UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DE LA RETÍCULA DE LAS TEORÍAS DE TORSIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

FRANK PATRICK MURPHY HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO FEDERICO RAGGI
CÁRDENAS

2009

A mis papás y hermanas
A mi tía Bety y tío Martín
A mi tita Cuca y tita Lupe
A mi Grandad y Grandmom
A la Matemática Daniela Terán
Al Doctor Francisco Raggi
A la Matemática

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En esta tesis se analiza una herramienta más para el estudio de los anillos, las teorías de torsión. Estas son parejas $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ de clases de módulos que cumplen que para cada $M\in\mathcal{T}$ y $N\in\mathcal{F}$, el $Hom(M,N)=0$, además de ser máximas con respecto a esta propiedad. Estas clases cumplen que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, coproductos y extensiones y se le llama clase de torsión, mientras que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, productos y extensiones, y se le llama clase libre de torsión. El ejemplo más conocido son los grupos abelianos de torsión y los libres de torsión, vistos como módulos sobre los enteros. También como módulos sobre los enteros, está la teoría de torsión de los grupos divisibles y los reducidos. Se busca dar tres distintas formas de trabajar con las teorías de torsión.

En el capítulo 1, se presenta el concepto de prerradical como un subfuntor del funtor identidad en la categoría de módulos sobre un anillo R. Se define un orden entre los prerradicales, a modo que se le asigna estructura de retícula, más aún, se le asignan dos operaciones binarias, el producto y el coproducto, llamándose radical a un prerradical, al resultar ser idempotente bajo el coproducto.A cada prerradical se le asocia una pareja de clases de módulos, los módulos que quedan fijos y los que son anulados, esta pareja cumple que se acerca a ser una teoría de torsión excepto que no necesariamente cumple el ser máxima. Se ve que hay una correspondencia biyectiva entre prerradicales idempotentes y clases cerradas bajo cocientes y coproductos, por el lado de los radicales esta correspondencia biyectiva se dará con las clases cerradas bajo submódulos y productos.

En capítulo 2 se demuestra que se puede pasar de un teoría de torsión a un radical idempotente, y en capítulo 3 se muestran las teorías de torsión hereditarias, que son las que su clase de torsión es cerrada bajo submódulos y se prueba que estas están relacionadas con los radicales exactos izquierdos. En los capítulos 4 y 5, se busca definir lo que es una topología lineal en un anillo para despues pasar a las topologías de Gabriel en un anillo , que no son más que filtros sobre el conjunto de ideales izquierdos del anillo. Estas últimas, corresponden a los radicales exactos izquierdos.

En el capítulo 6 se dan una serie de ejemplos de topologías de Gabriel, y formas de calcular su radical exacto izquierdo. En el capítulo 7 se define una teoría de torsión estable como la que su clase de torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas y en el capítulo 8 se define una teoría TTF como una tripleta $(\mathcal{C},\mathcal{T},\mathcal{F})$ a modo que $(\mathcal{C},\mathcal{T})$y $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ sean teorías de torsión y se dan condiciones suficientes y necesarias pasa que $\mathcal{C}=\mathcal{F}$.

PRERRADICALES

Un prerredical es un subfuntor de la identidad en $R-Mod$, es decir, σ es un prerredical si:

i) $\sigma(M) \subseteq M$ y $\sigma(M) \in R-Mod$ para todo $M \in R-Mod$

ii) Si $f: M \longrightarrow N$ es un morfismo entonces $f(\sigma(M)) \subseteq \sigma(N)$, es decir,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ i_{\sigma(M)} \uparrow & = & \uparrow i_{\sigma(N)} \\ \sigma(M) & \xrightarrow{\sigma(f)} & \sigma(N) \end{array}$$

A la clase de prerradicales en $R-Mod$ se le denota como $R-pr$. $R-pr$ permite cuatro operaciones, que son $\vee$ la unión , $\wedge$ la intersección, $\bullet$ el producto y : el coproducto.

Se definen estas operaciones de la siguiente manera:

para cada $\sigma, \tau \in R-pr$, $M \in R-Mod$

$$\begin{array}{rcl} (\sigma \wedge \tau)(M) & = & \sigma(M) \cap \sigma(M) \\ (\sigma \vee \tau)(M) & = & \sigma(M) + \tau(M) \\ (\sigma \bullet \tau)(M) & = & \sigma(\tau(M)) \\ (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) & = & \tau(M/\sigma(M)) \end{array}$$

La tripleta $(R-pr, \wedge, \vee)$ es como una retícula, excepto que $R-pr$ no necesariamente es un conjunto, por lo que se le llama una gran retícula.

Las operaciones $\wedge, \vee$ pueden definirse para clases de índices de la siguiente manera. Sea I una clase y $\{\sigma_i \in R-pr \mid i \in I\}$ una clase de de prerradicales índexada en I, entonces

$$\begin{array}{rcl} (\bigwedge_{i\in I} \sigma_i)(M) & = & \bigcap_{i\in I} \sigma_i(M) \\ (\bigvee_{i\in I} \sigma_i)(M) & = & \sum_{i\in I} \sigma_i(M) \end{array}$$

por lo que $R-pr$ es una gran retícula completa.

También se les puede asignar un orden parcial a $R-pr$ de la siguiente forma

$$\sigma \leqslant \tau \text{ si y solo si } \sigma(M) \subseteq \tau(M) \text{ para cada } M \in R-Mod$$

este orden ordena a las operaciones de la retícula de la siguiente manera

$$(\sigma \bullet \tau) \leqslant (\sigma \wedge \tau) \leqslant (\sigma \vee \tau) \leqslant (\sigma : \tau)$$

A un prerradical se le llamará idempotente si $\sigma \bullet \sigma = \sigma$, y radical si $\sigma : \sigma = \sigma$ (es decir $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$)

Lema 1.1 Si $\sigma \in R-pr$ es un radical y $N \subseteq \sigma(M)$, entonces $\sigma(M/N) = \sigma(M)/N$.

Demostración

Considérese el morfismo canónico y el inducido por σ,

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/N \\ \uparrow & = & \uparrow \\ \sigma(M) & \longrightarrow & \sigma(M/N) \end{array}$$

El núcleo del morfismo inducido por σ es N ya que por hipótesis $N \subseteq \sigma(M)$ por lo que $\sigma(M)/N \subseteq \sigma(M/N)$.

Por otro lado considérese el morfismo canónico $\alpha : M/N \longrightarrow M/\sigma(M)$

$$\begin{array}{ccc} M/N & \longrightarrow & M/\sigma(M) \\ \uparrow & = & \uparrow \\ \sigma(M/N) & \longrightarrow & \sigma(M/\sigma(M)) \end{array}$$

Se induce el morfismo cero en $\sigma(M/N)$, de aquí $\sigma(M/N) \subseteq nuc\alpha = \sigma(M)/N$. Por lo tanto $\sigma(M/N) = \sigma(M)/N.\rfloor$

A un prerradical σ se le pueden asociar dos clases de objetos de $R-Mod$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_\sigma & = & \{M \in R-Mod \mid \sigma(M) = M\} \\ \mathcal{F}_\sigma & = & \{M \in R-Mod \mid \sigma(M) = 0\} \end{array}$$

Proposición 1.2 Sea $\sigma \in R-pr$

a) $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes y coproductos.

b) $\mathcal{F}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos y productos.

Demostración

a) Sea $M \in \mathcal{T}_\sigma$ y $N \subseteq M$, tomése el morfismo canónico junto al que induce el prerradical σ,

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/N \\ \uparrow & = & \uparrow \\ \sigma(M) & \longrightarrow & \sigma(M/N) \end{array}$$

entonces el inducido tiene el mismo dominio y por otro lado es epimorfismo, $\therefore$ $M/N \leq \sigma(M/N) \leq M/N$ de aquí el inducido es el mismo que el original, de lo que se sigue $\sigma(M/N) = M/N$ .Por lo tanto $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}_\sigma$, se tiene por hípotesis que $\sigma(M_i) = M_i$ para cada $i \in I$, considerándose las inclusiones $i_i : M_i \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ se llega a que $im(i_i) \subseteq \sigma(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i)$ para cada $i \in I$,. $\bigoplus M_i \subseteq \sigma(\bigoplus M_i) \subseteq \bigoplus M_i$ por definición de coproducto $\sigma(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}_\sigma$.

b) Sea $M \in \mathcal{F}_\sigma$ y $N \subseteq M$

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & M \\ \uparrow & = & \uparrow \\ \sigma(N) & \hookrightarrow & \sigma(M) = 0 \end{array}$$

Por lo que se tiene la inclusión en el módulo, se sigue que $\sigma(N) = 0$.Por lo tanto $N \in \mathcal{F}_\sigma$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F}_\sigma$, se tiene por hípotesis que $\sigma(M_i) = 0$ para cada $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{i\in I} M_i & \longrightarrow & M_i \\ \uparrow & = & \uparrow \\ \sigma(\prod\limits_{i\in I} M_i) & \longrightarrow & \sigma(M_i) = 0 \end{array}$$

Se tiene que todas las proyecciones son cero para cada $i \in I$, entonces se tiene que $\sigma(\prod\limits_{i\in I} M_i) = 0$.

Por lo tanto $\prod\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{F}_\sigma$.⌋

Corolario 1.3 Si $M \in T_\sigma$ *y* $N \in F_\sigma$ *entonces* $Hom(M, N) = 0$.

Demostración

Tómese el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ \uparrow & = & \uparrow \\ M = \sigma(M) & \longrightarrow & \sigma(N) = 0 \end{array}$$

Por lo tanto $Hom(M, N) = 0$⌋

Una clase $\mathcal{C} \subseteq R - Mod$ cerrada bajo cocientes y coproductos se llama clase de pretorsión, si es cerrada bajo submódulos y productos se llama clase prelibre de torsión.

Lema 1.4 Si una clase $\mathcal{T}$ es de pretorsión entonces $\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas.

Demostración

Sea $\{M_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$, se tiene por hipótesis que $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}$, ahora tómese el morfismo natural $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow \sum_{i\in I} M_i$, este es epimorfismo y de aquí por el primer teorema de isomorfismo $\sum_{i\in I} M_i \cong (\bigoplus_{i\in I} M_i)/nucf$. Como $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, $\sum_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}$.⌋

Proposición 1.5 Hay una correspondecia biyectiva entre prerradicales idempotentes y clases de pretorsión, dualmente hay una correspondecia biyectiva entre radicales y clases prelibres de torsión.

Demostración

Sea $\mathcal{T}$ una clase de pretorsión y se define

$$\sigma_{\mathcal{T}}(M) = \sum\{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}\}$$

Véase que σ es un prerradical idempotente.

Primero que es prerradical.

Claramente $\sigma_{\mathcal{T}}(M) \subseteq M$ y tómese un morfismo $f : M \longrightarrow M'$

$$\begin{aligned} f(\sigma_{\mathcal{T}}(M)) &= f(\sum\{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}\}) \subseteq^{1,4} \sum\{f(N) \subseteq M' \mid N \in \mathcal{T}\} \\ &\subseteq \sum\{N' \subseteq M' \mid N' \in \mathcal{T}\} = \sigma_{\mathcal{T}}(M') \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma_{\mathcal{T}} \in R - pr$.

Ahora que $\sigma_{\mathcal{T}}$ es idempotente. Por como se define el orden $\sigma_{\mathcal{T}} \bullet \sigma_{\mathcal{T}} \leqslant \sigma_{\mathcal{T}}$.

Sea $K \in \{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}\}$ se tiene que $K \in \mathcal{T}$ y $K \subseteq \sum\{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}\} = \sigma_{\mathcal{T}}(M)$, por lo que $K \in \{N \subseteq \sigma_{\mathcal{T}}(M) \mid N \in \mathcal{T}\}$, se llega a que $K \subseteq \sum\{N \subseteq \sigma_{\mathcal{T}}(M) \mid N \in \mathcal{T}\} = (\sigma_{\mathcal{T}} \bullet \sigma_{\mathcal{T}})(M)$. Se deduce que $\sigma_{\mathcal{T}} \leqslant \sigma_{\mathcal{T}} \bullet \sigma_{\mathcal{T}}$. Por ser un orden parcial es antisimétrico $\sigma_{\mathcal{T}} = \sigma_{\mathcal{T}} \bullet \sigma_{\mathcal{T}}$.

Considérese la siguiente correspondencia $\mathcal{T} \mapsto \sigma_{\mathcal{T}} \longmapsto \mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$ y para ver que es biyectiva se demostrará que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$.

Si $M \in \mathcal{T}$,entonces $\sigma_{\mathcal{T}}(M) = M$, de aquí que $M \in \mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$.

Si $M \in \mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$, se sabe que $\sigma_{\mathcal{T}}(M) = M$, por lo que $M = \sum \{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}\}$ y por 1.4, $M \in \mathcal{T}$.

Por lo tanto $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\sigma_{\mathcal{T}}}$.

Sea $\sigma \in R - pr$ idempotente y la correspondencia $\sigma \mapsto \mathcal{T}_\sigma \longmapsto \sigma_{\mathcal{T}_\sigma}$.

Se tiene que $\sigma(M) \in \mathcal{T}_\sigma$ por ser σ idempotente ($\sigma\sigma(M) = \sigma(M)$, es decir, $\sigma(M) \in \mathcal{T}_\sigma$). Si $N \subseteq M$ entonces $\sigma(N) \subseteq \sigma(M)$ (de aquí se sigue que todo sumando está contenido en $\sigma(M)$), de aquí

$$\sigma(M) \in \{N \leq M | N \in \mathcal{T}_\sigma\} \therefore \sigma(M) \leq \sum\{N \leq M | N \in \mathcal{T}_\sigma \sigma_{\mathcal{T}_\sigma}(M) = \sum \{N \subseteq M \mid N \in \mathcal{T}_\sigma\} \leq \sigma(M)$$

Para el dual se toma $\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq R - Mod$ prelibre de torsión y se define

$$\tau_{\mathcal{F}}(M) = \bigcap \{N \subseteq M \mid M/N \in \mathcal{F}\}.$$

Obviamente $\tau_{\mathcal{F}}(M) \subseteq M$.

Sea $f : M \longrightarrow M'$ morfismo, sin pérdida de generalidad se puede suponer epimorfismo, entonces

$$\begin{array}{rcl} f(\tau_{\mathcal{F}}(M)) & = & f(\bigcap \{N \subseteq M \mid M/N \in \mathcal{F}\}) \subseteq \bigcap \{f(N) \subseteq M' \mid M/N \in \mathcal{F}\} \\ & \subseteq & \bigcap \{N' \subseteq M' \mid M/f^{-1}(N) \in \mathcal{F}, N = f^{-1}(N)\} \\ & \subseteq & {}^* \bigcap \{N' \subseteq M' \mid M/N' \in \mathcal{F}\} = \tau_{\mathcal{F}}(M') \\ *M'/N' & \cong & M/f^{-1}(N') \end{array}$$

Por lo tanto $\tau_{\mathcal{F}} \in R - pr$.

