTADOS DE SPIN - ISOSPIN CON SIMETRIA PERMUTACIONAL .

Como una segunda aplicación del formalismo desarrollado en los Capítulos anteriores, mencionaremos un método alternativo para construir bases de funciones de n partículas en las cuales se toman en cuenta las restricciones que impone el Principio de Exclusión de Pauli . En este método ^{19,20)} se construye por una parte, la función orbital con una simetría permutacional definida, y por otra parte la función de spin-isospin con la simetría permutacional conjugada de la anterior ; por combinación lineal de productos de estas dos funciones se obtienen funciones completamente antisimétricas ante permutaciones de las partículas, que por lo tanto obedecen al Principio de Exclusión. La construcción de las funciones orbitales ha sido discutida detalladamente en las referencias 19 y 20 , tanto en el caso en que las partículas están distribuidas en un cierto número finito de orbitales, como en el caso en que las partículas están en un potencial común de oscilador armónico. Analizaremos a continuación el caso de las funciones de spin-isospin con simetría permutacional.

Los estados de una partícula se pueden indicar con $\chi_{\sigma\tau}^s$ ó χ_{μ}^s donde $s = 1, 2, \dots, n$ es un índice de partícula, $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ es la proyección del spin, $\tau = \pm \frac{1}{2}$ es la proyección del isospin, $\mu = 1, 2, 3, 4$ es un índice cuya relación con los 4 posibles valores de la pareja (σ, τ) es

μ	1	2	3	4
$\sigma\tau$	1/2 1/2	1/2 -1/2	-1/2 1/2	-1/2 -1/2

(1)

Los estados de n partículas con una simetría permutacional especificada por la partición $\{f_1 f_2 \dots f_n\}$ del número n y un símbolo de Yamanouchi $(1 r_2 r_3 \dots r_n)$, y clasificados además por el spin S con proyección M_S e isospin T con proyección M_T , serán ciertas combinaciones lineales

$$\Psi_{\{\{f\}r\beta S M_S T M_T\}} = \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} A_{\{\{f\}r\beta S M_S T M_T\}}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \chi_{\mu_1}^1 \chi_{\mu_2}^2 \dots \chi_{\mu_n}^n \quad (2)$$

con coeficientes A^{μ_s} apropiados que debemos determinar. El índice β en (2) sirve para distinguir entre valores repetidos de (S, T) asociados a una $R \ I \ \{f\}$ de $S(n)$. Introduzcamos ahora la siguiente correspondencia

$$\chi_{\mu_1}^1 \chi_{\mu_2}^2 \dots \chi_{\mu_n}^n \longrightarrow a_{\mu_1 1}^+ a_{\mu_2 2}^+ \dots a_{\mu_n n}^+ |0\rangle \quad (3)$$

Las $a_{\mu_s}^+$ son operadores de creación de tipo bosónico análogos a los operadores a^+ del Capítulo I, con operadores de aniquilación asociados y estado base del mismo tipo que en el Capítulo I. El producto escalar de dos polinomios $P(a_{\mu_s}^+)$ se define de manera análoga a la del Capítulo I. Es fácil verificar que el polinomio

$$P_{\{\{f\}r\beta S M_S T M_T\}}(a_{\mu_s}^+) = \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} A_{\{\{f\}r\beta S M_S T M_T\}}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} a_{\mu_1 1}^+ a_{\mu_2 2}^+ \dots a_{\mu_n n}^+ \quad (4)$$

posee las mismas propiedades de ortonormalidad que las funciones (2).

Veamos ahora como se pueden determinar los coeficientes A^{μ_s} en (4), de tal modo que este polinomio tenga efectivamente la clasificación que indican los diferentes índices. Con este propósito, notemos que $a_{\mu_s}^+$ $\mu_s = 1, 2, 3, 4$; $s = 1, 2, \dots, n$ se pueden considerar como las componentes de un vector en $4n$ dimensiones, y por lo tanto los monomios

