



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Ondas gravitacionales con teoría de  
perturbación de un hoyo negro rotante**

**SEMINARIO DE TITULACIÓN**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A:**

**DAVID ALEJANDRO TAMAYO RAMÍREZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
M. EN C. JUAN CARLOS DEGOLLADO DAZA  
2009**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Ecuación de onda a partir de la teoría de campo débil . . . . .	5
1.2. Ondas gravitacionales planas . . . . .	9
<b>2. Formalismo de tétradas</b>	<b>15</b>
2.1. Formulación matemática de las tétradas nulas . . . . .	15
2.2. El formalismo de Newman-Penrose . . . . .	17
2.3. Los tensores de Riemann y Weyl en el formalismo de Newman-Penrose . . . . .	20
2.4. La ecuación perturbada de $\Psi_4$ . . . . .	24
<b>3. Hoyo negro de Kerr</b>	<b>33</b>
3.1. Nociones preliminares del hoyo negro de Kerr . . . . .	33
3.2. Ecuación de perturbación para el hoyo negro de Kerr . . . . .	34
3.3. Formulación para una dimensión . . . . .	38
3.4. Formulación a primer orden . . . . .	43
<b>4. Solución Numérica</b>	<b>45</b>
4.1. Un poco de ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	45
4.2. Nociones preliminares de métodos numéricos . . . . .	48
4.3. Métodos numéricos para la ecuación de advección . . . . .	52
4.4. Métodos numéricos para la ecuación de onda . . . . .	55
4.5. Errores y estabilidad de métodos numéricos . . . . .	57
4.6. Métodos SSPRK . . . . .	59
<b>5. Código computacional y resultados</b>	<b>63</b>
5.1. <code>pertolin K</code> . . . . .	63
5.2. Resultados . . . . .	65
5.2.1. Caso no rotante . . . . .	65
5.2.2. Cambio de la onda gravitacional con la distancia . . . . .	67
5.2.3. Cambio de la onda gravitacional con la amplitud $A$ . . . . .	69
5.2.4. Cambio de la onda gravitacional con el ancho $s$ . . . . .	70
5.2.5. Cambio de la onda gravitacional con el momento angular por unidad de masa $a$ . . . . .	72
5.2.6. Cambio de la onda gravitacional con el número armónico $m$ . . . . .	74
<b>6. Conclusiones</b>	<b>77</b>

A. Clasificación de Petrov y Teorema de *peeling*

79

# Prefacio

En el presente trabajo se estudia las ondas gravitacionales emitidas por un hoyo negro rotante o de Kerr, perturbado. Haciendo hincapié en la relación entre las propiedades de la perturbación y del hoyo negro con la señal gravitacional emitida. Se dedujo las ecuaciones que describen el problema y se resolvieron numéricamente. Al principio del trabajo se muestra brevemente la deducción matemática de las ondas gravitacionales para el caso de campo débil gravitacional, se presenta la solución más sencilla que es la de ondas gravitacionales planas así como sus efectos sobre la materia. El marco matemático en el que se trabajará es el formalismo de tétradas nulas de Newman-Penrose, mostrando las generalidades de este formalismo y se deducirá detalladamente la ecuación del escalar de Weyl  $\Psi_4$  perturbado a primer orden en su caso general en términos de coeficientes espinoriales y escalares de Weyl.

Posteriormente se trabajará esa ecuación en un caso particular de un hoyo negro rotante en vacío con la elección de una tétrada nula, mostrando antes algunas propiedades físicas del hoyo negro de Kerr. Al sustituir la tétrada elegida en la ecuación se llega a una nueva ecuación en términos de derivadas parciales de las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  expresada como la suma de dos operadores, uno que describa la parte radial y temporal y un segundo que describe la parte puramente angular. Para el operador angular lo simplificaremos introduciendo los operadores  $\eth$  y  $\eth$ -barra ( $\eth, \bar{\eth}$ ) lo que nos permite expresar la solución en términos de armónicos esféricos de peso de espín  $Y_s^{l,m}(\theta, \phi)$ . Esto nos lleva a proponer una solución como combinación lineal de armónicos esféricos de peso de espín y funciones dependientes del radio, tiempo y los números armónicos  $l$  y  $m$ ,  $\sum R_{l,m} Y_{-2}^{l,m}$ . Vemos que el operador angular es eigenfunción de los operadores  $\eth$  y  $\eth$ -barra lo cual nos permite encontrar una solución en principio angularmente independiente pero ahora nos da un sistema de ecuaciones diferenciales infinito acoplado por el armónicos  $l$ . Introduciendo la solución propuesta a la ecuación a resolver e integramos sobre el ángulo sólido para usar la propiedad de ortonormalidad de los armónicos esféricos y así poder rescribir las ecuaciones en una forma que no dependa de los armónicos esféricos explícitamente. Finalmente llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado dependiente solo del radio y el tiempo, esto es la formulación 1-D. El sistema de ecuaciones a resolver lo haremos de forma numérica, pero antes se reducirá a un sistema de ecuaciones diferenciales a primer orden.

Se dará una breve descripción de ecuaciones diferenciales parciales y métodos numéricos. Haciendo hincapié en ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas como son la ecuación de advección y de onda, métodos de diferencias finitas y de Runge-Kutta. El sistema de ecuaciones se resolverá con el programa en Fortran 90 llamado `perolin K` que fue desarrollado por el grupo de relatividad numérica del Instituto de Ciencias Nucleares de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se presenta brevemente y de forma general la estructura del programa.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Ecuación de onda a partir de la teoría de campo débil

Alejados suficientemente de fuentes que generen curvatura el espacio-tiempo es plano, es decir, de Minkowski, entonces un campo débil gravitacional puede decirse que es aquel en el que el espacio-tiempo es casi plano. De esta manera expresamos al tensor métrico para campo débil gravitacional como:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (1.1)$$

esto es Minkowski más una pequeña perturbación.

Un aspecto importante que hay que tomar en cuenta para este desarrollo son las *transformaciones de Lorentz*, que en relatividad especial definen la forma de cambiar de sistema de referencia a otro, y están dadas por:

$$(\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.2)$$

de donde se tiene para un cambio de sistema de referencia  $x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} x^{\beta}$  y  $\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ . Si transformamos nuestro sistema de referencia encontramos que para la métrica se cumple:

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\mu}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\nu}} g_{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\mu}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\nu}} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \Lambda^{\alpha}_{\bar{\mu}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\nu}} h_{\alpha\beta} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (1.3)$$

donde definimos  $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \Lambda_{\bar{\mu}}^{\alpha} \Lambda_{\bar{\nu}}^{\beta} h_{\alpha\beta}$ .

Podemos entonces trabajar como si tuviéramos un espacio-tiempo plano con un término adicional  $h_{\mu\nu}$  definido en él y usar la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  para subir y bajar los índices. La única excepción a esta regla es el mismo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y esto es debido a que el término adicional lo consideraremos como un cambio a primer orden. Por tal motivo es necesario saber la forma explícita de  $g^{\mu\nu}$ . Definamos  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}$ , donde  $\gamma^{\mu\nu}$  también es una pequeña perturbación, con esto aprovechemos que  $g^{\mu\nu}$  por definición es el inverso de  $g_{\mu\nu}$  ( $g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}$ ), entonces:

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\alpha} = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\eta^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}) = \eta_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta}$$

como  $\eta_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\alpha}$  y  $h_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \approx 0$  por ser a primer orden, tenemos que:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} &= -\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \\ \Rightarrow \eta_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} &= -\eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \\ \Rightarrow \gamma^{\alpha\beta} &= -h^{\alpha\beta} \\ \Rightarrow g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ahora teniendo tanto  $g_{\mu\nu}$  como  $g^{\mu\nu}$  podemos obtener la expresiones para el tensor de Riemann y el tensor de Ricci en esta aproximación simplemente sustituyendo las expresiones obtenidas para la métrica en las definiciones y tomando todos los términos a primero orden. Para el tensor de Riemann tenemos:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}(\partial_{\beta}\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}\partial_{\mu}g_{\beta\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\beta}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\beta\mu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\beta\nu}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

y el tensor de Ricci se transforma:

$$R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \equiv R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^{\alpha}\partial_{\mu}h_{\nu\alpha} + \partial^{\alpha}\partial_{\nu}h_{\mu\alpha} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\mu\nu}) \tag{1.6}$$

donde  $h \equiv h_{\alpha}^{\alpha}$  es la traza de  $h_{\mu\nu}$ , y denotamos  $\partial^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}\partial_{\beta}$ . Es posible calcular el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  en campo débil de manera similar como se hizo con el tensor de

Riemann pero es más conveniente definir al tensor  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}h}{2}$  y escribir al tensor de Einstein en términos de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\nu\alpha} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) \quad (1.7)$$

utilizando las ecuaciones de Einstein podemos escribir:

$$\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\nu\alpha} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

Estas últimas ecuaciones (1.8) pueden ser simplificadas, para hacerlo consideremos un pequeño cambio de coordenadas arbitrario de la forma  $x^{\bar{\mu}} \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ , donde  $\xi^\mu$  es un vector pequeño en el sentido que  $|\partial_\nu \xi^\mu| \ll 1$ . La matriz jacobiana de cambio de coordenadas está dada por:

$$\Lambda_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} = \partial_\nu x^{\bar{\mu}} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \xi^\mu \quad (1.9)$$

y la transformación inversa (a primer orden)

$$\Lambda_{\bar{\mu}}^\nu = \delta_\mu^\nu - \partial_\mu \xi^\nu \quad (1.10)$$

La transformación de la métrica es  $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ , donde a primer orden es:

$$\begin{aligned} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= \Lambda_{\bar{\mu}}^\alpha \Lambda_{\bar{\nu}}^\beta g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \xi^\beta)(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &= \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} + \partial_\mu \xi^\alpha \partial_\nu \xi^\beta \eta_{\alpha\beta} - \partial_\nu \xi^\beta \delta_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} - \partial_\mu \xi^\alpha \delta_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} \\ &\quad + \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta h_{\alpha\beta} + \partial_\mu \xi^\alpha \partial_\nu \xi^\beta h_{\alpha\beta} - \partial_\nu \xi^\beta \delta_\mu^\alpha h_{\alpha\beta} - \partial_\mu \xi^\alpha \delta_\nu^\beta h_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

simplificando y eliminado los términos mayores a primer orden tenemos finalmente:

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (1.11)$$

Como solo es una transformación de coordenadas para cambios arbitrarios pero pequeños de  $\xi^\mu$  la naturaleza no se ve afectada si cambiamos nuestro sistema coordenado . Esto es llamado una *transformación de norma*, esta libertad está presente en toda la teoría de Einstein. Por tal motivo podemos hacer el siguiente cambio sin que se vea afectada la descripción física:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (1.12)$$

y en términos de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  y  $\bar{h}^{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \\ \bar{h}^{\mu\nu} &\rightarrow \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \end{aligned} \quad (1.13)$$

Podemos ahora usar la libertad de norma para simplificar las ecuaciones (1.8) escogiendo un vector arbitrario  $\xi^\beta$  que satisfaga la ecuación,

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\beta = \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} \quad (1.14)$$

Que esta ecuación puede ser siempre resuelta de forma sencilla partiendo de el hecho que es una ecuación de onda para  $\xi^\beta$  con una fuente dada por  $\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}$ . Derivando la ecuación (1.13) para  $\bar{h}^{\mu\nu}$  y utilizando la relación anterior encontramos que:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \bar{h}^{\nu\mu} &\rightarrow \partial_\nu (\bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha) \\ &= \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\nu \partial^\mu \xi^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \xi^\mu + \partial^\mu \partial_\alpha \xi^\alpha \\ &= \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\nu \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\mu \partial_\nu \xi^\nu = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Esto significa que siempre podemos encontrar una norma tal que la divergencia de  $\bar{h}_{\mu\nu}$  sea cero. Tal norma es conocida como *la norma de Lorentz* [1]. Si asumimos que estamos en la norma de Lorentz tenemos. Con lo cual las ecuaciones de Einstein (1.8) se reducen a:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

donde  $\square$  denota el operador de onda en espacio plano, es decir, es el operador de onda. Para el caso de vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) tenemos:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = (-\partial_t^2 + \nabla^2) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

Que es simplemente una ecuación de onda cuya velocidad de propagación es la velocidad de la luz ( $c = 1$ ). Por lo cual encontramos que pequeñas perturbaciones en el campo gravitacional se comportan como ondas propagándose en el espacio-tiempo a la velocidad de la luz, esto es, las ecuaciones predicen la existencia de ondas gravitacionales.

## 1.2. Ondas gravitacionales planas

La solución más sencilla para la ecuación (1.17) son ondas gravitacionales planas de la forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha), \quad (1.18)$$

donde definimos al tensor constante  $A_{\mu\nu}$  como el *tensor de amplitud* y  $k_\alpha$  el *vector de onda*. Sustituyendo en la ecuación de onda en vacío, es fácil encontrar que:

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = k_\mu k^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.19)$$

como  $\bar{h}_{\mu\nu}$  es arbitrario tenemos que  $k_\mu k^\mu = 0$ , esto implica que  $k^\mu$  es un vector nulo, lo que corrobora que las ondas gravitacionales se propagan a la velocidad de la luz. Y al sustituir la solución propuesta en la norma de Lorentz encontramos que:

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0. \quad (1.20)$$

esta condición de la norma de Lorentz nos indica que el tensor de amplitud es perpendicular al vector de onda.

Cuando imponemos la norma de Lorentz escogiendo un vector de transformación de norma específico  $\xi^\alpha$ , la única restricción que se debe cumplir es que  $\square \xi^\alpha = 0$ , entonces podemos sumar al vector  $\xi^\alpha$  cualquier otro vector  $\zeta^\alpha$  siempre y cuando también cumpla  $\square \zeta^\alpha = 0$ . En particular

escogemos  $\zeta^\alpha = B^\alpha \exp(ik_\nu x^\nu)$ , con  $k_\nu$  el vector de onda mencionado anteriormente y  $B^\alpha$  un vector constante arbitrario. Podemos tener ahora cuatro grados extra de libertad de norma. Como el espacio-tiempo es de cuatro dimensiones, el tensor de amplitud  $A_{\mu\nu}$  tiene  $2^4 = 16$  componentes. Pero al ser simétrico nos indica que hay seis componentes dependientes, la ortogonalidad con el vector de onda nos da otras cuatro componentes independientes y la condición de norma de Lorentz da otras cuatro; dejándonos solo dos componentes independientes del tensor de amplitud. De hecho podemos escoger siempre al tensor  $B^\alpha$  de forma tal que las siguientes condiciones se cumplan para  $A_{\mu\nu}$ :

$$A^\mu{}_\mu = 0, \quad A_{\mu\nu}u^\nu = 0. \quad (1.21)$$

para cualquier vector temporal unitario  $u^\nu$  (en particular una 4-velocidad constante). La primera condición indica que el tensor de amplitud no tiene traza lo que nos dice que en esta norma se cumple  $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$  y la segunda condición dice que es ortogonal a la 4-velocidad. Ahora si nos cambiamos a un sistema de referencia en donde  $u^\nu = (1, 0, 0, 0)$ , entonces las condiciones (1.20) y (1.21) implican que:

$$A_{\mu 0} = 0, \quad \sum_j A_{ij}k_j = 0, \quad \sum_j A_{jj} = 0. \quad (1.22)$$

Cualquier tensor que satisfaga estas condiciones se le conoce como *tensor transverso sin traza* (TT). Ya se vio que no tiene traza, y se llama transverso porque es puramente espacial y ortogonal a su propia dirección de propagación de las ondas. Si tomamos la dirección de propagación a lo largo del eje  $z$  (en coordenadas cartesianas), todas las condiciones mencionadas implican que  $A_{\mu\nu}$  tiene la forma:

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^+ & A^\times & 0 \\ 0 & A^\times & -A^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

donde  $A^+$  y  $A^\times$  son las componentes independientes [2]. Habiendo encontrado la solución general para ondas gravitacionales planas en la norma TT, la siguiente interrogante es conocer cual es su efecto físico sobre la materia. Pensemos en una onda gravitacional plana que viaja en la dirección  $z$  para que su tensor de amplitud sea de la forma de la ecuación (1.23), de esta manera tenemos  $A_{xx} = A^+$  y  $A_{xy} = A^\times$ . Consideremos una partícula libre que un tiempo después se encuentra con la onda gravitacional. Escojamos a la partícula inicialmente en reposo y un marco de referencia en donde se cumpla (1.21) para su 4-velocidad  $u^\mu$ . Una partícula libre obedece la ecuación geodésica:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0. \quad (1.24)$$

Como la partícula inicialmente está en reposo, el valor inicial de la aceleración es:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau}\Big|_{t=t_0} = -\Gamma_{tt}^\alpha = \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}(2\partial_t h_{t\beta} - \partial_\beta h_{tt}) \quad (1.25)$$

Pero por la ecuación (1.23), la componente  $h_{\beta 0}$  se anula, entonces inicialmente también la aceleración es nula. Esto significa que la partícula va a estar en reposo un instante después, y consecuentemente se mantendrá en reposo sin que la onda gravitacional la afecte. Sin embargo en “reposo” significa mantenerse constante en su posición coordenada. Para saber que le pasa realmente a la materia cuando está bajo el efecto de una onda gravitacional consideremos ahora dos partículas una cerca de la otra. Tomemos una en el origen de nuestro sistema de referencia y la otra a  $x = \epsilon$  y  $y = z = 0$  y las dos inicialmente en reposo. Ambas permanecerán en sus posiciones coordenadas y la distancia propia entre ellas es:

$$\Delta l = \int |ds^2|^{1/2} = \int |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} = \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{1/2} \approx |g_{xx}|^{1/2} \epsilon \approx \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}|_{x=0}\right] \epsilon \quad (1.26)$$

Como  $h_{xx}$  en general no es cero, la distancia propia (no distancia coordenada) cambia con el tiempo. Otra forma de ver el efecto de las ondas gravitacionales en la materia es utilizando la ecuación de desviación geodésica,

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \chi^\alpha = R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} u^\mu u^\nu \chi^\beta \quad (1.27)$$

que describe el comportamiento del vector  $\chi^\alpha$  que representa la distancia entre las partículas. Como suponemos que al inicio se cumple  $u = (1, 0, 0, 0)$  y  $\chi = (0, \epsilon, 0, 0)$ , entonces a primer orden para  $h_{\mu\nu}$  la ecuación (1.27) se reduce a:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \chi^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi^\alpha = \epsilon R^\alpha{}_{00x} = -\epsilon R^\alpha{}_{0x0} \quad (1.28)$$

$\tau = t$  porque estamos montados en el sistema de referencia de las partículas. Ahora usemos la ecuación (1.5) donde vemos que en este caso particular tenemos:

$$R^x{}_{txt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx},$$

$$\begin{aligned} R^y{}_{txt} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}, \\ R^y{}_{tyt} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{yy} = -R^x{}_{txt} \end{aligned} \quad (1.29)$$

y las demás componentes son cero. Esto quiere decir que las dos partículas inicialmente separadas en la dirección  $x$  tienen un vector de separación que obedece:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi^x = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi^y = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy} \quad (1.30)$$

Regresemos a la ecuación (1.26) vemos que  $\Delta l \approx d\chi$  con lo que tenemos:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} \approx \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ 1 + \frac{1}{2} h_{xx}|_{x=0} \right] \epsilon = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h_{xx}}{\partial t} \quad (1.31)$$

derivando de nuevo respecto al tiempo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h_{xx}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2} \quad (1.32)$$

este resultado es consistente con la ecuación (1.26). Por lo que la interacción de las ondas gravitacionales con la materia es de estirar y contraer el espacio tiempo (i.e. alejar y acercar a dos partículas) de manera oscilatoria. Las ecuaciones anteriores nos ayudan a describir la polarización de la onda gravitacional. Para ejemplificar lo anterior consideremos un anillo de partículas inicialmente en reposo en el plano  $x - y$  y suponemos que una onda gravitacional tiene  $h_{xx} \neq 0$  y  $h_{xy} = 0$ , entonces las partículas serán movidas (en términos de su distancia propia relativa de una con el centro) como lo muestra la figura 1.1b, primero hacía dentro y luego hacia afuera, conforme la onda gravitacional oscila y  $h_{xx}$  cambia de signo.

Si ahora la onda gravitacional tiene  $h_{xy} \neq 0$  y  $h_{xx} = h_{yy} = 0$ , entonces el anillo será movido como lo muestra la figura 1.1c. Como  $h_{xy}$  y  $h_{xx}$  son independientes, 1.1b y 1.1c nos dan una representación pictórica de dos diferentes polarizaciones lineales. Notemos que los dos estados de polarización simplemente están rotados  $45^\circ$  uno del otro. Esto contrasta con la polarización de las ondas electromagnéticas que lo están a  $90^\circ$ . Este patrón de polarización es debido a que estamos representando a la gravedad con un tensor de segundo grado simétrico  $h_{\mu\nu}$  [3].

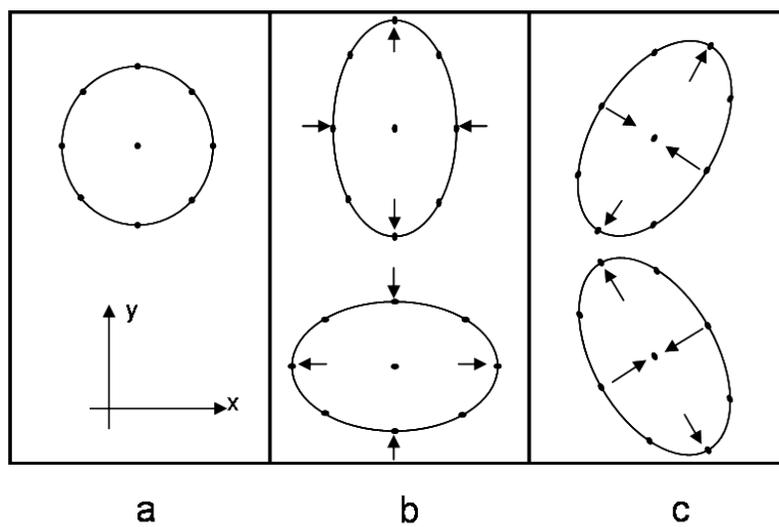


Figura 1.1: (a) Un anillo circular de partículas libres. . (b) Deformaciones del anillo producido por una polarización  $A^+$  de una onda gravitacional viajando en dirección  $z$ . (c) Deformaciones del anillo producido por una polarización  $A^\times$  de la misma onda gravitacional.



## Capítulo 2

# Formalismo de tétradas

### 2.1. Formulación matemática de las tétradas nulas

Comúnmente la forma de tratar problemas en relatividad general es manejando a las ecuaciones de Einstein en un sistema coordenado local adaptado de la mejor forma para cada problema en específico. Sin embargo en algunos casos es mucho más ventajoso trabajar eligiendo cuatro vectores linealmente independientes. A estos cuatro vectores se les conoce *tétrada*. A continuación presentaremos de forma breve las ideas básicas del formalismo matemático de la tétrada de vectores.

