



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Orígenes cuánticos de las asimetrías  
cosmológicas**

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

P R E S E N T A:

**Adolfo J. De Unánue Tiscareño**

DIRECTOR DE TESIS: Daniel Eduardo Sudarsky

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Chryssommalis Chryssomalakos

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: Alejandro Corichi



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

Ciudad Universitaria

Noviembre, 2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



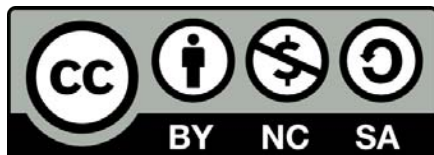
**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.





El autor, sin perjuicio de la legislación de la Universidad Nacional Autónoma de México, otorga a esta obra la siguiente licencia:

Esta obra está licenciada bajo una **Licencia Atribución-No Comercial-Licenciamiento Recíproco 2.5 México** de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/mx/>

o envíenos una carta a

**Creative Commons**  
171 Second Street, Suite 300,  
San Francisco, California,  
94105, USA.



*A mis padres por su confianza,  
a mis hermanos por su apoyo,  
a mis amigos por su aliento.*



## AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a todas las personas que estuvieron conmigo todo este tiempo y no perdían la confianza en que acabaría la tesis doctoral algún día. En particular quiero agradecer a mis padres por educarme del modo en el que soy y que eso me ayudó a terminar ¡Gracias mamá! ¡Gracias papá! A mi hermano **Ernesto** que se *chutó* toda la parte dura del doctorado conmigo y me apoyó para sobrevivir, sin él no hubiera sido posible nada de esto (gracias mil, *erni*). A mi hermana **Daniela** que me ayudaba a mantener la cordura. A mi otro hermano **Wicho** ¿Que hubiera sido sin su apoyo? Quiero agradecer a mis amigos de mty (y de la infancia) **Juan Carlos** (*Pachón*), **Victor** (*Gigio*) y a **Homero** (*el ingeniero*), por darme consejos y palabras de aliento. A mi amiga del alma **Elena** que como siempre me acompaña en todas mis locuras. A mis amigos y compañeros de viaje **Alexander**, **Nacho** y **Marianeo**, con los que discutí, sufrí, compartí miles de horas iluminadoras en varios aspectos de mi vida. Quiero agradecer con todos los honores a mi asesor y amigo **Daniel Sudarsky** que aconsejó y me enseñó a ser mejor persona en varios aspectos, él me enseñó como ser un excelente científico y ser humano y espero (*sólo espero*) que se me haya quedado algo de lo mucho que me enseñó. Muchísimas gracias por todo profesor (y gracias por aguantarme, orientarme, soportarme, y un largo etc. ). También quiero agradecer a mi asesor **Chryssommalis Chryssomalakos**, que con su conocimiento y agudeza siempre me sorprendía, enseñaba y me motivaba a ser mejor cada día. Quiero agradecer a los sinodales por tomarse la molestia de leer este *mamotreto*<sup>1</sup> lleno de errores gramaticales y corregirlos (¡espero no haya más en los agradecimientos!). Gracias también a **Yanalte** y **Manuel Torres** por su paciencia y apoyo en todos los momentos de este *laaaargo* doctorado.

De verdad, sé que faltan personas, se que las que mencioné no les he hecho justicia, pero, a todos ustedes, no saben el inmenso bien que me ha hecho conocerlos. ¡**Muchas Gracias!**

---

<sup>1</sup>El profesor Capovilla acertadamente lo llamo *War and Peace*, obviamente no por el esplendor literario que hay en la tesis.





## RESUMEN

---

### ORÍGENES CUÁNTICOS DE LAS ASIMETRÍAS COSMOLÓGICAS

Adolfo J. De Unánue Tiscareño

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

La versión estándar sobre el origen de la estructura cosmológica dada por el paradigma inflacionario, en el cual la estructura es resultado de las fluctuaciones cuánticas ocurridas durante la etapa inflacionaria, es poco satisfactoria: ¿Exactamente cómo el Universo transita de una época homogénea e isotrópica a una donde las incertidumbres cuánticas se convierten en fluctuaciones inhomogéneas? El problema de la versión estándar es que las predicciones del modelo inflacionario respecto a este punto no se encuentran justificadas por ningún esquema de mecánica cuántica. Una propuesta de solución fue hecha en [A. Perez, H. Sahlmann and D. Sudarsky, *Classical and Quantum Gravity* **23**, 2317 (2006)]. En ese trabajo se propone un proceso similar al colapso de la función de onda mecanico-cuántica de los diversos modos del campo inflatónico. Esta idea fue inspirada por trabajos de R. Penrose en los cuales la gravedad cuántica tiene un papel en el rompimiento de la evolución unitaria estándar de la mecánica cuántica. En este trabajo de tesis proponemos y estudiamos un nuevo esquema de colapso que sigue las correlaciones indicadas en el funcional de Wigner del estado inicial. Se dedujeron, también, las fórmulas para múltiples colapsos y sus efectos en el espectro de potencias. Además, en esta tesis nos enfocamos en un estudio más detallado de los tres esquemas de colapso y de su posible traza en los datos observacionales.



## ABSTRACT

---

### THE QUANTUM ORIGINS OF THE COSMOLOGICAL ASYMMETRY

Adolfo J. De Unánue Tiscareño

Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

The standard inflationary version of the origin of the cosmic structure as the result of the quantum fluctuations during the inflationary stage is less than fully satisfactory: how exactly does the Universe transit from a homogeneous and isotropic stage to one where the quantum uncertainties become actual inhomogeneous fluctuations? The point is that the predictions of inflation in this regard cannot be fully justified in any known scheme of quantum physics. A proposal was made in [A. Perez, H. Sahlmann and D. Sudarsky, *Classical and Quantum Gravity* **23**, 2317 (2006)] to solve this problem by invoking a process similar to the collapse of the quantum mechanical wave function of the various modes of the inflaton field. This in turn was inspired by ideas of R. Penrose about the roles that quantum gravity might play in bringing about such breakdown of standard unitary evolution of quantum mechanics. In this work we propose and study a new collapse scheme that follows the correlations indicated in the Wigner functional of the initial state. Furthermore, in this thesis work we will focus on a more detailed study of three collapse schemes (robustness, multiple collapses) and on the traces they might leave on the observational data.

## ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Cosmología Estándar e Inflación</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Cosmología Física. . . . .	2
1.3 Cosmología Estándar . . . . .	19
1.4 Cosmología Observacional . . . . .	30
1.5 Éxitos y problemas de la cosmología estándar . . . . .	34
1.6 Inflación . . . . .	43
1.7 Modelo de Concordancia: $\Lambda$ -CDM. . . . .	52
<b>2. Crítica al origen de la estructura propuesta por la Inflación</b>	<b>55</b>
2.1 Introducción . . . . .	55
2.2 Anisotropía del Fondo de Radiación Cósmica . . . . .	56
2.3 Formación de estructura . . . . .	64
2.4 Perturbaciones Primordiales . . . . .	75
2.5 Evolución <i>clásica</i> de las perturbaciones primordiales . . . . .	77
2.6 Origen de las semillas cosmológicas: Enfoque tradicional . . . . .	82
2.7 Origen de las semillas cosmológicas: Hipótesis del colapso . . . . .	86
<b>3. Estudio detallado de los esquemas de colapso</b>	<b>101</b>
3.1 Ecuaciones generales . . . . .	101
3.2 Evolución del campo escalar en diferentes épocas cosmológicas . . . . .	104
3.3 Evolución con múltiples colapsos . . . . .	107
3.4 Nuevo esquema de colapso: <i>à la</i> Wigner . . . . .	111
3.5 Comparación de los diferentes esquemas de colapso y las observaciones . . . . .	128
<b>4. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>151</b>

### Lista de Apéndices

<b>A. Teoría de Perturbaciones Cosmológicas</b>	<b>155</b>
A.1 Introducción . . . . .	155
A.2 Relatividad General y el principio de covariancia general . . . . .	156
A.3 Teoría de perturbaciones en Relatividad General . . . . .	159
A.4 Espacio-tiempo de ejemplo: el Universo FLRW . . . . .	165
A.5 Enfoques en el tratamiento perturbativo . . . . .	171
A.6 Formalismo Invariante de Norma . . . . .	174
A.7 Conclusiones. . . . .	198
A.8 Fórmulas útiles . . . . .	199
A.9 Series de Taylor de Campos Tensoriales. . . . .	200
A.10 Difeomorfismos de caballo . . . . .	200
A.11 Código . . . . .	201
<b>B. Equivalencia de ecuaciones</b>	<b>203</b>
B.1 Introducción . . . . .	203
B.2 Ecuaciones en la Norma Newtoniana Conforme. . . . .	205
B.3 Ecuaciones Invariantes de Norma . . . . .	205
B.4 Cuantización de $y = a\delta\varphi$ . . . . .	208
B.5 Cuantización de <i>à la</i> Mukhanov . . . . .	209
B.6 Conclusiones. . . . .	211
<b>C. Línea Temporal</b>	<b>213</b>
<b>D. Acrónimos</b>	<b>217</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>219</b>

## INTRODUCCIÓN

### Inflación, el origen de la estructura y el Problema de la medición

En los últimos años, se han producido avances espectaculares en la cosmología física, resultantes del notable aumento de la exactitud en las técnicas observacionales. Ejemplos de estos éxitos son los estudios de las supernovas [171, 172, 181, 182, 222], los estudios de estructura a gran escala [2, 83, 206–208, 223] y las observaciones extraordinariamente precisas de varios estudios recientes del Fondo Cósmico de Micro-ondas (CMB) en particular los de *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) [148]. En particular, las observaciones llevadas a cabo por el WMAP han fortalecido la percepción positiva de los escenarios inflacionarios entre los cosmólogos.

Cabe señalar sin embargo que gran parte de la atención de la investigación teórica en inflación se ha orientado hacia el dilucidación de la forma exacta del modelo inflacionario (es decir, el número de campos, la forma del potencial, y la aparición de acoplamientos no-mínimos a la gravedad, por mencionar algunos) y se ha prestado menos atención a las cuestiones de principio, como pueden ser la determinación de las condiciones iniciales, explicaciones de la baja entropía del estado inicial, el mecanismo que ocasiona el tránsito de un universo homogéneo e isotrópico a una etapa en que las incertidumbres cuánticas se vuelven fluctuaciones no-homogéneas, etc. . Por supuesto existen trabajos en los cuales se abordan estas cuestiones [89, 105, 106, 108, 178], pero como se aclara en [170, 202, 204, 205] una explicación plenamente satisfactoria parece requerir algo más allá de la comprensión actual de las leyes de la física. Los autores (Perez, Sahlmann y Sudarsky) propusieron la *hipótesis del colapso* siguiendo unas ideas de Penrose [166–169].

El punto neurálgico de la explicación tradicional es el hecho de que las predicciones del paradigma inflacionario en este sentido no pueden estar satisfactoriamente justificadas en la mecánica cuántica estándar. La Interpretación de Copenhague, por ejemplo, no es aplicable en este caso, debido al hecho de que nosotros, los observadores, somos parte del sistema, y para hacer las cosas peores, de hecho, somos parte de el resultado del proceso que queremos entender.

Aunque se tratarán con mayor extensión en el cuerpo principal del trabajo de tesis (caps. 2 y 3), veremos de manera sucinta aquí las motivaciones de la *hipótesis del colapso* como una posible explicación para el origen de las semillas de la estructura cósmica. Empezaremos revisando la explicación estándar del paradigma inflacionario.

- El universo comienza homogéneo y isotrópico <sup>2</sup>. El campo del inflatón es la especie domi-

---

<sup>2</sup>Inflación podría funcionar aún si no comenzamos –estrictamente– con esta condición, pero después de algunos  $e$ -

nante, y se encuentra en su estado de vacío cuántico, que también es *homogéneo e isotrópico*. El campo del inflatón, se describe en términos de su valor esperado representado como un campo escalar que depende sólo del tiempo cósmico, pero no de las coordenadas espaciales,  $\varphi = \varphi(t)$  y una fluctuación cuántica  $\widehat{\delta\varphi}$  que se encuentra en el estado de vacío adiabático, el cual también es homogéneo e isotrópico (algo que puede ser fácilmente verificado por la aplicación de los generadores de las rotaciones o las traslaciones a ese estado).

- Las “fluctuaciones” cuánticas del inflatón actúan como perturbaciones <sup>3</sup> del campo del inflatón y a través de las ecuaciones de Einstein como perturbaciones de la métrica.
- Mientras la época inflacionaria continúa las longitudes de onda varios modos del campo inflatónico crecen hasta ser mayores que el radio de Hubble (En la literatura se conoce a esto como “cruce del horizonte” o “salir del horizonte”<sup>4</sup>), las amplitudes cuánticas de los modos para modos mayores que el radio de Hubble se “congelan” debido a la evolución y en este momento se considera a estos modos como fluctuaciones de un campo clásico. Más tarde las fluctuaciones “reentran al radio de Hubble” transformándose en este momento en las semillas de la estructura cosmológica dejando su marca en el CMB.

El último paso es referido en la literatura como *transición cuántica-clásica*. Esta transición es entendida de diferentes maneras por diferentes investigadores, pero la principal línea de argumentación está centrada en alguna forma de *decoherencia* [89, 103, 105, 106, 106, 108]. El intento de resolver el problema de la medición en la mecánica cuántica usando decoherencia (o algún derivado de esta) ha sido criticada en varios artículos [por ejemplo 4, 79, 159], pero como se argumenta en [170] el problema de la medición es más agudo en el escenario cosmológico y por lo tanto es menos adecuado intentar resolverlo únicamente con decoherencia.

La postura adoptada en este trabajo de tesis (y concordante con [170]) está basada en la idea de que toda la física siempre es cuántica, y que el único papel que puede tener una descripción clásica es la de una aproximación en que las incertidumbres del estado del sistema son insignificamente pequeñas y pueden ser ignoradas, permitiendo así que se pueden tomar los valores de expectación cuánticos como una descripción razonable de los aspectos más importantes de la situación estudiada. Sin embargo hay que tener en cuenta que detrás de cualquier aproximación clásica hay una descripción completamente cuántica y por lo tanto, se debe rechazar cualquier descripción clásica en la que el universo es heterogéneo y anisotrópico pero al nivel de descripción cuántico se insiste en asociar al universo un estado homogéneo e isotrópico en todo momento.

En este trabajo de tesis siguiendo el artículo de Perez, Sahlmann y Sudarsky [170], se introduce una modificación al paradigma inflacionario para poder generar las semillas de la estructura cósmica: *la hipótesis del colapso auto-inducido*. Es decir, se considera un régimen específico en el cual la función de onda que describe a las fluctuaciones del inflatón en el estado vacío sufre un colapso *objetivo* que

---

*foldings* el universo estará efectivamente homogéneo e isotrópico.

<sup>3</sup>Encontramos esta redacción desafortunada porque podría inducir a pensar que algo está fluctuando en el sentido del movimiento browniano, mientras que el uso de palabras como “incertidumbre cuántica” evocan a la función de onda asociada al estado base del oscilador armónico, analogía más cercana de la situación.

<sup>4</sup>Otra redacción desafortunada, ya que identifica al *horizonte de eventos* con el *radio de Hubble*. esto se explicará a más detalle en el capítulo 1.



lo sacará de este estado homogéneo e isotrópico a algún otro estado con características diferentes. El mecanismo por el cual se cree que este colapso ocurre está inspirado en ideas de Roger Penrose [166–169] en las cuales el colapso de la función de onda se supone causado de alguna manera por aspectos gravitación cuántica.

La manera en que tratamos la transición de nuestro sistema de un estado que es isotrópico y homogéneo a uno que no lo sea, es asumir que a un determinado tiempo cósmico, “algo” induce el salto de un estado que describe un modo particular del campo cuántico (de manera similar a la regla de la mecánica cuántica que asocia un colapso de la función de onda al realizar una medición del sistema, salvo que en la situación cosmológica estudiada no hay un actor externo o dispositivo de observación que realice la operación de medición).

El principal objetivo de este trabajo de tesis es comparar los resultados que surgen del análisis de diferentes esquemas de colapso (los dos estudiados con anterioridad y uno nuevo) y/o de diversas situaciones como colapsos múltiples o tardíos, con las observaciones del CMB.

Este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo (Cosmología Estándar e Inflación) se presenta una revisión general del modelo cosmológico estándar, incluyendo éxitos y sus problemas. Algunos de los problemas del modelo estándar cosmológico (los de “naturalidad”) son resueltos al ser suplementado con una etapa inflacionaria, pero como se verá, la importancia fundamental del modelo inflacionario es la supuesta explicación que ofrece del origen de las perturbaciones primordiales. La aparición de las perturbaciones primordiales y su evolución hasta el CMB será el tema de la primera mitad del capítulo “Crítica al origen de la estructura propuesta por la Inflación”; la segunda parte del mismo capítulo 2 se centrará en la crítica a la explicación estándar y se discutirá a detalle la *hipótesis de colapso* propuesta en [170]. En el capítulo 3 titulado Estudio detallado de los esquemas de colapso presentaremos los desarrollos realizados en este trabajo de tesis: se estudiará un nuevo esquema de colapso diferente a los propuestos en [170] basado en el funcional de Wigner (sección 3.4), se comparará la robustez de las predicciones hechas por cada esquema de colapso para un solo colapso por modo del campo del inflatón durante la etapa inflacionaria (subsección 3.5.1). Además se estudiará los casos de múltiples colapsos por modo del campo suponiendo que el estado post-colapso es un estado coherente 3.5.2. Se finalizará el capítulo 3 reafirmando las diferencias conceptuales y predicciones de la hipótesis del colapso con respecto a la explicación estándar inflacionaria. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo de tesis en el capítulo 4. Se incluyen además apéndices que tratan sobre la teoría de perturbaciones en Relatividad General (apéndice A), comparaciones entre distintas fórmulas que aparecen en la literatura inflacionaria (apéndice B), y se recogen en los apéndices finales algunas formulas, datos numéricos y significado de las siglas usadas en este trabajo de tesis para comodidad del lector.

## Convenciones seguidas en el trabajo de tesis

*Cantidades geométricas* La notación usada para representar campos tensoriales será la definida en [215, pags. 23-26], conocida como *notación abstracta de índices*, e.g. el campo tensorial (0,2),  $T$ , se expresará con índices latinos  $T_{ab}$  cuando no este expresado en ningún sistema coordenado y cuando lo queramos especificar en un sistema coordenado usaremos índices griegos  $T_{\mu\nu}$ .

Los índices griegos son índices espacio-temporales y pueden tomar los valores de  $\{1, 2, 3, 4\}$ , índices latinos en el contexto de campos tensoriales referidos a un sistema coordenado tales como  $i, j, k$  representarán índices espaciales.

La métrica del espacio-tiempo  $g_{ab}$  es de cuatro dimensiones y tiene la signatura  $(-, +, +, +)$ . La métrica  $g_{ab}$  cumple con  $g^{ac}g_{cb} = \delta^a_b$ . La métrica también se utiliza para “elevar” y “bajar” índices espacio-temporales, i.e.  $T_b^a \equiv g^{ac}T_{bc}$ .

El tensor de Riemann  $R_{abd}^c$  sigue la convención de signos dada por [215, pag. 38] y es definido de manera libre de coordenadas mediante

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = -R_{abd}^c t^d \quad (\text{i.A})$$

en esta ecuación  $\nabla_a$  es la derivada covariante de la variedad  $\mathcal{M}$  que es compatible con la métrica, i.e.  $\nabla_a g_{bc} = 0$ . El tensor de Riemann cuando está referido a un sistema de coordenadas se expresa como [215, pag. 48]

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \left( \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \right) \quad (\text{i.B})$$

donde los  $\Gamma_{bc}^a$  son los llamados símbolos de Christoffel y están definidos mediante

$$\Gamma_{bc}^a := \frac{1}{2} g^{ad} (g_{bc,d} + g_{cd,b} - g_{bc,d}). \quad (\text{i.C})$$

*Transformaciones de Fourier* Nos apegaremos a la definición *simétrica* de la Transformada de Fourier, i.e. la transformada de Fourier  $\hat{f}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{F}(f)(\mathbf{k})$  de una función  $f(\mathbf{x})$  es

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}). \quad (\text{i.D})$$

La transformada de Fourier inversa es definida mediante

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}). \quad (\text{i.E})$$

A lo largo de este trabajo de tesis realizaremos un abuso de notación y usaremos el mismo símbolo para la transformada de Fourier y su inversa (i.e. eliminaremos el “gorro”,  $\hat{\}$ , de las funciones transformadas), salvo cuando haya riesgo de confusión. Esta decisión se tomó para no complicar la notación a lo largo de la tesis. Si existiese algún riesgo de confusión en el texto se volverá a reestablecer toda la notación.

A veces, durante el texto, será conveniente expresar las expansiones de Fourier en una sumatoria en lugar de una expresión integral, esto corresponde a tomar las funciones dentro de una caja cúbica con lados  $L$  y volumen  $V$ . Para recuperar las expresiones integrales será necesario hacer las siguientes sustituciones

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_k \rightarrow \int d^3k, \quad (\text{i.F.a})$$

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 f_k \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(k), \quad (\text{i.F.b})$$

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \delta_{kk'} \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{i.F.c})$$

*Unidades* Como estamos interesados en esta tesis en los aspectos cuánticos y gravitacionales, usaremos unidades apropiadas, en las que la velocidad de la luz es  $c = 1$ , pero la constante de Planck  $\hbar$  y la constante Gravitacional de Newton  $G$  conservan sus dimensiones. Por ejemplo, el factor de expansión tiene unidades de  $[a(\eta)] = 1$  y  $[\mathcal{H}] = L^{-1}$ . De esta manera, las cantidades que son expresables en unidades de longitud  $[L]$ , tiempo  $[T]$ , se expresarán en potencias de longitud. En general, para una cantidad con dimensiones  $L^n T^m M^p$  en unidades ordinarias, tendrá dimensión  $L^{n+m} M^p$  en estas unidades, y el factor de conversión entre ellas es  $c^m$ .



# CAPÍTULO 1

## COSMOLOGÍA ESTÁNDAR E INFLACIÓN

Los inocentes hombres de mente ligera,  
que creen que la astronomía puede  
aprenderse mirando a las estrellas sin  
conocimiento matemático alguno, serán,  
en la siguiente vida, pájaros

---

Platón, *Timeo*

### 1.1 Introducción

Cosmología es el estudio de la estructura a gran escala del Universo, donde *el Universo* es todo aquello que existe en el sentido físico. Esta definición del *Universo* es poco precisa y es mejor afinarla un poco diciendo que Cosmología *principalmente* se encarga del estudio de la estructura a gran escala en el *Universo Observable*<sup>1</sup>, es decir, su campo de estudio incluye la determinación de la naturaleza, distribución, orígenes y su relación con la gran escala del Universo, de las galaxias, *clusters*<sup>2</sup> de galaxias, objetos cuasi-estelares (QSO<sup>3</sup>), etc. observados a través de diversas longitudes de onda electromagnéticas usando telescopios de todos los tipos y que en un futuro se espera puedan ser utilizadas ondas gravitacionales o neutrinos para el mismo fin.

La Cosmología se puede dividir a su vez, en *Cosmología Observacional* cuya meta es determinar la geometría a gran escala del Universo Observable y su distribución de materia-energía a partir de las radiaciones emitidas por objetos distantes; *Cosmología física* que es el estudio de las interacciones durante la época de expansión muy temprana del *Hot Big Bang*; y la *Cosmología Astrofísica* que estudia el resultado del desarrollo posterior de las grandes estructuras como galaxias y clusters de las mismas. Dicho esto se puede decir que el marco de desarrollo de este trabajo está contenido en el de la cosmología física, la cual, de ahora en adelante la llamaremos simplemente Cosmología.

---

<sup>1</sup>Hacemos énfasis en la palabra *principalmente*, por que en teorías como Inflación el Universo Observable es una región pequeña comparada con el "Universo" que crece del parche que se infla y este "parche" a su vez pertenece a un "Meta-verso" (o "Multiverso") mucho más grande, que se supone está inflando de manera caótica, pero esto se comprenderá más adelante.

<sup>2</sup>Aunque la tesis está escrita en español, mantendremos algunas palabras de uso común en inglés, aquí *clusters* se puede traducir como "agrupamientos" o "cúmulos"

<sup>3</sup>Del inglés *quasi-stellar objects*.

## 1.2 Cosmología Física

El estudio de la Cosmología Física o simplemente Cosmología parte de las siguientes suposiciones:

- a La teoría de la Relatividad General de A. Einstein<sup>4</sup> describe correctamente la evolución del espacio-tiempo a gran escala (es decir es la teoría correcta de gravitación) [51, 91, 134, 215]
- b Luego de “promediar”<sup>5</sup> a una escala lo suficientemente grande<sup>6</sup> existen supuestos **observadores fundamentales** que ven un *universo isotrópico*. Además si la isotropía es exacta, el universo será espacialmente homogéneo. Esta suposición es conocida como *Principio Cosmológico* y fue introducida por A. Einstein en 1917.

Con estas suposiciones es posible construir modelos cosmológicos que se ajusten al universo observado. Estas suposiciones fueron hechas inicialmente por A. Einstein y W. de Sitter en 1917 y con ellas se dió inicio a la cosmología moderna. Idea que luego fue explotada por el físico ruso A. Friedmann<sup>7</sup> y G. Lemaître en la década de 1920 y puesta en sólidas bases geométricas por H.P. Robertson y A.G. Walker. Un poco después, en el campo observacional, E. Hubble (1929) estableció que las galaxias mostraban un incremento sistemático del *redshift* o corrimiento al rojo con el aumento de la distancia hacia nosotros y en la década de 1930, Eddington probó que los modelos estáticos de Einstein eran inestables. Esto estableció las bases de credibilidad de los universos conocidos como universos de **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)** [ver por ejemplo 52, 110, 120, 135, 153–155, 163].

De manera más formal se entiende que un **modelo cosmológico** [214] representa el Universo a cierta escala [68] y queda especificado por el par  $\{(\mathcal{M}, \mathbf{g}), \mathbf{u}\}$ , es decir, especificando la geometría espacio-temporal  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  y dando una familia de observadores fundamentales, cuya congruencia de líneas de mundo están descritas por el campo vectorial de velocidad  $\mathbf{u}$ . Las variables  $\{(\mathcal{M}, \mathbf{g}), \mathbf{u}\}$  determinan el comportamiento cinemático del universo. En algunos modelos cosmológicos la congruencia de observadores fundamentales se supone expandiéndose en cierta época, pero existen modelos donde esto no es el caso [214]. Para determinar el comportamiento dinámico, es necesario especificar el otro ingrediente importante de la Relatividad General, la materia, representada –en alguna escala promediada– por el tensor de energía-momento  $T_{ab}^{(A)}$  donde  $A$  etiqueta cada uno de los posibles tipos de materia presentes en el espacio-tiempo. La interacción entre materia y espacio-tiempo es gobernada mediante las Ecuaciones de Campo de Einstein (ECE):

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad T_{ab} = \sum_A T_{ab}^{(A)}. \quad (1.1)$$

<sup>4</sup>Existen estudios en la actualidad donde la cosmología se basa en otras teorías que no son Relatividad General para describir la gravedad, un ejemplo son las teorías conocidas como  $f(R)$  [195].

<sup>5</sup>Es importante mencionar aquí que no existe un procedimiento bien definido para darle sentido riguroso a esta palabra en Relatividad General [24, 68, 224].

<sup>6</sup>Más adelante en el texto veremos a que nos referimos por “suficientemente grande”.

<sup>7</sup>En esta tesis se usará para este apellido la transliteración *Friedmann* siguiendo la tradición occidental –que proviene de la traducción de sus artículos al alemán–. Su apellido es ruso y se escribe como *Fridman*, hay autores que hacen un compromiso entre estas dos opciones y escriben *Friedman*.

En ellas  $R_{ab} \equiv R_{acb}{}^c$  es el tensor de Ricci,  $\mathcal{R} \equiv R_a{}^a$  es el escalar de Ricci o escalar de curvatura,  $\kappa \equiv 8\pi G$  es la constante gravitacional de Einstein y  $T_{ab}$  es el tensor de energía-momento de todos los campos presentes en el espacio-tiempo. El tensor de  $R_{abd}{}^c$  fue definido en la introducción (i.A, página XVI).

El tensor de Ricci,  $R_{ab}$ , que se puede expresar en términos de los símbolos de Christoffel (i.C) mediante

$$R_{ab} = \Gamma_{ab,c}^c - \Gamma_{ac,b}^c + \Gamma_{dc}^c \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{db}^c \Gamma_{ac}^d. \quad (1.2)$$

Las ECE implican la ecuación de conservación<sup>8</sup> a través de las identidades de Bianchi [51, 134, 215]

$$\nabla_b G^{ab} = 0 \Rightarrow \nabla_b T^{ab} \equiv T^{ab}{}_{;b} = 0. \quad (1.3)$$

Como veremos posteriormente el modelo cosmológico actual incluye un componente de *Energía oscura* (DE) [ver 65, 126, 212, para otras explicaciones posibles], que es representado en sus caracterizaciones más simples por una **constante cosmológica**  $\Lambda$ , en ese caso las ECE (A.1) toman la forma

$$R_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ab} = \kappa T_{ab} - \Lambda g_{ab}, \quad (1.4)$$

y esta ecuación (1.4) es válida solamente si  $\Lambda$  es constante en tiempo y espacio, i.e. satisface  $\nabla_a \Lambda = 0$ . Como en este trabajo de tesis consideramos –siguiendo la práctica moderna– que  $\Lambda$  es un tipo de materia exótico, se le incluirá dentro de  $T_{ab}$ .

Es un procedimiento estándar descomponer al tensor de energía-momento  $T_{ab}$  respecto al campo vectorial temporal  $\mathbf{u}$  [66]:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + 2q_{(a} u_{b)} + p(g_{ab} + u_a u_b) + \pi_{ab}, \quad (1.5)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $p$  es la presión del fluido,  $\pi_{ab}$  es la presión anisotrópica y por último,  $q_a$ , aparece cuando la velocidad del fluido no está alineada con el campo vectorial  $u^a$ . Estas variables cumplen con las siguientes relaciones:

$$q_a u^a = 0, \quad \pi_{ab} u^b = 0, \quad , \pi_a{}^a = 0, \quad \pi_{ab} = \pi_{ba}. \quad (1.6)$$

### 1.2.1 Caracterización de los modelos cosmológicos

Es posible caracterizar al modelo cosmológico,  $(\mathcal{M}, \mathbf{g}, \mathbf{u})$ , invariante de acuerdo a (a) sus propiedades cinemáticas, (b) las propiedades del tensor de Weyl de  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  y (c) sus simetrías.

<sup>8</sup>Nótese que las ECE **no** garantizan la conservación de cada uno de los componentes de la materia, sólo el total.

### Propiedades cinemáticas

Las cantidades cinemáticas están asociadas con la congruencia temporal de  $\mathbf{u}$  fueron introducidas por Raychaudhuri a mediados de la década de 1950 [180] y se construyen como a continuación se muestra [40, 215].

Un campo vectorial temporal de  $u^a$  determina un tensor de proyección  $h_{ab}$  de acuerdo a

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (1.7)$$

cuya acción es proyectar tensores al espacio tridimensional ortogonal a  $\mathbf{u}$ . El tensor  $h_{ab}$  posee las siguientes características  $h^a_b = g^{ab} h_{cb}$ ,  $h_a^c h_c^b = h_a^b$ ,  $h_a^b u_b = 0$  y  $h_a^a = 3$ . Supongamos que  $u^a$  es el vector tangente a una congruencia temporal de geodésicas. El tensor  $h_{ab}$  permite descomponer la derivada covariante,  $\nabla_b u_a$ , que es puramente espacial  $\nabla_b u_a u^a = \nabla_b u_a u^b = 0$  en [215]

$$u_{a;b} = \frac{1}{3} \Theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (1.8)$$

donde  $\Theta = u^a_{;a}$  es la expansión,  $\sigma_{ab} = u_{(a;b)} - \frac{1}{3} \Theta h_{ab}$  el corte (*shear*) y  $\omega_{ab} = u_{[a;b]}$  el giro (*twist*)<sup>9</sup>. Es posible encontrar una ecuación de evolución para la expansión  $\Theta$  [ver pag. 218 de 215] conocida como la *ecuación de Raychaudhuri*

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3} \Theta^2 - 2(\sigma^2 - \omega^2) - R_{cd} u^c u^d \quad (1.10)$$

donde  $\dot{\Theta} \equiv \Theta_{;a} u^a$ ,  $\sigma^2 \equiv 1/2 \sigma_{ab} \sigma^{ab}$  y  $\omega^2 \equiv 1/2 \omega_{ab} \omega^{ab}$ .

Esta ecuación es de suma importancia por que es usada para los lemas de enfocamiento [215, pag. 219-223]– y a través de estos a los teoremas de Penrose-Hawking de singularidades [ver §9.5 de 215].

Como se verá más adelante, en universos tipo Friedmann-Lemaître, se definirá el parámetro de Hubble mediante

$$H \equiv \frac{1}{3} \Theta. \quad (1.11)$$

---

<sup>9</sup>En la derivación original de Raychaudhuri, el parte de la congruencia de partículas con velocidad  $u^a$  cayendo bajo su propia gravedad, luego, de mecánica de fluidos se sabe que sufrirá los efectos de (a) Contracción/Expansión, dada por la divergencia de  $u^a$ ,  $\Theta = u^a_{;a}$ . (b) Corte, distorsión de la figura sin cambio en el volumen, dada por un tensor simétrico sin traza y ortogonal a  $u^a$ , definido por  $\sigma_{ab} = u_{(a;b)} - \frac{1}{3} \Theta h_{ab} - \dot{u}_{(a} u_{b)}$ . (c) Rotación/Vorticidad, rotación sin cambio en su forma, dado por un tensor antisimétrico ortogonal a  $u^a$ :  $\omega_{ab} = u_{[a;b]} - \dot{u}_{[a} u_{b]}$  y (d) Aceleración debido a fuerzas no gravitacionales tales como gradientes de presión, definidos por  $\dot{u}_a = u_{a;b} u^b$ . Obteniendo la ecuación:

$$u_{a;b} = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3} \Theta h_{ab} + \dot{u}_a u_b. \quad (1.9)$$

Como se podrá notar, Raychaudhuri no partió del supuesto de que la congruencia estaba formada por geodésicas, que es la suposición hecha en el texto principal.



### Tensor Conforme de Weyl

La siguiente manera de caracterizar a los modelos cosmológicos es usando el tensor de Weyl  $C_{abcd}$  que se obtiene restando las partes con traza del tensor de Riemann  $R_{abcd}$ ,

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2} \left( g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a} \right) - \frac{1}{3} \mathcal{R} g_{a[c} g_{d]b}. \quad (1.12)$$

El tensor de Weyl comparte todas las simetrías del tensor de Riemann [215]. Usando las identidades de Bianchi y las ECE, además de condiciones de frontera apropiadas,  $C_{abcd}$  es determinado de una manera no-local por la materia en cualquier parte del universo, y representa así el “campo gravitacional libre” [66]. Se le conoce también como *tensor conforme de Weyl* por que se comporta de manera muy sencilla bajo transformaciones conformes de la métrica<sup>10</sup>.

Es útil separar a  $C_{abcd}$  en sus partes “eléctrica”,  $E_{ab}$  y “magnética”,  $H_{ab}$ , relativas a  $\mathbf{u}$ :

$$E_{ac} = C_{abcd} u^b u^d, \quad H_{ac} = {}^*C_{abcd} u^b u^d, \quad (1.13)$$

donde  ${}^*C_{abcd}$  es el dual del tensor de Weyl.

$${}^*C_{abcd} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ab}{}^{st} C_{stcd}$$

y  $\varepsilon^{abcd}$  es el pseudo-tensor completamente antisimétrico. Los tensores  $E_{ab}$  y  $H_{ab}$  son simétricos y sin traza, además que si ambos son cero, i.e.  $E_{ab} = 0 = H_{ab} \Rightarrow C_{abcd} = 0$ . Se puede demostrar que,

$$C_{abcd} C^{abcd} = 8 \left( E_{ab} E^{ab} - H_{ab} H^{ab} \right), \quad C_{abcd} {}^*C^{abcd} = 16 E_{ab} H^{ab}. \quad (1.14)$$

En 1954 A. Z. Petrov [reimpreso en 174] estudió las simetrías algebraicas del tensor de Weyl, y desarrolló un sistema para clasificarlas conocida ahora como *clasificación de Petrov*. Para lograrlo consideró al tensor de Weyl,  $C_{abcd}$ , evaluado en algún evento del espacio-tiempo, como actuando en el espacio de bivectores en ese mismo evento, i.e. ,  $X^{ab} \rightarrow \frac{1}{2} C_{cd}{}^{ab} X^{cd}$ ; de esta manera, es natural considerar el problema de encontrar los eigenvalores  $\lambda$  y los eigenbivectores,  $X^{ab}$  tales que

$$\frac{1}{2} C_{cd}{}^{ab} X^{cd} = \lambda X^{ab}. \quad (1.15)$$

Petrov encontró que sólo existen seis tipos de simetrías algebraicas (relacionadas con la multiplicidad de los eigenvalores) en las variedades Lorentzianas de cuatro dimensiones. Así, es posible caracterizar a los modelos cosmológicos usando los tipos de Petrov.

<sup>10</sup>Estas transformaciones conformes quedan definidas [apéndice D de 215] como sigue: Sea  $\mathcal{M}$  una variedad con métrica  $g_{ab}$ . Si  $\Omega$  es una función suave y estrictamente positiva, entonces la métrica  $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$  se dice que es derivada de  $g_{ab}$  mediante una *transformación conforme*. Es fácil probar que el tensor de Weyl, no cambia antes este tipo de transformaciones i.e.  $\tilde{C}_{abcd} = C_{abcd}$ .

### Simetrías del espacio-tiempo

Se define como isometría del espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ , al mapeo  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  que deja  $\mathbf{g}$  invariante, es decir, un difeomorfismo  $\phi$  tal que  $(\phi^* \mathbf{g})_{ab} = g_{ab}$ . Si el difeomorfismo es un grupo uniparamétrico de isometrías,  $\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$ , al campo vectorial  $\zeta^a$ , que genera este grupo es conocido como *campo vectorial de Killing*. Las órbitas de este grupo son las curvas integrales de  $\zeta^a$ . Para que este campo vectorial transforme como una isometría, es necesario que la derivada de Lie de la métrica con respecto a  $\zeta^a$  sea cero,

$$\mathcal{L}_\zeta g_{ab} = 0. \quad (1.16)$$

Ecuación que se conoce como *ecuación de Killing*. Para ver las propiedades de estos vectores de Killing consúltese [215, apéndice C].

Para caracterizar modelos cosmológicos, según este criterio, basta con especificar los vectores de Killing que posea.

#### 1.2.2 Modelos Cosmológicos de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker

Podemos describir el espacio-tiempo de nuestro universo a cierta escala en la cual luce homogéneo e isotrópico espacialmente mediante la métrica de Robertson-Walker (RW). En esta geometría la materia se mueve sobre curvas geodésicas irrotacionales y libres de corte ( $\omega_{ab} = 0 = \sigma_{ab}$ ) con una velocidad tangente  $u^a$ , que define una variable temporal canónica  $u_a = -t_{,a}$ . Además, las geometrías de RW tienen un tensor de Weyl igual a cero,  $C_{abcd} = 0$ , i.e. todos los efectos no-locales como ondas gravitacionales y fuerzas de marea están ausentes. El que este tensor sea nulo nos indica que las geometrías RW son conformalmente planas. La homogeneidad y la isotropía se pueden definir ahora de una manera precisa usando los campos vectoriales de Killing y el concepto de isometrías. Un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies  $\Sigma_t$  que folian el espacio-tiempo tal que para cada  $t$  y para cualquier par de puntos  $p, q \in \Sigma_t$  existe una isometría de la métrica  $g_{ab}$  que lleva  $p$  a  $q$ ; por otra parte, se dice que el espacio-tiempo es isotrópico, si en cada punto existe una congruencia de curvas temporaloides u observadores con tangentes  $u^a$  que llenen el espacio-tiempo, que satisfacen que, dado cualquier punto  $p$  y dos vectores tangentes unitarios  $s_1^a$  y  $s_2^a$  en  $p$  ortogonales a  $u^a$ , existe una isometría de  $g_{ab}$  que deja a  $p$  y  $u^a$  en  $p$  fijos, pero que rota  $s_1^a, s_2^a$  [215].

El verificar que este modelo (u otros modelos) se ajuste al Universo real es tarea de la Cosmología Observacional (cf. §1.4).

### Cinemática: Geometría de Robertson-Walker

La métrica de Robertson-Walker es la expresión más general de la métrica para un espacio-tiempo tetradimensional que está foliado por subespacios tridimensionales espaciales (i.e.  $t = \text{constante}$ )  $\Sigma_t$ , máximamente simétricos, es decir, todas las propiedades geométricas del subespacio tridimensional son iguales en todas las locaciones espaciales y que esas propiedades geométricas no privilegian dirección alguna en el espacio, en otras palabras homogeneidad e isotropía. A la variable de foliación  $t$  se le llamará *tiempo cosmológico*. La homogeneidad e isotropía en el espacio tridimensional permite definir un conjunto (infinito) de observadores preferenciales comóviles (i.e. con  $x^i = \text{constante}$ ), que ven el Universo de manera homogénea e isotrópica<sup>11</sup>. Entonces, usando las coordenadas de estos observadores  $(t, x^i)$  podemos escribir:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dt^2 + \cancel{2g_{0i} dt dx^i} - \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

donde el segundo término es cancelado por isotropía, ya que si fuera  $g_{i0} \neq 0$  se podría definir un vector  $v_i = g_{0i}$  que privilegiaría una dirección. Si usamos el tiempo propio de los observadores preferenciales para etiquetar las hipersuperficies, tendremos  $g_{00} = 1$ ,  $ds^2 = -dt^2 + dl^2$ . Al ser el espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, la curvatura del 3-espacio,  $R^{(3)}_{ijk}$  no puede depender<sup>12</sup> de las derivadas de la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ , entonces  $R^{(3)}_{ijkl} = q(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{kj})$  y su escalar de curvatura es  $\mathcal{R}^{(3)} = 6q$ ,  $q$  debe de ser una constante para cumplir con la suposición de homogeneidad. La métrica más general que cumple con un Universo homogéneo e isotrópico en cada instante del tiempo es entonces:

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad u^a = \delta^a_0, \quad (1.17)$$

y está escrita en término de dos parámetros cosmológicos, uno que describe la curvatura espacial del Universo ( $K$ ) y el segundo la expansión o contracción del Universo ( $S(t)$ ), conocido como *factor de escala*. Por último, el vector tangente a las líneas de mundo  $u^a = dx^a/dt$  representa la historia de los observadores fundamentales.

Podemos escalar la coordenada radial,  $r$ , de tal manera que la constante de curvatura espacial  $K$ , solo tome los valores  $+1$ ,  $-1$  y  $0$ , correspondiendo a geometrías cerradas, abiertas y planas, respectivamente. Tomando este escalamiento de  $r$  es posible expresar la métrica como

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \left[ d\chi^2 + f_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.18)$$

donde la función  $f_k(\chi)$  es

<sup>11</sup>Usando la ecuación geodésica,  $u^a \nabla_a u^b = 0$ , se puede ver que estos observadores son inerciales, ya que se mueven sobre curvas geodésicas.

<sup>12</sup>Si dependiera de las derivadas de la métrica significaría que podríamos elegir un vector privilegiado en la hipersuperficie espacial rompiendo así la isotropía.

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \text{sen } \chi, & K = +1 \\ \chi, & K = 0 \\ \text{senh } \chi, & K = -1 \end{cases} \quad (1.19)$$

La tasa de expansión en cada tiempo  $t$  está caracterizado por el *parámetro de Hubble*  $H(t) = \dot{S}/S$ , donde  $\dot{\{ \}} \equiv d/dt\{ \}$  representa derivadas respecto a  $t$ , el tiempo cosmológico.

Las dimensiones en la métrica están contenidas en el factor de escala (que depende de  $t$ ), ya que la  $r$  y el “ángulo”  $\chi$  son adimensionales. También es posible tener un factor de escala adimensional mediante  $a(t) = S(t)/S_0$  donde  $S_0 \equiv S(t_0)$ , es  $S$  en la época actual,  $t_0 = \text{hoy}$ ;  $a(t)$  determina las distancias físicas entre dos puntos<sup>13</sup>  $l(t)$ , a un tiempo  $t$ , en términos de las distancias comóviles  $l_0$  (estas últimas no cambian en el tiempo, recuerde que los observadores fundamentales son comóviles, i.e. sus coordenadas  $x^i$  están fijas)

$$l(t) = l_0 a(t). \quad (1.20)$$

Con esta nueva definición del factor de escala, el parámetro de Hubble es ahora  $H(t) \equiv \dot{a}/a$ . En un universo homogéneo e isotrópico, el parámetro de Hubble define la única escala espacial significativa: el *radio de Hubble*,  $r_H \equiv cH^{-1}$ . El radio de Hubble representa la distancia a la cual la velocidad de recesión de una galaxia es igual a la velocidad de la luz<sup>14</sup>. Para factores de escala que van como  $a(t) \propto t^p$ , el radio de Hubble es  $r_H \propto \frac{t}{p}$ , i.e. el radio de Hubble crece linealmente con el tiempo.

Otra manera de expresar esta métrica se logra escalando la coordenada temporal mediante

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.21)$$

donde a  $\eta$  se le conoce como *tiempo conforme*, quedando,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + d\chi^2 + f_k^2(\chi) \left( d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right) \right]. \quad (1.22)$$

Por último, es posible reescribir la métrica en términos del factor de escala,  $a$  o del *redshift*,  $z = (a_0/a) - 1$  como la coordenada temporal, esta forma mostrará claramente que el único contenido dinámico está en el parámetro de Hubble  $H$ :

$$ds^2 = H^{-2}(a) \left( \frac{da}{a} \right)^2 - a^2 dx^2 = \frac{1}{(1+z)^2} \left[ H^{-2}(z) dz^2 - dx^2 \right]. \quad (1.23)$$

<sup>13</sup>En la literatura también se les llama distancias *propias*, aunque este uso no siempre es consistente lo cual ha llevado a confusiones con el paso del tiempo [42].

<sup>14</sup>El radio de Hubble está muy relacionado con el (cf. §1.4 para una definición) *horizonte de partículas* para ciertas épocas del universo, pero conceptualmente son muy diferentes, por lo que es muy importante no confundirlos; para una excelente discusión de esta y otras confusiones ver [42].

