UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INVARIANTES EXTRÍNSECOS DE SEGUNDO ORDEN DE UNA SUPERFICIE INMERSA EN $\mathbb{R}^4$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO.

P R E S E N T A:

FELIPE DE JESÚS MÉNDEZ VARELA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS
2009

DATOS DEL ALUMNO Y JURADO

1. Datos del alumno Méndez Varela Felipe de Jesús 55130497 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 301205018
2. Datos del tutor Dr. Federico Sánchez Bringas.
3. Datos del sinodal 1 Dra. Adriana Ortiz Rodríguez.
4. Datos del sinodal 2 Dr. Pierre Bayard.
5. Datos del sinodal 3 Dr. Federico Sánchez Bringas.
6. Datos del sinodal 4 M. en C. Ana Irene del Refugio Ramírez Galarza.
7. Datos de sinodal 5 M. en C. Francisco Manuel Barrios Paniagua
8. Datos de la Tesis Invariantes Extrínsecos de Segundo Orden de una Superficie Inmersa en R^4 41 páginas. 2009.

AGRADECIMIENTOS.

Quiero comenzar dando un agradecimiento infinito a mis padres María Francisca Edith Varela Martínez y José Benigno Méndez Santander, y a mis hermanos “Pachío” y “Juanis”, porque, a pesar de las carencias económicas que compartimos, siempre confiaron en mí e hicieron todo lo posible por apoyarme en todos los aspectos. Sin su apoyo simplemente no hubiera logrado llegar hasta aquí.

Agradezco de igual manera a mi esposa, Diana Maricela García Luna, a quien amo profundamente. Gracias a su amor y motivación pude dar el paso decisivo para terminar esta tesis. Con ella he logrado cosas que jamás imagine.

Agradezco también a mis sinodales por sus valiosos comentarios y correcciones que sin duda ayudaron a mejorar en demasía este trabajo. Doy un agradecimiento especial a Federico Sánchez Bringas por haberme mostrado lo maravillosa que puede ser la Geometría.

Finalmente agradezco el apoyo de mis amigos Josseline, Christian, Eric, Ramiro, Joel, Israel, Pavel y Victor con quienes he compartido la carrera, y sin duda, momentos importantes e inolvidables de mi vida.

Índice general

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar los invariantes escalares de la segunda forma fundamental de una inmersión de una superficie, M^2 en el espacio euclidiano de dimensión 4 bajo el cambio de marco móvil, basándonos principalmente en las primeras dos secciones del primer capítulo de [6] y en [1]

En el primer capítulo consideramos principalmente [1] y comenzamos con el estudio de los invariantes del conjunto de aplicaciones cuadráticas que tienen como dominio y contradominio a $\mathbb{R}^2$, denotado por $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, bajo rotaciones del dominio y del contradominio. Estos invariantes estarán motivados en su mayoría por los invariantes de las formas cuadráticas. Se prueba que con estos invariantes podemos determinar de manera única, salvo rotaciones y módulo un signo, la aplicación cuadrática de la que provienen éstos.

En el segundo capítulo, comenzamos dando algunas propiedades de los marcos móviles en $\mathbb{R}^4$ para después continuar con el estudio de los invariantes escalares de la segunda forma fundamental en un punto $p \in M$,

$$\alpha_p : T_pM \to N_pM$$

basandonos en [6]. Dado que el espacio tangente, T_pM, y el espacio normal N_pM pueden ser identificados con $\mathbb{R}^2$, la segunda forma fundamental puede ser vista como un elemento de $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y podemos estudiar sus invariantes de manera análoga al de estas aplicaciones. Se prueba al final del capítulo que la segunda forma fundamental puede ser determinada por estos invariantes.
Finalizamos con el tercer capítulo donde damos una interpretación geométrica de los invariantes de la segunda forma fundamental y caracterizamos los puntos de la superficie por medio de la elipse de curvatura, que es la imagen de la segunda forma fundamental restringida al círculo unitario.

El estudio de la elipse de curvatura y los invariantes asociados a la segunda forma fundamental de una superficie inmersa en $\mathbb{R}^4$ se ha desarrollado en los artículos [1] y [6]. En este último se menciona la veracidad del Teorema 5 y del Teorema 6 del capítulo 3 sin prueba. En este trabajo damos una la cual es una contribución original.

Capítulo 1

Invariantes de aplicaciones cuadráticas.

Definición 1. *Una aplicación cuadrática* es una aplicación $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$q(x, y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2),$$

donde $a, b, c, e, f, g \in \mathbb{R}$.

Denotamos al espacio de estas aplicaciones como $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \{q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | q$ es una aplicación cuadrática$\}$.

Ahora notemos que para cada $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y para cada ν en el contradominio, tenemos asociada una forma cuadrática $< q, \nu >: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y asociada a ella, un endomorfismo simétrico $S_\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Del álgebra sabemos que la *traza* de S_ν, $tr(S_\nu)$ y el determinante, $det(S_\nu)$ son invariantes bajo rotaciones, luego, de manera natural definimos para cada $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dos formas, $L_q, Q_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$L_q(\nu) = \frac{1}{2} tr(S_\nu) \qquad y \qquad Q_q(\nu) = det(S_\nu)$$

Proposición 1. *Sea $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Las forma lineal L_q y la forma cuadrática Q_q son invariantes bajo rotaciones del dominio.*

Demostración. Sea $\sigma \in SO_2$ y $q = (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$ una aplicación cuadrática. Denotemos a q como $q(\overline{x}) = (\overline{x}^t q_1 \overline{x}, \overline{x}^t q_2 \overline{x})$ donde q_1 y q_2 son las matrices asociadas a las formas cuadráticas $q_1 = ax^2 + 2bxy + cy^2$ y $q_2 = ex^2 + 2fxy + gy^2$, es decir,

$$q_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad q_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$q \circ \sigma(\overline{x}) = (\overline{x}^t A^t q_1 A\overline{x}, \overline{x}^t A^t q_2 A\overline{x}),$$

donde A es la matríz asociada a σ. Luego

$$\begin{aligned} < q \circ \sigma(\overline{x}), \nu > &= (\overline{x}^t A^t q_1 A\overline{x})\nu_1 + (\overline{x}^t A^t q_2 A\overline{x})\nu_2 = \\ &= \overline{x}^t A^t (q_1\nu_1 + q_2\nu_2) A\overline{x} = \\ &= \overline{x}^t A^t S_\nu A\overline{x} \end{aligned}$$

Así

$$L_{q\circ\sigma}(\nu) = \frac{1}{2} tr(A^t S_\nu A) = \frac{1}{2} tr(S\nu) = L_q(\nu)$$

y

$$Q_{q\circ\sigma}(\nu) = det(A^t S_\nu A) = det(S_\nu) = Q_q(\nu).$$

$\square$

Recordemos que el endomorfismo simétrico asociado a una forma cuadrática determina su polinomio característico, el cual tiene discriminante no negativo. Así el polinomio característico asociado a S_ν, que está dado por

$$X^2 - tr(S_\nu) + det(Q_\nu) = X^2 - 2L_q(\nu) + Q_q(\nu)$$

cumple que

$$L_q^2(\nu) - Q_q(\nu) \geq 0.$$

Luego, para cada $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ podemos definir una forma cuadrática $\Phi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_q = L_q^2 - Q_q.$$

Claramente Φ_q es invariante bajo rotaciones del dominio.

Definamos ahora una forma bilineal antisimétrica $A_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue: Consideremos $\widetilde{A}_q(\nu, \mu) := [S_\nu, S_\mu]$ donde $[S_\nu, S_\mu] = S_\nu S_\mu - S_\mu S_\nu$. Notemos que $[S_\nu, S_\mu]$ no es un escalar, pero podemos asociarle uno de la siguiente manera.

Sea $q \in \mathbf{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dada por

$$q = (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + cy^2)$$

y sea $\{e_1, e_2\}$ la base canonica de $\mathbb{R}^2$. Luego, si $\nu = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2$ y $\mu = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$, tenemos que

$$S_\nu = \nu_1 S_{e_1} + \nu_2 S_{e_2} = \begin{pmatrix} a\nu_1 + e\nu_2 & b\nu_1 + f\nu_2 \\ b\nu_1 + f\nu_2 & c\nu_1 + g\nu_2 \end{pmatrix}$$

y

$$S_\mu = \mu_1 S_{e_1} + \mu_2 S_{e_2} = \begin{pmatrix} a\mu_1 + e\mu_2 & b\mu_1 + f\mu_2 \\ b\mu_1 + f\mu_2 & c\mu_1 + g\mu_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

son las representaciones matriciales de $< q, e_1 > y < q, e_2 >$, respectivamente. De esta manera

$$S_\nu S_\mu - S_\mu S_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \beta(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) \\ -\beta(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\beta = \frac{1}{2}(a-c)f - (e-g)b$ es el número que asociamos a $[S_\nu, S_\mu]$. Así definimos $A_q(\nu,\mu) = \beta$

Proposición 2. *Sea $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. A_q es una forma bilineal antisimétrica invariante bajo rotaciones del dominio.*

Demostración. Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ entonces $[S_{\nu_1}, S_{\nu_2}]A = A[S_{\nu_1}, S_{\nu_2}]$.

Ahora

$$\begin{aligned} A_{q\circ\alpha}(\nu_1,\nu_2) = A^t S_{\nu_1} A \cdot A^t S_{\nu_2} A - A^t S_{\nu_2} A \cdot A^t S_{\nu_1} A &= \\ A^t(S_{\nu_1}S_{\nu_2} - S_{\nu_2}S_{\nu_1})A = A^t A(S_{\nu_1}S_{\nu_2} - S_{\nu_2}S_{\nu_1}) = [S_{\nu_1}, S_{\nu_2}] &. \end{aligned}$$

. □

Como vimos anteriormente $\Phi_q = L_q^2 - Q_q$ es una forma cuadrática positiva. Esta forma cuadrática nos ayudará a establecer una relación entre los invariantes L_q, Q_q y A_q de la siguiente manera:

Proposición 3. *Dado $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, la forma cuadrática $\Phi_q = L_q^2 - Q_q$ cumple la siguiente identidad:*

$$\Phi(\nu_1)\Phi(\nu_2) = \widetilde{\Phi}(\nu_1,\nu_2)^2 + A(\nu_1,\nu_2)^2,$$

donde $\widetilde{\Phi}$ denota la forma polar de Φ.