Empecemos eligiendo cuatro vectores linealmente independientes contravariantes  $Z^\mu_a$ , donde el índice  $\mu$  corresponde a las componentes del vector ( $\mu=0,1,2,3$ ) y el índice  $a = 1, 2, 3, 4$  es la etiqueta del vector de la tétrada. Asociados a los cuatro vectores  $Z_a^\mu$  se tienen cuatro vectores covariantes. Los cuales están relacionados de la siguiente manera:

$$Z_{a\mu} = g_{\mu\nu} Z_a^\nu \quad \text{donde } g_{\mu\nu} \text{ es el tensor métrico} \quad (2.1)$$

También se define a  $Z_\mu^a$  como al inverso de la matriz  $[Z_a^\mu]$  (donde el índice de la tétrada corresponde a las a las filas y el índice de coordenadas a las columnas) que cumple las siguientes condiciones:

$$Z_a^\mu Z_\mu^b = \delta_a^b \quad \text{y} \quad Z^\mu_a Z_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad (2.2)$$

También asumamos la siguiente condición:

$$Z_a^\mu Z_{b\mu} = \eta_{ab} \quad (2.3)$$

Donde  $\eta_{ab}$  es un tensor simétrico ( $\eta_{ab} = \eta_{ba}$ ) constante. Al tensor  $\eta_{ab}$  lo usaremos para subir y bajar índices de tetrada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\eta_{ab}Z_\mu^a &= Z_a^\nu Z_{b\nu}Z_\mu^a = \delta_\mu^\nu Z_{b\nu} = Z_{b\mu} \\ \eta^{ab}Z_{a\mu} &= Z^{a\nu}Z_\nu^b Z_{a\mu} = \delta_\mu^\nu Z_\nu^b = Z_\mu^b \\ \eta^{ab}\eta_{bc} &= Z^{a\mu}Z_\mu^b Z_b^\nu Z_{c\nu} = \delta_\mu^\nu Z^{a\mu}Z_{c\nu} = \delta_c^a\end{aligned}\tag{2.4}$$

dado un vector o tensor en componentes de coordenadas se puede proyectar en los vectores  $Z^\mu_a$  para conocer sus componentes en el sistema de la tetrada, teniendo:

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= Z^a_\mu Z^b_\nu T_{ab} = Z^a_\mu T_{a\nu}, \\ T_{ab} &= Z_a^\mu Z_b^\nu T_{\mu\nu} = Z_a^\mu T_{\mu b},\end{aligned}\tag{2.5}$$

De las dos ecuaciones anteriores se puede ver que es posible pasar sin problemas de componentes con índices de coordenadas a componentes con índices de tetrada y viceversa, lo cual nos va ser muy útil más adelante.

Por otro lado, los vectores contravariantes  $\mathbf{Z}_a$  considerados como vectores tangentes en una variedad definen la derivada direccional:

$$\mathbf{Z}_a = Z_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu};\tag{2.6}$$

donde tenemos para una función escalar  $\phi$ :

$$\phi_{,a} = \mathbf{Z}_a\phi = Z_a^\mu \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = Z_a^\mu \phi_{,\mu},\tag{2.7}$$

y de forma más general:

$$T_{\lambda\tau,a} = \mathbf{Z}_a T_{\lambda\tau} = Z_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\lambda\tau} = Z_a^\mu \partial_\mu T_{\lambda\tau}\tag{2.8}$$

También definiremos a la derivada covariante (denotado como ";") de un vector de la tétrada proyectado en dos vectores de la misma tétrada como:

$$\gamma_{abc} = Z_a^\mu Z_{b\mu;\nu} Z_c^\nu \quad (2.9)$$

A las cantidades  $\gamma_{abc}$  se les conoce como *coeficientes de rotación de Ricci* y en esta descripción juegan el papel de los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ . Notemos que por la misma definición de  $\gamma_{abc}$ , si tiene la relación  $\eta_{ab,c} = \gamma_{abc} + \gamma_{bac} = 0$  (porque  $\eta_{ab}$  es constante) donde la coma en los índices quiere decir derivada parcial, implica que son antisimétricos en los dos primeros índices  $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$ .

Por último podemos definir operadores como derivadas direccionales en dirección a cada vector de la tétrada.

$$\mathbf{D} = Z_a^\mu \partial_\mu, \quad \mathbf{\Delta} = Z_b^\mu \partial_\mu, \quad \delta = Z_c^\mu \partial_\mu, \quad \delta^* = Z_d^\mu \partial_\mu. \quad (2.10)$$

## 2.2. El formalismo de Newman-Penrose

El formalismo de Newman-Penrose es un formalismo de tétradas con la condición de que está normalizada, esto quiere decir, que la norma de cada uno de los vectores es cero  $Z_a^\mu Z_{a\mu} = 0$  [4] [5]. Usaremos la siguiente forma de expresar al tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = 2\eta^{ab}(Z_{a(\mu} Z_{b\nu)}) \quad (2.11)$$

A dos vectores de la tétrada  $Z_1^\mu, Z_2^\mu$  los elegimos alineados en dirección del cono de luz apuntando hacia el futuro. Un punto importante es notar que como ambos apuntan hacia el futuro, el signo de la normalización depende de la signatura que se elija. Si la signatura usada es  $+, -, -, -$  la normalización será  $\eta_{12} = +1$  y si la signatura es  $-, +, +, +$  la normalización será  $\eta_{12} = -1$ . La elección de la signatura no depende de la física de la naturaleza, es más bien un asunto de la convención usada en el formalismo matemático. Si se trabaja con cuidado con una signatura las soluciones son completamente equivalentes. Nosotros trabajaremos con la signatura  $-, +, +, +$ . El primer vector  $Z_1^\mu$  lo tomaremos apuntando hacia afuera de la fuente un cono de luz y lo denotaremos  $l^\mu$ , el otro vector  $Z_2^\mu$  apunta hacia adentro de la fuente y lo denotaremos  $k^\mu$ .

Los otros dos vectores de la tétrada  $Z_3^\mu, Z_4^\mu$  los tomamos perpendiculares a los dos anteriores. Los elegimos de tal manera que se cumpla la condición  $Z_3^\mu Z_{4\mu} = \eta_{34}$  y también  $\eta_{34} = -\eta_{12}$ . En este formalismo se toman a estos dos vectores de forma tal que uno de estos vectores sea el complejo conjugado del otro. Al vector  $Z_3^\mu$  lo denotaremos como  $m^\mu$  y al vector  $Z_4^\mu$  como  $m^{*\mu}$  (donde el asterisco denota complejo conjugado). Dadas las condiciones anteriores sobre la tétrada,

la representación matricial del tensor  $\eta_{ab}$  que queda de la siguiente forma:

$$[\eta_{ab}] = [\eta^{ab}] = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} & 0 & 0 \\ \eta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_{12} \\ 0 & 0 & -\eta_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Ya que tenemos los vectores de la tétrada y sabemos como están relacionas unos con otros, el siguiente paso es conocer como son los coeficientes de rotación de Ricci. El número total de combinaciones posibles para los coeficientes de rotación de Ricci es de  $4^3 = 64$ , porque hay tres índices con cuatro posibles valores. Por simplicidad nos gustaría poder reducirlos al mínimo sin perder información, por tal motivo buscaremos los que sean linealmente dependientes usando sus propiedades generales. Primero, dado que son antisimétricos en los dos primeros índices,  $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$ , implica que podemos eliminar 40 de ellos. Haciendo esta eliminación tenemos como resultante el siguiente conjunto de 24 coeficientes de rotación de Ricci:

$$\begin{array}{cccccc} \gamma_{211} & \gamma_{231} & \gamma_{241} & \gamma_{311} & \gamma_{341} & \gamma_{411} \\ \gamma_{212} & \gamma_{232} & \gamma_{242} & \gamma_{312} & \gamma_{342} & \gamma_{412} \\ \gamma_{213} & \gamma_{233} & \gamma_{243} & \gamma_{313} & \gamma_{343} & \gamma_{413} \\ \gamma_{214} & \gamma_{234} & \gamma_{244} & \gamma_{314} & \gamma_{344} & \gamma_{414} \end{array}$$

Por otro lado como los índices de tétrada 3 y 4 son índices correspondientes a los vectores complejos, podemos usar la propiedad de que el complejo conjugado de cualquier coeficiente de rotación de Ricci se obtiene simplemente sustituyendo el índice 3 (no importando donde se ubique) por 4 y viceversa, por ejemplo  $\gamma_{324} = (\gamma_{423})^*$ . Esto nos permite reducir a catorce los coeficientes de rotación de Ricci, con lo que nos queda:

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{211} & \gamma_{241} & \gamma_{311} & \gamma_{341} \\ \gamma_{212} & \gamma_{242} & \gamma_{312} & \gamma_{342} \\ \gamma_{213} & \gamma_{243} & \gamma_{313} & \\ & \gamma_{244} & \gamma_{314} & \gamma_{344} \end{array}$$

Ahora notemos que  $\gamma_{211} = (\gamma_{211})^*$  y  $\gamma_{212} = (\gamma_{212})^*$  lo que quiere decir que  $\gamma_{211}$  y  $\gamma_{212}$  son funciones reales. Y también que  $(\gamma_{341})^* = \gamma_{431} = -\gamma_{341}$  y  $(\gamma_{342})^* = \gamma_{432} = -\gamma_{342}$ , entonces  $(\gamma_{341})^*$  y  $(\gamma_{342})^*$  son funciones puramente imaginarias. Dado que tenemos dos funciones reales y dos imaginarias podemos, haciendo una combinación lineal adecuada, tener dos funciones complejas. Con esto reducimos a doce el número de coeficientes linealmente independientes, los cuales se designan con símbolos especiales llamados *coeficientes espinoriales*, que son:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \gamma_{311} = m^\mu l_{\mu;\nu} l^\nu & \tau &= \gamma_{312} = m^\mu l_{\mu;\nu} k^\nu \\
\sigma &= \gamma_{313} = m^\mu l_{\mu;\nu} m^\nu & \rho &= \gamma_{314} = m^\mu l_{\mu;\nu} m^{*\nu} \\
\pi &= \gamma_{241} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} l^\nu & \nu &= \gamma_{242} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} k^\nu \\
\mu &= \gamma_{243} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} m^\nu & \lambda &= \gamma_{244} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} m^{*\nu} \\
\epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) l^\nu \\
\gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) k^\nu \\
\beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) m^\nu \\
\alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) m^{*\nu}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Notemos que estamos usando en la definición de  $\alpha$  a  $\gamma_{214}$  y en la de  $\beta$  a  $\gamma_{343}$  que ya habíamos eliminado, su inclusión es por pura convención.

Otra definición importante en este formalismo de tétradas es el paréntesis o conmutador de Lie,  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = XY - YX$ , que también es un vector tangente, por lo cual lo podemos representar en términos de la base  $\mathbf{Z}_a$

$$[\mathbf{Z}_a, \mathbf{Z}_b] = C^c{}_{ab} \mathbf{Z}_c \tag{2.14}$$

Los coeficientes  $C^c{}_{ab}$  son conocidos como *constantes de estructura* y son antisimétricos en los índices  $a$  y  $b$ , por lo que tenemos 24 coeficientes independientes. Las constantes de estructura pueden ser expresadas en términos de los coeficientes de rotación de Ricci  $\gamma_{abc}$  de la siguiente forma: apliquemos el paréntesis de Lie sobre una función escalar  $f$ .

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Z}_a, \mathbf{Z}_b] f &= Z_a^\mu [Z_b^\nu f_{,\nu}]_{,\mu} - Z_b^\mu [Z_a^\nu f_{,\nu}]_{,\mu} = [Z_a^\mu Z_b^\nu{}_{;\mu} - Z_b^\mu Z_a^\nu{}_{;\mu}] f_{,\nu} \\
&= [-\gamma_b{}^\nu{}_a + \gamma_a{}^\nu{}_b] f_{,\nu} = [-\gamma_b{}^c{}_a + \gamma_a{}^c{}_b] e_c{}^\nu f_{,\nu}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

comparando con la ecuación (2.14) tenemos

$$C^c{}_{ab} = \gamma^c{}_{ba} - \gamma^c{}_{ab} \tag{2.16}$$

La ecuación (2.14) escrita explícitamente con las constantes de estructura expresadas en términos de los coeficientes rotacionales define las *relaciones de conmutación*.

Veamos como se aplica el paréntesis de Lie a los operadores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{\Delta}$ ,  $\delta$  y  $\delta^*$

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Delta}, \mathbf{D}] &= [\mathbf{k}, \mathbf{l}] = [Z_2, Z_1] = (\gamma_{c12} - \gamma_{c21}) \mathbf{Z}^c \\ &= -\gamma_{121} \mathbf{Z}^1 + \gamma_{212} \mathbf{Z}^2 + (\gamma_{312} - \gamma_{321}) \mathbf{Z}^3 + (\gamma_{412} - \gamma_{421}) \mathbf{Z}^4 \\ &= \gamma_{121} \mathbf{\Delta} - \gamma_{212} \mathbf{D} + (\gamma_{312} - \gamma_{321}) \delta^* + (\gamma_{412} - \gamma_{421}) \delta \end{aligned} \quad (2.17)$$

si expresamos a la ecuación (2.17) en términos de los coeficientes espinoriales tenemos

$$[\mathbf{\Delta}, \mathbf{D}] = (\gamma + \gamma^*) \mathbf{D} + (\epsilon + \epsilon^*) \mathbf{\Delta} - (\tau^* + \pi) \delta - (\tau + \pi^*) \delta^*. \quad (2.18)$$

De manera similar, tenemos para los otros operadores

$$[\delta, \mathbf{D}] = -(\alpha^* + \beta - \pi^*) \mathbf{D} - \kappa \mathbf{\Delta} + (\rho^* + \epsilon - \epsilon^*) \delta + \sigma \delta^*, \quad (2.19)$$

$$[\delta^*, \mathbf{\Delta}] = \nu \mathbf{D} - (\tau^* - \alpha - \beta^*) \mathbf{\Delta} - \lambda \delta - (\mu^* - \gamma^* + \gamma) \delta^*, \quad (2.20)$$

$$[\delta^*, \delta] = -(\mu^* - \mu) \mathbf{D} - (\rho^* - \rho) \mathbf{\Delta} - (\alpha - \beta^*) \delta - (\beta - \alpha^*) \delta^* \quad (2.21)$$

### 2.3. Los tensores de Riemann y Weyl en el formalismo de Newman-Penrose

El tensor de Riemann  $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$  cumple las propiedades simetría en la primera pareja de índices  $\alpha\beta$  con la segunda  $\mu\nu$ , antisimetría con los dos primeros  $\alpha\beta \rightarrow \beta\alpha$  y dos últimos índices  $\mu\nu \rightarrow \nu\mu$ , la propiedad cíclica y la identidad de Bianchi:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} &= 0 \\ R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.3. LOS TENSORES DE RIEMANN Y WEYL EN EL FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE<sup>21</sup>

Usaremos la definición del tensor de Riemann en términos de conmutación de las derivadas covariantes de la tétrada de vectores:

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} Z_a^\sigma = Z_{a\mu;\nu\lambda} - Z_{a\mu;\lambda\nu} \quad (2.23)$$

Ahora veremos la representación del tensor de Riemann en términos del formalismo de tétradas. Notemos que recordando la definición  $\gamma_{abc} = Z_a^\mu Z_{b\mu;\nu} Z_c^\nu$ , implica que:

$$\gamma_{bac} Z_\mu^b Z_\nu^c = (Z_b^\mu Z_\mu^b) Z_{a\mu;\nu} (Z_c^\nu Z_\nu^c) = Z_{a\mu;\nu} \quad (2.24)$$

entonces:

$$Z_{a\mu;\nu\lambda} = (\gamma_{bac} Z_\mu^b Z_\nu^c)_{;\lambda} = \gamma_{bac;\lambda} (Z_\mu^b Z_\nu^c) + \gamma_{bac} (Z_\mu^b Z_\nu^c)_{;\lambda} + Z_\mu^b Z_\nu^c{}_{;\lambda}$$

pero  $R_{ade f} = (R_{\sigma\mu\nu\tau} Z_a^\sigma) Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda = (Z_{a\mu;\nu\lambda} - Z_{a\mu;\lambda\nu}) Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda$ . Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned} Z_{a\mu;\nu\lambda} Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda &= Z_f^\lambda \gamma_{bac;\lambda} (Z_d^\mu Z_\mu^b) (Z_e^\nu Z_\nu^c) + \gamma_{bac} \eta^{bm} Z_d^\mu Z_{\mu m;\lambda} Z_f^\lambda (Z_e^\nu Z_\nu^c) \\ &+ \gamma_{bac} \eta^{cm} Z_e^\nu Z_{\nu m;\lambda} Z_f^\lambda (Z_d^\mu Z_\mu^b) = \gamma_{dae,f} + \eta^{bm} \gamma_{bae} \gamma_{dmf} + \eta^{cm} \gamma_{dac} \gamma_{emf} \\ &= \gamma_{dae,f} + \eta^{nm} (\gamma_{nae} \gamma_{dmf} + \gamma_{dan} \gamma_{emf}) \end{aligned}$$

De forma análoga obtenemos:  $Z_{a\mu;\lambda\nu} Z_d^\mu Z_e^\nu Z_f^\lambda = \gamma_{daf,e} + \eta^{nm} (\gamma_{naf} \gamma_{dme} + \gamma_{dan} \gamma_{fme})$ . De las dos expresiones anteriores tenemos para el tensor de Riemann:

$$R_{ade f} = \gamma_{dae,f} - \gamma_{daf,e} + \eta^{nm} (\gamma_{nae} \gamma_{dmf} - \gamma_{naf} \gamma_{dme} + \gamma_{dan} (\gamma_{emf} - \gamma_{fme}))$$

Haciendo los cambios de índices  $d \rightarrow b$ ,  $e \rightarrow f$  y  $f \rightarrow d$  finalmente tenemos:

$$R_{abcd} = -\gamma_{abc,d} + \gamma_{abd,c} + \eta^{nm} (\gamma_{abn} (\gamma_{dmc} - \gamma_{cmd}) + \gamma_{and} \gamma_{bmc} - \gamma_{anc} \gamma_{bmd}) \quad (2.25)$$

Notemos que hicimos en cambio  $\gamma_{dae;f} \rightarrow \gamma_{dae,f}$ , esto es válido porque la derivada covariante aplicada a un escalar se reduce a la derivada parcial y  $\gamma_{abc}$  es un escalar. Por notación tomamos  $\gamma_{abc,d} = Z_d^\mu \partial_\mu \gamma_{abc}$ .

Otras dos cantidades fundamentales en Relatividad General son el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el escalar de curvatura  $R$ . La representación del tensor de Ricci y del escalar de curvatura en este formalismo, estos están dados por:

$$R_{ac} = \eta^{bd} R_{abcd}, \quad \text{y} \quad R = \eta^{ab} R_{ab} = 2(R_{12} - R_{34}). \quad (2.26)$$

Otro tensor de gran importancia es el tensor de Weyl, que se define como el tensor de Riemann sin su traza. Su representación en cuatro dimensiones es:

$$C_{\mu\nu\lambda\tau} = R_{\mu\nu\lambda\tau} - \frac{1}{2} (g_{\mu\lambda} R_{\nu\tau} + g_{\nu\tau} R_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda} R_{\mu\tau} - g_{\mu\tau} R_{\nu\lambda}) + \frac{1}{6} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau} g_{\nu\lambda}) R \quad (2.27)$$

El tensor de Riemann en términos del tensor de Weyl proyectado en la tétrada da como resultado:

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\lambda Z_d^\tau = R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2} (\eta_{ac} R_{bd} + \eta_{bd} R_{ac} - \eta_{bc} R_{ad} - \eta_{ad} R_{bc}) - \frac{1}{6} (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}) R \quad (2.28)$$

Despejando tenemos la expresión del tensor de Weyl en términos de la tétrada.

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2} (\eta_{ac} R_{bd} + \eta_{bd} R_{ac} - \eta_{bc} R_{ad} - \eta_{ad} R_{bc}) - \frac{1}{6} (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}) R \quad (2.29)$$

El tensor de Weyl hereda todas las propiedades de intercambio de índices del tensor de Riemann (ecuaciones (2.22)) entonces también tiene por construcción 236 componentes dependientes (no sabemos en principio si también tiene 20 componentes independientes). Pero la propiedad de que no tiene traza implica que:

### 2.3. LOS TENSORES DE RIEMANN Y WEYL EN EL FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE 23

$$\eta^{ad}C_{abcd} = C_{1bc2} + C_{2bc1} - C_{3bc4} - C_{4bc3} = 0 \quad (2.30)$$

cuando se cumple  $b = c$  obtenemos,

$$C_{1314} = C_{2324} = C_{1332} = C_{1442} = 0 \quad (2.31)$$

y cuando  $b \neq c$  junto con la propiedad cíclica,  $C_{1234} + C_{1342} + C_{1423} = 0$ , tenemos,

$$\begin{aligned} C_{1231} = C_{1334}; \quad C_{1212} = C_{3434}; \quad C_{1242} = C_{2434}; \\ C_{1241} = C_{1443}; \quad C_{1232} = C_{2343}; \\ C_{1342} = \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Lo que nos elimina diez componentes del tensor de Weyl donde solo son necesarias cinco funciones complejas. En el formalismo de Newman-Penrose, las diez componentes independientes del tensor de Weyl se representan con cinco escalares complejos *llamados escalares de Weyl* :

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu l^\lambda m^\tau \\ \Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu k^\nu l^\lambda m^\tau \\ \Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu m^{*\lambda} k^\tau \\ \Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu k^\nu m^{*\lambda} k^\tau \\ \Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{\mu\nu\lambda\tau} k^\mu m^{*\nu} k^\lambda m^{*\tau}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dadas las simetrías del tensor de Weyl, y las que vienen directo de las relaciones de conjugación, cambiar 3 por 4 y viceversa en las definiciones, las siguientes relaciones también se cumplen:

$$C_{1334} = \Psi_1; \quad C_{1212} = C_{3434} = -(\Psi_2 + \Psi_2^*); \quad C_{1234} = (\Psi_2 - \Psi_2^*); \quad C_{2443} = \Psi_3. \quad (2.34)$$

Con las definiciones hechas podemos obtener expresiones de las derivadas direccionales actuando sobre los coeficientes espinoriales y los escalares de Weyl, para así derivar una ecuación que describa algún problema físico de interés. Usaremos las proyecciones sobre la tétrada de la identidad de Bianchi  $R_{\mu\nu\lambda\tau;\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\lambda;\tau} + R_{\mu\nu\tau\sigma;\lambda} = 0$ , y tomaremos en cuenta la derivada intrínseca del tensor de Riemann, donde la derivada intrínseca se define como la proyección de todas las componentes de la derivada covariante sobre la tétrada.  $R_{\mu\nu\lambda\tau;\sigma} Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\lambda Z_d^\tau Z_e^\sigma = R_{abcd|e}$ , esto es [6]:

$$R_{abcd|e} = R_{abcd,e} - \eta^{nm} (\gamma_{nae} R_{mbcd} + \gamma_{nbe} R_{amcd} + \gamma_{nce} R_{abmd} + \gamma_{nde} R_{abcm}). \quad (2.35)$$

## 2.4. La ecuación perturbada de $\Psi_4$

Nuestro interés se va a centrar en el escalar de Weyl  $\Psi_4$  perturbado. Por tal motivo vamos a derivar explícitamente las proyecciones en la tétrada necesarias. Estas son dos ecuaciones con operadores direccionales y coeficientes espinoriales actuando en los escalares de Weyl  $\Psi_3$  y  $\Psi_4$ . También las proyecciones del tensor de Riemann en la tétrada para obtener la acción de operadores sobre los coeficientes espinoriales  $\nu$  y  $\lambda$ . Vamos a perturbar las ecuaciones a primer orden y haremos actuar los operadores en las dos primeras ecuaciones, las sumaremos y mostraremos que los operadores actuando sobre el escalar de Weyl  $\Psi_3$  se anulan. Usando las proyecciones del tensor de Riemann que dan la acción del operador  $\Delta$  en los coeficientes espinoriales  $\alpha$  y  $\pi$ , y el operador  $\delta^*$  actuando sobre  $\gamma$  y  $\mu$ , todo esto para terminar con una expresión que nos da el comportamiento del escalar de Weyl perturbado  $\Psi_4^{(1)}$  (el super índice (1) denota que es un término perturbado a primer orden). Dejaremos el término  $\eta_{12}$  en todas las ecuaciones con el propósito de tener expresiones generales sin importar que signatura que se elija.