### Dinámica: Universos de Friedmann-Lemaître

Una vez que se ha especificado la geometría del espacio-tiempo usando la métrica de Robertson-Walker (RW), es útil describir su dinámica mediante las ECE. Para hacerlo es necesario conocer el contenido de materia-energía descrito –a la escala determinada por la validez de la métrica RW– mediante el tensor de energía-momento  $T_{ab}$ .

Debido a la isotropía local el tensor de energía momento,  $T_{ab}$ , expresado como (1.5), toma necesariamente la forma de un fluido perfecto (i.e.  $\pi_{ab} = 0 = q_a$ ) relativa a las líneas de mundo de los observadores fundamentales, es decir el fluido es comóvil con la expansión del universo,

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}, \quad (1.24)$$

la densidad de energía,  $\rho$  y la presión,  $p$  son los eigenvalores temporaloides y espacialoides de  $T_{ab}$ . Para encontrar las ecuaciones dinámicas de este modelo cosmológico es necesario calcular  $G_{ab}$  y  $T_{ab}$  y luego sustituirlos en las ECE<sup>15</sup>.

Una de las muchas maneras de encontrar las expresiones buscadas es empezar por el cálculo de los símbolos de Christoffel (i.C), que para la métrica de RW (1.17), tienen la siguiente forma

---

<sup>15</sup>Para este modelo es posible obtener las ecuaciones de evolución sin tener que pasar por todo el tedioso procedimiento de calcular  $g_{ab} \rightarrow \Gamma_{bc}^a \rightarrow R_{ab} \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow G_{ab}$ . Para lograrlo, primero, utilizando las identidades de Bianchi (1.3),  $\nabla_b T^{ab} = 0$ , obtenemos,

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\rho + p) = 0.$$

Ahora, usando las propiedades cinéticas 1.2.1 podremos escribir la ecuación de Raychaudhuri (1.10) en la métrica de RW. Primero, sacando la traza de las ECE llegamos a

$$\mathcal{R} = 4\Lambda - 8\pi G T \quad (1.25)$$

donde  $T$  es la traza de  $T_{ab}$ . Sustituyendo en la ECE,

$$R_{ab} = 8\pi G \left[ T_{ab} - \frac{1}{2} \left( T + \frac{\Lambda}{4\pi G} \right) g_{ab} \right], \quad (1.26)$$

en particular, para el fluido perfecto (1.24), tenemos  $T = 3p - \rho$  y si multiplicamos la ecuación anterior por  $u^a u^b$ ,

$$R_{ab} u^a u^b = 4\pi G (\rho + 3p) - \Lambda. \quad (1.27)$$

Sustituyendo esto en la ecuación de Raychaudhuri; y notando que en las métricas RW,  $\sigma_{ab} = \omega_{ab} = 0$ , por lo tanto, la ecuación de Raychaudhuri ahora es,

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3} \Theta^2 = -4\pi G (\rho + 3p) + \Lambda \quad (1.28)$$

Sustituyendo (1.11), obtenemos que la ecuación de Raychaudhuri para métricas RW (cf. 1.39) es

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.29)$$

Por último, calculando la primera integral de estas dos últimas ecuaciones obtenemos la ecuación controla la evolución del universo: la *ecuación de Friedmann* (cf. 1.38a)

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}. \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{jt}^i &= \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{rr}^t &= \delta_{ij} \frac{\dot{a}a}{1-Kr^2} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^t &= r^2 \dot{a}a & \Gamma_{\phi\phi}^t &= r^2 \text{sen}^2 \theta \dot{a}a \\
 \Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{1-Kr^2} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -(1-Kr^2)r \\
 \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} = \Gamma_{\phi\phi}^\theta & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -(1-Kr^2)r \text{sen}^2 \theta \\
 \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\text{sen} \theta \cos \theta & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

El siguiente paso es calcular el tensor de Ricci,  $R_{ab}$ , al sustituir (1.31) en la fórmula (1.2) se llega a

$$R_t^t = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_j^j = \delta_j^i \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{K}{a^2} \right]. \tag{1.32}$$

Contrayendo el tensor de Ricci con la métrica, obtenemos el escalar de Ricci,  $\mathcal{R}$ ,

$$\mathcal{R} = g^{ab} R_{ab}. \tag{1.33}$$

Sustituyendo los valores encontrados en las secciones anteriores,

$$\mathcal{R} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right]. \tag{1.34}$$

Como último paso para completar el lado izquierdo de las ECE, calculamos el tensor de Einstein  $G_{ab}$ , definido por

$$G_b^a = R_b^a - \frac{1}{2} g_b^a \mathcal{R} \tag{1.35}$$

haciendo las sustituciones adecuadas, se obtiene

$$G_t^t = -3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right], \quad G_j^j = - \left[ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] \tag{1.36}$$

Por el lado de la materia,  $T_{ab}$  tiene la forma (1.24) en estas coordenadas,

$$T_t^t = -\rho, \tag{1.37a}$$

$$T_i^j = \delta_i^j p \tag{1.37b}$$

Entonces las ecuaciones de Einstein son

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.38a)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\left(8\pi Gp + \frac{K}{a^2} - \Lambda\right). \quad (1.38b)$$

Podemos observar que estas ecuaciones pueden ser unidas en una sola si las restamos,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.39)$$

El sistema de ecuaciones (1.38) está subdeterminado, ya que en realidad es una sola ecuación (1.39) y posee tres incógnitas:  $(a(t), \rho, p)$ . Para resolver este modelo cosmológico es necesario encontrar dos ecuaciones más, la primera puede ser obtenida utilizando la identidad de Bianchi (1.3) en el tensor de energía-momento,  $\nabla_b T^{ab} = 0$ ,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho + p) = 0. \quad (1.40)$$

Esta ecuación controla la densidad de la materia mientras el universo se está expandiendo. La última ecuación necesaria se obtiene suponiendo que la presión  $p$  cumple con una ecuación de estado,  $p = p(\rho)$ .

La existencia y unicidad de la solución  $\{a(t), \rho(t)\}$  del conjunto de ecuaciones (1.38) queda establecida si se da una ecuación de estado que describa el contenido de materia (para uno o varios componentes) del universo y un conjunto adecuado de condiciones iniciales. Las condiciones iniciales se pueden dar a un tiempo arbitrario, pero generalmente se dan en el tiempo actual,  $t_0$ :

- La *constante de Hubble*, i.e. el parámetro de Hubble al tiempo actual,  $H_0 \equiv (\dot{a}/a)_0$ ;
- Un *parámetro de densidad* adimensional para cada una de los tipos de materia,  $\Omega_{i0} \equiv \kappa\rho_{i0}/3H_0^2$ ;
- Si  $\Lambda \neq 0$ ,  $\Omega_{\Lambda 0} \equiv \Lambda/3H_0^2$  o el *parámetro de desaceleración* (adimensional)  $q_0 := -(\ddot{a}/a)_0 H_0^{-2}$ .

Los modelos cosmológicos que tienen una geometría caracterizada por la geometría de Robertson-Walker y con una evolución gobernada por las ecuaciones (1.40), (1.38b) y (1.38a) son llamados *universos de Friedmann-Lemaître* (FL).

ADDENDUM: *Ecuaciones en tiempo conforme* En este trabajo de tesis estaremos usando el tiempo conforme  $\eta$ , además del tiempo cosmológico  $t$ . La relación entre estas dos coordenadas temporales está dada mediante

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}.$$

En esta sub-sección expresaremos las ecuaciones más importantes presentadas hasta ahora en estas nuevas coordenadas. Nótese que para cualquier función  $f(t)$  se cumple

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) &= \frac{f'(\eta)}{a(\eta)}, \\ \ddot{f}(t) &= \frac{f''(\eta)}{a^2(\eta)} - \mathcal{H} \frac{f'(\eta)}{a^2(\eta)},\end{aligned}$$

donde  $\{\}' \equiv d/d\eta\{\}$  indica derivada respecto al tiempo conforme. Estas relaciones nos permiten convertir ecuaciones del tiempo cosmológico al conforme. En particular, definimos  $\mathcal{H}(\eta) \equiv a'(\eta)/a(\eta) = aH$ , como el parámetro de Hubble comóvil.

La ecuación de Friedmann (1.38a), la de aceleración (1.38b) y la ecuación de conservación (1.40) en la métrica RW conforme (1.22), son respectivamente:

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho + \frac{a^2 \Lambda}{3} - K, \quad (1.41a)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 2\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\left(8\pi G a^2 p - a^2 \Lambda + K\right) \quad (1.41b)$$

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0, \quad (1.41c)$$

la ecuación auxiliar (1.39) es

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G a^2}{3} (\rho + 3p) + \frac{a^2 \Lambda}{3}. \quad (1.42)$$

### Comportamiento de la materia en Universos de Friedmann-Lemaître

La densidad total de materia  $\Omega_{m0}$  en el presente, está dada por la suma de las densidades de los diferentes tipos de materia  $\Omega_{i0}$ , que suponemos existen,

$$\Omega_{m0} \equiv \Omega_{mat0} + \Omega_{rad0} = \Omega_{B0} + \Omega_{DM0} + \Omega_{\gamma0} + \Omega_{\nu0}, \quad (1.43)$$

donde  $\Omega_{mat}$  incluye la materia no relativista (el subíndice  $B$  indica la materia bariónica y el subíndice  $DM$  representa a la materia oscura), y  $rad$  representa a la materia ultra-relativista o radiación (los subíndices  $\gamma$  y  $\nu$  indican fotones y neutrinos respectivamente).

El parámetro de densidad total  $\Omega_0$  es la suma de la densidad total de materia y la densidad de energía total de la constante cosmológica



$$\Omega_0 = \Omega_{m0} + \Omega_{DE0}. \quad (1.44)$$

Usando estas variables, la ecuación de Friedmann (1.38a) se expresa como

$$\Omega_m + \Omega_{DE} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (1.45)$$

Otra forma muy útil de expresar la ecuación de Friedmann, es en función de las densidades actuales,

$$H(a)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{DE0} + \Omega_{mat0} a^{-3} + \Omega_{rad0} a^{-4} - (\Omega_0 - 1) a^{-2} \right]. \quad (1.46)$$

Se supondrá regularmente que las ecuaciones de estado tienen la forma

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (1.47)$$

donde  $\gamma$  es una constante. Desde un punto de vista físico los casos más interesantes son  $\gamma = 1$  (polvo),  $\gamma = \frac{4}{3}$  (radiación),  $\gamma = 0$  (e.g. campo escalar dominado por el término del potencial o una constante cosmológica) y algunas veces  $\gamma = 2$  (*fluido duro*, e.g. , un campo escalar dominado por el término cinético [147, 214]), entonces el valor de  $\gamma$  está en el rango dado por

$$0 \leq \gamma \leq 2.$$

Usando la ecuación de conservación (1.40) y la ecuación de estado barotrópica (1.47), es posible obtener la evolución de la densidad de energía

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^{3\gamma}}. \quad (1.48)$$

La materia no relativista (materia bariónica y materia oscura) es considerada en estos modelos como "polvo", con una presión igual a cero,  $p = 0$ , por lo que su densidad de energía varía como  $\rho_m \propto a^{-3}$ . La radiación por su parte tiene la ecuación de estado  $p = \rho/3$ , por lo que su densidad de energía decae como<sup>16</sup>  $\rho \propto a^{-4}$ . Estos resultados se pueden interpretar de manera intuitiva de la siguiente manera: para partículas no relativistas, su energía es igual a su masa en reposo, la cual permanece constante en el tiempo. La densidad de energía de muchas partículas no relativistas es igual a su masa multiplicada por su densidad de número, el cual varía inversamente proporcional al volumen ( $a^3$ ), i.e.  $\rho_m \propto a^{-3}$ ; por su parte, los fotones tienen una energía igual a  $E_\gamma = k_B T$  y su longitud de onda se expresa como  $\lambda_\gamma = \hbar c / k_B T$ . En tiempos anteriores, la longitud de onda del fotón era menor, ya que el factor de escala  $a(t)$  era menor (ver 1.20), y debido a que la energía del fotón es inversamente proporcional a su longitud de onda, obtenemos que su energía debió de ser mayor en tiempos pasados por un factor de  $1/a(t)$  comparada con la energía actual. Usando ambas relaciones obtenemos que la temperatura de un fotón en función del tiempo es

<sup>16</sup>Este resultado también se puede obtener usando la ecuación geodésica para partículas sin masa

Tipo de Energía	$a(t)$	$a(\eta)$	$\rho$
Radiación	$t^{1/2}$	$\eta$	$a^{-4}$
Polvo	$t^{2/3}$	$\eta^2$	$a^{-3}$
$\Lambda$	$e^{Ht}$	$-(H\eta)^{-1}$	constante

**Tabla 1.1:** Resumen sobre comportamientos del factor de escala en tiempo cósmico y tiempo conforme dependiendo de la época dominante (primera columna) y la evolución de la densidad de energía respecto al factor de escala

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)} \quad (1.49)$$

Al considerar un plasma, su densidad de energía se puede expresar como su densidad de número (que varía como  $a^{-3}$ ) multiplicada por su temperatura (cuya dependencia temporal está dada por 1.49). Este último factor nos da un término extra de  $a^{-1}$  i.e.  $\rho_{rad} \propto a^{-4}$ . En la tabla 1.1 se muestra un resumen de lo tratado en esta sección (agregando el caso de constante cosmológica).

ADDENDUM: *Ecuaciones en tiempo conforme* El comportamiento del factor de escala en el tiempo conforme se puede calcular de manera análoga al caso del tiempo cosmológico, resultando en  $a(\eta) = C\eta^{2/(3\gamma-2)}$ , siendo  $C$  una constante de integración (ver la tercera columna de la tabla 1.1).

### Singularidad inicial en Universos de Friedmann-Lemaître

De la ecuación (1.39) es posible definir una especie de *masa gravitacional activa* de la materia a  $\mu_{grav} = \rho + 3p$  [67]. Para materia ordinaria, esta cantidad es positiva ya que satisface la condición fuerte de energía [215, pags. 218-219]. La materia ordinaria entonces desacelera la expansión del universo ( $\ddot{a} < 0$ ). Una constante cosmológica positiva causa una expansión acelerada ( $\ddot{a} > 0$ ). La evolución final del universo dependerá de cual de las dos tendencias es la dominante. Se puede observar de (1.39) que si  $\Lambda \leq 0$  y  $(\rho + 3p) > 0$  para todo tiempo  $t$  y dado que en la actualidad  $a_0 > 0$  (por definición) y  $H_0 > 0$  (ya que observamos *redshifts* y no *blueshifts*) entonces de (1.39)  $\ddot{a} < 0$ , por lo tanto, existe un tiempo finito  $t_* < t_0$  tal que  $a(t) \rightarrow 0$  mientras que  $t \rightarrow t_*$  (1.39); y  $\lim_{t \rightarrow t_*^+} \rho = +\infty$  (1.40). Es decir el Universo “inició” en una singularidad [66, 215, 218].

La conclusión de que *necesariamente* hubo un Big-Bang, pudiera ser evitada con ayuda de una constante cosmológica positiva ( $\Lambda > 0$ ), pero debido a que sabemos que el universo se ha expandido por lo menos en un radio de 11 (ya que vemos objetos con un *redshift* de 10). De la ecuación de Friedmann (1.38a) se ve que  $\Lambda$  tuvo que haber tenido una magnitud de por lo menos  $11^3$  veces la densidad de la materia actual para dominar en esa época o tiempos anteriores, y evitar así la singularidad, pero esto contradiría el valor dado por las observaciones actuales [59, 67].

Es de recalcar que, con esta conclusión, el universo alcanzó temperaturas (o equivalentemente energías) del orden de la temperatura de Planck ( $T_{Planck} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c^5}{Gk^2}} \approx 10^{32}\text{K} \sim 10^{19}\text{GeV}$ ) en las cuales la teoría General de la Relatividad deja de ser válida, ya que esperamos que los efectos cuánticos se vuelvan dominantes a esta escala.

### Comportamiento Futuro de los Universos de Friedmann-Lemaître

Como vimos en la sección anterior, de acuerdo con la teoría de Relatividad, los modelos cosmológicos de FLRW, con las condiciones apropiadas inician en una singularidad. En esta sección dividiremos el comportamiento posterior a la singularidad inicial dependiendo de la materia dominante y del valor de  $\Lambda$ . Primero, tomando en cuenta solamente el valor de  $\Lambda$  tenemos,

- $\Lambda = 0$ . El Universo inicia en una singularidad, su futuro depende de la curvatura espacial  $K$  o del parámetro de densidad  $\Omega_0$ . El Universo se expandirá por siempre si  $K = 0 \Leftrightarrow \Omega = 1$  o  $K < 0 \Leftrightarrow \Omega < 1$ , pero recolapsa en una singularidad (*Big-Crunch*) si  $K > 0 \Leftrightarrow \Omega_0 > 1$ . De este comportamiento, descubrimos que para universos FL con  $\Lambda = 0$ ,  $\Omega_0 = 1$  corresponde a la *densidad crítica* que separa a los modelos que se expanden por siempre de los que recolapsan en el futuro:  $\Omega_{critica} = 1 \Leftrightarrow \kappa\rho_{critica} = 3H_0^2$  (ver 1.45),  $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{critica}$ .
- $\Lambda < 0$ . Todas las soluciones inician en singularidad y recolapsan.
- $\Lambda > 0$ . Si  $K = 0$  o  $K = -1$  todas las soluciones inician en una singularidad y se expanden eternamente. Si  $K = +1$  existen modelos que inician en una singularidad y se expanden por siempre o colapsan en una singularidad futura, pero en esta situación existen también soluciones estáticas (e.g. Universo estático de Einstein), y soluciones en las cuales hay un “rebote”: colapsan desde infinito, llegan a un radio mínimo y se expanden de nuevo (i.e. , no tienen singularidad inicial).

### Soluciones Básicas de los Universos de Friedmann-Lemaître

Estableceremos una clasificación de todas las soluciones de los universos FL suponiendo que únicamente existe un componente de materia y/o constante cosmológica. Esta clasificación sigue la clasificación usada en [184], para una clasificación más general incluyendo universos que no son FL véase [78, 214].

- **MODELOS ESTÁTICOS** Los modelos estáticos fueron las primeras soluciones cosmológicas estudiadas y fueron propuestas por A. Einstein (1917). Es el único caso en el cual se deben

de usar *ambas* ecuaciones (1.38), en lugar de una sola de ellas. En ellas se pide que  $\dot{a}(t) = 0$ , lo cual implica que

$$\frac{K}{a^2} = \Lambda = 4\pi G\rho.$$

Se puede ver inmediatamente (1.40) que  $\rho$  es constante. Para tener un modelo realista es necesario que  $\rho > 0$ , por lo que  $K = +1$ . Los universos con estas características son conocidos bajo el nombre de *Universos de Einstein*. Estos universos, como demostró Eddington poco después, son inestables ante pequeñas perturbaciones de  $\rho$ . Existen otras dos maneras de obtener un universo estático: (a) Sin constante cosmológica, i.e.  $\Lambda = 0$ , la única manera de obtener un universo estático es mediante presión negativa  $p = -\rho/3$ , de nuevo se tiene  $K = +1$ ; y (b)  $\Lambda = K = \rho = 0$ ,  $a =$  cualquier constante, esto es (luego de una transformación que absorba la constante  $a$ ) el espacio-tiempo de Minkowski,  $\mathcal{M}^4$ .

- **MODELOS VACÍOS** Son los universos en los cuales  $\rho = \Lambda = 0$ . Estos modelos no tienen mucho significado físico ya que son equivalentes a que la gravedad esté “apagada”, i.e.  $G = 0$ . El espacio-tiempo de estos modelos sin materia es  $\mathcal{M}^4$ , sus diferencias se darán por la cinemática de las partículas de prueba en ellos (el *substratum* en [184, pag. 358]). En el apartado anterior se mencionó uno de los dos modelos existentes: espacio-tiempo de Minkowski escalado. El otro es el modelo de Milne, descrito a continuación.

- *Modelo de Milne*. Este modelo representa un universo plano, ( $R_{abd}{}^c = 0$  i.e. un espacio-tiempo de Minkowski,  $\mathcal{M}^4$ ), visto por un conjunto uniforme de observadores en expansión<sup>17</sup> en todas las direcciones y con todas las velocidades posibles desde un punto singular en  $t = 0$  [184, pags. 360-363]. Su expansión es lineal

$$a(t) = Ct, \tag{1.50}$$

y su edad es  $\tau_0 = \frac{1}{H_0}$ . El tiempo propio  $\tau$  de los observadores comóviles, sirve para foliar el espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales de curvatura negativa constante ( $1/\tau^2$ ).

Obviamente, en este modelo el “Big-Bang” es en realidad un evento puntual *dentro* de o *incluido* en el del espacio-tiempo. Este modelo puede ser una buena aproximación del futuro lejano del universo si  $K < 0$  y  $\Lambda = 0$ .

- **MODELOS CON MATERIA** Son aquellos modelos en los cuales  $\rho \neq 0$ .
  - *Modelo con radiación*. En este modelo, un universo plano se supone lleno de radiación únicamente ( $p = 1/3\rho, \Lambda = K = 0$ ). El factor de escala evoluciona de manera

$$a(t) = Ct^{1/2}. \tag{1.51}$$

Con una edad en  $a_0$  de  $\tau_0 = \frac{1}{2H_0}$ . Este es un buen modelo para describir lo que se conoce como etapa dominada por radiación.

<sup>17</sup>El por qué se están expandiendo y por qué lo hacen desde un evento único no es especificado en el modelo.

- *Modelos con "polvo"*. El primer caso interesante es el conocido como *Universo de Einstein-de Sitter* cuya composición es  $p = \Lambda = K = 0 \Rightarrow \Omega_0 = 1$ . La condición  $p = 0$  indica que está formado por materia no relativista. El factor de escala,

$$a(t) = Ct^{2/3}. \quad (1.52)$$

Su edad, cuando  $H(t) = H_0$  es de  $\tau_0 = \frac{2}{3H_0}$ . Es un buen modelo cuando la radiación ha dejado de ser dominante y antes de que la constante cosmológica domine. También es un buen modelo del comportamiento futuro del universo si los datos observacionales apuntaran a  $K = \Lambda = 0$ .

Existen modelos con polvo con valores de  $K \neq 0$  y  $\Lambda = 0$ . El caso con  $K = -1$  fue durante mucho tiempo el considerado como el modelo correcto del universo actual. Su edad es [184]

$$\tau_0 = C_{mat} \left[ \sqrt{(X + X^2)} - \sinh^{-1} \sqrt{X} \right], \quad X = \frac{a(t)}{C_{mat}}.$$

Para tiempos muy grandes  $a(t) \propto t$  y se puede aproximar por un universo o modelo de Milne (cf. arriba). El caso con  $K = +1$  es cíclico (en el sentido de que inicia en una singularidad y acaba en una singularidad futura) y si se define la masa total de un universo de este tipo mediante el producto de la densidad,  $\rho$ , y el volumen a un tiempo  $t$ ,  $2\pi^2 a^3(t)$ , tenemos  $M := 2\pi^2 a^3 \rho = 3\pi C_{mat} / 4G$ . Esta característica impone una fuerte restricción ya que una masa finita  $M$  implica  $K = +1$ , determina  $C_{mat}$  y la historia entera de este espacio-tiempo. En este sentido es el modelo más *Machiano* de la lista, ya que la masa determina completamente y de manera única al espacio-tiempo [184]. Estos modelos poseen además de un horizonte de partículas, un horizonte de eventos (definido en la página 32).

- *Modelos de de Sitter*. En estos modelos tienen  $\Lambda > 0$  pero vacíos de cualquier otra materia. El espacio-tiempo de estos modelos es el espacio-tiempo de de Sitter  $dS^4$ . Existen tres<sup>18</sup> modelos o métricas diferentes [91, 184] dependiendo de como se elija la foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies de curvatura constante positiva. La diferencia entre estos modelos radica una vez más en el movimiento de las partículas de prueba. Para obtener los tres diferentes modelos debemos reescribir la ecuación (1.38a) con  $\rho = 0$  [85],

$$\dot{a}^2 - \omega^2 a^2 = -K$$

donde  $\omega^2 = \frac{\Lambda}{3}$ . Esta ecuación tiene para los distintos valores de  $k$  las siguientes soluciones

---

<sup>18</sup>Cuatro métricas diferentes si se toma en cuenta la métrica estática (que no es del tipo RW) que fue la descubierta por W. de Sitter [67, 184].

$$a(t) = \begin{cases} \cosh \omega t, & K = +1 \\ e^{\omega t}, & K = 0 \\ \sinh \omega t, & K = -1 \end{cases}$$

El caso con  $\Lambda > 0, K = 0$ , se conoce como *Universo de de Sitter*. Como se acaba de mostrar este modelo tiene una expansión exponencial,

$$a(t) = Ce^{Ht}, \quad (1.53)$$

donde  $C$  y  $H$  son constantes. El parámetro de Hubble es  $H = \Lambda/3$ . Como la tasa de expansión es constante no tiene inicio (i.e. no tiene singularidad inicial para ningún  $t$  finito) su edad es infinita. Es un buen modelo del universo en el futuro si  $\Lambda > 0$  (se puede entender observando la ecuación (1.38a) ya que para tiempo muy grandes el término que contiene  $\Lambda$  dominará sobre los demás). También puede ser entendido como una solución con  $\Lambda = 0$  y conteniendo materia que tiene una ecuación de estado  $p = -\rho$ , modelando así un periodo inflacionario muy temprano. También es el caso límite de todos los universos de FL con  $\Lambda > 0$  que se expandan indefinidamente.

El modelo con  $K = -1$  inicia en una aparente singularidad, pero se puede demostrar que esta es una singularidad coordinada (cf. ver párrafo siguiente), es el análogo en  $dS^4$  del universo de Milne, pero aquí las partículas están acelerando debido a la constante cosmológica. El caso con  $K = +1$  colapsa desde infinito a un tamaño mínimo distinto de cero y luego vuelve a expandirse.

El espacio-tiempo de de Sitter es invariante ante transformaciones de Lorentz (esto se puede ver ya que es posible encajar la métrica este espacio-tiempo como un hiper-hiperboloide [85, 184] en el espacio-tiempo de Minkowski de 5 dimensiones,  $\mathcal{M}^5$ , las transformaciones de Lorentz dejan invariante al hiper-hiperboloide) siendo así un espacio-tiempo máximamente simétrico. A partir de esto se puede demostrar que las diferentes foliaciones del hiper-hiperboloide pueden ser transformadas una a la otra mediante combinaciones de rotaciones y transformaciones de Lorentz [184].

- *Modelo de anti-de Sitter* El modelo con  $\Lambda < 0$  es un espacio-tiempo de anti-de Sitter,  $AdS^4$ . Este caso es análogo al universo de Milne en  $AdS^4$  pero los observadores son frenados por la atracción de  $\Lambda$ .

Es importante notar que ninguno de estos modelos describe por si solo al universo real. El universo real contiene una mezcla de diversos tipos de materia y su combinación es la que guiará la evolución del mismo, aunque existirán intervalos de tiempo o épocas en las cuales su comportamiento podrá ser descrito aproximadamente por alguno de estos modelos.

### 1.3 Cosmología Estándar

Se entiende como modelo estándar de cosmología o cosmología estándar a los modelos cosmológicos que (a) satisfacen las dos suposiciones mencionadas al inicio de §1.2 (Relatividad General como teoría correcta de la gravedad y Homogeneidad e Isotropía a cierta escala), (b) tienen una estructura geométrica del tipo Robertson-Walker, (c) poseen una dinámica dada por las ecuaciones (1.38, 1.40) con todas sus consecuencias (subsecciones de 1.2.2), incluyendo la singularidad inicial [125, 158, 164, 190]. La cosmología estándar está basada en el modelo estándar de partículas, el cual ha sido probado como válido hasta energías de  $T \sim 200$  GeV mediante el *Gran colisionador de Electrones-Positrones* (LEP)<sup>19</sup> <sup>20</sup>.

Con estas suposiciones, la evolución de un universo en la cosmología estándar está caracterizado por tres épocas importantes: (a) Una época dominada por radiación ( $\rho_{rad} \gg \rho_m$ ) que ocurre a *redshifts* mayores que  $z_{eq} \approx (\Omega_{DM}/\Omega_{rad}) \approx 10^4$ . Para  $z \geq z_{eq}$ , la densidad de energía es dominada por materia relativística y el universo puede aproximarse mediante el modelo con radiación (cf. pag. 15). La segunda fase ocurre para  $z \ll z_{eq}$ , en el cual el universo es dominado por materia, que en los casos más sencillos se comporta como un modelo de Einstein-de Sitter; (c) Observaciones de supernovas indican que actualmente existe una dominación de constante cosmológica sobre los otros tipos de materia.

En cualquier época, la temperatura va como  $T \propto a^{-1}$ . Cuando la temperatura cae por abajo de  $T \approx 10^3$  K, los átomos empiezan a formarse y los fotones se desacoplan de la materia, es en este momento ( $z_{dec} \approx 1100$ ) cuando se forma la *Superficie de Última Dispersión* (LSS), emitiendo el *Fondo de Radiación Cósmica* (CBR)<sup>21</sup>, la cual está formada por fotones que han viajado sin dispersión desde entonces. El CBR tiene un espectro de cuerpo negro con una temperatura diferente de cero, este espectro de cuerpo negro es una consecuencia de que los fotones y la materia estuvieron en equilibrio térmico en épocas anteriores al desacople (el equilibrio térmico se mantenía ya que los fotones y electrones interactuaban fuertemente mediante dispersiones de Thomson).

#### 1.3.1 Historia Térmica del universo en la Cosmología Estándar

La mayor parte de esta sección está basada en la siguiente lista de referencias bibliográficas [20, 52, 110, 157, 163]. Referencias más puntuales se darán como citas a lo largo de la sección.

<sup>19</sup>Se espera explorar energías más altas (7 TeV por partícula o 574 TeV por núcleo) más en el *Gran Colisionador de Hadrones* (LHC) el cual se espera que esté en funcionamiento en Septiembre del 2009. Para obtener más información se puede visitar la página web localizada en <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>.

<sup>20</sup>Consúltese su página web <http://delphiwww.cern.ch/offline/lepwgs.html> para más información

<sup>21</sup>También conocido como CMB pero hay que notar que solamente en la actualidad las frecuencias de esos fotones se encuentran en el rango de las microondas.

*Preliminares.* Supongamos una caja cúbica de lado  $L$ , con condiciones de frontera periódicas. Los campos cuánticos se expandirán en ondas planas con números de onda  $k$  dados por  $k_i = n_i(2\pi)/L$  con  $i = \{x, y, z\}$ . Así, la densidad de estados en el espacio de fase para una partícula con  $g$  grados de libertad internos (e.g. el espín) es

$$dN = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} V d^3k, \quad (1.54)$$

Al número  $g$  también se le conoce como *factor de degeneración*. Esta cantidad es extensiva (ya que es proporcional al volumen,  $V$ ) y por lo tanto la densidad de número  $dn$  será independiente de  $V$ . De acuerdo con física estadística el valor de expectación del número de ocupación de un estado de energía  $E$  o *función de distribución* es

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} \pm 1}, \quad (1.55)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann, y el signo a usar depende del tipo de partículas (+ corresponde a fermiones y el  $-$  a bosones);  $\mu$  es el potencial químico, definido por el cambio de energía asociado con el cambio en el número de partículas, como se puede apreciar de la relación termodinámica

$$dE = TdS - PdV + \mu dN. \quad (1.56)$$

Si las especies de partículas  $i$  tienen la distribución mostrada arriba para algún  $\mu_i$  y  $T_i$ , se dice que están en *equilibrio cinético*. Si todas las especies están a la misma temperatura se dice que el sistema está en *equilibrio térmico*, este equilibrio requiere que las interacciones entre los constituyentes del sistema ocurran frecuentemente, si se cumple esto, podemos describir al universo como evolucionando a través de una secuencia de estados en equilibrio térmico y usar cantidades termodinámicas como la temperatura  $T$ , presión  $P$ , densidad de entropía  $s$  etc en cada tiempo  $t$ . Si el sistema está en *equilibrio químico*, los potenciales químicos de las diferentes especies de partículas están relacionados de acuerdo a las fórmulas de reacción, e.g.  $i + j \leftrightarrow k + l$ ,  $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$ , entonces, todos los potenciales químicos pueden ser expresados en términos de potenciales químicos de cantidades conservadas, e.g. el potencial químico bariónico,  $\mu_B$ .

En el equilibrio térmico,  $N$  se estabilizará alrededor de su valor de equilibrio, por lo que esperamos que haya muy pocos cambios en  $N$ , haciendo así que  $\mu = 0$ . Esto se puede probar formalmente usando la definición de la *función de energía libre de Helmholtz*:  $F = E - TS$ . Esta cantidad es minimizada en el estado de equilibrio de un sistema a temperatura y volumen constante. Dado que  $dF = -SdT - PdV + \mu dN$ , tenemos que  $dF/dN = 0 \Rightarrow \mu = 0$ .

La densidad de partículas en el espacio de fase es la densidad de estados multiplicada por el número de ocupación,

$$\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p}). \quad (1.57)$$



La densidad de partículas en el espacio ordinario se obtiene integrando sobre el espacio de momentos.

$$n = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty f(\mathbf{p}) d^3p. \quad (1.58)$$

Otras cantidades de interés son la densidad de energía y la presión

$$\rho = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3p, \quad (1.59a)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|}{3E} f(\mathbf{p}) d^3p. \quad (1.59b)$$

Estas expresiones tienen dos límites muy importantes, el primero ocurre cuando  $T \gg m$ , y es conocido como el *límite ultra-relativista*, en él podemos aproximar  $E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx p$ . En este límite también se tiene que  $T \gg |\mu|$ , por lo que ambas variables pueden ser despreciadas, obteniendo las siguientes fórmulas

$$n = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{p/k_B T} \pm 1} = \begin{cases} \frac{3}{4\pi^2} \zeta(3) g T^3, & \text{fermiones} \\ \frac{1}{\pi^2} \zeta(3) g T^3, & \text{bosones} \end{cases}. \quad (1.60a)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^3 dp}{e^{p/k_B T} \pm 1} = \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4, & \text{fermiones} \\ \frac{\pi^2}{30} g T^4, & \text{bosones,} \end{cases} \quad (1.60b)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{\frac{4}{3} \pi p^3 dp}{e^{p/k_B T} \pm 1} = \frac{1}{3} \rho, \quad (1.60c)$$

donde  $\zeta(3) \equiv \sum_{n=1}^\infty (1/n^3) = 1.20206$  es la función zeta de Riemann y se usó el hecho de que las funciones de distribución sólo dependen de  $p \equiv |\mathbf{p}|$ ,  $d^3p \rightarrow p^2 dp d\Omega$ . El otro límite es el conocido como *no relativista*, y está dado por (a)  $T \ll m$ , i.e. las energías cinéticas típicas están muy por abajo de la masa  $m$ , por lo que podemos aproximar a la energía por  $E = m + p^2/2m$ ; y (b)  $T \ll m - \mu$ , condición que lleva a que el sistema esté *diluido*, i.e. números de ocupación  $\ll 1$ . Ambas condiciones permiten hacer la aproximación siguiente

$$e^{(E-\mu)/k_B T} \pm 1 \approx e^{(E-\mu)/k_B T},$$

lo cual hace que las diferencias entre bosones y fermiones desaparezcan (no sean importantes) en este límite,

$$n = g \left( \frac{mT}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T}, \quad (1.61a)$$

$$\rho = n \left( m + \frac{3}{2} T \right), \quad (1.61b)$$

$$P = nT \ll \rho. \quad (1.61c)$$

Las diferencias entre el caso ultra-relativista y el no relativista (una caída exponencial) se debe principalmente a que las partículas y las antipartículas se aniquilan unas a las otras, a temperaturas altas estas reacciones ocurren constantemente y son balanceadas por la producción de pares, pero a bajas temperaturas la energía térmica de las partículas es insuficiente para la producción por pares. Para los casos intermedios ( $T \sim m$ ) es necesario hacer las integrales numéricamente.

Otra cantidad de suma importancia es la entropía  $S(V, T)$ , la entropía es introducida como una ecuación central a la termodinámica mediante el diferencial

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} [d(\rho(T)V) + P(T)dV], \quad (1.62)$$

Usando las ecuaciones (1.59a) y (1.59b) obtenemos,

$$\frac{dP(T)}{dT} = \frac{1}{T}(\rho(T) + P(T)) \quad (1.63)$$

e insertando esta relación en (1.62) llegamos (salvo una constante de integración) a

$$S(V, T) = \frac{V}{T} [\rho(T) + P(T)]. \quad (1.64)$$

Es posible obtener una relación de conservación para la entropía. Reescribiendo (1.40) como  $a^3 dP/dT = d/dt[a^3(\rho + P)]$ , combinándola con (1.63) e identificando a  $V$  con  $a^3(t)$  llegamos a

$$\frac{d}{dt}(S) = 0. \quad (1.65)$$

Si definimos la densidad de entropía  $s$  mediante  $s = S/V$  la conservación se escribe como

$$\frac{d}{dt}(a^3 s) = 0. \quad (1.66)$$

Para las especies relativistas tenemos

$$s = \frac{\rho + P}{T} = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{180} g T^3 & \text{fermiones} \\ \frac{2\pi^2}{45} g T^3 & \text{bosones.} \end{cases} \quad (1.67)$$

el caso no relativista no es importante y no se escribirá aquí, ya que la entropía de la radiación es abrumadoramente mayor que la entropía de las especies no relativistas.

La entropía que se produce durante los diferentes procesos que ocurren en el universo es insignificante comparada con la entropía total del universo, por lo que se dice que el universo es *adiabático* (cf. deducción arriba).

*Condición de equilibrio térmico.* Si los constituyentes del universo tienen una densidad de número  $n$ , velocidades típicas relativas  $v$  e interactúan mediante un proceso de dispersión que tiene una sección efectiva de cruce<sup>22</sup>  $\sigma$ , la tasa de interacción por partícula  $\Gamma$  está dada por  $\Gamma = \lambda_{fmp}^{-1} = n\sigma v$ , donde  $\lambda_{fmp}$  es la distancia libre promedio<sup>23</sup>. La condición que se dio arriba, para que se mantenga el equilibrio térmico a través de las interacciones es que su tasa de interacciones sea mucho más grande que la tasa de expansión del universo:

$$\Gamma \gg H. \quad (1.68)$$

La densidad de número decrece, regularmente, con el tiempo a un mayor ritmo que el parámetro de Hubble. Esto significa que en ciertas épocas algunas especies abandonarán el equilibrio térmico. Su densidad de número se “congelará” a cierto valor y sólo cambiará al ser diluido por la expansión del universo. Este “congelamiento” es uno de los actores más importantes en la evolución del universo como veremos adelante [20]<sup>24</sup>.

*Sopa primordial.* La sopa primordial estaba compuesta por todas las diferentes especies de partículas elementales. La masa de estas especies cubren un amplio rango comprendido entre  $m \sim 175$  GeV (quark top) hasta el fotón  $m = 0$ . La expansión del universo está gobernada por la densidad de energía total,  $\rho(T) = \sum_i \rho_i(T)$ , donde la  $i$  representa todas las especies en la sopa primigenia. La densidad de energía de las partículas ultra-relativistas (a las cuales llamaremos genéricamente “radiación”) es mayor que las de las especies no-relativistas, por lo que, en el universo temprano (i.e. dominado por radiación) es suficiente tomar en cuenta a la radiación en el cálculo, así, la densidad de energía es

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \quad (1.69)$$

y la densidad de entropía,

$$s(T) = \frac{2\pi}{45} g_*^s(T) T^3, \quad (1.70)$$

donde  $g_*(T) := \sum_{i=\text{bosones}} g_i(T_i/T)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermiones}} g_j(T_j/T)^4$  y  $g_*^s := \sum_{i=\text{bosones}} g_i(T_i/T)^3 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermiones}} g_j(T_j/T)^3$ . Las variables  $T_{i,j}$  son temperaturas específicas de cada una de las especies. Mientras todas las especies tengan la misma temperatura y sean relativistas (e.g.  $P \sim (1/3)\rho$ ),  $g_*(T) \simeq g_*^s(T)$ . El extraño factor de  $\frac{7}{8}$  se arrastra desde la ecuación (1.60b). La presión es en esta época  $P(T) \simeq (1/3)\rho(T)$ .

<sup>22</sup>Cross-section en inglés.

<sup>23</sup>En inglés *free-mean path*

<sup>24</sup>Este argumento heurístico puede ser expuesto de una manera más rigurosa usando la ecuación de Boltzmann, la cual gobierna la abundancia de las especies de partículas en un universo que se expande, para esta demostración cf. §9.2 de [157].

Temperatura (GeV)	especies	$g_*$
$\sim 200$	todas presentes	106.75
$\sim 100$	transición EW	sin efecto
$< 170$	aniquilación del quark $t$	96.25
$< 80$	$W^\pm, Z^0, H^0$	86.25
$< 4$	quark $b$	75.75
$< 1$	quark $c, \tau^-$	61.75
$\sim 150 \times 10^{-3}$	transición QCD	17.25 ( $u, d, g \rightarrow \pi^\pm, 0$ )
$< 100 \times 10^{-3}$	$\pi^\pm, 0, \mu^-$	10.75 (sobreviven $e^\pm, \nu, \gamma$ )
$< 500 \times 10^{-6}$	aniquilación $e^\pm$	7.25

 Tabla 1.2: Historia de  $g_*(T)$ 

A temperaturas mayores que la masa del quark top  $T > m_t \approx 175$  GeV todas las partículas son relativistas, sumando los grados de libertad internos de las especies a esta época nos da  $g_* = 106.75$ . La transición Electro-débil (EW) ocurre aproximadamente a esta temperatura ( $T_{EW} \sim 100$  GeV) pero su discusión queda fuera de este trabajo de tesis. Poco después de la transición EW, el quark *top* está aniquilándose, seguidos casi inmediatamente por el bosón de Higgs y los bosones de norma  $W^\pm, Z^0$ . Para cuando la temperatura llega a  $T \sim 10$  GeV. tenemos  $g_* = 86.25$ . Los siguientes en aniquilarse son los quarks  $b$  (*bottom*),  $c$  (*charm*) y luego el mesón  $\tau$ , si el quark  $s$  (*strange*) tiene tiempo de aniquilarse llegaremos a  $g_* = 51.25$ . A estas temperaturas  $T \sim 150$  MeV ocurre la *transición de confinamiento* (o *confinante*) QCD, en la cual, los quarks pierden su *libertad asintótica*. Las fuerzas *fuertes* se vuelve importante y mediante una transición de fase, desaparece así el *plasma de quarks-gluones* para convertirse en un *gas de hadrones*. Esto se debe a que los quarks y gluones han formado sistemas de tres quarks llamados *bariones* y pares quarks-antiquark conocidos como *mesones*, Los bariones más ligeros, el protón ( $p^+$ ) y el neutrón ( $n^0$ ) son conocidos con el nombre común de *nucleones*. A excepción de los piones, todas estas partículas dejan de ser relativistas a bajo de la temperatura de la transición de QCD. Las únicas especies que quedan ultra-relativistas y en gran número son: piones, muones, electrones ( $e^-$ ), neutrinos ( $\nu$ ) y fotones ( $\gamma$ ), por lo que al final de esta época  $g_* = 17.25$ .

*Desacople del neutrino.* Los neutrinos sólo son susceptibles a la fuerza débil. A temperaturas de 1 MeV el neutrino se *desacoplará*, i.e. no podrá mantenerse en equilibrio térmico con el resto de las especies. Luego del desacople los neutrinos se moverán libremente prácticamente sin interacciones.

La sección de cruce de las interacciones débiles se puede estimar fácilmente [20, 157] y es proporcional a  $\alpha^2 s / m_w^4$ , donde  $\alpha$  es la constante de estructura fina ( $\sim 1/137$ ),  $s$  es la variable de Mandelstam  $s = (p_1 + p_2)$ , y  $m_w \sim 80$  GeV es la masa del bosón  $W^\pm$ . Para neutrinos y leptones cargados relativistas tenemos  $s \sim T^2$  ya que  $s$  es proporcional al cuadrado de la energía que a su vez es proporcional a  $T$ , además  $|\mathbf{v}| = c = 1$  y  $n \sim T^3$ . Un proceso típico que mantiene el equilibrio

térmico en esta época es  $\nu_e + e^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+$ , cuya tasa de interacción es

$$\Gamma_{ew} \sim \frac{\alpha^2 T^5}{m_W^4} \quad (1.71)$$

Durante el universo temprano la ecuación de Friedmann (1.38a) es  $H^2 = 2.76g_* T^4 / m_{Planck}^2$  o

$$H = 1.66\sqrt{g_*} \frac{T^2}{m_{Planck}}, \quad (1.72)$$

la razón entre las tasas es

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 m_{Planck} T^3}{m_W^4}. \quad (1.73)$$

El desacople ocurrirá cuando esta razón sea menor que la unidad,

$$T_{vd} \sim \left( \frac{m_W^4}{\alpha^2 m_{Planck}} \right)^{1/3} \sim 4\text{MeV}. \quad (1.74)$$

Una vez desacoplados los neutrinos, aunque ya no estarán en equilibrio térmico con otras especies estarán en equilibrio cinético<sup>25</sup>. Las partículas mantendrán entonces la forma de una distribución termal, pero con su temperatura y potencial químico corridas al rojo por un factor  $\propto a^{-1}$ . Esto parecería indicar que los neutrinos también seguirán en equilibrio térmico, pero por esta época los electrones y positrones empiezan a aniquilarse ( $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ ) afectando así el valor de  $g_*$  (ya que la reacción inversa  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  ya no es posible). Debido a esta aniquilación, debemos de empezar a distinguir a  $g_*(T)$  de  $g_*^s(T)$ . La manera más sencilla de ver este cambio en la temperatura de las especies respecto a la del neutrino es usando la conservación de la entropía  $g_*^s(T)a^3T^3 = \text{constante}$ . Antes de la aniquilación de  $e^+e^-$  tenemos  $g_* = g_*^s = 2 + 3.5 + 5.25 = 10.75$ , luego de la aniquilación se tiene  $g_*^s = 2 + 5.25(T_\nu/T)^3$ . Al reducirse el número de grados de libertad relativistas la densidad de energía y entropía se transfieren de los  $e^+$  y  $e^-$  a los fotones, pero no a los neutrinos. Igualando el antes con el después de la aniquilación  $10.75 = 2(T/T_\nu)^3 + 5.25$ , de donde la temperatura de los neutrinos luego de la aniquilación  $e^+e^-$  será

<sup>25</sup>Esto puede mostrarse como sigue, el momentum de un neutrino libre (y de cualquier otra partícula) sufre un *redshift* mientras el universo se expande,  $p(t_2) = (a_1/a_2)p(t_1)$ . Al tiempo  $t_1$  el elemento en el espacio de fase  $d^3p_1 dV_1$  contiene

$$dN = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p}_1) d^3p_1 dV_1$$

Al tiempo dos, las mismas  $dN$  partículas están en el elemento del espacio de fase  $d^3p_2 dV_2$ , ahora la función de distribución en  $t_2$  está dada mediante

$$\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p}_2) = \frac{dN}{d^3p_2 dV_2},$$

La relación entre la función de distribución a dos diferentes tiempos se puede obtener usando  $d^3p_2 = (a_1/a_2)d^3p_1$  y  $dV_2 = (a_2/a_1)^3 dV_1$ , obteniendo

$$f(\mathbf{p}_2) = \frac{1}{e^{(p_2 - \mu_2)/k_B T_2} \pm 1},$$

donde  $\mu_2 \equiv (a_1/a_2)\mu_1$  y  $T_2 \equiv (a_1/a_2)T_1$ . Este análisis es válido para partículas relativistas, para partículas no-relativistas existe un resultado diferente.

