



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMACIÓN DE ORGANIZACIONES
SOCIALES EN JUEGOS DE ACCIÓN
COLECTIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO EN

MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MARTINEZ CORTES VICTOR MANUEL



DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. Paloma Zapata Lillo



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	5
2. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS	9
3. UN JUEGO PARA ESTUDIAR LA POSIBILIDAD DE FORMACIÓN DE UNA ORGANIZACIÓN DENTRO DE UNA COMUNIDAD	24
4. DINÁMICAS DE APRENDIZAJE DE UNA POBLACIÓN SUMERGIDA EN UN CONFLICTO	39
5. SELECCIÓN DE EQUILIBRIOS EN JUEGOS DE FORMACIÓN DE GRUPO	63
6. CONCLUSIÓN	108

AGRADECIMIENTOS

Este sueño que se consolida con este trabajo comenzó hace algunos años cuando era pequeño y mi mamá me llevaba de la mano de repente me pregunto que quería ser de grande a lo cual respondí matemático entonces para llegar a este sueño necesito agradecer a cada una de las personas que sean cruzado por mi vida ya sea para compartir un segundo, un minuto, algunos años o toda mi vida. Por eso quiero hacer una mención honorifica a mis padres, a mi hermana y a toda mi familia que siempre han compartido conmigo y me han enseñado en valor de la fraternidad.

También quiero agradecerle a mis amigos de Sol. Raúl, Gerardo, Luis, Sebastián, Marcos, Adrián, Alejandro y a Genaro porque siempre estuvieron conmigo en el camino hasta ahora que llegue a la universidad; ahora que cada quien a tomado su camino les expreso mi gran cariño y gratitud.

Quiero agradecerle a los compañeros de mi mamá de la facultad que siempre han estado pendientes de mí y de mis estudios además de que siempre me ofrecieron una mano amiga.

Un agradecimiento especial a mis amigos de la universidad Laura, Angel, Alex, Angye, Martin, Roberto, Jessica, Rafa, Sergio, Pili, Mildret, Alberto, Rocío, Benjamin y muchos más que me acompañaron en estos años en los que vivimos materias que sufríamos pero que el impetu y el ingenio de algunos nunca nos dejo caer.

También una mención especial para los cuates del futbol ya que después de largas horas de estudio llegaba a entrenar y me recibían siempre con la hermandad que nuestro entrenador Juan Rodriguez nos infundada. Entre ellos se encuentra: Aldo (el Oso), sus hermanos Eric y Ruy, el Alex una vez mas, Pedro, Rafa, Ricardo, Alberto, Tona, Ramses, Adrián (Cebollitas), Daniel(El chelitas), Brett,

Armando, Pablo y muchos más los cuales luchabamos por respresentar con orgullo a la UNAM.

A mis amigos Viridiana, Ayerim, Xuna, Alan, Gaby, Rocío y a otros los cuales aunque los veo poco siempre han estado ahí para echar una platicadita.

A mis amigos del Kundalini a Alicia, Bertha, Lorena, Paola, Rocío, Iván, Silvia, Monica y a nuestro maestro Arjan Singh Salmeron por enseñarnos una disciplina para nuestro bienestar.

Y por último a mis sinodales en especial a mi tutora de tesis por tenerme paciencia y dedicarle un parte de su tiempo a este trabajo.

Por cierto si alguien se me olvida de todos modos lo único que les puedo decir es gracias y una mención especial para aquellos que compartieron momentos de su vida conmigo pero que ahora nos han dejado de este planeta porque aunque no esten presentes dejaron una huella en mí. Gracias DIOS por permitirme caminar en este hermoso mundo sabiendo que lo más importante es levantarse y tratar de hacer de cada día el mas maravilloso con la unica idea de compartir, disfrutar y vivir.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El primer aspecto de nuestro estudio consiste en la contraposición, que ocurre en muchos conflictos situados dentro de una comunidad o un grupo social, entre los intereses egoístas de las personas que actúan dentro de dicha comunidad (o grupo) y el interés de la comunidad en su conjunto, incluyendo el suyo propio. Al contrario de los supuestos que se establecen en la Teoría neoclásica, en los conflictos estudiados, las acciones que siguen los individuos buscando satisfacer sus intereses egoístas conducen a dañar el bien común. El segundo aspecto consiste en abordar la pregunta de cómo estos individuos, o al menos un subconjunto de ellos, pueden, sin abandonar sus objetivos egoístas, superar sus tendencias destructivas y lograr organizarse para alcanzar el bien común.

Este no es un problema inventado. En todos los rincones del mundo y en todo momento de la historia reciente es demasiado frecuente observar cómo la priorización de los intereses egoístas acaba con recursos naturales como el agua, los bosques, el petróleo, etc. Cómo también se contamina la atmósfera y los recursos acuíferos, cada uno de nosotros podemos aportar montones de estos ejemplos. Sin embargo, también es posible observar que por todos los rincones del mundo diversas comunidades y grupos sociales se organizan para impedir las acciones individualistas destructivas y exigir la protección de los recursos y el medio ambiente. ¿Qué es lo que incita a las personas egoístas

a participar voluntariamente en una organización que los obliga a asumir una actitud cooperativa?
¿Por qué suele suceder que no toda la comunidad o el grupo social forma parte de la organización sino sólo un núcleo en el que participan a veces los ancianos o las mujeres o los “más activos”?

Muchos autores han estudiado la problemática utilizando diversos aspectos de la teoría de juegos. Para modelar situaciones en las que las conductas de los individuos egoístas persiguiendo el propio interés causan un gran perjuicio al bien común se utiliza un juego muy simple que se conoce como el dilema del prisionero n-personal. Este juego fue planteado por primera vez por [Tucker] para dos jugadores y posteriormente fue generalizado por [Hardin]. La problemática de cómo un grupo social logra, aunque sea a través de un subconjunto de sus miembros, superar los efectos trágicos de dicho dilema ha dado lugar a numerosos artículos. Olson (1965), quizá el primero en poner de relieve el problema esencial en el surgimiento de estas organizaciones sociales, argumenta que las personas egoístas y racionales no deberían participar en formar una organización social pues esta tarea encierra en si misma un dilema del estilo de los del prisionero. Ya que una organización social surge para permitir disfrutar de un bien común. Pero tales bienes son públicos, nadie puede ser excluido de su disfrute. ¿Por qué la gente iba a emplear algún esfuerzo en participar en acciones colectivas y en organizaciones sociales? Sin embargo, la inacción total lleva a una situación en la que nadie podría disfrutar del bien común. ¿Qué permite que se realicen esas acciones colectivas y se formen esas organizaciones? Ha habido diferentes respuestas a este problema. Olson piensa que, para obtener un bien que es público, los individuos racionales y egoístas no actuarían voluntariamente en estas organizaciones que obligan a cooperar y tienen un costo y que si lo hacen es que hay algún tipo de obligatoriedad. Otros autores como Axelrod piensan que la clave de la superación del dilema del prisionero está en la repetición del juego por individuos racionales.

En esta tesis se considera que aunque el dilema de los bienes públicos es un dilema del prisionero que puede conducir a una tragedia social, la gente puede darse cuenta que actuando organizadamente en forma voluntaria puede evitar dicha tragedia. Entonces, ellos considerarían un nuevo dilema que

consiste en decidir si participar voluntariamente en una organización que obligue a la cooperación para que todos puedan disfrutar del bien común o no hacerlo tratando de disfrutar del bien común sin hacer el mínimo esfuerzo. En este nuevo juego, no sólo existe el equilibrio de Nash de que todos quieran parasitar del esfuerzo de los demás sino que aparecen equilibrios que significan formar organizaciones de diversos tamaños. No partimos de que los individuos se comportarán necesariamente de acuerdo a equilibrios de Nash sino que suponemos que el conflicto se repite y los individuos aprenden de su experiencia y de la de los demás. Sin embargo, estos individuos tienen muchas limitaciones de racionalidad, sólo pueden obtener y manipular pequeñas muestras de información y, además, con una pequeña probabilidad se desvían de las acciones que serían óptimas de acuerdo a dicha muestra, ya sea por error o por deseos de experimentación. Entonces, el proceso de aprendizaje se da en un contexto más parecido al de los juegos evolutivos que al de los juegos repetidos de Axelrod.

El modelo que tomamos para el juego de organización se debe a dos autores japoneses, Maruta y Okada [Artículos del 2001, 2005], en donde la población envuelta en este juego está formada por individuos heterogéneos lo que hace que personas distintas pueden tener distinta tendencia a cooperar. A este juego lo sujetamos a un proceso de aprendizaje que es un proceso de adaptación de Peyton Young [1993, 1998], es decir, un proceso de Markov perturbado, en donde los estados de dicho proceso son historias del comportamiento de los individuos en los conflictos de los últimos periodos. ¿Para qué utilizamos un proceso estocástico? La racionalidad limitada implica que los individuos son únicamente capaces de reunir una pequeña cantidad de información en una forma estocástica y responder a esta muestra para tratar de mejorar su pago. Las personas que se enfrentan en una realización del juego son escogidas aleatoriamente y los errores ocurren estocásticamente. Los equilibrios de este proceso (Equilibrios estocásticamente estables) representarán los estados que ocurrirán con más alta probabilidad y se pueden entender como los estados que expresan el fenómeno más esperable dentro de la población estudiada. Los equilibrios estocásticamente estables

resultantes para el juego de organización bajo el proceso de adaptación son convenciones, pues en cada periodo ocurre que se forma una organización del mismo tamaño. Dicho tamaño depende de la forma específica de las funciones de pago del juego. El cálculo de los equilibrios estocásticamente estables es complejo. Una propiedad de los juegos de adaptación que facilita un poco dicho cálculo es que se pueden convertir en problemas de arborescencia a través de asociar al proceso una gráfica dirigida y pesos a cada flecha. En el trabajo presentamos varios ejemplos sencillos.

El trabajo está dividido en cinco capítulos. En el primero se encuentran las definiciones y algunos ejemplos de la teoría de juegos que son la base para la tesis.

En el segundo se encuentra el planteamiento del problema, la primera parte de su desarrollo, las definiciones introducidas para este tipo de juegos además de explicar su surgimiento.

En el tercero tenemos el desarrollo de una teoría que se utiliza para reflejar las situaciones de los individuos, que son los juegos adaptativos; en este capítulo se encuentra un poco de su desarrollo y se menciona el por qué de que el autor desarrollará esta técnica, además se explican algunas limitantes de estos juegos y se introducen otros elementos de la teoría de procesos estocásticos los cuales nos permiten asegurar los resultados sobre los equilibrios.

En el cuarto nos involucramos de lleno en el problema y aunque después se reduce para 2 tipos de individuos nos damos cuenta del valor de este tipo de juegos y como estos nos ayudan a dar interpretaciones de algunos comportamientos sociales. Además, se observan las características esenciales que se conservan del dilema del prisionero y nos ilustra, con el cálculo de las resistencias como nos podemos mover entre los equilibrios una vez que ya los tenemos identificados, que es lo más interesante, porque nos permitiría en los problemas reales crear los incentivos necesarios para las poblaciones. En el último capítulo nos encontramos con las conclusiones que nos resaltan la relevancia del trabajo y nos dan puntos de referencia claves sobre las ventajas y desventajas de la caracterización del juego para 2 tipos de individuos.

Capítulo 2

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS

Definiciones Básicas

Sea $J = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de jugadores; $n \in \mathbb{N}$

Para cada jugador $j \in J$ sea $S_j = \{1, 2, \dots, m_j\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador j , $j = 1, \dots, n$ con $m_j \geq 2$. Por notación se escribirá cada estrategia del conjunto S_i con números enteros.

Un vector(perfil) de estrategias puras será de la forma $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ donde $s_i \in S_i$; es decir, s_i es una estrategia del jugador i .

El conjunto de vectores de estrategias puras $S = \prod_{i \in J} S_i$ es entonces el producto cartesiano de los conjuntos de estrategias puras de cada jugador. A S se le denomina el espacio de estrategias puras del juego.

Para cada vector de estrategias puras $s \in S$ y cada jugador $i \in J$ sea $\varphi_i(s) \in \mathfrak{R}$ el pago asociado al

jugador i . La colección finita de números reales $\Phi_i(s)$ define la función de pago del jugador i

$$\varphi_i: S \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall i \in J.$$

La función de pago del juego esta dada por $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde a cada vector de estrategias "s", se le asocia el vector de pagos $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s))$ con esto tenemos la suficiente información para definir un juego en su forma normal.

Un juego en forma normal en estrategias puras es una triada $G = (J, S, \Phi)$ donde J es el conjunto de jugadores, S el conjunto de las estrategias y Φ la función de pago.

Ejemplos:

Un dilema de prisionero de 2 jugadores:

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	(-10,-10)	(0,-20)
No cooperar	(-20,0)	(-2,-2)

Ejemplo de un dilema de prisionero n-personal el cual se toma pensando en la Ciudad de México respecto a los embotellamientos del parque vehicular. Para este denotaremos como N al conjunto de habitantes de la Ciudad de México que tienen automóvil. Cada uno de ellos tiene que decidir si se transporta casi siempre en su automóvil o trata de limitar su uso y entonces utiliza el transporte público. Entonces $S_j = \{\text{automóvil, transporte público}\}$. Si una gran cantidad de personas utilizan intensivamente el auto, el tránsito se vuelve insostenible y la contaminación de la atmósfera se convierte en dañina para la salud. Denotemos a r como este tope del número de auto dependientes, donde r es un número menor que n y sea σ un perfil de estrategias y k_σ el número de los que usan intensivamente el auto de acuerdo a σ ; entonces la función de pago queda de la siguiente manera:

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} (50 \text{ si } k_\sigma < r) & \text{y } \sigma^j = \text{transporte público,} \\ (-100 \text{ si } k_\sigma \geq r) & \text{y } \sigma^j = \text{transporte público} \\ (100 \text{ si } k_\sigma \leq r) & \text{y } \sigma^j = \text{auto} \\ (-50 \text{ si } k_\sigma > r) & \text{y } \sigma^j = \text{auto.} \end{cases}$$

El único equilibrio de Nash del juego es (auto, auto, ..., auto). En el equilibrio cada uno de los jugadores gana -50 mientras que en (transporte público, ..., transporte público) se gana 50.

Definición 2.0.1. *Una estrategia mixta para el jugador “i” es una distribución de probabilidad sobre el conjunto S_i , de estrategias puras. Además como el conjunto S_i es finito para todos los jugadores podemos representar cualquier estrategia mixta x_i para el jugador i como un vector en \mathfrak{R}^{m_i} donde la r -ésima coordenada pertenece a \mathfrak{R} y es la probabilidad de que le asigne al jugador i su r -ésima estrategia pura.*

El conjunto de estrategias puras a los cuales es asignada una probabilidad positiva para alguna estrategia mixta x_i se denomina el *soporte* de x_i y se denotará por:

$$C(x_i) = \{ h \in S_i: x_{ih} > 0 \}$$

Dado que las probabilidades son no negativas (para $x_{ih} \cdot h = 1, \dots, m_i$) y suman 1, el conjunto de vectores de probabilidad se definirá como:

$$\Delta_i = \{ x_i \in \mathfrak{R}^{m_i+} = \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1 \}$$

a Δ_i se le denomina el simplejo unitario que es el conjunto de estrategias mixtas.

El conjunto Δ_i tiene dimensión m_i-1 ya que cualquier entrada puede escribirse como 1 menos la suma de las otras.

Los vértices o esquinas de Δ_i son los vectores en el espacio \mathfrak{R}^{m_i} , su notación será e_i^k , que representa la estrategia mixta del jugador i que asigna probabilidad 1 a la estrategia k y a las restantes cero (es decir corresponde a la estrategia pura k del jugador i).

El conjunto Δ_i se puede ver como el conjunto de combinaciones convexas de sus vértices; es decir cada $x_i \in \Delta_i$ se puede escribir como :

$$x_i = \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} * e_i^h$$

Si un conjunto $X_i \subseteq \Delta_i$ es combinación convexa de algún subconjunto propio de estrategias puras, entonces a X_i se le denomina la cara de Δ_i .

Se define el *interior relativo* de Δ_i como:

$$\mathbf{int}(\Delta_i) = \{x_i \in \Delta_i : x_{ih} > 0 \forall h\}$$

Las estrategias que están en el interior relativo son llamadas *estrategias interiores o completamente mixtas*; y así, si $x_i \in \mathbf{int}(\Delta_i) \Rightarrow C(x_i) = S_i$

El conjunto de estrategias no interiores en Δ_i es llamado la *frontera* de Δ_i denotado por :

$$\mathbf{bd}(\Delta_i) = \{x_i \in \Delta_i : x_i \notin \mathbf{int}(\Delta_i)\}$$

en este caso si $x_i \in \mathbf{bd}(\Delta_i) \Rightarrow C(x_i) \subseteq S_i$

Un vector de *estrategias mixtas* es un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde para cada i , la entrada x_i es una estrategia mixta para el jugador "i".

El conjunto de vectores de estrategias mixtas es el **espacio de estrategias mixtas** que es denotado por:

$$\Theta = \prod_{i \in J} \Delta_i$$

Como cada Δ_i tiene dimensión $m_i - 1$ entonces Θ es un conjunto en \mathbb{R}^m ($m = \sum_i m_i$) y tiene dimensión $m - n$.

Para cada jugador escribiremos $(x | x_i)$ para un vector $x \in \Theta$ donde se especifica que el jugador i está jugando con la estrategia x_i , mientras que los otros jugadores están jugando las estrategias de acuerdo al vector $x \in \Theta$.

FUNCIONES DE PAGO PARA ESTRATEGIAS MIXTAS

Sabemos que cuando los jugadores tienen una estrategia mixta se tiene una probabilidad x_{ih} de que el jugador i juegue con la estrategia pura h . Cada jugador tiene una distribución de probabilidad que es independiente de las distribuciones de los otros jugadores. La probabilidad de que un vector de estrategias puras $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ sea jugado, dado que cada jugador tiene una estrategia mixta y que todas las estrategias forman el vector de estrategias $x = (x_1, \dots, x_n)$ es :

$$x(s) = \prod_{i=1}^n x_{i,s_i}$$

donde cada x_{i,s_i} es la probabilidad que asigna el jugador i a su estrategia s_i , dado que se está jugando $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Entonces el valor esperado de pago para el jugador i asociado al vector de estrategias mixtas $(x_1, \dots, x_n) \in \Theta$ es :

$$u_i(x) = \sum_{s \in S} x(s) \cdot \varphi_i(s)$$

el número $u_i(x)$ será el pago esperado para $x \in \Theta$

Tenemos que:

$$u_i(x) = \sum_{k=1}^{m_j} u_i(x|e_j^k) \cdot x_{jk} \dots (1.1)$$

ya que jugar una estrategia pura k es equivalente a jugar la estrategia mixta e_j^k .

En otras palabras, el pago $u_i(x)$ se puede calcular como la suma ponderada de los pagos que el jugador i obtiene cuando el jugador j juega con la estrategia e_j^k . Las ponderaciones son las probabilidades que el jugador j asigna a la estrategia pura k es su estrategia mixta x_j .

La ecuación (1.1) asigna un número a todos los vectores \mathfrak{R}^m , no solo a los elementos Θ entonces se puede extender una función $u: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ que es la función de pago para el jugador i .

Por lo que la función de pago para las estrategias mixtas será una función $u: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ definida por:

$$u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$$

con lo que teníamos antes el juego con estrategias puras dado por $G = (J, S, \Phi)$ y ahora podemos considerar el juego con estrategias mixtas dado por $G = (J, \Theta, u)$.

Definición 2.0.2. *EQUILIBRIO DE NASH EN ESTRATEGIAS PURAS*

$$\forall j \in N \quad \varphi^j(\sigma^{*1}, \dots, \sigma^{*j}, \dots, \sigma^{*n}) \geq \varphi^j(\sigma^{*1}, \dots, \sigma^j, \dots, \sigma^{*n}) \quad \forall \sigma^j \in S^j$$

Se dice que el EQUILIBRIO DE NASH ES ESTRICTO CUANDO LA DESIGUALDAD ES ESTRICTA. Notemos que el equilibrio de Nash en estrategias puras no siempre existe; para mostrar esto consideremos el siguiente ejemplo:

	AGUILA	SOL
AGUILA	(-1,1)	(1,-1)
SOL	(1, -1)	(-1,1)

En el cual no existe equilibrio de Nash ya que para cualquier estrategia que se elija siempre se encuentra otra que le da un mejor pago.

Definición 2.0.3. *MEJORES RÉPLICAS* Una mejor réplica para el jugador i en la estrategia $y \in \Theta$ es una estrategia pura $s_i \in S_i$, tal que ninguna otra estrategia pura disponible para el jugador i le da un pago mayor al dado por $y \in \Theta$.

Esto define una correspondencia de mejores estrategias puras para el jugador i

$$\beta_i: \Theta \rightarrow P(S_i)$$

que manda cada vector de estrategias mixtas $y \in \Theta$ al conjunto:

$$\beta_i(y) = \{ h \in S_i: u_i(y | e_i^h) \geq u_i(y | e_i^k) \quad \forall k \in S_i \}$$

de mejores réplicas puras para el jugador i , dado y .

Como cada estrategia mixta es una combinación convexa de estrategias puras y $u_i(y | x_i)$ es lineal en x_i se tiene que cualquier $y \in \Theta$, $x_i \in \Delta_i$, y $h \in \beta_i(y)$:

$$u_i(y | x_i) = \sum_{k=1}^{m_i} u_i(y | e_i^k) x_{ik} \leq \sum_{k=1}^{m_i} u_i(y | e_i^h) x_{ik} = u_i(y | e_i^h) \sum_{k=1}^{m_i} x_{ik} = u_i(y | e_i^h)$$

Entonces $\beta_i(y) = \{ h \in S_i : u_i(y | e_i^h) \geq u_i(y | x_i) \forall x_i \in \Delta_i \}$

Dada una estrategia $y \in \Theta$, una mejor réplica para el jugador i es una estrategia mixta $x_i \in \Delta_i$ tal que no hay otra estrategia mixta que le dé un mejor pago dado que todos juegan con la estrategia y_j .

De donde, por linealidad, cualquier combinación convexa de mejores réplicas puras es una mejor réplica mixta.

Definamos la correspondencia de mejores réplicas en estrategias mixtas como sigue:

$$\underline{\beta}_i: \Theta \rightarrow P(\Delta_i)$$

que manda cada vector de estrategias mixtas en un subconjunto de Δ_i ; de hecho en alguna cara de Δ_i ; que dada la estrategia y , es generada por estrategias puras que son mejores réplicas.

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_i(y) &= \{x_i \in \Delta_i : u_i(y|x_i) \geq u_i(y|z_i) \forall z_i \in \Delta_i\} \\ &= \{x_i \in \Delta_i : x_{ih} = 0, \forall h \notin \beta_i(y)\} = \{x_i \in \Delta_i : C(x_i) \subseteq \beta_i(y)\} \end{aligned}$$

entonces como $\underline{\beta}_i(y)$ es una cara; $\underline{\beta}_i(y) \subseteq \Delta_i$

La correspondencia combinada de mejores réplicas puras es $\beta : \Theta \rightarrow P(S)$, y se define como el producto cartesiano de las mejores réplicas de todos los jugadores es decir:

$$\beta(y) = \prod_{i \in J} \beta_i(y) \subseteq S$$

y la correspondencia $\underline{\beta} : \Theta \rightarrow P(\Theta)$ se define como:

$$\underline{\beta}(y) = \prod_{i \in J} \underline{\beta}_i(y) \subseteq \Theta$$

EQUILIBRIO DE NASH

Definición 2.0.4. Sea C un subconjunto de \mathbb{R}^m no vacío. Sea $f : C \rightarrow C$ una correspondencia, se dice que $x \in C$ es un punto fijo de f si $x \in f(x)$.

Teorema 2.0.5. Kakutani Sea C un subconjunto de \mathbb{R}^m no vacío, convexo y compacto. Sea $f : C \rightarrow C$ una correspondencia cuya gráfica es cerrada; $\forall x \in C$, $f(x) \neq \emptyset$ y es convexo. Entonces f tiene un punto fijo.

La demostración de este teorema se encuentra en [1]

Definición. $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash si $x \in \underline{\beta}(x)$; es decir, x es punto fijo de $\underline{\beta}$.

Se sigue que si $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash, entonces toda estrategia pura que se encuentre en el soporte de cada componente x_i de x es una mejor réplica para x .

$$s_i \in C(x_i) \Rightarrow s_i \in \beta_i(x).$$

Se denotará al conjunto de equilibrios de Nash como Θ^{NE} .

Teorema 2.0.6. $\Theta^{NE} \neq \emptyset$

Para demostrar este resultado es suficiente demostrar que la correspondencia de mejores réplicas $\underline{\beta}$ tiene al menos un punto fijo, es decir que la correspondencia $\underline{\beta}$ cumple con las hipótesis del teorema de Kakutani.

Tenemos que $\underline{\beta}(x) \neq \emptyset$ ya que dada una estrategia x , un jugador siempre tiene una mejor réplica a esta estrategia pues el conjunto de estrategias es finito. El producto cartesiano de las mejores réplicas de cada jugador es $f(x)$.

Demostración.

La imagen $\underline{\beta}$ es convexa; es decir, dada $\alpha \in [0, 1]$ y $x_1, x_2 \in \text{Im}(\underline{\beta}) \Rightarrow \bar{w} = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \text{Im}(\underline{\beta})$.

Tenemos que $u_i(x_1) \geq u_i(y)$ y $u_i(x_2) \geq u_i(y)$. $\forall y \in \Theta \forall i \in J$.

Entonces $u_i(\bar{\omega}) = u_i(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha u_i(x_1) + (1-\alpha)u_i(x_2) \geq \alpha u_i(y) + (1-\alpha)u_i(y) = u_i(y)$

$\forall y \in \Theta \forall i \in J$. Por lo tanto $\text{Im}(\underline{\beta})$ es convexa.

Por último demostraremos que la correspondencia $\underline{\beta}: \theta \rightarrow \mathbf{P}(\theta)$ tiene una gráfica cerrada.

Demostración

Sea $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1, \infty}$ una sucesión convergente en la gráfica de correspondencia $\beta: \theta \rightarrow \mathbf{P}(\theta)$.

Si $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1, \infty}$ converge a (x, y) basta demostrar que $y \in \underline{\beta}(x)$

Como (X_n, Y_n) pertenece a la gráfica de $\underline{\beta}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$u_i(x_n | y_n^i) \geq u_i(x_n | z_i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_i(x_n | y_n^i) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} u_i(x_n | z_i)$$

y como u_i es continua esto implica que

$$u_i(x_n | y_n^i) \geq u_i(x_n | z_i) \forall z_i \in \Delta_i \forall i \in J \text{ entonces } (x, y) \text{ pertenece a la gráfica de } \underline{\beta}.$$

Por lo tanto la gráfica $\underline{\beta}$ es cerrada.