Comencemos con las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = K (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \quad (2.36)$$

que en términos del formalismo de la tétrada se representan como:

$$R_{ab} = K (T_{ab} - \eta_{ab} \eta^{12} (T_{12} - T_{34})) \quad (2.37)$$

donde tomamos  $K = \frac{8\pi G}{c^4}$ ,  $T_{ab}$  como el tensor de energía-momento. Comencemos con la identidad de Bianchi 42[21|4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} (R_{4221|4} + R_{4242|1} + R_{4214|2} - R_{4212|4} - R_{4224|1} - R_{4241|2}) &= 0. \\ \Rightarrow R_{4221|4} + R_{4242|1} + R_{4214|2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Usando la ecuación (2.28),

$$\begin{aligned} &R_{4221|4} + R_{4242|1} + R_{4214|2} \\ &= C_{4221|4} + \frac{1}{2} (\eta_{42} R_{21|4} + \eta_{21} R_{42|4} - \eta_{22} R_{41|4} - \eta_{41} R_{22|4}) - \frac{1}{6} (\eta_{42} \eta_{21} - \eta_{42} \eta_{22}) R \\ &+ C_{4214|2} + \frac{1}{2} (\eta_{41} R_{42|2} + \eta_{24} R_{42|2} - \eta_{21} R_{44|2} - \eta_{44} R_{21|2}) - \frac{1}{6} (\eta_{41} \eta_{24} - \eta_{44} \eta_{21}) R \\ &+ C_{4242|1} + \frac{1}{2} (\eta_{44} R_{22|1} + \eta_{22} R_{44|1} - \eta_{24} R_{42|1} - \eta_{42} R_{24|1}) - \frac{1}{6} (\eta_{44} \eta_{22} - \eta_{42} \eta_{24}) R \\ &= C_{4221|4} + C_{4242|1} + \frac{1}{2} \eta_{12} (R_{42|4} - R_{44|2}) = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Llegamos a este resultado tomando en cuenta que las únicas componentes no nulas de  $\eta^{nm}$  son  $\eta^{12} = \eta^{21} = -\eta^{34} = -\eta^{43}$ . Por otro lado usando la definición de la derivada intrínseca (2.35), tenemos para las componentes del tensor de Weyl :

$$\begin{aligned}
C_{4221|4} &= C_{4221,4} - \eta^{nm}(\gamma_{n44}C_{m221} + \gamma_{n24}C_{4m21} + \gamma_{n24}C_{42m1} + \gamma_{n14}C_{422m}) \\
&= C_{4221,4} - \eta^{12}(\gamma_{124}C_{4221} + \gamma_{124}C_{4221} + \gamma_{244}C_{1221} - \gamma_{344}C_{4221} - \gamma_{314}C_{4224} - \gamma_{424}C_{4321} \\
&\quad - \gamma_{424}C_{4231} + \gamma_{214}C_{4221}) = C_{4221,4} - \eta^{12}(-2\alpha\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 - \rho\Psi_4). \\
&\Rightarrow C_{4221|4} = \delta^*\Psi_3 - \eta^{12}(-2\alpha\Psi_3 + 3\lambda\Psi_2 - \rho\Psi_4).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Usando el procedimiento anterior tenemos para  $C_{4242|1}$ :

$$C_{4242|1} = -\mathbf{D}\Psi_4 - \eta^{12}(4\epsilon\Psi_4 - 4\pi\Psi_3). \tag{2.41}$$

Para las derivadas intrínsecas del tensor de Ricci  $R_{42|4}$  y  $R_{44|2}$ :

$$\begin{aligned}
R_{42|4} &= K(T_{42|4} - \eta_{42}\eta^{12}(T_{12} - T_{34})) + \eta_{42}\Lambda \\
&= KT_{42|4} \\
R_{44|2} &= KT_{44|2}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Entonces sustituyendo las expresiones anteriores de la derivada intrínseca del tensor de Ricci en la ecuación (2.39) vemos que se reduce a:

$$C_{4221|4} + C_{4242|1} + \frac{K}{2}\eta_{12}(T_{42|4} - T_{44|2}) = 0. \tag{2.43}$$

Ahora para las derivadas intrínsecas del tensor de energía-momento:

$$\begin{aligned}
T_{42|4} - T_{44|2} &= (T_{42,4} - \eta^{nm}(\gamma_{n44}T_{m2} + \gamma_{n24}T_{4m})) - (T_{44,2} - \eta^{nm}(\gamma_{n42}T_{m4} + \gamma_{n42}T_{4m})) \\
&= T_{42,4} - T_{44,2} - \eta^{12}(\gamma_{144}T_{42} + \gamma_{124}T_{42} - 2\gamma_{142}T_{24} + \gamma_{244}T_{12} \\
&\quad - 2\gamma_{242}T_{14} - \gamma_{344}T_{42} - \gamma_{324}T_{44} + 2\gamma_{342}T_{44} - \gamma_{424}T_{43}) \\
&= T_{42,4} - T_{44,2} - \eta^{12}(-\sigma^*T_{22} + \lambda T_{12} - 2\nu T_{14} + \lambda T_{34} + (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)T_{44} + (-2\alpha + 2\tau^*)T_{24})
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de índices:  $1 \rightarrow l$ ,  $2 \rightarrow k$ ,  $3 \rightarrow m$  y  $4 \rightarrow m^*$  en la expresión anterior nos queda:

$$T_{42|4} - T_{44|2} = \delta^* T_{km^*} - \Delta T_{m^*m^*} - \eta^{12} (-\sigma^* T_{kk} + \lambda T_{lk} - 2\nu T_{lm^*} + \lambda T_{mm^*} + (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*) T_{m^*m^*} + (-2\alpha + 2\tau^*) T_{km^*}) \quad (2.44)$$

Sustituyendo (2.40), (2.41) y (2.44) en (2.43), tenemos finalmente una expresión explícita para la identidad de Bianchi 42[21|4],

$$(\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha + 2\pi)) \Psi_3 - (\mathbf{D} - \eta_{12}(\rho - 4\epsilon)) \Psi_4 - 3\eta_{12} \lambda \Psi_2 = -\eta_{12} \frac{K}{2} ((\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha - \tau^*)) T_{km^*} - (\Delta + \eta_{12}(\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)) T_{m^*m^*} - \eta_{12} \lambda T_{lk} + \eta_{12} \sigma^* T_{kk} + 2\eta_{12} \nu T_{lm^*} - \eta_{12} \lambda T_{mm^*}). \quad (2.45)$$

De forma similar obtenemos la identidad de Bianchi 42[43|2],

$$(\Delta + 2\eta_{12}(2\mu + \gamma)) \Psi_3 - (\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau)) \Psi_4 - 3\eta_{12} \nu \Psi_2 = \eta_{12} \frac{K}{2} ((\Delta + 2\eta_{12}(\mu^* + \gamma)) T_{km^*} - (\delta^* + \eta_{12}(2\alpha + 2\beta^* - \tau^*)) T_{kk} - \eta_{12} \nu T_{lk} - \eta_{12} \nu T_{mm^*} - \eta_{12} \nu^* T_{m^*m^*} + 2\eta_{12} \lambda T_{km}). \quad (2.46)$$

la 42[13|2]:

$$(\Delta + 3\eta_{12}\mu) \Psi_2 - (\delta + 2\eta_{12}(\beta - \tau)) \Psi_3 - \eta_{12} \sigma \Psi_4 - 2\eta_{12} \nu \Psi_1 = \eta_{12} \frac{K}{2} (-(\mathbf{D} - \eta_{12}(\rho^* - 2\epsilon - 2\epsilon^*)) T_{kk} + (\delta + 2\eta_{12}(\beta + \pi^*)) T_{km^*} - \eta_{12} \lambda^* T_{m^*m^*} + 2\eta_{12} \pi T_{km} - \frac{1}{3}(\Delta + 3\eta_{12}\mu) T_{lk} + \frac{1}{3}(\Delta - 3\eta_{12}\mu) T_{mm^*}). \quad (2.47)$$

y la 42[13|4]:

$$(\delta^* + 3\eta_{12}\pi) \Psi_2 - (\mathbf{D} - 2\eta_{12}(\rho - \epsilon)) \Psi_3 - \eta_{12} \kappa \Psi_4 - 2\eta_{12} \lambda \Psi_1 = \eta_{12} \frac{K}{2} (-(\mathbf{D} - 2\eta_{12}(\rho^* - \epsilon)) T_{km^*} + (\delta - \eta_{12}(2\alpha^* - 2\beta - \pi^*)) T_{m^*m^*} - \eta_{12} \kappa^* T_{kk} - 2\eta_{12} \mu T_{lm^*} - \frac{1}{3}(\delta^* - 3\eta_{12}\pi) T_{lk} + \frac{1}{3}(\delta^* + 3\eta_{12}\pi) T_{mm^*}). \quad (2.48)$$

También vamos a necesitar la proyección del tensor de Riemann  $R_{2424}$ , comenzaremos usando la expresión (2.28) y recordando que para las componentes de  $\eta_{\mu\nu}$  se cumple  $\eta_{12} = -\eta_{34} \neq 0$ :

$$R_{2424} = C_{2424} + \frac{1}{2} (\eta_{22} R_{44} + \eta_{44} R_{22} - \eta_{42} R_{24} - \eta_{24} R_{42}) - \frac{1}{6} (\eta_{22} \eta_{44} - \eta_{24} \eta_{24}) R = C_{2424} = -\Psi_4. \quad (2.49)$$

Y usando la ecuación  $R_{abcd} = -\gamma_{abc,d} + \gamma_{abd,c} + \eta^{nm} (\gamma_{abn} (\gamma_{dmc} - \gamma_{cmd}) + \gamma_{and} \gamma_{bmc} - \gamma_{anc} \gamma_{bmd})$  junto con la definición de los coeficientes espinoriales tenemos:

$$\begin{aligned} R_{2424} &= -\gamma_{242,4} + \gamma_{244,4} + \eta^{nm} (\gamma_{24n} (\gamma_{4m2} - \gamma_{2m4}) + \gamma_{2n4} \gamma_{4m2} - \gamma_{2n2} \gamma_{4m4}) \\ &= -\delta^* \nu + \Delta \lambda + \eta^{12} (\gamma_{214} \gamma_{422} + \gamma_{214} \gamma_{422} - \gamma_{212} \gamma_{424} + \gamma_{242} \gamma_{412} \\ &\quad - \gamma_{242} \gamma_{214} + \gamma_{243} \gamma_{244} - \gamma_{244} \gamma_{432} + \gamma_{244} \gamma_{234} - \gamma_{244} \gamma_{432} + \gamma_{242} \gamma_{434}) \\ &= -\delta^* \nu + \Delta \lambda + \eta^{12} (-\pi \nu - \gamma_{214} \nu + \lambda \gamma_{212} + \tau^* \nu - \gamma_{214} \nu + \mu \lambda - \lambda \gamma_{342}^* + \lambda \mu^* - \lambda \gamma_{342}^* - \gamma_{344} \nu) \\ &= \nu (-\delta^* + \eta^{12} (-\pi + 2\gamma_{214} + \tau^* - \gamma_{344})) + \lambda (\delta^* + \eta^{12} (\gamma_{212} + \mu - 2\gamma_{342} + \mu^*)). \quad (2.50) \end{aligned}$$

aquí igualamos la ecuación anterior con (2.49) dándonos:

$$\Psi_4 + (\delta^* + \eta^{12} (\gamma_{212} + \mu - 2\gamma_{342} + \mu^*)) \lambda - (-\delta^* + \eta^{12} (-\pi + 2\gamma_{214} + \tau^* - \gamma_{344})) \nu = 0 \quad (2.51)$$

pero notemos que lo podemos escribir en términos de los coeficientes espinoriales como:

$$\begin{aligned} \gamma_{212} - 2\gamma_{342}^* &= \gamma_{212} - 2\gamma_{342} = \frac{3}{2} (\gamma_{212} + \gamma_{342}) - \frac{1}{2} (\gamma_{212} - \gamma_{432}) = 3\gamma - 2\gamma^*, \\ \text{y } 2\gamma_{214} + \gamma_{344} &= \frac{3}{2} (\gamma_{214} + \gamma_{344}) + \frac{1}{2} (\gamma_{214} + \gamma_{434}) = 3\alpha + \beta^*. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Con lo finalmente al sustituir las dos expresiones anteriores en la ecuación (2.51) tenemos:

$$\Psi_4 + (\Delta + \eta_{12} (\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \lambda - (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)) \nu = 0. \quad (2.53)$$

De forma similar al procedimiento anterior, encontramos las proyecciones  $R_{1242} - R_{3442}$ :

$$(\Delta + \eta_{12} (\mu^* - \gamma^*)) \alpha - (\delta^* + \eta_{12} (\beta^* - \tau^*)) \gamma + \eta_{12} (\lambda (\beta + \tau) - \nu (\rho + \epsilon)) + \Psi_3 = 0. \quad (2.54)$$

la  $R_{2421}$

$$\Psi_3 + (\Delta + \eta_{12} (\mu + \gamma - \gamma^*)) \pi - (\mathbf{D} + \eta_{12} (3\epsilon + \epsilon^*)) \nu + \eta_{12} (\mu \tau^* + \lambda (\pi^* + \tau)) + \eta_{12} \frac{K}{2} T_{k m^*} = 0. \quad (2.55)$$

y la  $R_{2443}$

$$-\Psi_3 + (\delta^* + \eta_{12} (\alpha + \beta^* + \pi)) \mu - (\delta - \eta_{12} (\alpha^* - 3\beta)) \lambda - \eta_{12} \pi \mu^* + \eta_{12} (\rho - \rho^*) \nu + \eta_{12} \frac{K}{2} T_{k m^*} = 0. \quad (2.56)$$

Y por último también vamos a necesitar la relación de conmutación  $[\delta^*, \Delta]$  dada por la ecuación (2.20)

Vamos a derivar la ecuación de perturbación en un fondo de espacio-tiempo tipo D, en la clasificación de Petrov (para más detalles ver el apéndice). Vamos a considerar soluciones para el hoyo negro en el vacío, es decir,  $T_{\mu\nu} = 0$ . En este contexto el único escalar de Weyl distinto de cero es  $\Psi_2$ , y los siguientes coeficientes espinoriales son cero:  $\kappa, \sigma, \nu$ , y  $\lambda$ . Comencemos perturbando a la ecuación (2.45), es decir, haciendo el cambio  $F \rightarrow F + F^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} & (\delta^* + \delta^{*(1)} + 2\eta_{12}(\alpha + \alpha^{(1)} + 2\pi + 2\pi^{(1)}))(\Psi_3 + \Psi_3^{(1)}) - (\mathbf{D} + \mathbf{D}^{(1)} - \eta_{12}(\rho + \rho^{(1)} - 4\epsilon - 4\epsilon^{(1)}))(\Psi_4 + \Psi_4^{(1)}) \\ & - 3\eta_{12}(\lambda + \lambda^{(1)})(\Psi_2 + \Psi_2^{(1)}) = -\eta_{12} \frac{K}{2} ((\delta^* + \delta^{*(1)} + 2\eta_{12}(\alpha + \alpha^{(1)} - \tau^* - \tau^{*(1)}))(T_{k m^*} + T_{k m^*}^{(1)}) \\ & - (\Delta + \Delta^{(1)} + \eta_{12}(\mu^* + \mu^{*(1)} + 2\gamma + 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^* - 2\gamma^{*(1)}))(T_{m^* m^*} + T_{m^* m^*}^{(1)}) - \eta_{12}(\lambda + \lambda^{(1)})(T_{l k} + T_{l k}^{(1)}) \\ & + \eta_{12}(\sigma^* + \sigma^{*(1)})(T_{k k} + T_{k k}^{(1)}) + 2\eta_{12}(\nu + \nu^{(1)})(T_{l m^*} + T_{l m^*}^{(1)}) - \eta_{12}(\lambda + \lambda^{(1)})(T_{m m^*} + T_{m m^*}^{(1)}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Como estamos perturbando a primer orden entonces todo término de segundo orden o mayor se anula,  $X^{(1)}Y^{(1)} = 0$ . Eliminando estos términos junto con los que se eliminan por estar en espacios tipo D, nos queda la siguiente expresión para el Bianchi 42[21|4]:

$$\begin{aligned} & (\delta^* + 2\eta_{12} (\alpha + 2\pi)) \Psi_3^{(1)} - (\mathbf{D} - \eta_{12} (\rho - 4\epsilon)) \Psi_4^{(1)} - 3\eta_{12} \lambda^{(1)} \Psi_2 = \\ & -\eta_{12} \frac{K}{2} \left( (\delta^* + 2\eta_{12} (\alpha - \tau^*)) T^{(1)}_{km^*} - (\Delta + \eta_{12} (\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)) T^{(1)}_{m^*m^*} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Para las ecuaciones (2.46) y (2.53) tenemos las siguientes ecuaciones perturbadas:

$$\begin{aligned} & (\Delta + 2\eta_{12} (2\mu + \gamma)) \Psi_3^{(1)} - (\delta + \eta_{12} (4\beta - \tau)) \Psi_4^{(1)} - 3\eta_{12} \nu^{(1)} \Psi_2 \\ & = \eta_{12} \frac{K}{2} \left( (\Delta + 2\eta_{12} (\mu^* + \gamma)) T^{(1)}_{km^*} - (\delta^* + \eta_{12} (2\alpha + 2\beta^* - \tau^*)) T^{(1)}_{kk} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

y

$$\Psi_4^{(1)} + (\Delta + \eta_{12} (\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \lambda^{(1)} - (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)) \nu^{(1)} = 0 \quad (2.60)$$

Tomemos en cuenta que las ecuaciones (2.47) y (2.48) en espacio-tiempo tipo D, tienen la forma:

$$\Delta \Psi_2 = -3\eta_{12} \mu \Psi_2; \quad \delta^* \Psi_2 = -3\eta_{12} \pi \Psi_2 \quad (2.61)$$

Con las ecuaciones (2.60) y (2.61), podemos obtener una expresión para obtener la acción de los operadores  $\Delta$  sobre  $\lambda^{(1)} \Psi_2$ , y  $\delta^*$  sobre  $\nu^{(1)} \Psi_2$ . Empecemos haciendo actuar  $\Psi_2 \rightarrow (2.60)$ .

$$\Psi_2 (\Delta + \eta_{12} (\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) \lambda^{(1)} - \Psi_2 (\delta^* + \eta_{12} (3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*)) \nu^{(1)} \Psi_2 = -\Psi_2 \Psi_4^{(1)} \quad (2.62)$$

Para que los operadores  $\Delta$  y  $\delta^*$  estén actuando sobre  $\Psi_2$  queremos una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned}
& (\Delta + A)\lambda^{(1)}\Psi_2 - (\delta^* + B)\nu^{(1)}\Psi_2 \\
&= (\Delta\lambda^{(1)})\Psi_2 + \lambda^{(1)}(\Delta\Psi_2) - A\lambda^{(1)}\Psi_2 - (\delta^*\nu^{(1)})\Psi_2 - \nu^{(1)}(\delta^*\Psi_2) - B\nu^{(1)}\Psi_2
\end{aligned}$$

por las ecuaciones (2.61) tenemos que la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{aligned}
& (\Delta\lambda^{(1)})\Psi_2 - 3\eta_{12}\mu\lambda^{(1)}\Psi_2 - A\lambda^{(1)}\Psi_2 - (\delta^*\nu^{(1)})\Psi_2 + 3\eta_{12}\pi\nu^{(1)}\Psi_2 - B\nu^{(1)}\Psi_2 \\
&= \Psi_2(\Delta + A - 3\eta_{12}\mu)\lambda^{(1)} - \Psi_2(\delta^* + B - 3\eta_{12}\pi)\nu^{(1)} = -\Psi_2\Psi_4^{(1)} \tag{2.63}
\end{aligned}$$

Comparando con la ecuación (2.62) vemos que se debe de cumplir:

$$\begin{aligned}
A - 3\eta_{12}\mu &= \eta_{12}(\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*) \quad \Rightarrow \quad A = \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*) \\
B - 3\eta_{12}\pi &= \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*) \quad \Rightarrow \quad B = \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*) \tag{2.64}
\end{aligned}$$

De donde finalmente tenemos para la ecuación (2.63) usando las relaciones (2.64):

$$(\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))\lambda^{(1)}\Psi_2 - (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))\nu^{(1)}\Psi_2 = -\Psi_2\Psi_4^{(1)} \tag{2.65}$$

Si hacemos actuar  $(\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))$  sobre la ecuación (2.58), y a  $(\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))$  sobre la ecuación (2.59), y restamos ambas ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned}
& ((\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))(\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha + 2\pi)) - (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))(\Delta + 2\eta_{12}(2\mu + \gamma)))\Psi_3^{(1)} \\
& ((\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))(\mathbf{D} - \eta_{12}(\rho - 4\epsilon)) - (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))(\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau)))\Psi_4^{(1)} \\
& + 3\eta_{12}\Psi_2\Psi_4^{(1)} = -\eta_{12}\frac{K}{2}((\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))(\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha - \tau^*))T^{(1)}_{km^*} \\
& - (\Delta + \eta_{12}(\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*))T^{(1)}_{m^*m^*}) + (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))((\Delta + 2\eta_{12}(\mu^* + \gamma))T^{(1)}_{km^*} \\
& (\delta^* + \eta_{12}(2\alpha + 2\beta^* - \tau^*))T^{(1)}_{kk}) \tag{2.66}
\end{aligned}$$