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T = 0.714 T. \quad (1.75)$$

Después de esta aniquilación, solo los fotones y los neutrinos (suponiéndolos sin masa), permanecerán relativistas.

*Nucleosíntesis* Esta etapa produce los elementos ligeros:  ${}^2\text{H}(\text{D})$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  y  ${}^7\text{Li}$  al principio de la época dominada por radiación, aproximadamente a temperaturas de  $T_{ns} \lesssim 1 \text{ MeV}$ , correspondientes a una edad del universo de aproximadamente  $t \gtrsim 1 \text{ s}$

La predicción de abundancia de dichos elementos y su confirmación por las observaciones es uno de los grandes logros del modelo estándar cosmológico. Esta predicción es impresionante ya que relaciones de las abundancias respecto a la abundancia de  $H$  cubre varios órdenes de magnitud:  ${}^4\text{He}/H \sim 0.08$  hasta  ${}^7\text{Li}/H \sim 10^{-10}$ , así esta predicción y su confirmación ponen cotas muy restrictivas a posibles desviaciones del modelo estándar cosmológico [71], ver figura 1.1. Se recomienda al lector revisar la literatura [35, 71, 76].

*Recombinación*<sup>26</sup>, *Desacople* y *LSS* No toda la materia fue eliminada a través de la aniquilación de partículas/antipartículas, por algún razón aún misteriosa existía un pequeño exceso de lo que ahora llamamos materia sobre la antimateria. Esto nos indica que  $\mu_B$ , el potencial químico bariónico, es diferente de cero y positivo. Al ser los protones y neutrones los bariones más ligeros, suponemos que la mayor parte de  $\mu_B$  se debe a los nucleones ( $n_B \equiv n_n + n_p$ ). El universo es eléctricamente neutro, por lo que el número de electrones en el universo debe ser igual al número de los protones ( $n_{e^-} = n_p$ ). Con estas simples observaciones podemos continuar con los cálculos de la evolución del universo.

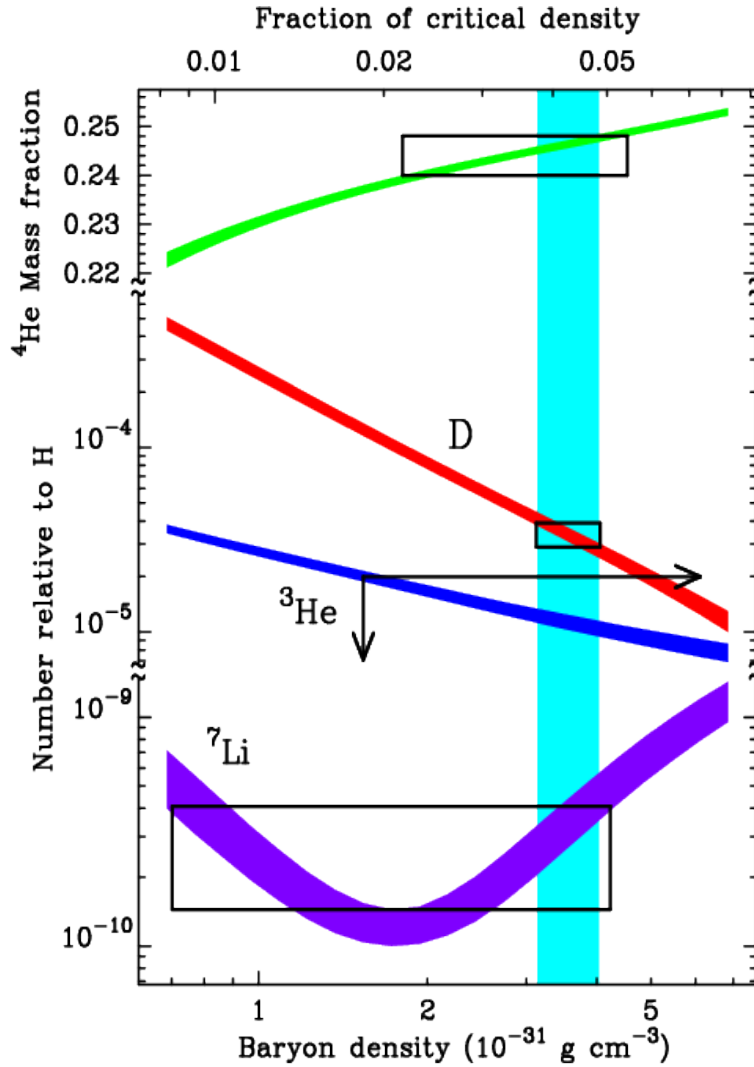
Definamos un parámetro  $\eta_{B\gamma}$ , que es la razón entre bariones y fotones hoy

$$\eta_{B\gamma} := \frac{n_B(t_0)}{n_\gamma(t_0)}, \quad (1.76)$$

de las observaciones provenientes de nucleosíntesis, sabemos que  $\eta_{B\gamma} \approx 10^{-9}$ . El número bariónico es conservado por lo que  $n_B V = \text{constante}$ , entonces  $n_B \propto a^{-3}$ . Luego de la aniquilación  $e^+e^-$ ,  $n_\gamma \propto a^{-3}$  también, entonces

$$n_B(T) = \eta_{B\gamma} n_\gamma = \eta_{B\gamma} \frac{2\zeta(3)}{\hbar^3 \pi^2} T^3, \quad T \ll m_e. \quad (1.77)$$

<sup>26</sup>Este nombre, como muchos otros nombres en cosmología, no es el adecuado, ya que el plasma siempre ha estado ionizado hasta este tiempo y por lo tanto es la primera vez que se combinan los electrones con los protones para formar núcleos neutros, i.e. es una *combinación* no una *recombinación*. El nombre se importa de procesos estelares en los cuales el proceso de ionización-desionización ocurre varias veces.



**Figura 1.1:** Constricciones sobre la densidad bariónica de la Nucleosíntesis. Son mostradas las predicciones de cuatro elementos (de arriba a abajo):  $^4\text{He}$  (verde), D (roja),  $^3\text{He}$  (azul) y  $^7\text{Li}$  (morada). Estas predicciones abarcan 10 ordenes de magnitud (ver texto). La banda sólida son las mediciones de D primordial. Las cajas muestran observaciones sobre las abundancias de elementos, nótese que para el  $^3\text{He}$  sólo se conoce el límite superior. Figura tomada de Burles y otros, 1999 [35].

El universo contiene, en esta época ( $T \sim 10 \text{ keV} \rightarrow 1 \text{ eV}$ ), un fondo relativista de neutrinos y fotones (“radiación”) y electrones, protones y núcleos libres en forma no relativista (“materia”). Aunque dominado por la densidad de energía de la radiación, debido a sus diferentes dependencias temporales ( $\rho_{rad} \propto a^{-4}$  vs.  $\rho_{mat} \propto a^{-3}$ ), la densidad de energía de la radiación a partir del tiempo  $t_{EQ}$  será menor que de la densidad de energía de la materia<sup>27</sup> y el universo entrará en la *época de dominación de la materia*. La evidencia observacional apunta a que hay más materia que los bariones, llamada Materia oscura (DM) que no hemos considerado en el análisis hasta este punto, pero la misma evidencia observacional indica que la DM interactúa débilmente, por lo que no afectará los cálculos hasta aquí desarrollados (aunque si afectará la formación de la estructura cf. capítulo 2), su efecto principal será adelantar el dominio de la materia en el universo, y será un ingrediente fundamental en la formación de estructura.

La radiación y la materia permanecerán en equilibrio termodinámico mientras haya muchos electrones libres. El proceso que mantiene este equilibrio principalmente por la dispersión de Thomson ( $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ ) y la fotoionización/recombinación del hidrógeno ( $H + \gamma \leftrightarrow p^+ + e^-$ )

La temperatura seguirá disminuyendo y llegará a ser lo suficientemente baja para permitir que los electrones y nucleones formen núcleos neutros –e.g. el proceso de fotoionización del hidrógeno  $H + \gamma \rightarrow p^+ + e^-$  – ya no será posible energéticamente). A este momento se le conoce como *recombinación*, provocando que la densidad de electrones libres decaiga rápidamente y a la vez provocando que *el camino libre promedio* de los fotones se vuelva mayor que el tamaño del horizonte. Cuando esto sucede el universo se vuelve transparente y se dice que los fotones se han desacoplado. Estos fotones libres son los que forman el CBR y tienen una temperatura actualmente (en  $t_0$ ) de  $T(t_0) = T_0 = 2.725 \text{ K}$ . Después del desacople la temperatura de la materia caerá más rápido que la de los fotones, pero la formación de estructura hará que la materia se caliente a diferentes temperaturas en diferentes lugares.

La cosmología estándar, aunque predice el CBR, es incapaz de predecir el valor de  $T$  a  $t = t_0$ . Es un parámetro libre de la teoría y se usará  $\Omega_{rad} \propto T^4$  en lugar de  $T_0$  en este trabajo de tesis [147].

Para simplificar la discusión sobre la recombinación, supondremos que todos los núcleos son en realidad protones. La densidad de número de los protones libres será  $n_p$ , la de los electrones libres  $n_e$  y la de los átomos de hidrógeno por  $n_H$ . La reacción de recombinación es  $p^+ + e^- \rightarrow H + \gamma$ , debido a que  $\mu_\gamma = 0$ , los potenciales químicos están relacionados mediante  $\mu_p + \mu_e = \mu_H$ , usando estos datos en (1.61a) obtenemos la relación

$$n_H = \frac{g_H}{g_p g_e} n_p n_e \left( \frac{m_e m_p k_B T}{2\pi \hbar^2 m_H} \right)^{-3/2} e^{B/k_B T} \quad (1.78)$$

donde  $B$  es la energía de enlace del hidrógeno,  $B := m_p + m_e - m_H = 13.6 \text{ eV}$ ,  $g_e = g_p = 2$ ,  $g_H = 4$ . Fuera del exponencial, podemos ignorar las diferencias de masa entre el hidrógeno y el protón y

<sup>27</sup>El tiempo de equilibrio  $t_{EQ}$  ocurre cuando la densidad de energía de la radiación y la densidad de energía de la materia son iguales, i.e. cuando  $\rho_{rad} = \rho_{mat}$ .



hacer  $m_p \simeq m_H$ , obtenemos la ecuación de Saha

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} e^{B/k_B T}, \quad (1.79)$$

y definimos la ionización fraccionaria como

$$X := \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_e}{n_e + n_H} \quad (1.80)$$

de tal manera que en el momento cuando  $X = 1$  el sistema está completamente ionizado, cuando  $X = 0$  es completamente neutro. Usando esto en las ecuaciones (1.79) y (1.77) la ecuación de Saha (1.79) se puede reescribir como

$$\frac{1-X}{X^2} = n_p \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} e^{B/k_B T} = 4\zeta(3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{k_B T}{m_e} \right)^{3/2} \eta_{B\gamma} e^{B/k_B T}. \quad (1.81)$$

El factor  $4\zeta(3)\sqrt{2/\pi} \approx 3.84$ . La ecuación de Saha, es una ecuación cuadrática de la forma  $A(\eta_{B\gamma}, T)x^2 + x - 1 = 0$ . Si definimos el tiempo de recombinación  $t_{rec}$  cuando  $X = 1/2$ , tendremos  $T_{rec} = 0.323 \text{ eV} = 3740 \text{ K}$  y esto sucederá a un *redshift*  $z_{rec} = 1370$ . Durante este proceso el número de electrones cae rápidamente, la tasa de interacción de los fotones en función del *redshift* con los electrones es  $\Gamma(z) = n_e(z)\sigma_{Thomson} = X(z)(1+z)^3 n_{B,0}\sigma_{Thomson}$ , donde  $\sigma_{Thomson} = 8\pi\alpha^3/3m_e^2$ . Usando datos observacionales sabemos que  $\Omega_{B,0} = 0.04$ , entonces  $\Gamma(z) = 4.4 \times 10^{-21} \text{ s}^{-1} X(z)(1+z)^3$ . El universo se encuentra en esta etapa dominado por materia, por lo que usando (1.46)

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3} \quad (1.82)$$

de nuevo usando las observaciones  $\Omega_{m,0} = 0.3$ , obteniendo  $H(z) = 1.24 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}(1+z)^{3/2}$ . El tiempo de desacople  $t_d$  lo definiremos cuando  $\Gamma = H$ , obteniendo el *redshift* de  $z_d = 1130$ . Este resultado arrastra errores que se introdujeron en la simplificación que llevo a la ecuación de Saha y además de estas se supone que la fotoionización del hidrógeno está en equilibrio y esto obviamente no ocurre cuando  $\Gamma < H$ . Realizando el cálculo sin hacer aproximaciones tan groseras se obtiene  $z_d \approx 1100$ ,  $T_d \approx 3000 \text{ K}$ .

Por último, definimos como tiempo de LSS  $t_{LSS}$ , cuando un fotón promedio choca con su último electrón. Durante  $t \rightarrow t + dt$  la probabilidad de un choque de un fotón con un electrón es  $dP = \Gamma(t)dt$ , donde debido a la recombinación  $\Gamma(t)$  es modificada por  $X(t)$ ,  $\Gamma(t) = n(t)x(t)\sigma_{Thomson}$ , si observamos un fotón al tiempo  $t_0$ , el número de colisiones que experimenta desde  $t$  es la llamada *profundidad óptica*<sup>28</sup>

$$\tau(t) = \int_t^{t_0} \Gamma(t)dt \quad (1.83)$$

Cuando  $\tau = 1$  es el tiempo del LSS. La tabla 1.3 resume los eventos recién comentados.

<sup>28</sup>*Optical depth* en inglés

Evento	$T$	$z$
Transición EW	$\sim 100$ GeV	
Transición de fase QCD	$\sim 150$ MeV	
Desacople de los $\nu$	$\sim 1$ MeV	
Aniquilación $e^-e^+$	$< m_e \sim 0.5$ MeV	
Nucleosíntesis	$\sim 50 - 100$ keV	
Igualdad Rad-Mat	9730 K	3570
Recombinación	3740 K	1370
Desacople de los $\gamma$	3000 K	1100
LSS	3000 K	1100

**Tabla 1.3:** *Eventos más importantes del universo temprano.*

*Época oscura* Es el periodo comprendido desde el LSS hasta que las estrellas se formaron por atracción gravitatoria y empezaron a brillar. El proceso de formación de estrellas tiene un pico entre  $z = 2, z = 1$ . El proceso de formación de estrellas y la física que ocurre dentro de la época oscura, queda fuera del estudio de esta tesis.

#### 1.4 Cosmología Observacional

Los modelos cosmológicos, como todos los modelos estudiados por la física, deben de ser confrontados por las observaciones o experimentos. En el caso de la cosmología deben de confrontarse con las observaciones astronómicas. Las observaciones astronómicas pueden clasificarse en dos tipos, aquellas que nos muestran que está pasando muy lejos de nosotros y debido a la velocidad finita de la luz, nos muestran lo que pasó hace mucho tiempo (*observaciones sobre el cono nulo*) y aquellas observaciones de objetos cercanos (*observaciones del tipo "geológico"*), que cuando son relacionadas con teorías acerca de los orígenes nos aportan información sobre nuestra línea de mundo pasada hace mucho tiempo (por ejemplo, la determinación local de las abundancias de elementos, son relacionadas con los cálculos de nucleosíntesis) [67].

Actualmente las observaciones son llevadas a cabo usando gran parte del espectro electromagnético, lentes gravitacionales, conteos de fuentes, y por supuesto, las mediciones de alta precisión del CBR.

Los estudios de galaxias a nivel óptico, ultravioleta e infrarrojo han detectado la existencia de galaxias (o proto-galaxias) a distancias de  $z \simeq 10$  (Hubble Space Telescope<sup>29</sup>, W. Keck Observatory en Hawaii<sup>30</sup>, European Southern Observatory en Chile<sup>31</sup>, etc. ), otras observaciones como búsquedas con radio, rayos X y de rayos gamma han identificado en las galaxias a QSOs y expulsores de rayos gamma, GRB<sup>32</sup>, por último las técnicas que involucran lentes gravitacionales han ayudado

<sup>29</sup>Página Web: <http://hubble.nasa.gov/>

<sup>30</sup>Página Web: <http://www.keckobservatory.org/>

<sup>31</sup>Página Web: <http://www.eso.org/public/>

<sup>32</sup>Del inglés textitGamma Ray-Bursters

a detectar galaxias gracias a las múltiples imágenes de sí misma encontradas en las placas debido a la lente gravitacional entre nosotros y ellas). Las observaciones del CBR y sus resultados serán discutidos en el capítulo 2.

### Distancias en cosmología

Debido a la importancia del campo electromagnético para transmitir información hasta nosotros desde fuentes distantes (e.g. los fotones que recibimos del CBR), escribiremos algunas ecuaciones útiles sobre la transmisión de fotones sobre el fondo de RW. Los fotones viajan sobre geodésicas nulas ( $ds^2 = 0$ ),  $x^a(\lambda)$  que tienen como vector nulo tangente  $k^a = dx^a/d\lambda$ , siendo  $\lambda$  el parámetro afín de la geodésica. Los vectores tangentes de la geodésica cumplen con  $k^a_{;b} k^b = 0$ . Las simetrías de la geometría de RW nos permite concentrarnos en las geodésicas radiales. La distancia comóvil  $D_c$ , recorrida por el fotón desde su emisión al tiempo  $t = t_{em}$  en  $r = r_{em}$  hasta su detección en un tiempo  $t_{obs}$ ,

$$D_c = \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_{em}} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{a(t_{em})}^{a(t_{obs})} \frac{da}{a\dot{a}}. \quad (1.84)$$

Para el caso  $K = 0$  esta integral es simplemente el tiempo conforme  $\eta$ .

Existen dos cantidades de interés observacional relacionadas con  $D_c$ , la distancia luminosa,  $d_L$  y la distancia angular  $d_A$ . Para definir las es necesario revisar los conceptos de *flujo* y *luminosidad*. El flujo es la medida cuantitativa de energía que pasa por unidad de tiempo por unidad de superficie, y luminosidad es la cantidad de energía recibida por unidad de tiempo. De las definiciones se ve que estas cantidades están relacionadas: el flujo  $F$  de una fuente con luminosidad  $L$ , a una distancia  $d$  es  $F \equiv L/4\pi d^2$ . La distancia luminosa  $d_L$  es simplemente la adecuación  $d \rightarrow d_L$  de esta definición al caso de un universo expandiéndose. Por otro lado, si un objeto tiene un tamaño conocido  $l$  subtendiendo un ángulo pequeño  $\theta$ , la distancia angular a ese objeto está definida por  $l = \theta d_A$ . Para el caso  $K = 0$  estas distancias son

$$d_L(z) = a_0 D_c (1+z), \quad d_A = a_0 D_c (1+z)^{-1}. \quad (1.85)$$

Para una discusión más detallada sobre estas y otras definiciones de distancias véase [52, 94].

El *horizonte de partículas* de un evento  $P$  está relacionado con la integral (1.84) y es por definición la frontera entre las líneas de mundo que pueden ser vistas en  $P$  y aquellas que no lo son [215, pags. 104-106],[184, pags. 376-382]<sup>33</sup>. Tomando en (1.84) como tiempo de emisión el Big-Bang ( $t_{em} = 0$ ) y

<sup>33</sup>Existe otro tipo de horizonte: el *horizonte de eventos* que es definido como la distancia de los objetos más lejanos que podremos observar en un futuro lejano. Este horizonte separa a aquellos objetos que podremos observar en el futuro de aquellos que jamás podrán ser observados por hallarse fuera del cono de luz futuro del observador. Los modelos de

escogiendo nuestra coordenada local cósmica como  $r = 0$ , obtenemos la fórmula para el horizonte de partículas<sup>34</sup>:

$$d_{HP}^c \equiv \int_0^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_{em}} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.86)$$

para  $a(t) \sim t^p$  con  $0 < p < 1$ , el horizonte comóvil de partículas será  $d_{HP}^c = \frac{1}{1-p} t^{(1-p)} = \frac{p}{1-p} \frac{1}{a} H^{-1}$ , donde en la última igualdad se utilizó el radio de Hubble resultante para este factor de escala. La distancia física actual (1.20) a la materia que compone el horizonte es

$$d_{HP} = a_0 d_{HP}^c. \quad (1.87)$$

Es importante recordar que estos horizontes aparecen como resultado de dos factores: (a) la velocidad finita de la luz, y (b) la edad finita del universo.

#### 1.4.1 Parámetros Observacionales de los Universos de Friedmann-Lemaître

Como se mostró en §1.2.2, la geometría del universo de fondo está completamente determinada si (a) la ecuación de estado de todos los componentes de materia es especificada y (b) los valores de  $\Omega_0$  y  $H_0$  son dados.

Las observaciones indican, que, para determinar  $\Omega_0$ , deben de especificarse cinco parámetros relacionados con los componentes del universo de fondo a energías debajo de los 200 GeV:  $\Omega_B$ ,  $\Omega_{rad}$ ,  $\Omega_\nu$ ,  $\Omega_{DM}$  y  $\Omega_\Lambda$  que describen la contribución de los bariones, radiación, neutrinos, materia oscura y constante cosmológica a  $\Omega$  respectivamente [147]. Los primeros tipos de materia estamos seguros que existen y los últimos dos son sugeridos por las observaciones y no han sido refutados por ninguna observación a la fecha. De todos ellos solamente  $\Omega_{rad}$  está bien restringido por las observaciones, los valores de los demás contienen incertidumbres considerables debido a los procesos de medición utilizados. Con esto, se establece que el universo de fondo en la cosmología estándar, es un modelo caracterizado por estos 6 parámetros:  $\{ H_0, \Omega_B, \Omega_{rad}, \Omega_\nu, \Omega_{DM}, \Omega_\Lambda \}$ .

Para que la teoría de la formación de estructura (cf. §2.3) de la cosmología estándar pueda hacer predicciones es necesario proveerla con el espectro de potencias de las inhomogeneidades<sup>35</sup> in-universos que tienen como convergente a la integral

$$d_{HE} = \int_{max}^t \frac{dt}{a},$$

tienen un horizonte de eventos. con  $t_{max}$  el tiempo de expansión futuro que puede ser infinito o finito y  $t_0$  la edad del universo en el momento de la observación.

<sup>34</sup>Debido a las simetrías de la métrica RW sólo la coordenada  $r$  contiene información significativa, de ahí que solo se tomen en cuenta los fotones que viajan radialmente hacia nosotros (i.e.  $\phi = \theta = 0$ )

<sup>35</sup>La palabra *inhomogeneidades* no existe en español. La utilizo como una traducción directa de *inhomogeneities*. La palabra correcta en español para no-homogéneo es *heterogéneo*, pero esta palabra en español significa "compuesto de diferentes partes" lo cual no es la idea que quiero dar aquí. A lo largo de esta tesis por lo tanto usaremos la (incorrecta) palabra inhomogéneo.

ciales, el cual se supone no contiene una preferencia por ninguna escala en particular,  $P = Ak^n$ , i.e. una ley de potencias [118, 157]. Lo cual agrega dos parámetros más,  $(A, n)$  a los parámetros observacionales de la cosmología.

Así, la cosmología estándar requiere la especificación de ocho parámetros <sup>36</sup>:  $\{H_0, \Omega_B, \Omega_{rad}, \Omega_v, \Omega_{DM}, \Omega_{DE}, A, n\}$ , los primeros seis relacionados con el universo de fondo, perfectamente homogéneo e isotrópico y los últimos dos especificando las inhomogeneidades iniciales del universo perturbado.

Las observaciones han arrojado los siguientes resultados respecto a los parámetros recién mencionados [155] :

- a Nuestro universo tiene  $0.98 \lesssim \Omega \lesssim 1.08$ . Este dato se puede obtener del espectro de anisotropías del CBR. Estas observaciones muestran que vivimos en un universo con densidad muy cercana a la crítica  $\Rightarrow K \approx 0$ .
- b Observaciones del deuterio primordial producido en la nucleosíntesis (26) junto con observaciones del CBR muestran que el número total de bariones en el universo contribuye con  $\Omega_B = (0.024 \pm 0.0012)h^{-2}$ . Observaciones independientes fijan  $h = 0.72 \pm 0.07$  y se concluye que  $\Omega_B \simeq 0.04 - 0.06$ . Estas observaciones incluyen todos los bariones sean luminosos o no, por lo que se puede deducir que la mayoría de la materia del universo es no-bariónica.
- c Los conteos de galaxias como función del *redshift* muestran una homogeneidad espacial del universo y dan un estimado de la materia bariónica visible  $\Omega_{Bv} \simeq 0.015 \ll \Omega_B$  con lo cual se concluye que la mayoría de los bariones del universo no son visibles encontrándose por ejemplo en estrellas muertas.
- d Conteos de fuentes de radio y de QSO's muestran una evolución del número/luminosidad de estos objetos, descartando así la primera versión del modelo cosmológico estático (*steady state*) de Bondi, Gold y Hoyle .
- e Observaciones relacionadas con estructura a gran escala y su dinámica (curvas de rotación de galaxias, masas estimadas de los clusters, lentes gravitacionales) sugieren que el universo está poblado por un componente no luminoso de materia, *Materia oscura* (DM) formada con partículas masivas que interactúan débilmente y que se aglutina a escalas galácticas. Este componente contribuye con un  $\Omega_{DM} \simeq 0.20 - 0.35$  de la energía total. "Interactuar débilmente" se interpreta en la actualidad a que sólo interacciona gravitacionalmente con otras partículas y por lo tanto se puede despreciar su presión (que proviene de colisiones entre partículas), teniendo así la simple ecuación de estado  $p_{DM} \approx 0$ .

---

<sup>36</sup>En alguna literatura orientada a la parte observacional [73, 93, 148, 196] de la cosmología se llegan a incluir hasta 16 parámetros observacionales, a saber:  $h$  (en lugar de  $H_0$ ), el parámetro de desaceleración ( $q_0$ ), la edad actual del universo ( $t_0$ ), la ecuación de estado de la energía oscura ( $w$ ), amplitud de la perturbación de densidad ( $\sqrt{S}$ ), amplitud de las ondas gravitacionales ( $\sqrt{T}$ ), fluctuaciones de la masa a 8 Mpc ( $\sigma_8$ ), índice tensorial ( $n_T$ ) y el corrimiento del índice escalar ( $dn/d \ln k$ ). Como se podrá apreciar muchos parámetros son redundantes, esta lista tiene dos objetivos, el primero es tener redundancia en los datos ya que se miden de diferentes maneras y así tener mayor certidumbre en sus valores, y segundo tratan de describir un universo más complejo que el tratado en esta sección (de ahí la inclusión de los modos tensoriales, el corrimiento del índice escalar y  $\sigma_8$ ).

- f Usando esta última observación junto con la primera, se concluye que debe haber al menos un componente más de materia <sup>37</sup> que contribuya con un 70% a la densidad de energía total. Las observaciones de supernovas<sup>38</sup> apuntan a que no se aglutina a ninguna escala y posee presión negativa. Estas observaciones sugieren  $\gamma - 1 = p/\rho \lesssim -0.78$  y contribuye con  $\Omega_{DE} \simeq 0.60 - 0.75$ . La elección más sencilla de esta *Energía oscura* (DE) es suponer una ecuación de estado  $p_{DE} = -\rho_{DE}$ , i.e. una constante cosmológica  $\Lambda$ , lo cual resulta al sustituir en (1.40) que  $\rho_{DE}$  es constante durante la expansión del universo. Esta es la forma de materia dominante en la actualidad ya que las observaciones indican que la expansión está acelerando.
- g El universo también posee radiación que contribuye con una densidad de energía  $\Omega_{rad}h^2 = 2.56 \times 10^{-5}$ . La mayor contribución a esta densidad proviene de los fotones del CBR.

## 1.5 Éxitos y problemas de la cosmología estándar

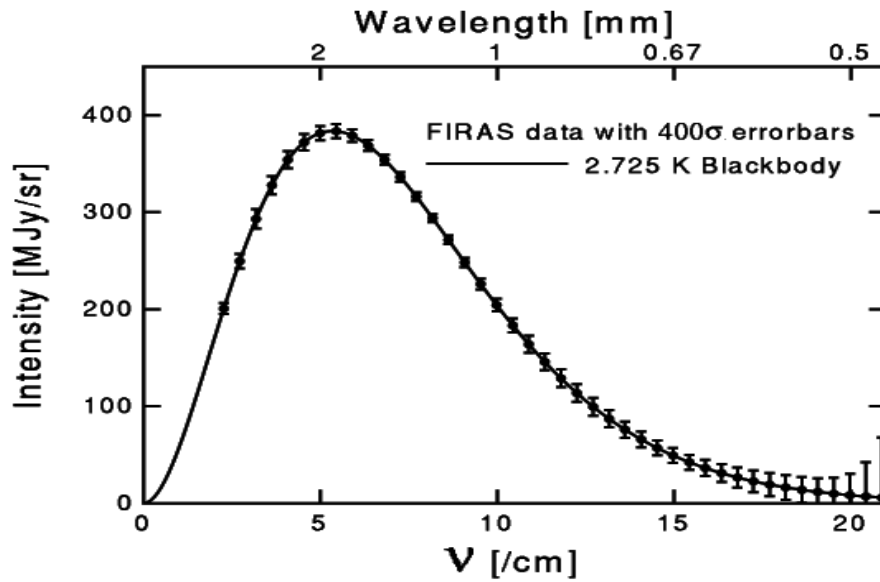
### 1.5.1 Éxitos de la cosmología estándar

Mencionaremos en esta sección la relación entre las predicciones de la cosmología estándar y los valores de los parámetros observacionales. El hecho de que existan relaciones con un elevado grado de no trivialidad entre las predicciones y los parámetros muestran la fuerza del modelo.

- a Mientras el universo se expande y se enfría ( $T \propto a^{-1}$ ), diferentes interacciones físicas se “congelan” (definición en pag. 23) en diferentes épocas, esto se debe principalmente a que cuando el universo se enfría por la expansión la energía disponible localmente para las interacciones disminuye hasta que es insuficiente para continuar con las reacciones necesarias. La primera especie en desacoplarse es la de los neutrinos, al estar en equilibrio térmico comparte la misma temperatura que los fotones en esa época, pero al desacoplarse su temperatura no variará más mientras que la temperatura de los fotones aumentará por la aniquilación de pares de electrones y positrones hasta que la radiación se desacople también de la materia. Una de las predicciones del modelo estándar es que ambas temperaturas tendrán un ratio de  $(T_\nu/T_\gamma) = (4/11)^{1/3} \simeq 0.71$ . Esta predicción deberá ser probada en un futuro cercano [186].
- b Cerca de la temperatura de unos pocos MeV, la nucleosíntesis ocurre [71], produciendo los elementos ligeros a partir de los electrones y nucleones libres. Las abundancias de estos elementos dependen crucialmente de  $\Omega_B$  y el número de especies de neutrinos. Además el <sup>3</sup>He, D y <sup>7</sup>Li dependen de maneras diferentes de estos parámetros: (a) la abundancia de He

<sup>37</sup>Podría darse el caso que Relatividad General no fuera la teoría correcta de la gravitación, pero eso estaría en contra de las suposiciones de esta tesis y de los fundamentos del modelo estándar cosmológico.

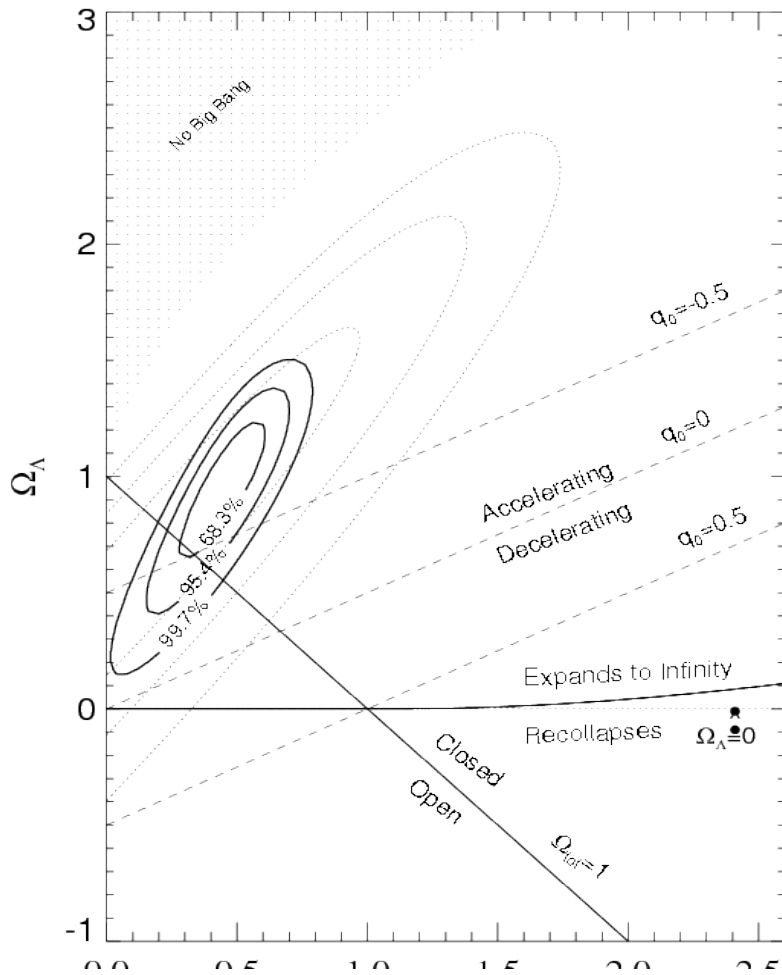
<sup>38</sup>Esto pudo hacerse debido a que en las supernovas tipo Ia su luminosidad máxima está relacionada con el tiempo de decaimiento de la curva de luminosidad, volviéndose así “velas estándar” para galaxias a grandes distancias.



**Figura 1.2:** Espectro del fondo de radiación cósmica (CBR) correspondiente a la temperatura  $T_0 = 2.725 \text{ K}$  obtenido por el instrumento FIRAS del COBE Garcia-Bellido, 2005 [76].

construye el número de especies de neutrinos a tres, resultado predicho por la cosmología antes de ser verificado en laboratorios [13] usando el decaimiento de  $Z^0$  [189] (para una revisión de este tema ver [53]). Debe recalarse que el modelo estándar no fue “diseñado” para dar tres especies de neutrinos. (b) es posible escoger un rango de valores para  $\Omega_B$  en la que las abundancias de He, D y Li pueda ser explicada, esta región de concordancia es un atributo no trivial de la cosmología estándar.

- c La cosmología estándar introduce una fase caliente dominada por la radiación en el universo temprano con una tasa entre los números de fotón / barión muy alta. Debido a la expansión del universo los fotones se desacoplan de la materia cuando  $T \approx 10^3 \text{ K}$ , formando así un fondo de radiación cósmica (CBR) con un espectro de Planck o de cuerpo negro (cf. 26). Es importante mencionar que, aunque la teoría no puede decir cual es el valor actual de la temperatura del CBR [190], hace una predicción definitiva sobre su existencia con un espectro Planckiano a una temperatura  $T \neq 0$ , ningún otro modelo cosmológico hizo esta predicción antes del descubrimiento del CBR en la década de 1960. La exactitud de esta predicción fue probada por el instrumento Espectrómetro Absoluto del Infrarojo Lejano (FIRAS) del satélite COBE [194] (figura 1.2). Los modelos competidores de la cosmología estándar solo pudieron explicar el CBR retrospectivamente, es decir, mediante la agregación de procesos físicos ajenos a su teoría inicial.
- d El universo es dominado por  $\Omega_B, \Omega_{DM}$  y  $\Omega_{DE}$  en  $z \ll 10^3$  y varias observaciones no relacionadas (Conteos de galaxias, Edad del Universo, Distribución estadística de lentes gravitacionales de QSO’s) imponen restricciones a estos parámetros. La existencia de una zona



**Figura 1.3:** Intervalos de confianza dados por las observaciones de supernovas de Tipo Ia (SN Tipo Ia) a los valores de  $\Omega_{DM}$  y  $\Omega_{DE}$ . Los contornos sólidos son los datos del análisis del 2004, los contornos punteados son de la primeros resultados de los mismos autores de 1998. Figura tomada de Riess y otros, 2004 [182].



consistente con las distintas observaciones en el espacio de parámetros es otro triunfo de la cosmología estándar (figura 1.3).

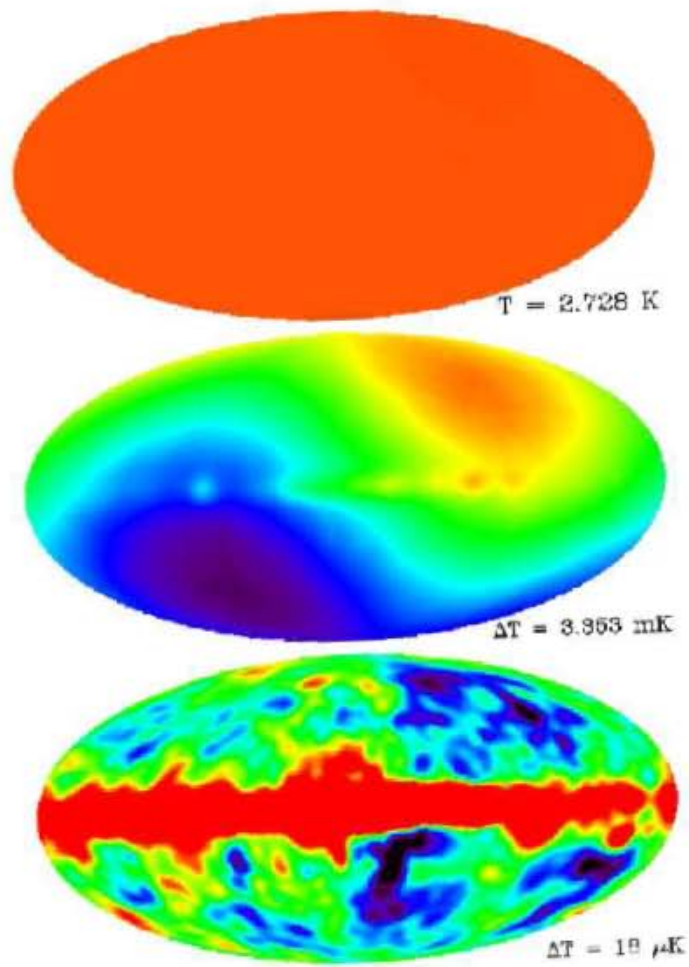
- e Hay dos predicciones falsificables que hace la cosmología estándar y que podrían estudiarse en un futuro: (a) la temperatura del fondo cósmico de neutrinos:  $T_\nu = 1.9$  K y (b) la predicción de que el universo se estuvo expandiendo durante todo el lapso de  $0 < z < 10^3$ , lo cual resulta necesario para poder enfriar el CBR. Si una población sistemática de objetos distantes es encontrada con un espectro corrido al azul (*blueshifted*) señalaría una etapa de contracción del universo y descartaría por completo a la cosmología estándar.
- f El paradigma de formación de estructura (cf. capítulo 2) también realiza predicciones que han sido confirmadas por observaciones. La primera y quizá la más importante es que debido a las fluctuaciones de la distribución de materia, pequeñas fluctuaciones deben de existir en el CBR. El espectro de potencias deberá de ser plano para poder reproducir la distribución de las estructuras cosmológicas que vemos hoy; y además, las anisotropías de la temperatura deben de ser de al menos el orden de  $10^{-6}$  para que las estructuras tengan el tiempo de crecer y volverse no-lineales en  $z = 0$ . Estas predicciones fueron comprobadas con la misión COBE usando el instrumento Radiómetro de Microondas Diferencial (DMR) (figura 1.4) a principios de 1990 [194]. Otra predicción importante es que el espectro de potencias de las fluctuaciones primordiales debe de ser plano (es decir, todas las escalas tienen la misma potencia), propuesto –para explicar las distribuciones de galaxias y *clusters* de galaxias observadas (otras consideraciones de consistencia fueron tomadas en cuenta e.g. que no haya producción excesiva de agujeros negros [110]) – de manera independiente por Zel’dovich [225] y Harrison [90].
- g La forma final del espectro de potencias de las anisotropías de la temperatura del CBR, es debida a varios efectos que se discutirán en el capítulo siguiente (cf. figura 2.3, capítulo 2) y depende de manera no-trivial de los parámetros observacionales de la cosmología estándar (e.g. la altura relativa del primer pico depende la densidad bariónica,  $\Omega_B$  su posición depende de la geometría y por lo tanto de  $\Omega_{DE}$  y  $\Omega_{DM}$ ).

### 1.5.2 Problemas y debilidades de la cosmología estándar

La mayoría de los problemas<sup>39</sup> que presentaremos en esta sección son del tipo “incomodidad con ciertas condiciones iniciales” [25], que son en realidad problemas de ajuste fino<sup>40</sup>. Lllamarlos “problemas” puede parecer rigorista, ya que cualquier solución de las ecuaciones diferenciales de la cosmología estándar refleja propiedades específicas de los datos iniciales: si calculamos hacia atrás en el tiempo simplemente encontramos las condiciones iniciales que fueron responsables por el estado de las cosas como las vemos actualmente [25]. Pero, aunque comparativamente hablando

<sup>39</sup>Ver los capítulos 15-17 de [163] para un recuento histórico sobre como se identificaron estos problemas en la década de 1970

<sup>40</sup>En inglés: *fine-tuning*.



**Figura 1.4:** Espectro de potencias del CBR observado por el instrumento DMR de COBE en 1990. La figura superior muestra el monopolo ( $T_0 = 2.725 \text{ K}$ ), la imagen central presenta el dipolo  $\delta T_1 = 3.372 \text{ mK}$  y la figura inferior corresponde al cuadrupolo ( $\delta T_2 = 18 \text{ } \mu\text{K}$  y multipolos superiores. Figura tomada de Garcia-Bellido, 2005 [76].

el Modelo Estándar de la Cosmología tiene muchos menos parámetros libres (7) que el Modelo Estándar de partículas (23), al ser un modelo que intenta explicar los orígenes de todo lo observable no es satisfactorio que dependa de condiciones tan especiales para lograr tal cometido [147]. Existe otra forma de ver estos problemas: son problemas en el sentido de que existen observaciones que no tienen una explicación natural dentro del contexto de la teoría.

- *Posible sobre-constricción de los parámetros observacionales.* Si tomamos en cuenta las múltiples observaciones independientes existentes, las restricciones en los parámetros cosmológicos es severa y se refleja en el hecho de que en el espacio de parámetros el área de concordancia es muy pequeña y para algunos críticos inexistente [147].
- *Explicación física de  $T_0$  en el CBR.* La predicción de la existencia del CBR es uno de los grandes éxitos del modelo cosmológico estándar, pero carece, a la fecha, de una interpretación sobre la relación entre la temperatura actual (i.e.  $z = 0$ ) del CBR y otros procesos físicos.
- *Extrapolación de la física conocida en varios órdenes de magnitud.* En cosmología la extrapolación de las leyes físicas actuales para ser aplicadas en la época del universo muy temprano es algo rutinario, pero hay que notar la enormidad de la extrapolación: 17 órdenes de magnitud en temperatura si suponemos que la física conocida y comprobada en laboratorios (recordar que se ha probado hasta energías de  $\approx 10^2$  GeV) es válida hasta la temperatura de Planck [147], por lo que un crítico podría preguntarse si aplicar una teoría especulativa a una época especulativa constituye física o algo más. Claro que la defensa que se establece es que los cálculos y su interpretación son más un ejercicio de consistencia que una descripción definitiva del universo muy temprano, pero lamentablemente esto no es siempre presentado así [25, 67, 153].

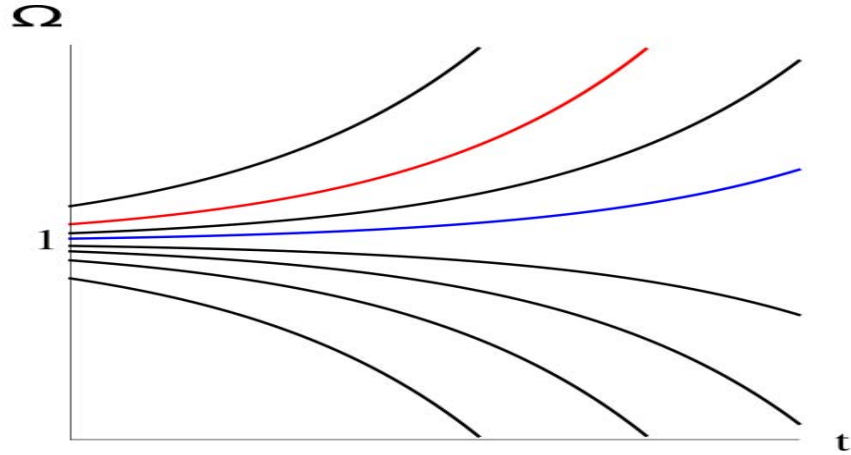
Por otra parte, los fundamentos teóricos del modelo estándar pueden ser calificados de poseer una inconsistencia interna<sup>41</sup> [146], ya que las ECE de la cual son derivados predicen una singularidad inicial para ecuaciones de estado razonables (cf. §1.2.2). Esta singularidad marca el rompimiento de las suposiciones que nos llevan, entre otras, a la acción de los campos de materia,  $S_m$  involucrados y a la suposición de un espacio-tiempo continuo (En la cosmología, a diferencia de otras ramas de la física en las cuales esto hubiera sido una señal de que algo está muy mal, esto se ve como algo bueno que además es identificado con el “mítico evento de la creación” en palabras de Narlikar y Padmanabhan, [147]).