Antes de dar la prueba de la proposición consideremos el conjunto de operadores simétricos sin traza:

$$F = \{\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 | \rho \text{ es un operador simétrico y } tr(\rho) = 0\}.$$

F resulta ser un espacio vectorial sobre el campo de los reales y podemos dotar a éste de un producto interior y un producto mixto. La importancia de esto radica en que Φ_q se puede expresar en términos de éstos.

Lema 1. *Sean $S, T \in F$. Si identificamos a los operadores con su matríz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ tenemos que*

$$< S, T >_F := \frac{1}{2} tr(ST)$$

es un producto interno para F.

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $S, T, R \in F$. Para probar la binealidad notemos que

$$\begin{aligned} < \lambda_1 S + \lambda_2 T, R >_F = \frac{1}{2}((\lambda_1 S + \lambda_2 T)R) &= \\ = \lambda_1 \frac{1}{2}(tr(SR)) + \lambda_2 \frac{1}{2}(tr(TR)) &= \\ = \lambda_1 < S, R >_F + \lambda_2 < T, R >_F . \end{aligned}$$

Ahora, dado que S, T son simétricos, tenemos que si

$$ST = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces

$$TS = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

de lo cual se sigue la simetría. Por último supongamos que $S \neq 0$ entonces

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 \neq 0$. Luego $< S, S >_F = \frac{1}{2} tr(SS) = a^2 + b^2 > 0$.
Por tanto $<, >_F$ define un producto imterior para F. □

Lema 2. *El producto mixto en* F *está dado por*

$$[S, T]_F = \frac{1}{2}[S, T] \qquad \forall S, T \in F.$$

Demostración. Basta notar que $[S, T]$ es una forma bilineal antisimétrica. □

Lema 3. *Sea $\nu \in \mathbb{R}^2$, denotamos por λ_1, λ_2 los valores propios de S_ν, entonces*

$$S_\nu^0 = S_\nu - \frac{1}{2} tr(S_\nu) Id.$$

es una matríz simétrica sin traza y los valores propios de S_ν^0 están dados por

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}, \qquad \mu_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$$

Demostración. Sea $S_\nu = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la representación matricial de S_ν. Los valores propios de S_ν están dados por

$$\lambda_1 = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \qquad y \qquad \lambda_2 = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}.$$

Luego

$$S_\nu^0 = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & b \\ b & \frac{c-a}{2} \end{pmatrix}$$

y sus valores propios están dados por

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2} \qquad y \qquad \mu_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}.$$

Es fácil comprobar que $\mu_1 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$, $\mu_2 = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$ y que $tr(S_\nu) = 0$ □

Demostración de la proposición 3. Sea ν y S_ν como en el Lema anterior. Notemos por un lado que

$$\|S_\nu^0\|_F^2 =< S_\nu^0, S_\nu^0 >_F = \frac{1}{2}tr(S_\nu^0 S_\nu^0) = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)^2$$

y por otro lado

$$L_q^2 - Q_q = \frac{1}{4}(a+c)^2 - (ac-b^2) = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2.$$

Luego $\|S_\nu^0\|_F^2 = \Phi(\nu)$ y por lo tanto $\Phi(\nu)$ es una forma cuadrática no negativa.

Ahora, dado que $\|S_\nu^0\|_F^2 = \Phi(\nu)$ tenemos que $\widetilde{\Phi}(\nu_1,\nu_2) =< S_{\nu_1}^0, S_{\nu_2}^0 >_F$. También observemos que $[S_{\nu_1}, S_{\nu_2}] = [S_{\nu_1}^0, S_{\nu_2}^0]_F$ y por lo tanto $A(\nu_1,\nu_2) = [S_{\nu_1}^0, S_{\nu_2}^0]_F$.

Por la identidad de *Lagrange* en F tenemos que

$$\|S\|_F^2\|T\|_F^2 =< S,T >_F^2 + [S,T]_F^2.$$

Así

$$\Phi(\nu_1)\Phi(\nu_2) = \|S_{\nu_1}^0\|_F^2\|S_{\nu_2}^0\|_F^2 =< S_{\nu_1}^0, S_{\nu_2}^0 >_F^2 + [S_{\nu_1}^0, S_{\nu_2}^0]_F^2 = \widetilde{\Phi}(\nu_1,\nu_2)^2 + A(\nu_1,\nu_2)^2.$$

Denotemos por P al conjunto
$P = \{(L,\Phi,A) \in (\mathbb{R}^2)^* \times (S^2\mathbb{R}^2)^* \times \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \mid \Phi \text{ es como en la proposición } 3\}$, donde $(S^2\mathbb{R}^2)^*$ denota el conjunto de formas bilineales simétricas en $\mathbb{R}^2$ y $\bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ denota al conjunto de formas bilineales antisimétricas en $\mathbb{R}^2$.

La siguiente proposición muestra que un elemento del conjunto P es suficiente para determinar una forma cuadrática $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ módulo una rotación del dominio.

Teorema 1. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl}\Theta : \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\backslash SO_2 & \to & P \\ [q] & \mapsto & (L_{[q]},\Phi_{[q]},A_{[q]})\end{array}$$

es biyectiva.

Demostración. Para probar la inyectividad damos una fórmula que nos pemite recobrar $[q]$ de sus formas asociadas L, Φ, A. Sea

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

una base para F.
Si Φ no es la forma nula, existe $\nu_1 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(\nu_1) = a \neq 0$, luego haciendo $\nu_0 = \frac{\nu_1}{\sqrt{a}}$ tenemos $\Phi(\nu_0) = 1$. Los valores de S_{ν_0} son las raíces del polinomio

$$X^2 - 2L(\nu_0)X + Q(\nu_0)$$

y están dados por $L(\nu_0) \pm 1$. Podemos elegir una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ de tal manera que en esta base

$$S_{\nu_0} = L(\nu_0)I + E_1,$$

es decir, tal que S_{ν_0} sea diagonal[1]. Dado que E_1 y E_2 forman una base para F y $S^0_\nu = S_\nu - L(\nu)I \in F$, tenemos que

$$S_\nu - L(\nu)I = a_\nu E_1 + b_\nu E_2$$

y por tanto $S_\nu = L(\nu)I + a_\nu E_1 + b_\nu E_2$ Luego

$$a_\nu =< S_\nu - L(\nu)I, E_1 >_F =< S^0_\nu, E_1 >_F =< S^0_{\nu_0}, S^0_\nu >_F = \widetilde{\Phi}(\nu_0,\nu) \qquad (1.1)$$
$$b_\nu = [S^0_{\nu_0}, S^0_\nu]_F = A(\nu_0,\nu). \qquad (1.2)$$

Así, en $\{e_1, e_2\}$,

$$S_\nu = L(\nu) + \widetilde{\Phi}(\nu_0,\nu)E_1 + A(\nu_0,\nu)E_2. \qquad (1.3)$$

Dado que E_1 y E_2 forman una base esta expresión es única para S_ν lo cual prueba la inyectividad.

[1] [5]

Ahora, si Φ es la forma nula, entonces para cualquier $\nu \in \mathbb{R}^2$, tenemos que el polinomio característico de S_ν tiene una raíz doble y por lo tanto, en cualquier base de $\mathbb{R}^2$

$$S_\nu = L(\nu)I,$$

es decir, S_ν es una homotecia y (2.3) también se cumple para este caso ($\widetilde{\Phi} = A = 0$) y ν_o se puede escoger arbitrariamente).

Ahora probaremos que Θ es suprayectiva.

Supongamos primero que Φ no es la forma nula y fijamos $\nu_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(\nu_0) = 1$.

Denotamos por $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y (L, Φ, A) un elemento de P. Luego, para toda $\nu \in \mathbb{R}^2$, definimos

$$S_\nu = L(\nu)I + \widetilde{\Phi}(\nu_0, \nu)E_1 + A(\nu_0, \nu)E_2.$$

Notemos que

$$S_\nu = \begin{pmatrix} L(\nu) + \widetilde{\Phi}(\nu_0, \nu) & A(\nu_0, \nu) \\ A(\nu_0, \nu) & L(\nu) - \widetilde{\Phi}(\nu_0, \nu) \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y por lo tanto tiene asociada un operador simétrico. Ahora notemos que la aplicación $\nu \mapsto S_\nu$ es lineal y para toda $\nu \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{1}{2}tr(S_\nu) = L(\nu),$$

$$(\frac{1}{2}tr(S_\nu))^2 - det(S_\nu) = L^2(\nu) - \begin{vmatrix} L(\nu) + \widetilde{\Phi}(\nu_0, \nu) & A(\nu_0, \nu) \\ A(\nu_0, \nu) & L(\nu) - \widetilde{\Phi}(\nu_0, \nu) \end{vmatrix} = \Phi(\nu),$$

y

$$\frac{1}{2}[S_{\nu_0}, S_\nu] = [S^0_{\nu_0}, S^0_\nu]_F{}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \widetilde{\Phi}(\nu_0, \nu) \\ 0 & A(\nu_0, \nu) \end{vmatrix} = A(\nu_0, \nu).$$

Por lo tanto el operador S_ν tiene asociados como invariantes a (L, Φ, A), es decir, esta asociación esta bien definida.
Ahora sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación cuadrática tal que $< q, \nu > = < S_\nu \cdot, \cdot >$ satisface $\Theta([q]) = (L, \Phi, A)$.
Si Φ es la forma nula basta definir $S(\nu) = L(\nu)I$. En este caso, $\Phi = 0$ implica que $\widetilde{\Phi} = 0$ y $A_q = 0$ y se puede verificar, como en el caso anterior, que q cumple con las propiedades requeridas. □

[2] Ver pag. 5 proposición 3

Nota: Si $\nu = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2$ tenemos que $S_\nu = \nu_1 S_{e_1} + \nu_2 S_{e_2}$, así S_ν tiene la representación matricial

$$\begin{pmatrix} a\nu_1 + e\nu_2 & b\nu_1 + f\nu_2 \\ b\nu_1 + f\nu_2 & c\nu_1 + g\nu_2 \end{pmatrix},$$

luego,

$$\begin{aligned} < S_\nu(x,y),(x,y) > &= (ax^2 + 2bxy + cy^2)\nu_1 + (ex^2 + 2fxy + gy^2)\nu_2 \\ &= < (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2), (\nu_1, \nu_2) >, \end{aligned}$$

entonces $q(x,y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$.