En donde hemos usado la ecuación (2.65), y la relacion de conmutación (2.20). Notemos que los operadores que actúan sobre  $\Psi_3^{(1)}$  se anulan:

$$\begin{aligned} & (\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)) (\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha + 2\pi)) - (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)) (\Delta + 2\eta_{12}(2\mu + \gamma)) \\ = & \Delta\delta^* + \eta_{12}(2\alpha + 4\pi)\Delta + 2\eta_{12}(\Delta\alpha) + 4\eta_{12}(\Delta\pi) + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)\delta^* + (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)(2\alpha + 4\pi) \\ & - \delta^*\Delta - \eta_{12}(4\mu + 2\gamma)\delta^* - 4\eta_{12}(\delta^*\mu) - 2\eta_{12}(\delta^*\gamma) - \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)\Delta - (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)(4\mu + 2\gamma) \end{aligned}$$

pero en el espacio-tiempo tipo D,  $\Delta\delta^* - \delta^*\Delta = \eta_{12}(\alpha + \beta^* - \tau^*)\Delta - \eta_{12}(\mu^* + \gamma - \gamma^*)\delta^*$ , por tanto:

$$\begin{aligned} & = \eta_{12}(\alpha + \beta^* - \tau^* + 2\alpha + 4\pi - 3\alpha - \beta^* - 4\pi + \tau^*)\Delta + \eta_{12}(-\mu^* - \gamma + \gamma^* + 4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^* - 4\mu - 2\gamma)\delta^* \\ & 2\eta_{12}(\Delta\alpha) + 4\eta_{12}(\Delta\pi) - 4\eta_{12}(\delta^*\mu) - 2\eta_{12}(\delta^*\gamma) + (4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)(2\alpha + 4\pi) - (3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*)(4\mu + 2\gamma) \\ = & 2\eta_{12}((\Delta\alpha) - (\delta^*\gamma)) + 4\eta_{12}(\Delta\pi) - 4\eta_{12}(\delta^*\mu) + (-2\gamma^* + 2\mu^* - 4\mu)\alpha + 4(-\gamma^* + \gamma + \mu^*)\pi - (\beta^* - \tau^*)(4\mu + 2\gamma) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Tomando las proyecciones de las componentes del tensor de Riemann  $R_{1242} - R_{3442}$  (2.54),  $R_{2421}$  (2.55) y  $R_{2443}$  (2.56) tienen la siguiente forma en el espacio-tiempo tipo D

$$\begin{aligned} R_{1242} - R_{3442} & \Rightarrow (\Delta\alpha) - (\delta^*\gamma) = \eta_{12}((\gamma^* - \mu^*)\alpha + (\beta^* - \tau^*)\gamma) \\ R_{2421} & \Rightarrow \Delta\pi = -\eta_{12}((\pi + \tau^*)\mu + (\gamma - \gamma^*)\pi) \\ R_{2443} & \Rightarrow -\delta^*\mu = \eta_{12}((\mu - \mu^*)\pi + (\alpha + \beta^*)\mu) \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (2.67)

$$\begin{aligned} & (2\gamma^* - 2\mu^* + 4\mu - 2\gamma^* + 2\mu^* - 4\mu)\alpha + 2(\beta^* - \tau^*)\gamma - 2(\beta^* - \tau^*)\gamma - 4(\pi + \tau^*)\mu \\ & - 4(\gamma - \gamma^*)\pi + 4(\mu - \mu^*)\pi + 4\mu\beta^* + 4(-\gamma^* + \gamma - \mu^*)\pi - 4(\beta^* - \tau^*)\mu \\ = & 4(-\gamma + \gamma^* + \mu - \mu^* + \mu^* + \gamma - \gamma^* + \mu^*)\pi + 4(-\pi - \tau^* + \beta^* - \beta^* + \tau^*)\mu = 0 \end{aligned}$$

Finalmente nos queda la ecuación que rige a  $\Psi_4^{(1)}$  en espacios tipo D:

$$\begin{aligned} & (\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))(\mathbf{D} - \eta_{12}(\rho - 4\epsilon)) - (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))(\delta + \eta_{12}(4\beta - \tau))\Psi_4^{(1)} \\ & - 3\eta_{12}\Psi_2\Psi_4^{(1)} = \eta_{12}\frac{K}{2}((\Delta + \eta_{12}(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))((\delta^* + 2\eta_{12}(\alpha - \tau^*))T^{(1)}_{km^*} \\ & - (\Delta + \eta_{12}(\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*))T^{(1)}_{m^*m^*}) + (\delta^* + \eta_{12}(3\alpha + \beta^* + 4\pi - \tau^*))((\Delta + 2\eta_{12}(\mu^* + \gamma))T^{(1)}_{km^*} \\ & - (\delta^* + \eta_{12}(2\alpha + 2\beta^* - \tau^*))T^{(1)}_{kk}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Esta es la ecuación de  $\Psi_4^{(1)}$  que vamos a resolver más adelante [7].

## Capítulo 3

# Hoyo negro de Kerr

### 3.1. Nociones preliminares del hoyo negro de Kerr

La *métrica de Kerr* es la métrica que describe la geometría del espacio-tiempo alrededor de un hoyo negro rotante. La métrica de Kerr es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein y es una generalización de la métrica de Schwarzschild. Esta métrica fue descubierta por el físico neozelandés Roy Kerr en 1963.

A diferencia con el hoyo negro de Schwarzschild que tiene solo una, el hoyo negro de Kerr tiene dos superficies en donde la métrica aparentemente tiene divergencias, estas son llamadas singularidades coordenada que en pocas palabras son divergencias de la métrica debidas a una elección no adecuada de un sistema de coordenadas. El tamaño y la geometría de estas superficies dependen solamente de la masa y momento angular del hoyo negro. Una de las superficies está dentro de la otra, la superficie interior es una esfera y delimita el radio de no retorno o también llamado horizonte de eventos, la superficie exterior tiene forma de esfera ovalada y toca a la superficie interior en los polos por donde pasa el eje de rotación.

Uno de los resultados sorprendentes de la métrica de Kerr es el fenómeno llamado *arrastré gravitacional*, que consiste en que objetos cercanos al hoyo negro (o un cuerpo muy masivo) rotante comienzan a rotar en el sentido de rotación del hoyo negro. Esto no es debido a alguna fuerza o torca aplicada, sino debido a que el mismo espacio-tiempo está rotando. Entre las dos superficies se encuentra una región llamada *ergósfera*, en esta región el arrastre gravitacional es tan intenso que todo, incluso la luz, rota con el hoyo negro.

El elemento de línea de la métrica de Kerr para un cuerpo de masa  $M$  y momento angular por unidad de masa  $a$ , en unidades  $c = 1$  y  $G = 1$ , tiene la forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \quad (3.1)$$

donde definimos  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ .  $\Delta$  es la generalización de la función de horizonte de la métrica de Schwarzschild  $h(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ . [8]

El horizonte de eventos del hoyo negro de Kerr ocurre cuando la componente radial  $g_{rr}$  va a infinito, es decir, cuando  $\Delta = 0$ . Resolviendo la ecuación cuadrática  $\Delta = 0$  podemos saber donde se encuentra,

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + a^2 - 2Mr = 0, \\ \Rightarrow r &= \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 - 4a^2}}{2} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tomemos la raíz  $r_{int} = M + \sqrt{M^2 - a^2}$  que nos da el horizonte de eventos del hoyo negro de Kerr. Observemos que si el hoyo negro no rota, es decir  $a = 0$ , el horizonte de eventos de Kerr se reduce al horizonte de eventos de Schwarzschild,  $r_{int} = 2M = r_{Sch}$ , además cumple la condición  $r_{int} \leq r_{Sch}$ . Esto corresponde a una singularidad coordenada.

Otra singularidad coordenada ocurre cuando la componente puramente temporal  $g_{tt}$  de la métrica cambia de signo de positivo a negativo. Nuevamente resolviendo la ecuación cuadrática  $g_{tt} = 0$  llegamos a,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} &= 0 \\ \Rightarrow r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta &= 0 \\ \Rightarrow r &= \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}}{2} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

tomamos  $r_{ext} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ , de nuevo si  $a = 0$  tenemos que  $r_{ext} = r_{Sch} = 2M$  y cumple  $r_{ext} \leq r_{Sch}$ . Debido al término  $\cos^2 \theta$  de la raíz cuadrada, esta superficie exterior tiene forma de esfera aplastada que toca a la superficie interior en los polos del eje de rotación, donde  $\theta = 0, \pi$ . Hemos tomado tanto para  $r_{int}$  como para  $r_{ext}$  las raíces positivas de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, esto es porque las otras dos raíces se encuentran dentro del horizonte de eventos y las desechamos por estar causalmente desconectadas con el exterior de dicho horizonte.

La singularidad real del hoyo negro de Kerr corresponde a  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ , lo que indica que la singularidad ocurre cuando  $r = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

### 3.2. Ecuación de perturbación para el hoyo negro de Kerr

Vamos a estudiar la ecuación de perturbación derivada en el capítulo anterior, ecuación (2.68), para el caso de un hoyo negro rotante sin carga en vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$ ), descrito en un sistema de *coor-*

denadas penetrantes esféricas  $(t, r, \theta, \varphi)$ . Las coordenadas penetrantes son aquellas que resultan de una transformación de las coordenadas de las de Boyer-Lindquist en donde se evita la singularidad coordenada del horizonte. El elemento de línea es:

$$ds^2 = - \left(1 - 2 \frac{M r}{\Sigma}\right) dt^2 + 4 \frac{M r}{\Sigma} dt dr - 4 \frac{M r}{\Sigma} a \sin^2 \theta dt d\varphi + \left(1 + 2 \frac{M r}{\Sigma}\right) dr^2 - 2 \left(1 + 2 \frac{M r}{\Sigma}\right) a \sin^2 \theta dr d\varphi + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + 2 \frac{M r}{\Sigma} a^2 \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.4)$$

El siguiente paso es la elección de la tétrada nula. A los vectores nulos reales los elegimos de forma tal que describan la parte temporal y radial, esto es  $l^\mu(t, r)$  y  $k^\mu(t, r)$ . Ambos apuntan hacia el futuro y nuevamente elegimos que  $l^\mu$  apunte hacia afuera de la fuente y  $k^\mu$  hacia dentro. Mientras que a  $m^\mu$  solo depende del ángulo polar  $\theta$ . Con esto tenemos la siguiente tétrada [7][9]:

$$l^\mu = \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2 + 2 M r, \Delta, 0, 2 a) \quad k^\mu = k_0 (1, -1, 0, 0) \quad m^\mu = \frac{(i a \sin \theta, 0, 1, i \csc \theta)}{\sqrt{2} (r - i a \cos \theta)} \quad (3.5)$$

Y el otro vector nulo,  $m^{*\mu}$  es el complejo conjugado de  $m^\mu$ . Ahora usaremos esta tétrada en la definición (2.13) para obtener los coeficientes espinoriales y la definición (2.33) para los escalares de Weyl para calcular sus valores en esta tétrada en particular. Haciendo esto tenemos que para los coeficientes espinoriales  $\kappa = \nu = \sigma = \lambda = 0$ , y para los escalares de Weyl  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ , y como trabajamos en el espacio-tiempo tipo D de la clasificación de Petrov, el coeficiente espinor  $\gamma$  también es cero. Para los demás tenemos:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{r - i a \cos \theta} & \rho &= \frac{\Delta}{2\Sigma} \mu & \epsilon &= \rho - \frac{r - M}{2\Sigma} \\ \pi &= -i \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma} & \tau &= i \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}} \mu^2 & \alpha &= \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}} \mu^* & \beta &= -\alpha^* + \tau \\ \Psi_2 &= M \mu^3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Trabajaremos con la ecuación para  $\Psi_4^{(1)}$  derivada en el capítulo anterior considerando soluciones para el vacío. La ecuación reducida es:

$$((\Delta - 4\mu - \mu^*)(\mathbf{D} - \rho + 4\epsilon) - (\delta^* - 3\alpha - \beta^* - 4\pi + \tau^*)(\delta - 4\beta + \tau) + 3\Psi_2)\Psi_4^{(1)} = 0 \quad (3.7)$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para este caso de los coeficientes espinoriales y escalares de Weyl en la ecuación anterior obtenemos:

$$[\square_{tr} + \square_{\theta\varphi}] \Psi_4^{(1)} = 0 \quad (3.8)$$

Donde definimos a los siguientes operadores como:

$$\begin{aligned} \square_{tr} &= - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 a \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \\ &\quad 2 (2 r + 3 M + 2 i a \cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} + 6 (r - M) \frac{\partial}{\partial r} + 4 \\ \square_{\theta\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 4 i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

El cambio de los operadores ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{\Delta}$ ,  $\delta$ ,  $\delta^*$ ) a derivadas parciales ( $\partial_t$ ,  $\partial_r$ ,  $\partial_\theta$ ,  $\partial_\varphi$ ) es debido a la definición misma de los operadores (2.10). Por otro lado en lugar de trabajar con  $\Psi_4^{(1)}$  trabajaremos con la función  $\Phi_1 = r \Psi_4^{(1)}$  la cual se espera que tenga un comportamiento constante en regiones muy alejadas del hoyo negro, ya que el escalar de Weyl  $\Psi_4^{(1)}$  disminuye radialmente como  $\sim \frac{1}{r}$  como dice el teorema de peeling (ver apéndice A). Haciendo este cambio la ecuación de perturbación resultante es:

$$[\square_{1tr} + \square_{\theta\varphi}] \Phi_1 = 0 \quad (3.10)$$

donde solamente el operador  $\square_{tr}$  cambia al operador  $\square_{1tr}$  definido como:

$$\begin{aligned} \square_{1tr} &= - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 a \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \\ &\quad 2 (2 r + M + 2 i a \cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left( 2 r - M - \frac{a^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para el operador angular  $\square_{\theta\varphi}$ , introduciremos a los operadores  $eth$  y  $eth$ -barra definidos como:

$$\tilde{\partial}_s = - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - s \cot \theta \right) \equiv \tilde{\partial}_0 + s \cot \theta, \quad (3.12)$$

$$\bar{\partial}_s = - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + s \cot \theta \right) \equiv \bar{\partial}_0 - s \cot \theta, \quad (3.13)$$

En donde el subíndice  $s$  indica que actúa sobre alguna función de peso de espín  $s$ . Estos operadores actúan en particular sobre los armónicos esféricos con peso de espín  $Y_s^{l,m}(\theta, \varphi)$ , que son la generalización de los armónicos esféricos usuales (para  $s = 0$ ). Cuando el operador  $\tilde{\partial}$  actúa sobre un armónico esférico con peso de espín, le sube el peso:

$$\tilde{\partial}_s Y_s^{l,m} = \sqrt{(l-s)(l+s+1)} Y_{s+1}^{l,m} \quad (3.14)$$

y cuando el operador  $\bar{\partial}$  actúa sobre un armónico esférico con peso de espín, le baja el peso:

$$\bar{\partial}_s Y_s^{l,m} = -\sqrt{(l+s)(l-s+1)} Y_{s-1}^{l,m} \quad (3.15)$$

La introducción de estos dos operadores es debido a que existe una relación entre el operador angular  $\square_{\theta\varphi}$  y los operadores  $\tilde{\partial}_s$  y  $\bar{\partial}_s$  que está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{-1} \tilde{\partial}_{-2} &= \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cot \theta \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2 \cot \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 4i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \square_{\theta\varphi} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cuando actúa  $\bar{\partial}_{-2}$  sobre una función de peso  $-2$  le sube el peso a  $-1$  para que cuando actúa  $\bar{\partial}_{-1}$  se lo baja de nuevo a  $-2$ , implicando que un armónico esférico de peso  $-2$  ( $Y_{-2}^{l,m}$ ) sea una eigenfunción del operador  $\bar{\partial}_{-1} \bar{\partial}_{-2}$ :

$$\begin{aligned} \square_{\theta\varphi} Y_{-2}^{l,m} &= \bar{\partial}_{-1} \bar{\partial}_{-2} Y_{-2}^{l,m} = \bar{\partial}_{-1} \sqrt{(l+2)(l-1)} Y_{-1}^{l,m} \\ &= -\sqrt{(l-1)(l+2)} \sqrt{(l+2)(l-1)} Y_{-2}^{l,m} = -(l-1)(l+2) Y_{-2}^{l,m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

La propiedad anterior nos sugiere que al utilizar los operadores  $\tilde{\partial}$  y  $\bar{\partial}$  en lugar del operador  $\square_{\theta\varphi}$  es conveniente expresar a la función  $\Phi_1$  en términos de  $Y_{-2}^{l,m}$ .

### 3.3. Formulación para una dimensión

La función en la que estamos interesados depende del tiempo y de las tres coordenadas espaciales  $\Phi_1 = \Phi_1(t, r, \theta, \varphi)$ , la formulación para una dimensión quiere decir que describiremos a las ecuaciones para  $\Phi_1$  de modo tal que la información relevante esté expresada en una sola dimensión espacial y el tiempo, dándonos como resultado una ecuación dependiente solo de dos variables. Usaremos para la parte angular a los armónicos esféricos con peso de espín  $Y_{-2}^{l,m}$  para aprovechar la ventaja de que son eigenfunciones del operador angular  $\square_{\theta\varphi}$  y que también lo son de la derivada parcial respecto al ángulo azimutal  $\varphi$ .

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{-2}^{l,m} = i m Y_{-2}^{l,m} \quad (3.18)$$

también aprovecharemos el hecho de que los armónicos esféricos con peso de espín  $Y_s^{l,m}$  forman una base completa ortonormal en el espacio de funciones:

$$\oint d\Omega Y_s^{l,m} Y_s^{l',m'} = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (3.19)$$

Para las componentes temporal y radial asociaremos a cada  $Y_s^{l,m}$  funciones de la forma  $R_{l,m}(t, r)$  de manera que propondremos una expresión  $\Phi_1$  como solución a la ecuación (3.10) de la siguiente forma:

$$\Phi_1 = \sum_{lm} R_{l,m}(t, r) Y_{-2}^{l,m}(\theta, \phi) \quad (3.20)$$

Usando las propiedades angulares dadas por las ecuaciones (3.17) y (3.18), obtenemos para la ecuación de perturbación (3.10):

$$\sum_{lm} Y_{-2}^{l,m} \left[ - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M + 2 i a \cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left( 2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l - 1) (l + 2) \right] R_{l,m} = 0 \quad (3.21)$$

Para deshacernos de la suma, multiplicamos cada término por  $Y_{-2}^{l',m'}$  e integramos sobre el ángulo sólido:

$$\begin{aligned}
& \sum_{lm} \oint d\Omega Y_{-2}^{l',m'} Y_{-2}^{l,m} \left[ -(r^2 + 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2(2r + M) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\
& \left. 2 \left( 2r - M - \frac{a^2}{r} + iam \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2im \frac{a}{r} + 2 \frac{Mr + a^2}{r^2} - (l-1)(l+2) \right] R_{l,m} \\
& - \sum_{lm} a^2 \oint d\Omega Y_{-2}^{l',m'} Y_{-2}^{l,m} \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l,m} + \sum_{lm} 4ia \oint d\Omega Y_{-2}^{l',m'} Y_{-2}^{l,m} \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} R_{l,m} = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Usando la propiedad de ortonormalidad (3.19), tenemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{lm} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \left[ -(r^2 + 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2(2r + M) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\
& \left. 2 \left( 2r - M - \frac{a^2}{r} + iam \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2im \frac{a}{r} + 2 \frac{Mr + a^2}{r^2} - (l-1)(l+2) \right] R_{l,m} \\
& - a^2 \sum_{lm} \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l,m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l',m'} Y_{-2}^{l,m} \cos^2 \theta + 4ia \sum_{lm} \frac{\partial}{\partial t} R_{l,m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l',m'} Y_{-2}^{l,m} \cos \theta = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Quedan aun un par de términos que tienen  $\cos^2 \theta$  y  $\cos \theta$  para los cuales usaremos su expresión en términos de armónicos esféricos:

$$\cos^2 \theta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_0^{2,0} + \frac{1}{3} \quad \cos \theta = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_0^{1,0} \tag{3.24}$$

dándonos

$$\begin{aligned}
& \sum_{lm} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \left[ -(r^2 + 2Mr) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2(2r + M) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\
& \left. 2 \left( 2r - M - \frac{a^2}{r} + iam \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2im \frac{a}{r} + 2 \frac{Mr + a^2}{r^2} - (l'-1)(l'+2) \right] R_{l',m'} \\
& - a^2 \sum_{lm} \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l,m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l',m'} Y_{-2}^{l,m} \left( \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_0^{2,0} + \frac{1}{3} \right) \\
& + 4ia \sum_{lm} \frac{\partial}{\partial t} R_{l,m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l',m'} Y_{-2}^{l,m} \left( 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_0^{1,0} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

aplicando las  $\delta_{l'l'}$  y  $\delta_{mm'}$  para eliminar la suma del primer término

$$\begin{aligned}
& \left[ - (r^2 + 2 M r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\
& 2 \left( 2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l' - 1) (l' + 2) \left. \right] R_{l', m'} \\
& - a^2 \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \sum_{lm} \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l, m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l', m'} Y_{-2}^{l, m} Y_0^{2, 0} - \frac{a^2}{3} \sum_{lm} \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l, m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l', m'} Y_{-2}^{l, m} \\
& + 8 i a \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sum \frac{\partial}{\partial t} R_{l, m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l', m'} Y_{-2}^{l, m} Y_0^{1, 0} = 0
\end{aligned}$$

y sigue

$$\begin{aligned}
& \left[ - \left( r^2 + 2 M r + \frac{a^2}{3} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 M r \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2 (2 r + M) \frac{\partial}{\partial t} + \right. \\
& 2 \left( 2 r - M - \frac{a^2}{r} + i a m \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2 i m \frac{a}{r} + 2 \frac{M r + a^2}{r^2} - (l' - 1) (l' + 2) \left. \right] R_{l', m'} \tag{3.26} \\
& - a^2 \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \sum_{lm} \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{l, m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l', m'} Y_{-2}^{l, m} Y_0^{2, 0} + 8 i a \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sum_{lm} \frac{\partial}{\partial t} R_{l, m} \oint d\Omega Y_{-2}^{l', m'} Y_{-2}^{l, m} Y_0^{1, 0} = 0
\end{aligned}$$

Para resolver el par de integrales faltantes usamos los símbolos de Wigner  $3 - lm$  dados por:

$$\begin{aligned}
\oint Y_2^{l, -m} Y_{-2}^{l', m'} Y_0^{1, 0} d\Omega &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \delta_{m, m'} \left[ \frac{1}{l} \sqrt{\frac{(l-2)(l+2)(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}} \delta_{l, l'-1} \right. \\
& \left. + \frac{2m}{l(l+1)} \delta_{l, l'} + \frac{1}{(l+1)} \sqrt{\frac{(l-1)(l+3)(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)}} \delta_{l, l'+1} \right] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

y

$$\oint Y_2^{l, -m} Y_{-2}^{l', m'} Y_0^{2, 0} d\Omega$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \delta_{m,m'} \left[ \frac{3}{2l(2l-1)(l-1)} \sqrt{\frac{(l-2)(l-3)(l+2)(l+1)(l+m)(l+m-1)(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-3)}} \delta_{l,\nu-2} \right. \\
&\quad + 24 \frac{m}{(l+1)(l)(l-1)} \sqrt{\frac{(l-2)(l+2)(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}} \delta_{l,\nu-1} + \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1)-3m^2)}{(2l+3)(l+1)(l)(2l-1)} \delta_{l,\nu} \\
&\quad \quad \quad + 24 \frac{m}{(l+2)(l+1)l} \sqrt{\frac{(l-1)(l+3)(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)}} \delta_{l,\nu+1} \\
&\quad \left. + \frac{3}{2(l+2)(2l+3)(l+1)} \sqrt{\frac{(l+4)(l+3)(l)(l-1)(l+2+m)(l+m+1)(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+5)(2l+1)}} \delta_{l,\nu+2} \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (3.26) y haciendo  $l', m' \rightarrow l, m$  por simple notación, obtenemos la ecuación para  $\Phi_1$  en 1-D para perturbaciones gravitacionales en un hoyo negro de Kerr:

$$\begin{aligned}
&-a^2 A(l+2, m) \partial_{tt} R_{l+2,m} - 4a B(l+1, m) \left( 4a \frac{m}{(l+2)l} \partial_{tt} - i \partial_t \right) R_{l+1,m} + \bar{\square}(l, m) R_{l,m} \\
&\quad - 4a B(l, m) \left( 4a \frac{m}{(l+1)(l-1)} \partial_{tt} - i \partial_t \right) R_{l-1,m} - a^2 A(l, m) \partial_{tt} R_{l-2,m} = 0. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