Por lo tanto $\underline{\beta}$ tiene un punto fijo lo cual implica que $\Theta^{NE} \neq \phi$.

Definición 2.0.7. *Un juego extensivo con conjunto de jugadores N consta de :*

- Un conjunto N de jugadores
- Un árbol con raíz (Γ, U) tal que para cada vértice v , $\text{Alt}(v)$ o tiene más de un elemento o es vacío.
- Una partición de los vértices no finales es una colección de subconjuntos $S^0, \{S^j\}_{j \in N}$, de tal manera que existe una biyección entre dicha colección de subconjuntos y el conjunto $N \cup \{0\}$, el conjunto S^j es el conjunto de vértices del jugador j en N y S^0 es el conjunto de jugadas de azar.
- Para cada vértice v de S^0 , una distribución de probabilidad positiva definida en $\text{Alt}(v)$ y que denotamos como $P(v)$.
- Para $j \neq 0$, una partición de S^j es una colección de subconjuntos $\{S_k^j\}$ tales que:
 - para S_k^j , existe I_k^j y para todo v en S_k^j una biyección $i : \text{Alt}(v) \rightarrow I_k^j$
 - si v y z están en S_k^j , entonces v no es mayor que z y z no es mayor que v . Dichos subconjuntos S_k^j se llaman los conjuntos de información del jugador j .
- Para cada $j \in N$, una función de pago π_j definida del conjunto de partidas en \mathbb{R} . El conjunto de partidas de Γ , se denota como Υ .

Decimos que un juego extensivo es finito, si \mathbf{V} y \mathbf{N} son finitos.

Decimos que un juego es de **información perfecta**, si para cada jugador $j \in N$, cada S_k^j consta de un sólo elemento.

Decimos que un juego extensivo es sin **azar**, si $S_0 = \emptyset$ Suponemos que S_0 es finito.

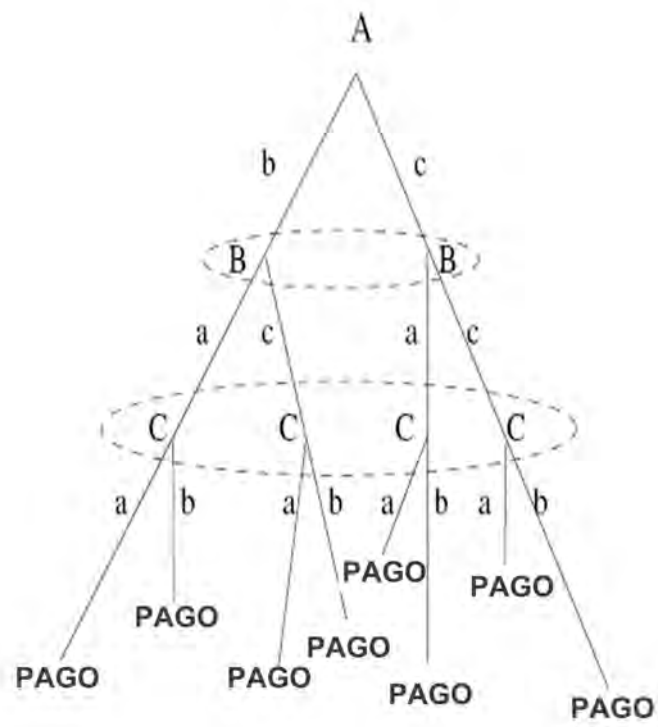


Figura 2.1: Una representación de un juego

Definición 2.0.8. Dado un juego extensivo finito arbitrario Γ , con el conjunto de jugadores N , la función de pago π y los conjuntos de estrategias puras Σ_j , el juego $(N, \{\Sigma_j\}, \varphi)$ es la forma normal de Γ , si $\varphi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida como $\varphi(\sigma) = \sum_{F \in T} P_\sigma(F) \pi(F)$ donde F es un vértice y donde T representa las trayectorias.

Definición 2.0.9. Un perfil de estrategias σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego extensivo finito Γ , si es un equilibrio de Nash en estrategias puras de la forma normal de Γ .

Definición 2.0.10. Decimos que el juego Γ se descompone o se corta en el vértice no final X , si para toda $Y \geq X$, con $Y \in S_k^j$ y $Z \in S_k^j$ entonces $Z \geq X$

Definición 2.0.11. Si Γ se descompone en X , el subjuego de Γ con raíz X es el juego extensivo Γ_X tal que:

- tiene como árbol a (V_X, A_X) y como raíz a X donde $V_X = \{Y \in V | Y \geq X\}$,
 $A_X = \{\{Y, Z\} \in A | Y \geq X \text{ y } Z \geq X\}$
- $S_X^0 = \{Y \in S^0 | Y \geq X\}$, si $Y \in S_X^0$, para toda $Z \in \text{Alt}(Y)$, $P_X(Z|Y) = P(Z|Y)$
- para toda $j \in N$, $S_X^j = \{Y \in S^j | Y \geq X\}$. Si $S_X^j \neq \emptyset$, $\forall S_k^j \in \{S_i^j\}$,
 $S_k^j = S_{X_i}^j$ o $S_k^j \cap V_X = \emptyset$
- Para cada τ , partida de Γ que contiene a X , consideramos $\tau_X = (\tau - W(X)) \cup \{X\}$.

Para cada j :

- Si τ_X es finito y z es el vértice final correspondiente, entonces $\pi_{X_j}(z) = \pi_j(z)$.
- Si τ_X es infinita $\pi_{X_j}(\tau_X)$ es $\pi_j(\tau)$ menos el pago acumulado hasta X .

Definición 2.0.12. Si Γ se descompone en X y $d \in \mathbb{R}^N$ es un vector de pago, $\Gamma|X(d)$, el juego podado en X con vector de pago d , en dicho vértice, es el juego extensivo tal que:

- tiene como árbol a $(V|X, A|X)$ y como raíz a U , donde $V|X = \{Y \in V | Y \not\geq X\}$ y
 $A|X = \{\{Y, Z\} \in A | Y \text{ y } Z \text{ están en } V|X\}$

- $S|X^0 = \{Y \in S^0 | Y \not\asymp X\}$, si $Y \in S|X^0$; para toda $Z \in \text{Alt}(Y)$, $P|X(Z|Y) = P(Z|Y)$.
- para toda $j \in N$, $S|X^j = \{Y \in S^j | Y \not\asymp X\}$. Si $S|X^j \neq \emptyset$, para todo conjunto S_k^j en $\{S_i^j\}$,
 $S_k^j = S|X_i^j \circ S_k^j \cap V|X = \emptyset$.
- $\Upsilon|X = (\Upsilon - \Upsilon_X) \cup W(X)$, donde $\Upsilon_X = \{\tau_X | \tau \in \Upsilon \text{ y } X \in \tau\}$

Definición 2.0.13. *Se dice que σ^* es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ (sabiendo que es un equilibrio de Nash de un juego extensivo), si $\sigma^*|X$ es un equilibrio de Nash en estrategias puras (ep) del subjuego Γ_X para todo vértice X en el que Γ se puede cortar.*

Algoritmo de Zermelo Generalizado (Inducción hacia atrás)

Sea Γ un juego extensivo finito, con árbol (V, A) y raíz U , $N \neq \emptyset$.

Primer paso: Llamamos Γ^0 a Γ , V_0 a V , A_0 a A y T_0 a T .

Tenemos tres casos posibles:

- Γ^0 no se puede descomponer y su forma normal no tiene equilibrios de Nash (ep); entonces el algoritmo termina con un fracaso.
- Γ^0 no se puede descomponer, su forma normal tiene equilibrios de Nash (ep), el algoritmo termina con σ^* , uno de los equilibrios de Nash (ep) de Γ .
- Γ^0 se puede descomponer en al menos un vértice, buscamos un vértice X_1 tal que el subjuego $\Gamma_{X_1}^0$ no se pueda descomponer (siempre existe debido a que Γ es finito. En este momento tenemos 2 posibles alternativas
 - La forma normal de $\Gamma_{X_1}^0$, no tiene equilibrios de Nash (ep); el algoritmo termina con un fracaso
 - La forma normal de $\Gamma_{X_1}^0$, tiene equilibrios de Nash (ep); se elige uno de ellos llamémosle $\sigma_{X_1}^*$ y definamos Γ^1 como $\Gamma^0|X_1(\phi_{X_1}(\sigma_{X_1}^*))$.

Hipótesis de Inducción: Consideremos que se han dado k pasos y se han construido los juegos

$\Gamma^0, \Gamma^1, \dots, \Gamma^{k-1}, \Gamma^k$ (Γ^i con árbol (V_i, A_i) y raíz U), vértices X_1, X_2, \dots, X_k y perfiles

$\sigma_{X_1}^*, \sigma_{X_2}^*, \dots, \sigma_{X_k}^*$ para los juegos $\Gamma_{X_1}^0, \Gamma_{X_2}^1, \dots, \Gamma_{X_k}^{k-1}$ tales que:

- Para $i = 0, 1, \dots, k-1$, Γ^i se puede cortar en X_{i+1} .
- Para $i = 0, 1, \dots, k-1$, $\Gamma^i = \Gamma^{i-1} | X_i \left(\begin{array}{c} \phi_{X_i}(\sigma_{X_i}^*) \end{array} \right)$
- $\sigma_{X_i}^*$ es uno de los equilibrios de Nash (ep) del subjuego $\Gamma_{X_i}^{i-1}$.

Paso general: Tenemos dos casos:

- Γ^k no se puede cortar: para esto hay 2 casos posibles:
 - Γ^k no tiene equilibrio de Nash (ep); entonces el algoritmo termina con un fracaso
 - Γ^k tiene al menos un equilibrio de Nash. Elegimos uno de ellos y lo denotamos como σ_k^* .

Componemos $\sigma_{X_1}^*, \sigma_{X_2}^*, \dots, \sigma_{X_k}^*$ y σ_k^* . El algoritmo termina con el perfil que resulta de esta composición.
- Γ^k se puede cortar en algún vértice. Consideremos X_{k+1} , uno de estos vértices, de tal manera que el subjuego $\Gamma_{X_{k+1}}^k$ no se puede cortar entonces tenemos 2 subcasos:
 - $\Gamma_{X_{k+1}}^k$ no tiene equilibrio de Nash; el algoritmo termina con un fracaso.
 - $\Gamma_{X_{k+1}}^k$ tiene al menos un equilibrio de Nash. Elegimos uno y lo denotamos como $\sigma_{X_{k+1}}^*$.

Definimos

$$\Gamma^{k+1} = \Gamma^k | X_{k+1} \left(\begin{array}{c} \phi_{X_{k+1}}^*(\sigma_{X_{k+1}}^*) \end{array} \right)$$

y aplicamos el paso general a Γ^{k+1}

Teorema 2.0.14. *Todo juego extensivo finito de información perfecta tiene un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias puras.*

Demostración. En los juegos de información perfecta el algoritmo siempre tiene éxito por lo que siempre se construye un equilibrio. †.

Teorema 2.0.15. Sea Γ un juego finito que se puede descomponer en X , $\hat{\sigma}$ un equilibrio de Nash (ep) de Γ_X y $\tilde{\sigma}$ un equilibrio de Nash (ep) de $\Gamma|_{X_{(\varphi_X(\hat{\sigma}))}}$. Entonces $(\hat{\sigma}, \tilde{\sigma})$ es un equilibrio de Nash (ep) de Γ .

Demostración:

Si $j \in N$ y $\sigma^j \in \sum_j$ tenemos que:

$$\varphi_j((\hat{\sigma}, \tilde{\sigma})|\sigma^j) = P_{(\tilde{\sigma}|\sigma_X^j)}(X)\varphi_{jX}(\hat{\sigma}|\sigma_X^j) + \sum_{F \in T|X} P_{(\tilde{\sigma}|\sigma^j)}(F)\pi_j(F)$$

Como $\hat{\sigma}$ es equilibrio de Γ_X , $\varphi_{jX}(\hat{\sigma}|\sigma_X^j) \leq \varphi_{jX}(\hat{\sigma})$

Es decir, $\varphi_j(\hat{\sigma}, \tilde{\sigma}|\sigma^j) \leq P_{(\tilde{\sigma}|\sigma_X^j)}(X)\varphi_{jX}(\hat{\sigma}) + \sum_{F \in T|X} P_{(\tilde{\sigma}|\sigma^j|X)}(F)\pi_j(F) = \varphi_j|_{X_{\varphi_X(\hat{\sigma})}}(\tilde{\sigma}|\sigma^j)$.

Pero, $\tilde{\sigma}$ es un equilibrio de Nash (ep) de $\Gamma|_{X_{(\varphi_X(\hat{\sigma}))}}$, por lo que $\varphi_j|_{X_{\varphi_X(\hat{\sigma})}}(\tilde{\sigma}|\sigma^j) \leq \varphi_j|_{X_{\varphi_X(\hat{\sigma})}}(\tilde{\sigma})$.

Además tenemos que:

$$\varphi_j|_{X_{\varphi_X(\hat{\sigma})}}(\tilde{\sigma}) = \varphi_j((\hat{\sigma}, \tilde{\sigma})).$$

Uniando lo anterior tenemos que :

$\varphi_j((\hat{\sigma}, \tilde{\sigma})|\sigma^j) \leq \varphi_j((\hat{\sigma}, \tilde{\sigma}))$, para todo jugador j y para toda $\sigma^j \in \sum_j$. Es decir $(\hat{\sigma}, \tilde{\sigma})$ es un equilibrio de Nash (ep) de Γ †

Notemos que los equilibrios perfectos en subjuegos son equilibrios de Nash de la forma normal del juego extensivo y esto se da como corolario de la aplicación inductiva del teorema anterior.

Capítulo 3

UN JUEGO PARA ESTUDIAR LA POSIBILIDAD DE FORMACIÓN DE UNA ORGANIZACIÓN DENTRO DE UNA COMUNIDAD

Considérese un dilema de prisionero n-personal como sigue con $N = 1, 2, \dots, n$ el conjunto de jugadores. Cada jugador $i \in N$ tiene dos estrategias $\{C, D\}$. El pago del jugador i está dado por la función:

$$u_i(a_i, h), a_i = \{C, D\}$$

$h = 0, 1, \dots, n - 1$ donde a_i es la selección de jugada del jugador i y h es el número de jugadores distintos de i que seleccionaron cooperar. Notemos que el juego que definimos es heterogéneo ya que las u_i 's son distintas.

Nosotros haremos las siguientes suposiciones

-
- 1) $u_i(D, h) > u_i(C, h)$ para cada $h = 0, 1, \dots, n-1$
 - 2) $u_i(C, n-1) > u_i(D, 0)$
 - 3) $u_i(C, h)$ y $u_i(D, h)$ son crecientes respecto a h .

Estas suposiciones son estándares en la literatura de un dilema de prisionero n -personal (Schelling 1978) excepto cuando los jugadores son heterogéneos en el sentido de que tienen diferentes funciones de pago. La heterogeneidad de los jugadores es crítica en el análisis de este trabajo.

La propiedad 1 significa que cada jugador tiene un mejor pago no cooperativo que cooperando hagan lo que hagan los otros jugadores.

Esto implica que cada jugador tiene un incentivo a parasitar sobre la cooperación de los otros. De esto el perfil (D, \dots, D) es el único equilibrio de Nash estricto en el juego.

La propiedad 2 dice que si todos los jugadores cooperan tienen un mejor pago que el único Equilibrio de Nash (E.N.). De aquí que el equilibrio no es Pareto eficiente.

La propiedad 3 significa que cada jugador recibe un mejor pago cuando más jugadores de los otros cooperan.

El dilema de prisionero describe una situación anárquica en donde cada jugador es libre de elegir su acción. En tal situación una consecuencia natural del juego es el E.N. en el que nadie coopera. Una pregunta central referente al dilema de prisionero es como los propios intereses de las personas los hacen voluntariamente cooperar aún cuando existe la tentación para no cooperar.

Para escapar de un estado indeseable de no cooperación, algunos mecanismos convenientes para prevenir el comportamiento oportuno son necesarios. La literatura ha considerado diversos mecanismos

como puede ser convenciones, normas, grupos informales, organizaciones, leyes pero en este caso nos avocaremos a la creación voluntaria de un grupo en el cual los participantes negocian la cooperación.

Se construye un juego extensivo de 2 etapas.

ETAPA DE DECISIÓN DE PARTICIPAR

Cada jugador $i \in N$ decide independiente y simultáneamente entre **participar** o **no participar** en un grupo que negociará en una acción colectiva. La participación tiene algún costo, esto es ya sea por llamadas, mails y transporte. El costo de la participación es denotada por una pequeña cantidad $\epsilon_i > 0$. Sea S el conjunto de todos los participantes y sea $s = |S|$ donde $|S|$ es el número de elementos en el conjunto S .

Si $s=0$ ó $s=1$ entonces no existe grupo.

ETAPA DE NEGOCIACIÓN DE ORGANIZACIÓN

Todos los participantes negocian su cooperación de acuerdo con una regla de unanimidad. Conociendo el resultado de la etapa de decisión, cada uno de los miembros de S en forma independiente acepta o rechaza cooperar. El acuerdo de cooperación es alcanzado si y solo si todos los miembros de S eligen cooperar. Cuando el acuerdo de cooperación es alcanzado, éste es respetado y todos los participantes son obligados (atados) a cooperar. El funcionamiento del grupo es costoso y cada participante i sostiene el costo del grupo $C(s)$ (incluyendo el costo de participación ϵ_i) donde s es el número de todos los participantes. Todos los jugadores que no pertenecen a S son libres de no cooperar.

Cuando un acuerdo no es alcanzado, todos los individuos involucrados en el juego tanto los participantes como los no participantes juegan el dilema de prisionero original.

Cuando todos los participantes están de acuerdo con cooperar, se asumirá que el grupo se forma y está dotado con algún mecanismo que hace cumplir el acuerdo. Este mismo mecanismo cumple varias funciones como el monitoreo de los miembros de S para vigilar si cumplen con la cooperación y el castigo a los miembros no cooperativos. Obviamente tener un mecanismo de vigilancia y castigo le cuesta al grupo y puede surgir un problema por el costo destinado al mecanismo. En lo que sigue mantendremos nuestro modelo lo más simple posible. Es decir se asumirá simplemente que el costo del grupo para cada miembro está dado exógenamente y la fórmula para el costo de grupo es una función $C_i(s)$. Se notará que la forma precisa de $C_i(s)$ es irrelevante para el resultado del trabajo suponiendo se cumple la hipótesis 3.2.

En el proceso de formación de organización, los individuos deciden cuando ellos participan o no en la organización. Previamente observando y examinando el resultado de la etapa de negociación de grupo. Para considerar la decisión de participar de los individuos, se caracterizará un equilibrio del subjuego perfecto de 2 etapas del grupo de formación por inducción hacia atrás, primero analizaremos la etapa de negociación de organización; cuando un grupo de s miembros están de acuerdo con cooperar, cada miembro recibe una utilidad:

$$g_i(C, s-1) \equiv u_i(C, s-1) - c(s) \dots \dots \dots (3.2)$$

Nosotros llamaremos $g_i(C, s-1)$ el pago de organización para el jugador i donde s es el número de miembros de la organización. Respecto al pago del grupo nosotros asumiremos la siguiente hipótesis que mencionaremos después de la figura.

A continuación se encuentra la figura del juego extensivo a la cual se le aplicará el algoritmo de Zermelo para encontrar un equilibrio perfecto en subjuegos.

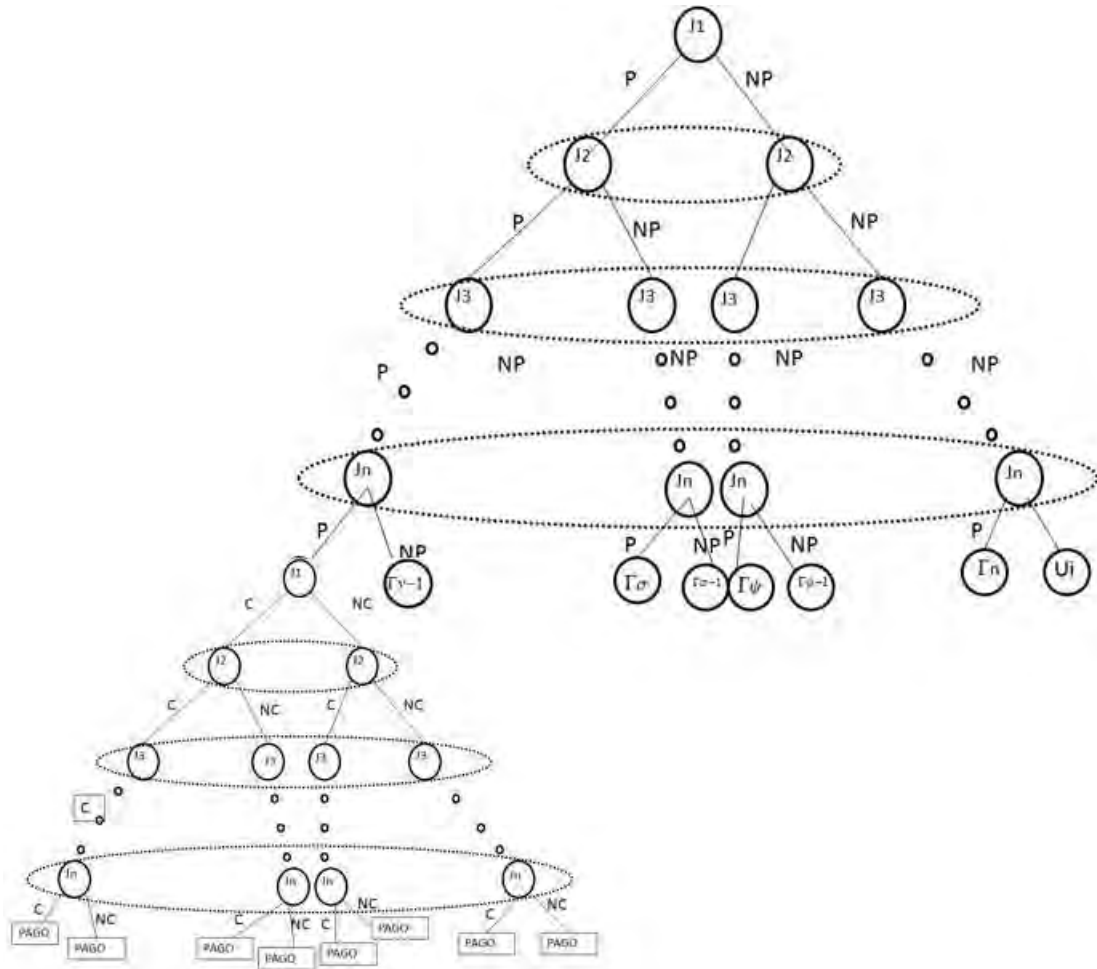


Figura 3.1: Juego extensivo

Hipótesis 3.2 Para cada $i \in N$, el pago de la organización $g_i(C, s-1)$ del jugador i es monótona creciente en s , y existe un único entero s_i ($2 \leq s_i \leq n$) tal que:

$$g_i(C, s_i-2) < u_i(D,0) < g_i(C, s_i-1) \dots \dots \dots (3.3)$$

Esta hipótesis significa que si nosotros reemplazamos el pago cooperativo original $u_i(C, h)$ con el pago del grupo $g_i(C, h)$ las propiedades de la hipótesis 3.1 del dilema de prisionero n-personal son todavía aún ciertas.

Por ejemplo si $g_i(C, s-1) \leq u_i(D, 0)$ para todo $s \leq n$ entonces los jugadores no tienen incentivos para participar en una organización.

El entero positivo s_i en (3.3) muestra el mínimo tamaño de la organización en el que el jugador i puede tener un mejor pago que en el equilibrio no cooperativo del D.P. Nosotros podemos llamar a s_i como el umbral de cooperación de i . El jugador i puede ser beneficiado cuando al menos (s_i-1) jugadores cooperan. En este sentido jugadores con un umbral pequeño tienen una mayor motivación para cooperar. El umbral de cooperación juega un importante rol en nuestro análisis.

Definición 3.0.16. *Un subconjunto $S \subset N$ es llamado un grupo exitoso si $|S| \geq s_i$ para cada $i \in S$.*

El tamaño de un grupo exitoso es mayor o igual a todos los miembros del umbral de cooperación. Por definición cada miembro de un grupo exitoso puede recibir un mejor pago que el pago no cooperativo del dilema de prisionero. El nombre de un grupo exitoso es explicado por la siguiente proposición en la cual se caracteriza el equilibrio de Nash estricto de la etapa de negociación de organización. En un equilibrio de Nash estricto toda mejor respuesta de los jugadores respecto a todas las demás acciones de los jugadores es única. Es aquí en donde daremos el primer paso de la inducción hacia atrás para esto pondremos lo siguiente que representará el juego podado y una vez que se tenga el análisis entonces se completará el equilibrio perfecto en el subjuego.

Proposición 3.0.17. *En la etapa de negociación de organización un acuerdo de cooperación es alcanzado en un equilibrio de Nash estricto si y solo si el grupo de participantes es exitoso.*

Demostración.

Supongase que todos los participantes están de acuerdo con cooperar. Entonces cada participante del grupo tiene un pago $g_i(C, s-1)$. Si algún miembro rechaza cooperar, la negociación se rompe por una regla de unanimidad y entonces se recibe el pago no cooperativo $u_i(D, 0)$. Por lo que el acuerdo de cooperación en el grupo S es alcanzado en el equilibrio de Nash estricto si y solo si para todo $i \in S$ $g_i(C, |S| - 1) > u_i(D, 0)$ de donde por la hipótesis 3.2 esto es equivalente a que un grupo sea exitoso.