- *Problema del Planitud.* Sabemos que vivimos en un universo en el cual  $\Omega_0 \equiv \rho_0/\rho_{cri} \simeq 1$ , i.e. un universo muy cercano a tener una geometría espacialmente plana. Podemos calcular que condiciones iniciales necesarias para que lleguemos a este estado. La ecuación de Friedmann (1.45):

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}$$

---

<sup>41</sup>La “inconsistencia” del modelo estándar cosmológico se puede calificar de transitoria ya que, cuando se tenga una teoría de la gravedad cuántica, la singularidad inicial podría ser removida. Pero esta defensa, para ser consistente debería de ir acompañada de la admisión de que cualquier física hecha a estas longitudes o densidades debería tomarse con extremo cuidado.



**Figura 1.5:** El problema de la planitud mostrado en una gráfica de densidad relativa  $\Omega$  contra el tiempo cosmológico  $t$  (ningún eje está a escala). En esta imagen se muestra como la solución  $\Omega = 1$  es repulsiva. Cada línea muestra un posible universo. Un universo similar al nuestro es la línea azul con  $|\Omega - 1| \sim 0$ . El universo representado por la línea roja es uno que difirió muy de las condiciones iniciales del universo representado por la línea azul. Figura tomada del Wikicommons [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Flatness\\_problem\\_density\\_graph.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Flatness_problem_density_graph.svg)

Durante la época dominada por radiación tenemos que  $H^2 \propto a^{-4}$  entonces,  $|\Omega - 1|_{rad} \sim a^2$ ; en cambio en la época donde la materia es dominante  $|\Omega - 1|_{mat} \sim a$ , o sea que ambos disminuyen conforme retrocedemos en el tiempo ( $a \rightarrow 0$ ). Si actualmente esta cantidad es casi cero, en el pasado debió de ser mas chica, por ejemplo, la razón entre esta cantidad hoy y la evaluada en tiempos del orden del tiempo de Planck,  $t_{Planck}$ , es (estamos en el modelo estándar cosmológico, en épocas con  $z > 10^3$  la densidad de materia es dominada por radiación),

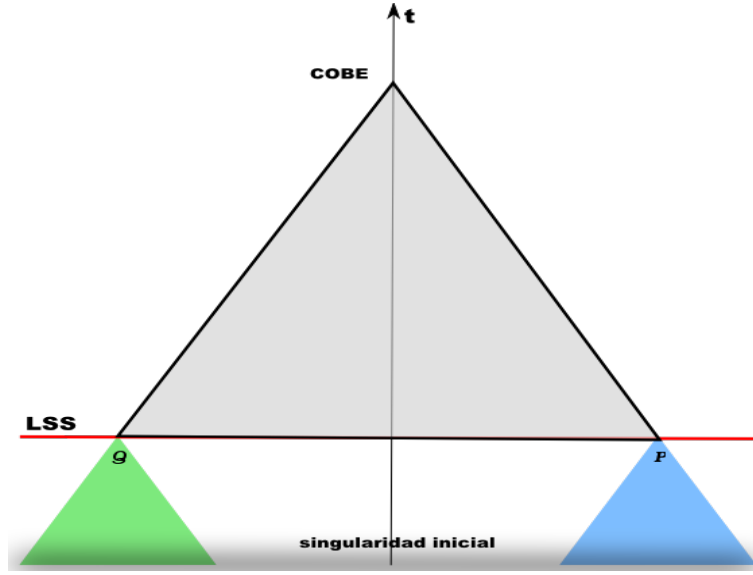
$$\frac{|\Omega - 1|_{t=t_{Planck}}}{|\Omega - 1|_{t=T_0}} \simeq \left(\frac{a_{Planck}}{a_0}\right)^2 = \left(\frac{T_0}{T_{Planck}}\right)^2.$$

Sustituyendo el valor numérico de  $T_{Planck} \sim 10^{19}$  GeV y  $T_0 \sim 10^{-13}$  GeV se obtiene,

$$\frac{|\Omega - 1|_{t=t_{Planck}}}{|\Omega - 1|_{t=T_0}} \simeq 10^{-64}, \quad (1.88)$$

Para que hoy  $\Omega \sim 1$  es necesario que en el tiempo inicial las condiciones hayan tenido precisión de hasta 64 cifras decimales. Aunque esta cifra es impresionante, no es necesario retroceder hasta la época de Planck para obtener este ajuste fino, por ejemplo, en la época en la que sucede la nucleosíntesis,  $T_N \approx 1$  MeV se requería una precisión de 16 cifras decimales. Este problema es representado gráficamente en la figura 1.5.

- **Problema del Horizonte.** Como se vio antes, los modelos de FL tienen horizonte de partículas, es decir, hay en cualquier época regiones que no han estado en contacto causal. Con esto en mente el problema del horizonte (ilustrado en la figura 1.6) se establece como sigue: Desde nuestro evento observacional  $\mathcal{R}$  en el espacio-tiempo que marca el “aquí y el ahora” en



**Figura 1.6:** Problema del Horizonte. Puntos diametralmente opuestos del LSS (en la figura  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ ) no han estado en contacto causal (i.e. sus conos de luz pasados no tienen puntos en común) y aún así tienen propiedades similares.

$t = t_0$ , vemos en direcciones opuestas radiación proveniente del CBR, que fue emitida en los eventos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  en el LSS al tiempo de desacople  $t = t_{des}$ ,  $T_{des} \approx 3000K$ . Los conos de luz pasados de estos eventos, son completamente disjuntos, ya que la singularidad inicial limita la extensión del espacio-tiempo hacia el pasado. Así, ninguna causa común, puede influenciar lo que pasa en  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , por lo tanto, ningún mecanismo causal desde la creación del universo puede explicar las similares condiciones físicas de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  [64].

Será de utilidad ver este problema analíticamente, el horizonte de partículas (ecuación (1.86), pag. 32) del evento  $\mathcal{R}$

$$d_{HP}^c = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad [1.86]$$

y la distancia física medida por un observador  $\mathcal{O}$  en  $\mathcal{R}$  es

$$d_{HP} = a(t_0) d_{HP}^c. \quad [1.87]$$

Definimos el horizonte visual  $d_{HV}^c$  como la distancia comóvil que mide  $\mathcal{O}$  en el evento  $\mathcal{R}$  hasta el LSS

$$d_{HV}^c \equiv \int_{t_d}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad d_{HV} = a(t_0) d_{HV}^c. \quad (1.89)$$

Por otra parte el horizonte de partículas de  $\mathcal{P}$  (o equivalentemente  $\mathcal{Q}$ ),  $\tilde{d}_{HP}$ , medido por un observador en  $\mathcal{P}$  (o  $\mathcal{Q}$ ) corresponderá a la distancia medida en  $t_0$  de

$$\tilde{d}_{HP} = a(t_0) \int_0^{t_d} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.90)$$

mostrando que  $d_{HP} = d_{HV} + \tilde{d}_{HP}$ . Estas funciones son  $d_{HP}^c$  y  $d_{HV}^c$  son funciones que crecen con el tiempo de observación sin importar el comportamiento de  $a(t)$ , ya que  $a(t)$  es positiva; además  $d_{HP}$ ,  $d_{HV}$  y  $\tilde{d}_{HP}$  son funciones que incrementan con el tiempo si  $a(t)$  está creciendo también.

Así, si suponemos que el universo estuvo dominado por radiación antes del tiempo de desacople  $t_d$  y dominado por materia después (i.e. ignorando los efectos de una época intermedia) obtenemos, luego de un cálculo largo

$$\tilde{d}_{HP} = a_0 \left( \frac{1}{a_d H_d} \right) = a_0 \left[ \frac{1}{a_0 H_0} \left( \frac{a_d}{a_0} \right)^{1/2} \right] \quad (1.91a)$$

$$d_{HV} = a_0 \left\{ \frac{2}{a_d H_d} \left[ \left( \frac{a_0}{a_d} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\} = a_0 \left\{ \frac{2}{a_0 H_0} \left( \frac{a_d}{a_0} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{a_0}{a_d} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\} \quad (1.91b)$$

En donde  $(a_0/a_d) \approx 10^3$ , por lo que básicamente el problema del horizontes es la siguiente desigualdad

$$\tilde{d}_{HP} \ll d_{HV} \quad (1.92)$$

Para otros enfoques de este problema se puede consultar [26, 27, 109, 113, 209].

Será de utilidad más adelante en esta tesis, expresar este problema en términos de ángulos del CMB. Usando coordenadas comóviles podemos ver que la distancia al LSS (i.e. el horizonte visual 1.89) es

$$d_{HV}^c \equiv \int_{t_d}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{\eta_d}^{\eta_0} d\eta = \eta_0 - \eta_d. \quad (1.93)$$

Una escala física cualquiera,  $\lambda$ , es proyectada en el LSS en una distancia angular (ignorando efectos de curvatura)

$$\theta \approx \frac{\lambda}{\eta_0 - \eta_d}. \quad (1.94)$$

Durante la época dominada por radiación, podemos estimar la escala en la cual la materia interactúa usando la “velocidad” a la cual se mueven los fotones en el plasma, conocida como *velocidad del sonido*<sup>42</sup>,  $c_s^2 = cd\rho/d\mu$ , que durante radiación es  $c_s = c/\sqrt{3}$ . El “horizonte comóvil de sonido” en el LSS es,  $d_{HS}^c(t_d) = c_s a(\eta_d) = c_s \eta_d$ .

El ángulo subtendido por esta escala es

$$\theta_{HS} \approx c_s \frac{\eta_d}{\eta_0 - \eta_d} \approx c_s \frac{\eta_d}{\eta_0}, \quad (1.95)$$

<sup>42</sup>La escala en la cual *podieron* haber interactuado está dada por los conos de luz pasados, pero esta escala no nos dice nada sobre *si* interactuaron de una manera significativa. La escala de contacto causal significativo es menor que la escala de contacto causal posible (cf. §4 de [64]).

donde en el último paso se usó el hecho de que  $\eta_0 \gg \eta_d$ . El universo se puede considerar dominado por materia desde el tiempo del LSS, revisando la tabla 1.1 vemos que la evolución del factor de escala es  $a \simeq \eta^2 \simeq T^{-1}$

$$\theta_{HS} \approx c_s \left( \frac{T_0}{T_d} \right)^{1/2} \simeq 1^\circ \quad (1.96)$$

El problema del horizonte es que, en el LSS, ángulos mayores que  $\theta_{HS}$  no estuvieron en contacto causal.

Debería de ser obvio que el problema del horizonte no es en realidad un problema de los universos FL, ya que para estos modelos la estructura del horizonte es una consecuencia trivial la isotropía y homogeneidad supuestas. El problema aparece cuando se busca una explicación para esta isotropía [25].

- *Origen de las fluctuaciones primordiales.* Este problema (el único con relevancia real según algunos autores y la “única razón para tomarse en serio una época inflacionaria” en palabras de Padmanabhan en [155]) se puede describir sencillamente con el hecho de que no existe ningún mecanismo en la cosmología estándar para generar las fluctuaciones primordiales. Es justamente este problema el que se estudiará en este trabajo de tesis.

## 1.6 Inflación

Inflación es una propuesta teórica agregada al modelo cosmológico estándar, que intenta solucionar los problemas de Horizonte, Planitud y Orígenes de las fluctuaciones primordiales<sup>43</sup> agregando una etapa previa a la época dominada por radiación pero posterior a la singularidad inicial<sup>44</sup> en la cual el universo sufre una expansión exponencial por un periodo pequeño de tiempo. La Inflación ocurre supuestamente a las escalas de las teorías de Gran Unificación (GUT, por sus siglas en inglés):  $t_i \sim 10^{-36}$  s a  $10^{-32}$  s.

La Inflación fue propuesta de manera independiente por Alexei Starobinsky [197] en 1979 y Alan Guth [87] en 1981, aunque Guth fue el primero en ensamblar una imagen completa sobre este modelo. La idea original (llamada ahora *vieja inflación*) era que mientras el universo se estaba enfriando quedó atrapado en un falso vacío con una alta densidad de energía, muy parecida a una constante cosmológica. Este falso vacío era metaestable, del cual sólo se podría salir a través de un proceso de nucleación de burbujas vía el efecto túnel cuántico (*tunneling*). Las burbujas de vacío verdadero se formarían espontáneamente en el falso vacío y empezarían a expandirse a la velocidad de la luz, con esta expansión se resolvían los problemas de planitud y horizonte, y tanto

<sup>43</sup>Existían otros problemas relacionados a la existencia de reliquias provocadas por teorías de Gran Unificación -que se supone es un ingrediente del modelo inflacionario-, tales como la proliferación de monopolos magnéticos o paredes de dominio -*domain walls*-, pero como bien apunta Penrose [165] estos son problemas “internos” (i.e. auto-provocados) de las GUT y su solución es más bien un requerimiento de consistencia de la teoría con la observación.

<sup>44</sup>Aunque existen modelos inflacionarios en los cuales esta singularidad no existe, (eg. inflación caótica o inflación eterna [5, 77, 86, 88, 96, 133, 217]), pero siempre es una época agregada antes de la dominada por radiación.

Guth como Starobinsky especulaban que esto podría de alguna manera evitar la singularidad inicial.

El mismo Guth rápidamente reconoció que este modelo era problemático ya que no recalentaba de la manera apropiada: al nuclear, las burbujas no generaban radiación. La producción de radiación sólo podía darse a través de colisiones entre burbujas. El problema es que para que inflación pueda resolver los problemas de condiciones iniciales del modelo estándar debe durar lo suficiente y si era este el caso, las colisiones entre burbujas eran extraordinariamente raras.

Este problema sería resuelto por los modelos conocidos como *nueva inflación* o de *slow-roll*, propuestos por Andrei Linde [117] e independientemente por Andreas Albrecht y Paul Steinhardt [6]. Este modelo, en lugar de efectuar un *tunneling* desde un falso vacío al vacío verdadero para lograr la expansión, esta es producida por un campo escalar  $\varphi$ , que bajo condiciones apropiadas “rodaría lentamente”<sup>45</sup> pendiente abajo del potencial  $V(\varphi)$ ; al ganar la suficiente “velocidad” las condiciones necesarias para que exista la expansión acelerada dejarán de ser válidas, iniciando la producción de partículas. Los modelos inflacionarios de *slow-roll* serán los usados en este trabajo de tesis.

### 1.6.1 Inflación y algunos problemas del modelo estándar cosmológico

Antes de mostrar como se modela matemáticamente el campo escalar en los modelos de *slow-roll* de Inflación estudiaremos cuál es el comportamiento que buscamos para resolver, por lo menos los problemas de condiciones iniciales (i.e. planitud y horizonte).

Como vimos en el problema de planitud, la cantidad  $|\Omega - 1|$  crece con el tiempo, por lo que, si ahora tenemos  $\Omega \sim 1$  debió ser muy cercano a 1 en épocas pasadas. Este comportamiento se puede ver como sigue:

$$\frac{d}{dt}|\Omega - 1| = |K| \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{a^2} \right) = -2 \frac{|k|}{a^3} \ddot{a}.$$

En épocas dominadas por radiación o materia, el universo se está desacelerando (i.e.  $\ddot{a} < 0$ ), entonces el problema de la planitud se debe a que esta cantidad crece en función del tiempo si el universo se está desacelerando:

$$\frac{d}{dt}|\Omega - 1| > 0 \Leftrightarrow \ddot{a} < 0. \quad (1.97)$$

Una de las maneras de solucionar el problema de la planitud, es proponer una etapa cosmológica en la cual

$$\frac{d}{dt}|\Omega - 1| < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0. \quad (1.98)$$

Por su parte, el problema del horizonte surge, en pocas palabras, porque los conos de luz pasados de eventos diametralmente opuestos en la esfera del LSS no contienen eventos en común (i.e. eran disjuntos).

---

<sup>45</sup>*Slow-roll* en inglés



El contacto causal queda determinado por el horizonte de partículas (1.86) el cual, para materia ordinaria depende inversamente del parámetro de Hubble:  $d_{HP}^c \propto H^{-1}$ . Se puede demostrar en universos FL [183], que una vez que dos eventos entren en contacto causal (i.e. , que el evento  $\mathcal{Q}$  entre al cono de luz pasado de  $\mathcal{P}$ ), no perderán este contacto causal conforme pase el tiempo (i.e. ,  $\mathcal{Q}$  saldrá del cono de luz pasado de  $\mathcal{P}$ ). Esto se puede expresar en términos de escalas físicas de la siguiente manera, una vez que una escala (e.g. , la distancia entre dos fotones) entra al horizonte de partículas durante una época dominada por radiación o materia no relativista, el horizonte crecerá más rápido que la escala en cuestión (que crece proporcional al factor de escala, cf. (1.20)) , por lo cual siempre quedará adentro de este horizonte:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{H^{-1}} \right) \simeq \ddot{a} < 0. \quad (1.99)$$

Si existiera una época dominada por un tipo de materia (diferente a la radiación o la materia no relativista por supuesto) en la cual, las longitudes físicas crecieran más rápido que  $H^{-1}$ , existirían escalas que, dado el tiempo suficiente, serían mayores que  $H^{-1}$ . Al acabar esta época dominada por esta materia exótica, volveríamos al comportamiento (1.99) en el cual  $H^{-1}$  crecerá más rápido que las escalas físicas y finalmente las “engullirá”. Claramente, esta nueva materia, en su periodo de dominación definirá un horizonte de eventos que no dependerá proporcionalmente de  $H^{-1}$ , por lo que en realidad, a diferencia de lo que se lee en la literatura estándar, no es que las escalas físicas salgan del horizonte<sup>46</sup> y por supuesto nunca pierden contacto causal.

Así, para obtener el comportamiento descrito en el párrafo superior, necesitamos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{H^{-1}} \right) \simeq \ddot{a} > 0. \quad (1.100)$$

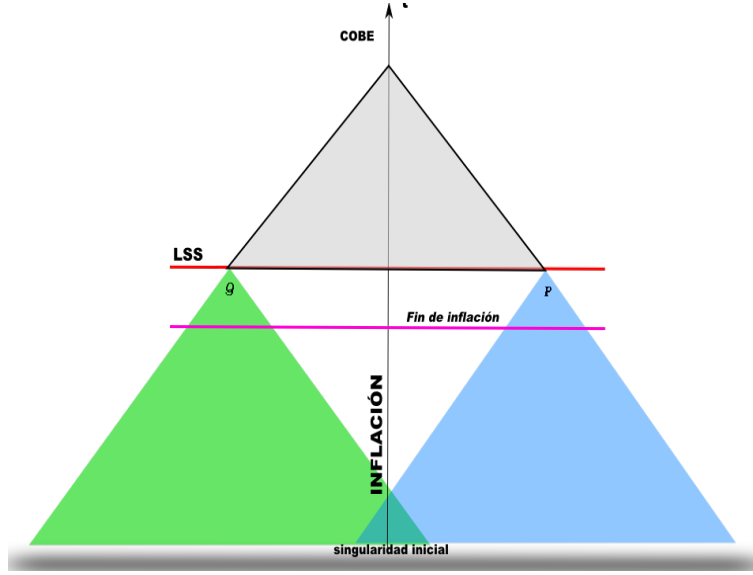
Ambos problemas, el de planitud y el de horizonte, son resultado, de la desaceleración del Universo. Así, si suponemos la existencia de una época donde el factor de escala se esté acelerando ( $\ddot{a} > 0$ ) y este periodo dura –por lo menos– el tiempo necesario<sup>47</sup>, los problemas de planitud y de horizonte se resolverán.

El problema de planitud desaparece ya que podemos acercar  $\Omega \sim 1$  con la precisión que se desee y dejar esa condición inicial a inicios de la época de radiación, por su parte, el problema del horizon-

<sup>46</sup>En la literatura se hace comúnmente un abuso de lenguaje al usar la expresión “salir / entrar del horizonte” refiriéndose a que las longitudes físicas son mayores o menores que el radio de Hubble  $r_H = H^{-1}$ . Este abuso de lenguaje se justifica de varias maneras, de las cuales podemos destacar las siguientes: (a) Para la época de radiación  $d_{HP} \simeq r_H$ ; (b) En las ecuaciones perturbadas (cf. capítulo 2)  $H^{-1}$  caracteriza el rango de las “influencias causales”, ya que  $kH^{-1}$  “gobierna cuales términos de las ecuaciones perturbadas son dominantes” [11]; (c) “El factor de escala crece un *e-folding* en un intervalo del orden  $H^{-1}$ . Por esta razón, la microfísica solo puede operar coherentemente en escalas físicas menores a  $H^{-1}$ ” [12] o en palabras de Brandenberger en [28]: “el radio de Hubble,  $H^{-1}$  es la distancia máxima sobre la cual la microfísica puede actuar coherentemente; ... para distancias mayores el tiempo que le toma a la luz excede el tiempo de expansión cosmológica característico”. Como se puede observar, ninguna de estas justificaciones establece una relación sólida entre el radio de Hubble y causalidad local. Para una discusión extensa sobre este punto véase [64].

<sup>47</sup>Expresado en *e-foldings* el intervalo necesario es mayor a ( $\sim 60$ ). Un *e-folding* es el periodo de tiempo en el cual una cantidad que está expandiéndose se incrementa por un factor  $e$ . El número  $\mathcal{N}$  de *e-foldings* que pasaron entre dos tiempos  $t_2 > t_1$  se define mediante la relación

$$\mathcal{N} = \ln \left( \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \right).$$



**Figura 1.7:** Solución propuesta por inflación al problema del horizonte. El efecto de la expansión acelerada es en cierta forma “alejar” la singularidad inicial del LSS. Esto permite que algunas partes de los conos pasados de luz de los puntos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  hayan estado en contacto causal.

te se resuelve, ya que este periodo inflacionario tiene como efecto desplazar hacia abajo respecto a  $t_d$  en el diagrama conforme a la singularidad inicial. Consecuentemente los eventos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  diametralmente opuestos en el LSS, ahora comparten un conjunto de eventos en el pasado que pueden influenciar a ambos. Si el periodo inflacionario dura mucho tiempo, el diagrama se extenderá más hacia abajo y la mayoría de los eventos pasados de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  será comunes. Aunque  $d_{HV}$  sigue siendo el mismo que antes (1.91b),  $\tilde{d}_{HP}$ , el horizonte de partículas ahora es (periodo inflacionario + periodo de radiación + periodo entre el fin de radiación y el tiempo de desacople),

$$\tilde{d}_{HP} = a_0 \cdot \frac{1}{a_0 H_0} \left( \frac{a_d}{a_0} \right)^{1/2} \left\{ 1 + 2 \frac{a_f}{a_d} \left[ \left( \frac{a_f}{a_i} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (1.101)$$

donde  $a_i \equiv a(t_i)$ ,  $a_f \equiv a(t_f)$  son los factores de escala al tiempo del inicio de inflación,  $t_i$  y el fin de inflación  $t_f$ . Típicamente  $(a_f/a_i) = 10^N$ , donde  $N$  es el número de *e-foldings* que dura la época inflacionaria. Por lo que ahora, tenemos

$$\tilde{d}_{HP} \gg d_{HV} \quad (1.102)$$

aunque, como se discute en [64], de esto no se sigue que todos los puntos del LSS tengan datos iniciales comunes al tiempo  $t$ , ya que para cualquier tiempo  $t$  existen eventos en la hipersuperficie  $t = \text{constante}$ , que están en el pasado de  $\mathcal{P}$  y no en el de  $\mathcal{Q}$  y viceversa. Lo que resuelve inflación es que ahora tenemos la *posibilidad* de explicar, debido a la conexión causal de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  las condiciones similares de ambos en el LSS.

En base a la discusión anterior se definirá como época inflacionaria a cualquier época en la cual

tenemos aceleración positiva,

$$\ddot{a} > 0. \quad (1.103)$$

De la ecuación (1.38b), obtenemos la condición para la presión de la materia que generará inflación es

$$p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (1.104)$$

Respecto al origen de las anisotropías iniciales, Inflación –teóricamente– se apunta su mayor triunfo: las anisotropías e inhomogeneidades primordiales son producto de las fluctuaciones cuánticas del campo escalar, que al evolucionar el universo en el periodo inflacionario son “extendidas” hasta poderlas considerar como perturbaciones clásicas que son observadas en la estructura a gran escala del universo y en las anisotropías de la temperatura del CBR. Esta explicación se tratará con mayor detalle y se criticará en el capítulo siguiente.

### 1.6.2 Modelado matemático: Campo escalar

En el modelo inflacionario de *slow-roll* la condición (1.104) se satisface postulando la existencia de un campo escalar cuya ecuación de estado es adecuada. La dinámica de un campo escalar acoplado a la gravedad viene dada por la acción

$$S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \varphi \nabla_b \varphi - V(\varphi) \right). \quad (1.105)$$

El tensor de energía-momento del campo escalar se puede calcular usando la definición de  $T^{ab}$ ,

$$T^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat})}{\delta g_{ab}} \quad (1.106)$$

resultando en

$$T_a{}^b = \nabla_a \varphi \nabla^b \varphi - \frac{1}{2} \delta_a{}^b (\nabla_c \varphi \nabla^c \varphi + 2V(\varphi)) \quad (1.107)$$

con componentes

$$T_\eta{}^\eta = - \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right), \quad T_i{}^j = \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right) \delta_i{}^j \quad (1.108)$$

Comparando con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto podemos identificar a  $T_\eta{}^\eta$  con la energía,  $\rho$ , y a  $T_i{}^j$  con la presión,  $p$ . Recordando (1.104) tenemos que para que este campo genere inflación necesitamos que  $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ .

La condición de que  $V(\varphi) \gg \dot{\varphi}^2$  nos da el requisito

$$p_\varphi \simeq -\rho_\varphi, \quad (1.109)$$

i.e. la etapa inflacionaria es (o puede ser aproximada mediante) un espacio-tiempo de de Sitter.

La ecuación de movimiento del campo escalar se obtiene variando la acción con respecto al campo escalar,

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\varphi + \partial_\varphi V(\varphi) = 0. \quad (1.110)$$

esta ecuación es del tipo de Klein-Gordon. En las coordenadas de los observadores cosmológicos esta ecuación toma la forma de

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \partial_\varphi V(\varphi) = 0.$$

Podemos observar que el término  $3H\dot{\varphi}$  actúa como fricción, frenando así la evolución de  $\varphi$ .

El conjunto de ecuaciones que controlan la evolución del universo durante el régimen inflacionario son

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right), \quad (1.111a)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \partial_\varphi V(\varphi) = 0, \quad (1.111b)$$

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2 \quad (1.111c)$$

Este sistema de ecuaciones no siempre lleva a una expansión acelerada del universo, para lograr esto es necesario que la energía potencial del campo escalar domine sobre la energía cinética del mismo, específicamente, implica que se despreja el término cinético,  $\dot{\varphi}^2/2$ , en (1.111a) y, debido a que el potencial es plano, despreja la aceleración,  $\ddot{\varphi}$ , en (1.111b):

$$H^2 \simeq \frac{\kappa}{3} V(\varphi), \quad (1.112a)$$

$$3H\dot{\varphi} + \partial_\varphi V(\varphi) \simeq 0, \quad (1.112b)$$

Según el modelo de *nueva inflación*,  $\varphi$  está inicialmente lejos del mínimo del potencial  $V(\varphi)$ . El potencial entonces “jala” a  $\varphi$  hacia su mínimo. Si el potencial es lo suficientemente plano, el término de fricción pronto hará a  $\dot{\varphi}$  muy pequeño, logrando que se cumpla  $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ , aún cuando originalmente esto no fuera así. Bajo estas condiciones el espacio-tiempo es aproximadamente de Sitter (cf. 15), con  $a(t) \sim e^{Ht}$ ,  $H \sim \text{constante}$ .

Para expresar las condiciones de *slow-roll* de manera más precisa recurriremos a la definición de dos parámetros que cuantifiquen que tan plano es el potencial  $\epsilon$  y su curvatura  $\eta$  (no confundir

con  $\eta$  el tiempo conforme). Usando la ecuación (1.112b) y derivándola

$$\ddot{\phi} = H\dot{\phi}[\eta + \epsilon],$$

donde

$$\epsilon(\varphi) = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G \frac{(\dot{\phi})^2}{H^2} = \frac{1}{4\pi G} \left( \frac{\partial_\varphi V}{V} \right)^2, \quad (1.113a)$$

$$\eta(\varphi) = \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{\partial_\varphi^2 V}{V} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial_\varphi^2 V}{H^2}, \quad (1.113b)$$

$$\delta(\varphi) = \eta - \epsilon = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad (1.113c)$$

Las condiciones **necesarias** para que la aproximación de *slow-roll* sea válida y se tenga inflación son

$$\epsilon \ll 1, \quad |\eta| \ll 1. \quad (1.114)$$

Estas condiciones son válidas si  $\dot{\phi}^2 \ll V(\varphi)$  y  $|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$  respectivamente. Otra forma de obtener este resultado es notando que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1 - \epsilon)H^2,$$

por lo que inflación ( $\ddot{a} > 0$ ) sólo se puede obtener si  $\epsilon < 1$ . De (1.113a) se puede observar que  $\epsilon$  cuantifica cuanto cambia  $H$  durante inflación.

Con los parámetros de *slow-roll*  $\epsilon, \eta, \delta$  es posible escribir las ecuaciones<sup>48</sup> exactas (1.111a), (1.111c):

$$H^2 = \frac{\kappa V}{3 - \epsilon}, \quad (1.115a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{(3 - \delta)H} \partial_\varphi V. \quad (1.115b)$$

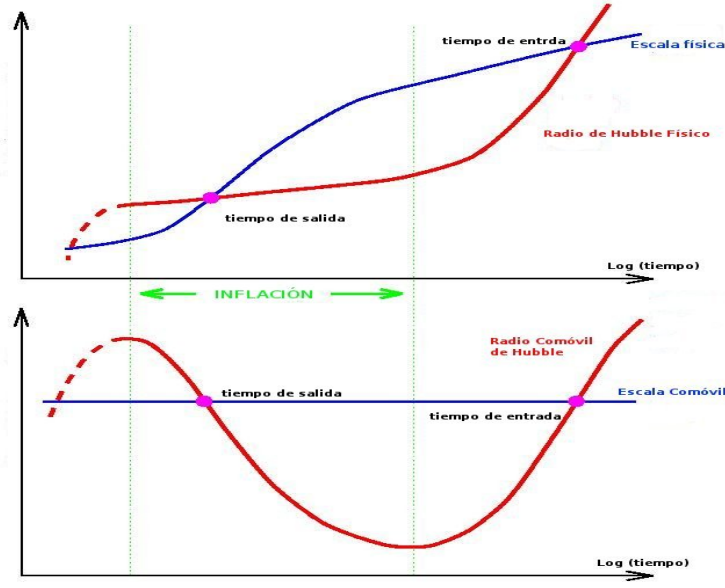
### 1.6.3 Efectos de la inflación en las escalas físicas

Durante inflación el factor de escala crece exponencialmente, por lo que todas las escalas físicas  $\lambda = a(t)\lambda_c$ , crecerán de la misma manera. El radio de Hubble físico  $d_H$  permanecerá constante durante esta misma época. Entonces, se pueden tener situaciones en las que una escala  $\lambda' < d_H$  en la época inflacionaria, pero al crecer exponencialmente se vuelva mayor que  $d_H$  en el transcurso de esta etapa. Al tiempo  $t$  durante inflación cuando  $\lambda' = d_H$ , se le denomina *tiempo de salida* y lo denotaremos por  $t_{salida}(\lambda'_c)$ .

<sup>48</sup>Otras fórmulas útiles de escribir las ecuaciones exactas del sistema Einstein-Inflatón son

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{M_{Planck}^2} \dot{\phi}^2, \quad \frac{dH}{d\varphi} = -\frac{4\pi}{M_{Planck}^2} \dot{\phi}, \quad \left( \frac{dH}{d\varphi} \right)^2 = -\frac{12\pi}{M_{Planck}^2} H^2(\varphi) = -\frac{32\pi^2}{M_{Planck}^4} V(\varphi)$$

donde la última ecuación es la ecuación de Friedmann.



**Figura 1.8:** Evolución de las escalas y el radio de Hubble durante y después de inflación. En la imagen de arriba se muestra una escala física  $\lambda$  y radio de Hubble. En la figura inferior la escala y el radio de Hubble comóviles.

Al terminar inflación, durante la época dominada por radiación  $a, \lambda' \propto t^{1/2}$ , mientras que  $d_H \propto t$ , por lo que (de mantenerse estas condiciones, i.e.  $a \propto t^n$  con  $n < 1$  y  $d_H \propto t$ ) en un tiempo  $t_{entrada}(\lambda'_c)$  volveremos a tener  $\lambda' = d_H$ , a este tiempo se le llamará *tiempo de entrada*. Durante el análisis de formación de estructura, capítulo 2, será importante relacionar la amplitud de la perturbación a la escala  $\lambda'$  al tiempo  $t_{salida}(\lambda_c)$  con la amplitud al tiempo  $t_{entrada}(\lambda_c)$ .

### ADDENDUM: Ecuaciones en tiempo conforme

Las ecuaciones del campo inflatónico en tiempo conforme serán entonces

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 + V(\varphi) \right), \quad (1.116a)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -\kappa a^2 \left( \frac{1}{2a^2} - V(\varphi) \right), \quad (1.116b)$$

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = 4\pi G (\varphi')^2, \quad (1.116c)$$

$$\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi' + a^2 \partial_\varphi V(\varphi) = 0. \quad (1.116d)$$

Siguiendo los pasos recién mostrados, es fácil obtener las relaciones de *slow-roll* (1.113) para estas

coordenadas.

$$\epsilon(\varphi) = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = 4\pi G \frac{(\varphi')^2}{\mathcal{H}^2}, \quad (1.117a)$$

$$\delta(\varphi) = 1 - \frac{\varphi''}{\mathcal{H}\varphi'}. \quad (1.117b)$$

#### 1.6.4 Críticas y problemas del modelo inflacionario

A pesar de que Inflación resuelve varios de los problemas del modelos estándar cosmológico (como el de planitud y el de horizonte), existen críticos a estas soluciones propuestas por el modelo [25, 31, 147, 155, 165, 170]. Además, inflación presenta nuevos problemas, que a continuación se enlistan:

- *Problema de la Fluctuación.* Los modelos de inflación con campo escalar produce un espectro invariante de escala en las fluctuaciones cosmológicas y además predicen la amplitud del espectro. La dificultad es que sin introducir un problema de jerarquías<sup>49</sup> en las escalas del modelo de física de partículas, la amplitud predicha es superior a la observada por varios órdenes de magnitud. Por ejemplo para un modelo inflacionario con  $V(\varphi) = (1/4)\lambda\varphi^4$  se requiere que  $\lambda \simeq 10^{-12}$  para recuperar la amplitud del espectro observada. Esta es una característica general de los modelos inflacionarios [31] y dado que uno de los principales objetivos de Inflación es eliminar los ajustes finos en los parámetros cosmológicos, no es muy satisfactorio que ahora estos problemas aparezcan en el sector de física de partículas.
- *Problema Trans-Planckiano.* En la mayoría de los modelos inflacionarios, el periodo de inflación dura mucho más que el número mínimo de *e-foldings* requeridos para la solución de los problemas de horizonte y planitud. Esto tiene como consecuencia que los modos comóviles que corresponden en la actualidad a las escalas de la estructura cosmológica fueran menores a la escala comóvil de la longitud de Planck al tiempo  $t_i$  cuando inició la inflación<sup>50</sup>. Entonces, ¿Cómo confiar en los cálculos que hacemos para encontrar el espectro de potencias si estos cálculos dependen del comportamiento del espacio-tiempo y la materia a escalas de energía que no sabemos como describir? ¿Qué tan sensibles son las predicciones a esta física desconocida? Para una introducción ver [30], para revisiones más recientes e intentos de solución ver [41, 129, 193].
- *Problema de la identidad del inflatón.* Originalmente Guth supuso [87] que el inflatón podía ser identificado con el bosón de Higgs, pero la aparición de problemas de jerarquía mostraron

<sup>49</sup>Un problema de jerarquías ocurre cuando los parámetros fundamentales (acoples o masas) de algún lagrangiano son diferentes que los parámetros medidos por el experimento. Estos problemas están relacionados con problemas de ajuste fino o con problemas de naturalidad del modelo.

<sup>50</sup>Es posible hacer un cálculo rápido que muestre este problema, supongamos que inflación cambia el factor de escala  $a(t)$  en un factor  $A \simeq 10^{30}$ , entonces la escala física  $\lambda(t)$  hoy  $\lambda_0 \equiv \lambda(t_0)$  al final de inflación  $\lambda_e \equiv \lambda(t_e)$  tenía un tamaño  $\lambda_e = \lambda_0 \frac{a(t_e)}{a_0} = \lambda_0 \frac{T_0}{T_e} \simeq 10^{-28}$  suponiendo que inflación ocurre a escalas de gran unificación, entonces para una escala de  $\lambda < 3$  Mpc al inicio de inflación  $t_i$ ,  $\lambda_i \equiv \lambda(t_i) < L_{Planck}$ .

que esta hipótesis no estaba fundamentada. En la actualidad, a pesar de los múltiples modelos del campo escalar, ninguno está fundado en física de partículas bien establecidas, por lo que la identidad de este campo escalar es una gran incógnita.

- *Problema de la entropía.* La entropía del parche contenido en el radio de Hubble en la actualidad está dominada por la contribución de los fotones del CBR<sup>51</sup> y es del orden de  $10^{88}$ , la evolución del universo al ser un sistema aislado, es adiabática, entonces ¿Por que es tan grande la entropía? <sup>52</sup>. Inflación resuelve este problema en el *recalentamiento*, etapa en la cual la energía del inflatón es transferida a las partículas ordinarias generando una gran cantidad de entropía (consultar [20, 82, 135, 157] para una explicación más detallada).

Algunos autores [156, 165] opinan que inflación no resuelve el problema si no que de hecho lo agrava [ver también 166, 168, 169]. Esta argumentación se basa en el hecho de tener condiciones iniciales de baja entropía es muy poco probable (entre más baja, más improbable), entonces, ya que el recalentamiento al final de inflación incrementa la entropía en varios ordenes de magnitud, hace necesario que el estado del universo al principio de inflación fuera mucho más ordenado que en el modelo estándar cosmológico sin inflación.

- *Problema del origen de las fluctuaciones cosmológicas.* Este problema es presentado como resuelto por la inflación, pero como se verá en el capítulo siguiente esto no es del todo claro, ver también [170, 202–204]

## 1.7 Modelo de Concordancia: $\Lambda$ -CDM

Finalmente, en esta sección, expresaremos el modelo de concordancia cosmológico y estableceremos las modificaciones a las ecuaciones con las que estaremos trabajando.

Se le conoce como modelo de concordancia cosmológico al modelo  $\Lambda$  CDM, porque es el modelo que con las características dadas abajo es el que mejor explica las observaciones [93, 196]. Este paradigma cosmológico es, en pocas palabras, lo siguiente: *una era de gravedad cuántica de algún tipo, seguida por inflación; una época de big-bang caliente; desacople de materia y radiación; inestabilidad gravitacional que conlleva a la formación de cúmulos de galaxias que surgen de las “semillas” de perturbaciones de densidad de la LSS* [67].

Observaciones recientes [196] concuerdan en que la composición del universo es  $\Omega_{DE} \simeq 0.76$ ,  $\Omega_{DM} \simeq 0.20$ ,  $\Omega_B \simeq 0.04$  y  $\Omega_{rad} \simeq 5 \times 10^{-5}$ . La constante de Hubble es  $H_0 = 100 h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}$  con  $h = 0.73 \pm 0.03$  [72]. Además, la geometría espacial es muy cercana a plana (y regularmente

---

<sup>51</sup>La densidad de entropía  $s$  se obtiene de la ecuación (1.70) aplicada a los fotones ( $g = 2$ ) i.e.  $s = \frac{4}{45} \pi^2 T_\gamma^3$ . La entropía total de una región está dada por  $S = sV$ . El volumen de la región contenida en un radio de Hubble puede aproximarse mediante  $V_H = \frac{4}{3} \pi H^{-3}$ .

<sup>52</sup>Esta pregunta da pie a varias otras preguntas como por ejemplo ¿Es válida la segunda ley durante toda la evolución del universo? ¿Existen otras fuentes importantes a la entropía además de la del CBR? ¿El campo gravitatorio es fuente de entropía? ¿Cómo asociar entropía a un campo gravitatorio? [82, 165, 166, 169]



se supone exactamente plana), y las perturbaciones iniciales son Gaussianas, adiabáticas y con un espectro muy cercano a invariante de escala (ver explicación del porqué de estas características en el siguiente capítulo) [8].



## CAPÍTULO 2

### ANÁLISIS CRÍTICO A LA FORMACIÓN DE LAS FLUCTUACIONES PRIMORDIALES

In science, 'fact' can only mean 'confirmed to such a degree that it would be perverse to withhold provisional assent.' I suppose that apples might start to rise tomorrow, but the possibility does not merit equal time in physics classrooms.

---

Stephen Jay Gould (1941 - 2002)

#### 2.1 Introducción

En el capítulo anterior se hizo una revisión con cierto detalle de la física detrás de la cosmología moderna. Usando el modelo cosmológico estándar y suplementándolo con el paradigma inflacionario, se pudieron explicar fenómenos tales como la expansión, la homogeneidad, la planitud, la nucleosíntesis, el fondo de radiación cósmica, etc.

Basta observar alrededor nuestro para notar que la aproximación hecha en el capítulo 1 sobre la homogeneidad e isotropía del universo no es válida a escalas menores que 100 Mpc. La existencia de estructuras cosmológicas tales como *clusters* de galaxias observadas en la actualidad, se explican a través de la teoría de formación de estructura. Esta teoría presupone que en épocas muy tempranas (i.e. al principio o antes de la época dominada por radiación) existían ciertas desviaciones de la homogeneidad e isotropía que evolucionaron mediante procesos físicos conocidos hasta convertirse en la estructura que observamos actualmente. La época dominada por radiación (y épocas anteriores) no puede ser observada mediante ondas electromagnéticas debido a que el universo era opaco (recuérdese que antes del desacople del fotón el camino medio libre de esta partícula era despreciable) por lo que la evidencia de la existencia de estas perturbaciones primordiales debería estar "impresa" en la Superficie de Última Dispersión (LSS) y en particular en los fotones emitidos desde ella: el Fondo de Radiación Cósmica (CBR). Estas desviaciones o fluctuaciones de la homogeneidad e isotropía fueron observadas por primera vez (fig. 1.4) en el CBR por el Radiómetro de Microondas Diferencial (DMR) del satélite COBE a principios de la década de

1990 [194]. Nótese que la teoría de formación de estructura no dice nada sobre el origen de las desviaciones de homogeneidad e isotropía primordiales, para ello necesitamos considerar otra teoría que lo explique.

En este capítulo discutiremos el tratamiento de la formación de la estructura. Debido a la extensión del tema, nos limitaremos a darle una revisión relativamente rápida a los resultados y desarrollos más importantes. Empezaremos, primero, por mencionar los conceptos estadísticos que se utilizan en las observaciones de la del fondo de radiación cósmica y la física que se ve reflejada en su espectro de potencias. Luego, repasaremos la teoría de perturbaciones en Relatividad General aplicada a la cosmología. Usando la teoría de perturbaciones a un orden lineal podremos obtener las ecuaciones que rigen el crecimiento de las perturbaciones primordiales en la densidad, velocidad y entropía de la materia contenida por el universo. Por último, presentaremos las distintas propuestas de solución a la siguiente pregunta: en un universo homogéneo e isotrópico, ¿Cómo surgen las perturbaciones primordiales? Estudiaremos dos propuestas de solución. Ambas propuestas estudiadas en este capítulo atribuyen el origen a la evolución cuántica del campo inflatónico. La primera –la estándar– es parte del modelo inflacionario y atribuye la aparición de las inhomogeneidades a una identificación –no del todo justificada– de cantidades cuánticas con cantidades clásicas. En esta propuesta las “fluctuaciones cuánticas” siguen únicamente la evolución (unitaria) dictada por la mecánica cuántica, por lo que, además de la dudosa identificación cuántica-clásica de algunas cantidades, *no* explica cómo se “rompen” las simetrías de homogeneidad e isotropía del sistema Einstein-inflatón ya que la evolución unitaria cuántica del sistema preserva dichas simetrías. Estas críticas fueron presentadas *in extensis* en [170] por Perez, Sahlmann y Sudarsky, autores que además de presentar los puntos oscuros de la explicación estándar, propusieron una solución: el origen de las perturbaciones se logra mediante la consideración en la dinámica del sistema Einstein-inflatón del proceso de reducción o colapso de la función de onda del inflatón. La solución propuesta está basada en ideas de Roger Penrose [166–169] sobre la interacción de la gravedad y mecánica cuántica, en específico sobre el papel de la gravedad en la reducción de la función de onda. La nueva física para generar las semillas de la estructura esta contenida en la llamada *hipótesis del colapso*. Mostraremos cómo esta idea puede resolver el problema de la formación de asimetrías del universo. El desarrollo de esta idea es el tema principal de este trabajo de tesis y se presentará en el capítulo 3.

## 2.2 Anisotropía del Fondo de Radiación Cósmica

Como se vio en el capítulo anterior (§1.5.1), la simple existencia del CBR (o, como es conocido comúnmente, Fondo Cósmico de Micro-ondas (CMB)<sup>1</sup>) es una evidencia crucial para el modelo cosmológico estándar, pero además de eso, el CBR se ha convertido en el principal instrumento para estudiar el universo [148, 194]. De su observación se obtiene información relativa a la curvatura de las hipersuperficies espaciales  $\Sigma_t$  (pag. 6), a la densidad de la materia bariónica  $\rho_B$  y la densidad

<sup>1</sup>En la actualidad el CBR tiene su función de cuerpo negro tiene frecuencias en el régimen de las microondas, debido al *redshift* ocasionado por la expansión del universo.

de materia oscura  $\rho_{DM}$ , al parámetro de Hubble normalizado ( $h \equiv H_0/100$ ), la profundidad óptica ( $\tau$ ) (pie de la página 33) y a la caracterización del espectro de potencia de las fluctuaciones iniciales ( $A, n, r$ ) (*ibid.*). Hay que notar que algunos de esos parámetros usando solamente el estudio del CBR no son observacionalmente independientes.