En donde hemos definido:

$$A(l, m) = \frac{1}{l(2l-1)(l-1)} \sqrt{\frac{(l-2)(l-3)(l+2)(l+1)(l+m)(l+m-1)(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-3)}} \quad (3.30)$$

$$B(l, m) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{(l-2)(l+2)(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\square}(l, m) &= - \left( r^2 + 2Mr + \frac{a^2}{3} \left( 1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1)-3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \\
&\quad + 2 \left( 2r + M + 4ia \frac{m}{l(l+1)} \right) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left( 2r - M - \frac{a^2}{r} + iam \right) \frac{\partial}{\partial r} - \\
&\quad 2im \frac{a}{r} + 2 \frac{Mr + a^2}{r^2} - (l-1)(l+2)
\end{aligned} \quad (3.32)$$

En la ecuación (3.29) podemos ver que si elegimos un modo cualquiera  $(l, m)$  de un armónico esférico la ecuación depende de otros modos, es decir, están acoplados. Este es el precio que tuvimos

que pagar al hacer la formulación en una dimensión en una simetría axisimétrica. Por otro lado, como los escalares de Weyl son funciones complejas, expresaremos a  $R_{l,m}$  en términos de su parte real e imaginaria:

$$R_{l,m} = {}_+R_{l,m} + i {}_-R_{l,m} \quad (3.33)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de evolución para modos acoplados (3.29) y separando la parte real de la imaginaria de los operadores, obtenemos un par de ecuaciones (para la parte real usamos "+" y para la imaginaria "-"):

$$\begin{aligned} & -a^2 A(l+2, m) \partial_{tt} \pm R_{l+2,m} - 4a B(l+1, m) \left( 4a \frac{m}{(l+2)l} \partial_{tt} \pm R_{l+1,m} \pm \partial_t \mp R_{l+1,m} \right) \\ & \quad + {}_r\bar{\square}(l, m) \pm R_{l,m} - \mp 2am \left( \frac{4}{(l+1)l} \partial_t + \partial_r - \frac{1}{r} \right) \mp R_{l,m} \\ & -4a B(l, m) \left( 4a \frac{m}{(l+1)(l-1)} \partial_{tt} \pm R_{l-1,m} \pm \partial_t \mp R_{l-1,m} \right) - a^2 A(l, m) \partial_{tt} \pm R_{l-2,m} = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Donde definimos un nuevo operador para la parte real de  $\bar{\square}(l, m)$  como:

$$\begin{aligned} {}_r\bar{\square}(l, m) = & - \left( r^2 + 2Mr + \frac{a^2}{3} \left( 1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1)-3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ & + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + 2(2r+M) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left( 2r - M - \frac{a^2}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{Mr + a^2}{r^2} - (l-1)(l+2) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Notemos que por las definiciones de  $A(l, m)$  y  $B(l, m)$  para el caso de  $l = 0$  divergen, por tal motivo tomaremos a  $R_{0,m} = 0$  y para  $l = 1$  los coeficientes  $A(1, m)$ ,  $B(1, m)$  no están bien definidos. Por tanto tomaremos  $l = 2, 3, 4, \dots$  y la única restricción para  $m$  es que cumpla  $|m| \leq l$ . Tenemos un sistema infinito de ecuaciones debido al acople de los modos, esto nos compromete a elegir un valor  $l_{max}$  a partir del cual si tenemos cualquier  $l$  que cumpla la condición  $l \geq l_{max}$  tendremos  $R_{l,m} = 0$ . Para el primer caso no trivial tenemos  $l_{max} = 2$ , de donde solo tenemos  $R_{2,m} \neq 0$ , nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\square}(2, m) R_{2,m} &= 0, \quad (l=2) \\ -4a B(3, m) \left( 4a \frac{4m}{(4)(2)} \partial_{tt} + i \partial_t \right) R_{2,m} &= 0, \quad (l=3) \\ -a^2 A(4, m) \partial_{tt} R_{2,m} &= 0, \quad (l=4) \end{aligned}$$

Para cualquier elección de  $l_{max}$  tenemos de tres ecuaciones y una sola incógnita, por lo cual tenemos un sistema sobredeterminado. La primera ecuación es la más complicada y a la que tomaremos en cuenta y haremos caso omiso de las últimas dos ecuaciones. Otra observación importante es que cuando  $a = 0$ , se reduce al caso del hoyo negro de Schwarzschild donde los modos de  $l$  se desacoplan dando  $\bar{\square}(l, m) R_{l,m} = 0$ .

### 3.4. Formulación a primer orden

Las ecuaciones importantes de la sección pasada (3.29) por su complejidad las resolveremos de forma numérica. Como tenemos en el operador  $\bar{\square}(l, m)$  segundas derivadas parciales reduciremos el problema a ecuaciones diferenciales de primer orden para poder implementar un método numérico a primer orden. Esto no quiere decir que no se pueda tratar problemas con segundas derivadas o de orden mayor con métodos numéricos solo que en nuestro caso hemos optado por hacerlo. Para ello definiremos las siguientes funciones auxiliares:

$$\pm\Psi_{l,m} = \partial_r \pm R_{l,m}, \quad (3.36)$$

y

$$\pm\Pi_{l,m} = \partial_t \pm R_{l,m} + \beta \pm\Psi_{l,m}, \quad (3.37)$$

donde  $\beta_{l,m}$  es una función en principio arbitraria de  $r$  y distinta para cada modo relacionada con la componente radial del shift [7], pero en nuestro caso usaremos la misma  $\beta_{l,m}$  para cada modo. Para estas expresiones obtenemos:

$$\partial_t \pm R_{l,m} = \pm\Pi_{l,m} - \beta \pm\Psi_{l,m}, \quad (3.38)$$

$$\partial_t \pm\Psi_{l,m} = \partial_r (\pm\Pi_{l,m} - \beta \pm\Psi_{l,m}), \quad (3.39)$$

$$\partial_{tt} \pm R_{l,m} = \partial_t \pm\Pi_{l,m} - \beta \partial_r (\pm\Pi_{l,m} - \beta \pm\Psi_{l,m}) \quad (3.40)$$

Usando estas últimas ecuaciones obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden acopladas:

$$\begin{aligned} & T1 \partial_t \pm\Pi_{l+2,m} + c1 \partial_r \pm\Pi_{l+2,m} + c2 \partial_r \pm\Psi_{l+2,m} + S1 \pm\Psi_{l+2,m} + T2 \partial_t \pm\Pi_{l+1,m} + c3 \partial_r \pm\Pi_{l+1,m} \\ & + c4 \partial_r \pm\Psi_{l+1,m} + S2 \mp\Pi_{l+1,m} + S3 \pm\Psi_{l+1,m} + S4 \mp\Psi_{l+1,m} + T3 \partial_t \pm\Pi_{l,m} + c5 \partial_r \pm\Pi_{l,m} \\ & + c6 \partial_r \pm\Psi_{l,m} + S5 \pm\Pi_{l,m} + S6 \mp\Pi_{l,m} + S7 \pm\Psi_{l,m} + S8 \mp\Psi_{l,m} + S9 \pm R_{l,m} + S10 \mp R_{l,m} + \\ & T4 \partial_t \pm\Pi_{l-1,m} + c7 \partial_r \pm\Pi_{l-1,m} + c8 \partial_r \pm\Psi_{l-1,m} + S11 \mp\Pi_{l-1,m} + S12 \pm\Psi_{l-1,m} + S13 \mp\Psi_{l-1,m} + \\ & T5 \partial_t \pm\Pi_{l-2,m} + c9 \partial_r \pm\Pi_{l-2,m} + c10 \partial_r \pm\Psi_{l-2,m} + S14 \pm\Psi_{l-2,m} = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde para simplificar hemos definido los siguientes coeficientes.

$$\begin{aligned}
T1 &= -a^2 A_{l+2,m}, & T2 &= -16 a^2 B_{l+1,m} \frac{m}{(l+2)l}, \\
T3 &= -\left( r^2 + 2Mr + \frac{a^2}{3} \left( 1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1) - 3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right) \right), \\
T4 &= -16 a^2 B_{l,m} \frac{m}{(l+1)(l-1)}, & T5 &= -a^2 A_{l,m} \\
c1 &= -T1 \beta, & c2 &= T1 \beta^2, & c3 &= -T2 \beta, & c4 &= T2 \beta^2, \\
c5 &= T3 (4Mr - \beta), & c6 &= T3 (\beta^2 - 4Mr\beta + \Delta) \\
c7 &= -T4 \beta, & c8 &= T4 \beta^2, & c9 &= -T5 \beta, & c10 &= T5 \beta^2, \\
S1 &= T1 \beta \partial_r \beta, & S2 &= \mp 4a B_{l+1,m}, & S3 &= T2 \beta \partial_r \beta, \\
S4 &= \pm 4a B_{l+1,m} \beta, & S5 &= 2(2r+M) T3, & S6 &= \mp 8a \frac{m}{(l+1)l} T3, \\
S7 &= \left( (\beta - 4Mr) \partial_r \beta - 2(2r+M) \beta + 2 \left( 2r - M - \frac{a^2}{r} \right) \right) T3, \\
S8 &= \mp 2am \left( 1 - \beta \frac{4}{(l+1)l} \right) T3, & S9 &= \left( 2 \frac{Mr + a^2}{r^2} - (l-1)(l+2) \right) T3, \\
S10 &= \pm 2m \frac{a}{r} T3, & S11 &= \mp 4a B_{l,m}, & S12 &= T4 \beta \partial_r \beta, \\
S13 &= \pm 4a B_{l,m} \beta, & S14 &= T5 \beta \partial_r \beta.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Este es el sistema de ecuaciones a resolver para conocer la evolución de las ondas gravitacionales de un hoyo negro de Kerr perturbado 1-D [7].

# Capítulo 4

## Solución Numérica

### 4.1. Un poco de ecuaciones diferenciales parciales

En el capítulo anterior llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales (3.41) cuya solución nos da la evolución de  $\Phi_1 = r \Psi_4^{(1)}$ , pero este sistema de ecuaciones es prácticamente imposible resolver de forma tal que nos de una solución analítica. Por tal motivo buscaremos una solución aproximada mediante un método numérico. Antes de hacer esto daremos algunas ideas importantes sobre ecuaciones diferenciales parciales y métodos numéricos.

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que enuncia una relación entre una función de dos o más variables y las derivadas parciales de esta función con respecto a estas variables independientes:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{D}^n f(\mathbf{x}), \mathbf{D}^{n-1} f(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{D}f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \text{para } n \geq 1 \\ \text{con } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{D} = \left( \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

En física, comúnmente, las variables independientes son las coordenadas del espacio y del tiempo  $(t, x, y, z)$ . Las EDPs están presentes en casi todas las ramas de la física y son fundamentales para describir la dinámica de un sistema. Se dice que la solución de una EDP es una función particular  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que satisface la EDP en el dominio de interés  $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , y satisface las condiciones iniciales y/o a la frontera en el dominio. En algunos casos particulares la solución de una EDP puede expresarse de forma cerrada pero en la mayoría de los casos esto es imposible y tiene que obtenerse mediante un método numérico.

Se dice que una EDP es de *primer orden* si la derivada parcial de mayor orden es de primer orden, consecuentemente una EDP de *orden*  $n$  es aquella que el orden de la derivada parcial de mayor orden es  $n$ .

Una forma de clasificar a las EDP es usando el criterio de linealidad, a continuación se muestra esta clasificación:

**EDP lineal.** Si  $F(\mathbf{D}^n f(\mathbf{x}), \mathbf{D}^{n-1} f(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{D}f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$  en una función lineal de  $f$  y todas sus derivadas.

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \mathbf{D}^k f = h(x) \quad (4.2)$$

donde  $h$  y  $a_k$  son funciones. Si  $h(x) = 0$  se dice que la ecuación es homogénea.

**EDP semilineal.** Si  $F = 0$  tiene la forma:

$$a_0(\mathbf{D}^n f(\mathbf{x}), \mathbf{D}^{n-1} f(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{D}f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) + \sum_{k=1}^n a_k(x) \mathbf{D}^k f = 0 \quad (4.3)$$

donde la función  $a_0$  es el único término no lineal.

**EDP cuasilineal.** Si  $F = 0$  tiene la forma:

$$a_n \mathbf{D}^n f + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\mathbf{D}^n f(\mathbf{x}), \mathbf{D}^{n-1} f(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{D}f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \mathbf{D}^k f = 0 \quad (4.4)$$

donde el término de la derivada más alta es el único lineal.

**EDP no lineal.** Es no lineal en la derivada más alta. Se dice que es *completamente no lineal* si no es lineal en cada uno de los términos.

Una expresión de la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{D}^n \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{D}^{n-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (4.5)$$

donde

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

y dada la función incógnita  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad \mathbf{f} = (f^m, \dots, f^1)$$

es conocida como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de orden  $k$ . Aquí estamos suponiendo que el sistema consta del mismo número  $m$  de ecuaciones escalares como incógnitas ( $f^m, \dots, f^1$ ). Los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales se clasifican del mismo modo siendo lineal, semilineal, cuasilineal y no lineal.

Otro aspecto importante que hay que mencionar de las EDPs son las condiciones de cuando un problema es un *problema bien planteado*, que son:

- El problema tiene una solución (existencia).
- Esta solución es única (unicidad).
- La solución depende continuamente de las condiciones iniciales y/o de frontera del problema.

La última condición es particularmente importante en problemas con aplicaciones físicas, es preferible que la solución (única) cambie solo un poco cuando las condiciones que especifican al problema cambian poco. [10]

Es claro que existe una amplia gama de tipos de EDPs pero centraremos nuestra atención a las de segundo orden con una variable espacial y una temporal, ya que estas son las que modelan al problema en el que estamos trabajando porque hemos deducido una ecuación 1-D. El caso general de una EDP cuasilineal, de segundo orden, no homogénea, de dos variables independientes  $(x, t)$  es:

$$A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x \partial x} + B \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t \partial t} + D \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + E \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + F f(x, t) = G \quad (4.6)$$

donde los coeficientes  $A, B, C$  dependen de  $x, t, \frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , los coeficientes  $D, E, F$  dependen de  $x, t$  y  $f$  y el término no homogéneo  $G$  solo depende de  $x$  y  $t$ . En analogía con la ecuación algebraica de segundo grado  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , la clasificación depende del valor del discriminante  $B^2 - 4AC$ .

Valor de $B^2 - 4AC$	Tipo de ecuación
Negativo	Elíptica
Cero	Parabólica
Positivo	Hiperbólica

Las soluciones de cada tipo de ecuación tienen propiedades generales propias. La solución de la EDP *elíptica* es un función estacionaria y cuya forma cumple propiedades de minimización de energía, volumen, tiempo, etc. La solución *parabólica* es una función muy suave y que representa flujos que se dispersan. Y la solución *hiperbólica* tratan problemas de propagación. [11]

En nuestro caso tenemos la EDP (3.33):

$$\begin{aligned} \bar{\square}(l, m)R_{l,m} = & - \left( r^2 + 2Mr + \frac{a^2}{3} \left( 1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1) - 3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4Mr \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + \\ & 2 \left( 2r + M + 4ia \frac{m}{l(l+1)} \right) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left( 2r - M - \frac{a^2}{r} + iam \right) \frac{\partial}{\partial r} - 2im \frac{a}{r} + 2 \frac{Mr + a^2}{r^2} - (l-1)(l+2) = 0 \end{aligned}$$

calculando el valor de su discriminante:

$$\begin{aligned} & (4Mr)^2 - 4(\Delta) \left( - \left( r^2 + 2Mr + \frac{a^2}{3} \left( 1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1) - 3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right) \right) \right) \\ & = (4Mr)^2 + 4\Delta \left( r^2 + 2Mr + \frac{a^2}{3} \left( 1 + 2 \frac{(l+4)(l-3)(l(l+1) - 3m^2)}{(2l+3)(l+1)l(2l-1)} \right) \right) > 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Porque  $M, r, a > 0$ , y  $|m| \leq l$ . Por tanto el problema a resolver es un sistema de EDPs de segundo orden hiperbólicas de dos variables  $(r, t)$ . Ya que sabemos un poco del fondo matemático del problema al que vamos a resolver, ahora veamos un poco de métodos numéricos que son parte clave en este trabajo.

## 4.2. Nociones preliminares de métodos numéricos

El análisis numérico es una rama de las matemáticas que se puede definir a grandes rasgos como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos, en los que estén involucradas cantidades numéricas, con una precisión determinada. A través de números y operaciones matemáticas simples como la suma, resta, multiplicación y división, se encarga de diseñar algoritmos que simulen y aproximen procesos matemáticos más complejos como son la integración, interpolación y extrapolación, solución de sistemas de ecuaciones algebraicas y diferenciales etc.

Un algoritmo se define como un procedimiento que nos puede llevar a una solución aproximada de un problema mediante un número finito de pasos que pueden ejecutarse de manera lógica. A pesar de que se trata de un número finito de pasos en la mayoría de los casos la cantidad de pasos necesarios para obtener una solución numérica que aproxime adecuadamente a la real puede ser muy grande, lo cual es inoperable sin la ayuda de una computadora. Las computadoras son herramientas muy útiles para cálculos matemáticos extremadamente complejos y para el desarrollo de muchas ramas de la física son imprescindibles, pero en el fondo operan con números binarios y operaciones matemáticas simples.

Los métodos numéricos son la forma de implementar de forma particular los algoritmos para resolver de forma aproximada un problema. Existen una gran cantidad de métodos numéricos para

diversos problemas de los cuales nos vamos a centrar en soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales.

Uno de los métodos más populares para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales es el *método de diferencias finitas*. Una diferencia finita es una expresión matemática de la forma  $\Delta f(x) = f(x+b) - f(x+a)$  de una función  $f = f(x)$  definida en un intervalo  $I \in \mathbb{R}$ , donde  $a, b$  son puntos tal que:  $a, b \in I$ . Si una diferencia finita se divide entre  $\Delta x = b - a$  se obtiene una expresión llamada cociente diferencial,  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$  que es una aproximación a la derivada. Las diferencias finitas nos interesan para resolver ecuaciones diferenciales por el aspecto importante de que las diferencias finitas aproximan a la derivada a medida que  $\Delta x$  se acerca a cero.

Los métodos de diferencias finitas aproximan soluciones de ecuaciones diferenciales reemplazando las expresiones de la derivada por un cociente diferencial. Esto es adecuado debido a la definición de la misma derivada, que para una función  $f(x)$  su primera derivada en el punto  $x_0$  es por definición:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4.8)$$

entonces una aproximación razonable puede ser:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4.9)$$

para valores pequeños de  $h$ , donde  $\Delta x = h$  lo definimos como el paso espacial. Para saber que tan bien aproxima el cociente diferencial a la derivada usamos el Teorema de Taylor asumiendo que la función  $f(x)$  es continuamente diferenciable alrededor del punto  $x_0$ . Con lo que nos da:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1}) \quad (4.10)$$

Entonces la aproximación de  $f(x)$  en términos de la primera derivada es:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \mathcal{O}(h^2) \quad \Rightarrow \quad f'(a) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (4.11)$$

con lo cual ya podemos saber que tanto se aproxima a la primera derivada:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \mathcal{O}(h) \quad (4.12)$$

Podemos ver que el error es proporcional a  $h$ , este resultado no es general sino es particular del tipo de aproximación que se haga. La expresión anterior se conoce como *ecuación de diferencias hacia adelante*. De hecho esta no es la única manera de aproximar una derivada, existe una amplia variedad aproximaciones como son:

*ecuación de diferencias hacia atrás*

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} - f'(x_0) = \mathcal{O}(h) \quad (4.13)$$

*ecuación de diferencias centrada*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) = \mathcal{O}(h^2) \quad (4.14)$$

notemos que la ecuación de diferencias centrada tiene una mejor aproximación que las anteriores ya que su error va al cuadrado del paso espacial  $h$ . Esto es por su deducción misma, comencemos con dos distintas expansiones en serie de Taylor a segundo orden de una función:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

al restar la primera expresión de la segunda tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0 - h) &= 2\frac{f'(x_0)}{1!}h + \mathcal{O}(h^3) \\ \Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) &= \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

También es posible obtener expresiones en diferencias finitas para aproximar derivadas de orden mayor, esto es aprovechando el hecho de que la  $n$ -ésima derivada es simplemente la primera derivada, derivada  $n - 1$  veces:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{df}{dx} \right) \quad (4.15)$$

de forma que para obtener la expresión en diferencias finitas de una derivada de orden  $n$ , simplemente hay que aplicar recursivamente  $n$  veces la aproximación de la primera derivada de esa función. Por ejemplo usando la fórmula de la diferencias centrada mostrada anteriormente con un paso espacial de  $\Delta x = h/2$  para  $f'(x + h/2)$  y  $f'(x - h/2)$  y aplicando la fórmula de diferencia central a la derivada de  $f'$  en  $x$ , obtenemos la aproximación de la diferencia centrada de la segunda derivada de  $f$ :

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.16)$$

Entonces los métodos de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales consisten a grandes rasgos en discretizar el espacio en donde está definida la ecuación, sustituir las expresiones de las derivadas por su aproximación en diferencias finitas y obtener una expresión que nos permita reconstruir la solución a partir de los datos iniciales y/o a la frontera. Para que quede más claro veamos un ejemplo sencillo de una ecuación diferencial ordinaria:

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$u'(x) = 3u(x) + 2, \quad u(0) = u_0 \quad (4.17)$$

discretizemos eligiendo un paso  $\Delta x = h$  pequeño y definiendo los puntos del espacio discreto como  $x_j = j\Delta x$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Ahora aproximemos la derivada:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx u'(x) \quad \text{cambiando de notación} \quad \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} \approx u'(x) \quad (4.18)$$

sustituyamos la aproximación de  $u'(x)$  y despejemos para obtener una regla de recurrencia para  $u_{n+1}$

$$u(x_{j+1}) = u(x_j) + h(3u(x_j) + 2) \quad (4.19)$$

conociendo el valor de la condición a la frontera  $u(0) = u_0$  es posible aplicar la regla de recurrencia para  $j = 0$  y así calcular el siguiente punto  $j = 1$ ,  $u(x_1) = u(x_0) + h(3u(x_0) + 2)$  y así de forma sucesiva para conocer el valor de  $u_j$  todos los puntos del espacio discretizado que es la aproximación a la solución real  $u(x)$ . La calidad de la aproximación numérica depende de muchos factores, entre ellos el tipo de aproximación a la derivada que se utilice y el tamaño del paso espacial de manera tal que el error sea lo más pequeño posible.