$a_{\mu_1}^+ a_{\mu_2}^+ \dots a_{\mu_n}^+$ linealmente independientes constituyen una base para la R I $[n]$ de U_{4n} . Esta R I puede clasificarse por medio de una cadena de subgrupos de U_{4n} ; el primer subgrupo puede ser el $U_4 \times U_n$, y las R I de este subgrupo contenidas en la R I $[n]$ de U_{4n} son ²⁰⁾ $[h_1 h_2 h_3 h_4] \times \{k_1 k_2 \dots k_n\}$, con

$$\begin{aligned} h_1 = k_1, h_2 = k_2, h_3 = k_3, h_4 = k_4; \quad k_5 = k_6 = \dots = k_n = 0; \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = n \end{aligned} \quad (5)$$

El grupo U_4 que aparece aquí es el de los supermultipletes de spin-isospin. De este grupo debemos descender al grupo $SU_2(S) \otimes SU_2(T)$ de transformaciones de spin y de isospin separadas. Esto constituye un problema de reducción $U_4 \supset R_4$ debido al homomorfismo $SU_4 \otimes SU_2 \approx R_4$ demostrado en el Capítulo IV. La forma explícita del homomorfismo en este caso será discutida a continuación.

Los operadores

$$E_{\mu}^{\mu'} = \sum_{s=1}^n a_{\mu s}^+ a^{\mu' s} \quad \mu, \mu' = 1, 2, 3, 4 \quad (6a)$$

son los generadores de U_4 , mientras que los operadores

$$C_s^{s'} = \sum_{\mu=1}^4 a_{\mu s}^+ a^{\mu s'} \quad s, s' = 1, 2, \dots, n \quad (6b)$$

son los generadores de U_n . Los operadores S_+ , S_0 , S_- del spin, y T_+ , T_0 , T_- del isospin, tienen la siguiente expresión ¹²⁾ en términos de los generadores $E_{\mu}^{\mu'}$ de U_4 :

$$S_+ = \mathcal{E}_1^3 + \mathcal{E}_2^4, \quad S_- = \mathcal{E}_3^1 + \mathcal{E}_4^2, \quad S_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_2^2 - \mathcal{E}_3^3 - \mathcal{E}_4^4) \quad (7a)$$

$$T_+ = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_3^4, \quad T_- = \mathcal{E}_2^1 + \mathcal{E}_4^3, \quad T_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^1 - \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^3 - \mathcal{E}_4^4) \quad (7b)$$

Por otra parte, si en los generadores de R_4 , definidos en la Sección B del Capítulo V hacemos el cambio de índices

$$2 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 2, \quad -1 \rightarrow 3, \quad -2 \rightarrow 4 \quad (8a)$$

y cambiamos el signo a los operadores de creación y aniquilación con índice $\mu = 4$

$$a_{4s}^+ \rightarrow -a_{4s}^+, \quad a^{4s} \rightarrow -a^{4s} \quad (8b)$$

se obtienen estas expresiones para los generadores de R_4 :

$$\Lambda_1^3 = \mathcal{E}_1^3 + \mathcal{E}_2^4, \quad \Lambda_3^1 = \mathcal{E}_3^1 + \mathcal{E}_4^2, \quad \frac{1}{2}(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^2) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^1 + \mathcal{E}_2^2 - \mathcal{E}_3^3 - \mathcal{E}_4^4)$$

$$\Lambda_1^2 = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_3^4, \quad \Lambda_2^1 = \mathcal{E}_2^1 + \mathcal{E}_4^3, \quad \frac{1}{2}(\Lambda_1^1 - \Lambda_2^2) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^1 - \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^3 - \mathcal{E}_4^4)$$

Comparando estas con (7a,b) se deduce que la equivalencia entre los generadores de R_4 empleados en el Capítulo V y los operadores del spin y del isospin es

$$S_+ = \Lambda_1^3, \quad S_- = \Lambda_3^1, \quad S_0 = \frac{1}{2}(\Lambda_1^1 + \Lambda_2^2) \quad (9)$$

$$T_+ = \Lambda_1^2, \quad T_- = \Lambda_2^1, \quad T_0 = \frac{1}{2}(\Lambda_1^1 - \Lambda_2^2)$$

Las funciones de la R I $[h_1 h_2 h_3 h_4] \times \{h_1 h_2 h_3 h_4 0 0 \dots\}$ de $U_4 \times U_n$ con máximo peso en U_n , y máximo peso en la R I (S,T) del subgrupo $SU_2(S) \otimes SU_2(T) \subset U_4$, están dadas por la fórmula (25) del Capítulo V; solo que hay que hacer los cambios indicados en (8a,b) y además hay que multiplicar cada polinomio por $(\Delta_{1234}^{1234})^{h_4}$, reemplazar h_3 por $(h_3 - h_4)$, λ_1 por $(S + T)$, y λ_2 por $(S - T)$.