Hemos probado que L, Φ y A_q son suficientes para determinar una aplicación cuadrática, sin embargo podemos obtener A_q, modulo un signo, con L_q y Φ_q de la relación de la *proposición 3*.
Ahora veamos que una rotación en el contradominio actúa sobre estos invariantes de la siguiente manera:
Sea $\sigma \in SO_2$ y $q \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Observemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "q"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "L_{[q]}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "L_{\sigma[q]}"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Luego $L_{\sigma[q]} = L_{[q]} \circ \sigma^{-1}$. Análogamente $\Phi_{\sigma[q]} = \Phi_{[q]} \circ \sigma^{-1}$.
También podemos probar, por medio de un argumento similar al de la *proposición 2*, que $A_{\sigma[q]} = A_{[q]}$.
Si consideramos la acción de SO_2 sobre P tal que para toda $\sigma \in SO_2$ y para toda $(L, \Phi, A) \in P$

$$\sigma(L, \Phi, A) = (L \circ \sigma^{-1}, \Phi \circ \sigma^{-1}, A)$$

tendremos que Θ es $SO_2 - equivariante$[3] es decir $\Theta(\sigma q) = \sigma(\Theta(q))$. En efecto

$$\begin{aligned} \Theta(\sigma q) = (L_{\sigma q}, \Phi_{\sigma q}, A) &= (L \circ \sigma^{-1}, \Phi \circ \sigma^{-1}, A) \\ &= \sigma(L_q, \Phi_q, A) \\ &= \sigma(\Theta(q)) \end{aligned}$$

La biyectividad y equivarianza de la aplicación Θ prueban el siguiente resultado

[3] [2]

Teorema 2. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl}\overline{\Theta} : SO_2\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)/SO_2{}^4 & \to & SO_2\backslash P \\ [q] & \mapsto & [(L_{[q]},\Phi_{[q]},A_{[q]})]\end{array}$$

es biyectiva.

Para estudiar los invariantes de $SO_2\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)/SO_2$ y dar una expresión para ellos demos antes una expresión para S_ν.

Dado $[q] \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)/SO_2$ tomamos, sin pérdida de generalidad, $q(x,y) = (ax^2+2bxy+cy^2, ex^2+2fxy+gy^2)$ como representante de esta clase.
Notemos que si $\nu = (\nu_1,\nu_2)$ entonces $< q,\nu >= (a\nu_1+e\nu_2)x^2+2(b\nu_1+f\nu_2)xy+(c\nu_1+g\nu_2)y^2$ y por lo tanto

$$S_\nu = \begin{pmatrix} a\nu_1+e\nu_2 & b\nu_1+f\nu_2 \\ b\nu_1+f\nu_2 & c\nu_1+g\nu_2 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4. *(*Invariante de $L_{[q]}$*) Sea $[q] \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)/SO_2$. El vector $H \in \mathbb{R}^2$ tal que $L_{[q]}(\nu) =< H,\nu >$ para toda $\nu \in \mathbb{R}^2$ está dado por $H = (\frac{1}{2}(a+c),\frac{1}{2}(e+g))$ y su norma es invariante bajo rotaciones.*

Demostración. Notemos primero que

$$L_{[q]}(\nu) = \frac{(a+c)}{2}\nu_1 + \frac{(e+g)}{2}\nu_2 =< H,\nu >,$$

donde $H = (\frac{a+c}{2},\frac{e+g}{2})$ y $\nu = (\nu_1,\nu_2)$.
Ahora notemos que

$$\begin{aligned} L_{[q]}\circ\alpha^{-1}(\nu) &= \left[\frac{(a+c)}{2}\cos\theta - \frac{(e+g)}{2}\sin\theta\right]\nu_1 + \left[\frac{(a+c)}{2}\sin\theta + \frac{(e+g)}{2}\cos\theta\right]\nu_2 \\ &= < \overline{H},\nu >, \end{aligned}$$

donde $\overline{H} = \left(\frac{(a+c)}{2}\cos\theta - \frac{(e+g)}{2}\sin\theta, \frac{(a+c)}{2}\sin\theta + \frac{(e+g)}{2}\cos\theta\right)$.
Un simple cálculo nos muestra que $|H|^2 = |\overline{H}|^2$, luego $|H|^2$ es un invariante de $SO_2\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)/SO_2$ asociado a $L_{[q]}\circ\alpha^{-1}$. $\square$

Sabemos que la traza y determinante de $Q_{[q]}$ son invariantes bajo rotaciones, luego definimos:

$$K := tr(Q_{[q]}) \qquad y \qquad \Delta := det(Q_{[q]}).$$

Para dar una expresión de éstos notemos que

$$Q_{[q]}(\nu) = det(S_\nu) = (ac - b^2)\nu_1^2 + (ag + ce - 2bf)\nu_1\nu_2 + (ef - g^2)\nu_2^2,$$

luego $K = ac - b^2 + eg - f^2$ y $\Delta = (ac - b^2)(ef - g^2) - \frac{1}{4}(ag + ce - 2bf)^2$ que también serán invariantes de $SO_2\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)/SO_2$.

Dado que $A_{\alpha[q]} = A_{[q]}$ podemos obtener un invariante asociado a éste, el cual definimos como K_N y está dado por

$$A_{[q]}(\nu, \mu) = \frac{1}{2}K_N(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1),$$

es decir, $K_N = (a - c)f - (e - g)b$[5]. De manera similar a $Q_{[q]}$ tenemos que los invariantes de $\Phi_{[q]}$ son su traza y su determinante. La siguiente proposición da una expresión para estos.

Proposición 5. *Los invariantes de la forma cuadrática* $\Phi_{[q]}$ *están dados por las siguientes expresiones.*

$$tr(\Phi_{[q]}) = |H|^2 - K \qquad y \qquad det(\Phi_{[q]}) = \frac{1}{4}K_N^2,$$

Demostración. Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $q(x, y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$, un representante de $[q] \in SO_2\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)/SO_2$. La matríz asociada a Φ en esta base esta dada por

$$\begin{pmatrix} \Phi(e_1) & \widetilde{\Phi}(e_1, e_2) \\ \widetilde{\Phi}(e_1, e_2) & \Phi(e_2) \end{pmatrix},$$

donde $\widetilde{\Phi}$ es la forma polar de Φ.

Así

$$tr(\Phi_{[q]}) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) = L(e_1)^2 + L(e_2)^2 - (Q(e_1) + Q(e_2))$$

y

$$det(\Phi_{[q]}) = \Phi(e_1)\Phi(e_2) - \widetilde{\Phi}(e_1, e_2)^2.$$

Notemos por un lado que

$$L_q^2(e_1) = \frac{1}{4}(a + c)^2 \quad y \quad L_q^2(e_2) = \frac{1}{4}(e + g)^2$$

[5]Ver pag 3

así
$$L_q^2(e_2) + L_q^2(e_2) = \frac{1}{4}(a+c)^2 + \frac{1}{4}(e+g)^2 = |H|^2$$
Ahora
$$Q(e_1) = (ac - b^2)$$
y
$$Q(e_2) = (eg - f^2),$$
luego $Q_{e_1} + Q_{e_2} = (ac - b^2) + (eg - f^2) = K$.
Así
$$tr(\Phi_{[q]}) = |H|^2 - K.$$

Para $det(\Phi_{[q]})$, consideremos la expresión $\Phi(e_1)\Phi(e_2) = \widetilde{\Phi}(e_1, e_2)^2 + A(e_1, e_2)^2$, luego
$$det(\Phi_{[q]}) = A(e_1, e_2)^2 = \frac{1}{4}K_N^2.$$

□

Determinemos ahora cuando es posible recuperar la aplicación cuadrática via sus invariantes asociados, $|H|^2$, K_N, Δ y K.
Para ello es necesario establecer el siguiente resultado

Lema 4. *Identifiquemos a Φ con su operador simétrico asociado. Existe una única base de vectores propios de Φ, $(\overline{e}_3, \overline{e}_4)$ la cual es orientada positiva. Además, la base $(\overline{e}_3, \overline{e}_4)$ es ortogonal y la matriz de Φ en $(\overline{e}_3, \overline{e}_4)$ es diagonal con entradas*
$$X_1 = \frac{1}{2}(|H|^2 - K + \sqrt{(|H|^2 - K)^2 - K_N^2})$$
$$X_2 = \frac{1}{2}(|H|^2 - K - \sqrt{(|H|^2 - K)^2 - K_N^2}).$$
En $(\overline{e}_3, \overline{e}_4)$, el vector H esta dado por $\alpha\overline{e}_3 + \beta\overline{e}_4)$, donde
$$\alpha^2 = \frac{1}{\sqrt{(|H|^2 - K)^2 - K_N^2}}(\Delta + X_1|H|^2 - X_1X_2),$$
$$\beta^2 = \frac{1}{\sqrt{(|H|^2 - K)^2 - K_N^2}}(\Delta + X_2|H|^2 - X_1X_2).$$

Para probar este resultado nos es de mucha ayuda dar la siguiente interpretación geométrica de una aplicación cuadrática.
Dada

$$q(x,y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$$

la imagen de q restringida al círculo unitario es una elipse. En efecto

$$q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (a\cos^2\theta + 2b\cos\theta + c\operatorname{sen}^2\theta, e\cos^2\theta + 2f\cos\theta + g\operatorname{sen}^2\theta),$$

luego, utilizando que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{1}{2}(a-c), \frac{1}{2}(e-g)\right)\cos 2\theta + (b,f)\operatorname{sen} 2\theta + H.$$

Así la imagen de q es una elipse doblemente cubierta con centro en H. Podemos dar una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$(*Dominio*) tal que e_1 y e_2 son aplicados en los semiejes mayor y menor de la elipse y estos últimos estén dados por

$$\begin{aligned} U &:= (\frac{1}{2}(a-c), \frac{1}{2}(e-g)) \\ V &:= (b,f), \end{aligned}$$ [6]

es decir,

$$q(e_1) = H + U \quad y \quad \frac{1}{2}q(e_1+e_2) = H + V \qquad (*)$$

Demostración. La primera parte del Lema se tiene del álgebra lineal, es decir, dado un operador simétrico siempre es posible encontrar una base ortonormal de vectores propios en la cual dicho operador tenga una representación matricial diagonal. Ahora, como el polinomio característico de Φ esta dado por

$$X^2 - (|H|^2 - K)X + \frac{1}{4}K_N^2$$

tenemos que sus valores propios son

$$X_1 = \frac{1}{2}(|H|^2 - K + \sqrt{(|H|^2-K)^2 - K_N^2})$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(|H|^2 - K - \sqrt{(|H|^2-K)^2 - K_N^2}).$$