Ahora véase que $\tau_{\mathcal{F}} : \tau_{\mathcal{F}} = \tau_{\mathcal{F}}$

$$\begin{array}{rcl} \tau_{\mathcal{F}}(M/\tau_{\mathcal{F}}(M)) & = & \bigcap \{N/\tau_{\mathcal{F}}(M) \subseteq M/\tau_{\mathcal{F}}(M) \mid (M/\tau_{\mathcal{F}}(M))/(N/\tau_{\mathcal{F}}(M)) \in \mathcal{F}\} \\ & = & \bigcap \{N/\tau_{\mathcal{F}}(M) \subseteq M/\tau_{\mathcal{F}}(M) \mid M/N \in \mathcal{F}\} \\ & \subseteq & (\bigcap \{N \subseteq M \mid M/N \in \mathcal{F}\})/\tau_{\mathcal{F}}(M) \\ & = & \tau_{\mathcal{F}}(M)/\tau_{\mathcal{F}}(M) = 0 \end{array}$$

Por lo tanto $\tau_{\mathcal{F}}$ es un radical.

Considérese la siguiente correspondencia $\mathcal{F} \mapsto \tau_{\mathcal{F}} \longmapsto \mathcal{F}_{\tau_{\mathcal{F}}}$

Sea $M \in \mathcal{F}$, entonces $\tau_{\mathcal{F}}(M) = \bigcap\{N \subseteq M \mid M/N \in \mathcal{F}\} = 0$ (por que $M/0 \in F$), de aquí $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\mathcal{F}}}$.

Sea $M \in \mathcal{F}_{\tau_{\mathcal{F}}}$, por ende $\tau_{\mathcal{F}}(M) = \bigcap\{N \subseteq M \mid M/N \in \mathcal{F}\} = 0$. Considérese el morfismo canónico

$$M \xrightarrow{f} \prod_{M/N \in \mathcal{F}} M/N$$

entonces $nuc(f) = \bigcap\{N \subseteq M \mid M/N \in \mathcal{F}\} = 0$ (por hipotesís), de aquí es monomorfismo, por lo que M es isomorfo a un submódulo de $\prod\limits_{M/N \in \mathcal{F}} M/N$, pero $\prod\limits_{M/N \in \mathcal{F}} M/N \in \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ cerrado bajo productos, y como también es cerrado bajo submódulos se tiene que $M \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\tau_{\mathcal{F}}}$.

Sea $\tau \in R-pr$ un radical, tómese la correspondencia $\tau \mapsto \mathcal{F}_{\tau} \longmapsto \tau_{\mathcal{F}_{\tau}}$.

Se tiene que $\tau_{\mathcal{F}}(M/\tau_{\mathcal{F}}(M)) = 0$ por ser radical, entonces $\tau(M) \in \mathcal{F}_{\tau}$ ($\tau(M)$ es un intersectando de $\tau_{\mathcal{F}_{\tau}}(M)$).

Si $N \subset M$, entonces $N \cap \tau(M) \in \mathcal{F}_{\tau}$(por ser prelibre de torsión) y por la proposición 1.1 $\tau(M)/(N \cap \tau(M)) = \tau(M/(N \cap \tau(M))) = 0$, de aquí $N \cap \tau(M) = \tau(M)$, se llega a que $\tau(M) \subseteq N$ ($\tau(M)$ está contenido en todos los intersectandos). Por lo tanto $\tau_{\mathcal{F}_{\tau}} = \tau$.⌋

Proposición 1.6 Para cada $\sigma \in R-pr$ existe el mayor prerradical idempotente $\hat{\sigma}$, los menores a σ y existe el menor radical $\bar{\sigma}$ de los radicales mayores o iguales que a σ entre los prerradicales idempotentes $\leq \sigma$.

Demostración

Considérese los siguientes prerradicales,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(M) &= \sum\{N \subseteq M \mid \sigma(N) = N\} \\ \bar{\sigma}(M) &= \bigcap\{N \subseteq M \mid \sigma(M/N) = 0\} \end{aligned}$$

Notar que esto tiene sentido en vista de la descripción previa de $\bar{\sigma}$.

Sean $\tau \in R-pr$ y $M \in R-Mod$ con τ idempotente y $\tau \leq \sigma$, como $\sigma(\tau(M)) \subseteq \tau(M)$ por que $\tau(M) \in R-Mod$ y $\sigma \in R-pr$, por otro lado $\tau \leq \sigma$ de lo que $\tau(\tau((M)) \subseteq \sigma(\tau(M))$ por hipótesis τ es idempotente por lo que $\sigma(\tau(M)) = \tau(M)$, de aquí $\tau(M) \subseteq \sum\{N \subseteq M \mid \sigma(N) = N\} = \hat{\sigma}(M)$.

Por lo tanto $\tau \leq \hat{\sigma}$.$\rfloor$

Es posible construir $\hat{\sigma}$ y $\bar{\sigma}$ por recursión transfinita, de la siguiente forma:

$\hat{\sigma}$.– Si β no es un ordinal límite, entonces defínase $\sigma^{\beta} = \sigma \bullet \sigma^{\beta-1}$, si β es un ordinal límite, entonces defínase $\sigma^{\beta} = \bigwedge\limits_{\alpha<\beta} \sigma^{\alpha}$. De aquí se puede definir $\hat{\sigma} = \bigwedge\limits_{\beta \in Ord} \sigma^{\beta}$.

$\bar{\sigma}$.– Análogamente, si β no es un ordinal límite, entonces defínase $\sigma_{\beta} = (\sigma : \sigma_{\beta-1})$, si β es un ordinal límite, entonces defínase $\sigma_{\beta} = \bigvee\limits_{\alpha<\beta} \sigma_{\alpha}$. De aquí se puede definir $\hat{\sigma} = \bigvee\limits_{\beta \in Ord} \sigma_{\beta}$.

Proposición 1.7 Sea $\sigma \in R - pr$,

a) Si $\sigma \bullet \sigma = \sigma$ *entonces* $\bar{\sigma} \bullet \bar{\sigma} = \bar{\sigma}$.

b) Si $\sigma \colon \sigma = \sigma$ *entonces* $\hat{\sigma} \colon \hat{\sigma} = \hat{\sigma}$.

Demostración

a) Sea $N \subseteq \bar{\sigma}(M)$ tal que $\sigma(\bar{\sigma}(M)/N) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma(\bar{\sigma}(M)/N) \\
&= \sigma(\bar{\sigma}(M/N)) \\
&= \sigma(\bigcap \{K/N \subseteq M/N \mid \sigma((M/N)/(K/N)) = 0\}) \\
&= \sigma(\bigcap \{K/N \subseteq M/N \mid \sigma((M/K) = 0\}) \\
&= \bigcap \{K/N \subseteq \sigma(M/N) \mid \sigma(\sigma((M/K)) = 0\} \\
&= \bigcap \{K/N \subseteq \sigma(M/N) \mid \sigma((M/K) = 0\} \\
&= \sigma(\sigma(M/N)) \\
&= \sigma(M/N)
\end{aligned}$$

por lo que $\{K \subseteq \bar{\sigma}(M) \mid \sigma(\bar{\sigma}(M)/N) = 0\} \subseteq \{N \subseteq M \mid \sigma(M/N) = 0\}$,

se tiene que $\bigcap \{K \subseteq \bar{\sigma}(M) \mid \sigma(\bar{\sigma}(M)/N) = 0\} \supseteq \bigcap \{N \subseteq M \mid \sigma(M/N) = 0\}$,

por ende $\bar{\sigma} \leqslant \bar{\sigma} \bullet \bar{\sigma}$ y ya se conocía que $\bar{\sigma} \bullet \bar{\sigma} \leqslant \bar{\sigma}$, por lo tanto $\bar{\sigma} \bullet \bar{\sigma} = \bar{\sigma}$.

b) Se tendrá que ver que $\hat{\sigma}(M/\hat{\sigma}(M)) = 0$, pero esto es equivalente a ver $M/\hat{\sigma}(M)$ no tiene submódulos en T_{σ} distintos del cero. Supóngase que $\hat{\sigma}(M) \subseteq N \subseteq M$ tal que $\sigma(N/\hat{\sigma}(M)) = N/\hat{\sigma}(M)$, entonces $\hat{\sigma}(M) \subseteq \sigma(N)$ y por 1.1 se tiene que $\sigma(D) = D$, de aquí $N \subseteq \hat{\sigma}(M)$, por lo que $\hat{\sigma}(M) = N$. Por lo tanto $N/\hat{\sigma}(M) = 0$.$\rfloor$

Proposición 1.8 Sea $\sigma \in R-pr$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) σ es exacto izquierdo.

b) Si $N \subseteq M$ entonces $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$ para cada $M \in R-Mod$.

c) $\sigma \bullet \sigma = \sigma$ y $\mathcal{T}_\sigma$ es cerrado bajo submódulos.

Demostración

a)$\Rightarrow$b)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow_{\rangle_\infty} & = & \uparrow_{\rangle_\in} & = & \uparrow_{\rangle_\ni} & & \\ 0 & \longrightarrow & \sigma(N) & \longrightarrow & \sigma(M) & \longrightarrow & \sigma(M/N) & & \end{array}$$

Claramente $\sigma(N) \subseteq \sigma(M) \cap N$.

Sea $x \in \sigma(M) \cap N$, entonces $x \in \sigma(M)$ y $x \in N$.

Como $x \in N$, entonces $x + N = 0$, pero $x \in \sigma(M)$, por lo que $i_\ni(\sigma(g(x))) = 0$, como $i_\ni$ es monomorfismo se tiene que $\sigma(g(x)) = 0$,de aquí $x \in nuc(\sigma(g)) =^* im(\sigma(f)) = \sigma(N)$ (* por la hipótesis de ser exacto izquierdo).

Por lo tanto $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$.

b)$\Rightarrow$a) Sin pérdida de generalidad se puede suponer $N \subseteq M$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & = & \uparrow & = & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \sigma(N) & \xrightarrow{\sigma f} & \sigma(M) & \xrightarrow{\sigma g} & \sigma(M/N) & & \end{array}$$

entonces

$$\begin{aligned} nuc(\sigma g) &= \sigma(M) \cap N \\ &= \sigma(N) \\ &= im(\sigma f) \end{aligned}$$

b)$\Rightarrow$c) $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \cap M = \sigma(M)$. Por lo tanto $\sigma \bullet \sigma = \sigma$.

Si $\sigma(M) = M$ y $N \subseteq M$, entonces $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N = M \cap N = N$. Por lo tanto $N \in \mathcal{T}_\sigma$.

c)$\Rightarrow$b) Se tiene que $\sigma(M) \in \mathcal{T}_\sigma$ por ser σ idempotente y $\sigma(M) \cap N \subseteq \sigma(M)$, entonces por hipótesis $\sigma(M) \cap N \in \mathcal{T}_\sigma$, de aquí $\sigma(\sigma(M) \cap N) = \sigma(M) \cap N$.

Claramente $\sigma(N) \subseteq \sigma(M) \cap N \subseteq N$, aplicándose σ a esta cadena se tiene $\sigma(\sigma(N)) \subseteq \sigma(\sigma(M) \cap N) \subseteq \sigma(N)$ sustituyéndose las igualdades anteriores $\sigma(N) \subseteq \sigma(M) \cap N \subseteq \sigma(N)$. Por lo tanto $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$.$\rfloor$

Cuando una clase de pretorsión es cerrada bajo submódulos se le llamará hereditaria.

Corolario 1.9 Hay una correspondencia biyectiva entre los prerradicales exactos izquierdos y las clases de pretorsión hereditarias.

Ejemplos

1. Zoclo y el radical de Jacobson

$$\begin{aligned} Zoc(M) &= \sum \{N \subseteq M \mid N \in R - Simp\} \\ J(M) &= \bigcap \{N \subset M \mid M/N \in R - Simp\} \end{aligned}$$

Zoc es un prerradical exacto izquierdo, mientras que J es un radical

2. $S-$torsión *y* $S-$divisibilidad

Un conjunto S se le llama denominador izquierdo si es multiplicativamente cerrado y

S1. Si $s \in S$ y $a \in R$ entonces $\exists t \in S, \exists b \in R$ tales que $bs = ta$

S2. Si $as = 0$ con $s \in S$ entonces $\exists t \in S$ tal que $ta = 0$.

Sea S un conjunto denominador izquierdo en R, para cada $M \in R-Mod$, $t(M)$ es el submódulo de $S-$torsión de M, mientras que $d(M)$ es el máximo submódulo $S - divisible$ de M. Ambos son radicales idempotentes, t además es exacto izquierdo.

3. El ideal de pretorsión

Si $\sigma \in R-pr$ entonces $\sigma(R)$ es un ideal bilateral, porque es invariante bajo todos los endomorfismos de R_R.

TEORÍAS DE TORSIÓN

Definición: Una teoría de torsión en $R - Mod$ es una pareja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ con $\mathcal{T}, \mathcal{F} \subseteq R - Mod$ tales que

$$\begin{aligned} i)\ Hom(T,F) &= 0 \text{ para cada } T \in \mathcal{T},\ \text{ para cada } F \in \mathcal{F}. \\ ii) \text{ Si } Hom(M,F) &= 0 \text{ para cada } F \in \mathcal{F} \text{ entonces } M \in \mathcal{T}. \\ ii) \text{ Si } Hom(T,M) &= 0 \text{ para cada } T \in \mathcal{T} \text{ entonces } M \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Esta definición fue dada por Spencer E. Dickson.

A $M \in \mathcal{T}$ se le llama módulo de torsión, $N \in \mathcal{F}$ se le llama módulo libre de torsión. A $\mathcal{T}$ se le llama clase de torsión y a $\mathcal{F}$ clase libre de torsión.

Si se toma una clase $\mathcal{C} \subseteq R - Mod$ se puede generar una teoría de torsión de la siguiente forma $\xi(\mathcal{C}) = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{F \in R - Mod \mid Hom(M,F) = 0 \text{ para cada } M \in \mathcal{C}\} \\ \mathcal{T} &= \{T \in R - Mod \mid Hom(T,F) = 0 \text{ para cada } F \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

$\mathcal{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathcal{C}$. Dualmente $\mathcal{C}$ cogenera un teoría de torsión $\chi(\mathcal{C}) = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ tal que $\mathcal{F}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathcal{C}$.

Se dice que una clase $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones si para toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

con $M', M'' \in \mathcal{C}$, entonces $M \in \mathcal{C}$.

Proposición 2.1 $\mathcal{T}$ es una clase de torsión para alguna teoría de torsión si y sólo si $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, coproductos y extensiones.

Demostración

Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión, $M \in \mathcal{T}$, $M' \in \mathcal{F}$, $N \subseteq M$, y el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "0"] \arrow[d] & M' \\ M/N \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Todo morfismo de M en $M\prime$ es el cero, entonces todo morfismo de M/N en $M\prime$ es el cero, pero esto es para toda $M\prime \in F$, de aquí $M/N \in \mathcal{T}$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$, $N \in \mathcal{F}$,entonces

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} Hom(M_i, N) = \prod_{i\in I} 0_i = 0$$

Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}$.

Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ exacta con $M', M'' \in \mathcal{T}$.

Si N es libre de torsión, $\alpha : M \longrightarrow N$, considéerese que $\alpha f = 0$, de aquí que α induce un $\bar{\alpha}$ de M" en N, pero $\bar{\alpha} = 0$ ya que $M'' \in \mathcal{T}$, entonces $\alpha = 0$. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{T}$ cerrada bajo cocientes, coproductos y extensiones, considérese $\mathcal{N}$ la teoría de torsión generada por $\mathcal{T}$. Claramente $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N}$, falta ver que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$.