Aplicando sobre estos polinomios los operadores de descenso

$$S_- = (\mathcal{E}_3^1 + \mathcal{E}_4^2) \quad , \quad T_- = (\mathcal{E}_2^1 + \mathcal{E}_4^3) \quad (10)$$

de los grupos $SU_2(S)$ y $SU_2(T)$, se puede construir la base completa de U_4 clasificada por el spin y el isospin .

Las funciones construidas por el método explicado en el párrafo anterior, son todavía de máximo peso en el grupo U_n ; vamos ahora a explicar que hay que hacer para obtener a partir de estas funciones otras que correspondan a la simetría permutacional $\{f\}$ r indicada en (4). Aplicando los generadores C_s^S de U_n sobre P dado en (4) se encuentra que $C_s^S P = P$ $s = 1, 2, \dots, n$; es decir, que con respecto a U_n los estados (4) tienen un peso $\{1, 1, \dots, 1\}$. Los estados de Gelfand de la R I $[k_1 k_2 \dots k_n]$ de U_n , $k_1 + k_2 + \dots + k_n = n$ con peso $\{1, 1, \dots, 1\}$ se llaman estados "especiales de Gelfand" , y en la referencia 19 se demuestra que ellos constituyen una base para la R I $\{k_1 k_2 \dots k_n\}$ del grupo Simétrico $S(n)$. Estos estados especiales se pueden construir a partir del estado de máximo peso de la R I de U_n , o sea a partir del estado construido en el párrafo anterior, aplicando los operadores de descenso L_q^P del grupo unitario 5) .
Explícitamente

$$|\{h_1 h_2 h_3 h_4 \dots\} (r_2 \dots r_n)\rangle = N(h, r) L_1^1 L_2^{r_2} L_3^{r_3} \dots L_n^{r_n} \left| \begin{matrix} h_1 h_2 h_3 h_4 0 \dots \\ \text{máx. peso} \end{matrix} \right\rangle \quad (11)$$

y el conjunto de números $(1, r_2, \dots, r_n)$ posee todas las propiedades de un símbolo de Yamanouchi ¹⁹⁾ . Como en este caso el diagrama de Young de la R I de U_n tiene cuando más 4 renglones, las expresiones generales de L_q^P se simplifican un poco, obteniéndose:

para $q = 4$:

$$\begin{aligned} L_4^1 &= C_4^1 E_{12} E_{13} + C_2^1 C_4^2 E_{13} + C_3^1 C_4^3 E_{12} + C_2^1 C_3^2 C_4^3 \\ L_4^2 &= C_4^2 E_{23} + C_3^2 C_4^3 \\ L_4^3 &= C_4^3 \end{aligned} \quad (12)$$

para $q \geq 5$:

$$\begin{aligned} L_q^1 &= \left\{ C_q^1 E_{12} E_{13} E_{14} + C_2^1 C_q^2 E_{13} E_{14} + C_3^1 C_q^3 E_{12} E_{14} + C_4^1 C_q^4 E_{12} E_{13} \right. \\ &\quad \left. + C_2^1 C_3^2 C_q^3 E_{14} + C_2^1 C_4^2 C_q^4 E_{13} + C_3^1 C_4^3 C_q^4 E_{12} + C_2^1 C_3^2 C_4^3 C_q^4 \right\} \prod_{\mu=5}^{q-1} E_{1\mu} \\ L_q^2 &= \left\{ C_q^2 E_{23} E_{24} + C_3^2 C_q^3 E_{24} + C_4^2 C_q^4 E_{23} + C_3^2 C_4^3 C_q^4 \right\} \prod_{\mu=5}^{q-1} E_{2\mu} \\ L_q^3 &= \left\{ C_q^3 E_{34} + C_4^3 C_q^4 \right\} \prod_{\mu=5}^{q-1} E_{3\mu} \\ L_q^4 &= C_q^4 \prod_{\mu=5}^{q-1} E_{4\mu} \end{aligned} \quad (13)$$

donde por definición $E_{pq} = C_p^q - C_q^q + q - p$, y en el caso de $q = 5$ por convención $\prod_{\mu=5}^4 E_{5\mu} \equiv 1$.