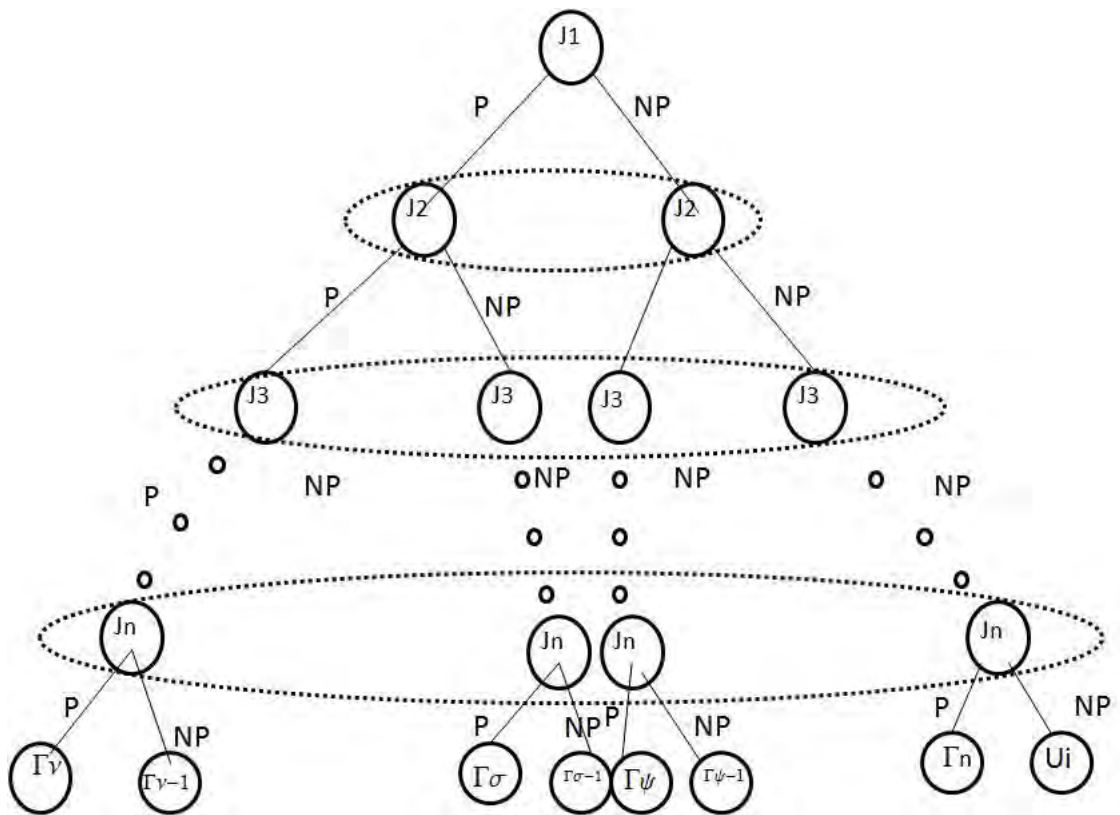


Figura 3.2: Juego extensivo

Dado el equilibrio de Nash estricto en la etapa de negociación de organización, toda la segunda etapa del juego puede ser reducida al siguiente juego de una etapa. En este juego cada jugador $i \in N$ elige simultáneamente e independiente una u otra estrategia $\sigma_i = 1$ (participar) o $\sigma_i = 0$ (no participar).

Sea $\Sigma_i = \{0, 1\}$ el conjunto de estrategias del jugador i y sea $S = \prod_{i \in N} \Sigma_i$ el conjunto de estrategias de los N jugadores. En el siguiente análisis, no se considerarán estrategias mixtas.

Para un perfil de estrategias $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ el conjunto $S(\sigma)$ de participantes esta dado por:

$$S(\sigma) = \{i \in N \mid s_i = 1\}$$

El pago $f_i(s)$ del jugador i para el perfil de estrategias $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ está definido de la siguiente forma:

Cuando el grupo $S(\sigma)$ es exitoso:

$$f_i(\sigma) = \begin{cases} g_i(C, |S(\sigma)| - 1) & \text{si } \sigma_i = \text{participa,} \\ u_i(D, |S(\sigma)|) & \text{si } \sigma_i = \text{no participa.} \end{cases}$$

Cuando el grupo $S(\sigma)$ no es exitoso:

$$f_i(\sigma) = \begin{cases} u_i(D, 0) - \epsilon_i & \text{si } \sigma_i = \text{participa donde } \epsilon_i > 0, \\ u_i(D, 0) & \text{si } \sigma_i = \text{no participa.} \end{cases}$$

Formalmente el proceso de formación de organización de un grupo Γ se reduce a un juego n -personal, el cual es el juego podado.

$\Gamma = (N, \{\Sigma_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$ en forma estratégica. Entonces ahora podemos llamarle el juego de formación de grupo.

El juego de formación de grupo Γ difiere del juego del dilema de prisionero n -personal; en caminos críticos. En Γ la no participación no domina a la participación, en este caso se da la contrario. Por

esta razón un grupo no vacío de participantes puede surgir en equilibrio, es decir ningún jugador selecciona participar en la acción del grupo. Los jugadores que eligen participar tienen garantía en los pagos de los equilibrios del dilema de prisionero. En este sentido, los que colaboran en el grupo no son explotados por los parasitadores (es decir los que pertenecen a la organización, sus ingresos son lo bastante gratificantes como para que no se vean mermados respecto al ingreso de los parasitadores) en el juego de formación de organización.

LOS EQUILIBRIOS DE NASH EN EL JUEGO PODADO, EL JUEGO DE FORMAR UNA ORGANIZACIÓN.

En esta sección se caracterizan los equilibrios de Nash en el juego de formar un grupo. Para la acción del perfil $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma$. Sea σ_{-i} la acción que se obtiene de σ al borrar σ_i . El perfil de acción $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ se denota algunas veces por $\sigma = (\sigma_{-i}, \sigma_i)$. Sea $S(\sigma)$ el conjunto de los participantes en σ .

Definición 3.0.18. Para un perfil $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma$ la estrategia σ'_i es llamada una mejor respuesta del jugador i al perfil σ si:

$$f_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) = \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} f_i(\sigma_{-i}, \sigma_i)$$

Recordemos que en el capítulo 1 se dieron las definiciones de Equilibrio de Nash en el caso general ahora en este momento las enunciaremos para la gráfica de mejor respuesta. Un perfil de acción $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ es un Equilibrio de Nash (estricto) de σ_i si para todo σ_i es una mejor respuesta (única) para σ .

Definición 3.0.19. La gráfica de mejor respuesta V de Γ es una relación binaria en el conjunto de perfiles Σ tal que para cada $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, $(\sigma, \sigma') \in V$ si y solo si $\sigma \neq \sigma'$ y existe exactamente un jugador i que satisface (i) $\sigma_{-i} = \sigma'_{-i}$ y (ii) σ'_i es una mejor respuesta de σ a i . Cuando $(\sigma, \sigma') \in V$ se escribe $\sigma \rightarrow \sigma'$ y a esto le llamamos la arista de σ a σ'

Definición 3.0.20. Para un grupo exitoso S , un miembro i de S es llamado crítico si $S - i$ no es exitoso y se dice que un miembro no es crítico en el otro caso.

En un grupo exitoso, los miembros críticos no tienen un incentivo para desviarse del grupo ya que el grupo que queda no es exitoso y así la desviación del grupo les da el pago no cooperativo del dilema del prisionero. Por el contrario cada miembro no crítico tiene un incentivo a desviarse del grupo porque haciendo esto puede parasitar del grupo que queda (exitoso). En un grupo que no es exitoso cada participante tiene un incentivo para desviarse del grupo para salvar el costo de la participación. Un no participante tiene un incentivo para unirse a un grupo que no es exitoso si su participación hace al grupo exitoso. Por estos incentivos individuales se puede caracterizar al equilibrio de Nash estricto del Juego de Formación de Grupo (Γ).

LA GRÁFICA DE MEJOR RESPUESTA

Sea G un juego n - personal en su forma normal con un espacio de estrategias finito. Se define la gráfica de mejor respuesta de G cómo sigue:

Cada vértice es una n -ada de estrategias $s \in \prod S_i$ y para cada 2- vértices s y s' existe una arista directa $s \rightarrow s'$ sí y solo sí $s \neq s'$ y existe exactamente un agente " i " tal que S'_i es una mejor respuesta de S_{-i} y $S'_{-i} = S_{-i}$

Es decir $T = (V, A)$

$$V = \{s : s \in S = \prod_{i=1}^n S_i\}$$

$$A = \{a \in V \times V : a = (s, s') \leftrightarrow s \neq s' \exists \text{ exactamente un agente } i \text{ tal que } S'_i \text{ es una mejor réplica de } S_{-i} \text{ y } S'_{-i} = S_{-i}\}$$

JUEGOS ACÍCLICOS

Un juego G es acíclico si su gráfica de mejor respuesta no contiene ciclos dirigidos. Es débilmente acíclico si para cada vértice inicial s existe alguna arista dirigida a un vértice s^* de donde no existen aristas que salgan de él. (un pozo, vértice hundido).

Todo nodo que sea un pozo ("sink") de una gráfica de mejores réplicas es un equilibrio de Nash estricto en estrategias puras. Así que un juego es débilmente acíclico si y solo si para cada n -ada de estrategias puras existe una secuencia finita de mejores réplicas para un agente que en un cierto tiempo termina en un equilibrio de Nash estricto en estrategias puras.

Proposición 3.0.21. *Una arista de la gráfica V de mejor respuesta en el juego de formación de grupo Γ debe ser de uno de los siguientes tipos:*

(1) *Cuando $S(\sigma)$ es un grupo exitoso, $\sigma = (\sigma_{-i}, 1) \rightarrow (\sigma_{-i}, 0)$ para todo miembro i que no es crítico para $S(\sigma)$.*

(2) *Cuando $S(\sigma)$ no es un grupo exitoso, $\sigma = (\sigma_{-i}, 1) \rightarrow (\sigma_{-i}, 0)$ para todo miembro i de S , y $\sigma = (\sigma_{-i}, 0) \rightarrow (\sigma_{-i}, 1)$ para todo no miembro i tal que $S(\sigma) \cup i$ es un grupo exitoso.*

Demostración

(1) Supongamos que $S(\sigma)$ es un grupo exitoso y el miembro i no es crítico. Entonces el grupo $S(\sigma)$ - i queda exitoso, de lo que tendríamos que:

$f_i(\sigma_i, 1) = g_i(C, |S(\sigma)|-1) < u_i(D, |S(\sigma)|-1) \leq f_i(\sigma_{-i}, 0)$ de donde $\sigma_i = 0$ es una mejor respuesta de σ para todos los miembros i no críticos de $S(\sigma)$.

(2) Supongamos que $S(\sigma)$ no es un grupo exitoso. Entonces para todo $i \in S$,

$f_i(\sigma_i, 1) = u_i(D, 0) - \epsilon_i < u_i(D, 0) \leq f_i(\sigma_{-i}, 0)$, donde $f_i(\sigma_{-i}, 0)$ es igual a alguno de los siguientes pagos $u_i(D, |S(\sigma)|-1)$ o $u_i(D, 0)$, dependiendo de si el grupo que queda exceptuando al jugador i es exitoso o no.

Por lo que vemos que pasa cuando para algún no miembro i tal que $S(\sigma) \cup i$ es un grupo exitoso el

pago que recibiría sería:

$$f_i(\sigma_i, 0) = u_i(D, 0) < g_i(C, |S(\sigma)|) = f_i(\sigma_{-i}, 1) \text{ que era lo que queríamos probar.}$$

De lo anterior podemos ver que no existen otras aristas en la gráfica de mejor respuesta V dadas por el teorema.

Esta proposición nos da la estructura de la gráfica de mejor respuesta del juego de grupo de formación, en el cual en un grupo exitoso cada jugador que no es crítico tiene un incentivo para desviarse del grupo porque no haciendo nada este puede parasitar del grupo. En cambio en un grupo que no es exitoso cada jugador tiene un incentivo para desviarse del grupo para salvar el costo de participación. Así también nos damos cuenta que si un jugador que esta fuera del grupo y al unirse el grupo se hace exitoso entonces éste tiene un incentivo para ser parte del grupo.

Teorema 3.0.22. *En el juego de formación de grupo (Γ) (el juego podado) los únicos equilibrios de Nash estrictos son de una de las siguientes formas: $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ en el conjunto $S(\sigma)$ de participantes*

1) $\sigma = (0, \dots, 0)$ es decir $S(\sigma) = \phi$

2) $S(\sigma)$ es un grupo exitoso si cada miembro de este es crítico. Donde $S(\sigma)$ es el conjunto de los que deciden participar de acuerdo a σ .

Demostración.

Para $\sigma = (0, \dots, 0)$ el cada pago individual es $u_i(D, 0)$, si un jugador unilateralmente participa en un grupo, el recibe un pago $u_i(D, 0) - \epsilon_i$ de donde ningún grupo con un solo miembro es exitoso. Por lo que el perfil $\sigma = (0, \dots, 0)$ es un equilibrio de Nash estricto.

Supongamos que $S(\sigma)$ es un grupo exitoso en el cual cualquier miembro de este es crítico, entonces mostraremos que cada individuo recibe un peor pago si se desvía unilateralmente de σ .

Si algún participante i se desvía del grupo $S(\sigma)$, entonces el grupo que nos queda no es exitoso por hipótesis y entonces éste recibirá el pago $u_i(D, 0)$.

Además como $S(\sigma)$ es exitoso, $u_i(D, 0)$ es más pequeño que $f_i(\sigma) = u_i(C, |S(\sigma)| - 1)$.

En S cada no participante i recibe el pago $f_i(\sigma) = u_i(D, |S(\sigma)| - 1)$.

Si el jugador “ i ” participa en el grupo $S(\sigma)$ su pago sería $f_i(\sigma_{-i}, 1) = u_i(C, |S(\sigma)|)$ o $u_i(D, 0) - \epsilon_i$ dependiendo de que si el grupo agrandado $S(\sigma) \cup i$ es exitoso. En ningún caso el pago i por no participar podría ser mejor que $f_i(\sigma)$.

Por lo que nos queda por demostrar que no existen otros equilibrios de Nash estrictos en el Juego de formación de grupo (JFG).

Supongamos que $S(\sigma)$ es un grupo exitoso donde algún miembro i no es crítico entonces el grupo $S(\sigma) - i$ que nos queda es exitoso, entonces nosotros tenemos que $f_i(\sigma_{-i}, 1) = g_i(C, |S(\sigma) - 1) < u_i(D, |S(\sigma) - 1) = f_i(\sigma_{-i}, 0)$ de donde $\sigma_i = 0$ es una mejor respuesta a σ para un miembro no crítico i de $S(\sigma)$. Finalmente supongamos que $S(\sigma)$ no es un grupo exitoso, entonces para todos los participantes $i \in S$ $f_i(\sigma_{-i}, 1) = u_i(D, 0) - \epsilon_i < u_i(D, 0) \leq f_i(\sigma_{-i}, 0)$ donde es igual a $u_i(D, |S(\sigma) - 1)$ ó $u_i(D, 0)$ dependiendo si el grupo que nos queda exceptuando al jugador i es exitoso o no por lo que no existen otros equilibrios de Nash estrictos.

La proposición anterior puede ser explicada de manera intuitiva de acuerdo a una definición alternativa de un equilibrio de Nash en el Juego de Formación de Grupo (JFG). Un grupo de participantes en un Equilibrio de Nash satisface dos proposiciones de estabilidad.

ESTABILIDAD INTERNA: Ningún miembro quiere salirse del grupo.

ESTABILIDAD EXTERNA: Ningún miembro afuera del grupo quiere afiliarse al grupo.

Es claro que el perfil $\sigma = (0, \dots, 0)$ es un Equilibrio Nash porque ninguno tiene una voluntad para cooperar unilateralmente. Más aún este es un Equilibrio de Nash estricto cuando el costo de participación es positivo. Cuando el grupo no es exitoso, la estabilidad interna es violada porque todos los participantes quieren salirse del grupo para salvar el costo de participación. Cuando el grupo es exitoso, la estabilidad externa siempre se tiene porque todos los no participantes tienen incentivos para parasitar. Si existe algún miembro no crítico, entonces él tiene un incentivo para desviarse ya que el grupo que queda es exitoso. De esto la estabilidad interna implica que cada participante es crítico.

Nosotros podemos derivar otra caracterización del Equilibrio de Nash en el JFG. La cual está dada respecto al umbral de cooperación. Para $s \subset N$ y $m = 2, \dots, n$. Nosotros definimos el $F_s(m)$ por el número de todos los miembros en S cuyo umbral de cooperación está dado por m .

Esto es $F_s(m) = |\{i \in S | s_i = m\}|$. F_s representa la distribución del umbral de cooperación de los miembros de S . Esta definición implica que:

Lema 3.0.23. *Para cada $S \subset N$ $F_s(2) + \dots + F_s(|S|) \leq |S|$*

Un grupo S es exitoso si y solo si $F_s(2) + \dots + F_s(|S|) = |S|$.

El teorema 3.0.12 nos muestra dos condiciones para que un grupo no vacío de participantes emerja en un equilibrio de Nash en el JFG. 1) El grupo es exitoso. 2) Cada miembro es crítico.

La última condición tiene una simple formulación en términos del umbral de cooperación como sigue:

Teorema 3.0.24. *Un subconjunto no vacío S de N , S el conjunto de participantes se encuentran en un equilibrio de Nash estricto en el juego de formación de grupo Γ si y solo si*

$$F_s(2) + \dots + F_s(|S|) = |S| \text{ y } F_s(|S|) \geq 2$$

Demostración.

Del teorema 3.0.12 y lema 3.0.13 es suficiente mostrar que cada miembro del grupo exitoso S es crítico sí y solo si $F_s(|S|) \geq 2$.

Supongamos que $F_s(|S|) \geq 2$ Para cada $i \in S$ el grupo $S - i$ no es exitoso porque $F_{s-i}(|S|) \geq 1$. De esto cada miembro i de S es crítico. Observemos los casos cuando $F_s(|S|) = 1$ y $F_s(|S|) = 0$. En el caso $F_s(|S|) = 1$ entonces el único miembro i con $s_i = |S|$ no es crítico porque $S - i$ es un grupo exitoso. Si $F_s(|S|) = 0$ todos los miembros s de S tienen un umbral s_j de cooperación con $s_j \leq |S| - 1$. De donde no existen miembros críticos.

Proposición 3.0.25. *El juego Γ es acíclico.*

Demostración:

Sea $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ para algún perfil en Γ y sea $S(\sigma)$ el conjunto de los participantes en σ . Entonces

los siguientes casos son posibles:

Caso 1 cuando $S(\sigma)$ es un grupo exitoso:

De la proposición 3.0.11 tenemos que si hay una arista posible entre $\sigma \rightarrow \sigma'$, entonces debe ser de la forma $\sigma' = (\sigma_{-i}, 0)$ para algún $i \in S$ tal que $S(\sigma)$ sea exitoso. Esto significa que ninguna trayectoria de mejor respuesta puede empezar en σ y regresar a σ por lo que no hay ciclos que incluyan σ .

Caso 2 $S(\sigma)$ no es un grupo exitoso

Tenemos de la proposición 3.0.11 que si hay una arista posible entre $\sigma \rightarrow \sigma'$, entonces debe ser de uno de los siguientes estilos (i) $\sigma' = (\sigma_{-i}, 0)$ para alguna $i \in S$, y (ii) $\sigma' = (\sigma_{-i}, 1)$ para alguna $i \notin S$ tal que $S \cup i$ sea un grupo exitoso. Observemos que de la prueba del Caso 1 un subcaso es (ii) que sucede cuando todos los vertices σ'' son una mejor respuesta a la trayectoria que sale de σ' y está asociada a grupos exitoso $S(\sigma'')$. Con lo que tenemos que no existen ciclos que incluyan σ en el subcaso (ii). Entonces ahora estamos interesados en probar que sucede en el caso (i). Supongamos que estamos en este caso entonces consideremos una arista de $\sigma \rightarrow \sigma' = (\sigma_{-i}, 0)$ para $i \in S$. Si (σ') es un grupo exitoso, entonces repetimos lo mismo que en el caso (ii). Por lo que es suficiente considerar la trayectoria de mejores respuestas $\sigma = \sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^m$ tal que $\forall k = 1, \dots, m S(\sigma^k) = S(\sigma^{k-1}) - \{j\}$ para alguna $j \in S$ y $S(\sigma^k)$ no es un grupo exitoso. Con esto nos damos cuenta que la trayectoria nunca regresa a σ . Por lo que no existe un ciclo que incluya σ' en el subcaso (i) así como en los otros.

Capítulo 4

DINÁMICAS DE APRENDIZAJE

DE UNA POBLACIÓN

SUMERGIDA EN UN CONFLICTO

El análisis de estos juegos con población heterogénea nos da una muestra clara de que hay múltiples equilibrios estrictos en el juego de formación de grupo. Específicamente existen tres tipos de equilibrios. El primer tipo de equilibrios consta de uno sólo que se llama el **DESASTRE GLOBAL** que es donde todos los individuos eligen no cooperar y entonces cada quien busca su bienestar sacrificando todo lo que le rodea. Este estado nos da como resultado un equilibrio de Nash estricto. El segundo tipo de equilibrio en juegos con umbral heterogéneo es llamado: **LA COOPERACIÓN PARCIAL** que es donde una porción de la población coopera y los otros no; dependiendo del número de individuos y de las funciones de pago puede haber uno, varios o ninguno los cuales también son equilibrios de Nash estrictos. El tercer tipo de equilibrio y el último es **LA COOPERACIÓN TOTAL** consta de un solo equilibrio en el cual toda la población selecciona cooperar que también es un equilibrio estricto.

Por lo que la pregunta que surge es ¿cuál de estos equilibrios tiene mas probabilidad de suceder?.

Para atacar está se utilizará la teoría de selección de equilibrios estocásticos desarrollada por YOUNG en 1993. Además de un método de selección de equilibrios la teoría de Young puede considerarse una fundamentación de que en una dinámica de aprendizaje que se presenta entre personas reales que tienen muchas limitaciones de racionalidad e información, la gente actúa en diversos conflictos de acuerdo a los equilibrios de Nash.

La parte de la teoría se presentará a continuación y después se demostrará que es perfectamente aplicable a este tipo de juego.

Haciendo referencia a Young [2] escribiremos cual fue su motivación para desarrollar la dinámica de aprendizaje. Uno se puede asombrar de cual es el porque de que los jugadores no sean suficientemente inteligentes para darse cuenta de que en ciertos casos caen en ciclos. Tal vez si se analizaran los datos de un modo más sofisticado entonces se podría evitar que se quedaran encerrados en esos ciclos. Nosotros no perseguimos ese camino, aunque es realmente algo que puede ser trabajado. Dejenme recordar, sin embargo la situación que tenemos en este. El cual es un juego recurrente jugado cambiando el reparto de personajes los cuales tienen información limitada, una modesta capacidad de razonamiento y un conocimiento limitado por lo cual algunas veces realizan acciones que son inexplicables o incongruentes.

Así los jugadores son bastante incapaces de realizar pronósticos sofisticados; sin embargo ellos son capaces de sentir en el trabajo colectivo la manera de encontrar respecto a sus intereses soluciones factibles para todos. Efectivamente este es el caso cuando los jugadores no son tan racionales y no están tan bien informados.

Cuando acceden a la información, cada jugador sabe lo que se ha realizado en jugadas anteriores, lo cual se obtiene de amigos, socios o vecinos y así, en otras palabras, el acceso a la información es parte de la situación del agente y no de una búsqueda óptima.

El error que se llega a cometer por cada jugador esta relacionado con la idiosincracia de cada uno de los individuos.

Asumamos que las personas tienen similares tamaños de memoria (el mismo tamaño) aunque claro no poseen la misma información. El punto más importante de pensar en procesos de adaptación no es argumentar cual equilibrio es el mejor sino mostrar como un equilibrio emerge o se disipa cuando los individuos se adaptan lo mejor que pueden a su situación y los cambios pueden ser tan complejos a tal grado de cambiar los recursos.

Algo que nos gusta es que estos modelos podrían servir para los incentivos del gobierno y los contratos económicos, esto mismo ayudará para ver convenciones o patrones de comportamiento moral aceptados por la sociedad.

La cuestión de la teoría es determinar como estas predicciones relativas han nacido de la evidencia empírica. Observando las evidencias el objetivo en los juegos que se juegan por personajes cambiantes en los cuales las jugadas precedentes tienen un rol muy importante para la formación de los resultados en los cuales se nota la importancia de la información.

PROCESOS DE ADAPTACIÓN SIN ERRORES

Sea $G (J, S, \Psi)$ Donde J son los jugadores, S las estrategias y Ψ la función de pago. Sea N una población finita de individuos que tiene una partición C de n clases no vacías C_1, C_2, \dots, C_n . Cada miembro de C_i es candidato a jugar como el jugador i en el juego. Supongamos que para todo i, j en $C_i, \varphi^i = \varphi^j$. Se denota por $t = 1, 2, \dots$ los períodos sucesivos en el tiempo.

El juego G es jugado una vez cada período. En el período t , un individuo i en C_i es escogido al azar con $i = 1, 2, \dots, n$. y es asignado para jugar como el jugador i en el juego. Será conveniente referirnos al papel en el juego como jugador “ i ” solamente aunque la identidad del individuo cambie de un período a otro.

El jugador “ i ” escoge una estrategia pura $S_i(t)$ del conjunto de estrategias puras de S_i de acuerdo a una regla que se definirá después $S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t))$ se le llama la jugada al tiempo t .

Las historias de las jugadas al tiempo t son una secuencia $h(t) = (S(1), S(2), \dots, S(t))$. Los jugadores deciden como escoger sus estrategias de la siguiente manera. Sean $k, m \in Z$ fijos tal que $1 \leq k \leq m$. En el período $t + 1$ ($t \geq m$), cada jugador toma una muestra de k jugadas escogidas sin reemplazo de las m jugadas más recientes es decir de una secuencia (historia) $h(t) = (S(t - m + 1), S(t - m + 2), \dots, S(t))$, $h(t)$ es una secuencia (historia) de tamaño m .

A m se le llama el tamaño de la memoria y a k el tamaño de la muestra. Sea H el conjunto de las secuencias de tamaño m ; $m \in Z$ fijo. Las muestras se toman de forma independiente para los distintos jugadores. También se supone que cada subconjunto de k antecedentes tiene una probabilidad positiva de ser parte de la información del agente "i" para toda i .

La fracción k/m mide que tan completa es la información con que cuentan los agentes con relación a los antecedentes que sobreviven en el tiempo.

Supongamos que las primeras m -jugadas son escogidas al azar, entonces podemos estudiar el proceso de selección al principio del período $t = m + 1$. Para alguna secuencia inicial de m jugadas.

$$h(m) = (S(1), S(2), \dots, S(m))$$

Definición 4.0.26. *SUCESOR: Un sucesor de la secuencia h en H es cualquier secuencia de jugadas $h' \in H$, obtenido de la eliminación del elemento que está más a la izquierda de h y añadiendo en la derecha el nuevo elemento.*

El PROCESO DE ADAPTACIÓN consiste en moverse de la secuencia en curso h a un sucesor h' en cada período de acuerdo con la siguiente regla de transición. Para cada $s \in S$ sea $P_i(S | h)$ la probabilidad de que el agente i escoja s . Supondremos que para toda i, s y h $P_i(S | h)$ no depende de t .

Diremos que la función $P_i(\cdot)$ es una distribución de mejores réplicas puras en el sentido que

$P_i (S | h) > 0$ si y solo si existe una muestra de tamaño k en donde s sea una mejor réplica pura para el jugador i . Si “ s ” es el elemento que está más a la derecha de h la probabilidad de moverse de h a h' es:

$$P_{hh'}^o = \prod_{i=1}^n P_i (S | h) \dots (1)$$

$P_{hh'}^o = 0$ si h' no es sucesor de h

El proceso $P^o = (J S m k)$ será llamado proceso o juego de adaptación con memoria m y muestra de tamaño k . Un juego de adaptación consiste en un juego n personal fijo que es jugado una vez cada período de tiempo discreto y en donde los jugadores son escogidos al azar de una población grande y finita de individuos.