La característica más importante del CBR es que presenta un espectro de cuerpo negro a una temperatura de  $T_0 = 2.725$  K. El espectro de la temperatura del CMB a lo largo de cualquier dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  es el espectro de un cuerpo negro con una temperatura  $T(\hat{\mathbf{n}})$  con fluctuaciones  $\delta T(\hat{\mathbf{n}})$  en el rango de  $10^{-5}$  de la temperatura promedio<sup>2</sup>  $T_0$ . Esta variación de la temperatura fue descubierta por el satélite *COsmic Background Explorer* (COBE) [194] en 1992 y luego estudiada con mayor precisión por el *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) [93, 148, 196].

### 2.2.1 Descripción estadística del CMB

Definimos como observable de las fluctuaciones del CMB a la desviación *relativa* de la temperatura o *contraste de la temperatura*,

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \equiv \frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{k}), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el número de onda de la transformación de Fourier,  $\mathbf{x} = R_D \hat{\mathbf{n}}$ , la distancia vectorial hasta la LSS y  $\hat{\mathbf{n}}$  es un vector unitario del momento del fotón. En esta expresión hemos ajustado el sistema de coordenadas para que la posición del observador sea ( $\eta_{obs} = \eta_0, \mathbf{x}_{obs} = \mathbf{0}$ ). El contraste de temperatura (2.1) se puede descomponer en armónicos esféricos  $Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$ ,

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \eta) = \sum_l \sum_m \alpha_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (2.2)$$

donde la sumatoria va de  $l = 1, 2, \dots, \infty$  y  $m = -l, \dots, l$ . Entonces se tienen  $2l + 1$  valores de  $m$  por cada  $l$ . Los armónicos esféricos forman un conjunto ortonormal de funciones sobre la esfera, por lo que podemos calcular los coeficientes multipolares  $a_{lm}$  mediante

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) \Theta(\hat{\mathbf{n}}). \quad (2.3)$$

Podemos insertar en esta última ecuación, la expansión en el espacio de Fourier de  $\Theta(\hat{\mathbf{n}}, \eta)$  (segunda igualdad de (2.1),

$$a_{lm} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega \int d^3k Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) \Theta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

usando el desarrollo de la onda plana en armónicos esféricos

$$a_{lm} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega \int d^3k Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) \sum_{l'} \sum_{m'} i^{l'} j_{l'}(kR_D) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}) \Theta(\mathbf{k}), \quad (2.5)$$

<sup>2</sup>Esto es cierto luego de eliminar una perturbación dipolar que surge debido a nuestro movimiento peculiar a través del marco en reposo del CBR.

donde  $j_l(x)$  son las funciones esféricas de Bessel,

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \mathcal{J}_{l+1/2}(x), \quad (2.6)$$

y  $\mathcal{J}(x)$  son las funciones de Bessel de primer tipo. Finalmente, empleando la ortogonalidad de los armónicos esféricos llegamos a

$$a_{lm} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} (i)^l \int d^3k Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) j_l(kx) \Theta(\mathbf{k}). \quad (2.7)$$

Modelaremos a  $\Theta(\hat{\mathbf{n}})$  como un campo aleatorio<sup>3</sup>, lo que significa que su valor en cada punto del CMB es una variable aleatoria<sup>4</sup>. Observaciones (e.g. [148]) indican que las anisotropías se pueden modelar como un *campo aleatorio gaussiano*, i.e. , las variables aleatorias del campo aleatorio tienen una distribución de probabilidad gaussiana. Para campos aleatorios gaussianos *toda la información estadística* está contenida en la función de autocorrelación de dos puntos la cual da la covarianza entre las variables aleatorias. Así la función de correlación de dos puntos de la temperatura entre dos direcciones denotadas por  $\hat{\mathbf{n}}_1$  y  $\hat{\mathbf{n}}_2$  puede ser escrita como sigue

$$C(\theta) = \overline{\Theta(\hat{\mathbf{n}}_1, \eta_0) \Theta(\hat{\mathbf{n}}_2, \eta_0)} \quad (2.8)$$

con  $\cos \theta = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$ . La barra horizontal indica promedio sobre un ensamble (teórico) de universos<sup>5</sup>.

Nótese que la función de correlación (2.8) sólo depende de la separación de las dos direcciones, i.e. no depende del ángulo azimutal. Esto es un reflejo de que suponemos que la estadística debería heredar las simetrías del espacio-tiempo de fondo (i.e. , no perturbado) que en nuestro caso es la métrica de Robertson-Walker (RW) debe de ser independiente de la posición espacial (homogeneidad) e invariante ante rotaciones, i.e. , el promedio sobre el ensamble de  $\alpha_{lm}$  depende únicamente<sup>6</sup> de  $l$  y no de  $m$ ,

$$\overline{\alpha_{lm} \alpha_{l'm'}^*} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l, \quad (2.9)$$

<sup>3</sup>Es una generalización de un proceso estocástico (dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , un proceso estocástico (o proceso aleatorio) en el espacio de estados  $X$  es una colección de variables aleatorias  $X_t$  – valuadas indexadas por el conjunto  $T$  (“tiempo”). Esto es, un proceso estocástico  $F$  es la colección  $\{F_t : t \in T\}$ .) en el cual el parámetro  $t$  no es un simple número real, sino que puede ser un campo vectorial multidimensional o inclusive una variedad.

<sup>4</sup>De manera formal una variable aleatoria se puede definir como sigue: Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad (el triplete del espacio de probabilidad es  $\Omega$  es el espacio de muestra,  $\mathcal{F}$  es el  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  y  $P$  la medida en  $(\Omega, \mathcal{F})$ ) y  $(Y, \Sigma)$  un espacio de medida. Entonces la variable aleatoria  $X$  es la *función de medida*  $X : \Omega \rightarrow Y$ . Las pre-*imágenes* de los subconjuntos  $Y \in \Sigma$  son eventos ( $\in \mathcal{F}$ ) y tienen asignada una probabilidad  $P$ . Se puede ver que el nombre de *variable* es incorrecto ya que en realidad es una función.

<sup>5</sup>Para que la afirmación anterior tenga sentido es necesario considerar un *ensamble de universos*, i.e. el campo  $\delta$  en cada punto del espacio tendrá un valor diferente en cada uno de los universos miembros del ensamble, con una varianza  $\langle \delta^2 \rangle$  entre miembros del ensamble. La homogeneidad estadística del campo  $\delta$  significa que la varianza es independiente de la posición. Obviamente el campo que estamos estudiando es un miembro de este ensamble i.e. una *realización* del proceso estadístico.

Si sólo tenemos acceso a un miembro (nuestro universo) de este ensamble de universos (suponiendo que el ensamble existe) ¿Cómo podemos medir la varianza  $\langle \delta^2 \rangle$ ? La mejor respuesta a este dilema es realizar mediciones en partes muy separadas del espacio, dado que los valores del campo  $\delta$  estas diferentes partes del se supone que están causalmente desconectados. En otras palabras, estamos haciendo la identificación: promedio sobre el volumen = promedio sobre el ensamble.

<sup>6</sup>De una manera intuitiva  $l$  se refiere al tamaño angular de la anisotropía, mientras que  $m$  está relacionado con la “orientación”.

donde  $C_l$  es conocido como el *espectro de potencias angular* (teórico) de las anisotropías de la temperatura. La relación (2.9) implica

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l \mathcal{P}_l(\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2). \quad (2.10)$$

Antes de proseguir es importante notar dos cosas en las gráficas generadas (e.g. fig. 2.3) del estudio de las observaciones del CMB : (a) están presentadas en términos de  $C_l l(l+1)/2\pi$ , la explicación de esta elección se debe a la siguiente relación aproximada

$$\sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \simeq \int \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l d \ln l$$

i.e.  $C_l l(l+1)/2\pi$  es aproximadamente la potencia por intervalo logarítmico de  $l$ ; (b) el eje vertical tiene unidades de  $(\mu\text{K})^2$ , esto se debe simplemente a que en lugar de estar trabajando con  $\Theta(\hat{\mathbf{n}})$  usan la fluctuación de temperatura absoluta  $\delta T = T_0 \Theta$ .

*Discrepancia Cósmica.* La teoría predice los valores de expectación  $\overline{|a_{lm}|^2}$  de los procesos estocásticos responsables de la anisotropía del CMB, pero sólo podemos observar una realización de este proceso aleatorio: el conjunto  $\{a_{lm}\}$  de nuestro CMB. Por lo que definimos el *espectro de potencias angular observado* como el promedio

$$\hat{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}|^2 \quad (2.11)$$

de los valores de  $a_{lm}$  observados. El valor de expectación de  $\hat{C}_l$  es igual a el espectro teórico  $C_l$ , i.e.  $\overline{\hat{C}_l} = C_l$ , pero el valor de una realización en general no es igual al valor teórico. Podemos estimar el valor de expectación de la diferencia cuadrática entre  $\hat{C}_l$  y  $C_l$ :

$$\frac{\sqrt{(\hat{C}_l - C_l)^2}}{C_l} \simeq \sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \quad (2.12)$$

Podemos observar que esta cantidad es menor para  $l$  grandes. Esto se debe a que la muestra estadística  $(2l+1)$  de  $a_{lm}$  crece conforme aumentamos  $l$ . Esta limitación, que es grave para los multipolos bajos, recibe el nombre de *discrepancia cósmica*<sup>7</sup>. Como es de esperarse, en la práctica, nuestras observaciones distan del caso ideal y la discrepancia es mayor que la dada por la relación (2.12).

---

<sup>7</sup>En inglés es *cosmic variance*

### 2.2.2 Física de las anisotropías del CMB

La física que da lugar a las inhomogeneidades y anisotropías de la temperatura se puede entender fácilmente. Los principales tres mecanismos para producir las anisotropías a gran escala son: (a) *diferencias en el potencial gravitatorio* entre un punto en particular en el espacio y el observador. Esta diferencia de potencial resultará en que la radiación propagándose entre el punto y el observador tenga un corrimiento al rojo o al azul. Este mecanismo es conocido como Efecto de Sachs-Wolfe (SW). (b) *Presión*: Los bariones al caer en los pozos potenciales colisionan con los fotones provocando oscilaciones de compresión y rarefacción. El efecto de la compresión/rarefacción produce el cambio en la temperatura de una manera análoga a los cambios de presión adiabática de un gas ideal (c) *velocidad*: Los bariones se aceleran al caer en los pozos de gravitacional, en el máximo de la compresión y/o rarefacción alcanzarán su mínima velocidad, desplazándose su fase respecto a las oscilaciones en  $\pi/2$ . Estas ondas desfasadas provocarán un efecto Doppler en el campo de fotones. De los tres mecanismos mencionados el más importante para este trabajo de tesis es el efecto SW. La importancia del efecto SW se debe a que contiene información de las perturbaciones primordiales.

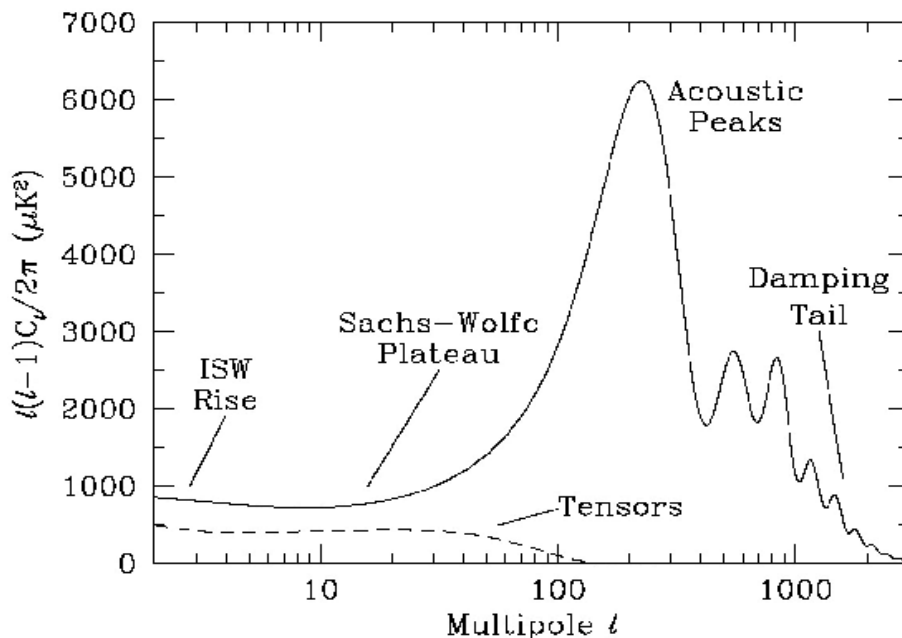
Los mecanismos que imprimen las anisotropías en la temperatura del CMB, aunque bien entendidos, son difíciles de calcular de manera analítica y por lo regular se usan códigos numéricos, el más popular de ellos es el CMBFAST [192]. Nótese que por su naturaleza los tres mecanismos dominan en diferentes escalas: el efecto SW domina a escalas mayores que el radio de Hubble y los otros dos mecanismos dominan dentro del radio de Hubble, debido a esto es conveniente dividir en tres rangos de escalas el estudio del espectro [9, 191], justo como se muestra en la figura 2.1.

*Efecto Sachs-Wolfe Integrado, ( $l \lesssim 10$ )* El *Efecto de Sachs-Wolfe Integrado* (ISW), se debe a variaciones temporales de las perturbaciones de la métrica.

*Efecto Sachs-Wolfe, ( $10 \lesssim l \lesssim 100$ )*. El horizonte de partículas en la época del LSS corresponde aproximadamente<sup>8</sup> a  $l \simeq 100$ , anisotropías mayores a esta escala no han evolucionado significativamente y por lo tanto, reflejan las “fluctuaciones primordiales” (las cuales servirán como condiciones iniciales para las ecuaciones de formación de la estructura cf. 2.3). El efecto del *redshift* gravitacional sobre la temperatura (energía) de los fotones, es conocido como efecto de Sachs-Wolfe, y su fórmula a está dada por (2.16) siendo  $\psi$  la perturbación gravitacional a primer orden. Si el espectro de potencias de las perturbaciones primordiales es invariante de escala (plano), entonces  $l(l+1)C_l \simeq$  constante para  $l$ 's pequeños.

<sup>8</sup>Esto se puede calcular de manera aproximada como sigue, usando (1.86), para calcular el horizonte de partículas en el tiempo de desacople  $t_d$ , obtenemos  $d_{HP}^c(t_d) \simeq 0.168h^{-1}\text{Mpc}$ , si calculamos su tamaño hoy,  $\sim d_{HP}^c(t_d)(a_0/a_d) \simeq 184h^{-1}\text{Mpc}$ , que comparado con la distancia que viajaron los fotones (i.e. la distancia al LSS) (1.84),  $D_c = a_0 \int_{t_d}^{t_0} (dt'/a(t')) \simeq 6000 \text{ Mpc}$ , el ángulo subtendido es  $\theta \simeq 184/6000 \sim 2^\circ$ , que a su vez está relacionado con el multipolo  $l$  mediante  $\theta \sim \pi/l$ , i.e.  $l \sim 100$ .





**Figura 2.1:** Espectro teórico de las anisotropías del CMB. Se muestran los diferentes procesos físicos que le dan su forma. También se muestra, con una línea punteada la contribución de las ondas gravitacionales. Esta imagen fue tomada de Scott y Smoot, 2008 [191].

Esencialmente, la fórmula<sup>9</sup> del efecto de Sachs-Wolfe [57, 97, 98] es simplemente el *redshift* que sufren los fotones en su trayecto desde el LSS hasta el observador. La situación geométrica en la cual vamos a realizar el cálculo es la siguiente. En la esfera celeste que forma el LSS podemos descomponer la temperatura en un punto  $(\theta, \phi)$ , o lo que es lo mismo el punto señalado por el tres vector que parte de nuestra posición  $\hat{\mathbf{n}}$ , en su parte promedio (o de fondo)  $\bar{T}(t)$  y la fluctuación en dicho punto  $\delta T(\mathbf{x}, t)$ :  $T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(t) + \delta T(\mathbf{x}, t)$ , justo como hicimos en la sección anterior. Luego del LSS los fotones no colisionan más con la materia (i.e., el camino libre medio de los fotones se volvió más grande que el radio de Hubble) y ya no forman un componente que “genere gravitación” de manera importante i.e. ya no es la especie dominante en la época que sigue al desacople. Los fotones, entonces se pueden considerar libres y partículas de prueba, por lo que seguirán la geodésica  $x^a(\lambda)$  del espacio-tiempo real. El parámetro  $\lambda$  es el parámetro afín y el vector tangente a esta geodésica es  $k^a = dx^a/d\lambda$ . Podemos aproximar la geodésica del espacio-tiempo real como una perturbación de primer orden de la geodésica del espacio-tiempo de FL. A primer orden de perturbación, el vector tiene componentes  $k^0 = a^{-1}(\bar{\omega} + \delta\omega)$  y  $k^i = -\bar{\omega}a^{-1}(\bar{e}^i + \delta e^i)$ , donde  $\omega$  es la energía del fotón medida por un observador y  $e^i$  es el vector unitario espacial de propagación del fotón. Las temperaturas del CMB en dos diferentes puntos a los que llamaremos  $E$  (evento de emisión, determinado por la intersección de la geodésica de emisión y el LSS) y  $O$  (evento de

<sup>9</sup>Existen algunos artículos [principalmente 219] en los cuales se hacen aproximaciones heurísticas que en realidad no son aplicables a escalas superiores al radio de Hubble [ver crítica en 97]. Para expresiones invariantes de norma ver [98], si desea una demostración exclusivamente geométrica de este efecto ver [131, 132].

observación, aquí y ahora) a lo largo de una geodésica nula en la dirección de observación son

$$\frac{T_{\mathbf{O}}}{T_{\mathbf{E}}} = \frac{(k^a u_a)_{\mathbf{O}}}{(k^a u_a)_{\mathbf{E}}} \quad (2.13)$$

donde  $u^a$  en  $\mathbf{O}$  y  $\mathbf{E}$  es la cuatro-velocidad de los observadores en el evento de observación y de emisión respectivamente. Ahora descompondremos la temperatura observada en una parte homogénea y su perturbación a primer orden:  $T(\mathbf{x}_{\mathbf{O}}, t_{\mathbf{O}}; \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{O}}) = \bar{T}(\mathbf{x}_{\mathbf{O}}, t_{\mathbf{O}}) + \delta T(\mathbf{x}_{\mathbf{O}}, t_{\mathbf{O}}; \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{O}})$

Con estas especificaciones el paso siguiente es escribir las ecuaciones perturbadas de (i) la condición de vector nulo  $k^a k_a = 0$ , (ii) la ecuación geodésica  $k^a_{;b} k^b = 0$  y la ecuación (2.13).

Considerando únicamente las perturbaciones escalares ( cf. [43] o ver apéndice A para una explicación detallada de esta descomposición)

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_{\mathbf{O}} = \frac{\delta T}{T} \Big|_{\mathbf{E}} - \frac{1}{k} v_{,\alpha} e^\alpha \Big|_{\mathbf{O}} + \frac{1}{k} v_{,\alpha} e^\alpha \Big|_{\mathbf{E}} - \psi \Big|_{\mathbf{O}} + \psi \Big|_{\mathbf{E}} + \int_{\mathbf{E}}^{\mathbf{O}} [\psi - \phi]' dy \quad (2.14)$$

donde  $\frac{d}{dy} \equiv \frac{\partial}{\partial \eta} - \bar{v}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ , es decir la integral se hace a lo largo de la geodésica nula. Podemos absorber el término que no muestra dependencia angular i.e.  $\psi \Big|_{\mathbf{O}}$  dentro de la definición de temperatura de fondo y acomodar términos como sigue:

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_{\mathbf{O}} = \left( \psi + \frac{\delta T}{T} \right) \Big|_{\mathbf{E}} - \frac{1}{k} v_{,\alpha} e^\alpha \Big|_{\mathbf{O}} + \frac{1}{k} v_{,\alpha} e^\alpha \Big|_{\mathbf{E}} + \int_{\mathbf{E}}^{\mathbf{O}} [\psi - \phi]' dy \quad (2.15)$$

Esta es la expresión general del efecto de Sachs-Wolfe. Al primer término del lado derecho en la literatura se le llama *efecto de Sachs-Wolfe ordinario* y describe las perturbaciones tanto gravitatorias como del plasma en la LSS. El segundo y tercer término son *efectos Doppler debidos al movimiento entre el observador y el plasma* y el último término es el *efecto integral de Sachs-Wolfe*. Es importante notar que esta descomposición es heurística ya que no existe una manera genérica en Relatividad General de distinguir los efectos de *redshift* debidos al efecto Doppler de los efectos de *redshift* gravitatorios. Para obtener la expresión encontrada en la literatura se deben hacer las suposiciones siguientes: (i) las perturbaciones primordiales son adiabáticas, i.e. ,  $S = \delta_{DM} - \frac{3}{4} \delta_{rad} = 0$ ; <sup>10</sup> (ii) al momento del desacople (26) los bariones y los fotones forman un fluido ideal; (iii) el universo es plano y no contiene energía oscura i.e.  $K = \Lambda = 0$ ; (iv) la ecuación de estado de la materia es  $p = 0$  al tiempo del desacople y posterior; y finalmente (v) despreciar la solución decreciente (ver §2.3) de  $\psi$  [97, 98] :

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_{\mathbf{O}} = \frac{1}{3} \psi \Big|_{\mathbf{E}}. \quad (2.16)$$

<sup>10</sup>Las *perturbaciones adiabáticas* se definen como aquellas que afectan a todas las especies de tal manera que las razones de los números de densidad permanecen sin perturbar:  $\delta(n_X/n_Y) = 0$ . En términos de las densidades de energía las perturbaciones adiabáticas están caracterizadas por las siguientes relaciones  $(1/4)\delta_\gamma = (1/3)\delta_{DM} = (1/3)\delta_B$ . Si la ecuación de estado es  $p = p(\rho)$  las perturbaciones son necesariamente adiabáticas. Como las perturbaciones adiabáticas están asociadas a la perturbación de la curvatura vía las ECE, también se les conoce como *perturbaciones de curvatura*. Por otro lado es posible perturbar –dado que hay múltiples componentes o especies– a las densidades de energía de la materia sin perturbar la geometría, a este tipo de perturbación se le conoce como perturbación *isocurvatura*.

Es importante recalcar que el efecto Sachs-Wolfe (2.15) es el dominante a escalas mayores que el radio de Hubble al momento del LSS, pero a escalas menores, la física de plasmas domina y este análisis debe de ser complementado con la ecuación de Boltzmann.

*Picos acústicos*, ( $100 \lesssim l \lesssim 1000$ ). La forma del espectro de potencias es consecuencia de las oscilaciones provocadas por la gravedad en el plasma antes de que los átomos se vuelvan neutrales (para una explicación básica ver el artículo de divulgación de Hu y White, 2004).

Antes del tiempo de recombinación, las especies de elementos se podían clasificar en dos grupos: un plasma formado por materia bariónica (protones y electrones) y los fotones fuertemente acoplados de tal manera que se pueden considerar un fluido perfecto; y materia oscura la cual es la especie dominante en cuanto a su densidad de energía y genera el potencial gravitatorio en el cual está inmerso el plasma de bariones y fotones. La materia oscura a través del potencial gravitacional induce oscilaciones en el fluido bariónico-fotónico, y por su parte, la presión de la radiación actúa como fuerza restauradora. El papel de los bariones es la de aportar una pequeña cantidad de inercia.

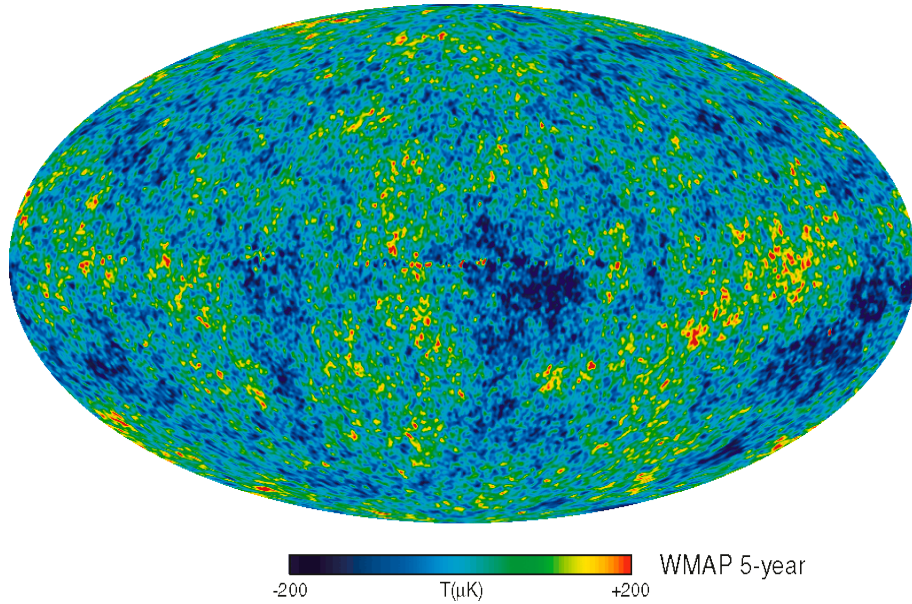
Al terminar la recombinación, la radiación (fotones) se desacoplan de la materia y viajan libremente hacia nosotros. Las fases de las oscilaciones se “congelan” (i.e. , no evolucionan más) y se proyectan en el CMB como una serie de picos armónicos. El pico máximo es el modo que alcanzó a recorrer un cuarto del periodo, alcanzando una máxima compresión. Los picos pares corresponden a densidades por abajo de la media y son regularmente menores que los picos impares ya que en el “rebote” (restauración) deben de superponerse también a la inercia de los bariones. Los valles no alcanzan hasta cero debido al efecto Doppler.

*Amortiguamiento*, ( $l \gtrsim 1000$ ). La recombinación no es un proceso instantáneo. Su duración se ve reflejada en el hecho que la LSS no es una superficie, si no que posee un espesor. Las escalas menores que este espesor se ven amortiguadas. Este efecto, conocido como *Efecto Silk*, virtualmente corta el espectro de potencias en  $l \sim 2000$ . El efecto Silk se puede entender como un efecto de difusión entre los bariones y fotones del fluido. Otro efecto importante a estas escalas es el lente gravitacional, pero este efecto se debe a estructuras cercanas a nosotros (galaxias, clusters, etc.), por lo cual se le clasifica como efecto no primordial o secundario.

### **Resultados del estudio del CMB.**

A la fecha, luego del experimento WMAP (ver figuras 2.2 y 2.3) y en espera del lanzamiento del satélite PLANCK<sup>11</sup>, el estudio del CMB ha dado los siguientes resultados [191]:

<sup>11</sup>Página web: <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=Planck>

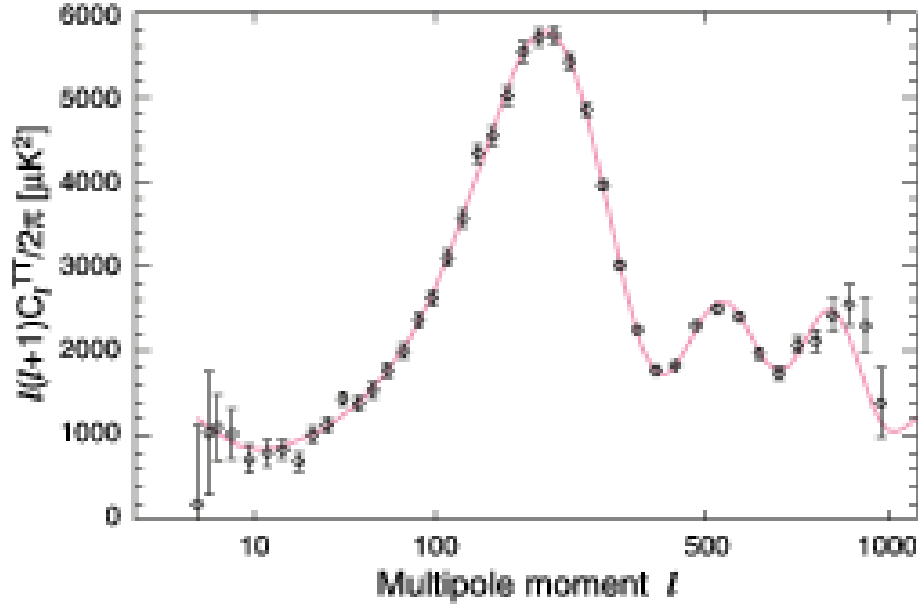


**Figura 2.2:** Mapa (WMAP año 5) de fluctuaciones de la temperatura  $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{obs}$  luego de reducir el ruido y eliminar el dipolo. Los puntos amarillos y rojos son más calientes que el promedio, los azules más fríos que el promedio. Figura tomada de Nolta y otros, 2009 [148].

- El universo pasó por una etapa de recombinación (cf. 1.3.1) en  $z \simeq 1100$  y empezó a reionizarse en  $z \simeq 10$
- La geometría del universo es muy cercana a la plana,  $0.98 \lesssim \Omega \lesssim 1.08$
- Materia oscura y Energía oscura son requeridas para explicar la geometría plana, la estructura del espectro de potencias del CMB (profundidad de los picos etc.) y la formación de estructura.
- La inestabilidad gravitacional es suficiente para hacer crecer las fluctuaciones hasta las estructuras a gran escala observadas en la actualidad.
- Las perturbaciones iniciales fueron *adiabáticas* y con características de campos aleatorios gaussianos.

### 2.3 Formación de estructura

Un universo perfectamente homogéneo e isotrópico, permanecerá homogéneo e isotrópico cuando es evolucionado con las Ecuaciones de Campo de Einstein (ECE) ya que su dinámica preserva estas simetrías. Para producir desviaciones de la homogeneidad perfecta es necesario suponer en



**Figura 2.3:** Espectro de potencias de las anisotropías del CMB, tomadas por WMAP año 5. Figura tomada de Nolta y otros, 2009 [148].

el marco del modelo estándar de la cosmología la existencia de pequeñas inhomogeneidades de la densidad de energía en el universo temprano. El estudio de la *formación de estructura* se encarga de estudiar la generación y la evolución de estas inhomogeneidades. La comprensión actual es que las fluctuaciones primordiales se amplificaron debido a su inestabilidad gravitacional y formaron la estructura a gran escala que observamos en el presente. El problema de la formación de estructura se puede dividir en dos partes: (a) *la generación de las inhomogeneidades primordiales*, y (b) el crecimiento debido a la evolución de esas inhomogeneidades en la estructura que observamos.

Esta segunda parte de la formación de estructura debe de especificar la evolución o amplificación del contraste de densidad o densidad relativa  $\delta \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$  desde una amplitud  $\delta \sim 10^{-5}$  en el LSS ( $z \simeq 1100$ ) hasta un contraste de densidad del orden de  $\delta \sim 10^2$  para galaxias en  $z \ll 1$ , esto es un requerimiento *necesario* para una teoría consistente de formación de estructura [152]. Más adelante, en la §2.4, describiremos cómo pueden obtenerse estas inhomogeneidades primordiales, pero por ahora nos concentraremos únicamente en su evolución una vez que aparecieron.

Mientras las perturbaciones permanezcan pequeñas es posible usar teoría lineal de perturbaciones en Relatividad General, desarrollada a detalle en el apéndice A. La teoría de perturbaciones en Relatividad General presenta problemas de elección de norma que dificultan la interpretación física de las perturbaciones, es decir, es difícil saber si las perturbaciones en la métrica o en el campo de densidad de energía son físicos o aparecen por la elección de coordenadas en las cuales se está calculando. Debido a este problema es preferible expresar todas las ecuaciones de manera invariante ante transformaciones de norma, aunque existe la posibilidad de elegir una norma en la cual se garantice la interpretación física de todas las variables y no contenga elementos espurios

coordenados<sup>12</sup>. En esta sección no se discutirán los detalles y sutilezas del método perturbativo en Relatividad y se remitirá al lector interesado al apéndice A o al artículo [43].

La idea básica de la teoría lineal de perturbaciones es sencilla: perturbaremos la métrica  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$ , y el tensor de energía-momento  $T_{ab} \rightarrow T_{ab} + \delta T_{ab}$ . Sustituyendo estas perturbaciones en las ECE, se obtienen ecuaciones perturbadas de la forma  $L[g_{ab}]\delta g_{ab} = \delta T_{ab}$ , donde  $L$  es un operador diferencial de segundo orden que depende de la métrica de fondo  $g_{ab}$ . En el caso particular de los universos FL espacialmente planos ( $K = 0$ ) es preferible descomponer las perturbaciones en modos de Fourier,

$$L(a(t), \mathbf{k})\delta g_{ab}(t, \mathbf{k}) = \delta T_{ab}(t, \mathbf{k}). \quad (2.17)$$

Como se mostrará más adelante, el comportamiento de cada uno de los modos depende del valor relativo de  $\lambda(t)$  comparado con  $d_H(t)$ . Cuando  $\lambda(t) = d_H(t)$ , se dice que *el modo está entrando al radio de Hubble*. Las longitudes de onda pueden entrar al radio de Hubble cuando el universo está dominado por radiación o por materia. Definiendo a  $\lambda_{eq}$  a la longitud que entra al radio de Hubble cuando las densidades de materia y radiación son iguales ( $t = t_{eq}$ ), tenemos que si  $\lambda > \lambda_{eq}$  entonces el modo entra en la fase dominada por materia, y en caso contrario ( $\lambda < \lambda_{eq}$ ) el modo entra en la época dominada por radiación.

Para describir la formación de estructura en el universo, es necesario encontrar cómo evolucionan las perturbaciones de las tres especies de materia que conforman al universo<sup>13</sup>: bariones ( $\rho_B$ ), materia oscura ( $\rho_{DM}$ ) y radiación ( $\rho_R$ ). Para fines de cálculo, se supondrá que la materia oscura está conformada por partículas de masa  $m_{DM}$ , la materia oscura se desacopla del plasma a la temperatura  $T = T_{DM}^d$  y sus partículas se vuelven no-relativistas después del tiempo  $t_{DM}^{nr}$ ,  $T(t_{DM}^{nr}) = T_{DM}^{nr} \simeq m_{DM}$ . Los modelos actuales de materia oscura (cf. [8]) apuntan a que  $T_{DM}^{nr} > T_{eq}$ , i.e.  $t_{DM}^{nr} < t_{eq}$ . Por su parte los bariones permanecen acoplados con la materia hasta  $t_d$  (ver 1.3.1). Es convencional en la literatura introducir la velocidad de sonido de la especie  $X$  (bariones, DM, radiación) mediante  $c_{sX}^2 = (\dot{p}_X / \dot{\rho}_X)$ .

Procederemos a elaborar formalmente lo dicho en los párrafos anteriores sin llegar a las profundidades que se presentan en el apéndice A.3. El punto de partida es la métrica perturbada de RW a primer orden,

$$ds^2 = [g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + \gamma_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j + h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \eta) dx^\mu dx^\nu \right] \quad (2.18)$$

donde las perturbaciones de la métrica están dadas por  $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} / a^2$ ,  $\gamma_{ij}$  es la 3-métrica de las hipersuperficies espaciales que folian el espacio-tiempo de fondo  $\Sigma_t$  (el espacio-tiempo sin perturbar, i.e. el descrito por la métrica de RW) y  $\mathbf{x}$  representa a las tres componentes espaciales:  $x^i$ .

<sup>12</sup>Un ejemplo de una norma con problemas de grados de libertad no físicos de este tipo es la norma sincrónica (cf. pag. 172) que lamentablemente fue la más usada al principio del desarrollo de la teoría de perturbaciones cosmológica. Por otro lado un ejemplo de elección de norma sin estos problemas es la norma de Poisson (cf. pag. 173)

<sup>13</sup>A esta época la densidad de energía de la DE es despreciable comparada con la de las demás especies, es por eso que es ignorada en lo que sigue.

Las perturbaciones a primer orden  $h_{\mu\nu}$  se pueden separar de una manera  $3 + 1$  como sigue:

$$h_{00} = -2\phi, \quad h_{0i} = h_{i0} = w_i, \quad h_{ij} = 2(\psi\gamma_{ij} + S_{ij}), \quad \text{con } \gamma^{ij}S_{ij} = 0. \quad (2.19)$$

donde  $\gamma^{ij}$  es la matriz inversa de  $\gamma_{ij}$  y  $S_{ij}$  no tiene traza ya que fue puesta en  $\psi$ . En las hipersuperficies espaciales, usamos a  $\gamma_{ij}$  o  $\gamma^{ij}$  para bajar y subir índices espaciales. Además, las derivadas espaciales se especificarán usando el operador de derivada covariante 3-dimensional  $\nabla_i$  definido respecto a  $\gamma_{ij}$ . En este trabajo de tesis tratamos con espacios-tiempos de RW que son espacialmente planos por lo que en el sistema de coordenadas elegido en el capítulo 1  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$  y  $\nabla_i = \partial/\partial x^i$ .

Se puede demostrar (cf. apéndice A.3 y [201]) que los componentes de  $h_{\mu\nu}$  se pueden descomponer en este caso en partes que transformen ante rotaciones en las hipersuperficies espaciales como escalares, vectoriales y tensoriales. Además esta división en el caso cosmológico a primer orden evolucionan de manera independiente. Este procedimiento empieza con descomposición de cualquier vector en sus partes *longitudinales* y *transversales*:

$$w_i = w_i^{\parallel} + w_i^{\perp} = \partial_i w^{\parallel} + w_i^{\perp}, \quad \text{donde } \vec{\nabla} \times \mathbf{w}^{\parallel} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}^{\perp} = 0. \quad (2.20)$$

Esta descomposición vectorial está basada en el teorema de Helmholtz<sup>14</sup> [198]. Los nombres de *longitudinal* y *transversal* para la descomposición del vector  $\mathbf{w}$  provienen de como es el vector  $\mathbf{w}$  es paralelo o perpendicular respectivamente, respecto al vector de onda  $\mathbf{k}$  de la transformación de Fourier. Existe una descomposición similar para un tensor de dos índices:

$$S_{ij} = S_{ij}^{\parallel} + S_{ij}^{\perp} + S_{ij}^{TT}, \quad (2.21)$$

donde

$$S_{ij}^{\parallel} = \left( \delta_i \delta_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \right) \psi_S, \quad S_{ij}^{\perp} = \partial_i S_j^{\perp} + \partial_j S_i^{\perp}, \quad (2.22)$$

y cumplen con  $\delta^{ij}\partial_j S_i^{\perp} = 0$ ,  $\delta^{ik}\partial_k S_{ij}^{TT} = 0$  y  $\delta^{ij}S_{ij}^{TT} = 0$ . Luego de estas descomposiciones<sup>15</sup>, podemos clasificar las variables de la perturbación lineal como sigue:  $S_{ij}^{TT} \equiv h_{ij}^{TT}$  es la parte tensorial (o modo tensorial) de la perturbación. La parte tensorial tiene dos grados de libertad y físicamente representa a las ondas gravitacionales. Los modos vectoriales son  $w_i^{\perp}$  y  $S_{ij}^{\perp}$  poseen cada uno dos grados de libertad y representan los efectos gravito-magnéticos. Finalmente los modos escalares corresponden físicamente a los efectos Newtonianos gravitacionales modificados relativísticamente. Están representados por cuatro variables  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $w^{\parallel}$  y  $\phi_S$ . En total tenemos 10 grados de libertad (2 tensoriales + 4 vectoriales + 4 escalares), de los cuales cuatro pueden ser eliminados fijando una norma, i.e. fijando un sistema de coordenadas.

<sup>14</sup>El teorema de Helmholtz establece que cualquier campo vectorial suave en tres dimensiones se puede expresar como la suma de dos campos vectoriales: uno longitudinal (libre de rotación o *irrotacional*) y otro transversal (libre de divergencia o *solenoidal*). Como corolario se ve que el campo vectorial puede ser generado por un par de potenciales: un potencial escalar y uno vectorial.

<sup>15</sup>La nomenclatura expresada en términos de  $h_{ab}$  es estándar en la presentación de teoría lineal de Relatividad General en libros de texto [215] y es la usada por [140], pero lamentablemente no es estándar en la comunidad cosmológica. En [138], la signatura de la métrica es la usada por la comunidad de física de partículas y además los símbolos para identificar las perturbaciones están cambiados. En otras referencias [112, 128, 185, 200, 201] a las perturbaciones escalares las llaman  $A, B, C, D(oE)$  que corresponderían (salvo signos) a  $\{\phi, w^{\parallel}, \psi, \psi_S\}$ , se le recomienda al lector ser cuidadoso en este enredo al consultar diversa bibliografía.

En este trabajo de tesis se elegirá la norma *Newtoniana Conforme*<sup>16</sup>, en la cual sólo se toman en cuenta las perturbaciones escalares de la métrica y se hacen cero  $\phi_s$  y  $w^{\parallel}$ . Esta elección de norma es un caso especial de la norma de *Poisson* definida por  $\delta^{ij}\partial_i w_j = \delta^{ij}\partial_k S_{ij} = 0$  (cf. A).

En la norma Newtoniana Conforme, la métrica tiene la forma,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\phi)d\eta^2 + (1 + 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right]. \quad (2.23)$$

Esta norma tiene como principales ventajas que las expresiones obtenidas de las ECE se pueden interpretar físicamente de manera relativamente directa y que sus variables coinciden con las invariantes de norma (cf. apéndice A para ver más a fondo esta cuestión).

Ahora sustituiremos la métrica (2.23) en las ECE (1.35) (haciendo  $K = 0$ ) y en (A.30) e identificaremos los órdenes cero y lineal. Así, los componentes del tensor de Einstein a orden cero son

$$G_{\eta}{}^{\eta} = -\frac{3}{a^2}\mathcal{H}^2, \quad G_i{}^j = -\frac{1}{a^2}\delta_i^j \left( 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 \right), \quad (2.24)$$

mientras que las componentes del tensor de Einstein a primer orden son

$$\delta G_{\eta}{}^{\eta} = \frac{2}{a^2} \left\{ (3\mathcal{H}\partial_{\eta} - \Delta)\psi + 3\mathcal{H}^2\phi \right\}, \quad (2.25a)$$

$$\delta G_i{}^{\eta} = -\frac{2}{a^2}\partial_i (\partial_{\eta}\psi + \mathcal{H}\phi), \quad (2.25b)$$

$$\delta G_{\eta}{}^i = \frac{2}{a^2}\partial^i \left\{ \partial_{\eta}\psi + \mathcal{H}\phi \right\}, \quad (2.25c)$$

$$\delta G_i{}^j = \frac{1}{a^2} \left[ \partial_i \partial^j (\psi - \phi) + \left\{ (-\Delta + 2\partial_{\eta}^2 + 4\mathcal{H}\partial_{\eta})\psi + (2\mathcal{H}\partial_{\eta} + 4\partial_{\eta}\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \Delta)\phi \right\} \delta_i^j \right]. \quad (2.25d)$$

Para modelar la materia se supondrá que la DM y la radiación pueden ser tratados como un fluido perfecto. Por lo que se usará el tensor de energía-momento  $T_{ab}$  dado por la ecuación (1.24)

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}, \quad [1.24]$$

expandiendo  $T_a{}^b$  a primer orden obtenemos

$$T_0{}^{\eta} = -\rho(\mathbf{x}, \eta) = -[\bar{\rho}(\eta) + \delta\rho(\mathbf{x}, \eta)], \quad (2.26a)$$

$$T_i{}^{\eta} = [\bar{\rho}(\eta) + \bar{p}(\eta)] v_i(\mathbf{x}, \eta) = [\bar{\rho}(\eta) + \bar{p}(\eta)] \nabla_i W, \quad (2.26b)$$

$$T_j{}^i = [\bar{p}(\eta) + \delta p(\mathbf{x}, \eta)] \delta_j^i, \quad (2.26c)$$

<sup>16</sup>La norma newtoniana conforme es la norma usada en los trabajos [22, 52, 112, 128, 135, 155, 185], para comparaciones con otras normas ver [121, 138]. Referencias usadas en esta tesis que no usan esta norma: [152, 153, 163]



donde  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{p}$  son la densidad de energía y la presión en el espacio-tiempo de fondo con métrica de RW,  $v_i = \delta_{ij} dx^i / d\eta$  es la 3-velocidad del fluido (que se supone es no-relativista). En este conjunto de ecuaciones (2.26) hemos hecho dos aproximaciones, la primera aproximación es que el campo de 3-velocidad de la materia es irrotacional  $\mathbf{v} = \nabla W$ , i.e.  $W$  es el potencial de la velocidad; la segunda aproximación es que la presión anisotrópica  $\pi_j^i$  (la parte no-diagonal de  $T_a^b$ ) es despreciable comparada con la presión  $p$ . Estas aproximaciones son válidas antes de la época de formación de galaxias.

Igualando orden a orden las perturbaciones de la métrica (2.25) con las perturbaciones del tensor de energía-momento (2.26) y haciendo una pequeña manipulación algebraica, se obtienen las ecuación de Einstein en esta norma<sup>17</sup>,

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G a^2 [\delta\rho + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p})W], \quad (2.27a)$$

$$\partial_\eta \psi + \mathcal{H}\psi = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p})W, \quad (2.27b)$$

$$\partial_\eta^2 \psi + 3\mathcal{H}\partial_\eta \psi - (8\pi G a^2 \bar{p})\psi = 4\pi G a^2 \delta p, \quad (2.27c)$$

$$\psi - \phi = 0. \quad (2.27d)$$

Las ecuaciones de movimiento del fluido perfecto [112, 200] se pueden obtener de la ecuación de conservación (1.41c) en la métrica (2.23) son, la ecuación de continuidad ( $u^\mu \nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$ ),

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) + (\bar{\rho} + \bar{p})(3\psi' + \nabla^2 W) = 0, \quad (2.28)$$

y la ecuación de Euler (obtenida de la proyección espacial de  $\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$ ):

$$W' + (1 - 3c_s^2)\mathcal{H}W + \phi + \frac{\delta p}{\bar{\rho} + \bar{p}} = 0, \quad (2.29)$$

donde  $c_s^2 \equiv \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'}$  es la velocidad del sonido.

Hasta este momento, las ecuaciones (2.26, 2.27, 2.28 y 2.29) son las ecuaciones de dictan la evolución de las perturbaciones y pueden aplicarse en cualquier época cosmológica en las que sea valido aproximar a la materia como un fluido.