Sea $M \in \mathcal{N}$, entonces existe $N \subseteq M$ con $N \in \mathcal{T}$ máximo (por ser clase de pretorsión), para mostrar que $M = N$ basta ver que $M/N \in \mathcal{F}$. Supóngase que $\alpha : L \longrightarrow M/N$ para alguna $L \in \mathcal{T}$, entonces $im\alpha \in \mathcal{T}$, si $\alpha \neq 0$ entonces $im\alpha = K/N$ para algun submódulo $N \subseteq K \subseteq M$,

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow K/N \longrightarrow 0$$

por ser $\mathcal{T}$ cerrado bajo extensiones $K \in \mathcal{T}$. Pero esto contradice el hecho de que N es máximo, entonces α tiene que ser cero. Se sigue $Hom(L, M/N) = 0$ para cada $L \in \mathcal{T}$, entonces $M/N \in \mathcal{F}$.Por lo que $M = N$ y por lo tanto $\mathcal{T} = \mathcal{N}$.$\rfloor$

Proposición 2.2 $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión para alguna teoría de torsión si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, productos y extensiones.

Demostración

Sea $N \subseteq M \in \mathcal{F}$, $K \in \mathcal{T}$, considérese la inclusión $i : N \longrightarrow M$ y aplíquese el funtor $Hom(K, \_)$, por ser exacto izquierdo manda monomorfismos en monorfismos entonces

$$Hom(K, N) \longrightarrow Hom(K, M) = 0$$

es monomofismo, por lo que $Hom(K, N) = 0$ para cada $K \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $N \in \mathcal{F}$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{T}$, entonces

$$Hom(N, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} Hom(N, M_i) = \prod_{i\in I} 0_i = 0$$

Por lo tanto $\prod_{i\in I} M_i \in \mathcal{F}$.

Sea $M, M/N \in \mathcal{F}$,como $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión, $\mathcal{T}$ en particular es una clase pretorsión tiene su prerradical idempotente t, un módulo M es libre de torsión si y solo si $t(M) = 0$, ya que $M \in \mathcal{F}$ si y solo si $Hom(N, M) = 0$ para cada $N \in \mathcal{T}$. Considérese

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0,$$

se toma el morfismo canónico de M en M/N y el inducido por t

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/N \\ \uparrow & = & \uparrow \\ t(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de donde $t(M) \subseteq N$, entonces $t(M) = t(t(M)) \subseteq t(N) = 0$ (por ser t idempotente), de aquí $t(M) = 0$, por lo que $M \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es cerrado bajo extensiones.

Para el regreso considérese que $\mathcal{F}$ es una clase prelibre de torsión, se toma al radical t asociado a $\mathcal{F}$ y se propone como teoría de torsión a $(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$

i) Por el corolario 1.3.

ii) Sea $M \in R-Mod$ tal que para cada $N \in \mathcal{F}_t$ $Hom(M, N) = 0$, entonces considérese el morfismo canónico $\Pi : M \longrightarrow M/t(M)$ como t es un radical $M/t(M) \in \mathcal{F}_t$, entonces $\Pi = 0$, de lo que se sigue que $M = t(M)$. Por lo tanto $M \in \mathcal{T}_t$.

Observación. t es idempotente

Demostración

Considérese la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow t(M)/t(t(M)) \longrightarrow M/t(t(M)) \longrightarrow (M/t(t(M)))/(t(M)/t(t(M))) \longrightarrow 0$$

Del tercer teorema de isomorfismo se tiene que $(M/t(t(M)))/(t(M)/t(t(M))) = M/t(M)$.

Ahora como t es radical $t(M)/t(t(M)), M/t(M) \in \mathcal{F}$, pero es cerrado bajo extensiones entonces $M/t(t(M)) \in \mathcal{F}$, entonces $t(M/t(t(M))) = 0$. Como $t(t(M)) \subseteq t(M)$ y t es radical se puede aplicar el lema 1.1 entonces $t(M)/t(t(M)) = t(M/t(t(M))) = 0$, de aquí $t(M) = t(t(M))$. Por lo tanto t es idempotente.

iii) Sea $M \in R-Mod$ tal que para cada $N \in \mathcal{T}_t$ $Hom(N,M)=0$, tómese la inclusión $t(M) \longrightarrow M$, como t es idempotente $t(M) \in \mathcal{T}_t$, entonces la inclusión es el morfismo cero, de lo que $t(M)=0$. Por lo tanto $M \in \mathcal{F}_t$.⌋

De la proposición 2.2 y de la proposición 1.5 se tiene:

Proposición 2.3 Hay una correspondencia biyectiva entre los radicales idempotentes y las teorías de torsión.

Corolario 2.4 Si σ es un prerradical idempotente, entonces $\bar{\sigma}$ es el radical idempotente correspondiente a la teoría de torsión generada por $\mathcal{T}_\sigma$.

Demostración

Como $\bar{\sigma}$ es el menor de los radicales idempotentes que contienen a σ, debe de corresponder a la clase de torsión más pequeña que contiene a $\mathcal{T}_\sigma$.⌋

Proposición 2.5 Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada bajo cocientes. La clase de torsión generada por $\mathcal{C}$ consiste en todos los módulos M tales que cada cociente (diferente de cero) de M tiene un submódulo en $\mathcal{C}$.

Demostración

Sea $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes, un módulo pertenece a $\mathcal{F}$ si y solo si el único submódulo en $\mathcal{C}$ es cero. Se afirma que $M \in \mathcal{T}$ si y solo si M no tiene cocientes (diferentes del cero) en $\mathcal{F}$ y esto se sigue de las propiedades de las teorías de torsión.⌋

Ejemplos

1. Teorías de torsión que se escinden.

Una teoría de torsión se escinde si el submódulo de torsión de M es sumando directo de M.

Ejemplo

Si e es idempotente central en R, y defínase $t(M)=eM$ para cada $M \in R-Mod$, entonces se tiene una teoría de torsión que se escinde con

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{M \in R-Mod \mid eM = M\} \\ \mathcal{F} &= \{M \in R-Mod \mid eM = 0\}. \end{aligned}$$

Una teoría de torsión que se obtiene de esta manera se dice que se escinde centralmente.

2. Módulos Divisibles

Sea $K \in R-Mod$, la teoría de torsión generada $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ por K (abusando de la notación cuando se refiere a $\{K\}$) puede ser descrita gracias a la proposición 2.5:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{M \in R-Mod \mid Hom(K, M') = 0 \text{ para cada } M' = M/N \neq 0\} \\ \mathcal{R} &= \{M \in R-Mod \mid Hom(K, M) = 0\} \end{aligned}$$

Los módulos en D son llamados $K-$divisibles y los de R son $K-$reducidos. Un módulo M contiene un submódulo $K-$divisible máximo $d(M)$. Se puede definir un prerradical q:

$$q(M) = \sum_{\alpha \in Hom(K,M)} Im\alpha$$

Claramente q es idempotente y $d = \bar{q}$. Un caso particularmente interesante es cuando $K = E(R)$, cada módulo inyectivo es $E(R)-$divisible. De hecho, la clase de los módulos $E(R)-$divisibles resulta ser la clase de torsión generada por la clase de módulos inyectivos.

TEORÍAS DE TORSIÓN HEREDITARIAS

Una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es llamada hereditaria si $\mathcal{T}$ es hereditaria, esto es, $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos. De la proposición 1.8 esto ocurre si y solo si el radical asociado t es exacto izquierdo. Junto con el corolario 1.9 y la proposición 2.3 se tiene que:

Proposición 3.1 Hay una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias y los radicales izquierdos exactos izquierdos.

Proposición 3.2 Una teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es hereditaria si y solo si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea t el radical asociado y $M \in \mathcal{F}$, como t es exacto izquierdo entonces

$$t(E(M)) \cap M = t(M) = 0.$$

Como $M \lhd E(M)$ (todo módulo es esencial en su cápsula inyectiva), entonces $t(E(M)) = 0$, que implica que $E(M) \in \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$) Si $M \in \mathcal{T}$ y $N \subseteq M$, se considera el siguiente diagrama donde β es el canónico

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[dr, "\beta"'] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ & & E(N/t(N)) \end{tikzcd}$$

Se tiene que $E(N/t(N))$ es inyectivo entonces existe α que hace el diagrama conmutativo.

Por ser t radical $t(N/t(N)) = 0$ de aquí $N/t(N) \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas lo que dice que $E(N/t(N)) \in \mathcal{F}$. Como $M \in \mathcal{T}$ entonces $Hom(M, E(N/t(N))) = 0$ de lo que $\beta = 0$, de aquí $N/t(N) = 0$ entonces $N = t(N)$, de aquí $N \in \mathcal{T}$.

Por lo tanto $\mathcal{T}$ es cerrada bajo submódulos.$\rfloor$

Proposición 3.3 Sea $\mathcal{C} \subseteq R-Mod$ cerrada bajo cocientes y submódulos. Entonces $\xi(\mathcal{C})$ es hereditaria.

Demostración

Por la proposición anterior basta probar que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $N \in \mathcal{F}$, $M \in \mathcal{C}$ y

$$f : M \longrightarrow E(N) \text{ con } f \neq 0$$

Se tiene que $Imf \in \mathcal{C}$ por ser cerrada bajo cocientes, como $Imf \neq 0$ y $N \trianglelefteq E(N)$, entonces $Imf \cap N \neq 0$. Pero $0 \neq Imf \cap N \subseteq N$, entonces $Imf \cap N \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$! Contradicción y esta viene de suponerse $f \neq 0$, entonces $f = 0$. Por lo tanto $E(N) \in \mathcal{F}$.$\rfloor$

Corolario 3.4 Si σ es un prerradical exacto izquierdo entonces $\bar{\sigma}$ también.

Demostración

$\mathcal{T}_\sigma$ es una clase de pretorsión hereditaria, por proposición 3.3 y corolario 2.4 $\mathcal{T}_{\bar{\sigma}}$ es una clase de torsión hereditaria. Por lo tanto $\bar{\sigma}$ es exacto izquierdo.

Corolario 3.5 Si σ es un prerradical exacto izquierdo entonces $\sigma(M) \trianglelefteq \bar{\sigma}(M)$ para cada $M \in R-Mod$.

Demostración

Sea $L \subseteq \bar{\sigma}(M)$ y $L \cap \sigma(M) = 0$, entonces $\sigma(L) = L \cap \sigma(M) = 0$, se sigue que $\bar{\sigma}(L) = 0$.Pero $\bar{\sigma}(L) = \bar{\sigma}(M) \cap L = L$. Por lo tanto $\sigma(M) \trianglelefteq \bar{\sigma}(M)$.$\rfloor$

Proposición 3.6 Una teoría de torsión hereditaria es generada por la familia de módulos cíclicos R/I que son módulos de torsión.

Demostración

Un módulo es de torsión si y solo si cada submódulo cíclico es de torsión.

Sea M tal que para cada $x \in M$, $Rx \in \mathcal{T}$ entonces $M = \sum_{x \in M} Rx \in \mathcal{T}$.$\rfloor$

Una teoría de torsión queda unicamente determinada por la familia de ideales izquierdos I para los cuales R/I es un módulo de torsión.

Proposición 3.7 Una teoría de torsión es hereditaria si y solo si puede ser cogenerada por un módulo inyectivo.

Demostración

Sea $E \in R-Mod$ inyectivo y $\mathcal{T} = \{M \in R-Mod \mid Hom(M,E) = 0\}$

Si $M \in \mathcal{T}$ y $L \subseteq M$ y $0 \neq \alpha : L \longrightarrow E$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[d] \\ & & E \end{tikzcd}$$

Por ser E inyectivo se puede extender a uno en M, contradicción, de aquí $\alpha = 0$.

Por lo tanto $L \in \mathcal{T}$

Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ una teoría de torsión hereditaria. Póngase a $E = \prod\limits_{R/I \in \mathcal{F}} E(R/I)$ entonces $E \in \mathcal{F}$.

Por otro lado si $M \notin \mathcal{T}$ entonces existe un submódulo cíclico $N \subseteq M$ con $0 \neq \alpha : N \longrightarrow K$ para alguna $K \in \mathcal{F}$.

La imagen de α es cíclica y libre torsión, lo cual induce un monomorfismo de N en E. Recordando a E, producto de inyectivos es inyectivo, por lo que E es inyectivo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[d] \\ & & E \end{tikzcd}$$

Por ser E inyectivo se induce un morfismo de M en E distinto de cero. Por la proposición anterior se acaba de probar que $M \in \mathcal{T}$ si y solo si $Hom(M,E) = 0$, que es equivalente a $\chi(E) = \mathcal{T}$. Por lo que E cogenera $\mathcal{T}$.⌋

Lema 3.8 Si $L, M \in R-Mod$, entonces $Hom(L, E(M)) = 0$ si y solo si $Hom(N,M) = 0$ para toda N submòdulo cìclico de L.

Demostración

Claramente $L \in \mathcal{T} = \chi(E(M))$, de aquí $\mathcal{T}$ es hereditaria en $N \in \mathcal{T}$ $\forall N \subseteq L$, en particular para N cíclico, por otro lado $M \in \mathcal{F}$ ya que $E(M) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $Hom(N,M) = 0$ para todo N submódulo cíclico de L.

Para el regreso, si (T, F) es la teoría de torsión generada por los submódulos cíclicos de L se tiene por la proposición 3.6 que esta teoría de torsión es hereditaria, entonces $E(M) \in \mathcal{F}$ y $L \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $Hom(L, E(M)) = 0$.⌋

Proposición 3.9 Sea $\mathcal{T} = \chi(E)$ con E inyectivo, entonces $M \in \mathcal{F}$ si y solo si M es submódulo de un producto directo de copias de E.

Demostración

Sea $0 \neq M \in F$ entonces existe $x \neq 0$ en M, por ser $\mathcal{F}$ clase libre de torsión $Rx \in \mathcal{F}$ de aquí $Rx \notin \mathcal{T}$ por lo que $Hom(Rx, E) \neq 0$. Como E es inyectivo, se tiene que para toda $0 \neq x \in M$, existe $\mu_x : M \longrightarrow E$ tal que $\mu_x(x) \neq 0$.

Se puede dar un morfismo $\eta \colon M \longrightarrow E^I$ donde $I = Hom(M, E)$ definido como $\eta(x) = (\mu(x))_{\mu \in I}$. Nótese que $\eta(x) = 0$ entonces $\mu(x) = 0$ para cada $\mu \in I$ en particular para μ_x, de aquí $x = 0$. Por lo tanto η es monomorfismo y M es un submódulo de un producto directo de copias de E.

Por construcción de la teoría de torsión E es libre de torsiòn, entonces el producto directo de copias E también es libre de torsión del cual M es un submódulo libre de torsión.⌋

Ejemplos

1. Cogenerador Inyectivo

Un cogenerador inyectivo para $R - Mod$ es lo mismo que un módulo inyectivo cogenerando la teoría de torsión $(0, R - Mod)$

2. S-torsión

Si S esun conjunto denominador izquierdo en R, entonces los módulos de S-torsión y S-libre de torsión forman una teoría de torsión hereditaria.