Cada jugador escoge una estrategia óptima basada en las opiniones acerca del entorno que lo rodea. El jugador o agente forma sus opiniones en la observación con base a lo que los otros agentes han hecho en un pasado reciente. Como la recolección de información es costosa, se hace la hipótesis de que cada jugador conoce solo una pequeña parte de la historia del juego esto es, basa sus acciones en una muestra de juegos hechos en períodos de tiempo recientes.

Una forma de imaginar el proceso de la muestra es que cada jugador pregunta a su alrededor para ver lo que se ha hecho en períodos recientes; el jugador se detiene cuando ha aprendido sobre k diferentes jugadas o que solo recuerda k jugadas que le llaman la atención.

Las estrategias que los jugadores escogen en el período en curso son registradas y el juego es jugado nuevamente en el siguiente período por otro grupo de n agentes que son tomados de la misma población la cual es fija.

No es necesario suponer que cada subconjunto k de antecedentes de los últimos m tiene igual

probabilidad de constituir la información del agente. (Escucha más de los recientes que de los más lejanos en el tiempo). De esto cada vez que un agente juega empieza por buscar información para saber cual es la situación del juego o conflicto.

Este modelo no tiene nada que ver con el aprendizaje a nivel individual. Es decir cuando el agente juega, inmediatamente olvida lo hecho.

La partición C se hace de esta forma para dividir la población en los distintos roles que se puede tener ejemplo (hombre y mujer o edades etc).

CONVERGENCIA EN JUEGOS ADAPTATIVOS SIN ERRORES

Una convención en los procesos de adaptación se puede interpretar como una forma común de jugar el juego, tenemos que una convención es un equilibrio, el equilibrio en los juegos es la mejor forma de jugar para cada uno de los jugadores. Si el juego es repetido por distintos jugadores que tienen que aprender en cada ocasión ¿Cómo es que puede establecerse los equilibrios en juegos de adaptación?

Definición 4.0.27. h es una convención en un juego de adaptación si $P_{hh'}^o > 0$ implica que $h' = h$.

De aquí es importante notar que cuando se juega un Equilibrio de Nash Estricto m veces en sucesión, hemos caído en una sucesión que es equilibrio del sistema en el sentido que se seguirá jugando en el Equilibrio de Nash indefinidamente ya que los jugadores responderán óptimamente a una muestra que solo tiene equilibrios de Nash y a esta sucesión de Equilibrio de Nash estrictos le llamaremos una convención.

Si el proceso de adaptación converge a una convención entonces el juego debe tener un Equilibrio de Nash en estrategias puras. Es importante notar que la existencia de tal equilibrio no es una condición suficiente para la convergencia.

Para observar lo anterior veámos el siguiente ejemplo:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	(2, 1)	(0, 0)	(1, 2)	(-1, -1)
<i>b</i>	(1, 2)	(2, 1)	(0, 0)	(-1, -1)
<i>c</i>	(0, 0)	(1, 2)	(2, 1)	(-1, -1)
<i>d</i>	(-1, -1)	(-1, -1)	(-1, -1)	(3, 3)

Observamos que la estrategia *d* es una mejor réplica de sí misma pero no es una mejor respuesta de ninguna mezcla de *a*, *b*, *c* ya que si $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{R}$ tal que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ y un jugador tiene estrategia mixta $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ 0)$ se tiene que la esperanza para el otro jugador usando la estrategia *d* es $(-1)x_1 + (-1)x_2 + (-1)x_3 = (-1)(x_1 + x_2 + x_3) = -1$ el cual es menor siempre que cualquier pago si se usa una mezcla de *a*, *b* ó *c* ya que son mayores o iguales a cero.

Observemos que si el juego no involucra a *d* este ocurre cíclicamente.

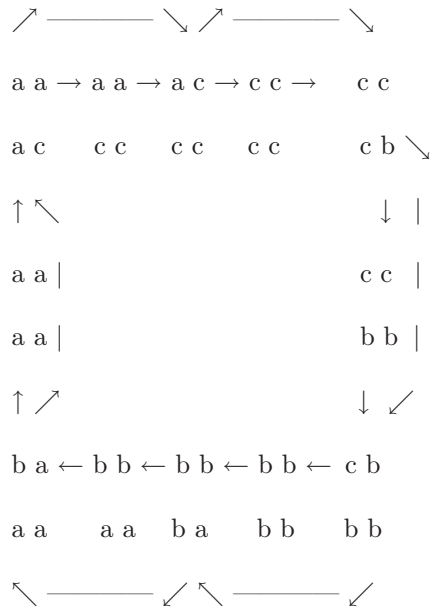
Consideremos el ejemplo en que $m = 2$ y $k = 1$ y sean las primeras dos jugadas.

(*a a*) y (*a c*). En el período 3 el jugador va a tomar de muestra una de las dos elecciones del jugador 1 (ambas son *a*) de donde reaccionará con “*c*” ya que le da un pago mayor para el jugador 2.

Si el jugador 1 juega con la estrategia *a*. El jugador 2 va a tomar de muestra una de las dos elecciones previas que son *a* ó *c* con igual probabilidad ($p=1/2$) y reaccionará usando *a* ó *c* dependiendo de su muestra, si tomo como muestra *c* entonces el valor más alto será utilizando la estrategia *c* en su columna y si escoge *a* entonces su mejor pago será *a*. Así que la jugada siguiente será (*a, c*) ó (*c, c*) con igual probabilidad. El proceso se mueve de la jugada [(*a, a*), (*a, c*)] a la secuencia [(*a, c*), (*a, c*)] con probabilidad ($p=1/2$) ó [(*a, c*), (*c, c*)] con probabilidad ($p=1/2$) Las secuencias siguientes se repetirán y se ciclará el juego, el cual formará un ciclo de longitud 6 envuelto en un ciclo de longitud 12 como se observa a continuación.

Este ciclo constituye una clase de comunicación recurrente del juego adaptativo con $m=2$ y

$k=1$.



En juegos como el anterior no necesariamente los juegos de adaptación convergen. No obstante hay juegos que no tienen estructura de mejores réplicas cíclicas.

Considérese un juego de coordinación bipersonal en el que los 2 agentes tienen el mismo número de estrategias y cada uno prefiere estrictamente jugar su j -ésima estrategia si el otro jugador juega su j -ésima estrategia para toda j . Claramente no hay un problema cíclico aquí, una vez que uno de ellos escoja una estrategia pura y el otro responda óptimamente, entonces habrá un equilibrio coordinado.

Para tener otro ejemplo, supóngase que los agentes tienen intereses en común: para cualesquiera $2n$ -adas de estrategias s y s' : sea el juego donde todos prefieren s a s' o todos prefieren s' a s . Asuma también que no hay $2n$ -adas de estrategias que tienen el mismo pago (que sean equivalentes en pago). Dada una n -ada de estrategias s arbitraria que no sea un equilibrio de Nash, entonces existe algún agente i que puede mejorar si juega con S'_i en vez de S_i . Sea $S' = (S'_i, S_{-i})$ si s' no es un equilibrio

de Nash., entonces existe un agente “j” que puede mejorar usando S''_j en vez de S'_j . Sea $s'' = (S''_j, S'_{-j})$ y así en adelante. En cada paso de este proceso de ajuste la utilidad de cada uno aumenta, de donde el proceso no puede ser un ciclo y debe de terminar en un equilibrio de Nash en estrategias puras. Más aún este equilibrio debe ser estricto porque se hizo la hipótesis de que no hay 2n-adas de estrategias que sean equivalentes en pagos y que los jugadores tienen intereses en común. (Hemos asumido que se tiene una información limitada, el tener conocimiento de la historia relativamente corto hace que los errores de coordinación sean olvidados por la historia)

Observamos que existen procesos que no convergen a una convención pero hay una clase importante de procesos para los cuales si hay convergencia. Estos procesos para los cuales si hay convergencia tienen la propiedad que desde que de cualquier estado inicial existe una secuencia de mejores réplicas que conducen al equilibrio de Nash en estrategias puras.

COMPORTAMIENTO DE LOS JUEGOS DEBILMENTE ACÍCLICOS EN LOS PROCESOS DE ADAPTACIÓN SIN ERRORES

Esta construcción puede ser generalizada como la siguiente.

Sea G un juego n - personal en su forma normal con un espacio de estrategias finito. Se define la gráfica de mejor respuesta de G como sigue:

Cada vértice es una n -ada de estrategias $s \in \Pi S_i$ y para cada 2- vértices s y s' existe una arista directa $s \rightarrow s'$ sí y solo sí $s \neq s'$ y existe exactamente un agente “i” tal que S'_i es una mejor respuesta de S_{-i} y $S'_{-i} = S_{-i}$

Es decir $T = (V, A)$

$$V = \{s : s \in S = \prod_{i=1}^n S_i\}$$

$$A = \{a \in VxV : a = (s, s') \leftrightarrow s \neq s' \exists \text{ exactamente un agente "i" tal que } S'_i \text{ es una mejor réplica de } S_{-i} \text{ y } S'_{-i} = S_{-i}\}$$

JUEGOS ACÍCLICOS

Un juego G es acíclico si su gráfica de mejor respuesta no contiene ciclos dirigidos. Es débilmente acíclico si para cada vértice inicial s existe alguna arista dirigida a un vértice s^* de donde no existen aristas que salgan de él. (un pozo, vértice hundido).

Todo nodo que sea un "sink" de una gráfica de mejores réplicas es un equilibrio de Nash estricto en estrategias puras. Así que un juego es débilmente acíclico si y solo si para cada n -ada de estrategias puras existe una secuencia finita de mejores réplicas para un agente que en un cierto tiempo termina en un equilibrio de Nash estricto en estrategias puras.

Se demostrará que los procesos de adaptación convergen con probabilidad 1, con las hipótesis de que el muestreo es suficientemente incompleto y que los jugadores no comenten errores.

Sea G un juego débilmente acíclico n -personal. Para cada vector de estrategias S , sea $L(s)$ la longitud del camino más corto de la gráfica de mejores respuestas que hay de " s " a un equilibrio de Nash estricto y sea $L_G = \max_s L(s)$

Teorema 4.0.28. *Sea G un juego n -personal y débilmente acíclico. Si $k \leq m/(L_G + 2)$ entonces el proceso T de adaptación asociado al juego converge casi seguramente a una convención.*

Demostración:

Sean k y m fijos tal que $k \leq m/(L_G + 2)$; demostraremos que existe un entero positivo M y una probabilidad positiva p tal que para cualquier secuencia h , la probabilidad de que el juego de adaptación converja en M períodos a una convención es por lo menos p , donde M y p son independientes de los períodos y de las secuencias. Entonces la probabilidad de no alcanzar una convención después de por lo menos rM períodos es a lo más $(1 - p)^r$; el cual converge a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

Sea $(s(t - m + 1), \dots, s(t))$ una secuencia en un período $t \geq m$.

En el período $t+1$ hay una probabilidad positiva de que cada uno de los n -agentes tomen como muestra $h =$ (las últimas k jugadas en h), sean estas $h^* = (s(t - k + 1), \dots, s(t))$ entonces

$$h = (s(t - m + 1), \dots, \underbrace{s(t - k + 1), \dots, s(t)}_n)$$

Sea s la n -ada de estrategias con la que los jugadores responden a la muestra n . Entonces la siguiente secuencia será de la forma: $h' = (s(t - m + 1), \dots, s(t - k + 1), \dots, s(t), s)$. También hay una probabilidad positiva de que del período $t+2$ a $t+k$ inclusive, cada agente escoja la muestra h cada vez.

Finalmente hay una probabilidad positiva para una sucesión de tamaño k igual a (s, s, \dots, s) en todos los períodos de $t+1$ a $t+k$ incluso la sucesión completa será:

$$(s(t - m + k + 1), \dots, \underbrace{s(t - k + 1), \dots, s(t)}_n, s, \dots, s) \text{ Nótese que el argumento depende de la memoria}$$

de los agentes siendo de por lo menos $2k-1$ ya que de otra forma no podrían escoger la muestra h hasta el período $t+k$. Supóngase ahora que s es un equilibrio de Nash. Existe una probabilidad positiva de que de los períodos $t+k+1$ a $t+m$ cada agente tome por muestra solo las k últimas jugadas, en cuyo caso la única mejor réplica para cada agente i es S_i . Así que juega s por $m-k$ períodos más. En este momento un equilibrio ha sido alcanzado y continuarán jugando s por el resto del tiempo. Supongamos en cambio que s no es un equilibrio de Nash. como G es acíclico existe una ruta s, s', \dots, s^r en la gráfica de mejores réplicas tal que s^r es un equilibrio de Nash estricto, la primera arista en esa ruta es $s \rightarrow s'$. Sea i el índice tal que $S'_{-i} = S_{-i}$ y S'_{-i} es la mejor respuesta a S_{-i} .

Considérese el evento en el que el agente i toma por muestra la sucesión (s, \dots, s) que estaba

establecida en los k períodos y responde jugando S_i mientras que cada agente j distinto de i toma la muestra $n = (s(t-k+1), \dots, s(t))$, el jugador i responderá por supuesto con S'_i y los demás contestarán con las mismas estrategias de s ya que cuando toman por muestra n , las jugadas de s son las mejores réplicas de n . Entonces en el período $t+k+1$ se tendrá la n -ada de jugadas s^j . También se tiene una probabilidad positiva de que este mismo evento ocurra en los períodos $t+k+1$ a $t+2k$, contando que $m \geq 3k - 1$ (la memoria no es $3k$ porque solo se necesita tener la muestra n completa hasta el período $t+2k-1$). Entonces se tiene la sucesión

$$(s(t-m+2k+1), \dots, \underbrace{s(t-k+1), \dots, s(t)}_{\eta}, \underbrace{s, \dots, s}_{k}, \underbrace{s', \dots, s'}_{k}, \dots, \underbrace{s', \dots, s'}_{t+2k})$$

Lo que se busca es hacer una corrida ahora s^2 con k períodos y así hasta s^r también k veces. Para poder hacer esto se necesita que el proceso tenga suficiente memoria; es decir que m sea lo suficientemente grande. Si se busca pasar de $S^{n'}$ a $S^{n'+1}$ se necesita que los jugadores respondan con la misma estrategia de $S^{n'}$ excepto en el jugador que cambie su mejor respuesta. Entonces en cada arista de la gráfica de mejores respuestas $S^{n'} \rightarrow S^{n'+1}$ se necesita que los jugadores “ i ” tome por muestra:

1. La muestra n en caso de que el agente i no haya cambiado de estrategia en aristas anteriores
2. Si el agente i cambio de estrategia en la arista $S^{n'} \rightarrow S^{n'+1}$ con p anterior a n' tomará por muestra (s^p, \dots, s^p) de tamaño k donde s^p es precisamente la n -ada de estrategias en que este jugador responde con una mejor replica distinta. En caso de que este jugador haya cambiado de estrategia varias veces en aristas anteriores $S^{n'} \rightarrow S^{n'+1}$ tomará la muestra en la última arista en que hizo el cambio.
3. El jugador que cambia de estrategia en la arista $S^p \rightarrow S^{p+1}$ tome por muestra las últimas k jugadas.

Estos eventos en cada paso $S^p \rightarrow S^{p+1}$ tienen probabilidad positiva de ocurrir y en cada caso de darse eventualmente se tendrá una corrida s^r, \dots, s^r k veces en los períodos de $t+kr$ a $t+kr+k =$

$t+k(r+1)$.

$$\underbrace{(s(t+k+1), \dots, s(t), s, \dots, s, \underbrace{s', \dots, s'}_{[2k]\text{periodos}}, \dots, s^{r-1}, \dots, s^{r-1}, \dots, s^r, \dots, s^r)}_{[rk+2k]\text{periodos}}$$

Ahora se tiene que $r \leq L_G$ entonces como $k \leq m/(L_G + 2)$ entonces $k(L_G + 2k) \leq m$ y $rk + 2k \leq L_G + 2k \leq m$ por lo que el proceso de anterior es posible por la hipótesis. Se tiene también una probabilidad positiva de que todos los agente tomen por muestra las últimas k jugadas y sabemos que los que responderán son s^r , además existe una probabilidad positiva de que lo hagan desde el período $t+2k+1$ hasta $t+kr+m$ es decir por $m-k+1$ períodos más y así completaran una corrida (s^r, \dots, s^r) de tamaño m .

Entonces se tiene que dada una secuencia inicial h , existe una probabilidad positiva de converger a un equilibrio en $M = kL_G + m$ períodos (m cuenta a partir de la primera s^r que aparece y que tendrán que completarse m , kL_G cuenta a s, s^1, \dots, s^r que son a lo más L_G y cada una k veces). Sea $p = \min_{h \in H} P_h > 0$ se sigue que el proceso converge con al menos p de probabilidad para que se alcance un equilibrio. Esto completa la demostración. †

No se afirma que la cota $k \leq m/(L_G + 2)$ es la mejor posible en todo juego débilmente acíclico.

Consideremos el siguiente ejemplo:

	Ceder	No ceder
Ceder	(0,0)	(1, $\sqrt{2}$)
No ceder	($\sqrt{2}$, 1)	(0,0)

Sea $k = m$ así que los jugadores tomarán por muestra las mismas m jugadas en cada período. Considérese cualquier secuencia inicial de m jugadas donde los jugadores siempre están coordinados esto es ambos escogen ceder o ambos escogen no ceder en cada período.

Sea f la frecuencia relativa en que han escogido “ceder” en la secuencia. En el siguiente período el jugador 1 escogerá la estrategia ceder $\leftrightarrow (1 - f) * 1 > f\sqrt{2}$ y el jugador 2 hará lo mismo, así que el siguiente período vuelven a estar no coordinados.

Si f es racional la desigualdad siempre será estricta así que nunca se considera la igualdad, de esto que si se empieza con una secuencia en perfecta descoordinación; los jugadores descoordinarán siempre. En este caso la distribución de frecuencia converge a un Equilibrio de Nash en estrategias mixtas, del juego en que los 2 jugadores toman la estrategia “a” con probabilidad $f = 1/(1 + \sqrt{2})$ que se obtiene de $(1 - f) = f\sqrt{2}$. Más adelante se demostrará que en los procesos de adaptación cuando se converge a un equilibrio este es un Equilibrio de Nash en estrategias puras. En juegos ficticios de 2x2 no necesariamente convergen al comportamiento sensitivo. Este problema no surge en juegos adaptativos porque cuando estos convergen a un estado absorbente este estado debe corresponder a un equilibrio de Nash en estrategias puras. Por lo tanto los comportamientos también convergen.

PROCESOS DE ADAPTACIÓN CON ERRORES

El teorema 3.2.1 cuenta con el supuesto de que mientras los agentes basan sus decisiones en una información limitada siempre escogen una mejor respuesta en base a su información.

Esta suposición es totalmente irreal, los agentes algunas veces cometen errores, incluso pueden experimentar con respuestas que nos son óptimas. En este caso el proceso estocástico no converge a un estado absorbente ya que carece de estos. Los errores perturban constantemente el proceso y lo alejan del equilibrio. Si suponemos que los jugadores ocasionalmente pueden experimentar con diferentes estrategias o que simplemente cometen errores a este supuesto se le considerará como ruido o perturbación del proceso sin errores, esto quiere decir que el proceso sigue la función de transición P^0 con una probabilidad alta, pero existen ciertas transiciones que no ocurren vía P^0 con probabilidad pequeña. Si además suponemos que todos los errores son posibles y que la probabilidad de cometerlos es independiente del tiempo, se mostrará que el proceso con perturbación tiene una única distribución estacionaria y así podremos estudiar su conducta asintótica.

Cuando la probabilidad de cometer errores es pequeña, podremos mostrar que esta distribución estacionaria se concentra alrededor de una convención en particular (en los eventos de igualdad o un subconjunto de las convenciones). Estas son las convenciones estocásticamente estables. Estas son las que se pueden observar con probabilidad positiva cuando el tiempo es muy grande y cuando el ruido es pequeño pero no desaparece.

Nuestros modelos de errores generalizados se aproximan al primero por Canning (1992) y Kandori, Mailath y Rob (1993) Fijando el tamaño de la muestra k y memoria m .

PERTURBACIÓN DEL NUEVO PROCESO

Entonces supongamos que en cada período de tiempo existe una probabilidad pequeña $\epsilon\lambda_i > 0$ de que el jugador i experimente escogiendo una estrategia aleatoriamente de S_i ; en vez de optimizar,

basándose en una muestra de tamaño k . El radio λ_i/λ_j es la probabilidad relativa con que el jugador del tipo i experimenta respecto al jugador del tipo j . El factor ϵ determina una probabilidad con que los jugadores experimentan en su conjunto. El evento en el que i experimenta se supone es independiente del experimento de j para cada $i \neq j$. Para cada i , sea $q_i(s|h)$ la probabilidad condicional de que el jugador i escoja $s \in S_i$ dado que el jugador i experimenta y el proceso está en el estado h , donde :

$$\sum_{s \in S_i} q_i(s|h) = 1 \forall i, \forall h \in H$$

Se supone que el evento "i experimenta" es independiente del evento "j experimenta", $\forall i \neq j$ además $q_i(s|h)$ es independiente de t y $q_i(s|h) > 0 \forall s \in S_i$. A priori nosotros no conocemos las distribuciones $q = (q_1(\cdot), \dots, q_n(\cdot))$ ó la distribución relativa de experimentación:

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Estas dos distribuciones están relacionadas de la siguiente manera.

λ es el vector de distribuciones donde $\epsilon\lambda_i$ es la probabilidad de que el agente i experimente y $(1 - \epsilon\lambda_i)$ de que no experimente.

En caso de que el agente i experimente y el proceso este en el estado h , la probabilidad de que cada estrategia pura $s \in S_i$ será escogida para experimentar está dada por $q_i(\cdot)$. Si el total de la probabilidad de la experimentación ϵ es pequeña y si el experimento de los agentes es independiente uno del otro entonces el equilibrio seleccionado es independiente de λ y q .

El proceso perturbado puede ser descrito como el siguiente:

Suponga que el proceso está en el estado h al tiempo t . Sea J un subconjunto de jugadores $1 \leq j \leq n$.

La probabilidad de que exactamente los jugadores de J experimenten y los otro no, esta dado por:

$$(\prod_{j \in J} \epsilon\lambda_j)(\prod_{j \notin J} 1 - \epsilon\lambda_j)$$

Condicionamente a este evento la probabilidad de transición de moverse de un estado h a h' es:

$Q_{hh'}^J = \prod_{j \in J} q_j(s_j|h) \prod_{j \notin J} p_j(s_j|h)$ si h' es un sucesor de h y s es el elemento más a la derecha de h' .

$Q_{hh'}^J = 0$ si h' no es un sucesor de h .

Si ningún agente experimenta entonces la probabilidad de transición de moverse de un estado h a h' en un período es $P_{hh'}^0$, definida anteriormente. Este evento tiene probabilidad

$$\prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i)$$

EL PROCESO DE MARKOV PERTURBADO POR LO TANTO TIENE FUNCIÓN DE TRANSICIÓN

$$P_{hh'}^\epsilon = \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{hh'}^0 + \sum_{j \in N, j \neq h} \epsilon^{|\mathcal{J}|} (\prod_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j) (\prod_{j \neq \mathcal{J}} 1 - \epsilon \lambda_j) Q_{hh'}^J \dots (2)$$

La probabilidad de pasar del estado h a h' es igual a la probabilidad de que ningún jugador experimente por la probabilidad de pasar de h a h' en P^0 más la suma de las probabilidades de las distintas formas en que se puede experimentar y pasar de h a h' .

Este proceso P^ϵ será llamado el juego adaptativo con memoria m , muestra de tamaño k , con probabilidad de experimentación $\epsilon \lambda_i$ y con distribución experimental q_i . Nótese que P^0 el proceso definido en (1), nos referiremos a él como el proceso sin perturbación.

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE JUEGOS ADAPTATIVOS

Nosotros ahora caracterizaremos el comportamiento asintótico del proceso en (2) cuando el total de experimentación de la población ϵ es cercana a cero. Sea h y h' dos estados distintos, si P^ϵ está en el estado h al tiempo t , hay una probabilidad positiva de que todos los jugadores experimenten m períodos en sucesión. Así hay una probabilidad positiva de que el proceso llegue al estado h' al tiempo $t+m$ entonces P^ϵ es irreducible. Es aperiódica porque el proceso se puede mover de h a h' en exactamente

m períodos y además en exactamente $m+1$ períodos. De aquí que P^ϵ tiene una única distribución estacionaria μ^ϵ que satisface la ecuación $\mu^\epsilon P^\epsilon = \mu^\epsilon$.

El proceso es fuertemente ergódico y con (probabilidad 1) μ_h^ϵ es la frecuencia cumulativa relativa con la que el estado h se observara cuando el proceso corra por un período largo de tiempo. Esto es la probabilidad de que h se observará en cualquier tiempo t , suministrada cuando t es suficientemente larga.

El siguiente concepto fue introducido por Foster y Young en (1990).

ESTABILIDAD ESTOCASTICA

Un estado h en H es estocásticamente estable relativo al proceso P^ϵ si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_h^\epsilon > 0$. Durante un largo período de tiempo los estados que no son estocásticamente estables se podrán observar infrecuentemente comparada con los estados que son estocásticamente estables suministrada de que la probabilidad de errores ϵ es muy pequeña. Si hay un único estado estocásticamente estable este se podrá observar casi todo el tiempo cuando ϵ es muy pequeña. Nosotros ahora mostraremos como computar los estados estocásticamente estables en juegos adaptativos para un juego general n -personal. En el proceso mostraremos que estos estados son esencialmente independientes de una distribución particular de errores q_i y la probabilidad de errores λ_i . Nosotros estaremos especializados en el caso de los juegos débilmente acíclicos y mostraremos que si $k \leq m/(L_G + 2)$ cada estado estocásticamente estable es una convención, si k y m son suficientemente grande entonces típicamente es único.

Definición 4.0.29. ERROR Sea h' un sucesor de h en el proceso P^ϵ y sea s el elemento que está más a la derecha de h' . Un error en la transición $h \rightarrow h'$ es un componente S_i de s talque no es una mejor respuesta del agente i para ninguna muestra de tamaño k de h .

Un error solo puede darse si un jugador experimenta, pero una elección experimental no tiene que ser necesariamente un error, ya que puede por (azar) puede ser una mejor respuesta.

Definición 4.0.30. RESISTENCIA Sean $h, h' \in H$ en el proceso P^ϵ si h' es un sucesor de h , se

define la resistencia $r(h, h')$ como el número total de errores envueltos en la transición $h \rightarrow h'$; si h' no es sucesor de h se define $r(h, h') = \infty$.