De esta manera Φ tiene la siguiente expresión

$$\Phi = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix},$$

tomando como base a sus vectores propios normalizados.
Ahora sólo basta ver que H tiene una expresión mencionada en la misma base.

i) Determinamos una base ortonormal $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$ de vectores propios de Φ.

ii) Expresamos S_ν en esta base y obtenemos una expresión para Δ.

iii) Encontramos la expresión de H como solución de un sistema de ecuaciones formado por las expresiones de Δ y $|H|^2$.

i) Supongamos por un momento que

$$q(x,y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$$

es la aplicación cuadrática que tiene asociada a Φ como invariante.
Denotemos por $\{e_1, e_2\}$ la base del dominio de q elegida de tal forma que

$$q(e_1) = H + U \quad y \quad \frac{1}{2}q(e_1 + e_2) = H + V$$

y $\{e_3, e_4\}$ la base canónica del contradominio. De esta manera

$$\Phi(e_3) = L^2(e_3) - Q(e_3) = \left(\frac{1}{2}(a-c)\right)^2 + b^2$$

$$\Phi(e_4) = L^2(e_4) - Q(e_4) = \left(\frac{1}{2}(e-g)\right)^2 + f^2$$

$$\widetilde{\Phi}(e_3, e_4) = \frac{1}{2}\left(\Phi(e_3 + e_4) - \Phi(e_3) - \Phi(e_4)\right) = \frac{1}{2}(a-c)\frac{1}{2}(e-g) + bf,$$

y por lo tanto Φ tiene la siguiente expresión

$$\Phi = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(a-c)\right)^2 + b^2 & \frac{1}{2}(a-c)\frac{1}{2}(e-g) + bf \\ \frac{1}{2}(a-c)\frac{1}{2}(e-g) + bf & \left(\frac{1}{2}(e-g)\right)^2 + f^2 \end{pmatrix}.$$

Un simple cálculo muestra que

$$\Phi(U) = |U|^2 U \qquad \Phi(V) = |V|^2 V,$$

donde U y V son los vectores que están sobre los ejes semimayor y semimenor de la elipse.
Así definimos una base dada por

$$\overline{e_3} = \frac{U}{|U|} \qquad \overline{e_4} = \frac{V}{|V|}.$$

ii) Considerando la base $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$ y usando $(*)$ tenemos que

$$q(e_1) = H + |U|\overline{e_3},$$
$$q(e_2) = H - |U|\overline{e_3},$$
$$\frac{1}{2}q(e_1 + e_2) = H + |V|\overline{e_4}.$$

Suponiendo que $H = \alpha\overline{e_3} + \beta\overline{e_4}$ tenemos que

$$q(e_1) = (\alpha + |U|)\overline{e_3} + \beta\overline{e_4}$$
$$q(e_2) = (\alpha - |U|)\overline{e_3} + \beta\overline{e_4}$$
$$\frac{1}{2}q(e_1 + e_2) = \alpha\overline{e_3} + (\beta + |V|)\overline{e_4}.$$

Luego, si $\nu = (\nu_3, \nu_4) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$S_\nu = \begin{pmatrix} q(e_1)\cdot\nu & \widetilde{q}(e_1, e_2)\cdot\nu \\ \widetilde{q}(e_1, e_2)\cdot\nu & q(e_2)\cdot\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + |U|)\nu_3 + \beta\nu_4 & b\nu_4 \\ b\nu_4 & (\alpha - |U|)\nu_3 + \beta\nu_4 \end{pmatrix},$$

donde $\widetilde{q}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}q(e_1 + e_2) - \frac{1}{2}q(e_1) - \frac{1}{2}(e_2) = be_4$.

Ahora dado que

$$Q_q = det(S_\nu) = (\alpha^2 - |U|^2)\nu_3^2 + 2\alpha\beta\nu_3\nu_4 + (\beta^2 - |V|^2)\nu_4^2,$$

tenemos que

$$\Delta = det(Q_q) = (\alpha^2 - |U|^2)(\beta^2 - |V|^2) - \alpha^2\beta^2,$$

luego $\Delta = -|U|^2\beta^2 - |V|^2\alpha^2 + |U|^2|V|^2$.
Hemos encontrado una expresión para Δ en términos de α^2, β^2 y de los valores propios de Φ.
iii) Dado que $|H|^2 = \alpha^2 + \beta^2$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} |U|^2\beta^2 + |V|^2\alpha^2 & = & -\Delta + |U|^2|V|^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 & = & |H|^2. \end{array}$$

De esta manera basta resolver el sistema para α^2 y β^2 para obtener la expresión de H en términos de la base $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$

$$\alpha^2 = \frac{1}{|U|^2 - |V|^2}(\Delta + |U|^2|H|^2 - |U|^2|V|^2)$$
$$\beta^2 = \frac{1}{|V|^2 - |U|^2}(\Delta + |V|^2|H|^2) - |U|^2|V|^2).$$

Por otro lado $|U|^2 - |V|^2 = \sqrt{(|H|^2 - K)^2 - K_N^2}$ y $|U|^2|V|^2 = \frac{1}{4}K_N^2$. Así α y β pueden ser expresados en términos de $|H|^2$, K, K_N y Δ y por lo tanto H. $\square$

Cabe resaltar que el uso de la elipse asociada a q en la prueba de este teorema es únicamente para facilitar los cálculos, dado que los invariantes no dependen de las elecciones de las bases.

Antes de establecer el siguiente resultado, que es el que determina cuando podemos recuperar a $[q]$ via sus invariantes introduzcamos la siguiente notación.
Denotemos por G el subgrupo de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ generado or las reflexiones con respecto al eje x y con respecto al eje y; identificando estas transformaciones con su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ tenemos

$$G = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Este grupo actúa sobre el conjunto cociente $SO_2\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)/SO_2$ por composición ya que $gSO_2g^{-1} = SO_2$ para toda $g \in G$.

Teorema 3. *Sea* $[q] \in SO_2\backslash\mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)/SO_2$ *y* $|H|^2$, K_N, Δ, K *sus invariantes asociados. Éstos invariantes determinan a* $[q]$ *módulo la acción del grupo G.*

Demostración. Retomemos la aplicación biyectiva $\overline{\Theta}$ del teorema 2. $\overline{\Theta}([q])$ es la clase de $(L, \Phi, A) \in P$ donde las formas L, Φ, A estan definidas en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por

$$L = (\alpha, -\beta), \quad \Phi = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \quad yA = \frac{1}{2}K_N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con X_1, X_2, α, β como en el lema anterior. Dado que α y β estan determinados módulo el signo, al conjunto de invariantes le corresponden 4 clases, sin embargo éstas pueden ser obtenidas de una de ellas por la acción de G. $\square$

Capítulo 2

Invariantes de la segunda forma fundamental.

En este capítulo estudiamos los invariantes de una inmersión $X : M^2 \to \mathbb{R}^4$ de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4 bajo el cambio de marco móvil. Veremos que, dado que la segunda forma fundamental es una aplicación cuadrática para cada $p \in M$, los invariantes de ésta estarán dados por los invariantes de $SO_2 \backslash \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)/SO_2$.

2.1. Marco móvil y formas de conexión

Antes de comenzar el estudio de estos invariantes, comenzaremos dando la definición de marco móvil sobre una variedad riemanniana, M^n, y estudiando algunas de las propiedades de estos marcos en el caso cuando $M^n = \mathbb{R}^4$.

Definición 2. Sea M^n una variedad riemanniana y $X = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un conjunto de campos vectoriales tangentes diferenciales definidos sobre un abierto $U \subseteq M$, diremos que X es un *marco móvil* si para todo $p \in U$, $X_p = \{e_1(p), e_2(p), ..., e_n(p)\}$ es una base ortonormal para T_{pM}.

Dado un marco móvil $\{e_i\}_{i=1}^n$ podemos encontrar *1-formas diferenciales* ω_i tales que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, $i = 1, ...n$, en otras palabras, en cada $p \in M$, la base $\{\omega_i(p)\}$ es la base dual de $\{e_i(p)\}$. Definimos este conjunto como el marco de $1 - formas$ asociado al marco $\{e_i\}$

Sea $M^n = \mathbb{R}^4$. Dado un marco móvil para $\mathbb{R}^4$, $X_p = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tenemos que $e_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una aplicación diferenciable para cada i, y en consecuencia

$$(de_i)_p : T_p\mathbb{R}^4 \to T_p\mathbb{R}^4 \qquad \forall p \in \mathbb{R}^4.$$

Ahora, como $X_p = \{e_1(p), e_2(p), e_3(p), e_4(p)\}$ es una base para $T_p\mathbb{R}^4$ podemos escribir

$$(de_i)_p(v) = \sum_{j=1}^{4} (\omega_{ij})_p(v) e_j(p) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^4,$$

donde $(\omega_{ij})_p(v) \in \mathbb{R}$ debido a que $T_p\mathbb{R}^4$ es un espacio vectorial real.

Notemos que $(\omega_{ij})_p(v)$ depende linealmente de v, pues dados $v_1, v_2 \in T_pM$ tenemos que

$$(de_i)_p(v_1) + (de_i)_p(v_2) = (de_i)_p(v_1 + v_2) = \sum_{j=1}^{4} (\omega_{ij})_p(v_1 + v_2) e_j(p),$$

igualando términos y usando que X_p es una base obtenemos que

$$(\omega_{ij})_p(v_1 + v_2) = (\omega_{ij})_p(v_1) + (\omega_{ij})_p(v_2)$$

De forma similar se puede mostrar que $(\omega_{ij})_p(\lambda v) = \lambda(\omega_{ij})_p(v)$. Así,

$$(\omega_{ij})_p : T_p\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

es lineal para todo $p \in M$ y para todo $i, j = 1, ..., 4$, luego

$$\omega_{ij} : \chi(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{R}$$

son 1-formas para todo $i, j = 1, ..,4$, donde $\chi(\mathbb{R}^4)$ denota el conjunto de campos vectoriales en $\mathbb{R}^4$. Estas 1-formas son llamadas *formas de conexión de* M *en el marco móvil de* X. Una prueba de la unicidad de éstas se puede encontrar en [3].

Las formas de conexión junto con las formas asociadas al marco cumplen las siguientes ecuaciones.