3. Localizaciones Conmutativas

Sea R una anillo conmutativo y $P \leqslant R$ ideal primo. Si $S = \{a \in R \mid a \notin P\}$ entonces la S-teoría de torsión es cogenerada por $E(R/P)$. De hecho, $0 \neq x \in R/P$ implica que $Ann(x) = P$, de aquí R/P es S-libre de torsión y también $E(R/P)$ es S-libre de torsión. Por otro lado, si $Hom(M, E(R/P)) = 0$ entonces $Ann(x) \nsubseteq P$ para toda $x \neq 0$ en M, por lo tanto M es un módulo de S-torsión.

TOPOLOGÍAS LINEALES

Un grupo abeliano G es un grupo topológico si está equipado con una topología tal que

$$\begin{aligned} S(a,b) &= a+b \\ inv(a) &= -a \end{aligned}$$

son funciones continuas de $G \times G \longrightarrow G$ y de $G \longrightarrow G$ respectivamente.

Para una $a \in G$ fija, la translación $x \mapsto a+x$ es un homeomorfismo, de aquí que U es vecindad de a si y solo si $U-a$ es una vencindad de 0. La topología de G está completamente determinada por el filtro $\mathcal{N}$ de vecindades del 0. Este filtro satisface:

N1. Para cada $U \in \mathcal{N}$, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V+V \subseteq U$.

N2. Si $U \in \mathcal{N}$ entonces $-U \in \mathcal{N}$.

Recíprocamente, si G es un grupo abeliano con un filtro de subconjuntos $\mathcal{N}$ los cuales tengan al 0 como elemento y $\mathcal{N}$ satiface N1 y N2, entonces existe una única topologìa que hace G un grupo topológico con $\mathcal{N}$ como sistema de vecindades del 0.

$\Rightarrow$) N1. Sea $U \in \mathcal{N}$, , entonces $S^{-1}(U) = V_1 \times V_2$ es una vecindad $(0,0)$en $G \times G$. De aquí $V_1 + V_2 = S(V_1 \times V_2) = S(S^{-1}(U)) = U$.

Haciendo $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}$, entonces $V + V \subseteq V_1 + V_2 = U$.

N2. Sea $U \in \mathcal{N}$,entonces $-U = inv^{-1}(U) \in \mathcal{N}$.

$\Leftarrow$) Se define el filtro de vecindades de cada punto $x \in G$ como $\mathcal{N}_x = \{x+U \subseteq G \mid U \in \mathcal{N}\}$, de aquí el sistema de vecindades de la topología será

$\mathcal{V} = \{U \subseteq G \mid U \in \ \mathcal{N}_x$ para alguna $x \in G\}$ (por convención se llamará $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$).

Como bien se sabe dado un sistema de vecindades la topología es única, así que solo basta ver que esta hace a G un grupo topológico.

S) Sean $x, y \in G$ y $U \in \mathcal{N}_{x+y}$ entonces $U = (x+y) + V$ para algún $V \in \mathcal{N}$, de aquí $V = U - (x+y)$, por N1 existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W + W \subseteq V$, por lo que $S((W+x) \times (W+y)) = (W+x) + (W+y) \subseteq U$ donde $(W+x) + (W+y) \in \mathcal{N}_{x+y}$, pero $(W+x) \times (W+y)$ es una vecindad de (x, y) en $G \times G$. Por lo tanto S es una función continua.

inv) Sea $x \in G$ y $U \in \mathcal{N}_{-x}$ entonces $U = V - x$ para algún $V \in \mathcal{N}$ inmediatamente por N2 $-V \in \mathcal{N}$,por definición $x - V \in \mathcal{N}_x$, pero $x - V = inv^{-1}(V - x)$. Por lo tanto inv es una función continua.$\rfloor$

Si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces H es abierto si y solo si H tiene algun punto interior.

Supóngase que H tiene algun punto interior x, entonces existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $U \subseteq H$, pero $U = V + x$ para algún $V \in \mathcal{N}$,de aquí $V = U - x \subseteq H$ por ser H subgrupo. Sea $y \in H$ entonces $y + V \subseteq H$ y $y + V \in \mathcal{N}_y$ por lo que y es punto interior. Por lo tanto H es abierto.$\rfloor$

De aquí el conjunto de todos lo subgrupos abiertos de G forman un filtro en el conjunto de todos los subgrupos de G.

Un anillo topológico es un anillo R con una topología que lo hace un grupo topológico bajo la suma, y la función $P(a, b) = ab$ es continua de $R \times R \longrightarrow R$. Como se puede escribir

$$\begin{aligned} ab - xy &= ab - xb - ay + xy + ay - xy + xb - xy \\ &= (a-x)(b-y) + (a-x)y + x(b-y) \end{aligned}$$

la continuidad de la multiplicación solo requiere:

i) Para cada $a \in R$, $x \mapsto ax$ y $x \mapsto xa$ son continuas en 0.

ii) la función $(a, b) \mapsto ab$ es continua en $(0, 0)$

suponiéndose que G ya es grupo topológico.

Si R es un anillo topológico, el filtro $\mathcal{N}$ de vecindades del 0 satisface N1, N2 y también:

N3. Para cada $a \in R$ y $U \in \mathcal{N}$, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $aV \subseteq U$ y $Va \subseteq U$.

N4. Para cada $U \in \mathcal{N}$, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $VV \subseteq U$.

Recíprocamente, si R es un anillo con un filtro de subconjuntos $\mathcal{N}$ del 0 y $\mathcal{N}$ satiface N1-N4, entonces existe una única topologìa que hace R un anillo topológico con $\mathcal{N}$ como sistema de vecindades del 0.

$\Rightarrow$) N3. Sean $a \in R$ y $U \in \mathcal{N}$, se observa que las funciones r_a y l_a de $R \longrightarrow R$ definidas como $r_a(x) = ax$ y $l_a(x) = xa$ son funciones continuas, usando este hecho $V_1 = r_a^{-1}(U) \in \mathcal{N}$ y $V_2 = l_a^{-1}(U) \in \mathcal{N}$.Defínase $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}$,entonces $aV = r_a(V) \subseteq r_a(r_a^{-1}(U)) = U$ y $aV = l_a(V) \subseteq l_a(l_a^{-1}(U)) = U$.

N4. Sea $U \in \mathcal{N}$, , entonces $P^{-1}(U) = V_1 \times V_2$ es una vecindad del $(0, 0)$, de aquí $V_1V_2 = P(V_1 \times V_2) = P(P^{-1}(U)) = U$.

Haciendo $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}$, entonces $VV \subseteq V_1V_2 = U$.

$\Longleftarrow$) Análogamente defínase el mismo sistema de vecindades que en el grupo topológico, solo basta ver que que P es una función continua.

Sea $a, b \in R$ y $U \in \mathcal{N}_{ab}$ entonces $U = ab + V$ con $V \in \mathcal{N}$,de aquí $V = U - ab$, por N1 existe $V\prime \in \mathcal{N}$ tal que $V\prime + V\prime \subseteq V$, aplicando de nuevo N1 a V' se tiene que existe $V_1 \in \mathcal{N}$ tal que $V_1 + V_1 \subseteq V'$, inmediatamente $V_1 + V_1 + V_1 \subseteq V\prime + V\prime \subseteq V$.

Ahora haciendo uso de N3 en V_1 existe $V_2 \in \mathcal{N}$ tal que $aV_2 \subseteq V_1$ y $V_2b \subseteq V_1$, por lo que se tiene $aV_2 + V_2b \subseteq V_1 + V_1$. Por otro lado se usa N4 en V_1 por lo que existe $V_3 \in \mathcal{N}$ tal que $V_3V_3 \subseteq V_1$.

Defínase $W = V_2 \cap V_3 \in \mathcal{N}$, entonces $WW + aW + Wb \subseteq V$, sumando ab se tiene lo buscado $P((W + a) \times (W + b)) = WW + aW + Wb + ab \subseteq U$. Por lo tanto P es una función continua.⌋

Supóngases que R es un anillo topológico con $\mathcal{N}$ como sistema de vecindades del 0. Un R-módulo izquierdo topológico es R-módulo izquierdo con una topología tal que M es un grupo topológico con la suma y la función $R \times M \longrightarrow M$ definida por $\lambda(a, x) = ax$ es continua. Las pasadas consideraciones pueden repetirse para módulos, así el filtro $\mathcal{M}$ de vecindades del 0 está caracterizado por N1, N2 (En adelante se llamará $\mathcal{M}$ al filtro de vecindades del 0 del módulo y $\mathcal{N}$ al del anillo R)

NM3. Para cada $x \in M$ y $U \in \mathcal{M}$, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $Vx \subseteq U$.

NM4. Para cada $U \in \mathcal{M}$ y $a \in R$, existe $V \in \mathcal{M}$ tal que $aV \subseteq U$.

NM5. Para cada $U \in \mathcal{M}$, existen $V \in \mathcal{M}$ y $W \in \mathcal{N}$ tales que $WV \subseteq U$.

Recíprocamente, si M es un $R-$módulo con un filtro de subconjuntos $\mathcal{M}$ del 0 y $\mathcal{M}$ satiface N1-N2 y NM3-NM5, entonces existe una única topologìa que hace M un módulo topológico con $\mathcal{M}$

como sistema de vecindades del 0.

$\Rightarrow$) NM3. Sean $x \in M$ y $U \in \mathcal{M}$,obsérvese que la función λ_x de $R \longrightarrow M$ definida como $\lambda_x(a) = ax$ es una función continua, usando este hecho $V = \lambda_a^{-1}(U) \in \mathcal{N}$,entonces $Vx = \lambda_x(\lambda_x^{-1}(U)) = U$.

NM4. Sean $a \in R$ y $U \in \mathcal{M}$,defínase $\mu_a : M \longrightarrow M$ como $\mu_a(x) = ax$ esta función también es continua, por esta propiedad

$V = \mu_a^{-1}(U) \in \mathcal{M}$,entonces $aV = \mu_a(\mu_a^{-1}(U)) = U$.

NM5. Sea $U \in \mathcal{M}$ entonces $\lambda^{-1}(U) = W \times V$ con $V \in \mathcal{M}$ y $W \in \mathcal{N}$. por lo que $U = \lambda(\lambda^{-1}(U)) = \lambda(W \times V) = WV$.

$\Leftarrow$) Análogamente se tomará el sistema de vecindades que proporciona $\mathcal{M}$.

Sean $a \in R$, $x \in M$ y $U \in M_{ax}$ entonces $U = V + ax$ con $V \in \mathcal{M}$, por N1 existe $V\prime \in \mathcal{M}$ tal que $V\prime + V\prime \subseteq V$, aplicando de nuevo N1 a V' se tiene que existe $V_1 \in \mathcal{M}$ tal que $V_1 + V_1 \subseteq V'$, inmediatamente $V_1 + V_1 + V_1 \subseteq V\prime + V\prime \subseteq V$.

Ahora haciéndose uso de NM3 y NM4 en V_1 existen $V_2 \in \mathcal{N}$ y $V_3 \in \mathcal{M}$ tales que $aV_3 \subseteq V_1$ y $V_2x \subseteq V_1$, por lo que se tiene $aV_2 + V_2x \subseteq V_1 + V_1$. Por otro lado se usa NM5 en V_1 por lo que existe $V_4 \in \mathcal{N}$ y $V_5 \in \mathcal{M}$ tales que $V_4V_5 \subseteq V_1$.

Definiéndose $W = V_2 \cap V_4 \in \mathcal{N}$ y $W' = V_3 \cap V_5$, entonces $WW' + aW' + Wx \subseteq V$, sumando ax se tiene lo buscado $\lambda((W + a) \times (W' + x)) = WW' + aW' + Wx + ax \subseteq U$. Por lo tanto λ es una función continua.$\rfloor$

Un R es un anillo topológico es un anillo topológico lineal izquierdo si existe un base de vecindades del 0 que consiste en ideales izquierdos. El conjunto $\mathcal{F}$ de todos los ideales izquierdos abiertos cumplen:

T1. Si $I \in \mathcal{F}$ y $I \subseteq J$ entonces $J \in \mathcal{F}$.

T2. Si $I, J \in \mathcal{F}$ entonces $I \cap J \in \mathcal{F}$.

T3. Si $a \in R$ y $I \in \mathcal{F}$ entonces $(I : a) \in \mathcal{F}$ donde $(I : a) = \{r \in R \mid ra \in I\}$.

Los dos primeros dicen que $\mathcal{F}$ es un filtro, mientras que T3 viene de N3.

Recíprocamente si $\mathcal{F}$ es un conjunto de ideales izquierdos de R, que cumple T1-T3 entonces hay una única topología lineal izquierda en R con $\mathcal{F}$ como base de vecindades del 0.

$\Longrightarrow$) T1,T2. Se siguen de que el conjunto de subgrupos abiertos de un grupo topológico formen un filtro.

T3. Sean $a \in R$ y $I \in \mathcal{F}$ entonces por N3 existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $Ja \subseteq I$, de aquí $J \subseteq (I : a)$. Por T1 $(I : a) \in \mathcal{F}$.

$\Longleftarrow$) Sea $\mathcal{N}$ el filtro de vecindades de 0 generado por $\mathcal{F}$.Nótese que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$.

N1. Sea $U \in \mathcal{N}$ entonces existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $I \subseteq U$ pero $I + I = I$.

N2. Sea $U \in \mathcal{N}$ entonces existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $I \subseteq U$, de aquí $I = -I \subseteq -U$. Por ser $\mathcal{N}$ filtro $-U \in \mathcal{N}$.

N3. Sea $U \in \mathcal{N}$ y $a \in R$ entonces existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $I \subseteq U$, por lo que $aI \subseteq I \subseteq U$. Por otro lado $(I : a) \in \mathcal{F}$ se sigue $(I : a)a \subseteq I \subseteq U$, haciendo $J = I \cap (I : a)$ se tiene que $aJ \subseteq U$ y $Ja \subseteq U$.

N4. Sea $U \in \mathcal{N}$ entonces existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $I \subseteq U$ pero $II \subseteq I$. Aquí $II = \{ab \in R \mid a, b \in R\}$, nótese que no tiene por que tener estructura alguna.

Como $\mathcal{N}$ cumple N1-N4 entonces existe una única topología que hace R anillo topológico con $\mathcal{N}$ como sistema de vecindades del 0, pero por construcción $\mathcal{F}$ es una base para las vecindades del 0 por lo que es una topología lineal.$\rfloor$

Sea R un anillo topológico izquierdo con $\mathcal{F}$ como conjunto de todos los ideales izquierdos abiertos. Un $R-$módulo izquierdo topológico es llamado un módulo topologico lineal si tiene una base de vecindades del 0 consistente en submódulos. Los submódulos abiertos de M satisfacen:

TM1. Si $L \subseteq L'$ son submódulos de M y L es abierto, entonces L' es abierto.

TM2. Si L, L' son submódulos abiertos entonces $L \cap L'$ es abierto

TM3. Si L es un submódulo abierto y $x \in M$, entonces $(L : x) \in \mathcal{F}$ donde $(L : x) = \{r \in R \mid rx \in L\}$.