Ahora nosotros veremos el espacio de estados H como los vértices de la gráfica dirigida. Para cada par de vértices h, h' se inserta una arista dirigida $h \rightarrow h'$ si $r(h, h')$ es finita y $r(h, h')$ es llamado “el peso” o la “resistencia”. Las aristas de costo o resistencia cero son aquellas que corresponde a la transición que ocurre con probabilidad positiva en P^0 . Estas clases son H_1, \dots, H_j las clases de comunicación recurrente de P^ϵ . Estas clases son disjuntas y están caracterizadas por las siguientes 3 proposiciones.

1. De cada vértice existe una ruta con resistencia cero para al menos una de las clases H_i .
2. Para cualesquiera dos vértices x, y dentro de una misma clase H_i existe una ruta $x \rightarrow y$ de resistencia cero y viceversa.
3. Toda arista $x \rightarrow y$ con $x \in H_1$ e $y \in H_j$ si $i \neq j$ tiene resistencia positiva.

Para toda $i \neq j$ sea r_{ij} la resistencia mínima que hay entre todas las rutas que van de H_i a H_j ; para este propósito es suficiente dejar fijos dos estados, un estado $x \in H_1$ y otro $y \in H_j$ y entonces encontrar la ruta con resistencia mínima entre x e y . Esto está bien definido ya que existe al menos una ruta entre una y otra clase de comunicación recurrente porque el proceso P^ϵ es irreducible cuando $\epsilon > 0$ y r_{ij} no depende de ϵ .

Ahora defínase una segunda gráfica ζ como sigue: Los vértices son los índices de las clases de comunicación $1, \dots, J$ y para cada (i, j) existe un arco de i a j con el peso r_{ij} . A la gráfica ζ se le llama la gráfica de las clases de comunicación recurrente del proceso P^ϵ o simplemente la gráfica de las clases del proceso P^ϵ . Generalmente ζ es mucho más pequeña que G de hecho puede tener muy pocos vértices.

El siguiente concepto es debido a Friendlin and Wentzell (1984).

i -árbol. Un i -árbol en ζ es una antiarborescencia con raíz en i . Un i -árbol en ζ es un árbol-spanning tal que para cada vértice $j \neq i$ existe una única trayectoria directa de j a i . Para cada vértice i sea T_i el

conjunto de todos los i-árboles de ζ . La resistencia de un i-árbol $\tau \in T_i$ es la suma de las resistencias de las aristas.

$$r(\tau) = \sum_{(i,j) \in T} r_{ij}$$

POTENCIAL ESTOCASTICO

El potencial estocástico de una clase recurrente H_i es la mínima resistencia entre todos los i-árboles $\gamma_i = \min_{\tau \in T_i} r(\tau)$. Calcular γ_i para un conjunto de pesos $r_{ij} \geq 0$ es un problema estándar de optimización combinatorial conocido como el problema de arborescencia.

Existen algunos algoritmos para solucionar de orden $|J|^2$ pasos. (Chu and Liu) (1965). Edmonds (1967) y Tarjan (1977). Desde que hay $|J|$ vértices en G y un problema de arborescencia lo que debe de ser resuelto por uno. La función potencial puede ser computada en el $O(|J|^3)$ pasos.

Nótese que las cantidades r_{ij} depende únicamente del número de errores al hacer las transiciones y no en la probabilidad de los errores específicos que se han hecho. Entonces el potencial estocástico es independiente de los parámetros λ_i y q_i . Estos estados son independientes de la experimentación de las probabilidades λ_i y de la distribución experimental q_i a lo largo de que estos tengan máximo soporte.

TEOREMA (Freidlin and Wenzell)

Sea P^0 una cadena de Markov estacionaria en un espacio de estados finito X con clases de comunicación recurrente X_1, X_2, \dots, X_j . Sea P^ϵ una perturbación regular de P^0 y sea la única distribución para cada $\epsilon > 0$

1. Si $\epsilon \rightarrow 0$ entonces converge a una distribución estacionaria de P^0
2. x es estocásticamente estable ($\mu_x^\epsilon > 0$) si y solo si x está contenido en una de las clases de comunicación recurrente X_j que minimiza a γ_j

TEOREMA 2

Sea G un juego n -personal en un espacio de estrategias finito. Los estados estocásticamente estables del juego de adaptación P^ϵ son los estados contenidos en las clases de comunicación recurrente de P^0 con mínimo potencial estocástico. Estos estados son independientes de la experimentación de probabilidad λ_i y de la distribución experimental q_i a lo largo de que estos tengan un soporte máximo es decir mientras las λ_i sean distintas de cero para toda i y además todas las estrategias tengan posibilidad positiva de suceder.

COROLARIO

Si Γ es débilmente acíclico y $k \leq m/(L_G + 2)$ los estados estocásticamente estables de un juego adaptativo son las convenciones de mínimo potencial estocástico.

Esto es directo del Teorema 1 y 2. Ya que por el Teorema 1 tenemos que si $\epsilon \rightarrow 0$ entonces μ^ϵ converge a una distribución estacionaria μ^0 de P^0 es decir los estados a los que converge el proceso P^0 y que tiene potencial estocástico mínimo, por Teorema 2 nos dice que cuando un juego es débilmente acíclico y $k \leq m/(L_G + 2)$ los estados a los que converge el proceso P^0 son las convenciones asociadas al juego sin perturbación.

LOS ESTADOS ESTOCASTICAMENTE ESTABLES pueden ser computados en 3 pasos.

1. Identificar las clases de comunicación recurrente del proceso P^0 sin errores. Para juegos n -personales en general estas clases pueden ser bastante complicadas. Si el juego es débilmente acíclico y la muestra es lo suficientemente incompleta. El teorema 1 nos dice que las clases recurrentes corresponden 1 a 1 con el Equilibrios de Nash en estrategias puras el cual podemos identificar.
2. Calcular las resistencias mínimas para moverse de una clase recurrente a otra. En teoría esto envuelve resolver una serie de rutas más cortas pero en la práctica el cálculo puede hacerse directamente de la matriz de pago del juego.
3. Construir una digráfica con estas resistencias como pesos y encontrar la arborescencia que tenga

menor peso. Esto identifica la(s) convención(es) estocásticamente más estable(s) que es única salvo en el caso de empates.

DEFINICIÓN

Sea P^ϵ una cadena de Markov estacionaria en un espacio de estados X finito con perturbación.

Se dice que el proceso P^ϵ es una perturbación regular de P^0 si cumple las siguientes condiciones:

Para todo $x, y \in X$

1. P^ϵ es aperiódico e irreducible para todo $\epsilon \in (0, a]$
2. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{x,y}^\epsilon = P_{x,y}^0$
3. $P_{x,y}^\epsilon > 0$ para alguna ϵ entonces existe $r \geq 0$ talque $0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-r} P_{x,y}^\epsilon$

La condición 1 implica que el proceso con perturbación tiene una única distribución estacionaria μ^ϵ para cada $\epsilon \in (0, a]$.

La condición 2 señala que el proceso con perturbación converge al proceso sin perturbación cuando el ruido tiende a cero. La condición 3 señala que la transición de x a y , o es imposible en el proceso con perturbación para toda $\epsilon \in (0, a]$ o es de orden ϵ^{-r} para algún número real $r \geq 0$ mientras decrece.

Proposición 4.0.31. *El proceso P^0 definido en el proceso de adaptación con errores es una perturbación regular.*

Demostración

Sean $h, h' \in H$ con $h \neq h'$ si P^ϵ está en el estado h al tiempo t existe una probabilidad positiva de que todos los jugadores experimentarán por m períodos en sucesión; recordando que m es el tamaño de la muestra, existe entonces una probabilidad positiva de que el proceso pase del estado h al h' al tiempo $t+m$, por lo tanto el estado h' puede alcanzarse a partir del estado h en un numero finito de transiciones es decir $P_{hh'}^\epsilon(m) > 0$ por lo tanto P^ϵ es irreducible. Es aperiódica porque por lo anterior,

el proceso se podrá mover del estado h a h' en exactamente m períodos pero también en exactamente $m+1$ períodos; porque hay una probabilidad positiva en cada período de que aparezca cualquier n -ada de estrategias de manera que hay probabilidad positiva en los períodos $t+2$ hasta $t+m+1$ para que escojan las estrategias que forman h' . Ya que tenemos que P^ϵ es aperiódica e irreducible para toda $\epsilon \in (0, a]$.

P.D.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{x,y}^\epsilon = P_{x,y}^0$$

Tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{x,y}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{xy}^0 + \sum_{j \subset N, j \neq \emptyset} \epsilon^{|J|} \left(\prod_{j \in J} \lambda_j \right) \left(\prod_{j \neq J} 1 - \epsilon \lambda_j \right) Q_{xy}^J \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{xy}^0 + \sum_{j \subset N, j \neq \emptyset} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{|J|} \left(\prod_{j \in J} \lambda_j \right) \left(\prod_{j \neq J} 1 - \epsilon \lambda_j \right) Q_{xy}^J$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{xy}^0 + \sum_{j \subset N, j \neq \emptyset} Q_{xy}^J \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{|J|} \left(\prod_{j \in J} \lambda_j \right) \left(\prod_{j \neq J} 1 - \epsilon \lambda_j \right)$$

$$\text{donde } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) = 1 \text{ y } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{|J|} \left(\prod_{j \in J} \lambda_j \right) \left(\prod_{j \neq J} 1 - \epsilon \lambda_j \right) = 0$$

$$\text{entonces } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{x,y}^\epsilon = P_{x,y}^0$$

Ahora si $P_{x,y}^\epsilon > 0$ p.a. $\epsilon > 0$ Por demostrar que existe $r \geq 0$ tal que $0 < \epsilon^{-r} P_{x,y}^\epsilon < \infty$

Demostraremos que $r = r(x,y)$

$$P_{x,y}^\epsilon > 0 \text{ entonces } 0 < \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{x,y}^0 \text{ y } 0 = \sum_{j \subset N, j \neq \emptyset} \epsilon^{|J|} \left(\prod_{j \in J} \lambda_j \right) \left(\prod_{j \neq J} 1 - \epsilon \lambda_j \right) Q_{xy}^J$$

Las transiciones que son vía P^0 suceden sí y solo sí no se comete ningún error en la transición de

$x \rightarrow y$ entonces si $P_{x,y}^\epsilon > 0$ existen dos casos:

1) $P_{x,y}^\epsilon > 0$ entonces:

$$0 < \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{x,y}^0 \text{ y } 0 = \sum_{j \subset N, j \neq \emptyset} \epsilon^{|J|} \left(\prod_{j \in J} \lambda_j \right) \left(\prod_{j \neq J} 1 - \epsilon \lambda_j \right) Q_{xy}^J$$

en este caso no se comete ningún error entonces $P_{x,y}^\epsilon = \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{x,y}^0$ y tomando $r = 0$

(coincide con el número de errores que se cometieron) entonces

$$0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-r} P_{x,y}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{x,y}^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{x,y}^0 = P_{x,y}^0 < \infty$$

2) $P_{x,y}^0 = 0$ entonces

$$0 = \prod_{i=1}^n (1 - \epsilon \lambda_i) P_{x,y}^0, \text{ y } 0 < \sum_{j \subset N, j \neq \emptyset} \epsilon^{|J|} (\prod_{j \in J} \lambda_j) (\prod_{j \notin J} 1 - \epsilon \lambda_j) Q_{xy}^J$$

en este caso si se cometen errores en la transición entonces

$P_{x,y}^\epsilon = \sum_{j \subset N, j \neq \emptyset} \epsilon^{|J|} (\prod_{j \in J} \lambda_j) (\prod_{j \notin J} 1 - \epsilon \lambda_j) Q_{xy}^J$ observemos que $P_{x,y}^\epsilon$ es un polinomio de ϵ de grado n con $n \in N$ y sin término independiente cuando $P_{x,y}^0 > 0$ entonces podemos reescribir como:

$$P_{x,y}^\epsilon = \sum_{i=1}^n a_i \epsilon^i \text{ con } a_i \in \mathfrak{R} \text{ para todo } i = 1, \dots, n \text{ y con algún } a_i \neq 0 \text{ Sea } k = \min\{a_k \neq 0\}. \text{ En}$$

este caso k es el mínimo número de errores que se tienen que cometer para que se dé la transición de $x \rightarrow y$. Entonces dividimos a $P_{x,y}^\epsilon$ entre ϵ^k y obtendremos un polinomio P con término independiente

a a_k

$$0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-r} P_{x,y}^\epsilon = 0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P = a_k < \infty$$

Por lo tanto si $P_{x,y}^\epsilon > 0$ para alguna c existe $r \geq 0$ talque:

$$0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-r} P_{x,y}^\epsilon < \infty \text{ con } r = r(x,y). \dagger$$

Capítulo 5

SELECCIÓN DE EQUILIBRIOS EN JUEGOS DE FORMACIÓN DE GRUPO

Como una motivación de lo que se está realizando consideremos el siguiente juego:

Para simplificar este ejemplo consideremos que el costo de la organización es 0 esto implica que $g_i = g_i(C, h) = u_i(C, h) - c(s) = u_i$ por lo anterior Considérese un dilema de prisionero de 4 jugadores y sea $N = 1, \dots, 4$, se define las funciones de pago en la figura 4.1. Para cada jugador "i" la función de pago es dada comúnmente como $u((D \text{ o } C), h)$; las funciones de pago por cooperación son heterogéneas. La función de pago por cooperar para el jugador "i" se muestra en el renglón $u_i(C, h)$. El umbral de cooperación de los jugadores están dados por $S_1 = 2 = S_2$, $S_3 = S_4 = 4$. El jugador 1 y el 2 son los más dispuestos a cooperar ya que si otro jugador coopera su pago será mejor. Los jugadores 3 y 4 son los menos interesados en cooperar, ellos cooperarán solo si los otros jugadores cooperan. Cabe señalar que para obtener los resultados del proceso de adaptación podemos ver que $k = 1$ que es la muestra seleccionada y $m = 4$ la memoria. Estos son los valores mínimos que se deben a que la cota

dada por los teoremas. Los teoremas muestran que existen 3 equilibrios de Nash estrictos que justo son la cooperación total, la cooperación parcial y la no cooperación.

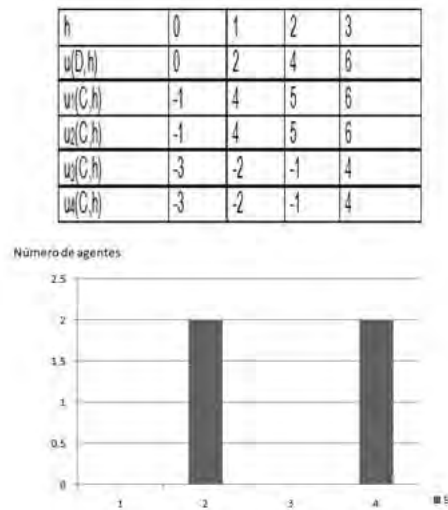


Figura 5.1: Funciones de pago

Se puso la gráfica de mejor respuesta del juego pensando en mover solo un integrante y los otros fijos para contrastar con los resultados de los equilibrios porque se nota que hay una tendencia distinta la cual se da debido a que el movimiento es respecto a los pagos individuales.

Recordemos que habíamos definido el umbral de cooperación el cual tiene un papel determinante para los pagos, además que también está relacionado con los equilibrios y la estabilidad del grupo.

En JFG con umbrales heterogéneos existen 3 tipos de equilibrios: la no participación global, la cooperación parcial y la cooperación total. Entonces la pregunta que surge es ¿Cuál de estos equilibrios tiene una mayor probabilidad de aparecer en el largo tiempo?. Si tenemos que el JFG es acíclico, entonces se puede identificar el equilibrio, en principio, ya que tenemos cuál es más estable respecto a la estabilidad estocástica. En la práctica sin embargo se vuelve muy complejo evaluar las

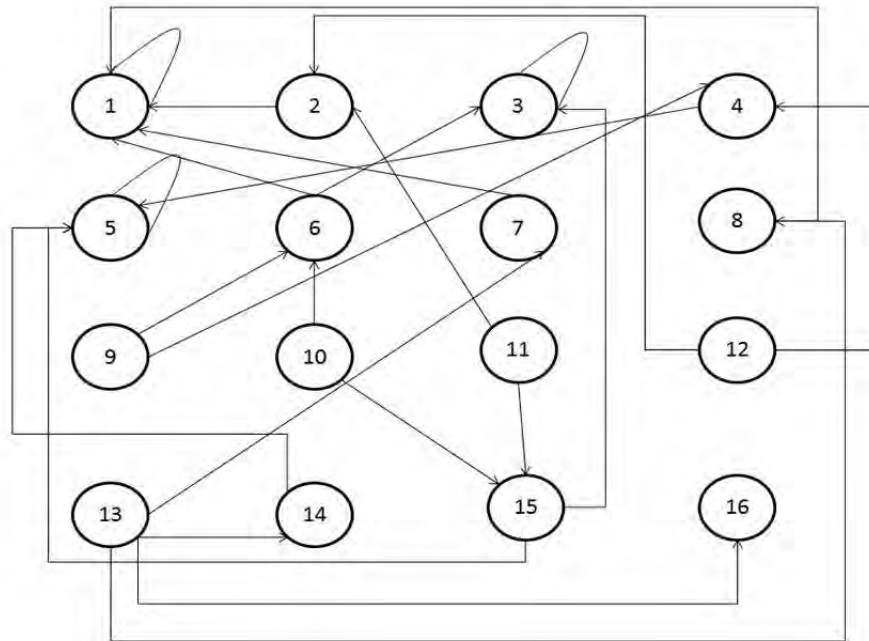


Figura 5.2: La gráfica de mejor respuesta

resistencias para el juego en general por lo que se trabajará en un clase específica que consta en el JFG con 2 tipos de jugadores.

EL JUEGO DE FORMACIÓN DE ORGANIZACIÓN CON 2 TIPOS DE JUGADORES.

Consideremos que en la comunidad que estudiamos sólo hay dos tipos de personas las cuales pueden ser: hombres o mujeres, adultos y jóvenes por citar algunos ejemplos. Entonces sea N el conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$ a este conjunto se le da una partición en 2 conjuntos uno $N_1 = \{1, \dots, n_1\}$ y el otro $N_2 = \{n_1 + 1, \dots, n\}$. El tamaño de N_1 y N_2 es n_1 y $n - n_1$ respectivamente. Asumiremos que n_1 y $n_2 \geq 2$. N_1 y N_2 representan 2 tipos de jugadores como sigue:

Asumiremos que $s_i = n_1$ para cada $i \in N_1$ y $s_i = n - n_1 = n_2$ para cada $i \in N_2$ donde s_i es el i 's umbral de cooperación del jugador i . Para un jugador en N_1 puede ser óptimo cooperar cuando exactamente $n_1 - 1$ lo hacen. En contraste un jugador en N_2 tiene una poca motivación para cooperar y solamente cuando $n_1 + n_2 - 1$ jugadores cooperan entonces se vuelve ventajoso cooperar.

Entonces tener 2 tipos de jugadores simplifica el análisis pero aún así se siguen conservando características esenciales del JFG. Además por el corolario del teorema 2 de la sección 3.3 tenemos exactamente 3 equilibrios de Nash estrictos.

Proposición 5.0.32. *En el JFG con 2 tipos de jugadores existen exactamente 3 Equilibrios de Nash estrictos y estos son: $e^1 = (0, \dots, 0)$ $e^2 = (\overbrace{1, \dots, 1}^{n_1}, \overbrace{0, \dots, 0}^{n_2})$ $e^3 = (1, \dots, 1)$.*

En palabras e^1 representa la no cooperación, e^2 representa la cooperación parcial y e^3 la cooperación total. Respecto a la estructura de mejor respuesta, notamos la diferencia crucial respecto a los 2 tipos. Por ejemplo para un jugador en N_1 no existen situaciones en las cuales recibe más no cooperando que en el pago de la no cooperación total. Esto significa que ningún miembro de N_1 tiene incentivo a parasitar. En contraste un jugador en N_2 tiene la posibilidad de ganar más no cooperando que el pago dado por la no cooperación total. Por estas razones jugadores en N_2 tienen un incentivo a parasitar lo que se refleja en su gran potencial para vivir de los demás. Por esto, para la estructura de mejor respuesta se necesita trabajar un poco más que para la de N_1 . Así que por lo anterior tenemos que en el siguiente análisis hay que trabajar con cuidado y hablando de esto notemos que en el

equilibrio parcial jugadores de N_2 parasitan.

Para el análisis parametrizaremos el pago de los jugadores. Para cada $i \in N_1$ definimos:

$$a_i = v_i(C, n_1 - 1) \quad c_i = (u_i(D, 0) - \epsilon_i) \quad d_i = u_i(D, 0)$$

a_i es el pago del equilibrio en e^2 , la cooperación parcial. Una desviación unilateral por un $i \in N_1$ de e^2 resulta en d_i que es igual al pago en el equilibrio e^1 la no cooperación total.

La desviación unilateral por un $i \in N_1$ de e^1 resulta en c_i . Notemos que $a_i > d_i > c_i$.

Para cada $i \in N_2$ sea:

$$a_i = v_i(C, n - 1) \quad c_i = (u_i(D, 0) - \epsilon_i) \quad d_i = u_i(D, 0) \quad f_i = u_i(D, n_1)$$

Para un jugador $i \in N_2$ a_i es el pago en el equilibrio e^3 , la cooperación total. Una desviación unilateral por un $i \in N_2$ de e^3 resulta en d_i que es igual al pago en el equilibrio e^1 . Una desviación unilateral de un $i \in N_2$ de e^1 resulta en c_i . f_i es el pago por parasitar. Notemos que $f_i > d_i > c_i$. y $a_i > d_i$.

Definición 5.0.33. *Dado un estado de equilibrio $h(e) = (e, e, \dots, e)$ una trayectoria de salida de e es una trayectoria de perfiles de $h(e)$ a otro estado h que contiene un perfil σ en el cual algún jugador $i \in N$ juega con su mejor respuesta σ_i diferente de e_i . Para una trayectoria de salida $(e, \dots, e, \sigma^1, \dots, \sigma^T)$ de e el jugador $i^* \in N$ es llamado el primer exitor si i^* juega su mejor respuesta que difiere del equilibrio e para el primer tiempo durante la trayectoria.*

Por ejemplo una trayectoria de $h(e^2)$ es una trayectoria de salida si en ella contienen σ tal que $\sigma_i = 1$ para algún $i \in N_2$ y esta elección es una mejor respuesta. Entonces en este caso la trayectoria contiene una muestra en la cual un $i \in N_2$ su respuesta óptima es 1. Si $i^* \in N$ es quien elige $\sigma_{i^*}^{\tau^*}$ en ese momento τ^* es el primer exitor de la trayectoria de salida de $h(e)$, entonces para cada $i \in N$ (incluyendo i^*) y para cada tiempo $1 \leq \tau \leq \tau^*$ alguna acción σ_i^τ es un error cada vez que $\sigma_i^\tau \neq e_i$. Notemos que el primer desertor (exitor) no necesita ser único. Alguna trayectoria de $h(e^i)$ a $h(e^j)$ es una trayectoria de salida de e^i pero no viceversa.

En el JFG con 2 tipos la estructura de mejor respuesta de un miembro de N_1 es distinta de un miembro en N_2 . Por ejemplo elegir (1) participar es una mejor respuesta para un $i \in N_2$ solamente en e^3_{-i} pero $j \in N_1$ puede optimizar eligiendo en e^2_{-j} así como en e^3_{-j} . Entonces para esto necesitamos distinguir trayectorias de salida respectivamente. Recordemos $r(w)$ es el número de errores que contiene la trayectoria w . Para cada equilibrio “e” definimos:

$r_i(e, N_1) = \min\{r(w) \mid w \text{ es una trayectoria de salida de } e \text{ con } i \in N_1 \text{ como el primer exitor}\}$ y $r_i(e, N_2)$ se define análogamente así entonces definimos la resistencia de salida de e por:

$$r(e) = \min\{\min_{i \in N_1} r_i(e, N_1), \min_{i \in N_2} r_i(e, N_2)\}$$

Notemos que la $r(e, e') \geq r(e)$ para algún $e' \neq e$. Mas aún si hay una trayectoria de e a e' con exactamente $r(e)$ número de errores entonces $r(e, e') = r(e)$.

Con lo anterior empezaremos en análisis con el equilibrio de la no cooperación total e^1 , en el cual cada jugador elige 0. Considérese una trayectoria de salida de e^1 con un jugador $i \in N_1$ como el primer exitor. Alguna trayectoria tal (es una secuencia de perfiles de tamaño mayor que m) de e^1 que contiene una muestra (tamaño k subsecuencia de la trayectoria) en la cual i puede optimizar eligiendo 1. Recordemos que $i \in N_1$ juega una acción óptima 1 con algún perfil e^2_{-i} o e^3_{-i} . Para cualquier otro perfil, 0 es la única mejor respuesta. Así cualquier muestra debe contener un número suficiente de e^2_{-i} o e^3_{-i} . Entonces andamos en la búsqueda del mínimo número de errores para esto fijemos una muestra que contenga e^2_{-i} pero no e^3_{-i} . Por lo que ahora nuestra pregunta se transforma en ¿Cuántos e^2_{-i} necesitamos? Si i elige 1, entonces el jugador gana el pago de la cooperación parcial a_i en contra e^2_{-i} . En contra parte en los otros perfiles el jugador recibe el pago no cooperativo d_i menos el costo de participación ϵ_i . De otra manera, el jugador puede asegurar d_i si selecciona 0. Ahora nos queda claro que si el costo de participación es suficientemente pequeño entonces es suficiente con que un e^2_{-i} aparezca. De hecho en el modelo ϵ_i representa solamente el costo de la negociación, opuestamente al costo de mantenimiento por cooperación. Entonces de esta manera podemos asumir que en esta situación el costo es “pequeño”. Esto conduce a concluir que $r_i(e^1, N_1) = n_1 - 1$.

Un argumento similar muestra $r_i(e^1, N_2) = n_1 - 1$. Por lo que se tiene que $r(e^1) = n_1 - 1$.

Para el equilibrio de la cooperación parcial e^2 , se necesita un análisis mas cuidadoso. Por lo que se necesita introducir una serie de términos. Dado un perfil σ y un jugador $i \in N$, σ_{-i} es llamado un subperfil. Cualquier subperfil σ_{-i} tal que $\sigma_{-i} \notin \{e_{-i}^2, e_{-i}^3\}$ es llamado un subperfil de desequilibrio. (en particular e_{-i}^1 es un subperfil de desequilibrio) Nótese que solamente un error basta para volver e_{-i}^2 o e_{-i}^3 en un subperfil de desequilibrio. Considérese $r_i(e^2, N_2)$ primero. En e^2 cada $i \in N_2$ parasita eligiendo 0. Para evaluar $r_i(e^2, N_2)$ entonces observaremos el mínimo número de errores que bastan para racionalizar a un $i \in N_2$ para que cambie a 1. Fijemos un jugador $i \in N_2$ y asumamos que i es un primer exitor de una trayectoria de salida de e^2 . Para $i \in N_2$, e_{-i}^3 es el único subperfil en el cual el jugador i optimiza si selecciona 1. La mejor respuesta a e_{-i}^2 es 0, y al elegir esto, el gana el pago por parasitar f_i . La única mejor respuesta al subperfil de desequilibrio es también 0 que resulta en el pago de la no cooperación total d_i . Por lo que la pregunta es que tipo de muestra se necesita para que el jugador $i \in N_2$ optimice seleccionando 1.