Proposición 6. *(*Ecuaciones de estructura de $\mathbb{R}^4$*). Sea* $\{e_i\}$ *un marco móvil en un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{R}^4$*. Sea* $\{\omega_i\}$ *el marco de formas asociadas a* $\{e_i\}$ *y* ω_{ij} *las formas de conexión de* U *en el marco* $\{e_i\}$*. Entonces*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \tag{2.1}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \qquad i, j, k = 1, ..,4. \tag{2.2}$$

Demostración. Sea $a_1 = (1, .., 0), ..., a_4 = (0, .., 1)$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, y sea $x_i : U \to \mathbb{R}$ la función que asigna a cada punto $(x_1, ..., x_4)$ su *i-ésima* coordenada. Entonces dx_i es una *1-forma* diferencial en U y, ya que $dx_i(a_j) = \delta_{ij}$, concluimos que $\{dx_i\}$ es el marco de formas asociado a $\{a_i\}$.

Ahora escribimos

$$e_i = \sum_j \beta_{ij} a_j, \tag{2.3}$$

donde β_{ij} es una función diferenciable sobre U y, para cada $p \in U$, la matríz $(\beta_{ij}(p))$ es una matríz ortogonal. Ya que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$,

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j. \tag{2.4}$$

Primero probaremos que $d\beta_{ij} = \sum_k \omega_{ik}\beta_{kj}$. En efecto,

$$de_i = \sum_k \omega_{ik} e_k = \sum_k \omega_{ik}(\sum_j \beta_{kj} a_j) = \sum_{jk} \omega_{ik}\beta_{kj} a_j,$$

y ya que de (2.3) tenemos que $de_i = \sum \beta_{ij} a_j$, obtenemos comparando,

$$d\beta_{ij} = \sum_k \omega_{ik}\beta_{kj}. \tag{2.5}$$

Para obtener la primera ecuación de estructura (2.1), derivamos (2.4) y usamos (2.5):

$$d\omega_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_{jk} \omega_{ik}\beta_{kj} \wedge dx_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}.$$

Para la segunda ecuación de estructura (2.2), derivamos (2.5) obteniendo

$$0 = \sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge d\beta_{kj},$$

esto es

$$\sum_k d\omega_{ik}\beta_{kj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \sum_s \omega_{ks}\beta_{sj},$$

o, finalmente, multiplicando por la matríz inversa (β_{kj})

$$d\omega_{ie} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{ke},$$

como se deseaba. □

Antes de dar la siguiente definición notemos que dada una inmersión $X : M^2 \to \mathbb{R}^4$ de una variedad diferenciable M en el espacio euclidiano de dimensión 4 tenemos, por el teorema de la función inversa, que para cada $p \in M$ existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que la restricción $x|U \subset M \to \mathbb{R}^4$ es un encaje, es decir, tenemos bien definido un plano tangente para cada $p \in M$ (No hay autointersecciones de la superficie).

Definición 3. Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$ una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4, $p \in M$ y $V \subset \mathbb{R}^4$ una vecindad de *X(p)* en $\mathbb{R}^4$ tal que $V \cap X(M) = X(U)$. Supongamos que V es tal que existe un marco móvil $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con la propiedad de que, cuando restringimos a *X(U)* los vectores e_1, e_2 son tangentes a *X(U)*, un tal marco se dice que es un *marco móvil adaptado.*

Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$ una inmersión, $\{e_i\}$ un marco móvil adaptado, ω_i su marco de formas asociado y ω_{ij} las formas de conexión. Podemos definir formas para M de la siguiente manera

$$X^*(\omega_i)(v) = \omega_i(dX(v)) \qquad X^*(\omega_{ij})(v) = \omega_{ij}(dX(v))$$

donde X^* es la aplicación inducida. Dado que X^* conmuta con la derivación exterior y el producto exterior[1] tales formas satisfacen también las ecuaciones de estructura.
Dado que $dX(v) \in T_pM$, $dX(v) = ae_1 + be_2$. Así

$$X^*(\omega_3)(v) = \omega_3(dX(v)) = \omega_3(ae_1 + be_2) = 0,$$

de manera análoga $X^*(\omega_4) = 0$.
Con un abuso de notación escribimos

$$X^*(\omega_i) = \omega_i, \qquad X^*(\omega_{ij}) = \omega_{ij}.$$

Esto nos permite ver a $U \subset M$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por la inclusión $X : U \to \mathbb{R}^4$ y ver a las funciones ω_i y ω_{ij} como restricciones a U.

[1] Podemos encontrar algunas propiedades de la derivación y del producto exterior en [3]

Notemos que si $X : U \to \mathbb{R}^4$, es la aplicación inclusión, decir que las formas ω_i son duales del marco $\{e_i\}$ es equivalente a decir que $dX = \sum \omega_i e_i$
En efecto, por un lado $(dX)_p(v) = v$, donde $v = a_1e_1 + a_2e_2$. Por otro lado $\omega_i(v) = a_i$, luego $v = \sum \omega_i(v)e_i$ y por tanto $(dX)_p(v) = \sum \omega_i(v)e_i$.

De esta manera las formas ω_i y ω_{ij} están dadas por las siguientes expresiones:

$$\omega_i = dX \cdot e_i \qquad \omega_{ij} = de_i \cdot e_j$$

Nota: Dado que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \{ \begin{array}{cc} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{array}$ *, tenemos* $de_i \cdot e_j + de_j \cdot e_i = 0$*. Por lo tanto* $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$*. Si además* $\{\omega_i\}$ *es linealmente independiente y junto con las formas* ω_{ij} *satisfacen la ecuación (1), entonces estas* 1-formas *son únicas*[2].

Antes de continuar enunciaremos y probaremos el Lema de Cartan que será de mucha utilidad en lo que sigue.

Proposición 7. (Lema de Cartan). *Sea* V^n *un espacio vectorial de dimensión* n*, y sean* $\omega_1, ..., \omega_r : V^n \to \mathbb{R}$*,* $r \leq n$ *formas lineales en* V *linealmente independientes. Supongamos que existen formas* $\theta_i : V \to \mathbb{R}$ *tales que* $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$*. Entonces*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \qquad con \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

Demostración. Extendamos la base dual $\{\omega_i\}$ a una base $\omega_1, ...\omega_r, \omega_{r+1}, ..., \omega_n$ de V^* y escribimos

$$\sum_j a_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l, \qquad l = r + 1, ..., n.$$

Usando la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1=1}^{n} \omega_i \wedge \theta_i = \sum_{ij} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j + \sum_l b_{il}\omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji})\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i<l} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Dado que $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $k, s = 1, ..., n$, son linealmente independientes, tenemos que $b_{il} = 0$ y $a_{ij} = a_{ji}$. $\square$

[2] [3]

Ahora, retomando que $\omega_3 = \omega_4 = 0$, tenemos que

$$0 = d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}$$

$$0 = d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_{14} + \omega_2 \wedge \omega_{24},$$

luego, por el *Lema de Cartan* tenemos que,

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2$$

$$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2$$

$$\omega_{14} = e\omega_1 + f\omega_2$$

$$\omega_{24} = f\omega_1 + g\omega_2.$$

Estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones de Codazzi.*

2.2. Invariantes de la segunda forma fundamental.

Definición 4. *Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$ una inmersión y $\{e_i\}_{i=1}^4$ un marco móvil adaptado en $\mathbb{R}^4$. Definimos los siguientes haces fibrados:*
$TM = \{(p,v)|p \in M, v \in T_pM\}$ el haz tangente de M, $NM = \{(p,\nu)|p \in M, \nu \in N_pM\}$ el haz normal de M; $F_\tau = \{e_1, e_2\}$ el haz de marcos tangentes $F_\nu = \{e_3, e_4\}$ el haz de marcos normales y $F = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ el haz de todos los marcos.

Como vimos anteriormente podemos encontrar un abierto $U \subset M$ tal que $X : U \to \mathbb{R}^4$ puede ser vista como la aplicación inclusión. Teniendo esto en cuenta definimos las formas duales y de conexión de la siguiente manera

$$\omega_i = dX \cdot e_i, \qquad \omega_{ij} = de_i \cdot e_j \qquad i,j = 1,2,3,4$$

Definición 5. *La aplicación*

$$\alpha_p : T_pM \to N_pM$$

dada por

$$\alpha_p(v) = (a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2)(v)e_3 + (e\omega_1^2 + 2f\omega_1\omega_2 + g\omega_2^2)(v)e_4$$

es llamada la segunda forma fundamental de la inmersión.

Nota: Dado que en $\mathbb{R}^4$*, su conexión,* ∇*, coincide con la derivada covariante tenemos que para una inmersión* $X : M^2 \to \mathbb{R}^4$ *y una curva* $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \to M$ *con la propiedad de que* $\gamma(0) = p$ *y* $\gamma'(0) = v$

$$\nabla_{dX\circ\gamma} dX \circ \gamma = \frac{d^2(X \circ \gamma)}{dt}|_{t=0},$$

y de esta manera

$$(\nabla_{dX} dX)^{\perp} = \alpha(dX, dX) = (dX^2 \cdot e_3)e_3 + (dX^2 \cdot e_4)e_4.$$

Notemos ahora que $dX \cdot e_3 = 0$ *y por tanto*

$$d^2X \cdot e_3 = -dX \cdot de_3,$$

luego, ocupando que $dX = \sum \omega_i e_i$*,* $de_i = \sum \omega_{ij} e_j$ *(*Ver pag. 11*) y las ecuaciones de Codazzi obtenemos que*

$$(dX^2 \cdot e_3)e_3 = \omega_1\omega_{31} + \omega_2\omega_{32} = a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2$$

y, de forma análoga

$$(dX^2 \cdot e_4)e_4 = e\omega_1^2 + 2f\omega_1\omega_2 + g\omega_2^2.$$

De esta manera, la definición anterior coincide con la definición estándar de la segunda forma fundamental en términos de la conexión.

Para cada punto $p \in M$ la segunda forma fundamental puede ser vista como una aplicación cuadrática

$$\alpha_p : T_pM \to N_pM$$

dada por

$$\alpha_p(xe_1 + ye_2) = (ax^2 + 2bxy + cy^2)e_3 + (ex^2 + 2fxy + gy^2)e_4$$

Ahora notemos que un cambio de marco móvil (adaptado) determina, en cada $p \in M$, una rotación de T_pM y otra en N_pM y dado que estos planos pueden identificarse con $\mathbb{R}^2$, podemos estudiar a α_p como un elemento de $\mathbf{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y por lo tanto sus invariantes están dados por los elementos de $SO_2 \backslash \mathbb{Q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)/SO_2$.