A continuación se presenta una lista de funciones de spin-isospin, con máximo peso en $SU_2(S)$ y en $SU_2(T)$, para todas las simetrías permutacionales posibles en sistemas de 2, 3, y 4 partículas.

En esta lista se emplea la notación: $(\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n) \equiv \Delta_{\mu_1}^1 \Delta_{\mu_2}^2 \Delta_{\mu_3}^3 \dots \Delta_{\mu_n}^n$, y los índices de P corresponden respectivamente, a $SM_S, TM_T; \{f\}(1r_2 \dots r_n)$.

Todos los polinomios están normalizados.

$$n = 1$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \{1\}}(1) = (1)$$

$$n = 2$$

$$P_{11, 11; \{2\}}(11) = (11)$$

$$P_{00, 00; \{2\}}(11) = \frac{1}{2} [(14) + (41) + (23) + (32)]$$

$$P_{11,00; \{11\}}(12) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(12) - (21)]$$

$$P_{00,11; \{11\}}(12) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(13) - (31)]$$

$$n = 3$$

$$P_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \{3\}}(111) = (111)$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \{3\}}(111) = \frac{1}{3\sqrt{2}} [2(114) + 2(141) + 2(411) + (123) + (132) + (213) + (231) + (312) + (321)]$$

$$P_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \{21\}}(121) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(121) - (211)]$$

$$P_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \{21\}}(112) = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(112) - (211) - (121)]$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \{21\}}(121) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(131) - (311)]$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \{21\}}(112) = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(113) - (131) - (311)]$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \{21\}}(121) = \frac{1}{\sqrt{6}} [(123) - (213) + (132) - (312) + (141) - (411)]$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \{21\}}(112) = \frac{1}{3\sqrt{2}} [(123) + (213) - 2(231) + (312) + (132) - 2(321) + 2(114) - (141) - (411)]$$

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \{111\}}(123) = \frac{1}{\sqrt{6}} [(123) - (132) + (231) - (213) + (312) - (321)]$$

$$n = 4$$

$$P_{22,22; \{4\}}(1111) = (1111)$$

$$P_{11,11; \{4\}}(1111) = \frac{1}{4\sqrt{3}} [3(1114) + 3(1141) + 3(1411) + 3(4111) + (1123) + (1132) + (2113) + (3112) + (1213) + (1312) + (1231) + (1321) + (2311) + (2131) + (3121) + (3211)]$$

$$P_{00,00; \{4\}}(1111) = \frac{1}{6\sqrt{2}} [2(1414) + 2(1441) + 2(4114) + 2(4141) + 2(1144) + 2(4411) + 2(2323) + 2(2332) + 2(3223) + 2(3232) + 2(2233) + 2(3322) + \sum \text{Permutaciones } (1234)]$$

$$P_{22,11;\{31\}(1112)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [3(1112) - (1121) - (1211) - (2111)]$$

$$P_{22,11;\{31\}(1121)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(1121) - (2111) - (1211)]$$

$$P_{22,11;\{31\}(1211)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(1211) - (2111) - (1121)]$$

$$P_{11,22;\{31\}(1112)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [3(1113) - (1131) - (1311) - (3111)]$$

$$P_{11,22;\{31\}(1121)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(1131) - (3111) - (1311)]$$

$$P_{11,22;\{31\}(1211)} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2(1311) - (3111) - (1131)]$$

$$P_{11,00;\{31\}(1112)} = \frac{1}{6} [2(1142) + 2(1412) + 2(4112) - 2(2231) - 2(2321) - 2(3221) \\ - (1421) - (4121) - (1241) - (4211) - (2141) - (2411) + (1232) \\ + (1322) + (2132) + (3122) + (2312) + (3212)]$$