Hay 2 tipos de muestra que se necesitan distinguir. Primero consideremos una muestra que surge como sigue. Un día (se dice), todos los jugadores $j \in N_2$ ($j \neq i$) sucede que realizan errores simultáneamente y el día 2 en el estado en el cual suficientes números de e_{-i}^3 's se han acumulado, los errores ocurren simultáneamente y consecutivamente. Esto produce una muestra que consiste de e_{-i}^2 y e_{-i}^3 . El incentivo para parasitar está presente y esto es directo del cálculo por el número suficiente de e_{-i}^3 . Jugador i 's mejor respuesta a la muestra es 1 si:

$$sa_i + (k - s)c_i \geq sd_i + (k - s)f_i$$

donde $s, (k-s)$ respectivamente es el número de $e_{-i}^3, (e_{-i}^2 \text{ resp})$ en la muestra. Por lo tanto el número suficiente de e_{-i}^3 para el cambio debe ser al menos $\alpha_i k$ donde

$$\alpha_i = \left(\frac{f_i - c_i}{a_i - d_i + f_i - c_i} \right)$$

Para que este tipo de salida suceda, al menos $(n_2 - 1)\alpha_i k$ errores son requeridos. Una salida de este tipo es llamada una vía directa de transición de salida.

La Figura 4.3 exhibe una trayectoria en la cual una vía directa de transición de salida ocurre. En esta y figuras similares una acción realizada por error es indicada por un asterisco como 1^* .

	m			$k-t^*$			t^*				
σ_1	1	...	1	1	...	1	1	...	1	1	...
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...
σ_{n_1}	1	...	1	1	...	1	1	...	1	1	...
σ_{n_1+1}	0	...	0	0	...	0	0	...	0	1	...
σ_{n_1+2}	0	...	0	0	...	0	1^*	...	1^*	0	...
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...
$\sigma_{n_1+n_2}$	0	...	0	0	...	0	1^*	...	1^*	0	...

Figura 5.3: Una vía de salida directa de e^2

Hay otro tipo de salida de e^2 . Considérese una muestra la cual consiste de $k-1$ subperfiles de desequilibrio juntos con un e_{-i}^3 . Por ejemplo esta muestra surge como sigue: Desde el equilibrio original e^2 , en el día 0, $i \in N_2$ tiene una muestra que consiste enteramente de e_{-i}^2 . Desde el primer día hasta el k , al menos un jugador $j \neq i$ realiza un error, y solamente en uno de estos días todos los jugadores $j \in N_2$ ($j \neq i$) sucede que realizan errores simultáneamente. En el día $k+1$ el incentivo para parasitar desaparece. Como el resultado y un argumento similar aplicado a $r(e^1)$ la mejor respuesta a la muestra es 1, si el costo de participación es suficientemente pequeño. Para que tal evento suceda, el número total de errores requerido es $k-1 + (n_2 - 1) = k + n_2 - 2$. Llamaremos a este tipo de salida una vía de transición indirecta de salida. Esta vía está representada en la figura 4.4.

	m			$k-1$					
σ_1	1	...	1	1	1	...	1	0	...
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...
σ_{n_1-1}	1	...	1	1	1	...	1	0	...
σ_{n_1}	1	...	1	1	0^*	...	0^*	0	...
σ_{n_1+1}	0	...	0	0	0	...	0	1	...
σ_{n_1+2}	0	...	0	1^*	0	...	0	0	...
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	...
$\sigma_{n_1+n_2}$	0	...	0	1^*	0	...	0	0	...

Figura 5.4: Una vía de salida indirecta de e^2

Ahora es claro que n_2 el número posible de parasitadores juega un papel muy importante en el análisis. Si $n_2 = 2$ el número de errores requeridos en una vía directa de transición nunca excede el de una vía indirecta de transición de salida. De esto $r_i(e^2, N_2)$ está dado por la transición directa si n_2 es “pequeña”, pero cuando es “grande”, esta dado por la transición indirecta de salida. Notemos que la transición indirecta con tres o más jugadores requiere más de k errores ($k - 1 + (n_2 - 1) > k$). Esto resalta el valor de si N_2 es grande o pequeño ya que esta distinción se vuelve relevante porque en el juego se permiten 3 o más jugadores en N_2 . Está distinción refleja una importante característica de los juegos con más de dos jugadores.

Considérese $r_i(e^2, N_1)$ como sigue. En e^2 cada $i \in N_1$ toma 1. Con esto observaremos que el mínimo número de errores requeridos para un cambio óptimo para “i” de 1 a 0 es el siguiente. Para $i \in N_1$, 0 es una mejor respuesta solamente en subperfiles de desequilibrios. Desde el estado original $h(e^2)$, la muestra entera inicial dada por i consiste de e^2_{-i} . Así que cada e^2_{-i} debe ser reemplazado por un subperfil de desequilibrio, específicamente cuando el costo de participación ϵ_i es suficientemente pequeño, el argumento dado para $r_i(e^1, N_1)$ lo podemos aplicar una vez más aquí. Es decir, todos los de e^2_{-i} ´s necesitan ser reemplazados por subperfiles de desequilibrio, y esto puede suceder por ejemplo pensando en que cada día desde el día 1 hasta el día k al menos un jugador $j \neq i$ realiza un error. En el día $k+1$, una muestra que contiene solamente subperfiles de desequilibrio esta disponible para “i”, lo cual permite un cambio óptimo a 0. Así $r_i(e^2, N_1) = k$. A este tipo de salida le llamamos la vía de transición indirecta de salida. Para resumir esto tenemos que $r(e^2) = r_i(e^2, N_1) = k$ Cuando n_2 es grande y $r(e^2) \leq r_i(e^2, N_2) < k$ cuando n_2 es pequeño.

Pasa salir desde el equilibrio de la cooperación total, necesitamos una (grande/pequeña) diferencia de n_2 . Hay algo muy importante a notar sin embargo $r_i(e^3, N_2)$ nunca excede a k aunque n_2 sea “grande” entonces 0 es una mejor respuesta a la muestra que consiste enteramente de subperfiles de desequilibrio.

Dado lo anterior esto induce la siguiente definición.

Definición 5.0.34. *El radio de incentivo de un jugador $i \in N_2$ es la fracción:*

$$\eta_i = \frac{a_i - d_i}{f_i - d_i}$$

El tamaño de la población n_2 de N_2 es grande (pequeño resp) para salir de e^2 de un jugador $i \in N_2$ si $n_2 - 2 \geq n_i$ ($n_2 - 2 < n_i$ resp).

n_2 es grande para salir de e^2 si este es grande para salir de e^2 para cada $i \in N_2$. De otro modo n_2 es pequeño para salir de e^2 .

Similarmente n_2 es grande (pequeño resp) para salir de e^3 para un jugador $i \in N_2$ si $n_2 - 2 \geq 1/n_i$ ($n_2 - 2 > 1/n_i$, resp).

n_2 es grande para salir de e^3 si este es grande para salir de e^3 para cada $i \in N_2$. De otro modo n_2 es pequeña para salir de e^3 .

Comparado con la no cooperación total, cada $i \in N_2$ recibe un mejor pago en los dos equilibrios: la cooperación parcial y la cooperación total. El radio de incentivo η_i mide la magnitud relativa sobre las ventajas del equilibrio de la cooperación parcial y de la cooperación total. Esto juega un rol crucial en el resto del análisis. Definimos:

$$\alpha = \min_{i \in N_2} \left(\frac{f_i - c_i}{a_i - d_i + f_i - c_i} \right) \text{ y } \beta = \min_{i \in N_2} \left(\frac{a_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - c_i} \right)$$

Denotamos por $[z]$ al mayor entero o igual al número z .

Lema 5.0.35. *Por hipotesis tenemos que ϵ_i es suficientemente pequeña y k suficientemente grande.*

1. Si n_2 es grande para salir de e^2 , entonces $r(e^2) = k$
2. Si n_2 es pequeño para salir de e^2 , entonces $r(e^2) = \min_{i \in N_2} r_i(e^2, N_2)$ y $(n_2 - 1)\alpha k \leq r(e^2) \leq (n_2 - 1)[\alpha k] < k$
3. Si n_2 es grande para salir de e^3 , entonces $r(e^3) = k$

4. si n_2 es pequeño para salir de e^3 , entonces $r(e^3) = \min_{i \in N_2} r_i(e^3, N_2)$ y

$$(n_2 - 1)\beta k \leq r(e^3) \leq (n_2 - 1)[\beta k] < k$$

El lema confirma que la distinción entre (grande/pequeño) funciona como se deseaba. En el lema 5.0.19, αk es el número aproximado de repeticiones de e_{-i}^2 en una vía directa de transición de salida y βk lo mismo pero para e_{-i}^3 . La prueba de este lema se encuentra en el apéndice. Ahora lo que sigue es evaluar las resistencias.

Lema 5.0.36. .

1. $r(e^1, e^2) \leq n_1$ y $r(e^1, e^2) < r(e^1, e^3)$

2. $r(e^2, e^1) = r(e^2)$

3. $r(e^3, e^1) = r(e^3)$

4. Si n_2 es grande para salir de e^2 , entonces $r(e^2, e^3) > k$.

La resistencia de salida $r(e)$ nos da una cota por abajo de la resistencia $r(e, e')$. Por construcción una trayectoria de e a e' , de otra manera se conseguirá una cota superior para esto. Consideremos el equilibrio de la no cooperación total e^1 . Comencemos en el estado $h(e^1)$, supongamos que los jugadores $i = 1, \dots, n_1$ eligen simultáneamente eligen 1 por error en el día 1. Como habíamos visto antes solamente un e_{-i}^2 es suficiente para $i \in N_1$ para cambiar óptimamente a 1, proviendo el costo de participación si este es suficientemente pequeño. Por lo tanto cada $i \in N_i$ puede jugar utilizando 1 optimizando en el día 2. Vease figura 4.5. Así $r(e^1, e^2) \leq n_1$. Más aún se puede mostrar que $r(e^1, e^3) > r(e^1, e^2)$. Para eso tenemos el lema 5.0.20.1.

	$\underbrace{\hspace{2em}}_m$			$\underbrace{\hspace{2em}}_k$			
σ_1	0	...	0	1^*	1	...	1
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
σ_{n_1}	0	...	0	1^*	1	...	1
σ_{n_1+1}	0	...	0	0	0	...	0
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
$\sigma_{n_1+n_2}$	0	...	0	0	0	...	0

Figura 5.5: Una trayectoria de e^1 a e^2 con n_1 errores

Por definición si hay una trayectoria de e a e' con exactamente $r(e)$ número de errores entonces $r(e, e') = r(e)$. Consideremos el equilibrio de la cooperación parcial e^2 y recordemos la trayectoria que sale de un $i \in N_2$ una vía directa de transición. (figura 4.3) En la trayectoria, todos los jugadores en N_1 mantienen su mejor respuesta. Eso es jugador $j \in N_2$ ($j \neq i$) es el que comete los errores, mientras se mantienen realizando errores el jugador “i” mantiene su estrategia 0 jugando óptimamente. Por lo tanto no aparecen e^3_{-j} en la trayectoria. Con esto no hay oportunidad de que j cambie a 1. De esto tenemos que después que “i” optimiza cambiando a 1 entonces consecutivamente selecciona 1 y esto nos da una acumulación de subperfiles de desequilibrio para $j \neq i$. Esto es directo, en particular jugadores en N_1 que cambian a 0. En este sentido el óptimo cambio por un $i \in N_2$ a 1 no nos conduce a e^3 pero si a e^1 . De donde $r(e^2, e^1) = r(e^2)$. Argumentos similares se aplican no solo para transiciones indirectas de salida de e^2 , sino también para transiciones de salida del equilibrio de la cooperación total e^3 . Con esto se tienen los incisos 2 y 3. Como resultado tenemos que $r(e^2, e^1) \leq r(e^2 e^3)$ y $r(e^3, e^1) \leq r(e^3, e^2)$. Este resultado nos sugiere que los juegos adaptativos se mueven del estado de la cooperación parcial al de la cooperación total, o algo cercano a este equilibrio, es fácil seguir una trayectoria indirecta en la cual los jugadores se mueven del equilibrio de la no cooperación total a otro equilibrio. Lo cual se probará mas adelante. El inciso 4 es una consecuencia en realidad de que si $r_i(e^2, N_2)$ excede k cuando n_2 es grande para salir de e^2 . Este lema está probado en el apéndice pero en palabras esto es lo que explica.

El análisis nos resalta 2 tipos de resistencia a evaluar. En la cual primero tenemos las resistencias de salida de e^2 a e^3 las cuales deben ser evaluadas en términos de k . Específicamente de estas resistencias se tienen al menos k y algunas de estas son menores a k esto solo se da cuando n_2 es pequeño. Lo segundo es la resistencia de salida de e^1 que es independiente de k y la cual es sólo evaluada en términos de n_1 . Con esto nos queda claro que ninguna hipótesis nos refiere a la magnitud relativa entre k y n_1 , por lo anterior no podemos comparar estos dos tipos de resistencias. Por lo que estaremos enfocados en el análisis de la situación en la cual la muestra de tamaño de k es mucho más grande que el tamaño del grupo n_1 . En otras palabras no estamos interesados cuando es un número medio de jugadores.

Lema 5.0.37. *Para k suficientemente grande, $r(e^1, e^2) \leq \min\{r(e^1, e^2), r(e^3, e^1)\}$.*

Demostración:

Por el lema 5.0.20 inciso (1), $r(e^1, e^2) \leq n_1$. Si el tamaño de la muestra k es bastante grande tal que:

$$k > \max_{i \in N_2} \left\{ \frac{n_1(a_i - d_i + f_i - c_i)}{f_i - c_i}, \frac{n_1(a_i - d_i + f_i - c_i)}{a_i - d_i} \right\},$$

entonces tenemos $n_1 < \min\{e^1, e^2\}$ por el lema 5.0.19. Por definición de resistencia de salida $r(e^i) \leq r(e^i, e^1)$, donde $i = 2, 3$. Más aún $n_1 < \min\{r(e^2, e^1), r(e^3, e^1)\}$. †

Con esto se pueden derivar resultados respecto a la selección de equilibrios que mencionaremos a continuación.

SELECCIÓN DE EQUILIBRIOS

Ahora diremos que un árbol domina (débil resp) a otros si el potencial estocástico del primero es estrictamente menor (menor o igual resp) que el de los últimos. En el JFG, hay 9 árboles a considerar los cuales se muestran en la fig 4.6. En los cuales tenemos como hipótesis que la muestra k es suficientemente grande y el costo ϵ_i de participación ($i \in N_2$) es suficientemente pequeño.

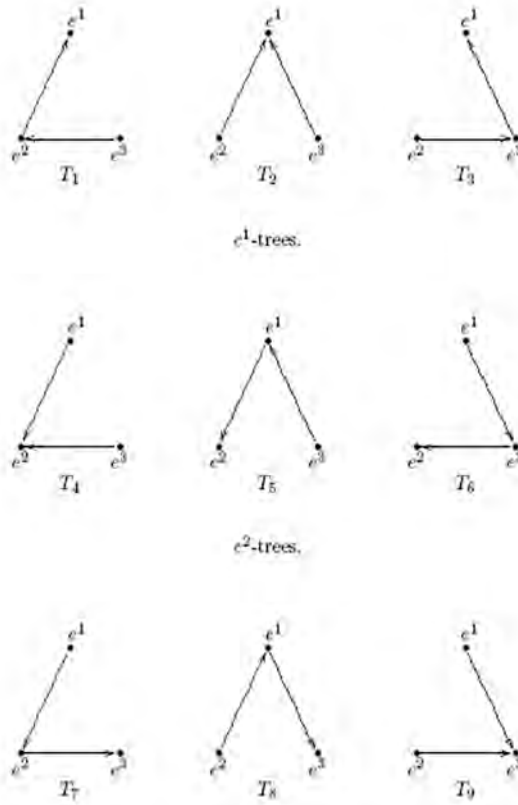


Figura 5.6: Árboles en el juego de formación de grupo

Lema 5.0.38. *El árbol mínimo es cualquiera T_4 , T_5 , T_7 o T_8 . Más aún T_5 domina débilmente a T_4 .*

Demostración:

Por el lema 5.0.20 inciso (1) T_4 y T_7 dominan a T_6 y T_9 respectivamente. Por el lema 5.0.21 T_4 , T_5 y T_7 dominan T_1 , T_2 y T_3 respectivamente. Finalmente T_5 domina débilmente T_4 por lema 5.0.20 inciso (3). †

Teorema 5.0.39. *El equilibrio de la no cooperación total no es estocásticamente estable.*

Si el conjunto N_1 de jugadores es de tamaño mediano (es decir el número de jugadores es relativamente pequeño), la resistencia de la no cooperación total a la cooperación parcial se convierte

en la más pequeña entre todas las resistencias. Esto es que el equilibrio de la no cooperación total es el más sencillo para salir de él. Por lo tanto no es estocásticamente estable. †

Una consecuencia de esto es que el equilibrio estocásticamente estable se encuentre entre el de la cooperación parcial y el de la cooperación total.

Para identificar tenemos que prestar atención en si n_2 es grande para salir de e^2 . Con lo cual podemos decir si n_2 es grande entonces n_2 es grande para salir de e^2 .

Teorema 5.0.40. *Si n_2 es grande, entonces el equilibrio de la cooperación parcial es el único estocásticamente estable.*

Demostración:

Por el lema 5.0.22 es suficiente mostrar que T_5 domina T_7 y T_8 . Del lema 5.0.19 inciso (3 y 4) y del lema 5.0.20 inciso (3) que $r(e^3, e^1) \leq k$. Si n_2 es grande para salir de e^2 , entonces $r(e^2, e^3) > k$ por lema 5.0.20 inciso (4). Esto es $r(e^2, e^3) > r(e^3, e^1)$. Por lo tanto T_5 domina a T_7 . Si n_2 es grande para salir de e^2 entonces $r(e^2, e^1) \geq k$ por el lema 5.0.19 inciso (1). Esto nos da como resultado $r(e^2, e^1) \geq r(e^3, e^1)$ usando esta desigualdad y el lema 5.0.20 inciso (1) juntas nos dan: $r(e^2, e^1) + r(e^1, e^3) > r(e^3, e^1) + r(e^1, e^2)$ por lo que T_5 domina a T_8 . †

Lo que en palabras dice es que cuando el número de potenciales pársitadores excede el nivel crítico, el equilibrio de la cooperación parcial es estable. Hay dos formas de leer las suposiciones del teorema.

$$n_2 - 2 \geq \max_{i \in N_2} \frac{a_i - d_i}{f_i - d_i}$$

La primera nos dice que dado el radio de incentivo de los potenciales parasitadores, el teorema establece que el equilibrio en el que se puede parasitar es el único estable cuando hay suficiente número de parasitadores. La segunda interpretación nos dice que dado el número de potenciales parasitadores el más fuerte incentivo para parasitar es el más pequeño radio de incentivo.

El teorema nos dice de manera natural que cuando el incentivo para parasitar es suficientemente fuerte, el equilibrio donde se puede parasitar es el probable para que se observe en el largo tiempo.

Notemos que si $f_i > g_i$ para cada $i \in N_2$. El teorema aplica para $n_2 \geq 3$. Observemos que si se tienen preferencias heterogéneas y los jugadores tienen mayores radios de incentivos las hipótesis del teorema se vuelven más difíciles de satisfacer.

Técnicamente el resultado se enuncia aproximadamente de la siguiente forma:

Cuando n_2 es grande, se sigue que la resistencia para pasar del equilibrio de la cooperación parcial e^2 a la cooperación total e^3 es mayor que k y que la resistencia del equilibrio de la cooperación parcial e^2 a la no cooperación total e^1 es exactamente k . La resistencia de e^3 a e^1 es por otra parte menor o igual a k . La primera consecuencia es que el e^3 -árbol $e^1 \rightarrow e^2 \rightarrow e^3$ es dominado por el e^2 árbol $e^3 \rightarrow e^1 \rightarrow e^2$. La segunda consecuencia es que el otro e^3 árbol $e^2 \rightarrow e^1 \rightarrow e^3$ es dominado por el e^2 árbol. De donde el mínimo árbol es $e^3 \rightarrow e^1 \rightarrow e^2$.

Cuando el número de potenciales parasitadores es pequeño respecto al nivel crítico esto da como resultado que la estabilidad estocástica es determinada por una variante de la relación de dominancia por riesgo (Harsanyi, Selten 1988). Antes de dar el resultado se introducirá la relación antes mencionada.

Hipótesis Supongamos que todos los jugadores de N_2 esperan que en el juego se alcance alguno de los dos equilibrios ya sea el de la cooperación total o la cooperación parcial pero no tienen certeza sobre cual de los dos equilibrios prevalecerá. También supongamos que cada jugador $i \in N_2$, espera que el equilibrio de la cooperación parcial sea jugado con una probabilidad t y el equilibrio de la cooperación total con una probabilidad $1-t$. Si el jugador i participa en el grupo su pago esperado es $td_i + (1-t)a_i$ (despreciando el costo de participación ϵ_i pequeño). Si el jugador no participa, entonces recibe el pago $tf_i + (1-t)d_i$. Entonces es óptimo para el jugador permanecer en el equilibrio de la cooperación total si $t < \frac{\eta_i}{1+\eta_i}$. Así $\min_{i \in N_2} \frac{\eta_i}{1+\eta_i}$ puede ser interpretado como el nivel de máximo riesgo donde todos los jugadores en N_2 pueden permanecer en el equilibrio de la cooperación total. Similarmente $\min_{i \in N_2} \frac{1}{1+\eta_i}$ puede ser interpretado como el máximo nivel de riesgo en donde todos los jugadores en N_2 pueden permanecer en el equilibrio de la cooperación parcial. Específicamente si: $\min_{i \in N_2} \frac{\eta_i}{1+\eta_i} > \min_{i \in N_2} \frac{1}{1+\eta_i}$ entonces el equilibrio de la cooperación total es más “robusto” que el equilibrio

de la cooperación parcial respecto a la consideración de riesgo. En este caso siguiendo el espíritu de Harsanyi, Selten podemos decir que el equilibrio de la cooperación total domina por riesgo el equilibrio de la cooperación parcial. La prueba de esto se encuentra en el apéndice.

Entonces el resultado final se enuncia como:

Teorema 5.0.41. *Hipótesis n_2 es pequeño*

1. *El equilibrio de la cooperación total es el único estocásticamente estable si:*

$$\min_{i \in N_2} \frac{\eta_i}{1+\eta_i} > \min_{i \in N_2} \frac{1}{1+\eta_i}$$

2. *El equilibrio de la cooperación parcial es el único estocásticamente estable si:*

$$\min_{i \in N_2} \frac{\eta_i}{1+\eta_i} < \min_{i \in N_2} \frac{1}{1+\eta_i}$$

La relación de dominancia por riesgo puede ser reescrita de una forma simple. Sea η_M (η_m resp) el mayor (menor resp) radio de incentivo entre todos los potenciales parasitadores en N_2 . Entonces la condición de dominancia por riesgo equivale a $\frac{\eta_m}{1+\eta_m} > \frac{1}{1+\eta_M}$ la cual puede ser reducida a $\eta_m \eta_M > 1$ o $(a_m - d_m)(a_M - d_M) > (f_m - d_m)(f_M - d_M)$

La última desigualdad hace ver que la dominancia por riesgo que se encuentra aquí es una variante de la versión original de Harsanyi y Selten (1988). En particular, las dos coinciden una con otra cuando $n_2 = 2$. Más aún cuando el equilibrio de la cooperación total es Pareto eficiente. Esto es $a_i > f_i$ para cada $i \in N_2$ entonces el primero domina por riesgo al último y así el equilibrio de la cooperación total es estocásticamente estable.

Para ilustrar mejor lo que se ha venido platicando en los temas anteriores veamos el siguiente juego: Considérese un juego de Cournot lineal con costos asimétricos como sigue:

Sea $N = \{1, \dots, n\}$ que denota al conjunto de firmas. Las firmas producen bienes homogéneos como función lineal (inversa) de demanda, $p = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$ después de la normalización, donde p es el precio del bien y x_i es la producción de la firma i . La firma i tiene una función lineal de costo $c_i(x_i) = c_i x_i$. Para un perfil de producción $x = (x_1, \dots, x_n)$, el beneficio $\pi_i(x)$ para una firma i esta dado por

$$\pi_i(x) = (p - c_i)x_i.$$

Se conoce que el juego lineal de Cournot tiene un único equilibrio de Nash que es como sigue:

- firma i's producción: $x_i^* = \frac{1 - nc_i + \sum_{j \neq i} c_j}{n+1}$
- firma i's beneficio: $\pi_i(x^*) = \frac{(1 - nc_i + \sum_{j \neq i} c_j)^2}{(n+1)^2}$
- precio $p = \frac{1 + \sum_{i=1}^n c_i}{n+1}$

Supongamos que las firmas pueden elegir libremente participar en un cartel. Para simplificar el análisis podemos decir que si un cartel se forma, el total de la producción es realizada por el miembro de la firma con el costo menor de entre los miembros. Los miembros del cartel es un subconjunto S de N y denotemos por c_s al costo por unidad del cartel S . i.e. $c_s = \min\{c_i | i \in S\}$. Entonces por la fórmula anterior podemos ver que el juego de Cournot con cartel S tiene un único equilibrio de Nash en los cuales el beneficio de las firmas esta dado a continuación.

- El beneficio total del cartel

$$\pi^S = \frac{(1 - mc_s + \sum_{j \in S} c_j)^2}{(m+1)^2}$$

- Miembros que no participan en el cartel

$$\pi_i^S = \frac{(1 - mc_s + \sum_{j \in S, j \neq i} c_j + c_s)^2}{(m+1)^2}$$

donde $m = n - |S| + 1$. El beneficio π^S del cartel corresponde a la suma del pago del grupo $g_i(C, S - i)$ para $i \in S$ en el gráfico original (asumiendo el costo del grupo = 0) y los miembros no participantes su beneficio π_i^{-S} corresponde al pago por parasitar $u_i(D, S - i)$. Con esto en mente podemos aplicar los resultados de formación de cartel en el juego de Cournot.

Como punto de referencia primero se considerará el caso simétrico en donde todas la firmas tienen el mismo costo unitario c .