Definición 6. Sea $\alpha_p : T_pM \to N_pM$ la segunda forma fundamental de la inmersión en p y $\nu \in N_pM$. La aplicación

$$< \alpha_p, \nu >: T_pM \to \mathbb{R}$$

dada por

$$< \alpha_p(xe_1 + ye_2), \nu >= (ax^2 + 2bxy + cy^2)v_3 + (ex^2 + 2fxy + gy^2)v_4$$

donde $\nu = (v_3, v_4)$ es llamada la *ν-segunda forma fundamental.*

Dado $\nu \in N_pM$, el endomorfismo S_ν asociado a la *ν-segunda forma fundamental*, es el operador de forma y tiene la siguiente representación matricial

$$\begin{pmatrix} ax + ey & bx + fy \\ bx + fy & cx + gy \end{pmatrix},$$

donde $\nu = xe_3 + ye_4$.

Antes de comenzar el estudio de los invariantes de α_p bajo el cambio del marco móvil mostramos la siguiente proposición.

Proposición 8. *Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$ una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4 y sea $\{e_i\}_{i=1}^4$ un marco móvil adaptado. La* 2-forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ *es invariante bajo cambio de marco móvil.*

Demostración. Sea $\{\overline{e}_i\}_{i=1}^4$ otro marco móvil adaptado y $\overline{\omega}_i$ las formas duales asociadas a éste. Dado que ω_1 y ω_2 estan definidas sobre F_τ, un cambio de marco en el plano normal las dejará invariantes. Ahora, dado un cambio de marco tangente tenemos que

$$\overline{e}_1 = pe_1 + qe_2$$

$$\overline{e}_2 = -qe_1 + qe_2,$$

donde p y q son aplicaciones C^∞ tales que $p^2 + q^2 = 1$. De esta manera las formas en el marco $\overline{e}_i$ pueden expresarse como

$$\overline{\omega}_1 = p\omega_1 + q\omega_2$$

$$\overline{\omega}_2 = -q\omega_1 + q\omega_2,$$

así

$$\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 = (p^2 + q^2)\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$$

□

Proposición 9. *Sea* $X : M \to \mathbb{R}^4$ *una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4,* $\{e_i\}$ *un marco móvil adaptado,* $\{\omega_i\}$ *sus formas duales asociadas y* $\{\omega_{ij}\}$ *sus formas de conexión. Las* 2-formas

$$d\omega_{12} \qquad y \qquad d\omega_{34}$$

son invariantes bajo cambio de marco móvil. Estas 2-formas *son llamadas las formas de curvatura.*

Demostración. Por las ecuaciones de estructura tenemos que

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \omega_{14} \wedge \omega_{42}$$

luego, aplicando las ecuaciones de Codazzi tenemos que

$$d\omega_{12} = (a\omega_1 + b\omega_2) \wedge (b\omega_1 + c\omega_2) + (e\omega_1 + f\omega_2) \wedge (f\omega_1 + g\omega_2) = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

donde $K = (ac - b^2) + (eg - f^2)$. De manera similar obtenemos

$$d\omega_{34} = -K_N\omega_1 \wedge \omega_2,$$

donde $K_N = (a-c)f-(e-g)b$. Ahora, dado que K, K_N y $\omega_1 \wedge \omega_2$ son invariantes bajo cambio de marco móvil también lo será su producto, por lo tanto $d\omega_{12}$ y $d\omega_{34}$ seran *2-formas* invariantes. $\square$

Dadas estas *2-formas* invariantes podemos obtener K y K_N valuando únicamente éstas en los básicos, es decir

$$-K = d\omega_{12}(e_1, e_2) \qquad y \qquad K_N = d\omega_{34}(e_1, e_2).$$

A K y K_N se les conoce como la *curvatura Gaussiana* y la *curvatura normal* respectivamente.

Notemos también que el invariante A_{α_p} puede ser obtenido de $d\omega_{34}$. En efecto

$$\begin{aligned} A_{\alpha_p}(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2, \mu_1 e_1 \mu_2 e_2) &= \frac{1}{2} K_N(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) = \\ &= \frac{1}{2} K_N \omega_1 \wedge \omega_2(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) = \\ &= \frac{1}{2} d\omega_{34}. \end{aligned}$$

La forma cuadrática Q_{α_p} puede ser obtenida desarrollando una *2-forma* de la manera siguiente. Escribimos $\nu = xe_3 + ye_4$ y consideramos

$$d\nu \cdot e_1 \wedge d\nu \cdot e_2.$$

Ahora

$$\begin{aligned} d\nu \cdot e_1 \wedge d\nu \cdot e_2 &= (dxe_3 + xde_3 + dye_4 + yde_4) \cdot e_1 \wedge (dxe_3 + xde_3 + dye_4 + yde_4) \cdot e_2 \\ &= x\omega_{31} + y\omega_{41} \wedge \omega_{32} + y\omega_{42} \end{aligned}$$

Luego, aplicando las ecuaciones de Codazzi obtenemos

$$\begin{aligned} d\nu \cdot e_1 \wedge d\nu \cdot e_2 &= (x(a\omega_1 + b\omega_2) + y(e\omega_1 + f\omega_2)) \wedge (x(b\omega_1 + c\omega_2) + y(f\omega_1 + g\omega_2)) \\ &= \nu \cdot e_1 \wedge d\nu \cdot e_2 = F(x,y)\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

donde $F = (ac - b^2)x^2 + (ag + ce - 2bf)xy + (eg - f^2)y^2$.

Notemos que $F(x,y)$ es el determinante de la matriz asociada al operador de forma S_ν.

En efecto, valuando esta $2 - forma$ en (e_1, e_2) obtenemos

$$d\nu \cdot e_1 \wedge d\nu \cdot e_2(e_1, e_2) = F(x,y)\omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_2) = F(x,y)$$

entonces

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \begin{vmatrix} d\nu(e_1) \cdot e_1 & d\nu(e_1) \cdot e_2 \\ d\nu(e_2) \cdot e_1 & d\nu(e_2) \cdot e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + ey & bx + fy \\ bx + fy & cx + gy \end{vmatrix} \\ &= det(S_\nu) = {Q_\alpha}^3 \end{aligned}$$

Así $d\nu \cdot e_1 \wedge d\nu \cdot e_2 = Q_\alpha \omega_1 \wedge \omega_2$, y dado que $\omega_1 \wedge \omega_2$ es también invariante se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10. *Sea* $X : M \to \mathbb{R}^4$,$\{e_i\}$, $\{\omega_i\}$ *y* $\{\omega_{ij}\}$ *como en la proposición anterior, la* 2-forma

$$d\nu \cdot e_3 \wedge d\nu \cdot e_4 = Q_{\alpha_p}(x,y)\omega_1 \wedge \omega_2$$

es invariante bajo cambio de marco móvil.

Demostración. Dado que $Q_{\alpha_p} = det(S_\nu)$ y $\omega_1 \wedge \omega_2$ son invariantes bajo rotaciones de T_pM y N_pM tenemos que $d\nu \cdot e_3 \wedge d\nu \cdot e_4 = Q_{\alpha_p}(x,y)\omega_1 \wedge \omega_2$ también es invariante. □

Consideremos $e = xe_1 + ye_2$, de manera análoga a la anterior *2-forma* se obtiene

$$de \cdot e_3 \wedge de \cdot e_4 = \delta(x, y)\omega_1 \wedge \omega_2$$

donde $\delta(x, y) = (af - be)x^2 + (ag - ce)xy + (bg - cf)y^2$. De esta *2-forma* podemos obtener los invariantes Δ y K_N, solo basta notar que $det(\delta) = \Delta$ y $tr(\delta) = K_N$.

Proposición 11. *Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$ una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4. La* 2-forma

$$de \cdot e_3 \wedge de \cdot e_4 = \delta(x, y)\omega_1 \wedge \omega_2$$

es invariante bajo cambio de marco móvil.

Demostración. Sean $\{e_i\}_{i=1}^4$ y $\{\overline{e_i}\}_{i=1}^4$ dos marcos móviles adaptados.
Dado un cambio de marco normal tenemos que

$$\overline{e}_3 = pe_3 + qe_4$$

$$\overline{e}_4 = -qe_3 + qe_4$$

donde p y q son aplicaciones C^∞ tales que $p^2 + q^2 = 1$. Así

$$\begin{aligned} de \cdot \overline{e}_3 \wedge de \cdot \overline{e}_4 &= de \cdot (pe_3 + qe_4) \wedge de \cdot (-qe_3 + pe_4) \\ &= (pde \cdot e_3 + qde \cdot e_4) \wedge (-qde \cdot e_3 + pde \cdot e_4) = \\ &= (p^2 + q^2)de \cdot e_3 \wedge de \cdot e_4 = \\ &= de \cdot e_3 \wedge de \cdot e_4. \end{aligned}$$

De esta forma los coeficientes de $\delta(x, y)$ estan definidos sobre F_τ, es decir, estos coeficientes no cambian bajo una rotación de F_ν.
Dado un cambio de marco tangente tenemos que $e = xe_1 + ye_2 = x'\overline{e}_1 + y'\overline{e}_2$, de esta manera tenemos que

$$\delta(x, y)\omega_1 \wedge \omega_2 = \delta(x', y')\overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2},$$

y dado que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2}$$

tenemos que $\delta(x, y) = \delta(x', y')$
Así $de \cdot e_3 \wedge de \cdot e_4$ es invariante bajo cambio de marco móvil. □

Otra manera de obtener el invariante Δ es la siguiente.

Definición 7. *La resultante* de dos polinomios $P_1(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $P_2(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$ se define como el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_{q-1} & \cdots & a_{p-1} & a_p & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & a_0 & \cdots & \cdots & a_p \\ b_0 & \cdots & \cdots & b_q & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & & & b_0 & \cdots & b_q \end{pmatrix}.$$

La resultante nos indica las raíces que tienen en común estos dos polinomios, una prueba de ésto la podemos encontrar en [2]. Mediante un cálculo directo podemos probar la siguiente:

Proposición 12. *Δ es igual a $-\frac{1}{4}$ de la resultante de los dos polinomios que forman la segunda forma fundamental, es decir,*

$$\Delta = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ e & 2f & g & 0 \\ 0 & e & 2f & g \end{vmatrix}.$$

El siguiente resultado aparece en [6] y muestra que, de manera similar al Capítulo 2 podemos obtener la segunda forma fundamental a partir de los invariantes de ésta.