Recíprocamente, estos axiomas definen una única topología lineal en M.

$\Rightarrow$) TM1 y TM2. Análogamente que T1 y T2

TM3. Sean $x \in M$ y L un submódulo abierto entonces por NM3 existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $Jx \subseteq L$, de aquí $J \subseteq (L : x)$. Por TM1 $(L : x) \in \mathcal{F}$.

$\Longleftarrow$) Sean $\mathcal{M}$ el filtro de vecindades de 0 generado por el filtro de submódulos abiertos de M y $\mathcal{F}$ el conjunto de ideales izquierdos abiertos de una topología lineal para la cual los submódulos abiertos de M cumplan TM1-TM3.

N1. Sea $U \in \mathcal{M}$ entonces existe N submódulo abierto tal que $N \subseteq U$ pero $N + N = N$.

N2. Sea $U \in \mathcal{M}$ entonces existe N submódulo abierto tal que $N \subseteq U$, de aquí $N = -N \subseteq -U$. Por ser $\mathcal{M}$ filtro $-U \in \mathcal{M}$.

NM3. Sean $U \in \mathcal{M}$ y $x \in M$ entonces existe N submódulo abierto tal que $N \subseteq U$, por TM3 $(N : x) \in \mathcal{F}$ y $(N : x)x \subseteq N \subseteq U$.

NM4. Sean $U \in \mathcal{M}$ y $a \in R$ entonces existe N submódulo abierto tal que $N \subseteq U$, por lo tanto $aN \subseteq N \subseteq U$.

NM5. Sea $U \in \mathcal{M}$ entonces existe N submódulo abierto tal que $N \subseteq U$, por ser $\mathcal{F}$ filtro $R \in \mathcal{F}$ de aquí $RN \subseteq N \subseteq U$.

Como $\mathcal{M}$ satiface N1-N2 y NM3-NM5 por lo tanto existe una única topología que a hace a M en un módulo topológico, por construcción tiene como base de las vecindades del 0 a los submódulos abiertos del 0 se tiene que M es un módulo topológico lineal.$\rfloor$

Para $M \in R-Mod$ existe la topología lineal más fina de M con respecto a $\mathcal{F}$, llamada la única para la cual los el conjunto de submódulos abiertos es

$$\mathcal{F}(M) = \{L \subseteq M \mid (L : x) \in \mathcal{F}, \text{para cada } x \in M\}$$

$\mathcal{F}(M)$ cumple TM1 y TM2 como consecuencia de T1 y T2 para $\mathcal{F}$,mientras que TM3 lo satisface por definición.

Esta topología es llamada la $\mathcal{F}$-topología en M. En particular esta topología es la misma que la dada en R.

La $\mathcal{F}$-topología de M es discreta si y solo si el aniquilador izquierdo $Ann(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in M$. Se llamará a un módulo M, $\mathcal{F}$-discreto si la $\mathcal{F}$-topología de M es discreta.

Lema 4.1 La clase de módulos $\mathcal{F}$-discretos es una clase de pretorsión hereditaria.

Demostración

Sea M $\mathcal{F}$-discreto y $N \subseteq M$, entonces $Ann(x) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in M$ y $Ann(x) \subseteq Ann(x + N)$ para toda $x \in M$, aplicando T1 $Ann(x + N) \in \mathcal{F}$ para toda $x + N \in M/N$. Por lo tanto M/N es

$\mathcal{F}$-discreto.

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos $\mathcal{F}$-discretos entonces $Ann(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in M_i$ y para cada $i \in I$, si $\Phi \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ se tiene que $Ann(\Phi) = \bigcap_{\Phi(i)\neq 0} Ann(\Phi(i))$, como este es un número finito se puede usar T2 para ver que $\bigcap_{\Phi(i)\neq 0} Ann(\Phi(i)) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es $\mathcal{F}$-discreto.

De aquí que sea una clase de pretorsión.

Como un módulo M es $\mathcal{F}$-discreto si y solo si $Ann(x) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in M$, en particular si $N \subseteq M$, $Ann(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in N$, por lo que N es $\mathcal{F}$-discreto.

Por lo tanto es una clase de pretorsión hereditaria.⌋

Por el corolario 1.9 a $\mathcal{F}$ le corresponde un prerradical exacto izquierdo t, y se tiene que

$$t(M) = \{x \in M \mid Ann(x) \in \mathcal{F}\} \quad \text{para cada } M \in R-Mod$$

Será conveniente llamar $t(M)$ al submódulo de $\mathcal{F}$-pretorsión de M. Se usarán alternativamente los términos "módulo $\mathcal{F}$-discretoz "módulo de $\mathcal{F}$-pretorsión".

El corolario 1.9 puede ser extendido a:

Proposición 4.2 Hay una biyección entre:

1)Topologías lineales izquierdas

2)Clases de pretorsión hereditarias de $R-Mod$

3)Los prerradicales exactos izquierdos de $R-pr$.

Demostración

Sea $\mathcal{F}$ una topología lineal izquierda y defínase $\mathcal{F} \overset{f}{\mapsto} \{M \in R-Mod \mid Ann(x) \in \mathcal{F}$, para cada $x \in M\}$, está bien definido por el Lema 4.1. Si $\mathcal{C}$ es clase de pretorsión hereditaria entonces defínase $\mathcal{C} \overset{g}{\mapsto} \{I \leq R \mid R/I \in \mathcal{C}\} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

Véase $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ es una topología lineal izquierda.

T1) Sea $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ y $I \subseteq J$, entonces $R/I \in \mathcal{C}$ por ser $\mathcal{C}$ de pretorsión se tiene que $(R/I)/(J/I) \in \mathcal{C}$, pero se sabe que $(R/I)/(J/I) \cong R/J$. Por lo que $R/J \in \mathcal{C}$ y de aquí $J \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

T2) Sean $I, J \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ entonces $R/I, R/J \in \mathcal{C}$, bajo la hipótesis de que $\mathcal{C}$ es clase de pretorsión $R/I \oplus R/J \in \mathcal{C}$ y aparte se sabe que $R/(I \cap J) \subseteq R/I \oplus R/J$, aplicando que es hereditaria $R/(I \cap J) \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $I \cap J \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

T3) Sean $I \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ y $a \in R$ entonces la multiplicación por la derecha por a r_a induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (I : a) \xrightarrow{r_a} R \xrightarrow{\Pi} R/I$$

de donde $R/(I : a) \subseteq R/I$, haciendo uso de que $\mathcal{C}$ es hereditaria $R/(I : a) \in \mathcal{C}$. De donde $(I : a) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

Ahora véase que $g(f(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ y $f(g(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$.Sean $\mathcal{F}$ una topología lineal izquierda y $\mathcal{C}$ una clase de pretorsión hereditaria.

$$\begin{aligned}
g(f(\mathcal{F})) &= g(\{M \in R-Mod \mid Ann(x) \in \mathcal{F}, \text{ para cada } x \in M\}) \\
&= \{I \leq R \mid \text{ para cada } x + I \in R/I, Ann(x+I) \in \mathcal{F}\} \\
&= \{I \leq R \mid (I : a) \in \mathcal{F}, \text{ para cada } a \in R\} = \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Primero $\mathcal{F} \subseteq g(f(\mathcal{F}))$ por T3 y sea $I \in g(f(\mathcal{F}))$ entonces $(I : a) \in \mathcal{F}$ para cada $a \in R$, en particular $1 \in R$ y $I = (I : 1) \in \mathcal{F}$.Por lo tanto $g(f(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
f(g(\mathcal{C})) &= f(\{I \leq R \mid R/I \in \mathcal{C}\}) \\
&= \{M \in R-Mod \mid Ann(x) \in g(\mathcal{C}), \text{ para cada } x \in M\} \\
&= \{M \in R-Mod \mid R/Ann(x) \in \mathcal{C}, \text{ para cada } x \in M\} \\
&= \{M \in R-Mod \mid N \in \mathcal{C}, N \subseteq M \text{ submódulo cíclico}\} \\
&= \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Fácilmente se puede ver que $\mathcal{C} \subseteq f(g(\mathcal{C}))$ por ser hereditaria y el regreso $\mathcal{C} \subseteq f(g(\mathcal{C}))$ se sigue de la demostración de la proposición 3.6.$\rfloor$

Por la proposición anterior se dedujo que la clase de pretorsión hereditarias y la clase de prerradicales exactos izquierdos sobre $R-Mod$ son conjuntos ya que la clase de todas las topologías lineales izquierdas es un conjunto.

Si R es un anillo y $\mathcal{F}$ es el conjunto de ideales izquierdo de R que cumplen T1-T3, se abusará del lenguaje y se llamará a $\mathcal{F}$ una topología de R. La correspondiente topología lineal de R es llamada la $\mathcal{F}$-topología en R, de acuerdo con la teminología ya introducida.

Por una base para una topología $\mathcal{F}$ se referirá a un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ tal que para todo $I \in \mathcal{F}$ exista $J \in \mathcal{B}$ tal que $J \subseteq I$.

Ejemplos

1. Topologías Separadas

Un grupo topológico se llama separado si cada punto es cerrado. Una topología I de ideales izquierdos es separada si y solo si $\bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}} I = 0$.

Para demostrar esta observación se usará el siguiente lema.

Lema Sea A un subconjunto de un grupo topológico G y U es el sistema de vecindades del 0, *entonces* $\bar{A} = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} A + U$.

Demostración

Si $U \in \mathcal{U}$ y $x \in \bar{A}$ entonces $x - U$ es una vecindad de x, de aquí existe $a \in A \cap (x - U)$. Se puede escribir $a = x - u$ para alguna $u \in U$. Por lo que $x = a + u \in A + U$.Por lo tanto $\bar{A} \subseteq \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} A + U$.

Para la otra contención supóngase que $x \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} A + U$ y que V es una vecindad de x, defínase $W = x - V \in \mathcal{U}$ y se sigue $x \in A + W$, si escríbase $x = a + w$ con $a \in A$ y $w \in W$ téngase que $a = x - w \in x - W = x - (x - V) = V$ entonces $a \in A \cap V$. Por lo que $A \cap V \neq \varnothing$ para toda vecindad V de x. Por lo tanto $\bar{A} \supseteq \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} A + U$.$\rfloor$

Notese que un anillo topológico en particular es un grupo topológico y que en este caso $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Si se hace $A = 0$, entonces se tiene que $\bar{0} = \bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}} (0 + I) = \bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}} I$.

Si cada punto es cerrado en particular el cero es decir $0 = \bar{0} = \bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}} I$.

Si $\bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}} I = 0$ entonces$\{a\} = (\bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}} I) + a = \bigcap\limits_{I \in \mathcal{F}} (I + a) = \overline{\{a\}}$ para cada $a \in R$.$\rfloor$

2. La topología I-ádica

Si I es un ideal bilateral de R, las potencias I^n forman una base para una topología lineal de R, llamada usualmente la topología $I-$ádica. La topología $I-$ádica es separada si y solo si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} I^n = 0$.

Véase que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} I^n = 0$ si y solo si $\bigcap_{J\in\mathcal{F}} J = 0$, nótese que $\{I^n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq \mathcal{F}$ por lo que la ida se sigue fácilmente, de este mismo hecho se ve que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} I^n \supseteq \bigcap_{J\in\mathcal{F}} J$. Como $\{I^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ es una base entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} I^n \subseteq \bigcap_{J\in\mathcal{F}} J$. Por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} I^n = \bigcap_{J\in\mathcal{F}} J = 0.\rfloor$

TOPOLOGÍAS DE GABRIEL

Una teoría de torsión hereditaria corresponde a un topología lineal para la cual la clase de módulos discretos es cerrada bajo extensiones. Para caracterizar dichas topologías se puede introducir otro axioma:

T4. Si I es un ideal izquierdo y existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $(I : a) \in \mathcal{F}$, para cada $a \in J$, entonces $I \in \mathcal{F}$.

Una familia $\mathcal{F}$ de ideales izquierdos de R que satisface los axiomas T1-T4 es una topología de Gabriel izquierda de R.

Proposición 5.1 Hay una correspondencia biyectiva entre

1) Las topologías de Gabriel izquierdas.

2) Las teorías de torsión hereditarias para $R - Mod$.

3) Radicales exactos izquierdos en $R - Mod$.

Demostración

Ya se ha demostrado en la proposición 3.1 la correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias y los radicales exactos izquierdos.

Sea I una topología de Gabriel y $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta con M', M'' módulos $\mathcal{F}$-discretos. Para toda $x \in M$ se pone $I = ann(g(x))$, entonces $I \in \mathcal{F}$ y para cada $b \in I$ se tiene que $bx \in Imf \cong M'$. De aquí $ann(bx) \in \mathcal{F}$, como a $nn(bx) = (ann(x) : b)$ por T4 se tiene que $ann(x) \in \mathcal{F}$.

Por lo tanto $M \in \mathcal{F}-$discreto, ahora como la clase de pretorsión hereditaria es cerrada bajo extensiones entonces es una clase de torsión hereditaria.

Por otro lado, véase que si $\mathcal{T}$ es una clase de torsión hereditaria la topología correspondiente $\mathcal{F} = \{I \leq R \mid R/I \in \mathcal{T}\}$ cumple con T4.

Sea I un ideal izquierdo de R que cumple $(I : a) \in \mathcal{F}$ para toda a$\in I$ para algún $J \in \mathcal{F}$ y tómese la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow J/(I \cap J) \longrightarrow R/I \longrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0$$

pero $R/J \in \mathcal{F}$, usando que es clase de torsión se ve que $(R/J)/((I + J)/J) \in \mathcal{F}$, pero por el tercer teorema de isomorfismo se tiene $(R/J)/((I + J)/J) \cong R/(I + J)$, por lo que $R/(I + J) \in \mathcal{F}$.

Ahora considérese que

$$(I \cap J : a) = (I : a) \cap (J : a) = (I : a) \cap R = (I : a) \in \mathcal{F}$$

como el $ann(a + (I \cap J)) = (I \cap J$:a) entonces $J/(I \cap J) \in \mathcal{T}$.Como $\mathcal{T}$ es clase de torsión entonces es cerrada bajo extensiones po lo que $R/I \in \mathcal{T}$. Por lo que $I \in \mathcal{F}$.$\rfloor$

Si $\mathcal{F}$ es una topología de Gabriel en R la clase de torsión hereditaria correspondiente consiste en todos los módulos que son $\mathcal{F}$-discretos, o equivalentemente, para los que para todos usus elementos son aniquilados por algún ideal de $\mathcal{F}$. Estos módulos son llamados módulos de $\mathcal{F}$-torsión.

Lema 5.2 Si $\mathcal{F} \neq \varnothing$ es un conjunto de ideales izquierdos que satisface T3 y T4, entonces $\mathcal{F}$ satisface T1 y T2.

Demostración

T1) Como $\mathcal{F} \neq \varnothing$ entonces existe $I \in \mathcal{F}$ y se toma $a \in I$, por T3 $(I : a) \in \mathcal{F}$ pero $(I : a) = R$.

Sea $K \in \mathcal{F}$ y $K \subseteq J$ tiene que para toda a$\in K$, $R = (J : a) \in \mathcal{F}$, aplicando T4 $J \in \mathcal{F}$.