Nosotros suponemos que el total del beneficio π^S es distribuido equitativamente entre los miembros del cartel. En este caso el beneficio π_i^S del miembro i esta dado por:

$$\pi_i^S = \frac{(1-c)^2}{(n-s+2)^2 s}$$

y los no miembros del cartel su pago esta dado por:

$$\pi_i^{-S} = \frac{(1-c)^2}{(n-s+2)^2}$$

Observamos que los que no estan en el cartel reciben mayores beneficios que los miembros. Ellos pueden parasitar en la coordinación de egresos del cartel. El umbral de cooperación s^* para una firma esta dado por el mínimo entero s tal que:

$$\pi_i^S = \frac{(1-c)^2}{(n-s+2)^2 s} > \frac{(1-c)^2}{(n+1)^2}$$

donde el lado izquierdo es el pago del equilibrio de Cournot en el caso que no se forma cartel. Observando la desigualdad podemos ver que s^* es el mínimo entero que satisface $(n+1)^2 > (n-s+2)^2 s$. Entonces dado esto notamos que s^* esta dado por lo siguiente:

$$s^* = n + 3/2 - \sqrt{n + 5/4}.$$

De esta fórmula se puede notar que el cartel que se forma en el tamaño del equilibrio es menor que n pero mayor que $(n/2)$. Finalmente la heterogeneidad en costos lo podemos ver con un ejemplo: Consideremos tres firmas 1,2,3. con costos unitarios $c_1 = c_2=0.1$, $c_3=0.2$. Por la fórmula de beneficio para π_i dada cuando un cartel se forma nosotros podemos observar los siguientes casos:

$$[\{1\}, \{2\}, \{3\}] = \pi_1 = \pi_2 = 0.063, \pi_3 = 0.023$$

$$[\{1, 3\}, \{2\}] : \pi_1 + \pi_3 = 0.090, \pi_2 = 0.090$$

$$[\{1, 2\}, \{3\}] = \pi_1 + \pi_2 = 0.111, \pi_3 = 0.054$$

$$[\{1, 2, 3\}] : \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0.203$$

donde el conjunto de más de una firma representa el cartel. Supongamos que las firmas 1 y 3 forman un cartel. Tenemos que el beneficio total del cartel es de 0.090 que mayor que la suma de sus respectivos pagos en el equilibrio de Cournot, esto nos da como resultado que el cartel $\{1,3\}$ es exitoso. En contraste con lo anterior, el cartel $\{1,2\}$ no es exitoso ya que el beneficio obtenido es 0.111 que es menor que el de la suma que reciben en el Cournot que es 0.126. Notamos que no hay interes para

las firmas 1 y 2 para formar un cartel ya que las dos tienen costo 0.1. por lo que $\{1,2\}$ es un cartel desventajoso. El cartel en el cual todos participan es exitoso ya que el pago es 0.203 que es más grande que la suma 0.149 de todas las firmas en el equilibrio de Cournot. Cualquiera de los carteles exitosos que se forman en equilibrio en el juego de formación de grupo depende de la distribución del beneficio total en el cartel $\{1,2,3\}$. Supongamos que el total del pago es distribuido de acuerdo con la solución del juego de bargaining de Nash con el status quo en el beneficio del equilibrio de Cournot. Entonces si las dos firmas tienen un mayor beneficio 0.090 que el 0.081 por la desviación del cartel, podemos concluir que el cartel de 2 firmas es estable léase $\{1,3\}$. Como la firma 1 y 2 son simétricas, el cartel $\{2,3\}$ es también un equilibrio estable del juego de formación de grupo.

Con este tipo de teoría se pueden abordar temas como lo que está sucediendo con las aerolíneas debido a que es la formación de carteles las cuales respetan las rutas del costo minoritaria de la empresa que es lo que se piensa con el Cournot anterior. Con lo que podemos ver que la otra aerolínea también recibe un buen pago que es por lo que se lucha siempre en el mercado.

APÉNDICE

Prueba del lema 5.0.19

Por definición,

$$r(e) = \min\{\min_{i \in N_1} r_i(e, N_1), \min_{i \in N_2} r_i(e, N_2)\}.$$

Más aún el lema 5.0.19 se sigue directo del lema 5.0.26 que se enunciará aquí abajo

Para esto sea

$$\alpha_i = \left(\frac{f_i - c_i}{a_i - d_i + f_i - c_i}\right) \text{ y } \beta_i = \left(\frac{a_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - c_i}\right)$$

Lema 5.0.42. *Sea $i \in N_2$ Para ϵ_i suficientemente pequeña, la $r_i(e, N_l)$ ($l = 1, 2$) esta dada como sigue:*

1. $r_i(e^1, N_1) = n_1 - 1$
2. $r_i(e^1, N_2) = n - 1$
3. $r_i(e^2, N_1) = k$
4. Si n_2 es grande para salir de e^2 para un jugador i , entonces la $r_i(e^2, N_2) > k$ para algún ϵ_i suficientemente pequeño.
5. Si n_2 es pequeña para salir de e^2 para un jugador i , entonces para k suficientemente grande,
 $(n_2 - 1)\alpha_i k \leq r_i(e^2, N_2) \leq (n_2 - 1)[\alpha_i k] < k$

$$6. r_i(e^3, N_1) = k$$

$$7. \text{ Si } n_2 \text{ es grande para salir de } e^3 \text{ para un jugador } i, \text{ entonces } r_i(e^3, N_2) = k$$

$$8. \text{ Si } n_2 \text{ es pequeño para salir de } e^3 \text{ para un jugador } i, \text{ entonces para } k \text{ suficientemente grande } (n_2 - 1)\beta_i k \leq r_i(e^3, N_2) \leq (n_2 - 1)[\beta_i k] < k.$$

Prueba del lema 5.0.26.

Para esto se evaluará cada $r_i(e^j, N_i)$ por lo cual se establecerá un programa entero y después se dará la evaluación de un valor óptimo. En tal programa, t y s son variables enteras, t, s variables no negativas que satisfacen que $t + s \leq k$, donde k es el tamaño de la muestra del juego adaptativo. Nótese que ϵ_i es suficientemente pequeña.

$$\left[\frac{k\epsilon_i}{a_i - d_i + \epsilon_i} \right] = 1 \text{ y } \left[\frac{k(a_i - d_i)}{a_i - d_i + \epsilon_i} \right] = k$$

$$\text{Lema 5.0.26 (1) } r_i(e^1, N_1) = n_1 - 1$$

Recordemos que un jugador $i \in N_1$ optimiza jugando la acción 1 en contra del perfil de acción e^2_{-i} o el e^3_{-i} . Para cualquier otro perfil de acción 0 es la única mejor respuesta. Así que alguna muestra en la cual “i” puede optimizar jugando 1 debe de contener un suficiente número de e^2_{-i} o e^3_{-i} . Consideremos la primera muestra en la cual no contiene e^3_{-i} . Específicamente consideremos una muestra tomada por un jugador $i \in N_1$ que contiene e^2_{-i} t veces, e^1_{-i} por $k-t-s$ veces y s otras excluyendo (e^3_{-i}). Si “i” es el primer (exitor, desertor), cada 1 en e^2_{-i} (hay $n_1 - 1$ de estos) es un error, y cada uno de los “otros s ” perfiles contienen al menos un error. Con esto uno obtiene el mínimo número de errores resolviendo el siguiente programa entero. Notemos que 1 es una mejor respuesta respecto a la muestra si y solo si la restricción del programa satisface que:

$$\min(n_1 - 1)t + s, \text{ sujeto a } ta_i + (k - t)c_i \geq kd_i \text{ (L.1)}$$

la restricción en L.1 es equivalente a:

$$t \geq \frac{k(d_i - c_i)}{a_i - c_i} = \frac{k\epsilon_i}{a_i - d_i + \epsilon_i}$$

Para ϵ_i suficientemente pequeño, $t=1$ y $s=0$ es una solución factible para (L.1). Así que para muestras sin e_{-i}^3 el mínimo número de errores es $n_1 - 1$. Es claro que para muestras con e_{-i}^3 el número de errores excede $n_1 - 1$. Así que $r_i(e^1, N_1) = n_1 - 1 \dagger$.

Lema 5.0.26 (2) $r_i(e^1, N_2) = n - 1$

Prueba: Recordemos que un jugador $i \in N_2$ optimiza jugando 1 solo en contra de e_{-i}^3 . Para cualquier otro perfil, 0 es la única mejor respuesta. Así para alguna muestra en la cual “i” puede optimizar seleccionando 1 debe contener al menos un e_{-i}^3 . Si “i” es el primer (exitor, desertor) cada 1 en e_{-i}^3 (hay $n-1$ de ellos) es un error. Así $r_i(e^1, N_2) \geq n - 1$ para mostrar la otra desigualdad, considerese una muestra tomada por el jugador $i \in N_2$ que contenga perfiles e_{-i}^1 por $k-1$ veces y un e_{-i}^3 . 1 es una mejor respuesta en contra de esta muestra si y solo si:

$$a_i + (k-1)c_i \geq kd_i \text{ (L.2) la cual es equivalente a que } 1 \geq \frac{k(d_i - c_i)}{a_i - c_i} = \frac{k\epsilon_i}{a_i - d_i + \epsilon_i}$$

la desigualdad se mantiene para ϵ_i suficientemente pequeña. Más aún $r_i(e^1, N_2) \leq n - 1$ Por lo tanto tenemos lo que queríamos demostrar \dagger .

Lema 5.0.26 (3). $r_i(e^2, N_1) = k$

Prueba. Recordemos que un jugador $i \in N_1$ optimiza jugando 1 por un lado jugando contra e_{-i}^2 o e_{-i}^3 . Para cualquier otro perfil 0 es la única mejor respuesta. Considerese una muestra tomada por un jugador $i \in N_1$ que contiene un perfil como sigue: e_{-i}^3 por t veces, e_{-i}^2 por $k-t-s$ veces y s otros. Para que “i” optimice jugando 0 en contra de esta muestra debe haber un número suficiente de “otros” perfiles. De hecho mostraremos que $s = k$. 0 es una mejor respuesta en contra de esta muestra si y solo si: $kd_i \geq (k-s)a_i + sc_i$ que es equivalente a :

$$s \geq \frac{k(a_i - d_i)}{a_i - c_i} = \frac{k(a_i - d_i)}{a_i - d_i + \epsilon_i}. \text{ Donde } \epsilon_i \text{ es suficientemente pequeña, esto implica que } s \geq k. \text{ Así que para}$$

optimizar seleccionando 0, $i \in N_1$ no tiene una muestra que consista de “otros” perfiles. Si $i \in N_1$ es un primer (exitor, desertor) cualquier perfil ya sea e_{-i}^2 o e_{-i}^3 debe contener al menos un error. Más aún $r_i(e^2, N_1) = k \dagger$

Lema 5.0.36 (4) Si n_2 es grande para salir de e^2 para un jugador i , entonces la $r_i(e^2, N_2) > k$ para algún ϵ_i suficientemente pequeño.

Prueba. Recordemos que un jugador $i \in N_2$ optimiza jugando 1 solamente en contra de e_{-i}^3 . Para cualquier otro perfil 0 es la única mejor respuesta. Así para alguna muestra en la cual “i” pueda optimizar eligiendo 1 debe contener un suficiente número de e_{-i}^3 . Si i es el primer (exitor, desertor) cada 1 en e_{-i}^3 jugado por un miembro en N_2 es un error (hay $n_2 - 1$ de estos) y cada uno de los otros “s” perfiles contiene al menos un error. Considerese una muestra tomada por el jugador $i \in N_2$ que consiste de perfiles e_{-i}^3 por t veces, e_{-i}^2 por k-t-s veces, y s otros. Podemos evaluar el mínimo número de errores resolviendo el siguiente programa entero. Notemos que 1 es una mejor respuesta en contra de esta muestra si y solo si la restricción del programa es satisfecha.

$$\min(n_2 - 1)t + s \text{ sujeto a } ta_i + (k - t)c_i \geq (k - t - s)f_i + (t + s)d_i \text{ L.3}$$

El valor exacto de $r_i(e^2, N_2)$ esta dado por el programa L.3 con restricción entera. Si ignoramos la restricción entera el valor óptimo de L.3 excede a k. Notemos que cuando la función objetivo pasa a través de una solución óptima de L.3 esta se intercepta en el eje S dando el valor óptimo de L.3. La restricción en L.3 es equivalente a:

$$s \geq \frac{k(f_i - c_i)}{f_i - d_i} - \left(\frac{a_i - d_i + f_i - c_i}{f_i - d_i} \right) t.$$

Dibujando t en el eje horizontal y s en el eje vertical entonces respecto a estas coordenadas, la cota de la restricción en L.3 es una línea que tiene una pendiente negativa mayor que -1 y se intercepta en el eje s sobre k. Veáse figura 5, de otra manera, la pendiente de la función objetivo es $-(n_2 - 1)$. Ahora supondremos que n_2 es grande para salir de e^2 .

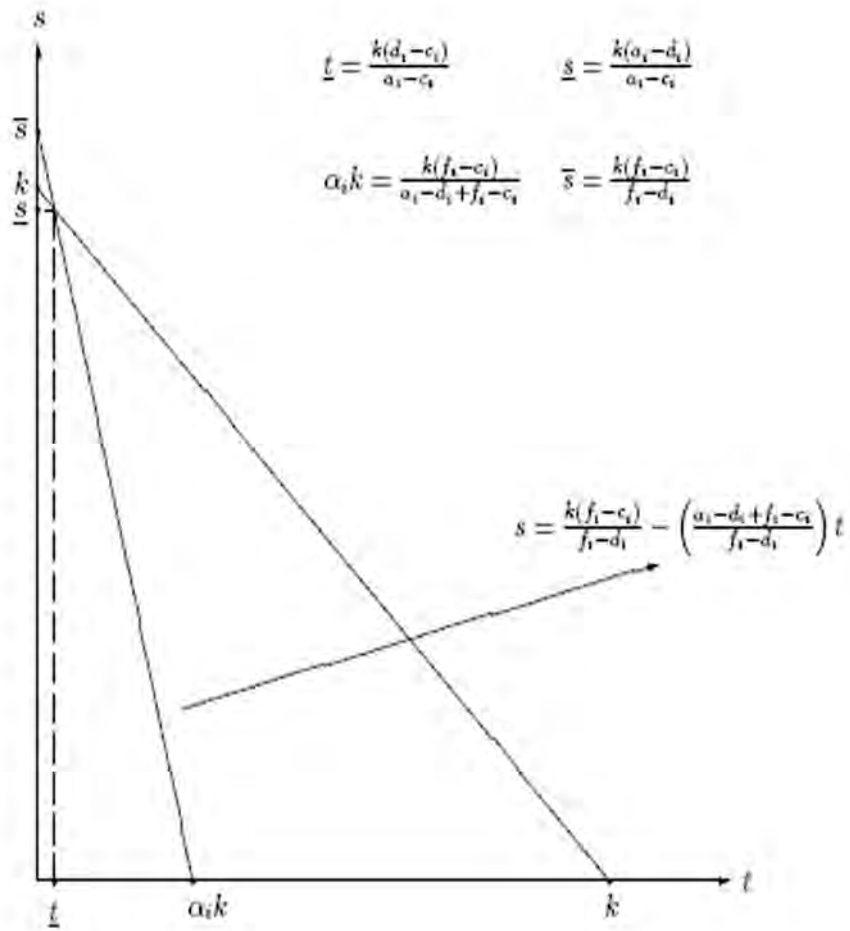


Figura 5.7: Programa $r_i(e^2, N_2)$

Para esto hay 2 casos a considerar.

Caso 1 $n_2 - 2 > \eta_i$. En este caso $n_2 - 1 > \frac{a_i - d_i + f_i - d - i}{f_i - d - i}$. Así para un ϵ_i suficientemente pequeño $n_2 - 1 \geq \frac{a_i - d_i + f_i - c - i}{f_i - d - i}$ donde $c_i = d_i - \epsilon_i$. Más aún la función objetivo es de pendiente(débil) ya que la restricción está acotada. Así $(\underline{t}, \underline{s})$ en la figura 4.7 es una solución óptima. Claramente cuando la función objetivo pasa sobre $(\underline{t}, \underline{s})$ la intersección es sobre \bar{s} la cual se vuelve estricta excediendo a k . Más aún $r_i(e^2, N_2) \geq k$.

Caso 2 $n_2 - 2 = \eta_i$ En este caso:

$$n_2 - 1 < \frac{a_i - d_i + f_i - c - i}{f_i - d_i}$$

para algún $\epsilon_i > 0$. Más aún la función objetivo es favorecida ya que la restricción está acotada. Así $(\alpha_i k, 0)$ en la figura 5 es la única solución de (L.3) donde:

$$\alpha_i k = \frac{k(f_i - c_i)}{a_i - d_i + f_i - c_i}$$

donde la función objetivo pasa sobre $(\alpha_i k, 0)$ la ecuación está dada por:

$$s = -(n_2 - 1)(t - \alpha_i k) = -(n_2 - 1)t + (n_2 - 1)\alpha_i k.$$

Para esto es suficiente mostrar que $(n_2 - 1)\alpha_i > 1$ Sabemos que $n_2 - 2 = \eta_i$ por lo cual tenemos que:

$$\frac{(n_2 - 1)(f_i - d_i)}{a_i - d_i + f_i - c_i} = 1$$

De otra manera; se sigue de que $a_i - d_i > 0$ que

$$\alpha_i = \frac{f_i - c_i}{a_i - d_i + f_i - c_i} > \frac{f_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - c_i}$$

para $\epsilon_i > 0$ donde $c_i = d_i - \epsilon_i$. De lo cual tenemos que $(n_2 - 1)\alpha_i > 1$. con lo cual termina la demostración †

Lema 5.0.26 (5) Si n_2 es pequeña para salir de e^2 para un jugador i , entonces para k suficientemente grande, $(n_2 - 1)\alpha_i k \leq r_i(e^2, N_2) \leq (n_2 - 1)[\alpha_i k] < k$

Demostración. Supongamos que n_2 es pequeña para salir de e^2 para un jugador “i”, entonces:

$$n_2 - 1 < \frac{a_i - d_i + f_i - c_i}{f_i - d_i}$$

Para cada $\epsilon_i > 0$ la pendiente de la función objetivo en (L.3) es favorecida ya que la restricción es acotada. Similarmente a lema 5.0.26 (4) es suficiente evaluar el programa (L.3) ignorando la restricción entera; la solución óptima es la intersección de la restricción de la mejor respuesta y el eje horizontal (t). En la figura 5 está denotada por $(\alpha_i k, 0)$ Así el valor óptimo con restricción entera es al menos $(n_2 - 1)\alpha_i k$. Alrededor de $\alpha_i k$ dado por $[\alpha_i k]$ como $[\alpha_i k]$ es un valor entero, entonces el valor óptimo con restricción entera es al menos $(n - 2)[\alpha_i k]$.

Por suposición

$$(n_2 - 1)\left(\frac{f_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - c_i}\right) < 1$$

Más aún para ϵ_i suficientemente pequeña y para k suficientemente grande,

$$(n_2 - 1)\left(\frac{f_i - c_i}{a_i - d_i + f_i - c_i}\right) + \frac{n_2 - 1}{k} = (n_2 - 1)\alpha_i + \frac{n_2 - 1}{k} < 1$$

de lo cual se sigue que $n_2 - 1[\alpha_i k] < k$ †

Lema 5.0.26 (6) $r_i(e^3, N_1) = k$

Prueba: Considérese una muestra tomada por un jugador $i \in N_1$ que contenga perfiles e_{-i}^2 por t veces y e_{-i}^3 por k-t-s veces y s otros. Análogamente al lema 5.0.26 (3) se puede mostrar que dada una muestra para un $i \in N_1$ en la cual optimiza eligiendo 0, la muestra consiste enteramente de otros perfiles. †

Lema 5.0.26 (7) Si n_2 es grande para salir de e^3 para un jugador i, entonces $r_i(e^3, N_2) = k$

Prueba: Recordemos que un jugador $i \in N_2$ optimiza seleccionando 1 en contra de e_{-i}^3 . Para cualquier otro perfil 0 es la única mejor respuesta. Considérese una muestra tomada por un jugador $i \in N_2$ que contiene perfiles e_{-i}^2 por t veces, e_{-i}^3 por k - t - s veces y s otros. Si i es el primer (exitor, desertor) cada 0 en e_{-i}^2 jugado por un miembro en N_2 es un error (hay $n_2 - 1$ de ellos) y cada uno de los otros s perfiles contiene al menos un error. Podemos evaluar el mínimo número de errores resolviendo el siguiente programa entero. Notemos que 0 es una mejor respuesta en contra de la muestra si y solo si la restricción del siguiente programa se satisface.

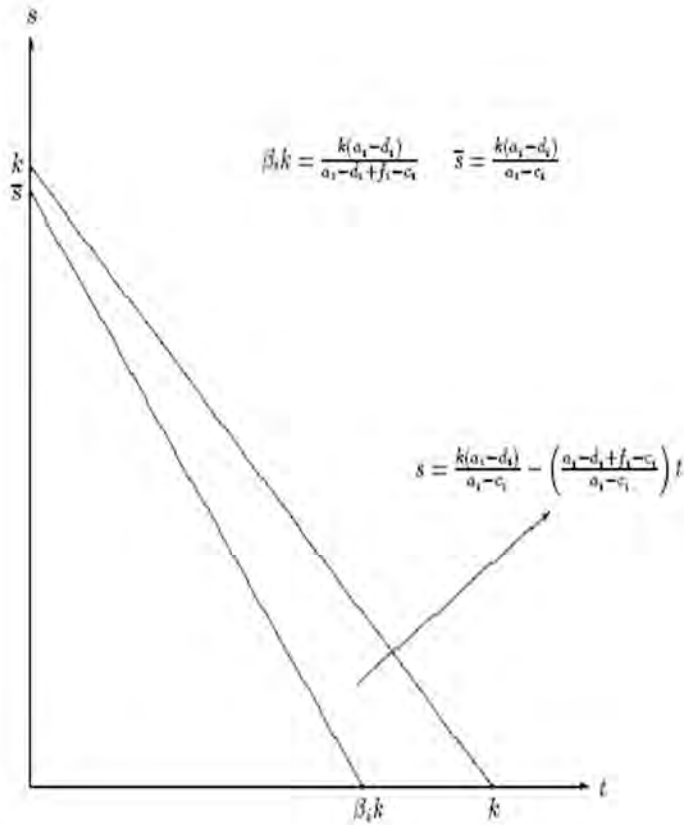


Figura 5.8: Programa $r_i(e^3, N_2)$

$$\min(n_2 - 1)t + s \text{ sujeto a } tf_i + (k - t)d_i \geq (k - t - s)a_i + (t + s)c_i \quad (\text{L.4})$$

La restricción en L.4 es equivalente a:

$$s \geq \frac{k(a_i - d_i)}{a_i - c_i} - \left(\frac{a_i - d_i + f_i - c_i}{a_i - c_i} \right) t$$

En la t - s coordenada, la restricción acotada de L.4 es una línea que tiene una pendiente negativa mayor que -1 y se intercepta con el eje s por debajo de k . Véase la figura 4.8. De otra manera la pendiente de la función objetivo es $-(n_2 - 1)$. Ahora supongamos que n_2 es grande para salir de e^3 entonces tenemos que $n_2 - 1 \geq \frac{a_i - d_i + f_i - d_i}{a_i - d_i}$. Notemos que $f_i - d_i > 0$ de donde se sigue que :

$n_2 - 1 > \frac{a_i - d_i + f_i - c_i}{a_i - c_i}$ para algún ϵ_i . Así la función objetivo tiene una pendiente grande que es mayor que la restricción acotada. Ignorando la restricción entera, la solución óptima es la intersección de la restricción de mejor respuesta y el eje vertical s . La s coordenada \bar{s} esta dada por:

$$\bar{s} = \frac{k(a_i - d_i)}{a_i - c_i} = \frac{k(a_i - d_i)}{a_i - d_i + \epsilon_i}$$

para ϵ_i suficientemente pequeña alrededor de \bar{s} da que $r_i(e^3, N_2) = k^\dagger$.

Lema 5.0.26 (8) Si n_2 es pequeño para salir de e^3 para un jugador i , entonces para k suficientemente grande $(n_2 - 1)\beta_i k \leq r_i(e^3, N_2) \leq (n_2 - 1)[\beta_i k] < k$.

Prueba. Similar al lema 5.0.26 (7) es suficiente evaluar el programa L.4. Supongamos que n_2 es pequeña para salir de e^3 para $i \in N_2$. Entonces $n_2 - 1 < \frac{a_i - d_i + f_i - d_i}{a_i - d_i}$. Más aún la función objetivo esta favorecida más que la restricción acotada para ϵ_i suficientemente pequeña. Ignorando la restricción entera la solución óptima es la intersección de la restricción de mejor respuesta y el eje t horizontal. La t coordenada está dada por:

$$\beta_i k = \frac{k(a_i - d - i)}{a_i - d_i + f_i - c_i}$$

Así el valor óptimo con restricción entera es al menos $(n_2 - 1)\beta_i k$ alrededor de $\beta_i k$ dado $[\beta_i k]$. Debido a que $[\beta_i k]$ es un entero, el valor óptimo con restricción entera es al menos $(n_2 - 1)[\beta_i k]$ por suposición

$$(n_2 - 1)\left(\frac{a_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - d_i}\right) < 1$$

Más aún para k suficientemente grande

$$(n_2 - 1)\left(\frac{a_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - d_i}\right) + \frac{n_2 - 1}{k} < 1$$

de lo que se sigue que $(n_2 - 1)[\beta_i k] < k^\dagger$

Prueba del lema 5.0.20

$r(e^3, e^1) = r(e^3)$ Si n_2 es grande para salir de e^2 , entonces $r(e^2, e^3) > k$

Lema 5.0.20 (1) $r(e^1, e^2) \leq n_1$ y $r(e^1, e^2) < r(e^1, e^3)$.