$$P_{11,00;\{31\}(1121)} = \frac{1}{12\sqrt{2}} [6(1124) + 5(1421) + 5(4121) + 2(1142) - 4(2411) \\ - 4(4211) - 3(2114) - 3(1214) - (1412) - (4112) - (1241) - (2141) \\ - 6(2213) - 5(2312) - 5(3212) - 2(2231) + 4(1322) + 4(3122) \\ + 3(1223) + 3(2123) + (2321) + (3221) + (2132) + (1232)]$$

$$P_{11,00;\{31\}(1211)} = \frac{1}{4\sqrt{6}} [3(1241) + 2(4211) - (4112) + 3(1214) - (4121) - 3(2114) \\ - 3(2141) + (1412) + (1421) - 2(2411) - 3(2132) + (3221) - 2(3122) \\ - 3(2123) + (3212) + 3(1223) + 3(1232) - (2312) - (2321) + 2(1322)]$$

$P_{00,11;\{31\}(1112)}$: intercambiar $2 \leftrightarrow 3$ en $P_{11,00;\{31\}(1112)}$.

$P_{00,11;\{31\}(1121)}$: intercambiar $2 \leftrightarrow 3$ en $P_{11,00;\{31\}(1121)}$.

$P_{00,11;\{31\}(1211)}$: intercambiar $2 \leftrightarrow 3$ en $P_{11,00;\{31\}(1211)}$.

$$P_{11,11;\{31\}(1112)} = \frac{1}{2\sqrt{6}} [3(1114) - (1411) + (2113) - (2311) + (3112) - (3211) \\ - (4111) + (1213) + (1312) - (1141) - (2131) - (3121) + (1123) \\ + (1132) - (1231) - (1321)]$$

$$P_{11,11;\{31\}}(1121) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[4(1141) - 2(1411) + (2131) - 2(2311) + (3121) \right. \\ \left. - 2(3211) - 2(4111) + (1231) + (1321) - (2113) \right. \\ \left. - (3112) - (1213) - (1312) + 2(1132) + 2(1123) \right]$$

$$P_{11,11;\{31\}}(1211) = \frac{1}{4} \left[2(1411) - 2(4111) + (1321) - (3121) + (1231) - (2131) \right. \\ \left. + (1312) - (3112) + (1213) - (2113) \right]$$

$$P_{22,00;\{22\}}(1122) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[2(2211) + 2(1122) - (2121) - (1212) - (1221) - (2112) \right]$$

$$P_{22,00;\{22\}}(1212) = \frac{1}{2} \left[(1212) + (2121) - (1221) - (2112) \right]$$

$$P_{00,22;\{22\}}(1122) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[2(1133) + 2(3311) - (3131) - (1313) - (1331) - (3113) \right]$$

$$P_{00,22;\{22\}}(1212) = \frac{1}{2} \left[(1313) + (3131) - (1331) - (3113) \right]$$

$$P_{11,11;\{22\}}(1122) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[2(1132) + 2(3211) + 2(2311) + 2(1123) - (3112) - (1231) \right. \\ \left. - (1312) - (2131) - (3121) - (1213) - (1321) - (2113) \right]$$

$$P_{11,11;\{22\}}(1212) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1312) + (3121) + (2131) + (1213) - (3112) \right. \\ \left. - (1321) - (1231) - (2113) \right]$$

$$P_{11,11;\{211\}}(1123) = \frac{1}{4} \left[2(1123) - 2(1132) + (2131) - (2113) + (3112) - (3121) \right. \\ \left. + (1231) - (1213) + (1312) - (1321) \right]$$

$$P_{11,11;\{211\}}(1213) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[3(1213) - 3(1312) + 3(3112) - 3(2113) + 2(2311) \right. \\ \left. - 2(3211) + (1321) - (1231) + (2131) - (3121) \right]$$

$$P_{11,11;\{211\}}(1231) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[(1231) - (1321) + (2311) - (2131) + (3121) - (3211) \right]$$

$$P_{11,00;\{211\}}(1123) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[2(2231) - 2(2213) + 2(1124) - 2(1142) + (1223) - (1232) \right. \\ \left. + (3212) - (3221) + (2123) - (2132) + (2312) - (2321) + (2141) \right. \\ \left. - (2114) + (4112) - (4121) + (1241) - (1214) + (1412) - (1421) \right]$$