Teorema 4. *(Little). En un punto donde $\delta \neq 0$ y $H \neq 0$, la segunda forma fundamental está determinada, módulo un cambio de marco móvil, por* H, *δ y Q_{α_p}.*

Demostración. Dado que δ y F son invariantes bajo rotaciones del normal podemos suponer que H se encuentra en la dirección de e_3. De esta manera $H = \frac{1}{2}(a+c)e_3$ y $e + g = 0$.
Demos una expresión de e,g y f en términos de los coeficientes de δ y Q de la siguiente manera Notemos que,

$$e = \frac{a+c}{a+c}e = \frac{ae+ce}{a+c} = \frac{-ag+ce}{a+c} = \frac{-(ag-ce)}{a+c},$$

$$g = -e = \frac{ag-ce}{a+c}$$

y

$$f = \frac{a+c}{a+c} f = \frac{af - be - (bg - cf)}{a+c},$$

donde $a + c \neq 0$ de lo contrario H=0. Por otra parte

$$ge + ce - 2bf = -(a-c)e - 2bf$$

$$af - be + bg + cf = (a-c)f - 2be$$

de esta manera tenemos que

$$\begin{pmatrix} ag + cf - 2bf \\ af - be + bg + cf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & f \\ f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - c \\ -2b \end{pmatrix}$$

y dado que $e^2 + f^2 \neq 0$[4], tenemos que $\begin{pmatrix} -e & f \\ f & e \end{pmatrix}$ es no singular y por tanto tiene inversa, luego

$$\begin{pmatrix} a - c \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & f \\ f & e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} ag + cf - 2bf \\ af - be + bg + cf \end{pmatrix}.$$

De esta manera podemos expresar a a, b y c en términos de los coeficientes de H, δ y Q_{α_p}. □

[4]De lo contrario $e = f = g = 0$ y por tanto $\delta \equiv 0$

Capítulo 3

Elipse de curvatura.

En este capítulo damos una interpretación geométrica de los invariantes asociados a L_{α_p} y Φ_{α_p}, describimos Δ en términos del punto $p \in M$ y de la *elipse de curvatura*, que es la elipse asociada a la segunda forma fundamental en p. Con esta configuración caracterizamos los puntos de una superficie M inmersa en el espacio euclidiano de dimensión 4. Se da una interpretación geométrica de las formas cuadráticas Q_α y δ.

Definición 8. Sea $X : M^2 \to \mathbb{R}^4$ una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4 y $\{e_i\}_{i=1}^4$ un marco móvil adaptado.
Definimos el *espacio unitario tangente de* S *en* p por:

$$S(T_pM) = \{e(\theta) = e_1 \cos\theta + e_2 \operatorname{sen}\theta : \theta \in (0, 2\pi]\}$$

y el *espacio proyectivo tangente* como el cociente:

$$\frac{S(T_pM)}{\mathbb{Z}^2} := P(T_pM) = \{[e(\theta)] = \{e(\theta), -e(\theta)\}\}.$$

Definición 9. *La elipse de curvatura* es la imagen del espacio proyectivo tangente bajo la aplicación

$$\alpha_p : P(T_pM) \to N_pM$$

dada por

$$[e(\theta)] \mapsto \alpha_p([e(\theta)]) = \alpha_p(e(\theta), e(\theta))$$

donde α_p es la segunda forma fundamental en p.

Notemos que $\alpha_p(-e(\theta), -e(\theta)) = \alpha_p(e(\theta), e(\theta))$ por la bilinealidad de α_p, i,e, no depende del representante, luego α_p esta bien definido en el espacio proyectivo.
Esta aplicación la podemos ver como la proyección de γ''_θ en N_pM donde γ es una curva adaptada, es decir, $\gamma_\theta(0) = p$, $\gamma'(0) = e(\theta)$. Por la bilinealidad y simetría de α_p tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha_p[e(\theta)] = \alpha_p(e(\theta), e(\theta)) &= \\ \alpha_p((e_1\cos\theta + e_2\operatorname{sen}\theta, e_1\cos\theta + e_2\operatorname{sen}\theta)\cdot e_3)e_3 &+ \\ \alpha_p((e_1\cos\theta + e_2\operatorname{sen}\theta, e_1\cos\theta + e_2\operatorname{sen}\theta)\cdot e_4)e_4 &= \\ (a\cos^2\theta + 2b\cos\theta + c\operatorname{sen}^2\theta)e_3 + (e\cos^2\theta + 2f\cos\theta + g\operatorname{sen}^2\theta)e_4 & \end{aligned}$$

Luego, utilizando las identidades $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ y $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ tenemos que,

$$\alpha_p(\theta) = (\frac{1}{2}(a-c)\cos 2\theta + b\operatorname{sen} 2\theta)e_3 + (\frac{1}{2}(e-g)\cos 2\theta + f\operatorname{sen} 2\theta)e_4 + H$$

donde $H = \frac{1}{2}(a+c)e_3 + \frac{1}{2}(e+g)e_4$ es el vector tal que $L_{\alpha_p}(\nu) = \frac{1}{2}tr(S_\nu) =< H, \nu >$ y S_ν es la matríz asociada al operador de forma. Dado que $|H|^2$ es invariante bajo rotaciones del dominio y del contradominio tenemos que es un invariante escalar de la inmersión bajo cambio de marco móvil. A H se le conoce como el *vector de curvatura media.*
Expresando a $\alpha_p(\theta)$ en forma matricial obtenemos

$$(\alpha_p - H)(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a-c) & b \\ \frac{1}{2}(e-g) & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta \end{pmatrix}$$

con lo que vemos que $\alpha_p(\theta)$ es una elipse con centro en H.
De manera natural podríamos pensar que el área de la elipse, bajo rotaciones de marco móvil, se conserva. En efecto, para probar esto describiremos los invariantes asociados a la forma Φ_{α_p}. Consideremos por un momento el caso general de la elipse, dada como la imagen afin de un círculo, digamos

$$\alpha(\theta) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

Notemos que si θ_1 y θ_2 son aplicados en el semieje mayor y el semieje menor respectivamente entonces estas direcciones son necesariamente ortogonales. Para ver esto, notemos primero que $< \alpha'(\theta_1), \alpha(\theta_1) >= 0$, así $\alpha'(\theta_1) = \pm\lambda\alpha(\theta_2)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\alpha'(\theta) &= (-A\sin\theta + B\cos\theta, -C\sin\theta + D\cos\theta) = \\
&= (A\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) + B\sin(\theta+\frac{\pi}{2}), C\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) + D\sin(\theta+\frac{\pi}{2})) \\
&= -(A\cos(\theta-\frac{\pi}{2}) + B\sin(\theta-\frac{\pi}{2}), C\cos(\theta-\frac{\pi}{2}) + D\sin(\theta-\frac{\pi}{2})) \\
&= \alpha(\theta\pm\frac{\pi}{2}),
\end{aligned}$$

luego $\pm\lambda\alpha(\theta_2) = \alpha'(\theta_1) = \alpha(\theta_1 \pm \frac{\pi}{2})$, por lo tanto $\theta_2 = \theta_1 \pm \frac{\pi}{2}$.

Para el caso de la elipse de curvatura consideremos una base $\{e_1, e_2\}$ tal que $(\alpha_p - H)(0)$ es el vector que esta sobre el semieje mayor, U, y $(\alpha_p - H)(\frac{\pi}{4})$ sobre el semieje menor, V, así

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}(a-c)e_3 + \frac{1}{2}(e-g)e_4 \\
V &= be_3 + fe_4.
\end{aligned}$$

Usando estas expresiones tenemos que

$$\begin{aligned}
|U|^2 + |B|^2 &= \frac{1}{4}((a-c)^2 + (e-g)^2) + b^2 + f^2 \\
&= \frac{1}{4}((a+c)^2 + (e+g)^2) - (ac - b^2 + eg - f^2) \\
&= |H|^2 - K = tr(\Phi_{\alpha_p}).
\end{aligned}$$

Notemos que el área de la elipse esta dada por $\pi|U||V|$, así tenemos que

$$|U||V| = \frac{1}{2}K_N = \frac{1}{2}det(\Phi_{\alpha_p}).$$

Con esto hemos probado la siguiente:

Proposición 13. *El área de la elipse de curvatura es invariante bajo cambio de marco móvil.*

Antes de describir al invariante Δ retomemos la forma cuadrática $< \alpha_p, \nu >$

Definición 10. Dada $\alpha_p : P(T_pM) \to N_pM$, la segunda forma fundamental en $p \in M$, y $\nu \in N_pM$ definimos la $\nu - curvatura$ normal *en la dirección* θ como

$$k_\nu(\theta) = < \alpha_p(\theta), \nu >$$

Consideremos el operador autoadjunto S_ν asociado a la forma cuadrática $(\alpha_p)_\nu =< \alpha_p, \nu >$, . Existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pM tal que $S_\nu(e_1) = \lambda_1 e_1$ y $S_\nu(e_2) = \lambda_2 e_2$. En la base $\{e_1, e_2\}$, S_ν tiene una representación matricial diagonal y sus elementos λ_1 y λ_2 sobre la diagonal son el máximo y el mínimo respectivamente de k_ν.[1]

Definición 11. Definimos $k_\nu^+ := max\{k_\nu(\theta)\}$ *y* $k_\nu^- := min\{k_\nu(\theta)\}$

Definición 12. Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$ una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4, sea $\alpha_p : P(T_pM) \to N_pM$ la segunda forma fundamental de M en p y $\nu \in N_pM$.

$$K_\nu = det(S_\nu)$$

es llamada la $\nu -$ *curvatura de* M *en* p.

Notemos que $K_\nu = k_\nu^+ \cdot k_\nu^-$.