*Aproximación de dos fluidos.* Podemos especializar estas ecuaciones al periodo que va desde el fin de inflación hasta la recombinación. Supondremos que podemos describir los componentes del universo por dos fluidos perfectos: Materia Oscura (DM) y radiación<sup>18</sup>. La densidad de energía en este periodo es  $\delta\rho(\mathbf{x}, \eta) = \rho_{DM}\delta_{DM}(\mathbf{x}, \eta) + \rho_{rad}\delta_{rad}(\mathbf{x}, \eta)$ , en esta última expresión hemos quitado

<sup>17</sup>Y bajo la transformación  $\psi \rightarrow \Psi$ ,  $\phi \rightarrow \Phi$  las ECE invariantes de norma. Se puede consultar el apéndice A para el cálculo invariante de norma, y haciendo la transformación inversa a la recién mencionada se obtienen estas ecuaciones.

<sup>18</sup>Radiación incluye a fotones, electrones y bariones, ya que todos ellos son partículas ultra-relativistas en esta época y están acopladas mediante dispersiones de Thomson

las barras a las cantidades de fondo ( $\bar{\rho} \rightarrow \rho$ ) y definimos los contrastes de densidad  $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ . La presión total es  $p(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{3}\rho_{rad}(a)(1 + \delta_{rad})$ . Suponiendo que las ecuaciones de dinámica de fluidos (2.29), (2.28) son válidas para cada especie, tenemos

$$\delta'_{DM} + \nabla^2 W_{DM} + 3\psi' = 0, \quad W'_{DM} + \mathfrak{H}W_{DM} + \psi = 0, \quad (2.30a)$$

$$\frac{3}{4}\delta'_{rad} + \nabla^2 W_{rad} + 3\psi' = 0, \quad W'_{rad} + \frac{1}{4}\delta_{rad} + \psi = 0. \quad (2.30b)$$

Necesitamos elegir una ECE para completar el sistema de ecuaciones ya que tenemos 5 incógnitas ( $\delta_{rad}, \delta_{DM}, W_{rad}, W_{DM}$  y  $\psi$ ) y cuatro ecuaciones (2.30), por conveniencia, elegiremos a la ecuación (2.27a) para cerrar el sistema. El sistema de ecuaciones se puede resolver de manera más fácil transformándolas al espacio de Fourier<sup>19</sup>, quedando

$$\delta'_{DM} - k^2 W_{DM} + 3\psi' = 0, \quad W'_{DM} + \mathfrak{H}W_{DM} + \psi = 0, \quad (2.31a)$$

$$\frac{3}{4}\delta'_{rad} - k^2 W_{rad} + 3\psi' = 0, \quad W'_{rad} + \frac{1}{4}\delta_{rad} + \psi = 0, \quad (2.31b)$$

$$-k^2\psi = 4\pi G a^2 [\delta\rho + 3\mathfrak{H}(\rho + p)W]. \quad (2.31c)$$

Nótese que el vector de onda  $\mathbf{k}$  es comóvil, y por lo tanto la longitud de onda física es  $2\pi a/k$ , con  $|\mathbf{k}| = k$ .

Resulta conveniente para los cálculos de formación de estructura usar la variable  $y = a/a_{eq}$  como variable temporal en lugar del tiempo. La solución a la ecuación de Friedmann (1.38a) para dos componentes (radiación y DM) se puede expresar en términos de la nueva variable  $y$  de la siguiente manera [155]:

$$y \equiv \frac{\rho_{DM}}{\rho_{rad}} = \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\eta}{\eta_{eq}} + \left(\frac{\eta}{2\eta_e}\right)^2, \quad \eta_{eq} \equiv \left(\frac{a_{eq}}{\Omega_{DM}}\right)^{1/2} H_0^{-1} = \frac{19}{\Omega_{DM} h^2} \text{Mpc} \quad (2.32)$$

La variable  $\eta_{eq}$  define también al vector de onda  $k_{eq} = \eta_{eq}^{-1}$ . Usando las nuevas variables, manipulamos las ecuaciones (2.27b), (2.27a), (2.31) y (2.31c) para eliminar las variables de velocidad ( $W_{DM}, W_{rad}$ ) y obtener tres ecuaciones de evolución [155] para las tres incógnitas restantes ( $\psi, \delta_{DM}, \delta_{rad}$ ),

$$y\psi' + \psi + \frac{1}{3} \frac{k^2}{k_{eq}^2} \frac{y^2}{1+y} \psi = -\frac{1}{2} \frac{y}{1+y} \left( \delta_{DM} + \frac{1}{y} \delta_{rad} \right), \quad (2.33a)$$

$$(1+y)\delta''_{DM} + \frac{2+3y}{2y} \delta'_{DM} = 3(1+y)\psi'' + \frac{3(2+3y)}{2y} \psi' - \frac{k^2}{k_c^2} \psi, \quad (2.33b)$$

$$(1+y)\delta''_{rad} + \frac{1}{2} \delta'_{rad} + \frac{1}{3} \frac{k^2}{k_c^2} \delta_{rad} = 4(1+y)\psi'' + 2\psi' - \frac{4}{3} \frac{k^2}{k_c^2} \psi, \quad (2.33c)$$

en estas ecuaciones  $\{\}' \equiv d/dy$ . Para resolver este sistema de ecuaciones es necesario especificar as

<sup>19</sup>Esto se puede hacer en el universo que estamos estudiando ya que las hipersuperficies que folian el mismo, son planas. Si este no fuera el caso, esta transformación aún podría hacerse pero sólo tendría una validez local.

condiciones iniciales, las cuales se suponen dadas<sup>20</sup> al principio de la fase dominada por radiación y para los modos que son más grandes que el radio de Hubble, i.e.  $y \ll 1, k \rightarrow 0$ . En este límite las ecuaciones (2.33) son

$$y\psi' + \psi \simeq -\frac{1}{2}\delta_{rad}; \quad \delta''_{DM} + \frac{1}{y}\delta'_{DM} \simeq 3\psi'' + \frac{3}{y}\psi'; \quad \delta''_{rad} + \frac{1}{2}\delta'_{rad} \simeq 4\psi'' + 2\psi'. \quad (2.34)$$

El mecanismo que genera las perturbaciones iniciales con un valor  $\psi(y_i, l) = \psi_i(k)$ . La primera ecuación (2.34) da  $\delta_{rad}(y_i, k) = -2\psi_i$  cuando  $y_i \rightarrow 0$ . Si restamos las ecuaciones para el contraste de densidad (2.31) vemos que en este límite ( $k \rightarrow 0$ ) se conserva la adiabaticidad<sup>21</sup>,  $(\delta_{rad} - \delta_{DM})' = k^2((4/3)W_{rad} - W_{DM})$ , por lo que  $\delta_{DM}(y_i, k) = (3/4)\delta_{rad} = (3/2)\psi_i$ . La ecuación (2.33a) determina  $\psi$  dados  $(\psi_i, \delta_{DM}, \delta_{rad})$ . Finalmente, usando las otras dos ecuaciones de (2.33) tenemos  $\delta'_{DM}(y_i, k) = 3\psi'$ ,  $\delta'_{rad}(y_i, k) = 4\psi'$  y obtenemos el conjunto total de condiciones iniciales (ver tabla 2.1).

**Tabla 2.1:** Condiciones iniciales para la época dominada por radiación. Se supone que el mecanismo generador de las perturbaciones iniciales asigna al potencial gravitacional  $\psi$  el valor  $\psi_i(y_i, k)$ , cuando  $y_i \rightarrow 0$ .

$\psi$	$\delta_{rad}$	$\delta'_{rad}$	$\delta_{DM}$	$\delta'_{DM}$
$\psi_i(k)$	$-2\psi(y_i, k)$	$3\psi'(y_i, k)$	$\frac{3}{2}\psi(y_i, k)$	$4\psi'(y_i, k)$

El conjunto de ecuaciones (2.33a) puede ser integrado fácilmente de manera numérica (cf. [52, 155]), pero existen límites de interés que son de utilidad para resolver al sistema de ecuaciones de manera analítica. Estos límites y sus soluciones se muestran en la tabla 2.2.

### 2.3.1 Representaciones alternativas de las ecuaciones de evolución de las perturbaciones

La representación de las ECE y las ecuaciones dinámicas del fluido (2.33) no es única. Existen otras maneras de expresar la evolución de las perturbaciones de materia del universo [por ejemplo ver 22, 56, 57, 138]. Cada representación tiene sus ventajas y desventajas. En lo que sigue mencionaremos tres opciones que serán de utilidad cuando tratemos con el caso inflacionario y los mecanismos que dan origen a las fluctuaciones primordiales.

*Ecuación maestra para  $\psi$ .* En el caso más general, la presión depende de la energía y de la entropía por barión  $S$ , i.e. ,  $p = p(\rho, S)$ . Cuando el fondo se expande de manera reversible (i.e. los procesos de aniquilación/creación de las especies de materia están balanceados)  $S$  es constante. Si

<sup>20</sup>El mecanismo generador de estas fluctuaciones primordiales se discutirá en §2.6 y §2.7.

<sup>21</sup>Cf. definición en el pie de la página 62.

**Tabla 2.2:** Soluciones analíticas en ciertos límites de interés del sistema de ecuaciones (2.33). Las iniciales **MD** y **RD** significan “época dominada por materia” y “época dominada por radiación” respectivamente. Los límites se pueden entender como sigue:  $y \equiv a/a_{eq}$  funciona como una variable temporal, entonces  $y \ll 1$  representa tiempos muy tempranos (dentro de RD) y  $y \gg 1$  tiempos tardíos (dentro de MD). La variable  $l$  está definida por  $l^2 \equiv k^2/(3k_c^2)$ , por lo que el límite  $ly$  durante radiación marca el tiempo en el que entra la perturbación al radio de Hubble,  $ly \gg 1$  representa un tiempo posterior a la entrada de la perturbación al radio de Hubble. Finalmente  $k\eta$ , debido a que  $d_H = (a'/a)^{-1} \propto \eta$  es simplemente el radio entre el radio de Hubble  $d_H$  y el tamaño de la perturbación  $\lambda$ ,  $d_H/\lambda$ , entonces el límite  $\lambda \gg d_H$  se puede escribir como  $k\eta \ll 1$  y  $\lambda \ll d_H$  como  $k\eta \gg 1$ .

Aproximación		Soluciones	
Tamaño perturbación	Condiciones Extras		
$\lambda \gg d_H^\circ$	exacta	$\psi = \psi_i \frac{1}{10y^3} [16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16]$ $\delta_{rad} \simeq 4\psi - 6\psi_i$	
	$y \gg 1$	$\psi \simeq \frac{9}{10}\psi_i$	
$\lambda \ll d_H$	<b>RD</b> <sup>*,*</sup>	exacta	$\psi = \psi_i \frac{3}{l^3 y^3} [\text{sen}(ly) - ly \cos(ly)]$
		$ly \gg 1$	$\psi \simeq -3\psi_i (ly)^{-2} \cos(ly)$ , $\delta_{rad} \simeq 6\psi_i \cos(ly)$
		$y \ll 1$	$\delta_{DM} \simeq C_1 + C_2 \ln y$
	<b>MD</b> <sup>†</sup>	$\psi = \psi_\infty = \text{constante}$ , $\delta_{DM} = -2\psi_\infty - (2k^2/3k_c^2)\psi_\infty y \sim y \sim a$	

<sup>◦</sup> En este límite la adiabaticidad de la perturbación es respetada, entonces  $\delta_{rad} \simeq (4/3)\delta_{DM}$ .

<sup>\*</sup> Si la perturbación entra al radio de Hubble cuando se está en RD, no es posible despreciar los términos de presión.

<sup>\*</sup> Como  $\delta_{DM}$  no es la especie dominante, el procedimiento estándar de resolución es resolver el sistema  $\delta_{rad} - \psi$  y luego usar esas soluciones para determinar  $\delta_{DM}$ .

<sup>†</sup> En MD se puede despreciar la dinámica de la radiación.

el espacio tiempo tiene una expansión adiabática,  $p = p(\rho) \equiv w(\rho)\rho$ . La perturbación de presión es  $\delta p = c_s^2 \delta \rho + \tau \delta S$ , donde  $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$  es la velocidad isentrópica de sonido y  $\tau \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho$ .

Para un fondo que se expande adiabáticamente  $c_s^2 \equiv \frac{p'}{\rho'}$ . Usando las definiciones recién dadas y combinando las ecuaciones (2.27a), (2.27c) obtenemos la ecuación conocida como *ecuación maestra*:

$$\psi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\psi' - c_s^2 \nabla^2 \psi + \left[2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2\right] \psi = \frac{\kappa}{2} a^2 \tau \delta S. \quad (2.35)$$

La ecuación maestra es la ecuación de movimiento para el potencial métrico en el caso de un universo lleno de un fluido perfecto. Es válida para cualquier época, excepto para el caso muy especial de de Sitter exacto, ya que  $\psi = 0$ . Esta ecuación se puede resolver fácilmente en dos límites de interés:

- Escalas mayores que el horizonte de sonido, ( $kc_s^2 \ll \mathcal{H}$ ). Para el límite cuando  $kc_s^2 \ll \mathcal{H}$ , la

ecuación maestra puede ser integrada de manera explícita:

$$\psi = \frac{\mathfrak{H}}{a^2} \left[ \alpha \int d\eta \frac{a^2 (\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}^2)}{\mathfrak{H}^2} + \beta \right], \quad (2.36)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes de integración. En este mismo límite si  $a \propto t^p$ , se obtiene

$$\psi = \frac{\alpha}{p+1} + \beta p t^{-p-1}. \quad (2.37)$$

Esta solución muestra que existen dos modos uno creciente y uno decreciente en las perturbaciones del potencial gravitatorio. Podemos relacionar a  $\psi$  en dos etapas cosmológicas diferentes con  $a_1 \propto t^{p_1}$  y  $a_2 \propto t^{p_2}$  mediante

$$\psi_2 = \frac{p_2 + 1}{p_1 + 1} \psi_1. \quad (2.38)$$

- *Una sola especie de materia.* Para el caso en el que exista un solo tipo de materia<sup>22</sup> en el universo (o una especie de materia sea la dominante) con ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ , la ecuación maestra (2.35) se reduce a

$$\psi'' + \frac{6\gamma}{(3\gamma - 2)} \frac{\psi'}{\eta} - (\gamma - 1) \nabla^2 \psi = 0, \quad (2.39)$$

cuya solución exacta en términos de funciones de Bessel.

$$\psi(\eta) = \frac{C_1(\mathbf{k}) J_{\nu/2}(\sqrt{w}k\eta) + C_2(\mathbf{k}) Y_{\nu/2}(\sqrt{w}k\eta)}{\eta^{\nu/2}}, \quad \nu = \frac{2 + 3\gamma}{3\gamma - 2}. \quad (2.40)$$

*Ecuación del tipo oscilador armónico de masa variable.* Es posible reescribir la ecuación maestra (2.35) como una ecuación de oscilador armónico con masa variable,

$$u'' - c_s^2 \nabla^2 u - \left( \frac{\theta''}{\theta} \right) u = \mathcal{N}, \quad (2.41)$$

mediante el siguiente cambio de variables:

$$\psi = 4\pi G(\rho + p)^{1/2} u, \quad \theta \equiv \frac{1}{a} \left( \frac{\rho}{\rho + p} \right)^{1/2}, \quad \mathcal{N} \equiv a^2 \sqrt{\rho + p} \sigma \delta S \quad (2.42)$$

Las soluciones a esta ecuación se pueden encontrar en sus límites asintóticos como en la ecuación maestra y al igual que esta, si sólo hay una especie, tiene una solución exacta en términos de funciones de Bessel.

<sup>22</sup>En este caso  $\delta S = 0$  y  $c_s^2 = w = \text{constante}$ . Por ejemplo, para radiación  $w = c_s^2 = \frac{1}{3}$  y para materia no-relativista "polvo"  $w = c_s^2 = 0$ .

Como se verá en §2.5 esta ecuación nos permite estudiar la evolución de las perturbaciones escalares de la métrica desde su generación en inflación hasta su observación en el CMB en la actualidad<sup>23</sup>.

*Ecuación de conservación para modos que están fuera del radio de Hubble.* Podemos definir la variable  $\zeta$  como

$$\zeta \equiv \frac{2}{3\gamma} \frac{d}{da} (a\psi) + \psi = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1}\psi' + \psi}{\gamma} + \psi. \quad (2.43)$$

Es fácil comprobar que  $\zeta$  es la primera integral de (2.35) (i.e.  $\zeta' = 0$ ) para modos fuera del radio de Hubble  $k \ll \mathcal{H}$  si se cumple que (a) la geometría espacial es plana  $K = 0$ , (b) la perturbación es adiabática ( $\delta S = 0$ ) y (c) sólo se toma en cuenta la solución creciente (i.e. donde  $c_s^2 \nabla^2 \psi$  es despreciable) [130]. Esta variable fue introducida en por D. Lyth en 1985 [119] y tiene una interpretación en la norma comóvil : es la perturbación de la curvatura intrínseca [cf. 115, para más interpretaciones de esta variable.]

También es posible relacionar a la variable  $\zeta$  con  $u$  bajo las condiciones (a), (b) y (c) dadas arriba:

$$\zeta = \theta^2 \left( \frac{u}{\theta} \right)'. \quad (2.44)$$

La importancia de la cantidad  $\zeta$  se debe a de que es una cantidad puramente geométrica, i.e. , el hecho de que sea una integral de movimiento (bajo las condiciones expresadas dos párrafos arriba) es válida para cualquier tipo de materia y por lo tanto  $\zeta$  sirve para seguir el comportamiento de las perturbaciones de la densidad de la materia.

Las variables  $u$  y  $\zeta$  expresadas en el periodo inflacionario serán de mucha ayuda para resolver el problema del origen de las condiciones iniciales de las perturbaciones de densidad de la energía en la explicación estándar.

---

<sup>23</sup>Aunque posiblemente exista un problema durante el *recaentamiento*. El potencial  $\psi$  puede oscilar durante la etapa de *recaentamiento* y se podría dar el caso que tuviera ceros que hicieran singular a la ecuación (2.35) (esto se ve claramente cuando especializamos la ecuación maestra para inflación cf. ecuación (2.64)). En este trabajo de tesis se supondrá que la ecuación maestra no tiene estos puntos singulares.

## 2.4 Perturbaciones Primordiales

El mecanismo <sup>24</sup> propuesto para generar las perturbaciones primordiales se encuentra en el paradigma inflacionario. En el contexto inflacionario la tarea de describir la creación de estas fluctuaciones o inhomogeneidades se divide en dos partes: (a) Las perturbaciones primordiales (que son clásicas) surgen de las *fluctuaciones cuánticas* del inflatón  $\varphi$  cuando el modo  $k$  en cuestión “sale” del radio de Hubble durante el periodo inflacionario. Esta suposición es problemática a nivel conceptual y se analiza dentro del paradigma inflacionario en §2.6. Debido a que la explicación estándar no es satisfactoria se presenta la crítica y una hipótesis alternativa al origen de las perturbaciones en §2.7. El desarrollo de esa hipótesis es el tema central de esta tesis. (b) Suponiendo la existencia de las perturbaciones **clásicas** del campo del inflatón se encuentran sus ecuaciones dinámicas y se evolucionan hasta convertirse en la perturbación inicial gravitacional  $\psi_i(k) \equiv \psi(y_i, k)$  de §2.3, pag. 71. La evolución de las perturbaciones primordiales clásicas se desarrolla de manera casi idéntica a la ilustrada en §2.3 y se expondrá a continuación.

Aunque ya se hizo hincapié en el capítulo 1, es importante recordarlo: tenemos evidencia y por lo tanto confianza en que nuestra imagen de la historia del universo es correcta para  $T < 1$  MeV, pero tener esta confianza donde la evidencia o el conocimiento teórico es más problemático y/o dudoso puede no estar justificado. Por lo tanto, *suponer* que las perturbaciones primordiales se originaron en la época inflacionaria, presupone de una manera tácita que entendemos la evolución del universo entre  $H_{inf} \simeq 10^{-5} M_{Planck} \simeq 10^{15}$  GeV y  $H_{nucleosintesis} \simeq 10^{-31}$  GeV (esta última cifra es aproximadamente la escala del parámetro de Hubble y es obtenido con la ecuación (1.72)). Es importante tener en cuenta esta advertencia siempre.

Las anisotropías del CMB en  $l$  pequeños ( $l < 100$ ) son reflejo de las perturbaciones primordiales, y como vimos la §2.2, estas escalas están dominadas por el efecto Sachs-Wolfe, el cual tiene una expresión sencilla dada por la ecuación (2.16). Es importante deducir una expresión que nos permita comparar las predicciones teóricas de los modelos que dan cuenta del origen de las perturbaciones primordiales y las anisotropías del CMB. Sustituyendo la ecuación (2.16) en (2.7) llegamos a

$$a_{lm} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} i^l \int d^3k \frac{j_l(kR_D)}{3} \gamma_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) \psi(\mathbf{k}) \quad (2.45)$$

donde hay que recordar que  $\psi$  es la perturbación gravitatoria *al momento del desacople de los fotones*, momento que está dentro de la época cosmológica dominada por la densidad de energía de la materia no-relativista. Usando (2.9) junto con (2.45) podemos calcular el espectro de potencias

---

<sup>24</sup>Otro mecanismo propuesto para generar las perturbaciones primordiales es el de *defectos topológicos* [ver 157, 163, para exposiciones elementales] y [29, 75, 123, 211, para revisiones más actuales y/o completas]. Las predicciones de este mecanismo en cuanto a la formación de la estructura son distinguibles observacionalmente de la propuesta por inflación. Las perturbaciones generadas por los defectos topológicos son del tipo llamado *isocurvatura*, mientras las generadas por el paradigma inflacionario son de tipo *adiabático*. Uno de los *test* observacionales más importantes para distinguirlos se basa en la posición del primer pico del espectro de potencias del CMB. El que este posicionado en el multipolo  $l \simeq 220$  indica que las perturbaciones primordiales son –por lo menos la componente dominante es– adiabáticas. Esta evidencia reciente apunta en contra de que el mecanismo de generación de perturbaciones sean los defectos topológicos [55]

angular  $C_l$

$$\overline{a_{lm}a_{l'm'}^*} = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} i^l (-i)^{l'} \int d^3k \int d^3k' Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}') \frac{j_l(kR_D)}{3} \frac{j_{l'}(kR_D)}{3} \overline{\psi(\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}')}. \quad (2.46)$$

Si  $\psi(\mathbf{k})$  son las componentes de Fourier de un campo aleatorio gaussiano e isotrópico,

$$\overline{\psi(\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}')} = \frac{2\pi^2}{k^3} P_\psi(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad P_\psi(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \overline{\psi(\mathbf{k})^2}, \quad (2.47)$$

donde se ha introducido el espectro de potencias de las perturbaciones gravitatorias  $P_\psi$ . Haciendo la sustitución de (2.47) en (2.46) y usando una vez más la ortogonalidad de los armónicos esféricos tenemos

$$C_l = \frac{4\pi}{9} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_l^2(kR_D) P_\psi(k). \quad (2.48)$$

Es importante notar que este espectro de potencias es el de las perturbaciones gravitatorias durante la época del desacople. Afortunadamente, como se verá en la siguiente sección para  $l$  pequeños la relación entre las perturbaciones primordiales del inflatón y las perturbaciones durante la materia tienen una expresión sencilla si se utiliza la cantidad  $\zeta$  (pag. 74) la cual es constante fuera del radio de Hubble (i.e., para modos con una longitud de onda mayor que el radio de Hubble).

Las observaciones llevadas a cabo por los experimentos que estudian el CMB (e.g. WMAP) han supuesto que las fluctuaciones a  $l$  pequeños tienen una dependencia como ley de potencias caracterizada por un único índice espectral  $n$

$$P_\psi = A \left( \frac{k}{k_p} \right)^{n-1}, \quad (2.49)$$

donde  $k_p$  es una escala de pivote típica introducida convencionalmente (para el WMAP se escogió  $k_p = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ ). Sustituyendo las funciones esféricas de Bessel por (2.6) e introduciendo la variable  $x = kR_D$  se obtiene,

$$C_l = \frac{2\pi^2}{9} A \cdot (k_p R_D)^{(1-n)} \int_0^\infty dx x^{n-3} \mathcal{J}_{l+1/2}^2(x), \quad (2.50)$$

la cual se puede resolver para  $-3 < n < 3$ , obteniendo

$$C_l = \frac{\pi^2}{36} A \mathcal{Z}(n, l), \quad (2.51)$$

donde,

$$\mathcal{Z}(n, l) = (k_p R_D)^{(1-n)} 2^n \frac{\Gamma(3-n) \Gamma\left(l + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{4-n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2} + l - \frac{n}{2}\right)}. \quad (2.52)$$

Las observaciones indican que para  $l$  pequeñas el espectro de potencias angular es aproximadamente el espectro de Harrison-Zel'dovich, i.e.,  $n \simeq 1$ , en este caso

$$\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l = \frac{A}{9}, \quad (2.53)$$



con  $A \sim 9 \times 10^{-10}$  según las observaciones del WMAP.

Aunque los cálculos en esta sección son válidos para  $l < 100$ , lo cual implica que estamos ignorando todos los efectos de la física de plasmas (oscilaciones acústicas, amortiguamiento, etc., cf. §2.2.2), en este trabajo de tesis se considerará que este es el espectro de potencias con el cual hay que comparar las predicciones teóricas, ya que es el que refleja las perturbaciones primordiales sin “contaminación” de otros efectos físicos.

## 2.5 Evolución clásica de las perturbaciones primordiales

Para escribir las ECE debemos complementar a las expresiones a orden cero y orden lineal de las componentes del tensor de Einstein (2.25) con sus homólogos en el tensor de energía-momento del campo escalar.

En la métrica (2.23) las componentes del tensor de energía-momento del inflatón a orden cero son

$$T_{\eta}{}^{\eta} = - \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 + V(\varphi) \right), \quad T_i{}^j = \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 - V(\varphi) \right) \delta_i{}^j, \quad (2.54)$$

las ECE del sistema Einstein-Inflatón a orden cero son las encontradas en el capítulo 1

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho = \frac{8\pi G}{3} a^2 \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 + V(\varphi) \right), \quad [1.116a]$$

$$2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2 = -8\pi G a^2 p = -8\pi G a^2 \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 - V(\varphi) \right), \quad [1.116b]$$

además la suma de estas dos ecuaciones da

$$\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}' = 4\pi G a^2 (\rho + p) = 4\pi G (\varphi')^2, \quad [1.116c]$$

ecuación que será de utilidad más adelante.

También a orden cero obtenemos, usando la identidad de Bianchi (1.3) aplicada al campo escalar, la ecuación de movimiento del inflatón,

$$\varphi'' + 2\mathfrak{H}\varphi + a^2 \partial_{\varphi} V(\varphi) = 0. \quad [1.116d]$$

El tensor de energía-momento del inflatón a primer orden es

$$\delta \mathcal{T}_{\eta}{}^{\eta} = -\frac{1}{a^2} \left( \partial_{\eta} \delta \varphi \partial_{\eta} \varphi - \phi (\partial_{\eta} \varphi)^2 + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) \quad (2.55a)$$

$$\delta \mathcal{T}_i{}^{\eta} = -\frac{1}{a^2} \partial_i \delta \varphi \partial_{\eta} \varphi \quad (2.55b)$$

$$\delta \mathcal{T}_\eta^i = \frac{1}{a^2} \partial_\eta \varphi \partial^i \delta \varphi \quad (2.55c)$$

$$\delta \mathcal{T}_i^j = \frac{1}{a^2} \delta_i^j \left( \partial_\eta \delta \varphi \partial_\eta \varphi - \phi (\partial_\eta \varphi)^2 - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right). \quad (2.55d)$$

Entonces, las ECE del sistema Einstein-Inflatón a primer orden son

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta + \Delta)\psi - 3\mathcal{H}^2\phi = 4\pi G \left( \partial_\eta \delta \varphi \partial_\eta \varphi - \phi (\partial_\eta \varphi)^2 + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right), \quad (2.56)$$

$$\partial_\eta \partial_i \psi + \mathcal{H} \partial_i \phi = 4\pi G \partial_i \delta \varphi \partial_\eta \varphi \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \partial_i \partial^j (\psi - \phi) + \left\{ (-\Delta + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta) \psi + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta \mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \Delta) \phi \right\} \delta_i^j = \\ 8\pi G \delta_i^j \left( \partial_\eta \delta \varphi \partial_\eta \varphi - \phi (\partial_\eta \varphi)^2 - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Resolviendo la última ecuación con las condiciones apropiadas de frontera cuando  $i \neq j$  se obtiene

$$\psi = \phi, \quad (2.59)$$

obsérvese que este resultado es independiente de que la materia en el universo sea un campo escalar, es un resultado que será verdadero mientras no haya anisotropías en el fluido de la materia. Usando las ecuaciones de Einstein de fondo (1.116a), (1.116b) y en especial (1.116c) llegamos a la forma final de las ecuaciones de Einstein para esta etapa cosmológica:

$$(\Delta - 3\mathcal{H}\partial_\eta - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2)\psi = 4\pi G \left( \varphi' \delta \varphi' + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right), \quad (2.60a)$$

$$\psi' + \mathcal{H}\psi = 4\pi G \varphi' \delta \varphi, \quad (2.60b)$$

$$(\partial_\eta^2 + 3\mathcal{H}\partial_\eta + \mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\psi = 4\pi G \left( \varphi' \delta \varphi' - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right). \quad (2.60c)$$

Es importante notar que sólo dos de estas ecuaciones son independientes. La ecuación de evolución del campo escalar se obtiene sustituyendo (2.55) en las identidades de Bianchi,

$$\delta \varphi'' + 2\mathcal{H}\delta \varphi' - \nabla^2 \delta \varphi + a^2 \partial_\varphi^2 V(\varphi) \delta \varphi - 4\psi' \varphi' + 2a^2 \psi \partial_\varphi V(\varphi) = 0. \quad (2.61)$$

Tomando las ecuaciones (A.151) y (A.153) podemos eliminar el término potencial del campo escalar

$$(\partial_\eta^2 + \Delta)\psi = 8\pi G \delta \varphi' \varphi', \quad (2.62)$$

y usando (A.152) para eliminar  $\delta \varphi'$  de esta ecuación llegamos a

$$\left( \partial_\eta^2 + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \partial_\eta - \Delta + 2 \left( \partial_\eta \mathcal{H} - \mathcal{H} \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \right) \psi = 0, \quad (2.63)$$

ecuación que es conocida como la *ecuación maestra* para la perturbación de la métrica. Nótese que esta ecuación se pudo haber obtenido sustituyendo los valores apropiados de  $\rho$  y  $p$  del campo escalar, la velocidad del sonido  $c_s^2$  y  $\tau\delta S$  para el inflatón<sup>25</sup>. Este hecho es de suma importancia, pues nos permite basarnos en la ecuación (2.35) para trazar la evolución de las perturbaciones (clásicas) del potencial gravitatorio en cualquier época.

Los dos términos de la ecuación (2.63) se pueden interpretar directamente: el segundo término, proporcional a  $\psi'$  se comporta parecido a un término de fricción y se le conoce como *fricción de Hubble*; el último término, proporcional a  $\psi$  es el que genera la inestabilidad gravitacional.

Podemos expresar esta ecuación en las variables  $u$  (2.42) y  $\xi$  (2.43) definidas anteriormente en §2.3.

Cuando la especie dominante es el inflatón las variables  $u, \theta$  son

$$u \equiv \frac{\psi}{4\pi G \sqrt{\rho+p}} = \frac{a}{\varphi'} \psi = \frac{2a^2\theta}{3\mathcal{H}} \sqrt{\frac{3}{\kappa}} \psi, \quad \theta \equiv \frac{1}{a} \left( \frac{\rho}{\rho+p} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{\kappa}} \frac{\mathcal{H}}{a\varphi'}, \quad (2.64)$$

con esta definición se obtiene una ecuación como la (2.41), pero especializada a inflación

$$u'' - \nabla^2 u - \left( \frac{\theta''}{\theta} \right) u = 0. \quad (2.65)$$

No estamos interesados en este trabajo de tesis en el solución exacta a esta ecuación, por lo que procederemos a calcularla en el límite asintótico que nos interesa. Como primer paso transformaremos esta última ecuación al espacio de Fourier,

$$u_k'' + k^2 u_k - \left( \frac{\theta''}{\theta} \right) u_k = 0, \quad (2.66)$$

Las soluciones asintóticas de (2.66) son las siguientes. Para perturbaciones que satisfacen  $k \gg (\theta''/\theta)$  se obtiene

$$u \propto e^{\pm ik\eta}. \quad (2.67)$$

Las perturbaciones  $\psi$  y  $\delta\varphi$  en este límite presentan un comportamiento oscilatorio:  $\psi \propto \varphi' \times$  términos oscilatorios y  $\delta\varphi \propto \frac{k}{a} \times$  términos oscilatorios [ecuaciones 6.54 y 6.55 de 138, pag. 243]. Notemos que debido a que  $\psi \propto \varphi' \simeq -(V_{,\varphi}/3\kappa V^{1/2})$  para perturbaciones de longitud de onda pequeña, el cambio en  $\psi$  mientras se satisfaga este límite es despreciable, de hecho, para un potencial  $V(\varphi) = (1/2)m^2\varphi^2$ ,  $\psi \propto m$  es constante. Por su parte  $\delta\varphi$  decrece como  $a^{-1}$ , por lo que retrocediendo en el tiempo vemos que habrá un tiempo en el cual, para un número de onda  $k$  su amplitud será tan grande que la teoría de perturbaciones no será válida.

Para longitudes de onda largas  $k \ll \theta''/\theta$  se puede despreciar el segundo término de la ecuación

<sup>25</sup>Que se pueden calcular a partir de sus definiciones. Por ejemplo,  $c_s^2 \equiv \left( \frac{p'}{\rho'} \right)$ , entonces  $c_s^2(\varphi) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2\varphi''}{\mathcal{H}\varphi'} \right)$ . De la misma manera para  $\tau\delta S$ ,  $\frac{\kappa}{2} a^2 \tau\delta S = (1 - c_s^2(\varphi)) \nabla^2 \psi$ .

(2.66) y obtener<sup>26</sup> la solución aproximada

$$u \simeq C_1\theta + C_2\theta \int^\eta \frac{d\eta}{\theta^2}. \quad (2.68)$$

$C_1$  es la constante correspondiente al modo decreciente y  $C_2$  es la constante asociada con el modo creciente<sup>27</sup>.

Usando las definiciones (2.64) y tomando en cuenta solo la solución creciente tenemos que la expresión para el potencial gravitatorio en este límite es

$$\psi \simeq \frac{3}{2}C_2 \frac{\mathcal{H}}{a^2} \int^\eta a^2 \gamma d\bar{\eta} = C_2 \frac{\mathcal{H}}{a^2} \int a^2 \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right) d\eta. \quad (2.69)$$

La expresión (2.69) coincide con (2.36) si  $\alpha = (3/2)C_2$ . Si en una etapa cosmológica el factor de escala  $a \propto |\eta|^{1+\beta}$ , y es dominado por una especie con ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ ,  $\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{2+\beta}{1+\beta}$ . En esta época, el modo “creciente” de la perturbación  $\psi$  (afuera del radio de Hubble) es en realidad constante

$$\psi \simeq \frac{3}{2}C_2 \frac{1+\beta}{3+2\beta} \gamma = \frac{3}{2}C_2 \frac{3\gamma}{2+3\gamma}. \quad (2.70)$$

Entonces, podemos calcular el razón entre el valor de  $\psi_{inf}$  durante inflación ( $\beta_{inf} \simeq 2$ ) en el momento que salió del radio de Hubble y el valor de  $\psi_{mat}$  en el momento cuando entra al radio de Hubble durante el periodo dominado por materia ( $\beta_{mat} = 1$ ),

$$\frac{\psi_{mat}}{\psi_{inf}} \sim \frac{2}{5} \frac{1}{\gamma_{inf}}, \quad (2.71)$$

debido a que  $\gamma_{inf} \simeq 0$ , las perturbaciones escalares gravitatorias son magnificadas por un enorme factor entre estas dos épocas.

Usando la relación entre  $\xi$  y  $\psi$  (2.43) y la constancia respecto al tiempo de  $\psi$  para modos con longitudes de onda mayores que el radio de Hubble (2.71) podemos escribir

$$\psi = \frac{3\gamma}{2+3\gamma} \xi, \quad (2.72)$$

si además utilizamos (A.152) tenemos que para modos que salieron del radio de Hubble durante inflación

$$\xi_{inf} = \frac{4\pi G}{2\mathcal{H}} \left( \frac{2+3\gamma_{inf}}{3\gamma_{inf}} \right) \varphi' \delta\varphi', \quad (2.73)$$

<sup>26</sup>El procedimiento de obtener la solución para  $k^2 \ll \theta''/\theta$  es expandir la ecuación en potencias de  $k^2$  [130]. Haciéndolo se obtiene la expresión para  $u$  siguiente

$$u = C_1\theta \int \frac{1}{\theta^2} \left(1 - k^2 \int^\eta \theta^2 \int^\eta \frac{1}{\theta^2} d\bar{\eta} d\bar{\eta} + \mathcal{O}(k^4)\right) d\eta + C_2\theta \left(1 - k^2 \int^\eta \theta^2 \int^\eta \frac{1}{\theta^2} d\bar{\eta} d\bar{\eta} + \mathcal{O}(k^4)\right),$$

tomando en cuenta sólo el orden significativo se reduce a la expresión (2.68).

<sup>27</sup>Se puede entender la elección de estos nombres analizando el comportamiento de  $\theta$  en una época cosmológica con una especie dominante: el término proporcional a  $C_1$  decrece conforme el factor de escala  $a$  crece, mientras que el término proporcional a  $C_2$  crece conforme a  $a$ .

la cual se puede escribir, luego de usar las ecuaciones de movimiento de fondo (1.116), como

$$\xi_{inf} = \frac{2 + 3\gamma_{inf}}{2} \cdot \mathcal{H} \left( \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right). \quad (2.74)$$

Con esta expresión y usando el hecho de  $\xi$  es constante en el tiempo (cf. pag. 74), podemos igualar los valores de  $\xi_{inf}^k$  cuando el modo con número de onda  $k$  sale del radio de Hubble en  $\eta_{salida}^k$  con el valor de  $\xi_{\gamma}^k$  cuando el modo entra al radio de Hubble en una época con una especie dominante con ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho$ , i.e.  $\xi_{inf}^k(\eta_{salida}^k) = \xi_{\gamma}^k(\eta_{entrada}^k)$  y obtendremos

$$\psi_{\gamma}^k = \frac{3\gamma}{2 + 3\gamma} \cdot \left[ \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right]_{\eta=\eta_{salida}^k}, \quad (2.75)$$

donde el super-índice  $k$  indica que esta ecuación es válida por modo  $k$ . En particular para el caso de perturbaciones que entran al radio de Hubble en una época dominada por la densidad de materia ( $\gamma_{mat} = 1$ )

$$\psi_{mat}^k = \frac{3}{5} \xi_{inf}, \quad (2.76)$$

por lo que sus espectros de potencia estarán relacionados mediante

$$\mathbf{P}_{\psi_{mat}}(k) = \frac{9}{25} \mathbf{P}_{\xi_{inf}}(k) = \frac{9}{25} \left[ \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\varphi'} \right]_{\eta=\eta_{salida}^k}^2 \overline{\delta\varphi(k)\delta\varphi(k')}, \quad (2.77)$$

donde  $\overline{\delta\varphi(k)\delta\varphi(k')}$ , es la cantidad a determinar por el modelo de origen de fluctuaciones primordiales (§2.6 y §2.7).

*Ecuaciones de movimiento en términos de  $v$ .* Aunque  $u$  es la variable tradicional para presentar la evolución de las fluctuaciones, es posible expresar las ECE (2.60) y la ecuación de movimiento de  $\delta\phi$  (2.61) de una manera más sencilla definiendo dos nuevas variables  $v$  y  $z$ :

$$v = a\delta\varphi + z\psi, \quad z = \frac{a}{\mathcal{H}}\varphi, \quad (2.78)$$

$v$  es conocida como la variable de Mukhanov-Sasaki [136]. Nótese que la variable  $z$  está relacionada con la  $\theta$  (2.64) mediante  $z = (1/\theta)$ . Usando estas variables el conjunto de ecuaciones (2.60) y (2.61) se puede escribir como

$$v'' - \nabla^2 v - \frac{z''}{z}v = 0, \quad (2.79)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\kappa}{2} \frac{\mathcal{H}}{a^2} (zv' - z'v), \quad (2.80)$$

$$\left( \frac{a^2 \psi}{\mathcal{H}} \right)' = \frac{\kappa^2}{2} zv. \quad (2.81)$$

Esta nueva manera de escribir las ECE del sistema Einstein-Inflatón es la utilizada en la explicación estándar del origen de las perturbaciones cosmológicas en el paradigma inflacionario (cf. §2.6).

Como hicimos en el caso hidrodinámico (§2.3), también podemos usar  $\zeta$  (2.43) para describir la evolución de las perturbaciones. En las variables  $v$  y  $z$ ,  $\zeta$  se escribe como  $\zeta = \frac{v}{z}$ . Obviamente se obtendrán los mismos resultados que con las otras variables. Para reproducirlos se utilizará la constancia de  $\zeta$  respecto al tiempo conforme, igualando su valor cuando el modo alcanza el radio de Hubble durante inflación  $\zeta_{salida}^k$  y su valor cuando reentra al radio de Hubble i.e.,  $\zeta_{salida}^k = \zeta_{entrada}^k$ . En particular reproduciremos las relaciones (2.71), (2.75) y (2.77).

Conociendo las ecuaciones dinámicas de  $u$  (ó  $v$ , ó  $\zeta$ ),  $\delta\varphi$  y  $\psi$  podemos ver como las fluctuaciones clásicas evolucionan hasta convertirse en las condiciones iniciales para las perturbaciones de DM, radiación y bariones de §2.3 que darán origen a la estructura que observamos actualmente. Ahora debemos resolver la pregunta ¿Cómo surgen estas fluctuaciones?. La solución propuesta en el paradigma inflacionario es: *las fluctuaciones gravitacionales son provocadas por "fluctuaciones" cuánticas del campo del inflatón*. Esta solución generará nuevos problemas, que se tratarán en la siguiente sección.

## 2.6 Origen de las semillas cosmológicas: Enfoque tradicional

El modelo inflacionario propone (y quizá este sea su mayor mérito) un mecanismo para el origen de las fluctuaciones primordiales: las perturbaciones primordiales del campo  $\varphi$  son generadas por las "fluctuaciones"<sup>28</sup> cuánticas dentro del radio de Hubble –siendo así un mecanismo causal– durante el periodo inflacionario.

Podemos modelar matemáticamente (para ver el cálculo detallado se invita al lector a consultar el apéndice B.5) estas fluctuaciones cuánticas, promoviendo a la perturbación  $\delta\varphi$  a un campo cuántico  $\hat{\delta}\varphi$ . El proceso de cuantización parte de la acción del sistema Einstein-inflatón [136, 138]:

$$S[\varphi, g_{ab}] = S_{grav} + S_{mat} = \int \{R\sqrt{-g}\} d^4x + \int \left\{ \left[ -\frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a\varphi\nabla_b\varphi - V(\varphi) \right] \sqrt{-g} \right\} d^4x \quad (2.82)$$

Como buscamos las ecuaciones de movimiento de la perturbación a primer orden, necesitamos expandir la acción a segundo orden en las variables métricas ( $\psi$ ,  $\phi$ ) y en el campo ( $\delta\varphi$ ) alrededor de los campos de fondo. La acción de la materia perturbada a segundo orden es

$$\begin{aligned} \delta S_{mat}^{(2)} = \int \left[ \frac{a^2}{2} \left( \delta\varphi'^2 - 4\delta\varphi'\phi\varphi' + 4\phi^2\varphi'^2 - \delta\varphi_{,i}\delta\varphi_{,i} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\delta\varphi'\phi\varphi' - \frac{1}{2}\varphi'^2\phi^2 - 3\varphi'^2\psi - 6\delta\varphi'\psi\varphi' - 3\varphi'^2\psi\phi + \frac{3}{2}\varphi'^2\psi^2 \right) \right. \\ \left. - \frac{a^4}{2}\delta\varphi^2V_{\varphi\varphi} - a^4\delta\varphi\phi V + \frac{a^4}{2}\phi^2V + 3a^4\delta\varphi\psi V_{\varphi} + 3a^4\phi\psi V - \frac{3a^4}{2}\psi^2V \right] d^4x \quad (2.83) \end{aligned}$$

<sup>28</sup>Entrecorramos la palabra "fluctuaciones" ya coloca, en el mismo estatus conceptual, a las perturbaciones o fluctuaciones clásicas y a las incertidumbres cuánticas. La palabra "fluctuaciones" pareciera invocar que "algo" (¿El campo cuántico?) "fluctúa" en el sentido de algún proceso estocástico e.g. como el movimiento Browniano. Debido a esto consideramos desafortunado la generalización de este término en la comunidad cosmológica.

Variando  $\delta S_{mat}^{(2)}$  (2.83) y  $\delta S_{grav}^{(2)}$  (cf. ecuación 10.11 en [138], pag. 262) respecto a  $\psi$ ,  $\phi$  y  $\delta\phi$ , obtenemos ecuaciones de movimiento de este sistema. Podemos obtener un conjunto equivalente de ecuaciones si aplicamos las constricciones (2.59) y (A.152) para eliminar dos de las tres variables en la acción a segundo orden  $\delta S_{grav+mat}^{(2)}$  y usamos una vez más las ecuaciones de la métrica de fondo, al final obtendremos la acción para un sólo grado de libertad, la llamada variable de Mukhanov-Sasaki [136]  $v$ ,

$$\delta S_{grav+mat}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ v'^2 - (\Delta v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (2.84)$$

con  $z$  y  $v$  definidas como antes

$$v \equiv a \left( \delta\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}} \psi \right), \quad z \equiv \frac{a\phi'}{\mathcal{H}}. \quad [2.78]$$

La ecuación de movimiento para  $v$  se obtiene variando la acción (2.84) respecto a  $v$ . Esta ecuación tiene la forma de la ecuación de un oscilador armónico con masa variable  $m_v = z''/z$

$$v'' - \Delta v - \frac{z''}{z} v = 0. \quad (2.85)$$

La cuantización de la teoría definida por la acción (2.84) prosigue de manera estándar, primero calculamos el momento canónico conjugado de la teoría

$$\pi^{(v)}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}^{(v)}}{\partial v'} = v'(\eta, \mathbf{x}). \quad (2.86)$$

El hamiltoniano se encuentra de manera inmediata

$$H = \int \left( v' \pi^{(v)} - \mathcal{L}^{(v)} \right) d^3x = \frac{1}{2} \int \left( \left( \pi^{(v)} \right)^2 + c_s^2 \delta^{ij} v_{,i} v_{,j} - \frac{z''}{z} v^2 \right) d^3x. \quad (2.87)$$

El paso siguiente en el proceso de cuantización es promover a las variable  $v$  y  $\pi^{(v)}$  a los operadores  $\hat{v}$  y  $\hat{\pi}^{(v)}$  e imponer que estos operadores cumplan con las relaciones de conmutación estándar

$$[\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{v}(\eta, \mathbf{x}')] = [\hat{\pi}^{(v)}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}^{(v)}(\eta, \mathbf{x}')] = 0, \quad [\hat{v}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}^{(v)}(\eta, \mathbf{x}')] = i\hbar \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.88)$$

La ecuación de movimiento para  $\hat{v}$  es idéntica a (2.85) cambiando  $v \rightarrow \hat{v}$  y se obtiene de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$i\hat{v} = [\hat{v}, \hat{H}], \quad i\hat{\pi}^{(v)} = [\hat{\pi}^{(v)}, \hat{H}], \quad (2.89)$$

donde  $\hat{H}$  es el hamiltoniano  $H$  (2.87) escrito en términos de los operadores  $\hat{v}$  y  $\hat{\pi}^{(v)}$ .