T2) Sean $I, J \in \mathcal{F}$, si $a \in J$ entonces $(I \cap J : a) = (I : a) \cap (J : a) = (I : a) \cap R = (I : a) \in \mathcal{F}$ por T3, por lo que se tiene que $(I \cap J : a) \in \mathcal{F}$, para cada a$\in J$, haciéndose uso de T4 se tiene $I \cap J \in \mathcal{F}$.$\rfloor$

Este lema es bastante útil, ya que gracias a él cuando se quiera ver si un conjunto de ideales es una topología de Gabriel solo bastará checar que cumple T3 y T4.

Lema 5.3 Sea $\mathcal{F}$ una topología de Gabriel . Si $I, J \in \mathcal{F}$ entonces $JI \in \mathcal{F}$.

Demostración

Para toda $a \in \mathcal{F}$, se tiene que $J \subseteq (JI : a)$, por T1 $(JI : a) \in \mathcal{F}$ y usando T4 se tiene $JI \in \mathcal{F}$.$\rfloor$

Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son topologías de R, se dice que $\mathcal{F}_1$ es más burda que $\mathcal{F}_2$ (y que $\mathcal{F}_1$ es más fina que $\mathcal{F}_2$) si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Ya que es claro que la intersección de dos topologías es una topología, las topologías de R forman una retícula completa $Top(R)$. Como también cada intersección de topologías de Gabriel es una topología de Gabriel, hay un operador clausura J en $Top(R)$ el cual a cada topología calA le asocia la más burda topología de Gabriel J(calA) más fina que A. La proposición 3.1 establece un isomorfismo de retículas entre $Top(R)$ y la retícula de clases de pretorsión de $R-$módulos. Si calA es una topología entonces J(calA) es la topología de Gabriel correspondiente a la teoría de torsión hereditaria generada por la clase de los módulos calA-discretos.

Proposición 5.4 Si $\mathcal{A}$ es una topología lineal en R, entonces $J(\mathcal{A}) = \{I \leq R \mid$ para cada $I \subseteq J, J \neq R$, existe $a \notin J(J : a) \in \mathcal{A}.\}$

Demostración

Aplicando la proposición 2.5 a $\mathcal{C} = \{J/I \mid I \in \mathcal{A}\}$, véase que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes. Sea $J/I \subseteq K/I$ con $K/I \in \mathcal{C}$ por T1 $J \in \mathcal{A}$, entonces $K/J \in \mathcal{C}$ pero $K/J \cong (K/I)/(J/I)$, de aquí $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes.

De aquí la la clase de torsión $\mathcal{T}$ generada por $\mathcal{C}$ es $\{M \in R - Mod \mid \text{para todo } M/N \neq 0, \text{existe } K/N \in \mathcal{C} \text{ con } K/N \neq 0\}$, por lo que ya se ha visto $J(\mathcal{A}) = \{I \leq R \mid R/I \in \mathcal{T}\}$. Claramente $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cocientes y por la proposición 3.3 se tiene que $\mathcal{T}$ es hereditaria, por lo que por la proposición 5.1 $J(\mathcal{A}) = \{I \leq R \mid$ *para cada* $I \subseteq J, J \neq R,$ *existe* $a \notin J$ *tal que* $(J : a) \in \mathcal{A}\}$.$\rfloor$

Del capítulo 3 se sabe que un teoría de torsión hereditaria puede ser cogenerada por un módulo inyectivo, si este módulo inyectivo se da como la cápsula inyectiva de algún módulo la topología correspondiente puede ser descrita de la siguiente manera.

Proposición 5.5 Sea $\mathcal{F}$ la topología de Gabriel correspondiente a la teoría de torsión hereditaria cogenerada por $E(M)$ para algun $M \in R - Mod$ entonces, $I \in \mathcal{F}$ si y solo si $(I : a)x \neq 0$ para todo $a \in R, x \in M$ con $x \neq 0$.

Demostración

Se tiene que $I \in \mathcal{F}$ si y solo si $R/I \in \mathcal{T}$ si y solo si $Hom(R/I, E(M)) = 0$, por el lema 3.8 se tiene que, si y solo si $Hom(C, M) = 0$ para todo submódulo cíclico de R/I. Pero todos los submódulos cíclicos de R/I tienen la forma $R/(I : a)$ con $a \in R$, entonces $Hom(C, M) = 0$ para todo submódulo cíclico de R/I si y solo si $Hom(R/(I : a), M) = 0$ con $a \in R$.$\rfloor$

Proposición 5.8 La topología de Gabriel $\mathcal{F}$ correspondiente a teoría de torsión cogenerada por $E(M)$ es la más fina para la cual M es libre de torsión.

Demostración

Sea $\mathcal{J}$ una topología de Gabriel tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$,entonces por la proposición anterior existen $I \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{F}$, $x \in M$ y $a \in R$ tales que $(I : a)x = 0$, de aquí $(I : a) \subseteq Ann(x)$, por T1 $Ann(x) \in \mathcal{J}$ y si se llama t al radical exacto izquierdo asociado a $\mathcal{J}$ se tiene que $t(M) \neq 0$. Por lo tanto $M \notin \mathcal{F}$.⌋

EJEMPLOS DE TOPOLOGÍAS DE GABRIEL

1. 1-topologías. Una 1-topología en R es una topología de Gabriel con base los ideales izquierdos principales. Una 1-topología $\mathcal{I}$ es determinada por el conjunto $\Sigma(\mathcal{I}) = \{s \in R \mid Rs \in \mathcal{I}\}$.

Proposición 6.1 La función $\mathcal{I} \longmapsto \Sigma(\mathcal{I})$ es una biyección entre las 1-topologías I de R y los subconjuntos multiplicativamente cerrados S de R que satisfacen :

S0. Si $ab \in S$ entonces $b \in S$.

S1. Si $s \in S$ y $a \in R$ entonces existen $t \in S$ y $b \in R$ tales que $bs = ta$.

Demostración

Primero véase que la función está bien definida, sea I una 1-topología:

Multiplicativamente cerrado.- Sean $s, t \in \Sigma(\mathcal{I})$ entonces $Rs, Rt \in \mathcal{I}$, inmediatamente $(Rt : a) \subseteq (Rts : as)$ para cada $a \in R$, por T3 $(Rt : a) \in \mathcal{I}$ y por T1 $(Rts : as) \in \mathcal{I}$, aplicando T4 Rts con Rs se tiene que $Rts \in \mathcal{I}$. Por lo tanto $ts \in \Sigma(\mathcal{I})$.

S0.- Sea $ab \in \Sigma(\mathcal{I})$ entonces $Rab \in I$ y se sabe que $Rab \subseteq Rb$ por lo que T1 dice que $Rb \in I$, por lo tanto $b \in \Sigma(\mathcal{I})$.

S1.- Sean $s \in S$ y $a \in R$ entonces por T3 $(Rs : a) \in I$, como es una 1-topología existe $t \in R$ tal que $Rt \subseteq (Rs : a)$ por lo que $1ta \in Rs$ y de aquí $ta = bs$.

Por otro lado defínase el inverso, sea S un conjunto multiplicativamente cerrado que satisface S1, defínase la función $S \mapsto \Pi(S)$ donde $\Pi(S) = \{I \leq R \mid I \cap S \neq \varnothing\}$.

Obsérvese que $\Pi(S)$ es una 1-topología, sea S un conjunto multiplicativamente cerrado que satisface S1:

T3.- Sea $I \in \Pi(S)$ y $a \in R$, por hipótesis $I \cap S \neq \varnothing$ de aquí existe $s \in I \cap S$, por S1 existen $t \in S$ y $b \in R$ tales que $bs = ta$, como $s \in I$ entonces $bs \in I$, por lo que $ta \in I$ de aquí $t \in (I : a)$.

Por lo tanto $t \in (I : a) \cap S$, así se llega a que $(I : a) \cap S \neq \varnothing$, de donde $(I : a) \in \Pi(S)$.

T4.- Sea $J \in \Pi(S)$ e I un ideal izquierdo de R tal que $(I : a) \in \Pi(S)$ para toda $a \in J$, por hipótesis se tiene que $J \cap S \neq \varnothing$ y $(I : a) \cap S \neq \varnothing$ para cada $a \in J$, de lo que existe $s \in S \cap J$ tal que $(I : s) \cap S \neq \varnothing$, por lo que existe $t \in (I : s) \cap S$, nótese que $ts \in I$ y $t, s \in S$ pero por hipótesis S es un conjunto multiplicativamente cerrado entonces $ts \in S$, por lo tanto $I \cap S \neq \varnothing$ y $I \in \Pi(S)$.

Por el Lema 5.2 $\Pi(S)$ es una topología de Gabriel.

Base de ideales izquierdos principales.- Sea $I \in \Pi(S)$ por definición $I \cap S \neq \varnothing$, entonces existe $s \in I \cap S$, por lo que $Rs \subseteq I$ y $Rs \in \Pi(S)$.

S0 es una axioma de saturación que da la biyección de la siguiente manera

Sea $\mathcal{I}$ una 1-topología, entonces

$$\begin{aligned}
\Pi(\Sigma(\mathcal{I})) &= \Pi(\{s \in R \mid Rs \in \mathcal{I}\}) \\
&= \{I \leq R \mid I \cap \Sigma(\mathcal{I}) \neq \varnothing\} \\
&= \{I \leq R \mid \exists s \in I, Rs \in \mathcal{I}\} \\
&= \mathcal{I}
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue inmediatamente de tener una base de ideales principales izquierdos.

Sea S un conjunto multiplicativamente cerrado que cumple S0 y S1, entonces

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Pi(S)) &= \Sigma(\{I \leq R \mid I \cap S \neq \varnothing\}) \\
&= \{s \in R \mid Rs \in \Pi(S)\} \\
&= \{s \in R \mid Rs \cap S \neq \varnothing\} \\
&= S
\end{aligned}$$

Ver que $S \subseteq \Sigma(\Pi(S))$ es trivial, sea $s \in Rs \cap S$ entonces existe $x \in Rs \cap S$, de donde $x = rs$ para alguna $r \in R$ y $rs \in S$, por S0 $s \in S$.⌋

Para una 1-topología $\mathcal{I}$, los módulos de $\mathcal{I}$-torsión M están caracterizados por la propiedad de que para cada $x \in M$ existe $s \in \Sigma(\mathcal{I})$ tal que $sx = 0$.

2. La teoría de torsión de Goldie. La familia $\mathcal{E}$ de ideales izquierdos esenciales izquierdos de R es una topología, pero no necesariamente satisface T4. El correspodiente prerradical exacto izquierdo es comúnmente denotado por Z, y se llama a $Z(M)$ el submódulo singular d M. La topología de Gabriel $J(E)$ es llamada la topología de Goldie de R. El correspondiente radical de torsión G es el menor radical que contiene a Z. El proceso del capítulo 1 por el cual se llega G desde Z se detiene rápido.

Proposición 6.2 $G = Z_2$ *i.e.* $G = (Z : Z)$

Demostración

Primero véase que $Z(M) = \{x \in M \mid Ann(x) \trianglelefteq R\}$ y nótese que $Z(M) \trianglelefteq G(M)$ para todo $M \in R - Mod$ por la proposición 3.5. Ahora se tiene

$$Z_2(M)/Z(M) = (Z : Z)(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$$

$$= \{x + Z(M) \in M/Z(M) \mid Ann(x + Z(M)) \trianglelefteq R\}$$

Sea $x + Z(M) \in G(M)/Z(M)$, entonces $Ann(x + Z(M)) = (Z(M) : x) \trianglelefteq R$. De aquí se tiene $G(M)/Z(M) \subseteq Z_2(M)/Z(M)$. Por lo tanto $G = Z_2 \rfloor$

Proposición 6.3 Si $\mathcal{E}$ *es la familia de ideales esenciales izquierdos, entonces*

$$J(E) = \{I \leq R \mid \textit{existe } J \in \mathcal{E},\ I \subseteq J, (I : a) \in \mathcal{E} \textit{ para cada } a \in J\}$$

Demostración

$\subseteq$) Sea $I \in J(\mathcal{E})$, entonces R/I es un módulo de torsión de Goldie, de aquí $G(R/I) = R/I$. Si se escribe $Z(R/I) = J/I$, y siguiéndose que

$$\begin{aligned} Z(R/J) &= Z((R/I)/(J/I)) \\ &= Z((R/I)/Z(R/I)) \\ &= G(R/I)/Z(R/I) \\ &= (R/I)/(J/I) \\ &= R/J \end{aligned}$$

por lo que $J \in \mathcal{E}$. Ahora calculándose $Z(J/I) = Z^2(R/I) = Z(R/I) = J/I$. Esto último dice que $Ann(a+I) \in \mathcal{E}$ para cada $a+I \in J/I$, pero se tiene que $(I : a) = Ann(a+I) \in \mathcal{E}$ para toda $a \in J$.

$\supseteq$) Se sigue de T4, ya que $\mathcal{E} \subseteq J(\mathcal{E})$.$\rfloor$

3. La topología densa. La teoría de torsión cogenerada por el módulo inyectivo $E(R)$ es de particular importancia. Los ideales izquierdos pertenecientes a esta topología de Gabriel denotada por $\mathcal{D}$ se llaman densos.

Proposición 6.4 Un ideal izquierdo I es denso si y solo si $(I : a)$ no tiene anuladores derechos diferentes del cero para cada $a \in R$.

Demostración

Escribiendo la segunda parte como $(I : a)b \neq 0$ para cada $a, b \in R$ con $b \neq 0$ y aplicándose la proposición 5.5.$\rfloor$

Corolario 6.5 Todo ideal izquierdo denso es esencial en R

Demostración

Se tiene que si $I \in \mathcal{D}$ entonces $(I : a)b \neq 0$ para cada $a, b \in R$ con $b \neq 0$. En particular si se elije $a = b$, es decir $(I : b)b \neq 0$, entonces existe $x \in (I : b)$ tal que $xb \neq 0$. Es fcil ver que $xb \in I$ y $xb \in Rb$. Por lo que $(I : b) \cap Rb \neq 0$.

Por lo tanto $I \trianglelefteq R$.

Por lo que $(I : a) \neq 0$ para cada $a \in R$. Por lo que $I \trianglelefteq R$.$\rfloor$

Corolario 6.6 Un ideal I bilateral es denso como ideal izquierdo si y solo si I no tiene anuladores derechos diferentes del cero.

Demostración

Como I es bilateral entonces $I \subseteq (I : a)$ para cada $a \in R$, entonces $(I : a)$ no tiene anuladores derechos diferentes del cero para toda $a \in R$.

Por la proposición 5.6 $\mathcal{D}$ es la topología más fina para la cual R es libre de torsión. La cual en general es más burda que la topología de Goldie, pero estas llegan a coincidir:

Proposición 6.7 El anillo R es no singular izquierdo si y solo si cada ideal izquierdo esencial es denso.

Demostración

Si I es un ideal izquierdo esencial entonces $(I : a)$ también lo es para cada $a \in R$. Sea $b \in R$ con $b \neq 0$, si se tuviese que $(I : a)b = 0$ implica que $(I : a) \subseteq Ann(b)$. De esto se tendría que $Ann(b) \trianglelefteq R$, pero $Z(R) = 0$. Por lo cual solo queda que $(I : a)b \neq 0$ para todo $b \in R$ con $b \neq 0$.