Es importante mencionar que la implementación del método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, y en general la implementación de cualquier método numérico requiere cuidado especial si se desea tener una buena aproximación. Existen varios factores, como la forma de discretización, tipo de ecuación de diferencias, condiciones de frontera o iniciales, etc. que si no se eligen de forma adecuada harán que la solución numérica sea mala en el sentido de que no se aproximen la solución que estamos buscando.

### 4.3. Métodos numéricos para la ecuación de advección

La ecuación de advección es una ecuación diferencial parcial que describe el movimiento de una función escalar que es transportada por un campo de velocidades conocido. Por ejemplo: el transporte de una sustancia contaminante por la corriente de un río; en meteorología, el proceso de transporte de una propiedad atmosférica, como el calor o la humedad, por efecto del viento; en oceanografía, el transporte de ciertas propiedades, como la salinidad, por las corrientes marinas. Tales propiedades tienen una distribución espacial.

En coordenadas cartesianas el operador de advección es:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.20)$$

donde  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  es la velocidad.

La ecuación de advección para una función escalar  $u$  es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\mathbf{v}) = 0 \quad (4.21)$$

donde  $(\nabla \cdot)$  es el operador divergencia y  $\mathbf{v}$  es una función vectorial (usualmente velocidad). Asumiendo que se satisface  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  (si describe un fluido se dice que es incompresible). La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0 \quad (4.22)$$

Ahora consideremos la ecuación de advección en una dimensión con condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Este es el ejemplo más sencillo de una ecuación diferencial hiperbólica, que de hecho tiene solución analítica:  $u(x, t) = g(x - vt)$ , la cual derivando y utilizando la regla de la cadena se ve claramente que efectivamente es solución.

A pesar de que conocemos la solución analítica de la ecuación de advección con velocidad constante en una dimensión, es de nuestro interés resolverla numéricamente ya que podemos así probar distintos métodos numéricos con la confianza de que conocemos la solución y así poder estudiar que tan buenas aproximaciones nos dan. Otro motivo importante para estudiar la solución numérica de la ecuación de advección es porque está íntimamente relacionada con la solución numérica de la ecuación de onda que más adelante veremos que es un punto fundamental en nuestro estudio.

Como se dijo anteriormente un método numérico utiliza un número finito de operaciones sencillas para resolver un problema más complicado, y por tanto es necesario discretizar el espacio en el cual está definido el problema. Para el problema planteado en (4.23), discretizaremos el plano  $x-t$  haciendo una malla de paso espacial  $\Delta x = h$  y paso temporal  $\Delta t = k$ , y definimos la malla discreta de puntos  $(x_j, t_n)$  como:

$$\begin{aligned} x_j &= jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ t_n &= nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Es importante destacar que tomamos por simplicidad a  $\Delta x$  y  $\Delta t$  constantes. También definimos a  $U_j^n \in \mathbb{R}^m$  como la solución numérica aproximada al punto de la malla  $u(x_j, t_n)$  y a los valores

puntuales los denotaremos como  $u_j^n = u(x_j, t_n)$ .

En este caso no tenemos condiciones a la frontera por lo que  $x \in (-\infty, \infty)$ , lo cual en principio no parece ser un problema, pero al implementar un método numérico es necesario definir adecuadamente el dominio espacial ya que de lo contrario será imposible implementar un método numérico. Esto es porque los métodos numéricos utilizan un número grande pero finito de puntos por lo que es necesario tener un punto inicial y un punto final. Por tanto debemos aplicar el método numérico en un dominio espacial finito, digamos  $a \leq x \leq b$ , con la condición de frontera periódica:

$$u(a, t) = u(b, t), \quad \forall t \geq 0$$

De los datos iniciales  $u(x, 0) = g(x)$  definimos  $U^0 = g(x)$  como dato inicial de la solución numérica. Ahora usaremos una evolución temporal para construir el paso siguiente  $U^1$  a partir de  $U^0$ , para después obtener  $U^2$  a partir de  $U^1$  (y posiblemente también de  $U^0$ ) y así en lo sucesivo hasta tener  $U^n$ ; teniendo así la solución numérica de la ecuación de advección con condición inicial.

Podemos empezar reemplazando la derivada temporal por una ecuación de diferencias hacia adelante y a la derivada espacial por una ecuación de diferencias centrada:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + v \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right) &= 0 \\ \Rightarrow U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{k}{2h} v (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (4.24)$$

este método numérico es conocido como *Euler hacia adelante*. Que a pesar de su derivación natural es un método poco estable y es prácticamente inútil [12] (más adelante vamos a hablar de estabilidad). Existe una gran variedad de métodos para resolver la ecuación de advección, tanto de diferencias finitas como de otro tipo. A continuación se muestran algunos métodos útiles para resolver la ecuación de advección:

*método de un lado*

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{k}{h} v (U_j^n - U_{j-1}^n) \\ \circ U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{k}{h} v (U_{j+1}^n - U_j^n) \end{aligned} \quad (4.25)$$

*método de Lax-Wendroff*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}v(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}v^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (4.26)$$

*método de Beam-Warming*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h}v(3U_j^n - 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n) + \frac{k^2}{2h * 2}v^2(U_j^n - 2U_{j-1}^n + U_{j-2}^n) \quad (4.27)$$

*método Crank-Nicholson*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{2h^2}v((U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}) + (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)) \quad (4.28)$$

## 4.4. Métodos numéricos para la ecuación de onda

La ecuación de onda es una importante ecuación diferencial parcial hiperbólica lineal de segundo orden que describe la propagación de las ondas en general, como son las ondas sonoras, las ondas de electromagnéticas y las ondas gravitacionales. En su forma más elemental, la ecuación de onda hace referencia a una función escalar  $\phi$  que satisface:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \quad (4.29)$$

donde  $\nabla^2$  es el laplaciano y  $c$  es una constante equivalente a la velocidad de propagación de la onda. La solución general de la ecuación de onda escalar unidimensional fue obtenida por d'Alembert en el siglo XVIII. La ecuación de onda puede ser escrita de una forma factorizada:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0 \quad (4.30)$$

Que da el producto de dos ecuaciones de advección con velocidades de igual magnitud pero en sentido opuesto, por consiguiente si  $F$  y  $G$  son funciones arbitrarias, cualquier suma de la forma  $\phi(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$  satisface la ecuación de onda. Los dos términos son ondas viajeras, cualquier punto de la onda dada por un argumento específico ya sea  $F$  o  $G$  se moverá con velocidad  $c$  ya sea hacia el frente o hacia atrás. En este caso  $F$  es la función que se mueve hacia adelante (hacia valores cada vez mayores de  $x$ ) y hacia atrás para  $G$ , estas funciones pueden ser determinadas para satisfacer condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\phi(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) &= g(x)\end{aligned}$$

Utilizando las condiciones iniciales obtenemos la solución general para la ecuación de onda en una dimensión con velocidad constante, la solución también es conocida como la Fórmula de d'Álembert:

$$\phi(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (4.31)$$

Es posible resolver la ecuación de onda en una dimensión con diferencias finitas para segundas derivadas. Pero es más conveniente reducir esta ecuación diferencial parcial de segundo orden a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Esto es porque los métodos numéricos de derivadas a primero orden son los más estudiados, los teoremas matemáticos en este tema se aplican a primero orden y son los que usan menor capacidad de almacenamiento de memoria ya que necesitan menos puntos para definir una derivada. Hay varias alternativas para reducir el sistema a primer orden, nosotros elegimos la siguiente manera:

definamos las funciones auxiliares  $\pi(x, t)$  y  $\psi(x, t)$  como

$$\begin{aligned}\pi(x, t) &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \psi(x, t) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\end{aligned} \quad (4.32)$$

entonces la ecuación de onda se reduce a

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (4.33)$$

y notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \pi}{\partial x}, \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{4.34}$$

Con lo que nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial x} &= 0, \\ \pi - \frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\tag{4.35}$$

De este sistema de tres ecuaciones diferenciales dos de ellas son la ecuación de advección y la última ecuación se puede resolver sin problemas con diferencias finitas ya que es una simple derivada. Para resolverlo numéricamente solo hay que resolver las ecuaciones de advección acopladas y dar las condiciones a la frontera adecuadas.

## 4.5. Errores y estabilidad de métodos numéricos

A continuación se muestran algunos conceptos y definiciones matemáticas importantes de la teoría de métodos numéricos [13].

### *Error puntual y convergencia*

Estamos interesados en saber como  $U_j^n$  aproxima a la solución real  $u(x, t)$ , para ello se define al error puntual como la diferencia entre la solución numérica y la real en un punto en específico  $E_j^n = U_j^n - u_j^n$ . De la definición anterior se define a la función error:

$$E_k(x, t) = U_k(x, t) - u(x, t)\tag{4.36}$$

de donde ahora  $E_j^n$  es el valor puntual de  $E_k(x_j, t_n)$ . Con esta definición de error, se dice que un método es convergente en alguna norma  $\| \cdot \|$  si:

$$\|E_k(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{si } k \rightarrow 0 \quad (4.37)$$

para cualquier  $t \geq 0$  fija, y para toda condición de frontera. Entendemos como convergencia a la propiedad de que a medida que refinamos nuestra malla el error tiende a cero y la solución aproximada tiende a la solución real.

#### *Error de truncamiento local*

El error de truncamiento local  $L_k(x, t)$  es la medida de que tan bien aproxima una ecuación de diferencias a una ecuación diferencial localmente. Se define reemplazando la solución aproximada  $U_j^n$  de la ecuación de diferencias por la solución real  $u(x_n, t_j)$ . Para que quede más claro este concepto primero definamos  $H_k$  al operador del método de diferencias utilizado de forma que se tenga  $H_k(U^n; j) = U_j^{n+1}$ , y ahora consideremos el siguiente ejemplo:

Comencemos con el método de *Lax-Friedrichs*,

$$\frac{1}{k} \left[ U_j^{n+1} - \frac{1}{2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) \right] + \frac{1}{2h} v [U_{j+1}^n - U_{j-1}^n] = 0 \quad (4.38)$$

Si reemplazamos a  $U_j^n$  por la solución exacta al punto correspondiente, no obtenemos precisamente un cero, lo que obtenemos es lo que hemos definido como error de truncamiento local,

$$L_k(x, t) = \frac{1}{k} \left[ u(x, t+k) - \frac{1}{2} (u(x-h, t) + u(x+h, t)) \right] + \frac{1}{2h} v [u(x+h, t) - u(x-h, t)] \quad (4.39)$$

Cuando evaluamos al error de truncamiento local asumimos que las soluciones son suaves, entonces podemos expandir cada término del lado derecho de la ecuación anterior en su serie de Taylor alrededor de  $u(x, t)$ . Haciendo esto y agrupando términos tenemos (con  $u = u(x, t)$ ):

$$\begin{aligned} L_k(x, t) &= \frac{1}{k} \left[ (u + ku_t + \frac{1}{2}k^2u_{tt}\dots) - (u + ku_x + \frac{1}{2}k^2u_{xx}\dots) \right] + \frac{1}{2h}v [2hu_x + \frac{1}{3}h^3u_{xxx}\dots] \\ &= u_t + vu_x + \frac{1}{2} \left( ku_{tt} + \frac{h^2}{k}u_{xx} \right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como asumimos que  $u(x, t)$  es la solución exacta, entonces  $u_t + vu_x = 0$ . Usando lo anterior y el hecho de que  $u_{tt} = -vu_{xt} = -vu_{tx} = -v(-vu_x)_x = v^2u_{xx}$ , encontramos que:

$$L_k(x, t) = \frac{1}{2}k \left( v^2 - \frac{h^2}{k^2} \right) u_{xx} + \mathcal{O}(k^2) = \mathcal{O}(k), \quad \text{conforme } k \rightarrow 0 \quad (4.41)$$

Ahora tenemos los elementos suficientes para poder dar una definición más adecuada para error de truncamiento local y de consistencia.

DEFINICIÓN. Error de truncamiento local.

$$L_k(x, t) = \frac{1}{k} [u(x, t+k) - H_k(u(\cdot, t); x)] \quad (4.42)$$

DEFINICIÓN. Un método es *consistente* si:

$$\|L_k(x, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{si } k \rightarrow 0 \quad (4.43)$$

*Estabilidad*

Se dice que un método es *estable* para cada tiempo  $T$  hay una constante  $C_s$  y un valor  $k_0 > 0$  tal que:

$$\|H_k^n\| \leq C_s \quad \text{para todo } nk \leq T, \quad k < k_0 \quad (4.44)$$

*Teorema de equivalencia de Lax*

Este es el teorema fundamental de convergencia para métodos lineales de diferencias, básicamente dice que para un método *consistente*, la *estabilidad* es necesaria y suficiente para garantizar *convergencia*. Para más detalles ver [14].

## 4.6. Métodos SSPRK

Cuando se implementan métodos numéricos para aproximar EDP típicamente se usa la teoría de estabilidad lineal para garantizar convergencia. Actualmente existen discretizaciones de alto orden en el tiempo que pesar de ello no garantizan que una discretización no lineal estable en el espacio de resultados estables cuando esta acoplada con una discretización temporal linealmente estable.

Por tal motivo se han desarrollado métodos con discretizaciones temporales y espaciales "Strong Stability Preserving" (SSP) para EDP hiperbólicas. La idea principal de los métodos SSP es asumir que la discretización temporal a primer orden de Euler hacía adelante es fuertemente estable bajo cierta norma, cuando el paso de tiempo  $\Delta t$  esta adecuadamente restringida, para después encontrar

una discretización temporal de mayor orden (métodos de Runge-Kutta o multi-step) que mantenga la esta estabilidad fuerte para la misma norma a pesar de estar bajo una restricción del paso de tiempo distinta. El objetivo principal consiste en encontrar una discretización espacial que satisfaga ciertas propiedades de estabilidad no lineal o propiedades no oscilatorias, cuando usualmente es acoplado con un Euler hacia adelante en el tiempo.

Por otro lado los métodos de Runge-Kutta son una familia de métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. En estos métodos el orden de precisión aumenta al utilizar puntos intermedios en cada intervalo. Una mayor precisión implica además que los errores decrecen más rápido al reducir el intervalo de la discretización. Los métodos de Runge -Kutta se caracterizan por ser estables en la mayoría de los casos.

La forma más general de un método de Runge-Kutta de orden  $N$  está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_n \\ u_i &= \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} u_k + \Delta t \beta_{ik} f(u_k)), \quad i = 1, \dots, N \\ u_{n+1} &= u_N \end{aligned} \tag{4.45}$$

donde los coeficientes  $\alpha_{ik}$  y  $\beta_{ik}$  son no negativos y se cumple  $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} = 1$ .

Si por ejemplo nuestro objetivo es resolver la siguiente ecuación  $u_t - f(u)_x = 0$ , donde si llamamos  $-L(u)$  a la discretización espacial tenemos:

$$u_t = L(u) \tag{4.46}$$

debemos asumir que  $u$  es conocido para  $t < t^n$ , y que queremos encontrar la solución para el tiempo  $t^{n+1}$ . Partiendo de este problema mostraremos a continuación dos ejemplos de métodos de SSPRK( $m, p$ ) donde  $m$  denota el número de pasos y  $p$  el orden del método.[15]

**SSPRK (2, 2):**

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(u^{(1)}) \end{aligned} \tag{4.47}$$

**SSPRK (3, 3):**

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}), \end{aligned}$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \quad (4.48)$$



## Capítulo 5

# Código computacional y resultados

### 5.1. `pertolin K`

La solución numérica del sistema de ecuaciones en una dimensión que se llegó en el capítulo 3, ecuación (3.41), se resolvió numéricamente utilizando un código en Fortran 90, denominado `pertolin K`. Este código fue desarrollado por el grupo de relatividad numérica del Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Este código ya ha sido utilizado por los investigadores de este grupo y es un código adecuado para resolver nuestro problema. El código toma como base las técnicas mencionadas en el capítulo anterior de diferencias finitas, solución de la ecuación de advección y de onda, y los métodos de SSPRK. Es un código modular, es decir, es un programa con varios módulos que realizan operaciones particularmente asignadas en donde hay un módulo principal que invoca a los demás para conjuntarlos. A continuación se mostrará una breve explicación de cada módulo.

#### `* params.f90`

Módulo que lee el archivo de texto `pars.in` en donde se escriben los parámetros para la evolución, tales como las propiedades físicas del hoyo negro: masa y momento angular; propiedades de la perturbación: amplitud y ancho (de la perturbación gaussiana inicial) y algunas características del método numérico: número de pasos temporales y espaciales, frecuencia de salida, posición de donde inicia y finaliza la malla espacial, posición de los cinco observadores (más adelante se hablará de ellos), tipo de condición a la frontera y orden de la derivada espacial. Este módulo declara en el programa los parámetros que en `pars.in` se les asigno un valor.

#### `* boundary.f90`

Módulo que da las condiciones a la frontera de la evolución numérica. Invoca al módulo `params.f90`, en el archivo de parámetros `pars.in` viene la opción para elegir la condición a la frontera que puede ser: tipo Olsson, sin frontera para R para modo estacionario, copiar frontera, periódica y Sommerfeld.

#### `* derivs.f90`

Invoca al módulo `params.f90`. Módulo que calcula las derivadas utilizadas en la evolución numérica, esto es, implementa el tipo de aproximación para el operador derivada. Este módulo al calcular la derivada define el orden de de aproximación de ésta  $\mathcal{O}(h^n)$  para las fronteras y en el interior

de la malla espacial. En `pars.in` viene la opción para elegir el orden de la derivada a utilizar que puede ser: primer orden en la frontera y segundo en el interior, segundo orden en la frontera y cuarto en el interior, tercer orden en la frontera y sexto en el interior y cuarto orden en la frontera y octavo en el interior.

★ `initial.f90`

Módulo que da las condiciones de iniciales. Calcula con los parámetros definidos en `pars.in` la función gaussiana que va a ser la perturbación, también calcula su primera derivada.

★ `evolve.f90`

Módulo que invoca a los módulos: `derivs.f90`, `boundary.f90`, `rhs.f90` y a `pars.f90`. Es el encargado de resolver el sistema de ecuaciones apoyándose en los demás programas. El método numérico utilizado es el de Runge-Kutta SSP(3,3,2).

★ `main.f90`

Módulo que invoca a `initial.f90`, `evolve.f90` y a `pars.f90` y se encarga de conjuntarlos para dar la evolución numérica completa. Se encarga también de crear los archivos de datos de salida para  $R(\Phi_1)$ ,  $\pi$ ,  $\psi$ ; además de crear los archivos de salida para los observadores.

Antes de presentar los resultados, mostraremos una prueba de convergencia hecha a `pertolin.k`. Esta consiste en fijar todos los parámetros a una resolución dada ( $\Delta$ ) y correr el programa, para luego repetir el procedimiento anterior con la mitad ( $2\Delta$ ) y con la cuarta parte ( $4\Delta$ ) de resolución. Si llamamos  $R_e$  a la solución exacta, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} R_{4\Delta} &= R_e + C(4\Delta)^3 = R_e + 64C\Delta^3 \\ R_{2\Delta} &= R_e + C(2\Delta)^3 = R_e + 8C\Delta^3 \\ R_{4\Delta} &= R_e + C\Delta^3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

entonces obtenemos

$$\begin{aligned} R_{4\Delta} - R_{2\Delta} &= 56C\Delta^3 \\ R_{2\Delta} - R_{\Delta} &= 7C\Delta^3 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Con  $C$  una constante y la potencia 3 es porque la aproximación que tenemos es a tercer orden lo que quiere decir que si duplicamos la resolución el error debe reducirse en un factor de  $2^3 = 8$ . Si graficamos simultáneamente  $R_{4\Delta} - R_{2\Delta}$  y  $8(R_{2\Delta} - R_{\Delta})$  las curvas deben aproximarse una a otra probando convergencia del código numérico.

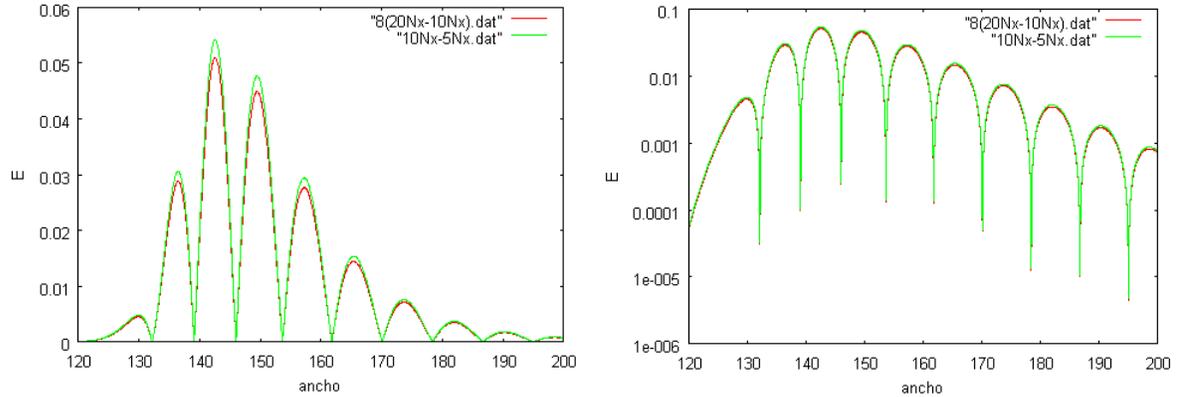


Figura 5.1: Prueba de convergencia variando el número de puntos espaciales  $N_x=5000$ ,  $10000$  y  $20000$  tomando valores absolutos. Señal gravitacional de un hoyo negro de masa  $M = 1$ , momento angular por unidad de masa  $a = 0.25$ , números armónicos  $l = 2$  y  $m = 0$ , amplitud de  $A=0.005$  y ancho de  $s = 1$ . Todas registradas por un observador situado a  $100M$

## 5.2. Resultados

A continuación se muestran las gráficas obtenidas al implementar el código computacional. La perturbación usada fue un pulso gaussiano en  $\Psi_4$  de la forma:

$$\Psi_4^{(1)} = A \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{s^2} \right] \quad (5.3)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $s^2$  es la varianza o ancho medio y  $x_0$  es el centro de la gaussiana, recalquemos que  $A$ ,  $s$  y  $x_0$  son valores constantes.

Se variaron los parámetros de momento angular, armónico  $m$  y los de amplitud y ancho de la perturbación para generar distintas respuestas gravitacionales del hoyo negro y así ver como es la dependencia de la respuesta con cada parámetro. También se vió el caso no rotante para ver que efectivamente la solución numérica se reduce al caso de Schwarzschild.