Para describir al invariante Δ, observemos que dada la aplicación

$$\alpha_p : P(T_pM) \to N_pM,$$

p puede encontrarse fuera, dentro o sobre la elipse de curvatura o que ésta puede degenerar en un segmento de recta. En el caso en el que la elipse sea degenerada se tiene que $\frac{1}{2}K_N\pi = 0$, es decir su área será cero y esto pasará si y solo si $K_N = 0$.
Supongamos que $K_N \neq 0$ es decir la elipse es no degenerada. Entonces se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5. *Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$, una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4 y sea $p \in M$ tal que $K_N \neq 0$ en* p *entonces:*
Si $\Delta < 0$, p *se encuentra fuera de la elipse de curvatura,*
si $\Delta > 0$, p *se encuentra dentro de la elipse de curvatura,*
si $\Delta = 0$, p *se encuentra sobre la elipse de curvatura.*

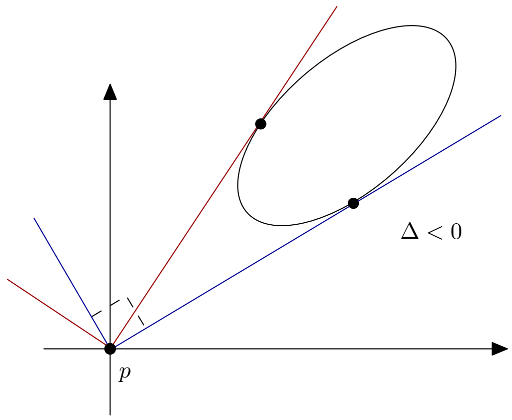
Demostración. Dado que $\Delta = det(Q_{\alpha_p}) = -dis(Q_{\alpha_p})$ tenemos que $Q_{\alpha_p}(\nu) = 0$ tiene dos, una o ninguna solución real si $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$, respectivamente.
En el caso $\Delta < 0$ tenemos dos soluciones reales distintas y por lo tanto existen dos direcciones ν_1, ν_2 tales que $Q_{\alpha_p}(\nu_1) = Q_{\alpha_p}(\nu_2) = 0$, así $det(S_{\nu_1}) =$

[1] [4]

$det(S_{\nu_2}) = 0$. Consideremos ν_1
Esto significa que la $\nu_1 - curvatura\ K_{\nu_1} = k^+_{\nu_1} \cdot k^-_{\nu_1} = 0$ y por lo tanto $k^+_{\nu_1} = 0$ ó $k^-_{\nu_1} = 0$
Que $k^+_{\nu_1} = 0$ ó $k^-_{\nu_1} = 0$ significa que $< \alpha_p(\theta_0), \nu_1 >= 0$ para algun $\theta_0 \in (0, \pi]$ y al ser éstos valores extremos se cumple que

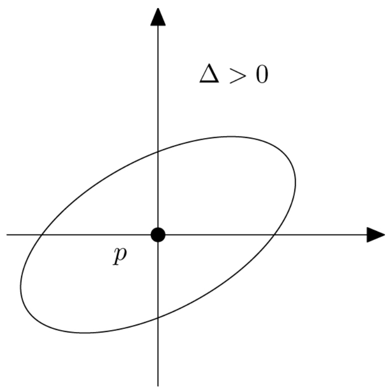
$$\frac{d < \alpha_p(\theta), \nu_1 >}{d\theta}|_{\theta_0} = 2 < \alpha'_p(\theta_0), \nu_1 >= 0$$

y dado que $\nu_1 \neq 0$ entonces $\lambda\alpha'_p(\theta_0) = \alpha_p(\theta_0)$, es decir, la dirección donde alcanza el máximo o el mínimo es tangente a la elipse y perpendicular a ν_1.

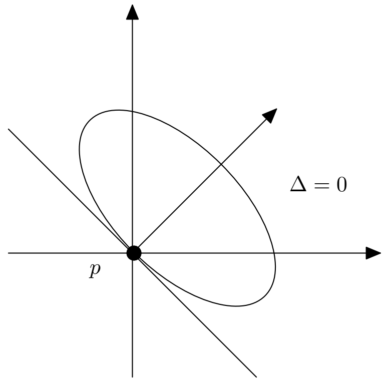


Dado que $\nu_1 \neq \nu_2$ tenemos que existen dos direcciones tangentes a la elipse que pasan por p, luego p se encuentra fuera de la elipse de curvatura.

Ahora si $\Delta > 0$ tenemos que no existen soluciones reales para $Q_{\alpha_p}(\nu) = 0$, luego no hay direcciones tangentes a la elipse de curvatura que pasen por p de lo cual se puede concluir que p esta dentro de la elipse.



Ahora, si $\Delta = 0$, Q_α tiene una única solución real doble, es decir, existe una única dirección tangente a la elipse que pasa por p, en este caso $p \in \alpha_p$. Para probar esto notemos que como $\Delta = 0$ entonces los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tienen una raíz en común, es decir, existe θ_1 tal que $p(\theta_1) = q(\theta_1) = 0$ y por lo tanto la elipse pasa por el origen.



$\square$

Notemos que si $\Delta < 0$ entonces la elipse no puede ser degenerada. En efecto, si la elipse de curvatura es degenerada, tenemos que K_N=0, es decir $(a-c)f-(e-g)b=0$, luego, desarrollando obtenemos

$$(af-eb)+(bg-cf)=0; \quad i.e. \quad (af-be)=-(bg-cf).$$

Por otro lado tenemos que si $\Delta < 0$ entonces

$$(af-be)(bg-cf) > \frac{1}{4}(ag-ce)^2$$

así

$$-(af-be)^2 > \frac{1}{4}(ag-ce)^2$$

lo cual no es posible dado que un número negativo nunca puede exceder a un positivo.

Para el caso en que $K_N = 0$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6. *Sea $X : M \to \mathbb{R}^4$, una inmersión de una superficie en el espacio euclidiano de dimensión 4 y sea $p \in M$ tal que $K_N = 0$ en* p. *Entonces*
Si $\Delta = 0$ la elipse de curvatura degenera en un segmento radial, es decir un segmento de recta alineado con p.
Si $\Delta > 0$ la elipse de curvatura degenera en un segmento e recta que no esta alineado con p.

Demostración. Si $\Delta = 0$ entonces $P(\theta) = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + c\,\mathrm{sen}^2\theta$ y $Q(\theta) = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + c\,\mathrm{sen}^2\theta$ tienen una solución en común, esto debido a que Δ es la resultante de P y Q(ver [2]).
Si esta solución es real, entonces existe $\theta_0 \in (0, 2\pi]$ tal que $\alpha_p(\theta_0) = (0, 0)$, es decir la elipse degenerada pasa por el origen y por tanto la elipse es un segmento radial.
Si la solución es compleja, entonces los polinomios tienen las mismas soluciones ya que el conjugado de la solución también es una solución común. Luego $(P\theta) = \lambda Q(\theta)$ y de esta forma la elipse es un segmento de recta alineado con el origen.
Ahora, si $\Delta > 0$ entonces la elipse no puede pasar por el origen, de lo contrario $\Delta = 0$ y dado que $K_N = 0$ entonces la elipse es un segmento de recta que no esta alineado con el origen. ☐

Definición 13. *Sea* p $\in M$*, si:*

$$\Delta > 0 \begin{cases} K_N \neq 0 & p \text{ es un punto elíptico} \\ K_N = 0 & . \end{cases}$$

$\Delta < 0$ p *es un punto hiperbólico*

$$\Delta = 0 \begin{cases} K_N \neq 0 & p \text{ es un punto parabólico} \\ K_N = 0 & p \text{ es un punto de inflexión} \end{cases}$$

Para dar una interpretación de la forma cuadrática δ, retomemos el caso en el que la elipse es no degenerada. Dado que las direcciones tangentes son las direcciones donde $k_\nu(\theta)$ alcanza su máximo y su mínimo, tenemos que las pendientes en estas direcciones también serán la máxima y la mínima que alcance α_p. Estas direcciones serán tales que $\delta(\cos\theta, \sin\theta) = 0$. Para ver esto definimos

$$m_p(\theta) = \frac{e\cos^2(\theta) + 2f\cos\theta\sin\theta + g\sin^2(\theta)}{a\cos^2(\theta) + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2(\theta)}.$$

$m_p(\theta)$ nos da la pendiente de $\alpha_p(\theta)$. Ahora, derivando obtenemos que $m'(\theta)$=0 si

$$(af - be)\cos^2\theta + (ag - ce)\cos\theta\sin\theta + (bg - cf)\sin^2\theta = 0,$$

es decir las direcciones tangentes serán las dadas por las soluciones de $\delta(\cos\theta, \sin\theta) = 0$.

Para el caso de los puntos de inflexión en la siguiente proposición daremos una interpretación de δ

Proposición 14. (equivalencias de puntos de inflexión) *Sea $p \in M$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\Delta = 0$ *y* $K_N = 0$*;*

b) $\delta \equiv 0$ *en* p*;*

c) $ran(A) \leq 1$*, donde* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$.

Demostración. .
a)⇒ b)

Si $\Delta = 0$ entonces $(af - be)(bg - cf) = \frac{1}{4}(ag - ce)^2$. Por otro lado si $K_N = 0$, tenemos que $(a - c)f - (e - g)b = 0$, es decir

$$(af - be) + (bg + cf) = 0$$

y por tanto

$$(af - be) = -(bg - cf).$$

De esta manera

$$-(af - be)^2 = \frac{1}{4}(ag - ce)^2,$$

pero esto pasa si y solo si $(af - be) = (ag - ce) = 0$, luego $(bg - cf) = 0$. Por lo tanto $\delta \equiv 0$.

b)⇒ c)
Si $\delta \equiv 0$ en p, entonces $(ae - be) = (ag - ce) = (bg - cf) = 0$ pero estos son los menores de A. por lo tanto $ran(A) \leq 1$

c)⇒ a)
Dado que $ran(A) \leq 1$ tenemos que todos los menores de A son cero, es decir $(af - be) = (ag - ce) = (bg - cf) = 0$ y de esta manera $(af - be)(bg - cf) - \frac{1}{4}(ag - ce)^2 = \Delta = 0$ □

Bibliografía

[1] Bayard, Pierre and Sánchez-Bringas, Federico, Geometric Invariants and Principal configurations on spacelike surfaces immersed in $\mathbb{R}^{3,1}$. arxiv: 0905.2750v1 [math.DG] 17May2009

[2] Benedetti, Riccardo and Risler, Jean-Jacques, Real Algebraic and semi-algebraic sets, Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, París 1990.

[3] Do Carmo, Manfredo Perdigao, Differential Forms and Applications. Springer-Verlag. Pag 81.

[4] Do Carmo, Manfredo Perdigao, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Instituto de Matematica Pura e Aplicada(IMPA), Río de Janeiro, Brazil. Pag. 214.

[5] Kawakubo, Katsuo, The Theory of Transformation Groups, Oxford University Press 1991, pag. 5.

[6] Little, J. A.:On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces. Annali. Mat. Pura et Appl, 83:4A (1969), 261-336.