$$P_{11,00;\{211\}}(1213) = \frac{1}{4\sqrt{6}} \left[3(1223) - 3(2123) + 3(2321) - 3(3221) + 3(1214) \right. \\ \left. - 3(1412) + 3(4112) - 3(2114) + 2(3122) - 2(1322) + 2(2411) - 2(4211) \right. \\ \left. + (2132) - (2312) + (1421) - (1241) + (3212) - (1232) + (2141) - (4121) \right]$$

$$P_{11,00;\{2111\}}(1231) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(1232) - (1322) + (2312) - (2132) + (3122) - (3212) \right. \\ \left. + (1241) - (1421) + (2411) - (2141) + (4121) - (4211) \right]$$

$$P_{00,11;\{2111\}}(1123) : \text{Intercambiar } 2 \leftrightarrow 3 \text{ en } P_{11,00;\{2111\}}(1123)$$

$$P_{00,11;\{2111\}}(1213) : \text{Intercambiar } 2 \leftrightarrow 3 \text{ en } P_{11,00;\{2111\}}(1213)$$

$$P_{00,11;\{2111\}}(1231) : \text{Intercambiar } 2 \leftrightarrow 3 \text{ en } P_{11,00;\{2111\}}(1231)$$

$$P_{00,00;\{1111\}}(1234) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \Delta_{1234}^{1234} = \sum \frac{1}{2\sqrt{6}} (-)^P \mathcal{P} \Delta_1^1 \Delta_2^2 \Delta_3^3 \Delta_4^4$$

R E F E R E N C I A S .

- 1) M. Moshinsky, *Journal of Mathematical Physics*, 4 (1963) 1128 .
- 2) G. Racah, en "Springer Tracts in Modern Physics" 37 (Springer Verlag, Berlín, 1966) .
- 3) E. P. Wigner, "Group Theory" (Academic Press, N. Y., 1959) .
- 4) I. M. Gelfand y M. L. Tsetlin, *Doklady Akademii Nauk U. R. S. S.*, 71 (1950) 825 .
- 5) J. G. Nagel y M. Moshinsky, *Journal of Mathematical Physics*, 6 (1965) 682 .
- 7) M. Moshinsky, *Nuclear Physics*, 31 (1962) 384 .
- 8) I. M. Gelfand y M. L. Tsetlin, *Doklady Akademii Nauk U. R. S. S.*, 71 (1950) 1017 .
- 9) D. E. Littlewood, "The Theory of Group Characters" , (Oxford University Press, Oxford, 1950) .
- 10) S. C. Pang y K. T. Hecht, *Journal of Mathematical Physics*, 8 (1967) 1233 .
- 11) V. Bargmann y M. Moshinsky, *Nuclear Physics*, 23 (1961) 177 .
- 12) M. Moshinsky y J. Nagel, *Physics Letters*, 5 (1963) 173 .
- 13) M. Moshinsky, "Group Theory and the Many Body Problem" en *Physics of Many particle Systems*, editado por E. Meeron, (Gordon and Breach, N. Y. , 1966) .
- 14) J. Flores, E. Chacón, P. A. Mello y M. de Llano, *Nuclear Physics*, 72 (1965) 352, 379 .
- 15) E. P. Wigner, *Physical Review*, 51 (1937) 106 .



- 16) J. Flores y R. Perez P., próximo a publicarse; R. Perez P., Tesis de Físico, U. N. A. M., 1967 (no publicada) .
- 17) M. Moshinsky, M. Berrondo y J. Pineda , en "Proceedings of the Conference on the structure of Light and Intermediate Nuclei; Dayton, Ohio, 1966 " , (University of Kansas, 1967) .
- 18) E. U. Condon y G. H. Shortley, "The Theory of Atomic Spectra" , (Cambridge University Press, 1967) .
- 19) M. Moshinsky, Journal of Mathematical Physics, 7 (1966) 691 .
- 20) P. Kramer y M. Moshinsky, Nuclear Physics, 82 (1966) 241 ; y "Group Theory of Harmonic Oscillators and Nuclear Structure" en Group Theory and Applications, editado por E. M. Loebel, (Academic Press, N. Y., 1968) .