Por otro lado, sea $x \in R$ con $Ann(x) \trianglelefteq R$, por hipótesis se tiene que $Ann(x) \in \mathcal{D}$ y esto pasa si y solo si $(Ann(x) : a)b \neq 0$ para cada $a, b \in R$ con $b \neq 0$, en particular cuando si $a = 1$ y $b = x$, se obtiene que el $(Ann(x) : 1) = Ann(x)$ y $Ann(x)x = 0$, lo que dice $x = 0$. Por lo tanto $Z(R) = 0$.

Corolario 6.8 Cuando R es no singular izquierdo, la topología de Goldie y la topología densa coinciden.

4. Las topologías $\mathcal{F}_M^n$. Sea M un $R-$módulo. Considérese la mínima resolución inyectiva de M :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mu_0} E_0 \xrightarrow{\mu_1} E_1 \xrightarrow{\mu_2} E_2 \longrightarrow ...$$

donde $E_0 = E(M)$ y cada $E_{i+1} = E(conuc\mu_i)$. Defínase $\mathcal{F}_M^n$ como la topología de Gabriel correspondiente a la teoría de torsión cogenerada por $E_0 \oplus ... \oplus E_n$. Obsérvese que $\mathcal{F}_R^0$ es la topología densa del ejemplo anterior.

Proposición 6.9 Un módulo L es de $\mathcal{F}_M^n-$torsión si y solo si $Ext_R^i(L', M) = 0$ para cada $i = 0, .., n$ y todos los submódulos cíclicos de L.

Demostración

Primero véase que un módulo L es de $\mathcal{F}_M^n-$torsión si y solo si $Hom(L, E_0 \oplus ... \oplus E_n) = 0$, pero $Hom(L, E_0 \oplus ... \oplus E_n) = \bigoplus_{i=0}^{n} Hom(L, E_i)$, por lo que $Hom(L, E_0 \oplus ... \oplus E_n) = 0$ si y solo si $Hom(L, E_i) = 0$ para toda $i = 0, ..., n$. Ahora escríbase $M_i = im\mu_i$ con $i = 0, ..., n$ entonces por lema 3.8 lo anterior es equivalente a que $Hom(L', M_i) = 0$ para cada L' cíclico y con $i = 0, ..., n$.

Por inducción sobre n.

Caso $n = 0$. Es el lema 3.8.

Tómese la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow E_n \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow 0$$

Por el teorema del corrimiento para inyectivos se tiene que $Ext^1(L`, M_n) = Ext^{n+1}(L', M)$, aplicando la hipótesis de inducción se tiene que L un módulo de $\mathcal{F}_M^n-$torsión es de $\mathcal{F}_M^n-$torsión si y solo si $Ext^{n+1}(L', M) = 0$ para cada L' submódulo cíclico de L.$\rfloor$

5. Topologías Acotadas. Una topología se llama acotada si tiene una base de ideales bilaterales.

Proposición 6.10 Sea $\mathcal{B}'$ un conjunto de ideales bilaterales finitamente generados como ideales izquierdos. El conjunto de todos los productos finitos de ideales pertenecientes a $\mathcal{B}$ forman una base *para alguna topología de Gabriel $\mathcal{F}$. acotada.*

Demostración

Sea $\mathcal{B}'$ el conjunto de todos los productos finitos de ideales pertenecientes a $\mathcal{B}$. Se define $\mathcal{F} = \{I \leq R \mid \text{existe } J \in \mathcal{B}' \text{ tal que } J \subseteq I\}$ y se afirma que esta es una topología de Gabriel acotada.

T3) Si I es un ideal izquierdo en $\mathcal{F}$ entonces existe $J \in \mathcal{B}'$ tal que $J \subseteq I$. Ahora sea $a \in R$, se tiene que $Ja \subseteq J \subseteq I$, por lo que $Ja \subseteq (I : a)$. Por lo tanto $(I : a) \in \mathcal{F}$.

T4) Sea I un ideal izquierdo tal que existe $J \in \mathcal{B}'$ con $(I : a) \in \mathcal{F}$ para toda $a \in J$. Sean $x_1, ..., x_n$ unos generadores de J como ideal izquierdo. Por hipótesis $(I : x_i) \in \mathcal{F}$,para cada $i = 1, ..., n$ .Por lo que existe un $J_i \subseteq (I : x_i)$ con $J_i \in \mathcal{B}'$ y para cada $i = 1, ..., n$; de aquí se tiene $J_i x_i \subseteq I$ con $i = 1, ..., n$ .Entonces $J_1 ... J_n J \subseteq (J_1 \cap ... \cap J_n)J \subseteq I$ donde $J_1 ... J_n J \in \mathcal{B}'$. Por lo tanto $I \in \mathcal{F}$.$\rfloor$

Proposición 6.11 Sea I un ideal bilateral idempotente, entonces el conjunto de ideales izquierdos tales que contienen a I es una topología de Gabriel.

Demostración

T3) Es análogo a la proposición anterior.

T4) Sea J un ideal izquierdo tal que $I \subseteq (J : a)$ para cada $a \in I$. Esto es que para toda $a, b \in I$ se tiene que $ab \in J$, escrito de otra forma $I^2 \subseteq J$. De que I sea idempotente se tiene que $I \subseteq J$.$\rfloor$

A este tipo de topología se le puede dar un a descripción alternativa.

Proposición 6.12 Las siguientes propiedades para una topología de Gabriel $\mathcal{F}$ son equivalentes:

a) La clase de módulos de $\mathcal{F}-$torsión es cerrada bajo productos.

b) Existe un ideal bilateral I tal que M es de $\mathcal{F}-$torsión si y solo si $IM = 0$.

c) $\mathcal{F}$ tiene una base consistente en un ideal izquierdo I.

d) $\mathcal{F}$ tiene una base consistente en un ideal bilateral idempotente I.

Demostración

a)$\Longrightarrow$c) Considérese la función canónica $\alpha : R \longrightarrow \prod_{I\in\mathcal{F}} R/I$. Por hipótesis $\prod_{I\in\mathcal{F}} R/I$ es de $\mathcal{F}-$torsión y como la teoría de torsión es hereditaria $Im\alpha$ también es de $\mathcal{F}-$torsión. Pero se tiene que $Im\alpha = R/nuc\alpha$ y se sabe que $nuc\alpha = \bigcap_{I\in\mathcal{F}} I$. Por lo tanto $\bigcap_{I\in\mathcal{F}} I \in F$ y $\bigcap_{I\in\mathcal{F}} I \subseteq J$ para toda $J \in F$. De aquí $\bigcap_{I\in\mathcal{F}} I$ es ideal izquierdo que se busca.

c)$\Longrightarrow$d) I tiene que se bilateral ya que por T3 se tiene que $I \subseteq (I : a)$ para cualquier $a \in R$. En otras palabras $Ia \subseteq I$ para toda $a \in R$, de aquí que I sea un ideal bilateral. Por el lema 5.3 se sabe que $I^2 \in \mathcal{F}$ y $I \subseteq I^2$. Por lo que I es idempotente.

d)$\Longrightarrow$b) Propóngase como ideal bilateral al que ya se tiene como base. Primero si M es de $F-$torsión se tiene que $Ann(x) \in \mathcal{F}$ para cada $x \in M$, entonces $I \subseteq Ann(x)$ para toda $x \in M$. Por lo que $IM = 0$.

Por otro lado si $IM = 0$, se tiene que $I \subseteq Ann(x)$ para cualquier $x \in M$ y el hecho de que $\mathcal{F}$ sea un filtro dice que $Ann(x) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in M$. Por lo tanto M es un módulo de $\mathcal{F}-$torsión.

b)$\Longrightarrow$a) Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ un conjunto de módulos de $\mathcal{F}-$torsión, por hipótesis se tiene que $IM_i = 0$ para cualquier $i \in I$. Calculándose $I\prod_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} IM_i = \prod_{i\in I} 0 = 0$, por lo tanto $\prod_{i\in I} M_i$ es de $\mathcal{F}-$torsión.$\rfloor$

6. Anillos conmutativos. Sea R un anillo conmutativo. Se definen $Spec(R)$ al conjunto de todos los ideales primos de R y para cada ideal I, $V(I) = \{P \in Spec(R) \mid I \subseteq P\}$.

Si P es un ideal primo, hay una topología de Gabriel correspondiente

$$\mathcal{F}_P = \{I \leq R \mid P \notin V(I)\}$$

Esto se puede generalizar más de la siguiente manera, si $\mathcal{P} \subseteq Spec(R)$ entonces se le asocia la topología de Gabriel,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{F}_P = \{I \leq R \mid \mathcal{P} \cap V(I) = \varnothing\}$$

Recíprocamente, a $\mathcal{F}$ una topología de Gabriel se le asocia

$$D(\mathcal{F}) = \{P \in Spec(R) \mid P \notin \mathcal{F}\}$$

Ahora se tiene $\mathcal{F}_{D(\mathcal{F})} = \{I \leq R \mid \mathcal{D}(\mathcal{F}) \cap V(I) = \varnothing\}$.

Considérese el caso de que $\mathcal{D}(\mathcal{F}) \cap V(I) = \varnothing$ y si $P \in V(I)$ entonces $P \in F$, es decir $V(I) \subseteq \mathcal{F}$. Por otro lado si $V(I) \subseteq \mathcal{F}$ y se toma $P \in V(I)$ se tendrá que $P \notin \mathcal{D}(\mathcal{F})$, por lo que $\mathcal{D}(\mathcal{F}) \cap V(I) = \varnothing$.

De estas dos observaciones se tiene que $\{I \leq R \mid \mathcal{D}(\mathcal{F}) \cap V(I) = \varnothing\} = \{I \leq R \mid V(I) \subseteq \mathcal{F}\}$.

Proposición 6.13 Las siguientes propiedades son equivalentes para una topología de Gabriel $\mathcal{F}$ sobre un anillo conmutativo R :

a) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ para algún $\mathcal{P} \subseteq Spec(R)$

b) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{D(\mathcal{F})}$

c) Para cada ideal I tal que $I \notin \mathcal{F}$, existe $P \in V(I)$ tal que $P \notin \mathcal{F}$.

Demostración

b)$\Longrightarrow$a) Se elige $\mathcal{P} = D(\mathcal{F})$.

a)$\Longrightarrow$c) Sea $I \leq R$ tal que $I \notin \mathcal{F}$, por hipótesis se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ para algún $\mathcal{P} \subseteq Spec(R)$, de aquí $\mathcal{P} \cap V(I) \neq \varnothing$, es decir existe $P \in \mathcal{P} \cap V(I)$, de lo cual se sigue que $I \subseteq P$. Si se nota que $P \in V(P)$, se tiene que $\mathcal{P} \cap V(P) \neq \varnothing$. Por lo tanto $P \notin \mathcal{F}$.

c)$\Longrightarrow$b) Sea $I \notin \mathcal{F}$ entonces existe $P \in V(I)$ tal que $P \notin \mathcal{F}$,por lo que $V(I) \nsubseteq \mathcal{F}$.De esto último $I \notin \mathcal{F}_{D(\mathcal{F})}$. Lo que dice que $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_{D(\mathcal{F})}$.

Ahora se toma $I \in \mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{D}(\mathcal{F}) \cap V(I) = \varnothing$, si existiera $P \in \mathcal{D}(\mathcal{F}) \cap V(I)$ se tendría que $I \subseteq P$, entonces $P \in \mathcal{F}$ por ser este filtro, contradiciendo el hecho de que $P \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$.Por lo que $I \in \mathcal{F}_{D(\mathcal{F})}$.$\rfloor$

Lema 6.14 Sea $\mathcal{F}$ una topología de Gabriel.Entonces:

i) Si I es un ideal máximo con respecto a $I \notin \mathcal{F}$, entonces I es primo.

ii) Si $\mathcal{F}$ tiene una base de ideales finitamente generados e $I \notin \mathcal{F}$, entonces existe $P \in V(I)$ tal que $P \notin \mathcal{F}$.

Demostración

i) Sean $a, b \in R \setminus I$, entonces $I + Ra, I + Rb \in \mathcal{F}$ por hipótesis de ser I máximo. Aplicando el lema 5.3 se tiene que $(I+Ra)(I+Rb) \in \mathcal{F}$, pero $(I+Ra)(I+Rb) = I^2+IRb+IRa+Rab \subseteq I+Rab$, por ser F filtro $I+Rab \in \mathcal{F}$. De nuevo por ser I máximo se llega a que $ab \notin I$. Por lo tanto I es primo.

ii) Considérese $\mathcal{S} = \{J \leq R \mid I \subseteq J \text{ y } J \notin \mathcal{F}\}$. Se tiene que $\mathcal{S} \neq \varnothing$ ya que $I \in \mathcal{S}$. Si se considera una cadena ascendente de elementos de $\mathcal{S}$

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq ...$$

Se propone como cota superior a $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Para poder usarse el lema de Zorn basta ver que $K \in \mathcal{S}$.

Fácilmente se tiene que $J \subseteq K$, por otro lado si $K \in F$ por hipótesis sobre esta topología se sabe que existe $L \in F$ con $L \subseteq K$ y finitamente generado. Como L es finitamente generado existen $x_1, ..., x_m \in L$ tal que $\langle x_1, ..., x_m \rangle = L$. De que $L \subseteq K$ y K se la unión anidada de ideales, se sigue que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_1, ..., x_m \in K_r$, esto implica que $L \subseteq K_r$ y el hecho que F sea filtro dice que $K_r \in F$, contradiciendo que $K_r \notin F$. Por lo tanto $K \notin F$.

Aplicándose el lema de Zorn sobre S, se tiene un máximo P en este conjunto que por el inciso i) es primo. Por lo tanto $P \in V(I)$ y $P \notin \mathcal{F}$.⌋

Corolario 6.15 Toda topología de Gabriel $\mathcal{F}$ con base de ideales finitamente generados tiene la forma $\mathcal{F} = \mathcal{F}_P$ para algún $\mathcal{P} \subseteq Spec(R)$.

Demostración

Se sigue de 6.14 ii) y después 6.13 c).⌋

En particular el resultado anterior siempre se puede aplicar si el anillo es neteriano.

TORSIÓN ESTABLE

Del capítulo 5 se sabe que dada una topología lineal $\mathcal{F}$ en R es induce una topología lineal en M un $R-$módulo dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(M) &= \{N \leq M \mid (N:x) \in F, \text{ para todo } x \in M\} \\ &= \{N \leq M \mid M/N \text{ es un módulo de } \mathcal{F} - \text{pretorsión}\}\end{aligned}$$

Si L es un submódulo de M entonces la $\mathcal{F}-$ topología en M induce una topología en L, la cual comúnmente es más burda que la $\mathcal{F}-$topología en L. La siguiente proposición dice cuando estas dos últimas coinciden.

Proposición 7.1(Gabriel P.) Las siguientes propiedades sobre una topología $\mathcal{F}$ son equivalentes:

a) Para cada módulo M y cada su submódulo M', la $\mathcal{F}-$topología en M' coincide con la topología inducida en M' por la $\mathcal{F}-$topología en M.

b) La clase de módulos de $\mathcal{F}-$pretorsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

c) Para cada módulo M, su submódulo de $\mathcal{F}-$pretorsión es esencialmente cerrado en M.

d) Cada módulo inyectivo se escinde por su submódulo de $\mathcal{F}-$pretorsión.