### 5.2.1. Caso no rotante

De las ecuaciones a resolver vimos que cuando  $a = 0$  se reduce al caso del hoyo negro de Schwarzschild por tanto la evolución numérica hecha para del hoyo negro de Kerr cuando  $a = 0$  y  $m = 0$  debe reducirse a la evolución numérica para el hoyo negro de Schwarzschild. En caso de que no sucediese esto tendríamos una incongruencia en la implementación del método numérico. Por tal motivo comparemos el código utilizado para Kerr, `pertolin K`, con el utilizado para Schwarzschild, `pertolin S` (también desarrollado en el ICN). A continuación se muestran en la figura 5.2 dos señales gravitacionales para probar que efectivamente el código de Kerr se reduce al de

Schwarzschild cuando el momento angular es cero.

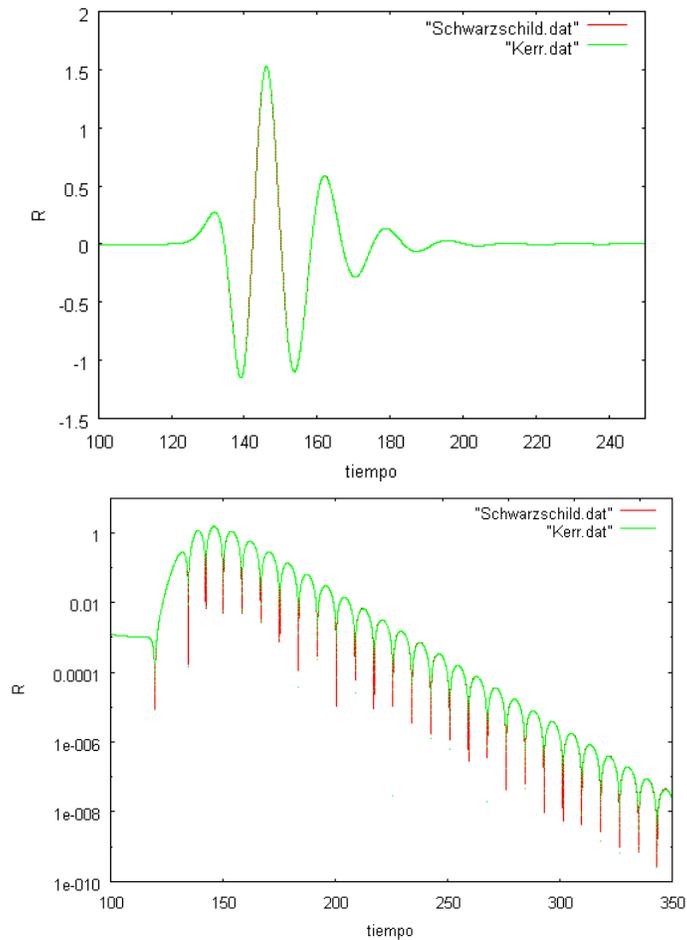


Figura 5.2: Comparación de ondas gravitacionales del código del hoyo negro de Kerr y el de Schwarzschild. Hoyos negros de masa  $M = 1$ , momento angular por unidad de masa  $a=0$  para el de Kerr, números armónicos  $l = 2$  y  $m = 0$ , amplitud de  $A=0.005$  y ancho de la gaussiana de  $s = 1$ . Escala natural y logarítmica.

De la figura 5.2 se ve que claramente la solución numérica de Kerr se reduce a la de Schwarzschild cuando  $a = 0$ , ahora podemos estudiar algunas propiedades físicas de las ondas gravitacionales obtenidas en la simulación numérica.

### 5.2.2. Cambio de la onda gravitacional con la distancia

Primero veamos como cambia la señal gravitacional conforme se aleja del hoyo negro. En el código se han implementado cinco observadores que registran el paso de la onda gravitacional, éstos pueden ser colocados arbitrariamente en el dominio espacial del método numérico. Con estos observadores es posible estudiar a la onda gravitacional a distintas distancias. La figura 5.3 muestra la gráfica de la señal gravitacional recibida por los distintos observadores.

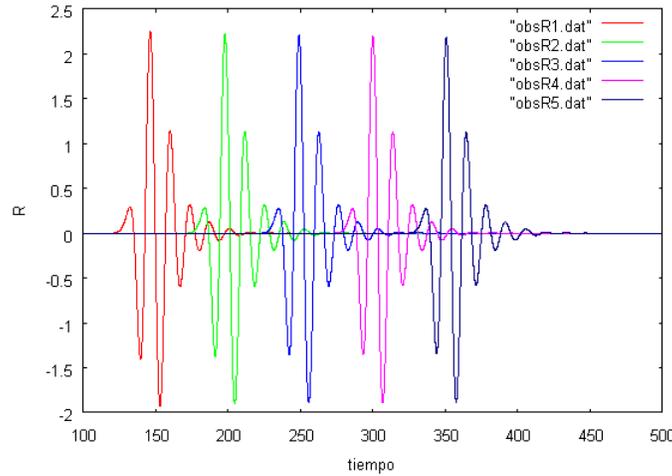


Figura 5.3: Registro de la señal gravitacional por cinco observadores: `obsR1`, `obsR2`, `obsR3`, `obsR4` y `obsR5` los cuales están a  $100M$ ,  $150M$ ,  $200M$ ,  $250M$  y  $300M$  respectivamente. Hoyo negro de masa  $M = 1$ , momento angular por unidad de masa  $a = 0.7$ , números armónicos  $l = 2$  y  $m = 1$ , amplitud de  $A = 0.005$  y ancho de la gaussiana de  $s = 1$ .

Para saber si cambia o no, sobrepondremos las señales registradas por los cinco observadores colocados a las mismas distancias de la gráfica 5.3.

De las gráficas de la figura 5.4 donde se sobreponen las señales podemos observar que los registros de los distintos observadores empalman casi a la perfección. Los cinco observadores fueron colocados a la misma distancia de  $50M$  entre ellos y como la señal gravitacional se mueve a la velocidad de la luz, la distancia temporal entre ellos también es la misma. Tomamos como referencia el mayor pico de señal registrada por el observador 1 y luego recorrimos las otras señales de forma tal que sus picos mayores coincidan, dando como resultado la figura 5.4. El hecho que no cambie la onda gravitacional conforme se aleja de su fuente es debido a que previamente habíamos multiplicado al escalar de Weyl perturbado  $\Psi_4^{(1)}$  por  $r$  para contrarrestar su amortiguamiento con la distancia que por el teorema de peeling sabemos que es de  $\sim 1/r$  [2].

Ya que vimos que las señal gravitacional generada no cambia conforme se aleja de la fuente, ahora podemos estudiar como cambia si variamos los parámetros de la perturbación, el momento angular y el armónico  $m$ .

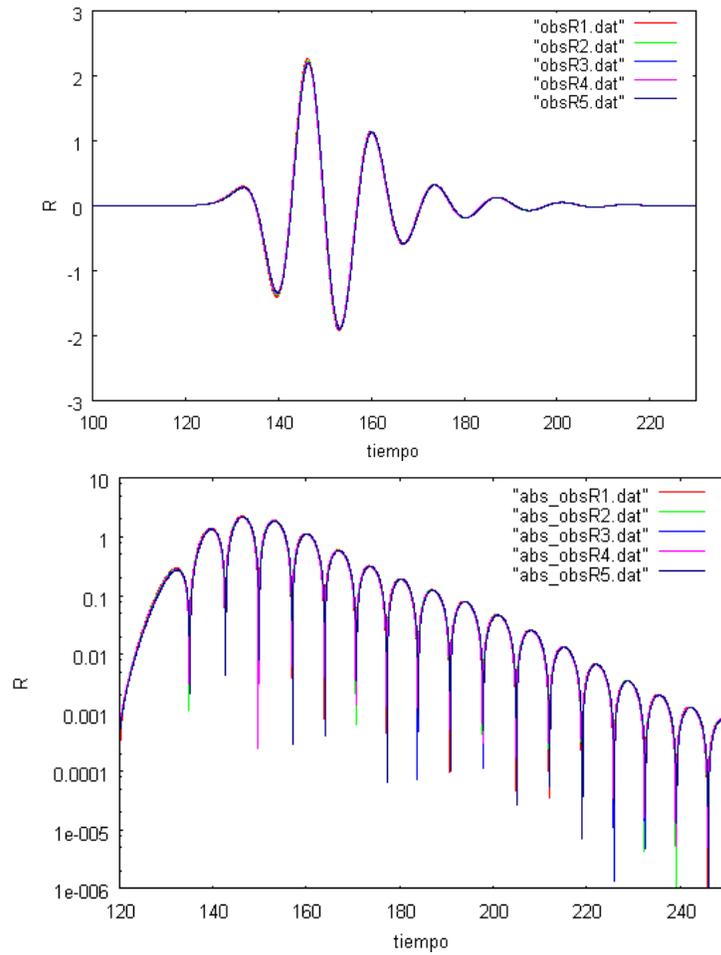


Figura 5.4: Registro de la señal gravitacional por cinco observadores. Hoyo negro de masa  $M = 1$ , momento angular por unidad de masa  $a = 0.7$ , números armónicos  $l = 2$  y  $m = 1$ , amplitud de  $A = 0.005$  y ancho de la gaussiana de  $s = 1$ . A 100M, 150M, 200M, 250M y 300M de distancia. En escala natural y logarítmica.

### 5.2.3. Cambio de la onda gravitacional con la amplitud $A$

Comencemos fijando todos los parámetros menos el de la amplitud para conocer como esta relacionada la amplitud de la respuesta con la amplitud de la perturbación. Graficaremos en la escala natural y en escala logarítmica.

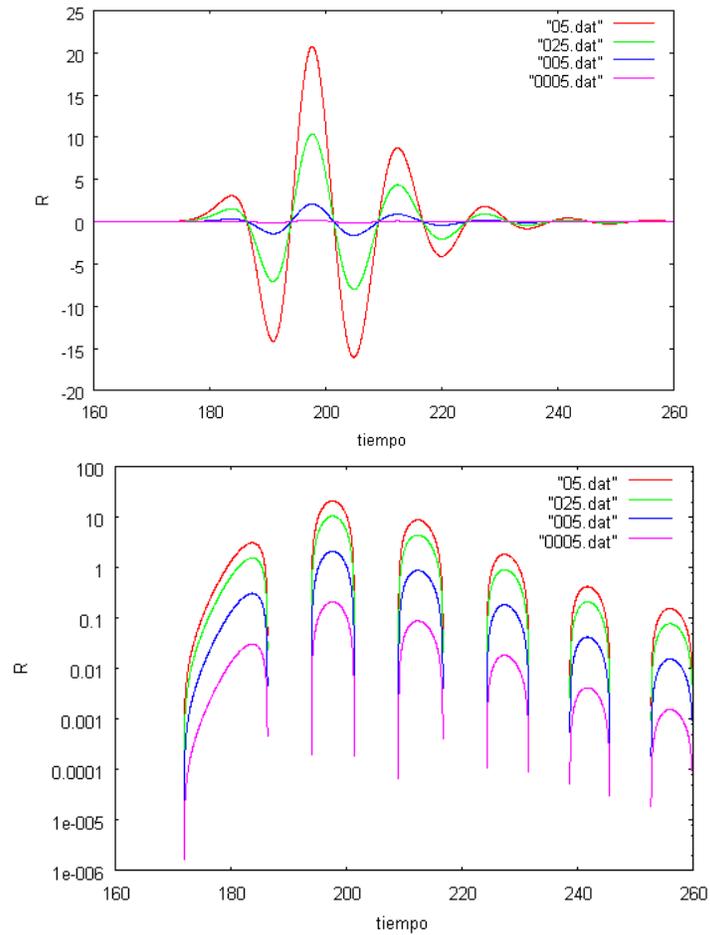


Figura 5.5: Señal gravitacional variando la amplitud de la gaussiana. Hoyo negro de masa  $M = 1$ , momento angular por unidad de masa  $a = 0.5$ , números armónicos  $l = 2$  y  $m = 1$  y ancho de la gaussiana de  $s = 1$ . Todas registradas por un observador situado a  $150M$  del hoyo negro. Las amplitudes son de  $A = 0.05, 0.025, 0.005$  y  $0.0005$ . La primera en escala natural y la segunda en escala logarítmica para el eje de  $R$ .

Podemos ver en la figura 5.5 que hay una relación lineal entre la amplitud de la señal de la gaussiana entrante y la amplitud de la señal de respuesta. Es natural que a mayor amplitud de la gaussiana mayor la amplitud de la señal. También observamos que no hay desfase de las señales, es decir, la ubicación de los picos de las señales no cambia en el tiempo al variar la amplitud.

Al multiplicar la amplitud de la gaussiana por un factor dado la señal de respuesta cambia con el mismo factor, es decir, si duplicamos la amplitud de la señal de la gaussiana se duplica la amplitud de la señal gravitacional. Esto es porque de las ecuaciones de movimiento (3.29) y (3.33) del capítulo 3 se puede ver linealidad cuando a  $R$  se multiplica por algún factor constante, este factor está siendo multiplicado por constantes y/o esta siendo operado por derivadas parciales que son operadores lineales por lo que puede ser factorizado de las ecuaciones.

#### 5.2.4. Cambio de la onda gravitacional con el ancho $s$

Por otro lado comparemos ahora la señal gravitacional variando el ancho de la gaussiana entrante. De las figuras 5.6 y 5.7 notamos que tanto la amplitud como la frecuencia de la onda gravitacional cambia. Lo más importante de la que muestran estas gráficas es que la frecuencia de oscilación de las señales gravitacionales aumenta conforme el ancho de la perturbación gaussiana disminuye. Un comportamiento similar ya ha sido reportado para el caso de acreción de flujos de materia a un hoyo negro de Schwarzschild [16]. Es interesante que a pesar de que en nuestro caso la perturbación fue un pulso gaussiano en  $\Psi_4$  y en la literatura es materia acretaada, el comportamiento de los modos de oscilación son cualitativamente similares. Los comportamientos de variación de amplitud y ancho del pulso gaussiano y comparación de la señal gravitacional a distintas distancias son un comportamiento observado también en el hoyo negro de Schwarzschild usando el código `pertolin S` [17].

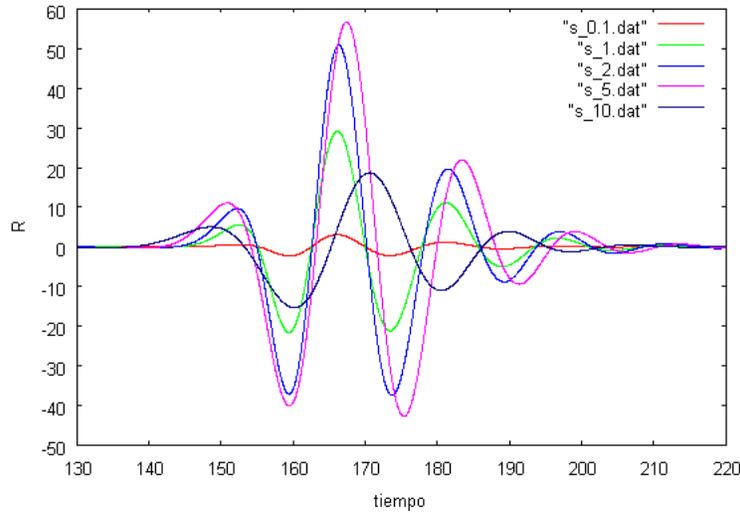


Figura 5.6: Señal gravitacional variando el ancho de la gaussiana. Hoyo negro de masa  $M = 1$ , momento angular por unidad de masa  $a = 0.25$ , números armónicos  $l = 2$  y  $m = 2$  y amplitud de la gaussiana de  $A = 0.005$ . Todas registradas por un observador situado a  $100M$  del hoyo negro. Los anchos de la gaussiana son de  $s = 0.1, 1, 2, 5$  y  $10$

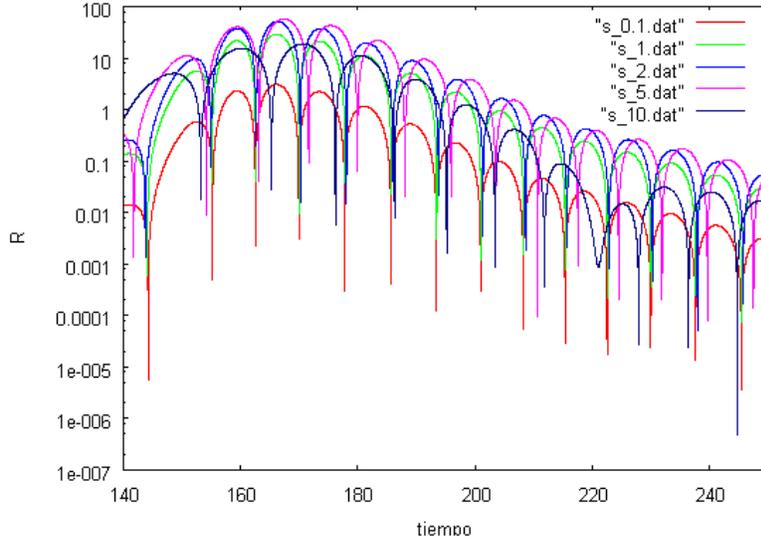


Figura 5.7: Escala logarítmica de la figura anterior.

La energía puede de la onda gravitacional puede ser calculada usando la siguiente ecuación [17]:

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \sum_{l,m} \left| \int_{-\infty}^t R_{l,m} dt' \right|^2 \quad (5.4)$$

en nuestro caso tenemos fijo el armónico  $l = 2$  y tomamos un solo valor de  $m$  con lo cual solo hay un término para la suma, integrando la ecuación anterior y considerando que estamos trabajando en un espacio-tiempo finito llegamos a la siguiente expresión para la energía:

$$E = \frac{t_0}{16\pi} \left| \int_0^{t_0} R_{2,m} dt' \right|^2 \quad (5.5)$$

donde  $t_0$  es el último punto temporal de la malla. Numéricamente se calculó la energía para distintos valores de  $s$ , los resultados se muestran graficando la energía  $E$  como función del parámetro  $s$ .

De la figura 5.8 se ve una dependencia clara de la energía con el ancho de la gaussiana, a valores menores del ancho son mayores los valores de la energía. Este comportamiento es cualitativamente similar con resultados obtenidos con pulsos de materia en Schwarzschild [17] [16]

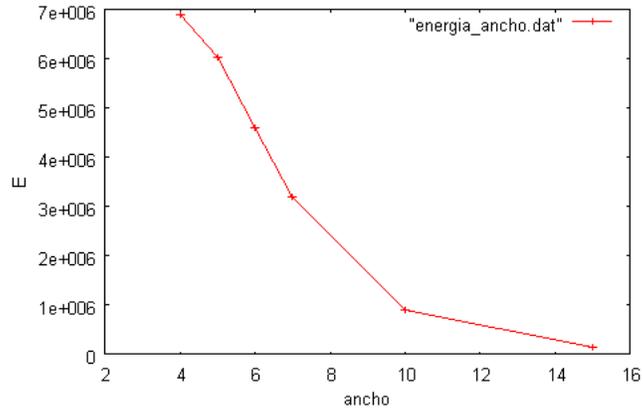


Figura 5.8: Energía de la onda gravitacional producida por una gaussiana de ancho  $s = 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$  y  $15$

### 5.2.5. Cambio de la onda gravitacional con el momento angular por unidad de masa $a$

Comencemos dejando fijos los parámetros y solo variemos  $a$  con una perturbación gaussiana también fija. De la ecuación (3.2) vemos que si  $|a| < 1$  tenemos que los dos horizontes están bien definidos, para  $a \geq 1$  ya no hay horizonte, dando una singularidad sin horizonte de eventos o como suele llamarse una *singularidad desnuda*, lo cual la mayoría de los físicos considera que no existen por la *conjetura de censura cósmica*. En nuestro código valores superiores a 1 para  $a$  no generan soluciones numéricas con sentido físico, por lo que solo se usaron valores de  $|a| < 1$ . A continuación se muestran los resultados:

De la figura 5.9 para distintos valores de  $a$  es fácil ver que la amplitud de la señal gravitacional aumenta conforme el valor de  $a$  aumenta. También se ve desfaseamiento, es posible ver que conforme aumenta el valor de  $a$  la separación entre crestas de la onda gravitacional es menor. Ahora viendo la figura 5.10 podemos ver más detalles: antes de la cresta mayor, las cinco señales son prácticamente las mismas, en la cresta mayor vemos que solo difieren en la amplitud y a partir de esta cresta se presenta el desfase.

Calculando la energía como función de  $a$  usando la ecuación (5.5) obtenemos la siguiente gráfica:

De la figura 5.11 podemos apreciar que conforme es mayor el valor de  $a$  mayor es el valor de la energía y que a mayores valores de  $a$  el crecimiento es mayor.

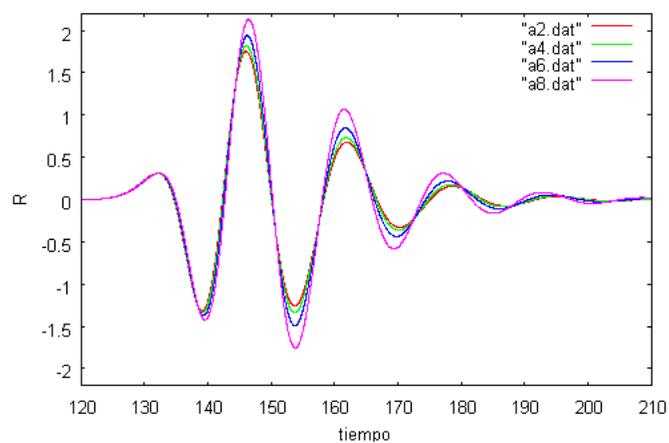


Figura 5.9: Señal gravitacional del hoyo negro de Kerr variando el momento angular por unidad de masa  $a$ . Hoyo negro de masa  $M = 1$ , números armónicos  $l = 2$  y  $m = 0$ , amplitud de la gaussiana de  $A=0.005$  y ancho  $s = 1$ . Todas registradas por un observador situado a  $100M$  del hoyo negro. Los valores tomados son  $a=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ .

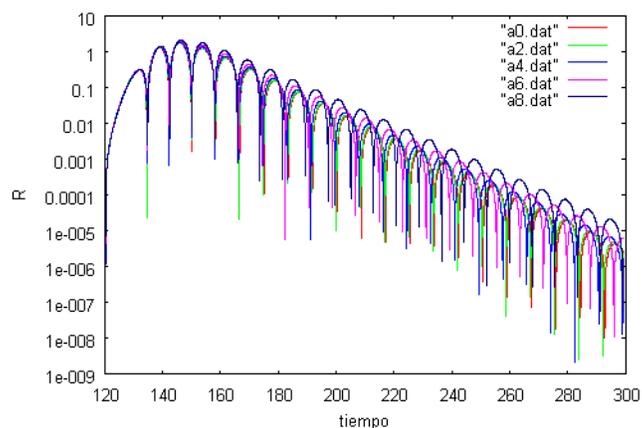


Figura 5.10: Escala logarítmica para el eje de  $R$  de la gráfica anterior

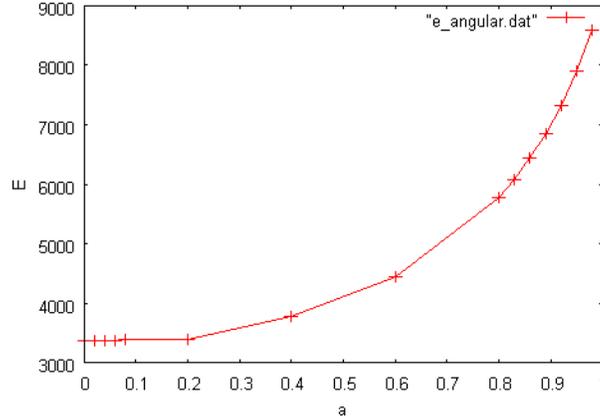


Figura 5.11: Energía de la onda gravitacional contra momento angular por unidad de masa  $a = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.83, 0.86, 0.89, 0.92, 0.95$  y  $0.98$

### 5.2.6. Cambio de la onda gravitacional con el número armónico $m$

Y ahora veamos la respuesta de la señal gravitacional con respecto al número armónico  $m$ . Cabe aclarar que en todos los casos hemos fijado al número armónico  $l = 2$ . De las ecuaciones mismas es fácil probar que los coeficientes de las ecuaciones (3.31) y (3.32) cumplen que  $A(l, m) = A(l, -m)$  y  $B(l, m) = B(l, -m)$  y de la parte real del operador  $\bar{\square}(l, m)$  (ecuaciones (3.33) y (3.35)) tenemos que  ${}_r\bar{\square}(l, m) = {}_r\bar{\square}(l, -m)$ . La parte imaginaria del operador  $\bar{\square}(l, m)$  es el único término que no es simétrico ante el cambio de signo de  $m$ . Por tal motivo comparemos la señal gravitacional cuando  $m=2$  y  $-2$ , y cuando  $m=1$  y  $-1$ .

De las gráficas de la figura 5.12 es claro que se cumple que no importa el signo del número armónico  $m$ . Esto es debido a que la perturbación gaussiana es una función real y no despierta la parte imaginaria de las ecuaciones evolucionadas. Por lo que no es necesario estudiar todos los casos, con estudiar los casos para  $m$  positivo (o negativo) es suficiente. De esta manera comparemos la respuesta gravitacional ahora variando  $m$  positivo.

Podemos apreciar que el comportamiento de las ondas gravitacionales es un tanto parecido a cuando se varió el parámetro  $a$ . Los parecidos son que desde el inicio hasta la primera cresta las señales son esencialmente iguales, en el primer valle es claro que la amplitud varía siendo mayor a valores mayores de  $m$  pero no hay un desfase claro. Y es hasta la segunda cresta cuando notamos el desfase de las señales siendo más evidente conforme van pasando las crestas.

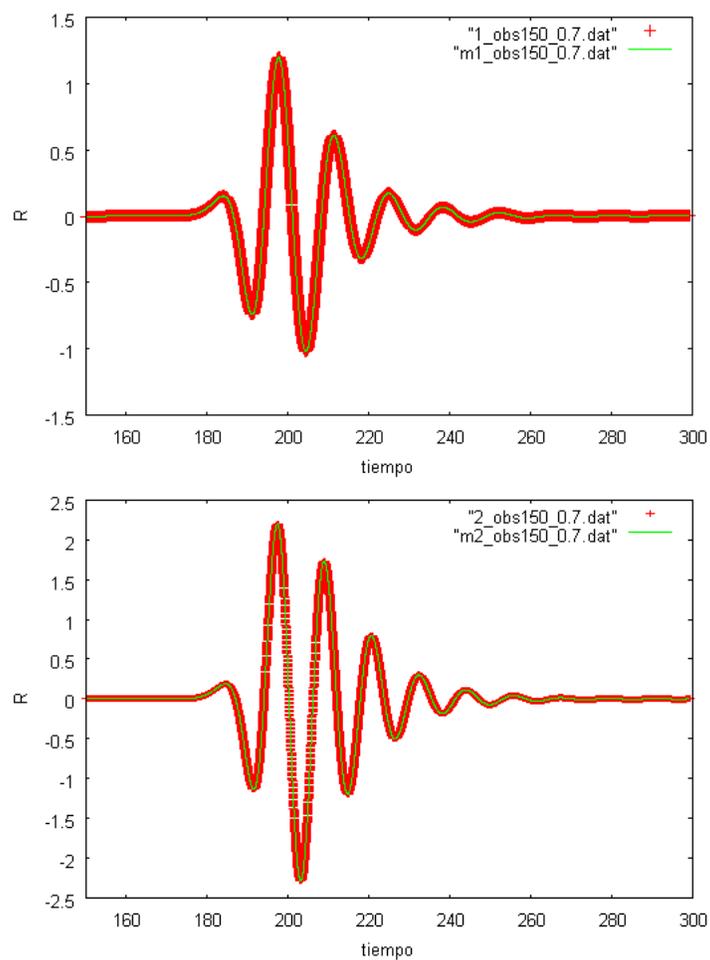


Figura 5.12: Señal gravitacional del hoyo negro de Kerr con número armónico  $m=2$  y  $-2$  para la primera gráfica y  $m=1$  y  $-1$  para la segunda. Hoyo negro de masa  $M = 1$ , momento angular por unidad de masa  $a=0.7$ , número armónico  $l = 2$ , amplitud de la gaussiana de  $A = 0,005$  y ancho  $s = 0,5$ . Registradas por un observador situado a  $150M$  del hoyo negro.

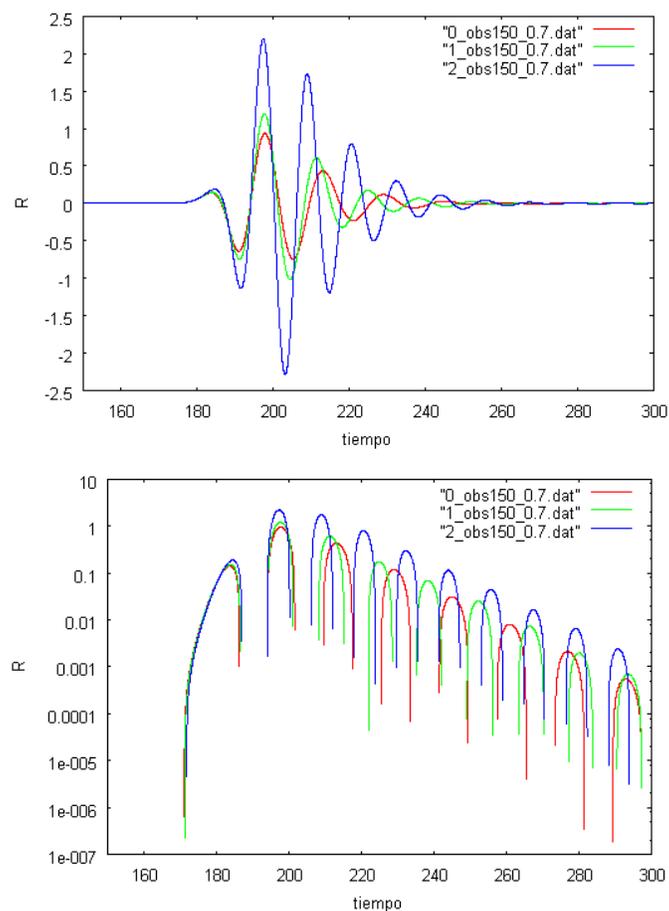


Figura 5.13: Señal gravitacional del hoyo negro de Kerr variando en número armónico  $m=0, 1, 2$ . Hoyo negro de masa  $M=1$ , momento angular por unidad de masa  $a=0.7$ , número armónico  $l=2$ , amplitud de la gaussiana de  $A=0.005$  y ancho  $s=0.5$ . Registradas por un observador situado a  $150M$  del hoyo negro. La primera en escala natural y la segunda en escala logarítmica para el eje de  $R$ .

## Capítulo 6

# Conclusiones

En el capítulo anterior se mostraron los resultados gráficos obtenidos del código `pertolin K`. Se mostraron pruebas de que el código es consistente para las situaciones físicas esperadas como la condición de que se reduzca al caso de Schwarzschild para cuando no hay rotación, lo cual es algo que por construcción de la métrica de Kerr se debe cumplir. Otra es que la señal gravitacional no cambia de forma y mantiene una velocidad constante al salir de la fuente. Esto nos indica que la propiedades físicas básicas de las ondas gravitacionales no se vieron afectadas por el cambio  $\Phi_1 = r \Psi_4^{(1)}$ .

En cuanto a las propiedades físicas de la perturbación, como la amplitud, se mencionó previamente que las ecuaciones mismas nos dicen que un cambio de amplitud sale linealmente de la ecuación, lo cual se apreció perfectamente en la simulación. Para el momento angular por unidad de masa del hoyo negro, la métrica de Kerr para valores  $a < 1$  vemos que la señal gravitacional aumenta y se desfasa, lo que nos muestra una dependencia importante de la señal gravitacional respecto a la rotación del hoyo negro. En cuanto a las propiedades del acoplamiento de las ecuaciones, se muestra que el número armónico  $m$  solo depende de su magnitud y no de su signo, y que conforme este aumenta la señal gravitacional también lo hace con un desfase claro después de la segunda cresta. Este número  $m$  está asociado a la descomposición que se hizo para la formulación de una dimensión.

El desarrollo matemático de este trabajo parte de una teoría perturbativa, pero el estudio de ondas gravitacionales no se limita a este desarrollo matemático. Existen otros tipos de técnicas matemáticas y numéricas que consideran el problema de emisión de ondas gravitacionales de un hoyo negro rotante o un sistema binario, como son los códigos de evolución espectral 3+1 [18], códigos 2+1 convergentes a cuarto orden [19], estudios numéricos completamente no lineales [20], entre otros. Lo importante es que los resultados obtenidos van de acuerdo con otros trabajos relacionados con este tema como son las últimas referencias mencionadas. Esto indica que el trabajo realizado tiene buena pauta y no se desvía de los resultados previos en este tema. Una de las aportaciones más importantes del desarrollo del código `pertolin K` es que en el trabajo [7] se muestra que el armónico dominante en la emisión es el mismo que el de la perturbación, lo cual permite discriminar conociendo la perturbación otros armónicos de la emisión sin perder información importante. Esto consecuentemente ahorra tiempo de cómputo en las simulaciones numéricas.

De lo mencionado anteriormente es claro que las ondas gravitacionales dependen fuertemente de los parámetros físicos de la perturbación, la pregunta interesante ahora es dada una onda gravitacional ¿qué la generó y que características tiene o tenía su fuente? Buscar la respuesta a esta pregunta mediante simulaciones numéricas es de gran importancia ya que se espera pronto detectar ondas gravitacionales, y cuando ya se tengan señales claras lo que sigue es tratar de conocer su fuente. Y también con otros medios conocer las fuentes gravitacionales y comparar si la fuentes van acorde con las predicciones computacionales. Y más aún, cuando se pueda detectar una fuente mediante el estudio de su radiación gravitacional con certeza, será posible estudiar regiones del universo hoy en día son imposibles de estudiar por estar rodeadas de muchas fuentes luminosas, como es el caso de los núcleos galácticos. Abriendo el campo de la astronomía gravitacional.

Por último, la emisión de ondas gravitacionales de un hoyo negro puede ser debida a que capta ondas gravitacionales de otra fuente las cuales lo perturban, pero este no es el único mecanismo de perturbación de un hoyo negro, puede ser también la rápida rotación de un sistema binario, la colisión con un cuerpo masivo compacto o bien la acreción de materia. Por ello el siguiente paso natural de este trabajo es la de hacer un modelo más realista del hoyo negro de Kerr perturbado, ya que desde el principio se trabajó en vacío lo cual simplifica considerablemente el desarrollo matemático y las ecuaciones a resolver. Entonces ahora hay que hacer  $T_{\mu\nu} \neq 0$  y modelarlo con polvo o un fluido perfecto, y hacer un desarrollo análogo al de este trabajo, llegar a las ecuaciones de evolución, modificar `pertolin K` o hacer un nuevo código para resolverlo numéricamente y finalmente hacer el estudio de los resultados viendo si son congruentes con casos límite (como Schwarzschild y Kerr en vacío) y con trabajos ya hechos con otras técnicas. Es de particular interés conocer como está relacionada la acreción de materia a un hoyo negro y su emisión de ondas gravitacionales, y conocer la relación entre la distribución de materia y las propiedades físicas del hoyo negro con la radiación gravitacional emitida.

## Apéndice A

# Clasificación de Petrov y Teorema de *peeling*

El tensor de Weyl puede ser completamente descrito en términos de cinco escalares  $\Psi_\alpha$ , los cuales dependen completamente de la elección de la tétrada. Entonces es factible preguntarse si es posible encontrar una transformación que haga a uno o más de los  $\Psi_\alpha$  igual a cero. Para ello sin pérdida de generalidad supongamos que  $\Psi_4 \neq 0$  para transformaciones de la forma:

*transformación de clase I*

$$l^\mu \rightarrow l^\mu, \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + al^\mu, \quad m^{*\mu} \rightarrow m^{*\mu} + \bar{a}l^\mu, \quad k^\mu \rightarrow k^\mu + \bar{a}m^\mu + am^{*\mu} + a\bar{a}l^\mu. \quad (\text{A.1})$$

los escalares de Weyl se transforman

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow \Psi_0, \\ \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + \bar{a}\Psi_0, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2\bar{a}\Psi_1 + \bar{a}^2\Psi_0, \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3\bar{a}\Psi_2 + 3\bar{a}^2\Psi_1 + \bar{a}^3\Psi_0, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4\bar{a}\Psi_3 + 6\bar{a}^2\Psi_2 + 4\bar{a}^3\Psi_1 + \bar{a}^4\Psi_0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

y para la transformación de la forma:

*transformación de clase II*

$$l^\mu \rightarrow \lambda^{-1}l^\mu, \quad k^\mu \rightarrow \lambda k^\mu, \quad m^\mu \rightarrow e^{i\theta}m^\mu, \quad m^{*\mu} \rightarrow e^{-i\theta}m^{*\mu}. \quad (\text{A.3})$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\
\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \\
\Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \\
\Psi_4 &\rightarrow \Psi_4.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Para que el escalar  $\Psi_0$  de la expresión anterior sea cero debemos elegir al parámetro  $b$  de forma tal que sea la raíz cuártica de la ecuación:

$$\Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 = 0 \tag{A.5}$$

esta ecuación tiene en general cuatro raíces complejas. Las direcciones resultantes del nuevo vector  $l^\mu$  son:

$$l^\mu \rightarrow l^\mu + \bar{b}m^\mu + bm^{*\mu} + b\bar{b}k^\mu. \tag{A.6}$$

que son conocidas como las *direcciones principales del tensor de Weyl*. Cuando alguna de las raíces de la ecuación (A.5) coincide se dice que el espacio-tiempo es algebraicamente especial. Esta es la base de la clasificación de Petrov que separa a los espacios-tiempo de acuerdo con el número de raíces distintas de la ecuación (A.5):

**Tipo I.-** Las cuatro raíces  $b_1, b_2, b_3, b_4$  son distintas, en este caso podemos hacer una transformación de clase II con  $b$  igual a cualquiera de las otras raíces, que va a dar como resultado  $\Psi_0 = 0$ . Después podemos hacer una transformación de clase I para hacer  $\Psi_4$  cero manteniendo  $\Psi_0 = 0$ . Para Petrov tipo I, es posible escoger una tétrada para un espacio-tiempo de forma tal que solo  $\Psi_1, \Psi_2$  y  $\Psi_3$  sean distintos de cero.

**Tipo II.-** Dos raíces coinciden  $b_1 = b_2, b_3, b_4$ . En este caso la derivada de (A.5) con respecto a  $b$  debe anularse para  $b = b_1$ . Y viendo la transformación de  $\Psi_1$  podemos ver que esto implica que  $\Psi_1$  también se anula. Entonces cuando  $b = b_1$  es posible hacer  $\Psi_0 = 0$  y  $\Psi_1 = 0$  y como en el caso anterior podemos hacer una transformación de clase I para hacer a  $\Psi_4$  cero. Para un espacio-tiempo de tipo II siempre es posible escoger una tétrada donde solo  $\Psi_2$  y  $\Psi_3$  son distintos de cero. Espacios-tiempo de tipo II combinan los efectos de espacios tipo D, III y N pero de una manera no-lineal más complicada.

**Tipo III.-** Tres raíces coinciden  $b_1 = b_2 = b_3, b_4$ . Siguiendo los argumentos anteriores vemos que eligiendo  $b = b_1$  tanto la primera como la segunda derivada de (A.5) con respecto a  $b$  se anulan lo que implica que  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$ . Por tanto para espacios-tiempo de tipo III siempre es

posible escoger una tétrada donde solo  $\Psi_3$  es distinto de cero.

**Tipo N.-** Todas las raíces coinciden  $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ . Con el mismo argumento se tiene que para una transformación de clase II tenemos:  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ , sin embargo ahora no es posible hacer que  $\Psi_4$  sea cero. Para espacios-tiempo de tipo N podemos escoger una tétrada en la que solo  $\Psi_4$  sea no nulo.

**Tipo D.-** Dos pares de raíces coinciden:  $b_1 = b_2, b_3 = b_4$ . Este caso debido a las dos raíces dobles necesariamente la transformación de clase II para  $\Psi_0$  debe de tener la forma:  $\Psi_0 \rightarrow \Psi_4(b-b_1)^2(b-b_2)^2$ . Esto debe de cumplirse sin importar los valores de los  $\Psi_\alpha$ . Podemos obtener transformaciones de los  $\Psi_\alpha$  como derivadas de esta transformación con respecto  $b$  y con el apropiado reescalamiento tenemos:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &\rightarrow \frac{\Psi_4}{2}(b-b_1)(b-b_2)(2b-b_1-b_2), \\ \Psi_2 &\rightarrow \frac{\Psi_4}{6}[6b^2 - 6b(b_1-b_2) + b_1^2 + b_2^2 + 4b_1b_2], \\ \Psi_3 &\rightarrow \frac{\Psi_4}{2}(2b-b_1-b_2), \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Podemos ahora sustituir estas nuevas variables en una transformación de clase I para encontrar que después de estas transformaciones  $\Psi_4$  se convierte en:

$$\Psi_4 \rightarrow \Psi_4[\bar{a}(b-b_1)+1]^2 + [\bar{a}(b-b_2)+1]^2\tag{A.8}$$

Escojamos ahora  $b = b_1$ , entonces antes de la primera transformación teníamos  $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$  (doble raíz). Después, para la segunda transformación encontramos:

$$\Psi_4 \rightarrow \Psi_4[\bar{a}(b_1-b_2)+1]^2.\tag{A.9}$$

Esto muestra que la ecuación cuártica en donde  $\Psi_4$  se anula tiene una doble raíz  $\bar{a} = \frac{1}{(b_2-b_1)}$ . Tomando en cuenta este valor para  $\bar{a}$  podemos ahora hacer tanto  $\Psi_4$  como  $\Psi_3$  cero mientras mantenemos  $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ . El resultado final es que para un espacio-tiempo de tipo D podemos siempre escoger una transformación donde solo  $\Psi_2$  sea distinto de cero (o como en el caso de este trabajo  $\Psi_4$ ). Los espacios-tiempo tipo D están asociados con campos gravitacionales de cuerpos masivos aislados, tales como estrellas, hoyos negros etc. Más precisamente, los espacios-tiempo tipo D suceden cuando un objeto es caracterizado por su masa y su momento angular. Las dos direcciones dobles principales están definidas radialmente, hacia adentro y hacia afuera del cuerpo. Los ejemplos más importantes para espacios-tiempo tipo D son los hoyos negros de Schwarzschild y de Kerr en vacío.

**Tipo O.-** El tensor de Weyl se anula idénticamente, es decir, el espacio-tiempo es conformemente plano. Los ejemplos característicos para estos espacios-tiempo son el espacio-tiempo de Minkowski y el espacio-tiempo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker. En este espacio-tiempo los efectos gravitacionales deben ser nulos.

Finalmente mencionaremos una propiedad importante de los espacios-tiempo asociados a cuerpos aislados. Se puede llegar a que, bajo condiciones muy generales, es posible mostrar un comportamiento asintótico de los escalares de Weyl es de la forma:

$$\Psi_n \sim \frac{1}{r^{5-n}}. \quad (\text{A.10})$$

y el tensor de Riemann

$$R \sim \frac{N}{r} + \frac{III}{r^2} + \frac{II}{r^3} + \frac{I}{r^4}. \quad (\text{A.11})$$

Esto es conocido como el *teorema de peeling*, y en particular implica que lejos de la fuente gravitacional las ondas gravitacionales se comportan localmente como una onda plana [2].

# Bibliografía

- [1] J. A. Wheeler C. W. Misner, K. S. Thorne. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, New York, 1973.
- [2] M. Alcubierre. *Introduction to 3 + 1 numerical relativity*. Clarendon Press, Oxford, 2007.
- [3] B. F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985, 19th printing 2007.
- [4] Newman and R. Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math Phys.*, 3:566–579, 1962.
- [5] S. A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole I. fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *Astroph. J.*, 185:635–647, 1973.
- [6] S. Chandrasekhar. *The Mathematical theory of black holes*. Clarendon Press Oxford, Oxford, UK, 1983.
- [7] Juan Carlos Degollado Darío Núñez and Carlos Palenzuela. 1-D evolution of the perturbed kerr black hole. *en redacción*, 2009.
- [8] B. O’Neill. *The geometry of Kerr black hole*. AK Peters, 2005.
- [9] D. Núñez A. Zenginoğlu and S. Husa. Gravitational perturbations of schwarzschild space-time at null infinity and the hyperboloidal initial value problem. *Class. Quantum. Gravit.*, 26:035009, 2009.
- [10] L. C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [11] J. D. Hoffman. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001.
- [12] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [13] R. J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Differential Equations*. draft version, Washington, 2005.
- [14] Strikwerda J.C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series, California, 1989.
- [15] S. Gottlieb. On high order strong stability preserving runge-kutta and multi step time discretizations. *Journal of Scientific Computing*, 25:Nos. 1/2, 2005.

- [16] J. A. Font P. Papadopoulos. Matter flows around black holes and gravitational radiation. *Phys. Rev. D*, 59:044014, 1999.
- [17] Juan Carlos Degollado Darío Núñez and Carlos Palenzuela. Signatures of the sources in the gravitational waves of a perturbed schwarzschild black hole. *en redacción*, 2009.
- [18] L. M. Burko L. E. Kidder H. P. Pfeiffer M. A. Scheel, A. L. Erickcek and S. A. Teukolsky. 3d simulations of linearized scalar fields in kerr spacetime. *Phys. Rev. D*, 69:104006, 2004.
- [19] Enrique Pazos Ávalos and Carlos O. Lousto. Numerical integration of the teukolsky equation in the time domain. *Phys. Rev. D*, 72:084022, 2005.
- [20] C. O. Lousto M. Campanelli and Y. Zlochower. Spinning-black-hole binaries: The orbital hang up. *Phys. Rev. D*, 74:041501, 2006.