Descomponemos al operador  $\hat{v}$  en ondas planas

$$\hat{v} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ v_k(\eta) \hat{a}_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + v_k^*(\eta) \hat{a}_k^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \quad (2.90)$$

donde los operadores de creación ( $\hat{a}_k^\dagger$ ) y aniquilación ( $\hat{a}_k$ ) satisfacen con las propiedades de conmutación estándar

$$\left[ \hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'} \right] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \left[ \hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'} \right] = 0, \quad (2.91)$$

lo cual se puede verificar sustituyendo (2.90) en (2.88). Para que las relaciones de conmutación (2.88) y (2.91) sean consistentes entre sí, la relación de normalización

$$v_k'(\eta)v_k^*(\eta) - v_k^*(\eta)v_k'(\eta) = i\hbar \quad (2.92)$$

debe ser satisfecha. Para cada número de onda  $k$ , el modo  $v_k(\eta)$  cumple con la ecuación de evolución

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0, \quad (2.93)$$

la cual es la ecuación de un oscilador armónico con masa variable, justo como se mencionó arriba.

Ahora debemos definir el estado de vacío como el estado que es aniquilado por los operadores  $\hat{a}_k : \hat{a}_k|0\rangle = 0, \forall k$ . Como último paso de la cuantización de  $\hat{v}$  se deben de fijar las constantes de normalización de los modos  $v_k(\eta)$ . Para esto elegiremos los modos  $v_k(\eta)$  de tal manera que para longitudes muy pequeñas (dentro del radio de Hubble  $\frac{k}{aH} \rightarrow \infty$ ) se aproximen a las ondas planas de frecuencia positiva del espacio de Minkowski, i.e., elegimos en este límite el vacío de Minkowski. A esta elección de vacío se le conoce como vacío de *Bunch-Davies* [23, 137]. Para el caso de longitudes grandes  $\left( \frac{k}{aH} \ll 1 \right)$  se puede despreciar el término que va como  $k^2$  en (2.93), entonces

$$v_k(\eta) \propto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, & \frac{k}{aH} \gg 1 \\ z, & \frac{k}{aH} \ll 1 \end{cases} \quad (2.94)$$

Como era de esperarse, para perturbaciones más grandes que el radio de Hubble,  $\xi = (v/z)$  es constante.

El siguiente paso es encontrar las soluciones de las ecuaciones (2.93), y la solución queremos expresarla en función de variables que nos permitan discriminar entre diferentes modelos inflacionarios. Estos tendrán diferentes predicciones y lo reflejarán en las variables de *slow-roll* (cf. 1.113), aunque en este trabajo de tesis no estamos estudiando modelos particulares de inflación, presentaremos los cálculos como aparecen en la literatura. Primero encontraremos unas relaciones de utilidad. La relación entre el tiempo cosmológico  $t$  y el tiempo conforme  $\eta$  se escribió en (1.21), si usamos las variables de *slow-roll* y suponemos que  $\epsilon$  es constante, tenemos

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{aH} + \epsilon \int \frac{da}{a^2 H'} \Rightarrow aH = -\frac{1}{\eta(1-\epsilon)} \quad (2.95)$$

donde en la segunda expresión se usó el hecho que  $\int dt/a = \int da/(a^2 H)$ . Por otro lado, la *masa variable* en la ecuación (2.93) se puede escribir como

$$\frac{z''}{z} = \left( \frac{z'}{z} \right)^2 + \left( \frac{z'}{z} \right)' = a^2 \left[ \left( \frac{\dot{z}}{z} \right)^2 + H \frac{\dot{z}}{z} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{z}}{z} \right) \right]. \quad (2.96)$$



En la segunda igualdad se usó la definición de la variable  $z = \frac{a\varphi'}{\mathcal{H}} = \frac{a\dot{\varphi}}{H}$ . Usando  $\frac{\dot{z}}{z} = H + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - \frac{\dot{H}}{H}$  y la segunda expresión de (2.95) en la última expresión se llega a

$$\frac{z''}{z} = \frac{2 + 2\epsilon - 3\delta - \epsilon\delta + \delta^2}{\eta^2(1 + \epsilon)}. \quad (2.97)$$

Es conveniente ahora expresar a  $z''/z$  como

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\eta^2} \left( v^2 - \frac{1}{4} \right), \quad \text{con } v \equiv \frac{3 + \epsilon - 2\delta}{2(1 + \epsilon)}, \quad (2.98)$$

expresada de esta manera, podemos escribir la solución [82] de la ecuación (2.93) como

$$v_k(\eta) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2k}} \sqrt{-k\eta} H_v^{(1)}(-k\eta), \quad \mathcal{N} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi(2\nu+1)/4}, \quad (2.99)$$

donde  $H_v^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$  es la función de Hankel de primer tipo o función de Bessel de tercer tipo (cf. [3, capítulo 9]).

Las expresiones para  $\psi$  y  $\delta\varphi$  se pueden obtener sustituyendo la solución recién encontrada en (2.81), que como es de esperarse son las mismas que las encontradas con la variable  $u$  en (2.69).

El primer problema al que nos enfrentamos ahora es ¿Cómo obtenemos un campo  $c$ -*número*  $\delta\varphi$  de un campo cuántico escalar  $\widehat{\delta\varphi}$  [155] para poder utilizarlo en (2.77) (o lo que es lo mismo como extraemos  $v$  de  $\hat{v}$ ?) La respuesta estándar es que la correlación de dos puntos del estado de vacío del campo cuántico  $\widehat{\delta\varphi}$  es el campo  $c$ -*número* buscado. Es decir la relación de identificación siguiente es válida

$$\langle 0 | \hat{v}(\eta, \mathbf{x}) \hat{v}(\eta, \mathbf{y}) | 0 \rangle \equiv \overline{v(\eta, \mathbf{x}) v(\eta, \mathbf{y})} \quad (2.100)$$

Este paso se justifica diciendo que al salir del radio de Hubble, las amplitudes de las perturbaciones se “congelan” (cf. (2.94)) y esto marca su transición a lo clásico. Existen explicaciones más elaboradas, como Decoherencia, pero básicamente dicen lo mismo: *es posible identificar las fluctuaciones cuánticas con fluctuaciones estadísticas*. Es importante notar que, aún fuera del contexto cosmológico esta afirmación tiene una validez cuestionable [4, 79, 159, 188, 226].

Completemos aquí la receta de la obtención del espectro de potencias cuántico usando para esto la cantidad  $\xi$ . Nótese que debido a la cuantización de  $\hat{v}$ , la cuantización de  $\xi = v/z$  ya fue realizada automáticamente. El espectro de potencias está definido mediante

$$\frac{2\pi^2}{k^3} \mathbf{P}_\xi(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \langle 0 | \hat{\xi}_k \hat{\xi}_{k'}^\dagger | 0 \rangle, \quad \mathbf{P}_\xi = \frac{k^3}{2\pi^2 z^2} |v_k(\eta)|^2 \quad (2.101)$$

En esta expresión utilizamos la suposición (2.100) para ligar las fluctuaciones clásicas con las cuánticas. El módulo al cuadrado del modo  $v_k(\eta)$  es

$$|v_k(\eta)|^2 = \frac{|\mathcal{N}|^2}{2k} (-k\eta) H_\nu^{(1)}(-k\eta) H_\nu^{(2)}(-k\eta) \simeq \frac{\Gamma^2(\nu)}{4\pi k} 2^{2\nu} (-k\eta)^{1-2\nu} \quad (2.102)$$

donde hemos utilizado la aproximación de argumento pequeño<sup>29</sup> de las funciones de Hankel (cf. 9.1.9 de [3], pag. 360),

$$H_\nu^{(1)}(-x) \simeq \frac{-i}{\pi} \Gamma(\nu) \left( \frac{-x}{2} \right)^{-\nu}, \quad |x| \ll 1. \quad (2.103)$$

Entonces el espectro de potencias de  $\zeta$  es

$$P_\zeta(k) = \frac{2^{2\nu-3}}{\pi} \Gamma^2(\nu) (1-\epsilon)^{1-2\nu} \left( \frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu} \left( \frac{H^2}{\dot{\phi}} \right)^2, \quad (2.104)$$

expandiendo  $\nu$  en el límite cuando  $\epsilon \ll 1$ ,  $\delta \ll 1$ ,  $\nu \simeq 3/2 + 2\epsilon + \delta + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ , por lo que a orden más bajo  $\nu \simeq 3/2$ , además evaluando en el momento cuando el modo sale del radio de Hubble, i.e.  $k \simeq aH$ ,

$$P_\zeta(k) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{H^2}{\dot{\phi}} \right)_{k \simeq aH}^2. \quad (2.105)$$

Finalmente debemos utilizar una vez más las variables de *slow-roll* (1.113) y la ecuación auxiliar (1.111c) para expresar  $\dot{\phi}$ ,

$$P_\zeta(k) = \frac{\kappa^2}{24\pi^2} \left( \frac{V}{\epsilon} \right)_{k \simeq aH}. \quad (2.106)$$

El espectro de potencias de  $\psi$  se obtiene usando la ecuación (2.77), como era de esperarse, estas ecuaciones concuerdan con las de la §2.5.

## 2.7 Origen de las semillas cosmológicas: Hipótesis del colapso

La explicación recién dada para el origen de las perturbaciones cosmológicas depende de una paso “confuso”: no hay una justificación *a priori* para la identificación de las correlaciones de dos puntos cuánticas con el espectro de potencias clásico (ecuación (2.100)). Analizando más detalladamente, nos enfrentamos a un problema conceptualmente más profundo en la explicación estándar: *el análisis estándar empieza en un estado que es homogéneo e isotrópico (el estado de vacío) y termina con inhomogeneidades que están de acuerdo con las observaciones*. Este comportamiento no encuentra su justificación en la mecánica cuántica estándar ya que la dinámica del sistema preserva las simetrías iniciales. Estos problemas ocurren también en la aplicación diaria en experimentos en el laboratorio y son englobados en el *problema de la medición de la mecánica cuántica* [17, 18]. Obviamente estos problemas han sido señalados por algunos miembros de la comunidad cosmológica [115, 135, 153, 155] y se han propuesto algunas soluciones basadas en las planteado de solución del mencionado problema de la medición. La principal propuesta (si tomamos como indicador su popularidad en la literatura científica) es la basada en Decoherencia [70, 103, 105, 106, 108], aunque hay que mencionar que existen otras propuestas con menos adherentes, pero aún significativas como las basadas en *Mundos Múltiples*. Estos intentos de solución comparten un mismo problema:

<sup>29</sup>Esta aproximación implica modos con longitud mayor al horizonte, ya que  $k\eta \simeq \frac{k}{aH} = \frac{k}{\mathcal{H}}$ .

intentan justificar el primer cuestionamiento (igualar correlaciones de dos puntos cuánticas con espectros de potencias clásicos) dejando intacto el segundo (la evolución de mecánica cuántica es unitaria y en el caso inflacionario, esta evolución preserva las simetrías del estado inicial).

Nos referiremos a ambos problemas como el *problema de la transición cuántica a clásica* de las fluctuaciones cuánticas durante la inflación. Este problema en el contexto de Fundamentos de Mecánica Cuántica es conocido como *problema de la medición* o *problema de la macro-objetificación*.

La raíz del problema de la macro-objetificación está en que la mecánica cuántica tiene como rector dinámico a la ecuación de Schrödinger, la cual establece una evolución lineal, determinista y unitaria (a esta evolución se le conoce como proceso **U** en [168]), evolución que preserva la superposición, y si no hay fuentes de asimetrías externas, preserva también las simetrías del sistema. Para recuperar el mundo como lo observamos, se invoca al proceso **R** (*ibid.*) el cual “elige” un eigenvalor de la función de onda  $|\Psi\rangle \rightarrow |\psi_i\rangle$ , así, el proceso **R** es no-lineal (rompe la superposición) y estocástico (genera o explica la regla de probabilidad de Born). El problema de la medición se puede reducir a cual es la física que explica al proceso **R**, o si este proceso es siquiera necesario para una explicación completa de la realidad [166].

En el escenario cosmológico, la solución al problema de la macro-objetificación provista por la escuela de Copenhagen [84, 104], i.e., *colapso de la función de onda provocado por un observador al realizar la medición*, no es aplicable, ni siquiera en principio, ya que hay varios elementos de la interpretación ortodoxa que no están presentes: (a) ¿Quién realiza la medición?, (b) ¿Cuál es el conjunto de observables que se van a medir? ¿Quién decidió que justamente esos observables eran los que se tenían que medir? y (c) ¿Cuándo es realizada la medición? Claramente la interpretación ortodoxa es insostenible, a menos que se defienda la posición de que *la medición que desencadenó la reducción de la función de onda* la realizó el COBE en 1992 y haya una especie de retro-causalidad, que genere las perturbaciones clásicas primordiales que, al evolucionar hacia adelante en el tiempo generarán cúmulos, galaxias, estrellas, planetas y finalmente nosotros <sup>30</sup>.

Con este problema en mente se puede apreciar que la aseveración de que existe una predicción hecha por el modelo inflacionario respecto a las anisotropías y las inhomogeneidades primordiales de la densidad, no puede ser sostenida como satisfactoria mientras el problema de la medición no sea resuelto.

El problema de la medición en este contexto cosmológico muestra en su desnudez las interpretaciones de la mecánica cuántica tradicionales. Los enfoques tradicionales invocan al observador, a la medición, al ambiente o al límite entre el “macro-mundo” (esencialmente clásico) y el “micro-mundo” (completamente cuántico). Estas explicaciones que invocan a algún actor o proceso sin definición clara –o fuera– de la teoría cuántica para darle sentido a el mundo observado se topan con el problema de marcar “dónde” hay que localizar la frontera entre los dos tipos de mundos, ya que la teoría se queda en silencio en este punto. Todas las soluciones de este tipo invocan a un mecanismo parecido a una medición: la consciencia del observador, el ambiente, el aparato macroscópico de medición que perturba al sistema cuántico, etc. que de alguna manera “escapa” a la

<sup>30</sup> Aunque existe una interpretación de la mecánica cuántica con estas características, la interpretación transaccional de Cramer, [39]. Esta idea aplica la idea del teoría del absorbente electromagnético de Wheeler-Feynman a la mecánica cuántica.

descripción mecánico-cuántica. Estas soluciones al problema de la medición se ven confrontadas con la siguiente cuestión: ¿La Mecánica Cuántica describe todos los procesos físicos (i.e. ¿el universo es esencialmente cuántico?)? Si su respuesta es afirmativa, no es posible resolver el problema de la macro-objetificación como demuestran el argumento sencillo de Von Neumann [213] o la versión no idealizada de Bassi y Ghirardi que se puede encontrar en [15]. Ambos argumentos están basados en la linealidad de la evolución dictada por la ecuación de Schrödinger. Si su respuesta es negativa, necesitan extender la física conocida.

John S. Bell escribió [19] que la única manera de resolver el problema de la macro-objetificación es:

*La función de onda, descrita por la ecuación de Schrödinger, o no es todo, o no es correcta.*

En el artículo [170], Perez, Sahlmann y Sudarsky proponen como solución al problema del origen de las perturbaciones cosmológicas, la *hipótesis del auto-colapso* siguiendo ciertas ideas de Roger Penrose sobre el papel de gravedad para resolver el problema de la macro-objetificación [166–169]. Esta hipótesis supone que existe un mecanismo para producir la evolución de tipo **R** y que este mecanismo involucra *nueva física*, i.e. , existe un mecanismo responsable de la transición del estado de vacío homogéneo e isotrópico a un nuevo estado que contiene las fluctuaciones que son responsables de que existan desviaciones de la homogeneidad e isotropía en el universo tipo Friedmann-Lemaître (cf. §1.2.2). A este mecanismo se le conoce como *colapso*. Entonces, podemos resumir los pasos esta propuesta como sigue: (1) el colapso es especificado de una manera puramente fenomenológica (para diferenciarlo de los mecanismos de colapso, a estas descripciones fenomenológicas se les denominará *esquemas de colapso*), (2) el universo será descrito por las ecuaciones de fondo hasta que “la nueva física” dispare el colapso (esta nueva física se especula –siguiendo a Penrose– que sea de origen gravitatorio) y (3) es en ese momento cuando aparecen perturbaciones métricas, debidas al acople originado por las ecuaciones semi-clásicas<sup>31</sup> de Einstein  $G_{ab} = 8\pi G \langle T_{ab} \rangle$ .

Además del problema *de la medición* o *de la transición cuántica-clásica* que se podría clasificar como fundamental, existen otras partes dudosas en la prescripción tradicional, también mencionados en [170] relacionados con las cuestiones estadísticas de la prescripción estándar respecto a valores de expectación e incertidumbres, fluctuaciones y promedios, que son tratados como si no existieran diferencias entre ellos.

### 2.7.1 Formalismo de la hipótesis de colapso

*Ecuaciones clásicas fundamentales.* A continuación procederemos a establecer el formalismo matemático de la hipótesis de colapso. Al igual que en el tratamiento estándar, el punto de partida es la acción un campo escalar acoplado mínimamente a la gravedad,

$$S[\varphi, g_{ab}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi G} R[g_{ab}] - \frac{1}{2} \nabla_a \varphi \nabla_b \varphi g^{ab} - V(\varphi) \right). \quad [2.82]$$

<sup>31</sup>Nótese que estas ecuaciones son válidas salvo en el momento en el que ocurre el colapso.

Recordemos que elegimos la norma Newtoniana Conforme (2.23) para realizar todas nuestras descripciones físicas. Perturbando a segundo orden la acción, llegaremos a las ecuaciones lineales (2.60) y (2.61).

Sustituyendo el valor de  $\psi'$  (2.60b) en (2.60a) y acomodando términos obtenemos una ecuación generalizada de Poisson para  $\nabla^2\psi$

$$\nabla^2\psi - \mu\psi = 4\pi G (\nu\delta\varphi + \varphi'\delta\varphi') \quad (2.107)$$

donde  $\mu \equiv (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')$  y  $\nu \equiv (3\mathcal{H}\varphi' + a^2\partial_\varphi V) = (\mathcal{H}\varphi' - \varphi'')$ . En esta última igualdad se usó la ecuación de movimiento de fondo del campo escalar (1.116d).

La ecuación (2.107) será nuestra ecuación fundamental, ya que ella muestra lo que la hipótesis de colapso considera: las fluctuaciones del campo escalar son “fuente” de las perturbaciones gravitatorias. Durante la época inflacionaria  $\mu \simeq 0$  y  $\nu \simeq 0$ . La dinámica de la perturbación del inflatón está dada por la ecuación (2.61), la cual se puede escribir, luego de sustituir  $\psi'$  usando (2.60b), como

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \nabla^2\delta\varphi + a^2\partial_\varphi^2 V\delta\varphi - 16\pi G (\varphi')^2 - 2\psi\mathcal{H}\varphi' = 0. \quad (2.108)$$

En esta última ecuación los términos proporcionales al potencial  $\psi$  reflejan cómo la métrica responde (*back-reacts*) a las perturbaciones del inflatón. Estos términos están suprimidos por un factor de  $G$  y por lo tanto los despreciaremos. Desde el punto de vista de la hipótesis del colapso, esto no es tan grave, ya que la métrica de fondo no es perturbada hasta que el estado del campo escalar perturbado colapsa; sólo después de este evento  $\psi$  aparecerá y podrá afectar la evolución de las perturbaciones del inflatón (e.g., es netamente un efecto de segundo orden). Así, la ecuación fundamental para la evolución de las perturbaciones del campo escalar es

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \nabla^2\delta\varphi + a^2\partial_\varphi^2 V\delta\varphi = 0. \quad (2.109)$$

*Aproximación de slow-roll.* Durante la época inflacionaria las condiciones de *slow-roll* (1.114) son válidas, entonces en la ecuación (2.107)  $\nu = \mu = 0$  y en la ecuación (2.109)  $a^2\partial_\varphi^2 V = 0$ .

Así, la ecuación de Poisson (2.107) durante el *slow-roll* se escribe como

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\varphi'\delta\varphi', \quad (2.110)$$

y la ecuación de movimiento de la perturbación del inflatón (2.109),

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \nabla^2\delta\varphi = 0. \quad (2.111)$$

Antes de cuantizar, es conveniente definir una nueva variable  $y$  como sigue  $y = a\delta\varphi$ . La ecuación

(2.111) escrita con esta nueva variable, en el espacio de Fourier es

$$y'' - \left( \nabla^2 + \frac{a''}{a} \right) y = 0. \quad (2.112)$$

Obviamente la cuantización  $\hat{y}$  de  $y$ , implica la cuantización  $\widehat{\delta\varphi} = \frac{1}{a}\hat{y}$  de  $\delta\varphi$ .

*Cuantización del campo escalar  $\hat{y}$*  El siguiente paso es cuantizar la parte fluctuante del inflatón. Como dijimos antes es conveniente trabajar en el campo reescalado  $y = a\delta\varphi$ .

Haciendo esta sustitución en la acción del inflatón e ignorando los términos del potencial ya que son despreciables durante *slow-roll*, tenemos <sup>32</sup>

$$\delta S_y^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\eta dx^3 \left[ y'^2 - (\nabla y)^2 + \mathcal{H}^2 y^2 - 2\mathcal{H}y y' \right]. \quad (2.113)$$

El momento conjugado del campo  $y$  es

$$\pi^{(y)}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}^y}{\partial y'} = y' - \mathcal{H}y, \quad (2.114)$$

el hamiltoniano de esta teoría es simplemente la integral espacial de la densidad hamiltoniana,  $\mathcal{H}$ ,  $H \equiv \int d^4x \mathcal{H} = \int d^3x \left[ \pi^{(y)} y' - \mathcal{L} \right]$ . Promovemos ahora a las variable  $y$  y  $\pi^{(y)}$  a los operadores  $\hat{y}$  y  $\hat{\pi}^{(y)}$ . La cuantización canónica consiste en imponer las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{y}(\eta, \mathbf{x}), \hat{y}(\eta, \mathbf{x}')] = [\hat{\pi}^{(y)}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}^{(y)}(\eta, \mathbf{x}')] = 0, \quad [\hat{y}(\eta, \mathbf{x}), \hat{\pi}^{(y)}(\eta, \mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.115)$$

La ecuación de movimiento para  $\hat{y}$  es idéntica a (2.118) cambiando  $y \rightarrow \hat{y}$  y se obtiene de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$i\hat{y} = [\hat{y}, \hat{H}], \quad i\hat{\pi}^{(y)} = [\hat{\pi}^{(y)}, \hat{H}], \quad (2.116)$$

donde  $\hat{H}$  es el hamiltoniano  $H$  escrito en términos de los operadores  $\hat{y}$  y  $\hat{\pi}^{(y)}$ . Nótese que esto es equivalente a imponer estas relaciones a  $\delta\varphi$  y su momento conjugado  $\pi = a^2\delta\varphi$  <sup>33</sup>.

<sup>32</sup>Obsérvese que esta acción contiene un término de frontera. El término de frontera es  $\partial_\eta (\mathcal{H}y^2)$ . Usándolo la acción quedaría

$$\delta S_y^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\eta dx^3 \left[ y'^2 - (\nabla y)^2 \frac{a''}{a} y^2 \right].$$

Esto cambiará algunas definiciones correspondientes al momento conjugado, pero no afectará la física, como se puede comprobar fácilmente. En particular, lo que se gana de simplicidad en la expresión del momento conjugado, se pierde en la simplicidad de  $g_k(\eta)$ .

<sup>33</sup>El lagrangiano durante el *slow-roll* de la variable original  $\delta\varphi$  es  $\mathcal{L} = \frac{a^2}{2} (\delta\varphi^2 - (\nabla\delta\varphi)^2)$ , usando  $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta\varphi'}$  se obtiene  $\pi = a^2\delta\varphi$ .

Descomponemos ahora a los campos  $y$  y  $\pi^{(y)}$  en ondas planas<sup>34</sup>

$$\hat{y}(\eta, x) = \frac{1}{L^3} \sum_k \left\{ \hat{a}_k y_k(\eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{a}_k^\dagger y_k(\eta)^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right\}, \quad (2.117)$$

donde  $y_k(\eta)$  es solución de la ecuación

$$y_k'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) y_k = 0. \quad (2.118)$$

y  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son los operadores de creación y aniquilación del campo. Por su parte, el momento conjugado  $\hat{\pi}(\eta, x)$

$$\hat{\pi}(\eta, x) = \frac{1}{L^3} \sum_k \left\{ \hat{a}_k g_k(\eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{a}_k^\dagger g_k(\eta)^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right\}, \quad (2.119)$$

$g_k(\eta)$  en esta ecuación está relacionado con  $y_k(\eta)$  mediante

$$g_k = y_k' - \mathcal{H} y_k, \quad (2.120)$$

En ambas expansiones  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación respectivamente. Estos cumplen con las relaciones de conmutación estándar

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \hbar L^3 \delta_{kk'}. \quad (2.121)$$

Las relaciones de conmutación (2.115) imponen una restricción a las soluciones  $y_k, g_k$ :<sup>35</sup>

$$y_k g_k^* - y_k^* g_k = i \quad (2.122)$$

Para completar el proceso de cuantización necesitamos las soluciones de la ecuación (2.118). Durante la etapa inflacionaria  $\left( \frac{a''}{a} = \frac{2}{\eta^2} \right)$ , quedando

$$y_k'' + \left( k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) y_k = 0, \quad (2.123)$$

escrita de esta manera, se puede encontrar la solución exacta

$$y_k(\eta) = \alpha e^{-ik\eta} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right) + \beta e^{ik\eta} \left( 1 + \frac{i}{k\eta} \right). \quad (2.124)$$

<sup>34</sup>Aunque es posible hacer todas las manipulaciones matemáticas usando formulaciones integrales o de suma, es usualmente más sencillo hacerlo con la suma. La simplicidad viene del hecho de que ya no aparecen deltas de Dirac en el espacio  $-k$ . Por ejemplo, si tenemos  $f_k = \sum f_k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ , la manera obvia de extraer  $f_k$  es vía  $f_k = \frac{1}{L} \int f e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx$ , esto debido a que las condiciones de frontera armónicas hacen que todos los términos oscilatorios de la suma integran cero, dejando únicamente la integral de 0 a  $L$  de  $f_k$ .

<sup>35</sup>Las unidades de los modos son:

$$\begin{aligned} [\hat{y}(\eta, x)] &= \left( \frac{M}{L} \right)^{1/2}, & [\hat{\pi}(\eta, x)] &= \frac{M^{1/2}}{L^{3/2}}, & [\hat{a}_k] &= [\hat{a}_k] = M^{1/2} L^2, \\ [y_k(\eta)] &= L^{1/2}, & [g_k(\eta)] &= L^{-1/2} \end{aligned}$$

La elección de una función específica  $y_k(\eta)$  corresponde a una prescripción particular del vacío físico  $|0\rangle$  definido por

$$a_k|0\rangle = 0, \quad (2.125)$$

una elección diferente de  $y_k(\eta)$  está asociada a una descomposición diferente de modos de creación/anihilación y por lo tanto a un vacío diferente. Obsérvese que este estado de vacío es *homogéneo e isotrópico* en todas las escalas, esto se puede ver aplicando los operadores de momento  $\hat{P}$  y momento angular  $\hat{J}$  a  $|0\rangle$ .

Notemos que la longitud de onda asociada a un modo  $k$  cualquiera, puede encontrarse siempre dentro del radio de Hubble si se retrocede lo suficiente en el tiempo (i.e.,  $k > \mathcal{H}$ , o  $k^{-1} < \mathcal{H}^{-1}$ ), ya que el radio comóvil de Hubble,  $\mathcal{H}^{-1} = (aH)^{-1}$ , disminuye durante la etapa inflacionaria. Escogiendo un  $|\eta|$  lo suficientemente grande se obtiene  $k|\eta| \gg 1$ . Además para una longitud de onda más pequeña que el radio de Hubble, se pueden despreciar los efectos de curvatura y el modo se comportara como si estuviera en un espacio-tiempo de Minkowski<sup>36</sup>.

La descripción física más natural es la de elegir la solución que corresponda con la solución de frecuencias positivas del vacío de Minkowski en el límite  $k|\eta| \gg 1$ .

$$y_k^{Minkowski} \sim e^{-ik\eta}, \quad (2.126)$$

entonces  $\beta = 0$  en (2.124). Usando la restricción (2.122) se obtiene  $\alpha = \sqrt{\hbar/2k}$ . Por lo que se elige el estado de vacío que está relacionado a la solución

$$y_k(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) e^{-ik\eta}. \quad (2.127)$$

Como se mencionó anteriormente este estado de vacío es conocido en la literatura como vacío de *Bunch-Davies*. Con esta elección de vacío  $g_k(\eta)$  es

$$g_k(\eta) = -i\sqrt{\frac{k}{2}} e^{-ik\eta}. \quad (2.128)$$

Al definir los campos cuánticos y su vacío, la cuantización es completada. Ahora debemos de especificar mediante la *hipótesis del colapso* como este vacío se convierte en un estado no-homogéneo y anisotrópico.

### 2.7.2 Hipótesis de Colapso

El estado de vacío queda definido por la condición  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$  para todo valor de  $k$ . La *hipótesis del colapso* o del *auto-colapso* opera de una manera análoga a lo que sería un proceso **R**.

<sup>36</sup>Esto se puede ver en la ecuación (2.118), ya que la masa efectiva es despreciable cuando  $k|\eta| \gg 1$ .



En el artículo de Perez, Sahlmann y Sudarsky se hacen las siguientes suposiciones sobre el colapso: (a) los modos son “independientes”<sup>37</sup> y además (b) se requiere que el estado inicial del campo no esté enredado (*entangled*) respecto a esta descomposición, i.e. , el estado de vacío se puede escribir como el producto directo de estados para los operadores de modo. De esta manera, el colapso actúa a nivel del modo  $k$  y debido a las suposiciones tiene sentido hablar de “un colapso individual por modo”, por lo que, *hipótesis del colapso* se debe de leer como *hipótesis del colapso por modo*.

Bajo estas suposiciones escribiremos el campo mediante los “operadores de modo”<sup>38</sup>

$$\hat{y}(\eta, x) = \frac{1}{L^3} \sum_k \hat{y}_k(\eta) e^{ikx} \quad (2.129a)$$

$$\hat{\pi}(\eta, x) = \frac{1}{L^3} \sum_k \hat{\pi}_k(\eta) e^{ikx} \quad (2.129b)$$

con

$$\hat{y}_k = y_k(\eta) \hat{a}_k + y_k^*(\eta) \hat{a}_{-k}^\dagger \quad (2.130a)$$

$$\hat{\pi}_k = g_k(\eta) \hat{a}_k + g_k^*(\eta) \hat{a}_{-k}^\dagger \quad (2.130b)$$

usando estas definiciones y las relaciones de conmutación (2.115) podemos deducir las de  $\hat{y}_k$  y  $\hat{\pi}_k$ :

$$[\hat{y}_k, \hat{\pi}_{k'}] = i\hbar L^3 \delta_{kk'}. \quad (2.131)$$

El siguiente paso, debido a que el colapso actúa como una especie de “medición”, debemos de garantizar la hermiticidad de los operadores usados. Obsérvese que los “operadores de modo”,  $\hat{y}_k$  y  $\hat{\pi}_k^{(y)}$ , se pueden descomponer en partes real e imaginaria:  $\hat{y}^{(R,I)}$  y  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$ ,

$$\hat{y}_k(\eta) = \hat{y}_k^R(\eta) + i\hat{y}_k^I(\eta) \quad (2.132a)$$

$$\hat{\pi}_k(\eta) = \hat{\pi}_k^R(\eta) + i\hat{\pi}_k^I(\eta) \quad (2.132b)$$

donde los nuevos operadores se definen mediante

$$\hat{y}_k^R(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y_k(\eta) \hat{a}_k^R + y_k^* \hat{a}_k^{R\dagger} \right), \quad \hat{y}_k^I(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y_k(\eta) \hat{a}_k^I + y_k^* \hat{a}_k^{I\dagger} \right). \quad (2.133a)$$

$$\hat{\pi}_k^R(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g_k(\eta) \hat{a}_k^R + g_k^* \hat{a}_k^{R\dagger} \right), \quad \hat{\pi}_k^I(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( g_k(\eta) \hat{a}_k^I + g_k^* \hat{a}_k^{I\dagger} \right). \quad (2.133b)$$

Nótese que estos operadores son hermíticos. Los operadores de creación y aniquilación son

$$\hat{a}_k^R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}), \quad \hat{a}_k^I = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}) \quad (2.134)$$

<sup>37</sup>El que los modos seas independientes significa que es posible (a) la descomposición del operador de campo es una suma de “operadores de modo” que conmutan, (b) la descomposición ortogonal del espacio de Hilbert de una partícula y (c) la descomposición de productos tensoriales directos en el espacio de Fock.

<sup>38</sup>Estos nuevos operadores,  $\hat{y}_k$  y  $\hat{\pi}_k$  tienen unidades de  $[\hat{y}_k] = M^{1/2}L^{5/2}$  y  $[\hat{\pi}_k] = M^{1/2}L^{3/2}$ .

Las relaciones de conmutación entre estos operadores de aniquilación/creación son no estándares:

$$[\hat{a}_k^R, \hat{a}_{k'}^R] = \hbar L^3 (\delta_{k,k'} + \delta_{k,-k'}), \quad [\hat{a}_k^I, \hat{a}_{k'}^I] = \hbar L^3 (\delta_{k,k'} - \delta_{k,-k'}), \quad (2.135)$$

siendo las demás relaciones de conmutación cero. Esto indica que los operadores que corresponden a  $k, -k$  son idénticos en el caso real e idénticos salvo un signo en el caso imaginario. Será útil listar aquí los conmutadores de  $\hat{y}_k^{R,I}$  y  $\hat{\pi}_k^{R,I}$

$$[\hat{y}_k^R, \hat{\pi}_{k'}^R] = \frac{1}{2} i L^3 (\delta_{k,k'} + \delta_{k,-k'}), \quad [\hat{y}_k^I, \hat{\pi}_{k'}^I] = \frac{1}{2} i L^3 (\delta_{k,k'} - \delta_{k,-k'}) \quad (2.136)$$

los cuales obviamente no son estándar.

Introducimos ahora las siguientes definiciones, relacionadas con los primeros momentos estadísticos, para un estado arbitrario del campo  $|\Xi\rangle$ <sup>39</sup>

$$d_k^{(R,I)} \equiv \langle \Xi | \hat{a}_k^{(R,I)\dagger} | \Xi \rangle \equiv \left| d_k^{(R,I)} \right| e^{i\alpha_k}, \quad (2.137a)$$

$$c_k^{(R,I)} \equiv \langle \Xi | (\hat{a}_k^{(R,I)\dagger})^2 | \Xi \rangle, \quad (2.137b)$$

$$e_k^{(R,I)} \equiv \langle \Xi | \hat{a}_k^{(R,I)\dagger} \hat{a}_k^{(R,I)} | \Xi \rangle, \quad (2.137c)$$

entonces, los valores de expectación del campo  $\hat{y}^{(R,I)}$  se calcularían usando estas cantidades como

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}_k^{R,I} \rangle_{\Xi} &= \langle \Xi | \hat{y}_k | \Xi \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ y_k(\eta) \langle \Xi | \hat{a}_k^{R,I} | \Xi \rangle + y_k^* \langle \Xi | \hat{a}_k^{R,I\dagger} | \Xi \rangle \right\} \\ &= \sqrt{2} \Re \left( y_k(\eta) d_k^{R,I} \right) \end{aligned} \quad (2.138)$$

y haciendo lo mismo para el momento conjugado  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$  obtenemos, que los valores de expectación para un estado arbitrario  $|\Xi\rangle$  son

$$\langle \hat{y}_k^{R,I} \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \Re \left( y_k(\eta) d_k^{R,I} \right) \quad (2.139a)$$

$$\langle \hat{\pi}_k^{R,I} \rangle_{\Xi} = \sqrt{2} \Re \left( g_k(\eta) d_k^{R,I} \right) \quad (2.139b)$$

La dispersión,  $\Delta \hat{x}^2 \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle_{\Xi} - \langle \hat{x} \rangle_{\Xi}^2$ , de los campos para un estado cualquiera  $|\Xi\rangle$ ,

$$(\Delta y_k^{R,I})_{\Xi}^2 = \Re \left( y_k^2 c_k^{R,I} \right) + \frac{1}{2} |y_k|^2 (\hbar L^3 + 2e_k^{R,I}) - 2 \Re (y_k^{R,I} d_k^{R,I})^2 \quad (2.140a)$$

$$(\Delta \pi_k^{R,I})_{\Xi}^2 = \Re \left( g_k^2 c_k^{R,I} \right) + \frac{1}{2} |g_k|^2 (\hbar L^3 + 2e_k^{R,I}) - 2 \Re (g_k^{R,I} d_k^{R,I})^2 \quad (2.140b)$$

Estas expresiones demuestran que las cantidades (2.137) especifican las principales cantidades de

<sup>39</sup>Es importante notar que dado que estamos en la representación o imagen de Heisenberg, toda la dependencia temporal de los "operadores de modo" está en  $y_k(\eta)$  y  $g_k(\eta)$  y las cantidades  $d_k, c_k$  y  $e_k$  son independientes del tiempo.

interés que caracterizan al estado del campo. Obviamente para el estado vacío  $|0\rangle$  tenemos que el valor de expectación de los campos es

$$\langle \hat{y}_k^{R,I} \rangle_0 = \langle \hat{\pi}_k^{R,I} \rangle_0 = 0, \quad (2.141)$$

y la dispersión,

$$(\Delta y_k^{R,I})_0^2 = \frac{1}{2} |y_k|^2 \hbar L^3, \quad (\Delta \pi_k^{R,I})^2 = \frac{1}{2} |g_k|^2 \hbar L^3. \quad (2.142)$$

Así, podemos describir la operación del *auto-colapso* como sigue: originalmente –i.e. antes del colapso – *no hay perturbaciones en la métrica*. Esto se puede observar de la fórmula (2.107), que repetimos aquí por comodidad del lector

$$\nabla^2 \psi - \mu \psi = 4\pi G (\nu \delta \varphi + \varphi' \delta \varphi') = s \Gamma, \quad [2.107]$$

donde hemos introducido los símbolos  $s \equiv 4\pi G \varphi'$  y  $\Gamma \equiv \delta \varphi' + \nu$ . Durante el periodo inflacionario  $\mu = 0$  y  $\Gamma = \delta \varphi' = a^{-1} \hat{\pi}^{(y)}$ . Ahora, procederemos a evaluar la perturbación en la métrica usando una descripción semi-clásica de la gravedad interactuando con campos cuánticos, justo como dictan las EFE semi-clásicas:  $G_{ab} = 8\pi G \langle T_{ab} \rangle$ , de esta manera, la ecuación (2.107) es promovida a

$$\nabla^2 \psi - \mu \psi = s \langle \hat{\Gamma} \rangle_{\Xi}. \quad (2.143)$$

Expresando esta ecuación en el espacio de Fourier y tomando en cuenta la aproximación de *slow-roll*, tenemos que para un estado arbitrario,  $|\Xi\rangle$ ,

$$\psi_k = \frac{s}{k^2} \langle \delta \varphi'_k \rangle_{\Xi} \quad (2.144)$$

Así, usando las ecuaciones (2.141) se puede comprobar la afirmación de que antes de que ocurra el colapso *no hay perturbaciones en la métrica*

$$\psi_k = 0. \quad (2.145)$$

Siguiendo con la descripción de la dinámica del colapso, a un cierto tiempo  $\eta_k^c$  la parte del estado que corresponde a el modo  $k$  “brinca” a un nuevo estado  $|\Upsilon\rangle$  que no es homogéneo e isotrópico, lo cual debido a la ecuación (2.144) es

$$\psi_k = \frac{s}{k^2} \langle \delta \varphi'_k \rangle_{\Upsilon}. \quad (2.146)$$

Lo que resta es especificar el colapso de los modos. ¿Cómo ocurre el colapso? ¿Cuáles son sus características? Para responder estas preguntas, es necesario especificar, o una teoría completa como las Modelos de reducción dinámicos (DRM) entre las cuales se incluye el Modelo de colapso de la función de onda de Ghirardi-Rimini-Weber (GRW) [80, 81] o los Modelos de localización continua (CSL) [160] (cf. para una revisión completa se puede consultar [14, 16]), o, como en el

caso de [45, 170] un modelo fenomenológico. A las teorías completas las llamaremos en este trabajo de tesis *mecanismos de colapso*, a los segundos (los modelos fenomenológicos) los denominaremos *esquemas de colapso*.

Perez, Sahlmann y Sudarsky estudian dos esquemas de colapso en [170], llamados *esquema colapso independiente* y *esquema de colapso newtoniano*, ambos se describen a continuación.

*Esquema de colapso independiente.* En este esquema de colapso, tanto, el valor de expectación del campo  $\hat{y}$  como el valor de expectación del momento conjugado  $\hat{\pi}^{(y)}$  en el estado post-colapso  $|Y\rangle$  al tiempo  $\eta_k^c$  están distribuidos aleatoriamente en los respectivos rangos de las incertidumbres del estado de vacío  $|0\rangle$  y no se encuentran correlacionados estadísticamente. Esto se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 |0\rangle \rightarrow |Y\rangle : \\
 \langle \hat{y}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_Y &= x_1^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \hat{y}^{(R,I)})_0^2}, \\
 \langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_Y &= x_2^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \hat{\pi}^{(y)(R,I)})_0^2}.
 \end{aligned} \tag{2.147}$$

donde  $x_{1,2}^{(R,I)}$  son variables aleatorias gaussianas centradas en cero y con dispersión 1. El hecho de que el colapso no correlacione los valores de expectación post-colapso del campo y su momento conjugado se encuentra en que los valores de las variables  $x_1^{(R,I)}$  y  $x_2^{(R,I)}$  son eventos independientes.

*Esquema de colapso newtoniano.* Este esquema de colapso está inspirado en que, a primer orden y durante el *slow-roll* de la época inflacionaria, la ecuación (2.143) sólo depende de  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$ , i.e., únicamente el momento canónico conjugado del campo inflatónico aparece como fuente de la perturbación de la métrica.

$$|0\rangle \rightarrow |Y\rangle : \langle \hat{y}^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_Y = 0, \quad \langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_Y = x_2^{(R,I)} \sqrt{((\Delta \hat{\pi}^{(y)(R,I)})_0^2)^2}. \tag{2.148}$$

*Valores de expectación en el estado post-colapso de las variables originales* Ahora procederemos a calcular el valor de expectación del momento conjugado  $\hat{\pi}$  del campo original  $\widehat{\delta\varphi}$ , para ello será conveniente expresar a  $y_k^{R,I}$  y  $g_k^{R,I}$  en forma polar compleja, entonces,  $y_k^{R,I} = |y_k(\eta)| \exp(i\beta_k^{R,I})$  y  $g_k^{R,I} = |g_k(\eta)| \exp(i\gamma_k^{R,I})$ , donde

$$|y_k(\eta)| = \sqrt{\frac{1}{2k}} \left( \frac{\sqrt{1+k^2\eta^2}}{k\eta} \right), \quad \beta_k = - \left[ k\eta + \arctg \left( \frac{1}{k\eta} \right) \right], \tag{2.149a}$$

$$|g_k(\eta)| = \sqrt{\frac{k}{2}}, \quad \gamma_k = -\left(k\eta + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.149b)$$

Así, podemos expresar las ecuaciones (2.139) de una manera más útil,

$$\langle \hat{y}^{(R,I)} \rangle = \sqrt{2} \Re(y_k d_k) = |y_k| |d_k^{(R,I)}| \cos\left(\alpha_k^{(R,I)} + \beta_k\right), \quad (2.150a)$$

$$\langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)} \rangle = \sqrt{2} \Re(g_k d_k) = |g_k| |d_k^{(R,I)}| \cos\left(\alpha_k^{(R,I)} + \gamma_k\right). \quad (2.150b)$$

Recordemos que en la ecuación (2.143) aparece  $\langle \delta\varphi'_k \rangle$ , el cual en función de los campos  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$ , es

$$\langle \widehat{\delta\varphi'_k} \rangle_Y = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[ \langle \hat{\pi}_k^{(y)R}(\eta) \rangle_Y + i \langle \hat{\pi}_k^{(y)I}(\eta) \rangle_Y \right], \quad (2.151)$$

tomando el valor de expectación en el estado post-colapso  $|Y\rangle$

$$\langle \widehat{\delta\varphi'_k} \rangle_Y = \frac{|g_k|}{a} \left[ |d_k^R| \cos\left(\alpha_k^R + \gamma_k^c\right) + i |d_k^I| \cos\left(\alpha_k^I + \gamma_k^c\right) \right], \quad (2.152)$$

sustituyendo el valor de  $\gamma_k^c$

$$\langle \widehat{\delta\varphi'_k} \rangle_Y = \frac{|g_k|}{a} \left[ |d_k^R| \cos\left(\alpha_k^R - k\eta_c - \frac{\pi}{2}\right) + i |d_k^I| \cos\left(\alpha_k^I - k\eta_c - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (2.153)$$

Definiendo la variable que mide el tiempo transcurrido desde el colapso,  $\Delta_k = k(\eta - \eta_k^c)$ .

$$\langle \widehat{\delta\varphi'_k} \rangle_Y = \frac{|g_k|}{a} \left[ |d_k^R| \cos\left(\alpha_k^R + \gamma_k + \Delta_k\right) + i |d_k^I| \cos\left(\alpha_k^I + \gamma_k + \Delta_k\right) \right], \quad (2.154)$$

y usando una vez más las fórmulas trigonométricas de ángulos múltiples

$$\langle \delta\varphi'_k \rangle_Y = \frac{|g_k|}{a} \left\{ |d_k^R| \left[ \cos\left(\alpha_k^R + \gamma_k\right) \cos \Delta_k - \text{sen}\left(\alpha_k^R + \gamma_k\right) \text{sen} \Delta_k \right] + i |d_k^I| \left[ \cos\left(\alpha_k^I + \gamma_k\right) \cos \Delta_k - \text{sen}\left(\alpha_k^I + \gamma_k\right) \text{sen} \Delta_k \right] \right\} \quad (2.155)$$

En esta última ecuación sólo faltan por especificar las expresiones de  $d_k^{(R,I)}$  y  $\alpha^{(R,I)}$ , las cuales son calculadas a partir de la especificación del esquema de colapso. En el artículo [170] se realiza un largo (y tortuoso) proceso algebraico para poder obtener esta expresión para cada esquema de colapso que no repetiremos aquí. En el capítulo 3 se presentan las ecuaciones generales (3.7) y (3.6) para describir al valor de expectación de  $\hat{y}^{(R,I)}$  y  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$  de manera independiente del esquema y de la época cosmológica. Además, se presenta en §3.4 un procedimiento algebraico parecido al llevado a cabo en [170] para obtener los valores de expectación.