Se puede construir una trayectoria de e^1 a e^2 con exactamente n_1 errores como sigue: Véase la figura 4.9. Dentro de la trayectoria descrita en la figura jugador $i = 1, \dots, n_1$ eligen simultáneamente 1 por error durante el día 1. En el día 1 jugador $i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ optimizan seleccionando 0. Para el día 2 cada muestra de los jugadores de los k perfiles más recientes pueden jugar optimizando en contra de la muestra seleccionada. Por lo que la trayectoria se mueve hacia $h(e^2)$. Así $r(e^1, e^2) \leq n_1$

	m				k			
σ_1	0	...	0	1*	0	1	...	1
σ_2	0	...	0	0	1	1	...	1
σ_{2+1}	0	...	0	0	0	0	...	0
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
σ_{2+n_2}	0	...	0	0	0	0	...	0

Figura 5.9: Una trayectoria de e^1 a e^2 cuando $n_1 = 2$

Esto deja por mostrar que $r(e^1, e^3) > r(e^1, e^2)$. Si $n_1 = 2$ La figura 4.9 muestra que $r(e^1, e^2) = 1$. En este caso, es claro que $r(e^1, e^3) > 1$. Así que podemos suponer que $n_1 \geq 3$. Para

los otros casos restantes es suficiente mostrar que $r(e^1, e^3) > n_1$, nosotros sabemos por lo anterior que $n_1 \geq r(e^1, e^2)$. Supongamos primero que $n_2 \geq 3$ y consideremos la trayectoria de e^1 a e^3 . Si hay un primer (desertor, exitor) en N_2 entonces por el lema 5.0.26 (2) la trayectoria contiene al menos $n_1 + n_2 + 1$ errores. Así podemos suponer que $j \in N_1$ es un primer (exitor desertor) de la trayectoria y que no hay primer (exitor, desertor) en N_2 . Supongamos que un jugador $i \in N_2$ optimiza eligiendo 1 la primera vez durante la trayectoria en el día τ , y que algún otro $i' \in N_2 (i \neq i')$ optimiza eligiendo 1 por primera vez durante la trayectoria no antes del día τ . Antes del día τ hay un día τ^* en el cual e_{-i}^3 es jugado. Cada 1 seleccionado por $i' \in N_2 (i \neq i')$ en el día τ^* es un error. Hay $n_2 - 1$ de estos. De otra manera si tenemos que $j \in N_1$ es un primer (exitor, desertor), antes del día τ hay un día τ^{**} en el cual e_{-j}^2 o e_{-j}^3 es jugado. En el día τ^{**} cada 1 seleccionado por $j' \in N_1 (j \neq j')$ es un error. Hay al menos $n_1 - 1$ de estos. Así antes del día τ la trayectoria contiene al menos $n_1 + n_2 - 2$ errores. Esto muestra que $r(e^1, e^3) > n_1$ cuando $n_2 \geq 3$. Así que nos queda por considerar el caso cuando $n_1 \geq 3$ y $n_2 = 2$ Para esto se mostrará lo siguiente:

Afirmemos que $n_1 \geq 3$. Sea σ un perfil de acción el cual $\sigma_i = 1$ para cada $i \in N_1$. Consideremos una trayectoria de e^1 a σ tal que cada 1 es elegido por $i \in N_1$ en los períodos más recientes entonces σ no es un error. Está trayectoria contiene al menos n_1 errores realizados por miembros en N_1 . Para cada $i \in N_1$, sea τ_i el día en el cual “i” elige 1 como mejor respuesta en el primer tiempo durante la trayectoria. Cada 1 elegido por “i” antes del día τ_i es un error. Antes del día τ_i debe haber un día τ_i^* en el cual e_{-i}^2 o e_{-i}^3 es jugado. Si hay más de uno de estos días para “i”, sea τ_i^* el día más temprano en el cual aparece. Hay dos casos a considerar. Primero supongamos que hay 2 tipos diferentes de jugadores en N_1 sean i_1, i_2 respecto a los días $\tau_{i_1}^*$ y $\tau_{i_2}^*$ que son exactamente en el mismo día, τ^* . En este caso la acción del día τ^* es e^2 o e^3 , por lo que la trayectoria contiene al menos n_1 errores. El caso restante es que en los días $\tau_1^*, \dots, \tau_{n_1}^*$ todos sean diferentes. Supongamos que estos aparecen en el siguiente orden $\tau_1^* < \dots < \tau_{n_1}^*$. En el día τ_1^* hay al menos $n_1 - 1$ errores. En el día τ_2^* , 1 por el jugador 1 puede ser una mejor respuesta, pero 1 para el jugador 3 que existe porque $n_1 \geq 3$ debe ser un error. Por lo que la trayectoria contiene al menos n_1 errores. Esto concluye la prueba de la afirmación.

Supongamos que $n_1 \geq 3$ y $n_2 = 2$. Mostraremos que la $r(e^1, e^3) > n_1$. Supongamos que el jugador $n_1 + 1 \in N_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2\}$ optimiza eligiendo 1 para el primer tiempo durante la trayectoria en el día τ y así $n_1 + 2$ optimiza eligiendo 1 para el primer tiempo durante la trayectoria no antes que el día τ . Antes del día τ , debe de haber un día τ^* en el cual $e^3_{-(n_1+1)}$ es jugado. Entonces 1 es seleccionado por $n_1 + 2$ en el día τ^* y esto es un error. De estos hay al menos un error por miembros en N_2 . En el día τ^* , cada $i \in N_1$ selecciona 1. Sea γ el número de mejores respuesta entre 1's seleccionados por $i \in N_1$ en el día τ^* . De lo anterior se tienen 3 casos a considerar:

El primero cuando $\gamma = 0$, entonces en el día τ^* contiene n_1 errores por miembro de N_1 , junto con los errores por $n_1 + 2$ por lo que el día τ^* contiene $n_1 + 1$ errores.

El segundo. Sea $n_1 > \gamma \geq 1$. Entonces el τ^* contiene $n_1 - \gamma$ errores por miembro de N_1 . Desde que $\gamma \geq 1$, antes del día τ^* hay al menos $n_1 - \gamma + n_1 - 1$ errores por miembros de N_1 . Junto con los errores por $n_1 + 2$ la trayectoria contiene al menos $n_1 - \gamma + n_1 > n_1$ errores.

El tercero sea $\gamma = n_1$. En este caso la afirmación 1 implica que la trayectoria contiene al menos n_1 errores por miembros de N_1 , junto con el error por $n_1 + 2$ la trayectoria contiene al menos $n_1 + 1$ errores. †

Lema 5.0.20 (2) $r(e^3, e^1) = r(e^2)$

Prueba. Primero supongamos que n_2 es grande para salir de e^2 . En este caso $r(e^2) = k$ por el lema 5.0.19. En adición con la hipótesis de que $n_2 \geq 3$. Consideremos la siguiente trayectoria de e^2 . La trayectoria consiste de dos fases la 1 y la 2.

Denotemos la acción del día τ realizada por el jugador "i" por σ_i^τ . Véase figura 4.10.

la solución óptima de (L.3). Esto es $(n_2 - 1)t^* + s^* = r_{n_1+1}(e^2, N_2) = r(e^2)$ y t^*, s^* son enteros no negativos. Por la construcción de L.3 se sigue que cuando la muestra del jugador $n_1 + 1$ tiene $e_{-n_1+1}^3$ por t^* veces y $e_{-n_1+1}^2$ por $k - t^* - s^*$ y otros s^* entonces su mejor respuesta es 1. En este momento pensemos que $n_2 \geq 3$ y consideremos la siguiente trayectoria desde e^2 .

	$h(e^2)$	Phase 1			Phase 2	Phase 3
	m	$k-t^*-s^*$	s^*	t^*	k	k
σ_1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
σ_{n_1}	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0
σ_{n_1+1}	0 ... 0	0 ... 0	0 ... 0	0 ... 0	1 ... 1	0 ... 0
σ_{n_1+2}	0 ... 0	0 ... 0	1^* ... 1^*	1^* ... 1^*	0 ... 0	0 ... 0
σ_{n_1+3}	0 ... 0	0 ... 0	0 ... 0	1^* ... 1^*	0 ... 0	0 ... 0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\sigma_{n_1+n_2}$	0 ... 0	0 ... 0	0 ... 0	1^* ... 1^*	0 ... 0	0 ... 0

Figura 5.11: Una trayectoria de e^2 a e^1 cuando n_2 es pequeño para salir de e^2

Fase 1($\tau = 1, \dots, k$) Cada muestra de los jugadores contiene e_{-i}^2 por k veces desde $h(e^2)$. Para $\tau = 1$ hasta $k - t^* - s^*$ por lo que cada jugador optimiza respondiendo a la muestra. Desde $\tau = k - t^* - s^* + 1$ a $k - t^*$ cada jugador $i \neq n_1 + 2$ continua respondiendo óptimamente. Sea $\sigma_{n_1+2}^\tau = 1$ desde $\tau = k - t^* + 1$ hasta k , cada jugador $i = 1, \dots, n_1, n_1 + 1$ continuan respondiendo óptimamente. Para jugadores $i = n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ sea $\sigma_i^\tau = 1$.

Fase 2 ($\tau = k + 1, \dots, 2k$) la muestra de los jugadores es $(\sigma_{-i}^1, \dots, \sigma_{-i}^k)$ y responden optimizando entonces σ_i^τ para $i = 1, \dots, n_1$. Por construcción $\sigma_i^\tau = 0$ para $i = n_i + 2, \dots, n_1 + n_2$ y $\sigma_{n_1+1}^\tau$.

Fase 3 ($\tau = 2k + 1, \dots, 3k$) la muestra de los jugadores es $(\sigma_{-i}^{k+1}, \dots, \sigma_{-i}^{2k})$ y responden optimizando entonces $\sigma_i^\tau = 0$ para cada $i = 1, \dots, n_1 + 1$. Si $n_2 \geq 3$ entonces $\sigma_i^\tau = 0$ para cada $i = n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ también.

Notamos que la trayectoria se mueve a $h(e^1)$. Durante esta trayectoria, los errores son los 1's realizados por los jugadores $i = n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ en la fase 1. Hay $(n_2 - 1)t^* - s^*$ de estos.

Más aún $r(e^2, e^1) = (n_2 - 1)t^* - s^*$.

Finalmente sea $n_2 = 2$ y consideremos la trayectoria de la figura 4.11 otra vez. En la fase 3 si $n_2 = 2$ entonces $\sigma_{n_1+2}^\tau = 1$ y $\sigma_i^\tau = 0$ para cada $i \neq n_2 + 2$. Agreguemos una fase 4 en la cual la muestra de cada uno sea $(\sigma_{-i}^{2k+1}, \dots, \sigma_{-i}^{3k})$ en la cual cada uno responde optimizando. En este sentido la trayectoria se mueve a $h(e^1)^\dagger$

Lema 5.0.20 (3) $r(e^3, e^1) = r(e^3)$

Prueba. Supongamos primero que n_2 es grande para salir de e^3 . Entonces $r(e^3) = k$ por el lema 5.0.19 (3). Supongamos que $n_2 \geq 3$. En este caso la trayectoria de la figura 10 muestra que $r(e^3, e^1) = k$. Con esto podemos suponer que n_2 es pequeña para salir de e^3 . Entonces tenemos que $r(e^3) = \min_{i \in N_2} r_i(e^3, N_2)$ por el lema 5.0.19 (4). Supongamos que $r(e^3) = r_{n_1+1}(e^3, N_2)$. Recordando la prueba del lema 5.0.26 (8) en la cual $r_{n_1+1}(e^3, N_2)$ es el valor óptimo del programa L.4 con restricción entera. Sea (t^*, s^*) la solución óptima de (L.4). Por la construcción de (L.4) se sigue que cuando la muestra del jugador $n_1 + 1$ es $e_{-n_1+1}^2$ por t^* veces, $e_{-n_1+1}^3$ por $k - t^* - s^*$ veces y s^* de las otras, su mejor respuesta es 0. Consideremos la siguiente trayectoria que comienza en e^3 . Figura 4.13.

	$h(e^3)$	Phase 1	Phase 2	Phase 3
	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
σ_1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	0 ... 0
\vdots	\vdots ... \vdots	\vdots ... \vdots	\vdots ... \vdots	\vdots ... \vdots
σ_{n_1}	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	0 ... 0
σ_{n_1+1}	1 ... 1	0^s ... 0^s	1 ... 1	0 ... 0
σ_{n_1+2}	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	0 ... 0
\vdots	\vdots ... \vdots	\vdots ... \vdots	\vdots ... \vdots	\vdots ... \vdots
$\sigma_{n_1+n_2}$	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	0 ... 0

Figura 5.12: Una trayectoria de e^3 a e^1 cuando n_2 es grande para salir de e^3

Fase 1 ($\tau = 1, \dots, k$) Cada muestra de los jugadores tiene e_{-i}^3 por k veces desde $h(e^3)$. De $\tau = 1$ a $k - t^* - s^*$ cada jugador responde optimizando a la muestra. De $\tau = k - t^* - s^* + 1$ a $k - t^*$ cada jugador $i \neq n_1 + 2$ continua respondiendo óptimamente. Para un jugador $i = n_1 + 2$, sea $\sigma_i^\tau = 0$ de $\tau = k - t^* + 1$ a k cada jugador $i = 1, \dots, n_1, n_1 + 1$ continua respondiendo óptimamente, para jugadores $i = n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$. Sea $\sigma_i^\tau = 0$

	$h(e^3)$		Phase 1				Phase 2	Phase 3
	m	$k-t^*-s^*$	s^*	t^*	k	k		
σ_1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
σ_{n_1}	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	
σ_{n_1+1}	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	1 ... 1	
σ_{n_1+2}	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	0 ... 0	0 ... 0	1 ... 1	0 ... 0	
σ_{n_1+3}	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	0 ... 0	1 ... 1	0 ... 0	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$\sigma_{n_1+n_2}$	1 ... 1	1 ... 1	1 ... 1	0 ... 0	0 ... 0	1 ... 1	0 ... 0	

Figura 5.13: Una trayectoria de e^3 a e^1 cuando n_2 es pequeño para salir de e^3

Fase 2 ($\tau = k + 1, \dots, 2k$) Cada muestra de los jugadores es $(\sigma_{-i}^1, \dots, \sigma_{-i}^k)$ y responden óptimamente entonces σ_i^τ para cada $i = 1, \dots, n_1$ Por construcción $\sigma_1^\tau = 1$ para cada $i = n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ y $\sigma_{n_1+1}^\tau = 0$.

Fase 3 ($\tau = 2k + 1, \dots, 3k$) Cada muestra de los jugadores es $(\sigma_{-i}^{k+1}, \dots, \sigma_{-i}^{2k})$ y responden óptimamente entonces $\sigma_i^\tau = 0$ para cada $i \neq n_1 + 1$ y $\sigma_{n_1+1}^\tau = 1$.

Fase 4 ($\tau = 3k + 1, \dots, 4k$) Cada muestra de los jugadores es $(\sigma_{-i}^{2k+1}, \dots, \sigma_{-i}^{3k})$ y responden óptimamente entonces $\sigma_i^\tau = 0$ para cada $i \in N$ (La fase 4 no es mostrada en la figura 4.13).

De donde la trayectoria se mueve a $h(e^1)$. Durante esta trayectoria los errores son los 0's por los jugadores $i = n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2$ en la fase 1. Hay $(n_2 - 1)t^* + s^*$ de estos. Por lo que $r(e^3, e^1) = (n_2 - 1)t^* + s^* = r_{n_1+1}(e^3, N_2) = r(e^3)$. Nótese que la trayectoria de la figura 4.13 funciona aún

cuando $n_2 = 2^\dagger$

Lema 5.0.20 (4) Si n_2 es grande para salir de e^2 , entonces $r(e^2, e^3) > k$

Prueba: Supongamos que n_2 es grande para salir de e^2 . Así $n_2 \geq 3$. Tomemos alguna trayectoria de salida de e^2 a e^3 . Si hay un $i \in N_2$ que es un primer (exitor desertor) en esta trayectoria entonces la trayectoria contiene más de k errores por el Lema 5.0.26 (4). Por lo que supongamos que no hay un primer (exitor desertor) en N_2 . Sea $i^* \in N_2$ el primer jugador en N_2 que selecciona 1 como mejor respuesta durante la trayectoria. Llamémosle el día τ y sea este en el cual i^* optimiza eligiendo 1 por primera vez, entonces al menos un e^3_{-i} aparece en la trayectoria. Fijemos tal e^3_{-i} denotemos el día en el cual ocurre $e^3_{i^*}$ por τ' , por la elección de i^* , cada 1 seleccionado por $i \in N_2 (i \neq i^*)$ en este caso e^3_{-i} es un error. Hay $n_2 - 1$ de estos. De otra manera conociendo que i^* no es un primer (exitor desertor) entonces antes del día τ hay un $i^{**} \in N_1$ que selecciona 0 como mejor respuesta. Se sigue del Lema 5.0.26 (3) y su prueba que antes del día τ hay k días en los cuales al menos un error ocurre. Si el día τ' no es uno de esos k días entonces la trayectoria contiene al menos $k + n_2 + 1$ errores antes del día τ . Si el día τ' es uno de esos k días entonces uno de los $n_2 - 1$ errores puede ser contado como uno de los k errores, por lo que tenemos al menos $k + n_2 - 2$ errores que ocurrieron antes del día τ . En cualquiera de los casos el número de errores excede a k si $n_2 \geq 3^\dagger$.

Prueba del **Teorema 5.0.25**

Para esta demostración se necesita de un lema que se enuncia a continuación.

Lema T.2

1. Si n_2 es pequeño para salir de e^2 entonces $k > (n_2 - 1)[\alpha k] + n_2$ para k suficientemente grande
2. $r(e^2, e^3) \leq r(e^1, e^2) + n_2$
3. $r(e^3, e^1) \leq (n_2 - 1)[\beta k]$

Prueba de T.2 (1) Por el lema 5.0.26 (2) $1 > (n_2 - 1)\alpha$. Entonces para k suficientemente grande

$$1 > (n_2 - 1)\alpha + \frac{2n_2 - 1}{k}$$

o equivalente $k > (n_2 - 1)(\alpha k + 1) + n_2$, el lado derecho es mayor que $(n_2 - 1)[\alpha k] + n_2$. †

Prueba de T.2 (2) Supongamos primero que $n_1 \geq 3$. Entonces $r(e^1, e^2) = n_1$ por la suposición en la prueba del lema 5.0.20 (1) y la figura 3. De esto la figura 4.14 muestra que la $r(e^1, e^3) \leq n_1 + n_2$.

Supongamos que $n_1 = 2$ entonces sabemos por la figura 4.9 que $r(e^1, e^2) = 1$. Por lo que la figura 4.15 muestra que $r(e^1, e^3) \leq 1 + n_2$ †.

	$\overbrace{\hspace{2em}}^m$	$\overbrace{\hspace{2em}}^k$
σ_1	0 ... 0 1^k 1 ... 1	
\vdots	\vdots ... \vdots \vdots \vdots ... \vdots	
σ_{n_1}	0 ... 0 1^k 1 ... 1	
σ_{n_1+1}	0 ... 0 1^k 1 ... 1	
\vdots	\vdots ... \vdots \vdots \vdots ... \vdots	
$\sigma_{n_1+n_2}$	0 ... 0 1^k 1 ... 1	

Figura 5.14: Una trayectoria de e^1 a e^3 con $n_1 + n_2$ errores

	$\overbrace{\hspace{2cm}}^m$	$\overbrace{\hspace{2cm}}^k$
σ_1	0 ... 0 1 [*] 0 1 1 ... 1	
σ_2	0 ... 0 0 1 1 1 ... 1	
σ_{2+1}	0 ... 0 0 0 1 [*] 1 ... 1	
\vdots	\vdots ... \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots ... \vdots	
σ_{2+n_2}	0 ... 0 0 0 1 [*] 1 ... 1	

Figura 5.15: Una trayectoria de e^1 a e^3 cuando $n_1 = 2$

Prueba de T.2 (3) Si n_2 es pequeño para salir de e^3 , la conclusión se sigue del lema 5.0.19 (4) y del 5.0.20 (3), si n_2 es grande para salir de e^3 , $r(e^3, e^1) = k$ por el lema 5.0.19 (3) y 5.0.20 (3). Por lo que es suficiente mostrar que $(n_2 - 1)[\beta k] \geq k$. Sea $\beta_i = \beta$. Si n_2 es grande para salir de e^3 entonces el programa (L.4) con resticción entera, $(0, \bar{s})$ es una solución óptima y $(\beta_i k, 0)$ es una solución factible. Más aún $(n_2 - 1)\beta_i k \geq \frac{k(a_i - d_i)}{a_i - c_i}$ desde que $[\beta_i k] \geq \beta_i k (n_2 - 1)$ $[\beta_i k] \geq \frac{k(a_i - d_i)}{a_i - c_i}$ y tenemos que por monotonicidad de $[\cdot]$

$$[(n_2 - 1)[\beta_i k]] \geq \left[\frac{k(a_i - d_i)}{a_i - c_i} \right]$$

Para ϵ_i suficientemente pequeña el lado derecho es igual a k y el otro lado es igual a $(n_2 - 1)[\beta_i k]$ que era lo que deseabamos †

Por lo que ahora si contamos con los suficientes recursos para la demostración del teorema 5.0.25

Demostración: Por (1) sabemos que $\min_i \eta_i / (1 + \eta_i) > \min_i 1 / (1 + \eta_i)$ o equivalentemente que:

$$\min_{i \in N_2} \frac{a_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - d_i} > \min_{i \in N_2} \frac{f_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - d_i}$$

Para k suficientemente grande y ϵ_i suficientemente pequeña tenemos lo siguiente:

$$\min_{i \in N_2} \frac{a_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - d_i} > \min_{i \in N_2} \frac{f_i - d_i}{a_i - d_i + f_i - d_i} + 1/k \left(1 + \frac{n_2}{n_2 - 1}\right)$$

donde $c_i = d_i - \epsilon_i$ Esto implica que:

$$\beta > \alpha + \frac{(1 + \frac{n_2}{n_2 - 1})}{k} \text{ y así } \beta k > [\alpha k] + \frac{n_2}{n_2 - 1}. \text{ Por lo que vamos a probar esta desigualdad además el lema}$$

T.2 (1) nos da una condición suficiente para que e^3 sea estocásticamente estable.

Como n_2 es pequeño para salir de e^2 , $r(e^2, e^1) \leq (n_2 - 1)[\alpha k]$ por el lema 5.0.19 (2) y el 5.0.20 (2), de otra manera $r(e^1, e^3) \leq r(e^1, e^2) + n_2$ por el lema T.2 (2). Más aún $\rho(T_8) \leq r(e^1, e^2) + (n_2 - 1)[\alpha k] + n_2$.

Por el lema 5.0.22 es suficiente mostrar que T_8 domina a T_5 . Supongamos primero que n_2 es pequeña para salir de e^3 . Por el lema 5.0.19 (4) $r(e^3, e^1) \geq (n_2 - 1)\beta k$. Así $\rho(T_5) \geq r(e^1, e^2) + (n_2 - 1)\beta k$.

Por lo anterior e^3 es el único estocásticamente estable si:

$$\begin{aligned} \rho(T_5) - \rho(T_8) &\geq r(e^1, e^2) + (n_2 - 1)(\beta k) - (r(e^1, e^2) + (n_2 - 1)[\alpha k] + n_2) \\ &= (n_2 - 1)\beta k - (n_2 - 1)[\alpha k] - n_2 > 0 \end{aligned}$$

La última inecuación es equivalente a $\beta k > \frac{[\alpha k] + n_2}{n_2 - 1}$. Supongamos lo siguiente: n_2 es grande para salir de e^3 . Por el lema 5.0.19 (3) $r(e^3, e^1) \geq k$. Similar al anterior e^3 es el único estocásticamente estable si $k - (n_2 - 1)[\alpha k] - n - 2 > 0$ que es equivalente al Lema T.2 (1) por (2) sabemos que el $\min_i 1 / (1 + \eta_i) > \min_i \eta_i / (1 + \eta_i)$. Que es similar a (1), $\alpha k > [\beta k]$ para ϵ_i pequeña y k grande.

Así es suficiente mostrar que la última desigualdad es una condición suficiente para que e^2 sea estocásticamente estable.

Por el lema T.2 (3) $r(e^3, e^1) \leq (n_2 - 1)[\beta k]$ Así $\rho(T_5) \leq r(e^1, e^2) + (n_2 - 1)[\beta k]$. Por el lema 5.0.22 es suficiente mostrar que T_5 domina a T_7 y T_8 . Si n_2 es pequeña para salir de e^2 . El lema 5.0.19 (2) implica que $r(e^2, e^j) \geq (n_2 - 1)\alpha k$ para $j = 1, 3$. De otra manera $r(e^1, e^3) > r(e^1, e^2)$ por el lema 5.0.20

(1) Así:

$$\min\{\rho(T_7, T_8)\} \geq r(e^1, e^2) + (n_2 - 1)\alpha k$$

Más aún e^2 es el único estocásticamente estable si:

$$\begin{aligned} \min\{\rho(T_7, T_8)\} - \rho(T_5) &\geq r(e^1, e^2) + (n_2 - 1)\alpha k - r(e^1, e^2) - (n_2 - 1)[\beta k] \\ &= (n_2 - 1)(\alpha k - [\beta k]) > 0 \dagger. \end{aligned}$$

Capítulo 6

CONCLUSIÓN

La conclusión que nos arroja este trabajo es que cuando se tienen juegos repetidos; es la información de los individuos y su añoranza de conseguir mejores pagos lo que los involucra en una organización la cual como nos pudimos dar cuenta necesita un número suficiente de individuos para poderse mantener y realmenete beneficiar a los que en ella participan.

Notamos que la técnica que se utilizo nos permite encontrar de una manera clara los equilibrios pero nos dimos cuenta que en el caso en el cual el número de agentes crece, encontrar los resultados se vuelve una tarea realmente difícil.

En este caso la población siempre fue englobada en lo general en 2 tipos de agentes por lo que surge la pregunta de si existe alguna forma de encontrar de manera sencilla los equilibrios cuando son más de 2 tipos.

Algo muy interesante es que la heterogeneidad de los individuos crea distintos equilibrios los cuales para el caso de 2 tipos de agentes se pudieron ver los factores además observamos cual de los equilibrios aparece en el largo tiempo. Por lo que esto nos hace creer que si a las poblaciones se les incentivara respecto a los resultados se les podría hacer cambiar de situación.

Bibliografía

- [1] Blaine Roberts and Shulze David “Modern Mathematics and Economics Analysis” (1973).
- [2] P.Young: The evolutions of Conventions, *Econometrica* 1993
- [3] Görgen W. Weibull: *Evolutionary Game Theory*
- [4] Freidlin Mark and Wentzell Alexander. *Random Perturbation of Dynamical Systems*, Springer-Verlag 1984.
- [5] K. Binmore *Teoría de juegos*, McGraw-Hill, 1994
- [6] Zapata Lillo Paloma. *Economía, política y otros juegos*, La prensa de Ciencias, 2007.
- [7] R. Gibbons *Un primer curso de Teoría de Juegos*, Antoni Bush, 1993
- [8] H. Peyton Young. *Individual Strategy and Social Structures. An evolutionary theory of Institutions* Princeton University Press, 1998
- [9] Toshimasa Maruta and Akira Okada *Stochastic Stability of group formation in collective action games*. December 20, 2001
- [10] Toshimasa Maruta and Akira Okada *The Long Rung Stability of group formation in collective action games*.
- [11] Toshimasa Maruta and Akira Okada *Group Formation and Heterogeneity in Collective Action Games*. October 2005.

-
- [12] Game Theory and Policy Making in Natural Resources and the environment Edited by Ariel Dinar, José Albiac and Joaquin Sanchez Soriano 14. How does Awareness Arise? And Evolutionary Approach. Paloma Zapata Lillo, 2008 Edit. Routledge