Demostración

a)$\Longrightarrow$b) Sea M un módulo de $\mathcal{F}-$pretorsión y esto pasa si y solo si $0 \in \mathcal{F}(M)$. Por hipótesis la $\mathcal{F}-$topología en M coincide con la topología inducida en M por la $\mathcal{F}-$topología en $E(M)$, entonces existe $K \in \mathcal{F}(M)$ tal que $K \cap M = 0$, pero $M \trianglelefteq E(M)$, por lo que se tiene que $K = 0$. Por lo tanto $E(M)$ es un submódulo de $\mathcal{F}-$pretorsión.

b)$\Longrightarrow$c) Sea $t(M)$ es submódulo de $\mathcal{F}-$pretorsión de M. Como $t(M)$ es un módulo de $F-$torsión entonces $E(t(M))$ también lo es. Se deduce que $t(M) \subseteq E(t(M)) \cap M \subseteq M$, de que la teoría de pretorsón sea hereditaria $E(t(M)) \cap M$ es de $F-$pretorsión. Como $t(M)$ es el submódulo máximo de $f-$pretorsión entonces $t(M) = E(t(M)) \cap M$, pero $E(t(M)) \cap M$ es la máxima extensión esencial. Por lo tanto $t(M)$ es esencialmente cerrado en M.

c)$\Longrightarrow$d) Se tiene que N es esencialmente cerrado en M si y solo si $N = M \cap L$ donde $L \oplus K = E(M)$. En este caso se toma M inyectivo y a $t(M)$ como N, se llega a $t(M) = M \cap L$, pero $E(M) = M$ por lo que $t(M) = L$. Por lo tanto $t(M)$ es sumando directo de M

d)$\Longrightarrow$b) Primero supóngase que $M = t(M) \leq t(E(M))$. Si $t(E(M))$ es sumando directo de $E(M)$, entonces $t(E(M)) = E(M)$ ya que $M \trianglelefteq E(M)$.

b)$\Longrightarrow$a) Sea M' un submódulo de M. Solo basta ver que $\mathcal{F}(M')$ está contenida en la topología inducida por $\mathcal{F}(M)$ en M'. Si $L \in \mathcal{F}(M)$ y se define $\mathcal{S} = \{K \leq M \mid K \cap M' = L\}$, se quiere ver que $\mathcal{S}$ tiene un máximo vía el lema de Zorn.

Primero $\mathcal{S} \neq \varnothing$ ya que $L \in \mathcal{S}$.Si se toma una cadena ascendente de elementos de S

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq .....$$

y se escoge como cota superior a $K = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, calculándose

$$K \cap M' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \cap M' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L = L$$

Por lo tanto $K \in \mathcal{S}$ y de aquí $\mathcal{S}$ tiene un máximo N.

Usando los teoremas de isomorfismos

$$M'/L = M'/(N \cap M') = (M' + N)/N$$

Ahora se quiere que $(M'+N)/N \trianglelefteq M/N$. Si $N \subseteq M'' \subseteq M$ entonces $(M'+N)/N \cap M''/N = 0$, de esto $(M' + N) \cap M'' = N$. Como $N \subseteq M''$, se puede aplicar la ley modular $(M' \cap M'') + N = N$ y se llega a $(M' \cap M'') \subseteq N$, y de aquí $M' \cap M'' = N \cap M''$, por lo que $M'' \in \mathcal{S}$. Como N es máximo se llega a que $N = M''$. Por lo que $M''/N = 0$ y $(M' + N)/N \trianglelefteq M/N$.

Como M/N es una extensión esencial de un módulo de $F-$ torsión $M'/L = (M' + N)/N$, por b) M/N es $F-$torsión. Esto dice que $N \in F(M)$ y $M' \cap N = L$, como se buscaba.$\rfloor$

Una teoría de torsión hereditaria se llama estable si esta es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Proposición 7.2 Sea r un prerradical exacto izquierdo tal que la teoría de torsión asociada a $\bar{r}$ es estable. Entonces $\bar{r}(M)$ es la mayor extensión esencial de $r(M)$ para cada $R-$módulo M.

Demostración

Sea $r(M) \trianglelefteq L \leq M$ y K un pseudocomplemento de $\bar{r}(L)$ en L. Entonces $\bar{r}(K) = 0$ por lo que $r(K) = 0$. Ahora $r(M) \cap K = 0$ por ser este exacto izquierdo, entonces a $K = 0$, pero

$\bar{r}(L) = \bar{r}(L) \oplus K \trianglelefteq L$. Por la proposición 71 c) se tiene que $\bar{r}(L)$ es un sumando directo de L, por lo que $L = \bar{r}(L) \leq \bar{r}(M)$.$\rfloor$

Lema 7.3 Sea E un módulo inyectivo y $f : E \longrightarrow M$ un epimorfismo en un módulo no singular M. Entonces f se escinde y M es inyectivo.

Demostración

Sea $nucf \trianglelefteq N \leq E$, si $nucf \subsetneq N$ significa que existe $y \in N \setminus nucf$. Se sabe que $(nucf : x) \trianglelefteq R$. Por otro lado f es un epimorfismo de lo cual $M = E/nucf$, como $Z(M) = 0$ por hipótesis, entonces $Z(E/nucf) = 0$. Esto último dice $Ann(x+nucf)$ no es esencial en R para cada $x+nucf \in E/nucf$, pero $Ann(x+nucf) = (nucf : x)$, en el caso particular de que $x = y$, lo cual dice $nucf = N$. Como $nucf$ es esencialmente cerrado en E inyectivo este debe ser un sumando directo y así f se escinde. De aquí $E = nucf \oplus E/nucf$ por lo que M es sumando directo de un inyectivo por cual también es inyectivo.$\rfloor$

Corolario 7.4 La teoría de torsión de Goldie es estable

Demostración

Sea E un módulo inyectivo y considérese el morfismo canónico $\alpha : E \longrightarrow E/G(E)$ con $nuc\alpha = G(E)$. Como $Z(E/G(E)) \subseteq G(E/G(E)) = 0$, se llega a que $E/G(E)$ es no singular. Aplicando el lema anterior se tiene que $G(E)$ es un sumando directo y por la proposición 7.1 c) la teoría de torsión de Goldie es estable.$\rfloor$

CLASES TTF

Una clase $\mathcal{T}$ se llama clase TTF si es una clase libre de torsión y una clase de torsión. Del capítulo se sabe que existen dos clases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{F}$ de manera que $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ y $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ son teorías de torsión. Fácilmente se tiene que $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es hereditaria y $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ es hereditaria si y solo si $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es estable. A una tripleta $(\mathcal{C},\mathcal{T},\mathcal{F})$ se le llamará una teoría TTF.

Proposición 8.1 Una clase de torsión hereditaria es una clase TTF si y solo si es cerrada bajo productos.

Demostración

Si la clase de torsión hereditaria es TTF entonces es libre de torsión y por lo tanto cerrada bajo productos. Por otro lado si es una clase de torsión hereditaria cerrada bajo productos, por ser hereditaria es cerrada bajo submódulos y por ser clase de torsión es cerrada bajo extensiones. Por lo tanto es una clase libre de torsión y esto la hace una clase TTF.⌋

Por la proposición 6.12 y 8.1, T sera un clase TTF si y solo si existe un ideal bilateral idempotente I tal que T es la clase de módulos anulados por I. Si se considera la teoría TTF $(\mathcal{C},\mathcal{T},\mathcal{F})$ y se toman c y t los radicales idempotentes asociados a $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ y $(\mathcal{T},\mathcal{F})$. Nótese que $c(R)$ es ideal bilateral idempotente I que se buscaba, ya que es el menor ideal bilateral I tal que $R/I \in T$. De aquí $t(M) = \{x \in M \mid Ix = 0\}$.

Lema 8.2 Para cada módulo M, $c(M) = IM$.

Demostración

Se tiene que $c(M)$ es el menor submódulo para el cual $M/c(M) \in \mathcal{T}$. Es decir $I(M/c(M)) = 0$ por lo que $IM \subseteq c(M)$. Como $I(M/IM) = 0$, entonces $M/IM \in \mathcal{T}$. Como $c(M)$ es el menor con dicha propiedad $c(M) = IM$.⌋

Lema 8.3 Si $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ es hereditaria entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$.

Demostración

Sea $M \in \mathcal{C}$, como $\mathcal{C}$ es una clase de torsión hereditaria $t(M) \in \mathcal{C}$ y se tiene que $t(M) \in \mathcal{T}$, entonces $t(M) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{T}$, pero como esta pareja es una teoría de torsión se tiene que $\mathcal{C} \cap \mathcal{T} = \{0\}$. Por lo tanto $t(M) = 0$ y $M \in \mathcal{F}$.$\rfloor$

Lema 8.4 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ si y solo si para cualquier módulo M se tiene que $M = c(M) + t(M)$.

Demostración

Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ esto es si y solo si que para todo módulo M, si $t(M) = 0$ entonces $c(M) = M$. Lo último pasa en particular cuando se toma $M/t(M)$, pero $t(M/t(M)) = 0$, por ser t radical, por lo que $c(M/t(M)) = M/t(M)$. Si para cualquier módulo M, $c(M/t(M)) = M/t(M)$, si $t(M) = 0$ entonces $c(M) = M$, por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$.De aquí $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ si y solo si para cada módulo M, $c(M/t(M)) = M/t(M)$.

Calculándose

$$\begin{aligned} c(M/t(M)) &= I(M/t(M)) \\ &= (IM + t(M))/t(M) \\ &= (c(M) + t(M))/t(M) \end{aligned}$$

De esto último para todo módulo M, $c(M/t(M)) = M/t(M)$ si y solo si $M = c(M) + t(M)$.$\rfloor$

Como se dijo en el capítulo 2 una teoría de torsión (T, F) se escinde centralmente, si existe $e \in R$ central e idempotente tal que $t(M) = eM$ para todos los módulos M. En dicho caso se tiene una teoría TTF $(\mathcal{F}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$, conversamente:

Proposición 8.5 Las siguientes propiedades de una teoría TTF $(\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{F})$ son equivalentes:

a) $\mathcal{C} = \mathcal{F}$.

b) $M = t(M) \oplus c(M)$ para cada módulo M.

c) $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ y $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se escinden.

d) $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ es hereditaria y se escinde.

e) $R = t(R) \oplus c(M)$.

f) $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ es hereditaria y $\mathcal{F}$ es una clase TTF.

g) $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ se escinde centralmente.

Demostración

a)$\Longrightarrow$b) Por el lema 8,4 se tiene que para cualquier módulo M, $M = t(M) + c(M)$. Como $\mathcal{C} = \mathcal{F}$,se tiene que $\mathcal{C}$ es hereditaria. Por lo que $t(M) \cap c(M) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{T} = \{0\}$. Por lo tanto $M = t(M) \oplus c(M)$ para cualquier módulo M.

b)$\Longrightarrow$c) Se sigue de la definición.

c)$\Longrightarrow$d) Como $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es heditaria y como se escinde por la proposición 7.1 $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Por la proposición 3.2 $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ es hereditaria.

d)$\Longrightarrow$e) Por hipótesis $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ se escinde, entonces $R = c(R) \oplus J$ para algun ideal izquierdo J. Calculándose $t(R) = t(c(R)) \oplus t(J) = t(J)$, ya que $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ es hereditaria por lo cual $t(c(R)) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{T} = \{0\}$. Ahora $J = R/c(R) \in T$, pero $J = t(J) = t(R)$.

e)$\Longrightarrow$g) Se tiene que $c(R) = R\ e$ para algún $e \in R$ idempotente, el cual es central ya que $t(R)$ y $c(R)$ son ideales bilaterales. Entonces $t(M) = \{x \in M \mid Ix = 0\} = \{x \in M \mid ex = 0\} = (1-e)M$, donde $1 - e$ es central e idempotente.

g)$\Longrightarrow$f) Se observó anteriormente que $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ es hereditaria y por la proposición 7.1 $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, por lo que $(\mathcal{C},\mathcal{T})$ es hereditaria. Si $t(M) = 0$ entonces $t(M/N) = e(M/N) = 0$, por lo tanto $\mathcal{F}$ es cerrado bajo cocientes y $\mathcal{F}$ es una clase TTF.

f)$\Longrightarrow$a) Por el lema 8.3 se tiene que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. Sea $F \in \mathcal{F}$, $T \in T$ y $f \in Hom(F,T)$ como $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cocientes y T bajo submódulos, entonces $F/nucf = imf \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$. Por lo que $f = 0$ y $Hom(F,T) = 0$. Por lo tanto $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{F}$.⌋

Ejemplos

1. Anillos conmutativos neterianos

Lema 8.6 Si R es un anillo conmutativo, entonces cada ideal idempotente finitamente generado es generado por un elemento idempotente.

Demostración

Sea I un ideal idempotente generado por $x_1, ..., x_n$. Como $I^2 = I$,entonces $x_i \in I$ este se puede escribir $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ con $a_{ij} \in I$ para $i = 1, ..., n$. De esto se llega a un sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n &= 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... + (1-a_{nn})x_n &= 0
\end{aligned}
$$

El determinante de este sistema de anular a cada a_i con $i = 1, ..., n$ y de igual manera anular a I. Pero el determinante tiene forma $1 - c$ para alguna $c \in I$, de lo que $I(1 - c) = 0$. Por lo tanto c es idempotente y genera a I.⌋

Corolario 8.7 Si R es un anillo conmutativo neteriano, entonces cada clase TTF define una teoría de torsión que se escinde centralmente $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$.

Demostración

Por lo visto anteriormente $t(M) = \{x \in M \mid Ix = 0\}$, como R es neteriano I es finitamente generado y ya se había visto que I era idempotente,por la proposición anterior se tiene que $I = R$ e para algún $e \in R$ idempotente. Por lo tanto $t(M) = (1 - e)M$.⌋

2. Anillos Artinianos

Lema 8.8 Si R es artiniano izquierdo entonces toda topología de Gabriel tiene un miembro menor a todos.

Demostración

Sea $\mathcal{F}$ una topología de Gabriel, como $\mathcal{F} \neq \varnothing$ tiene un mínimo por I ser R artiniano. Sea $J \in \mathcal{F}$ con $J \neq I$, entonces $I \cap J \in \mathcal{F}$, pero $I \cap J \subseteq I$ y por ser I mínimo $I = I \cap J$. Por lo tanto $I \subseteq J$.⌋

Corolario 8.9 Si R es artiniano entonces toda clase de torsión hereditaria es TTF.

Demostración

Por el lema 8.8 se tiene una base que consiste en un solo ideal I y por la proposición 6.12 se obtiene lo deseado.⌋

BIBLIOGRAFÍA

[H] Hofmann, Karl. Introduction to topological groups.
http://math.tulane.edu/~khh/Lagniappe/topgr.pdf

[S] Stenström, Bo. Rings of Quotients.

[P] Paulsen, Vern. An Introduction to the Theory of Topological Groups and Their Representations.
http://www.math.uh.edu/~vern/grouprepn.pdf