### 2.7.3 Comparación con las observaciones

Una vez elegido el esquema de colapso, se procede a evaluar la perturbación de la métrica usando las ecuaciones semi-clásicas, que en este caso cosmológico a orden lineal en las perturbaciones se reducen a (2.143).

En esa ecuación  $\langle \widehat{\delta\varphi'_k} \rangle_Y$  es el valor de expectación del momento conjugado  $\widehat{\delta\varphi'_k} = \hat{\pi}_k^{(y)}/a(\eta)$  en el estado  $|Y\rangle$  y caracteriza la parte cuántica del campo inflatónico. Es importante enfatizar que *antes* de que el colapso ocurra *no hay* perturbaciones de la métrica (cf. ver discusión arriba de la ecuación (2.145)) i.e. el lado derecho de la ecuación es cero, entonces, sólo *después* de que el colapso ocurre las perturbaciones gravitacionales, representadas por  $\psi$  aparecen. El colapso de cada modo representa el origen de la inhomogeneidad y la anisotropía a la escala representada por el modo. Otro punto que es importante recalcar, es que a todo tiempo, *el universo será definido por un sólo estado*  $|Y\rangle$ , *y no por un ensamble de estados*. Los aspectos estadísticos, entonces, surgirán debido a que no medimos directamente y por separado cada uno de los modos específicos representados por el vector de onda  $\vec{k}$ , sino por la contribución de todos los modos en la descomposición armónica esférica de las fluctuaciones de la temperatura en la esfera celeste.

Ahora debemos de comprobar la hipótesis del colapso con las observaciones. Las cantidades observadas (por ejemplo WMAP) son las anisotropías del CMB,  $\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \Delta T/T(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_l \sum_m \alpha_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$ , como vimos en §2.2.2, el espectro de potencias del CMB está relacionado con el espectro de potencias de  $\psi$  mediante (2.48). Entonces, debemos considerar la expresión para el potencial gravitatorio  $\psi$  dado por la ecuación (2.146) en la LSS. En esta subsección derivaremos de nuevo esa fórmula. El punto de partida es la ecuación (2.7)

$$a_{lm} = \frac{4\pi i^l}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{\psi(\mathbf{k})}{3} j_l(kR_D) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (2.156)$$

en la cual hemos sustituido la relación de Sachs-Wolfe (2.16),  $\Theta = \frac{1}{3}\psi(\eta, \mathbf{x})$  y  $\psi(\mathbf{k})$  es el modo  $k$  de la expansión de  $\psi(\eta, \mathbf{x})$ . Cada uno de los modos  $\psi(\mathbf{k})$  está relacionado con la perturbación del inflatón mediante (2.146),

$$\psi(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k \frac{s\mathcal{T}(k)}{k^2} \langle \widehat{\delta\varphi'_k} \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.157)$$

donde hemos introducido el factor  $\mathcal{T}(k)$  para representar los efectos de los diversos mecanismos físicos presentes entre el *reheating* y el desacople. Estos  $\mathcal{T}(k)$  son conocidos como las *funciones de transferencia*. Recuerde que la relación entre la diferencial relativa de la temperatura  $\Theta(\hat{\mathbf{x}})$  y la perturbación del potencial gravitatorio dada por el efecto Sachs-Wolfe (2.16) está evaluada en la emisión del fotón, esto es en la LSS, de ahí que  $\mathbf{x} = R_D \hat{\mathbf{x}}$ , siendo  $R_D$  la magnitud de la distancia entre el observador (e.g. WMAP) y la LSS. Así, la ecuación (2.156) es

$$a_{lm} = \frac{4\pi s i^l}{3(2\pi)^{3/2}} \int d^3k j_l(kR_d) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) \mathcal{T}(k) \frac{\langle \widehat{\delta\varphi'_k} \rangle}{k^2}. \quad (2.158)$$

Estamos interesados en el valor medio del cuadrado de esta cantidad. Los aspectos estadísticos

que permiten darle sentido a la afirmación emergerán de la ecuación (2.157). Esta ecuación indica que la cantidad de interés es el resultado de un infinito número de osciladores armónicos cada uno contribuyendo con un número complejo a la suma, lo que lleva, en efecto a una caminata aleatoria bidimensional cuyo desplazamiento total medio corresponde a la cantidad observacional. Como primer paso tomaremos el cuadrado de (2.158)

$$a_{lm}a_{l'm'}^* = \frac{(4\pi)^2 s^2 i^{l+l'}}{9(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \frac{\mathcal{T}(k)}{k^2} \frac{\mathcal{T}(k')}{k'^2} \langle \delta\hat{\varphi}'_k \rangle \langle \delta\hat{\varphi}'_{k'} \rangle^* j_l(kR_d) j_l(k'R_d) Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{k}'), \quad (2.159)$$

Para obtener el valor “más probable”<sup>40</sup> nos auxiliaremos de un ensamble *imaginario* de universos e identificaremos el valor más probable con el valor medio del ensamble.

El valor medio del producto  $\langle \delta\hat{\varphi}_k \rangle \langle \delta\hat{\varphi}_{k'}^* \rangle$ , evaluado en los estados post-colapso tiene una forma  $\overline{\langle \delta\hat{\varphi}_k \rangle \langle \delta\hat{\varphi}_{k'}^* \rangle} = \frac{\hbar L^3 k}{4a^2} C(k) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ , donde  $C(k)$  es una función adimensional de  $k$  el cual codifica los aspectos físicos del esquema del colapso. Entonces, la expresión para el valor “más probable” (ML) de la cantidad de interés es:

$$|a_{lm}|_{ML}^2 = \frac{1}{9} \frac{s^2 \hbar}{2\pi a^2} \int \frac{dk}{k} C(k) \mathcal{T}(k)^2 j_l^2(|\vec{k}|R_D), \quad (2.160)$$

expresión en la cual hemos usado las propiedades de ortogonalidad de los armónicos esféricos. La ecuación (2.160) se puede escribir de una manera más sencilla de integrar si hacemos el cambio de variable  $x = kR_d$ :

$$|a_{lm}|_{ML}^2 = \frac{s^2 \hbar}{2\pi a^2} \int \frac{C(x/R_D)}{x} \mathcal{T}(x/R_D)^2 j_l^2(x) dx. \quad (2.161)$$

Esta es la expresión en la cual las predicciones del esquema de colapso se pueden comparar con las observaciones. Obsérvese en esta última ecuación que la forma estándar del espectro i.e. , un espectro plano o de Harrison-Zel'dovich, corresponde a reemplazar la función  $C(k)$  por una constante. Esto impondrá condiciones a los diversos esquemas de colapso.

*Esquemas de colapso y observaciones* Como se mencionó arriba, toda la física de los esquemas de colapso está codificada en la función  $C(k)$ , la cual es la parte adimensional de  $\overline{\langle \delta\hat{\varphi}_k \rangle \langle \delta\hat{\varphi}_{k'}^* \rangle}$ . Las funciones  $C(k)$  que se obtienen de los esquemas de colapso son para el esquema independiente (2.147) ,

$$C_1(k) = 1 + \frac{2}{z_k} \sin^2 \Delta_k + \frac{1}{z_k} \sin(2\Delta_k), \quad (2.162)$$

y del esquema de colapso newtoniano (2.148),

<sup>40</sup>Most likely en inglés

$$C_2(k) = 1 + \text{sen}^2 \Delta_k \left( 1 - \frac{1}{z_k^2} \right) - \frac{1}{z_k} \text{sen}(2\Delta_k). \quad (2.163)$$

Donde  $z_k \equiv k\eta_k^c$  y  $\Delta_k \equiv k(\eta - \eta_k^c)$ . De estas expresiones se puede observar que para recobrar el caso  $C = 1$  es necesario que los tiempos de colapso vayan como  $\eta_k^c \propto k^{-1}$ . Esta es una importante restricción sobre cómo debe de ser el mecanismo de colapso.

En lo que resta de este trabajo de tesis se propondrá (capítulo 3) un esquema adicional de colapso basado en el funcional de Wigner y desarrollaremos estudios para ver la robustez de los esquemas de colapso ante desviaciones de la restricción  $\eta_k^c \propto k^{-1}$ . Además estudiaremos los efectos físicos de múltiples colapsos y colapsos tardíos.



### CAPÍTULO 3

#### ESTUDIO DETALLADO DE LOS ESQUEMAS DE COLAPSO.

The abrupt change by measurement . . . is  
the most interesting point of the theory

---

*Erwin Schrödinger*

Después del análisis y crítica de la propuesta inflacionaria sobre el origen de las fluctuaciones cosmológicas, en este capítulo analizaremos un nuevo *esquema* de colapso inspirado en las propiedades del funcional de Wigner, haciendo luego un análisis comparativo de los tres esquemas de colapso presentados hasta el momento. Se presentará el análisis para el caso de varios colapsos y el estudio de las implicaciones de un colapso tardío. Al final se mostrarán algunas predicciones o características que distinguen a la hipótesis del colapso sobre la explicación estándar inflacionaria.

#### 3.1 Ecuaciones generales

A pesar de que en el capítulo Crítica al origen de la estructura propuesta por la Inflación seguimos el procedimiento de [170] para calcular el  $C(k)$  de los dos primeros esquemas de colapso, aquí desarrollaremos las fórmulas generales, independientes del esquema de colapso y de la época en la que el colapso ocurra.

Repetimos aquí las relaciones de los valores de expectación del campo  $\hat{y}_k \equiv a(\eta)\delta\hat{\phi}$  y de su momento conjugado  $\hat{\pi}_k^{(y)}$ , así como de sus valores de dispersión en un estado arbitrario. Primero recordamos la definición de las siguientes cantidades asociadas a un estado dado  $|\Omega\rangle$ ;

$$d_k^{(R,I)} \equiv \langle \Omega | \hat{a}_k^{(R,I)\dagger} | \Omega \rangle \equiv \left| d_k^{(R,I)} \right| e^{i\alpha_k}, \quad [2.137a]$$

$$c_k^{(R,I)} \equiv \langle \Omega | (\hat{a}_k^{(R,I)\dagger})^2 | \Omega \rangle, \quad [2.137b]$$

$$e_k^{(R,I)} \equiv \langle \Omega | \hat{a}_k^{(R,I)\dagger} \hat{a}_k^{(R,I)} | \Omega \rangle, \quad [2.137c]$$

de esta manera los valores de expectación están dados por,

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \rangle = \sqrt{2} \Re \left( y_k d_k^{(R,I)} \right), \quad \langle \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} \rangle = \sqrt{2} \Re \left( g_k d_k^{(R,I)} \right), \quad [2.150]$$

y sus dispersiones

$$\left(\Delta\hat{y}_k^{(R,I)}\right)_\Omega^2 = \Re\left(y_k^2 c_k^{(R,I)}\right) + \frac{1}{2}|y_k|^2\left(\hbar L^3 + 2e_k^{(R,I)}\right) - 2\Re\left(y_k d_k^{(R,I)}\right)^2, \quad [2.140a]$$

$$\left(\Delta\hat{\pi}_k^{(R,I)}\right)_\Omega^2 = \Re\left(g_k^2 c_k^{(R,I)}\right) + \frac{1}{2}|g_k|^2\left(\hbar L^3 + 2e_k^{(R,I)}\right) - 2\Re\left(g_k d_k^{(R,I)}\right)^2. \quad [2.140b]$$

Recordemos también que el estado de vacío  $|0\rangle$  está caracterizado por que sus valores de expectativa son cero y sus incertidumbres son  $\left(\Delta\hat{y}_k^{(R,I)}\right)^2 = 1/2|y_k|^2(\hbar L^3)$  y  $\left(\Delta\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}\right)^2 = 1/2|g_k|^2(\hbar L^3)$ .

Por último, debemos expresar en forma polar compleja a las variables del campo cuántico,  $y_k^{R,I} = |y_k(\eta)| \exp(i\beta_k^{R,I})$  y  $g_k^{R,I} = |g_k(\eta)| \exp(i\gamma_k^{R,I})$ .

Para obtener las ecuaciones generales que describen la evolución de los valores de expectativa luego de un colapso, procedemos como sigue. Usando las ecuaciones (2.150a, 2.150b) pero evaluadas en el tiempo de colapso  $\eta_c$  tenemos

$$\left|d_k^{(R,I)}\right| = \frac{\langle\hat{\pi}_c^{(y)(R,I)}\rangle}{\sqrt{2}|g_c|\cos(\gamma_c + \alpha)} = \frac{\langle\hat{y}_c^{(R,I)}\rangle}{\sqrt{2}|y_c|\cos(\beta_c + \alpha)}, \quad (3.1)$$

donde  $g_c \equiv g(\eta_c)$ ,  $y_c \equiv y(\eta_c)$  y los ángulos están evaluados en el tiempo de colapso,  $\gamma_c \equiv \gamma(\eta_c)$ ,  $\beta_c \equiv \beta(\eta_c)$  entonces, sustituyendo en (2.150) obtenemos,

$$\langle\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}\rangle(\eta) = G \langle\hat{\pi}_{k,c}^{(y)(R,I)}\rangle \frac{\cos(\gamma(\eta) + \alpha)}{\cos(\gamma_c + \alpha)}. \quad (3.2)$$

con  $G$  como la razón entre las magnitudes de  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$ ,  $G \equiv \frac{|g(\eta)|}{|g_c|}$ . Haciendo lo mismo para  $\langle\hat{y}_k^{(R,I)}\rangle$ , tenemos

$$\langle\hat{y}_k^{(R,I)}\rangle(\eta) = Y \langle\hat{y}_{k,c}^{(R,I)}\rangle \frac{\cos(\beta(\eta) + \alpha)}{\cos(\beta_c + \alpha)}, \quad (3.3)$$

donde,  $Y \equiv \frac{|y(\eta)|}{|y_c|}$ . Usando (3.1) y despejando el ángulo  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\langle\pi_c\rangle |y_c| \cos \beta_c - \langle y_c \rangle |g_c| \cos \gamma_c}{\langle\pi_c\rangle |y_c| \operatorname{sen} \beta_c - \langle y_c \rangle |g_c| \operatorname{sen} \gamma_c}. \quad (3.4)$$

Expandiendo la suma de ángulos en (3.2)

$$\frac{\langle\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}\rangle(\eta)}{\langle\hat{\pi}_{k,c}^{(y)(R,I)}\rangle} = G \frac{\cos \gamma(\eta) - \operatorname{sen} \gamma(\eta) \operatorname{tg} \alpha}{\cos \gamma_c - \operatorname{sen} \gamma_c \operatorname{tg} \alpha}. \quad (3.5)$$

y sustituyendo (3.4) en ella, llegamos a una de las ecuaciones que nos interesa,

$$\langle \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} \rangle (\eta) = G \frac{\langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle |y_c| \text{sen}(\beta_c - \gamma) - \langle \hat{y}_c^{(R,I)} \rangle |g_c| \text{sen}(\gamma_c - \gamma)}{|y_c| \text{sen}(\beta_c - \gamma)}. \quad (3.6)$$

Repitiendo los pasos anteriores para  $\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \rangle$ ,

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \rangle (\eta) = Y \frac{\langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle |y_c| \text{sen}(\beta_c - \beta) + \langle \hat{y}_c^{(R,I)} \rangle |g_c| \text{sen}(\beta - \gamma_c)}{|g_c| \text{sen}(\beta_c - \gamma_c)}, \quad (3.7)$$

siendo válidas estas dos últimas ecuaciones en cualquier época cosmológica posterior a un colapso<sup>1</sup> y para cualquier esquema de colapso. Las ecuaciones (3.6) y (3.7) muestran la evolución temporal de las variables del campo luego de un colapso.

En particular, durante la época inflacionaria las ecuaciones (3.6, 3.7) se reducen a

$$\langle \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} \rangle (\eta) = \langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle \cos \Delta_k + \text{sen} \Delta_k \left( \frac{\langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle}{z_c} - k \langle \hat{y}_c^{(R,I)} \rangle \right), \quad (3.8a)$$

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \rangle (\eta) = \cos \Delta_k \left[ \frac{1}{z} \frac{\langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle}{k} + \left( \langle \hat{y}_c^{(R,I)} \rangle - \frac{\langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle}{kz_c} \right) \right] + \text{sen} \Delta_k \left[ \frac{1}{z} \left( \frac{\langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle}{kz_c} - \langle \hat{y}_c^{(R,I)} \rangle \right) + \frac{\langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle}{k} \right]. \quad (3.8b)$$

Es posible expresar (3.6) sin usar funciones trigonométricas, lo cual puede ser útil si las expresiones se vuelven muy complicadas:

$$\langle \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} \rangle (\eta) = \langle \hat{\pi}_c^{(y)(R,I)} \rangle \frac{(\Im(y_c) \Re(g(\eta)) - \Re(y_c) \Im(g(\eta)))}{(\Im(y_c) \Re(g_c) - \Im(g_c) \Re(y_c))} - \langle \hat{y}_c^{(R,I)} \rangle \frac{(\Im(g_c) \Re(g(\eta)) - \Re(g_c) \Im(g(\eta)))}{(\Im(y_c) \Re(g_c) - \Im(g_c) \Re(y_c))}. \quad (3.9)$$

Sustituyendo esto en  $\langle \hat{\pi}_k^{(y)} \rangle = \langle \hat{\pi}_k^{(y)R} \rangle + i \langle \hat{\pi}_k^{(y)I} \rangle$  llegamos a

$$\langle \hat{\pi}_k^{(y)} \rangle (\eta) = \frac{(\langle \hat{\pi}_k^{(y)R} \rangle + i \langle \hat{\pi}_k^{(y)I} \rangle) \mathcal{A}(\eta, \eta_k) - (\langle \hat{y}_k^R \rangle + i \langle \hat{y}_k^I \rangle) \mathcal{B}(\eta, \eta_k)}{\mathcal{C}(\eta_k^e)}, \quad (3.10)$$

donde las funciones del tiempo de colapso  $\eta_k$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  son

<sup>1</sup>Y mientras no haya otro colapso (cf. sección 3.3) o interacción con agentes exteriores.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\eta, \eta_k^c) &= \Im(y_c) \Re(g(\eta)) - \Re(y_c) \Im(g(\eta)), \\ \mathcal{B}(\eta, \eta_k^c) &= \Im(g_c) \Re(g(\eta)) - \Re(g_c) \Im(g(\eta)), \\ \mathcal{C}(\eta_k^c) &= \Im(y_c) \Re(g_c) - \Re(g_c) \Im(y_c).\end{aligned}$$

Antes de proceder a calcular el valor medio del cuadrado del valor de expectación del momento conjugado (3.10), recordemos que todos los esquemas de colapso propuestos en el capítulo 2 y el propuesto en este capítulo en la §3.4, se pueden descomponer en una parte aleatoria adimensional ( $f, h$ ) y en una parte con unidades ( $u, v$ ):

$$\left\langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)} \right\rangle_k (\eta_k^c) = f_{k,c}^{R,I} u_{k,c}, \quad \left\langle \hat{y}^{(R,I)} \right\rangle_k (\eta_k^c) = h_{k,c}^{R,I} v_{k,c},$$

donde las partes aleatorias tienen como propiedad (derivada de que  $k$  y  $-k$  no son independientes):

$$\begin{aligned}\overline{f_{k,c}^R f_{k',c}^R} &= \overline{h_{k,c}^R h_{k',c}^R} = \delta_{k,k'} + \delta_{k,-k'}, \\ \overline{f_{k,c}^I f_{k',c}^I} &= \overline{h_{k,c}^I h_{k',c}^I} = \delta_{k,k'} - \delta_{k,-k'}.\end{aligned}$$

Usando estas propiedades el valor medio del producto de dos valores de expectación del momento conjugado es

$$\overline{\left\langle \hat{\pi}_k^{(y)} \right\rangle \left\langle \hat{\pi}_{k'}^{(y)} \right\rangle} = \frac{2}{|\mathcal{C}(\eta_k^c)|^2} \left( |\mathcal{A}_k|^2 |u_{k,c}|^2 + |\mathcal{B}_k|^2 |v_{k,c}|^2 \right). \quad (3.11)$$

De esta última ecuación se puede obtener (luego de sustituir las funciones dependientes de la época cosmológica, i.e. , el valor de  $\frac{a''}{a}$  de la ecuación (2.112) y las prescripciones del esquema de colapso, e.g. , las ecuaciones (2.147) ó (2.148)) la función  $C(k)$ .

### 3.2 Evolución del campo escalar en diferentes épocas cosmológicas

Procederemos ahora a especializar las fórmulas obtenidas para diversas épocas cosmológicas, esto nos permitirá estudiar secciones más adelante cómo se verán afectadas las predicciones de los esquemas de colapso si el colapso auto-inducido ocurre en otra época que no sea la etapa inflacionaria o si el colapso ocurre en la época inflacionaria pero nos interesa ver el sistema en otra época. Con este fin dividiremos la historia del universo como sigue, desde  $-\infty < \eta < \eta_{ei}$  es la era inflacionaria; la era dominada por radiación ocurre en el intervalo  $\eta_{ei} \leq \eta < \eta_{eq}$ , y finalmente la época dominada por la materia es desde  $\eta_{eq}$  a la fecha. Es importante notar que estamos ignorando –por simplicidad– la aparente era actual de dominación de la energía oscura.

La dinámica del campo escalar escalado  $y_k(\eta)$  es

$$y_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) y_k = 0, \quad [2.118]$$

y usando la ecuación de Friedmann para el caso plano:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2, \quad [1.41a]$$

junto con la ecuación de conservación

$$\rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0, \quad [1.41c]$$

se obtiene que  $\rho a^4$  es constante durante la época dominada por radiación y  $\rho a^3$  lo es durante la época dominada por materia. Entonces, el factor de escala está descrito en las diferentes épocas como sigue: durante la inflación

$$a(\eta) = -\frac{1}{H_I \eta'}, \quad (3.12)$$

donde  $H_I$  es el parámetro de Hubble durante inflación (y es casi constante) y  $\eta_{ie}$  es el tiempo cuando inicia la época inflacionaria. En la época dominada por radiación,

$$a(\eta) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} a^4 (\eta - \eta_{ei}) + a_{ei}}, \quad (3.13)$$

y en la época en la cual el fluido dominante es el polvo,

$$a(\eta) = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{mat} a^3 (\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a_{eq}}} \right]^2. \quad (3.14)$$

Debe de ser claro de las expresiones del factor de escala que estamos suponiendo que solamente un tipo de materia domina durante las diversas épocas cosmológicas y que las transiciones entre diferentes eras es continua pero que ocurren en un tiempo despreciable comparado con la duración de las épocas.

Durante la época inflacionaria la ecuación de la perturbación del campo escalar toma la forma

$$y_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) y_k = 0, \quad (3.15)$$

usando (2.118) y (3.13) obtenemos la dinámica del campo en la era dominada por radiación

$$y_k'' + k^2 y_k = 0, \quad (3.16)$$

y para la época de materia

$$y_k'' + \left\{ k^2 - \frac{2C_{mat}^2}{[C_{mat}(\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a_{eq}}]^2} \right\} y_k = 0, \quad (3.17)$$

donde  $C_{mat} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho a^3}$ . Podemos expresar la ecuación (3.17), de una manera similar a (3.15), usando el cambio de variable  $u = C_{mat}(\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a_{eq}}$ ,

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \left\{ \kappa_k^2 - \frac{2}{u^2} \right\} y_k = 0 \quad (3.18)$$

con  $\kappa_k \equiv \frac{k}{C_{mat}}$ .

Todas estas ecuaciones tienen soluciones en sus respectivas épocas, por lo que, la función completa para el modo  $k$  del campo escalar es

$$y_k(\eta) = \begin{cases} \alpha e^{-ik\eta} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) + \beta e^{ik\eta} \left(1 + \frac{i}{k\eta}\right) & -\infty < \eta < \eta_{ei}, \\ -\frac{1}{2} (A e^{ik\eta} - B e^{-ik\eta}) & \eta_{ei} \leq \eta < \eta_{eq}, \\ C e^{-i\kappa_k u} \left(1 - \frac{i}{\kappa_k u}\right) + D e^{i\kappa_k u} \left(1 + \frac{i}{\kappa_k u}\right) & \eta_{eq} \leq \eta \end{cases} \quad (3.19)$$

Basado en puros argumentos físicos (ver capítulo 2) se pueden determinar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , el valor  $\alpha = 1/\sqrt{2k}$  proviene de las restricciones que tienen que satisfacer los modos del campo y su momento conjugado (ecuación 2.122) y  $\beta = 0$  del hecho de que queremos que el estado de vacío cuando  $\eta \rightarrow -\infty$  sea el vacío de Minkowski. Los coeficientes restantes pueden ser calculados usando requisitos de continuidad, obteniendo,

$$A = -\frac{e^{-2ik\eta_{ei}}}{\sqrt{2kk^2\eta_{ei}^2}}, \quad B = \sqrt{\frac{2}{k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta_{ei}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2kk^2\eta_{ei}^2}}, \quad (3.20)$$

para la transición de las época inflación con la etapa dominada por radiación. Para la transición de las etapas dominadas por radiación-materia,

$$C = \frac{-ikBe^{-ik\eta_{eq}} - \frac{iC_{mat}^2}{2ka_{eq} \left(1 + \frac{i}{\kappa\sqrt{a_{eq}}}\right)} (Ae^{ik\eta_{eq}} - Be^{-ik\eta_{eq}})}{-2ike^{-i\kappa\sqrt{a_{eq}}} \left(1 - \frac{i}{\kappa\sqrt{a_{eq}}}\right) + \frac{ie^{-i\kappa\sqrt{a_{eq}}}C_{mat}^2}{ka_{eq}} \left(1 + \frac{(k\sqrt{a_{eq}} - iC_{mat})^2}{k^2a_{eq} + C_{mat}^2}\right)} \quad (3.21)$$

$$D = \frac{-\frac{1}{2}Ae^{ik\eta_{eq}} + \frac{1}{2}Be^{-ik\eta_{eq}} - Ce^{-iku} \left(1 - \frac{i}{\kappa u}\right)}{e^{iku} \left(1 + \frac{i}{\kappa u}\right)} \quad (3.22)$$

Con esto completamos las ecuaciones generales que estaremos usando a lo largo de este capítulo.

### 3.3 Evolución con múltiples colapsos

Hasta ahora en esta investigación [45, 170] se han investigado los diferentes esquemas de colapso suponiendo que cada modo  $k$  colapsa sólo una vez, esto ha facilitado los cálculos ya que no ha habido necesidad de especificar la forma del estado postcolapso, salvo su valor de expectación. En esta sección desarrollaremos las fórmulas para dos o más colapsos sin limitar la generalidad sobre el estado postcolapso. En la sección 3.5.2 se especializarán las fórmulas desarrolladas aquí para el caso en que el estado posterior al colapso sea un estado coherente, como el estado inicial de vacío, esta suposición parece razonable ya que los *mecanismos de colapso*<sup>2</sup> preservan estas características del estado cuántico resultante del colapso.

Las ecuaciones para colapsos posteriores al primero se pueden obtener como sigue. Primero, generalizaremos la notación para poder tratar con los tres esquemas de colapso a la vez. Las diversas “recetas” dadas por los esquemas de colapso para el valor de expectación *al tiempo de colapso*  $\eta_k^c$  en el estado postcolapso  $|\xi\rangle$ , pueden ser escritos de manera general para un colapso como

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \rangle^c \equiv \langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\xi} = N_y^{R,I}(\eta_k^c), \quad (3.23a)$$

$$\langle \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} \rangle^c \equiv \langle \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_{\xi} = N_{\pi}^{R,I}(\eta_k^c), \quad (3.23b)$$

donde  $N_y$  y  $N_{\pi}$  representan el valor aleatorio del valor de expectación de  $\hat{y}^{(R,I)}$  o  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$  que caracteriza al estado postcolapso  $|\xi\rangle$ . Por ejemplo tomando el esquema de colapso llamado “independiente” (ecuación 2.147)  $N_y$  y  $N_{\pi}$  están definidos como

<sup>2</sup>No confundir *mecanismos de colapso* con *esquemas de colapso*, el primero es una descripción física de las “entrañas” del colapso -descripción fenomenológica o no- y el segundo es una “receta” de cómo podría pasar. Básicamente son dos niveles distintos de descripción.

$$\left\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \right\rangle_{\xi} = \underbrace{(x_1')^{(R,I)} \sqrt{\left( \Delta y_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \right)_0^2}}_{N_y} \quad (3.24a)$$

$$\left\langle \hat{\pi}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \right\rangle_{\xi} = \underbrace{(x_2')^{(R,I)} \sqrt{\left( \Delta \pi_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \right)_0^2}}_{N_\pi} \quad (3.24b)$$

Es importante enfatizar que el esquema de colapso gobierna a qué valor “salta” el valor de expectativa en el nuevo estado postcolapso. Luego del colapso, el valor de expectativa del modo  $\hat{y}_k^{(R,I)}$  y  $\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}$  evolucionarán siguiendo las ecuaciones (3.6) y (3.7) respectivamente.

Existe la posibilidad que durante la evolución posterior al primer colapso se diesen las condiciones para que ocurriese un nuevo colapso. Las condiciones dependerán del *mecanismo de colapso* y no se especificarán aquí. La diferencia entre este nuevo colapso y el primero será que el valor de expectativa del nuevo estado no es cero. Esto se reflejará en las recetas dadas por los esquemas para el colapso  $|\xi_1\rangle \rightarrow |\xi_2\rangle$  como sigue:

$$\left\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \right\rangle_2^c \equiv \left\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^{c_2}) \right\rangle_{\xi_2} = N_{y_1}^{(R,I)}(\eta_k^{c_2}) + \left\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^{c_2}) \right\rangle_{\xi_1}, \quad (3.25a)$$

$$\left\langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)} \right\rangle_2^c \equiv \left\langle \hat{\pi}_k^{(R,I)}(\eta_k^{c_2}) \right\rangle_{\xi_2} = N_{\pi_1}^{(R,I)}(\eta_k^{c_2}) + \left\langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)}(\eta_k^{c_2}) \right\rangle_{\xi_1}. \quad (3.25b)$$

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación está en el estado post-colapso  $|\xi_2\rangle$ , mientras que el lado derecho está en el estado  $|\xi_1\rangle$ , i.e., el nuevo estado post-colapso depende del estado pre-colapso. Nótese también que toda esta expresión está evaluada en  $\eta_k^{c_2}$ , el tiempo del segundo colapso. El segundo término del lado derecho es el valor de expectativa posterior al primer colapso *evolucionado* desde  $\eta_k^c$  hasta  $\eta_k^{c_2}$  mediante las ecuaciones (3.7) y (3.6) respectivamente. Las ecuaciones de evolución entonces reciben como *condición inicial* el valor del colapso al tiempo  $\eta_k^c$  y luego evolucionan sin sobresaltos hasta que ocurre un nuevo colapso.

Siguiendo el mismo procedimiento descrito, podemos escribir las “recetas” de colapso para el  $n$ -ésimo colapso  $|\xi_{n-1}\rangle \rightarrow |\xi_n\rangle$ :

$$\left\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \right\rangle_n^c = N_{y_{n-1}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}) + \left\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}) \right\rangle_{\xi_{n-1}}, \quad (3.26a)$$

$$\left\langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)} \right\rangle_n^c = N_{\pi_{n-1}}^{(R,I)}(\eta_k^{c_n}) + \left\langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)}(\eta_k^{c_n}) \right\rangle_{\xi_{n-1}}. \quad (3.26b)$$

El segundo término del lado derecho de las ecuaciones (3.26) son los valores de expectativa del  $(n-1)$ -ésimo colapso *evaluado al  $n$ -ésimo tiempo de colapso*  $\eta_k^{c_n}$ . Es necesario hacer hincapié en esto porque los valores de expectativa del estado  $|\xi_{n-1}\rangle$  *evolucionó* desde  $\eta_k^{c_{n-1}}$  hasta  $\eta_k^{c_n}$  de acuerdo con las ecuaciones (3.7) y (3.6) usando como *condición inicial el valor de expectativa dado por el colapso  $n-2$* , que a su vez evolucionó<sup>3</sup> siguiendo, etc. . Esto nos llevará a una relación recursiva de la ecuación

<sup>3</sup>Nótese que esto es exactamente la evolución de un sistema cuántico siguiendo las reglas estándar de mecánica cuántica.



de movimiento para el valor de expectación de las variables del campo luego de  $n$  colapsos.

Las ecuaciones (3.7) y (3.6) son válidas en el periodo entre dos colapsos consecutivos, e.g.,  $n$  y  $n - 1$ , lo que significa que estas ecuaciones son válidas desde el tiempo  $\eta_k^{c_{n-1}}$  (su condición inicial) hasta  $\eta_k^{c_n}$ . Ahora que ya tenemos la “receta” para el  $n$ -ésimo colapso, podemos incluir *todos* los colapsos, desde el primero hasta el  $n$ -ésimo en las ecuaciones de evolución. Las ecuaciones de evolución del valor de expectación del campo y su momento conjugado *después* del  $n$ -ésimo colapso se pueden escribir como sigue

$$\langle \pi_k^{R,I}(\eta) \rangle = \langle \pi_k^{R,I} \rangle_n^c \tilde{A}_n(\eta) + \tilde{B}_n(\eta) \langle y_k^{R,I} \rangle_n^c \quad (3.27a)$$

$$\langle y_k^{R,I}(\eta) \rangle = \langle \pi_k^{R,I} \rangle_n^c \tilde{C}_n(\eta) + \tilde{D}_n(\eta) \langle y_k^{R,I} \rangle_n^c, \quad (3.27b)$$

donde las funciones  $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n$  y  $\tilde{D}_n$  son las variables que marcan la evolución temporal del sistema en el lapso que va desde  $\eta_k^{c_n}$  hasta  $\eta$ . En particular, durante la época inflacionaria (3.8) son

$$\tilde{A}_n(\eta) = \cos \Delta_n + \frac{\text{sen } \Delta_n}{z_n}, \quad (3.28a)$$

$$\tilde{B}_n(\eta) = -k \text{sen } \Delta_n \quad (3.28b)$$

$$\tilde{C}_n(\eta) = \frac{\cos \Delta_n}{k} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z_n} \right) + \frac{\text{sen } \Delta_n}{k} \left( \frac{1}{z \cdot z_n} + 1 \right), \quad (3.28c)$$

$$\tilde{D}_n(\eta) = \cos \Delta_n - \frac{\text{sen } \Delta_n}{z}. \quad (3.28d)$$

donde  $\Delta_n$  la variable del lapso transcurrido desde el colapso  $\eta_k^{c_n}$  hasta  $\eta$  multiplicada por el vector de onda  $k$  i.e.  $\Delta_n \equiv k(\eta - \eta_k^{c_n}) = z - z_n$ ,  $z \equiv k\eta$  y  $z_n \equiv k\eta_k^{c_n}$ . Para estados intermedios, i.e. el estado  $|i\rangle$  con  $i \neq n$ , hay que notar que los  $z = k\eta$  deben de sustituirse por  $z_{j=i+1}$  y las  $\Delta_n = z - z_n$  por  $\Delta_{ji} = z_j - z_i$ .

Para obtener la ecuación de evolución del valor de expectación luego de  $n$  colapsos sustituimos en las ecuaciones de evolución (3.27), las “recetas” del colapso  $n$ -ésimo (3.26) en las cuales hay que sustituir en el segundo término del lado derecho las ecuaciones (3.27) pero ahora para el colapso  $n - 1$ , etc. . Haciendo esto iterativamente llegamos a la siguiente expresión para la evolución del

---

tica, en el intervalo entre mediciones la función de onda evoluciona siguiendo la ecuación de Schrödinger y en los tiempos en los cuales ocurren las mediciones existen reducciones de la función de onda, que luego de la medición evolucionará siguiendo la ecuación de Schrödinger con la condición inicial del nuevo estado, etc. .

valor de expectación del momento conjugado  $\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}$  luego de la ocurrencia de  $n$  colapsos<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\pi}_k^{R,I}(\eta) \rangle &= N_{\pi_{n-1}}^{R,I} A_n \\
 &+ N_{\pi_{n-2}}^{R,I} (A_{n-1} A_n + C_{n-1} B_n) \\
 &+ N_{\pi_{n-3}}^{R,I} [A_{n-2} (A_{n-1} A_n + C_{n-1} B_n) + C_{n-2} (B_{n-1} A_n + D_{n-1} B_n)] \\
 &+ N_{\pi_{n-4}}^{R,I} \left\{ A_{n-3} \left[ A_{n-2} (A_{n-1} A_n + C_{n-1} B_n) + C_{n-2} (B_{n-1} A_n + D_{n-1} B_n) \right] \right. \\
 &\quad \left. + C_{n-3} \left[ B_{n-2} (A_{n-1} A_n + C_{n-1} B_n) + D_{n-2} (B_{n-1} A_n + D_{n-1} B_n) \right] \right\} \\
 &+ \dots \\
 &+ N_{y_{n-1}}^{R,I} B_n \\
 &+ N_{y_{n-2}}^{R,I} (B_{n-1} A_n + D_{n-1} B_n) \\
 &+ N_{y_{n-3}}^{R,I} [B_{n-2} (A_{n-1} A_n + C_{n-1} B_n) + D_{n-2} (B_{n-1} A_n + D_{n-1} B_n)] \\
 &+ N_{y_{n-4}}^{R,I} \left\{ B_{n-3} \left[ A_{n-2} (A_{n-1} A_n + C_{n-1} B_n) + C_{n-2} (B_{n-1} A_n + D_{n-1} B_n) \right] \right. \\
 &\quad \left. + D_{n-3} \left[ B_{n-2} (A_{n-1} A_n + C_{n-1} B_n) + D_{n-2} (B_{n-1} A_n + D_{n-1} B_n) \right] \right\} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

con una expresión análoga para  $\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k) \rangle$ . Debido a la forma particular de las “variables de evolución” (3.28) en la época inflacionaria se puede demostrar que

$$A_i A_j + C_i B_j = \mathbf{A}_i \equiv \cos \Delta_i + \frac{\text{sen } \Delta_i}{z_i}, \tag{3.30}$$

$$B_i A_j + D_i B_j = \mathbf{B}_i \equiv -k \text{sen } \Delta_i, \tag{3.31}$$

para  $j > i$ . Nótese que las variables  $A_n$  y  $B_n$  tienen la misma forma que  $\mathbf{A}_n$  y  $\mathbf{B}_n$ . Entonces, la ecuación (3.29) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\pi}^{(y)(R,I)}(\eta) \rangle &= N_{\pi_{n-1}}^{R,I} \mathbf{A}_n + N_{y_{n-1}}^{R,I} \mathbf{B}_n \\
 &+ N_{\pi_{n-2}}^{R,I} \mathbf{A}_{n-1} + N_{y_{n-2}}^{R,I} \mathbf{B}_{n-1} \\
 &+ N_{\pi_{n-3}}^{R,I} \mathbf{A}_{n-2} + N_{y_{n-3}}^{R,I} \mathbf{B}_{n-2} + \dots \\
 &= \sum_{i=0}^n N_{\pi_{n-1-i}}^{R,I} \mathbf{A}_{n-i} + N_{y_{n-1-i}}^{R,I} \mathbf{B}_{n-i}.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

La fórmula (3.32) muestra la generalización de la ecuación (3.6) para varios colapsos en la época inflacionaria. La evolución para el valor de expectación de  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$ , es como la superposición de varias evoluciones de un único colapso, donde en cada evolución el colapso sucede a tiempos diferentes.

<sup>4</sup>Hemos removido la tilde de las variables  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  y  $\tilde{D}$  para no cargar más la notación.

El momento  $\widehat{\delta\varphi}'_k$  está relacionado con  $\widehat{\pi}_k^{(y)}$  mediante  $\widehat{\delta\varphi}'_k = \widehat{\pi}_k^{(y)}/a$ ,

$$\langle \widehat{\delta\varphi}'_k \rangle = \frac{1}{a(\eta)} \left[ \langle \widehat{\pi}_k^{(y)R} \rangle + i \langle \widehat{\pi}_k^{(y)I} \rangle \right]. \quad (3.33)$$

La cantidad que nos interesa es el valor medio del producto de está última ecuación, ya que con ella podemos obtener las predicciones de los esquemas de colapso.

Usando la misma descomposición que al final de la sección 3.1,  $N_{\pi}^{R,I} = f_k^{R,I} u_k$  y  $N_y^{R,I} = h_k^{R,I} w_k$  donde  $f, h$  son variables aleatorias adimensionales, y  $u, w$  son la parte de la receta de colapso que carga con las unidades (por ejemplo, para el primer esquema de colapso en su primer colapso,  $u_k = \sqrt{\hbar L^3/2} |g_k(\eta)|$  y  $w_k = \sqrt{\hbar L^3/2} |y_k(\eta)|$ ). Entonces, el valor medio del ensamblen del cuadrado de  $N_{\pi}^{R,I}$  are  $\langle N_{\pi_k}^R N_{\pi_{k'}}^R \rangle = (\delta_{k,k'} + \delta_{k,-k'}) u_k u_{k'}^*$  y  $\langle N_{\pi_k}^I N_{\pi_{k'}}^I \rangle = (\delta_{k,k'} - \delta_{k,-k'}) u_k u_{k'}^*$  y expresiones similares para  $N_y^{R,I}$ .

Así, el valor medio del ensamblen del cuadrado del momento conjugado  $\widehat{\delta\varphi}'_k$  para  $n$  colapsos es

$$\overline{\langle \widehat{\delta\varphi}'_k \rangle \langle \widehat{\delta\varphi}'_{k'} \rangle} = \frac{2}{a(\eta)^2} \sum_{i=0}^n \left[ |u_k|_{n-1-i}^2 \mathbf{A}_{n-i,k}^2 + |w_k|_{n-1-i}^2 \mathbf{B}_{n-i,k}^2 \right]. \quad (3.34)$$

En particular para dos colapsos

$$\overline{\langle \widehat{\delta\varphi}'_k \rangle \langle \widehat{\delta\varphi}'_{k'} \rangle} = \frac{2}{a(\eta)^2} \left\{ \mathbf{A}_{2,k}^2 |u_k|_1^2 + \mathbf{A}_{1,k}^2 |u_k|_0^2 + \mathbf{B}_{2,k}^2 |w_k|_1^2 + \mathbf{B}_{1,k}^2 |w_k|_0^2 \right\}, \quad (3.35)$$

donde  $|u_k|_n^2 \equiv |u_k(\eta_k^{c_n})|^2$  y  $|w_k|_n^2 \equiv |w_k(\eta_k^{c_n})|^2$  siendo  $n$  el número de colapsos ocurridos. Siguiendo la misma notación el valor medio para tres colapsos es

$$\overline{\langle \widehat{\delta\varphi}'_k \rangle \langle \widehat{\delta\varphi}'_{k'} \rangle} = \frac{2}{a(\eta)^2} \left\{ \mathbf{A}_3^2 |u_k|_2^2 + \mathbf{A}_2^2 |u_k|_1^2 + \mathbf{A}_1^2 |u_k|_0^2 + \mathbf{B}_3^2 |w_k|_2^2 + \mathbf{B}_2^2 |w_k|_1^2 + \mathbf{B}_1^2 |w_k|_0^2 \right\}. \quad (3.36)$$

Si utilizamos los esquemas de colapso (2.147) y (2.148) en la ecuación (3.34) para el caso de un solo colapso obtenemos las ecuaciones (2.162) y (2.163) respectivamente.

### 3.4 Nuevo esquema de colapso: à la Wigner<sup>5</sup>

Antes de indicar el esquema de colapso y sus consecuencias, revisaremos algunos conceptos preliminares sobre el funcional de Wigner, sus propiedades, su límite clásico y su forma para campos cuánticos.

<sup>5</sup>Toda está sección fue presentada en el artículo de A. De Unánue y D. Sudarsky publicado en *Phys. Rev. D* 0801, 2008.

### 3.4.1 Distribución de Wigner

El concepto de *espacio de fase* es muy útil en la física clásica, el cual se puede entender como una interpretación geométrica de las ecuaciones de Hamilton, al considerar las variables canónicas generalizadas  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  de un sistema de  $n$  partículas como un solo punto en una variedad  $2n$ -dimensional llamado espacio de fase [102, 216], así el problema de mecánica clásica se ve reducido al estudio de la trayectoria de un solo punto en el espacio de fase. Cuando el número de partículas es muy grande (del orden de  $n \simeq 10^{23}$ ) es necesario utilizar métodos estadísticos, para esto, se utiliza la *función de densidad de probabilidad* o *función de distribución del espacio de fase*  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  la cual determina la probabilidad de encontrar el conjunto de variables que describe el sistema  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  en una región infinitesimal de volumen  $d\lambda = \prod_{i=1}^n dq_i dp_i$ ,  $dP = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})d\lambda$ .

Sería deseable tener en mecánica cuántica un “espacio de fase cuántico”. Este deseo presenta de inicio varias dificultades, por ejemplo, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, no es posible asignar a una partícula o sistema una posición  $\mathbf{q}$  y un momento  $\mathbf{p}$  *simultáneos*, dificultad que se puede evadir definiendo como soporte no puntos (como en el caso clásico) si no áreas que dividan el espacio de fase en áreas de orden  $2\pi\hbar$  de tal manera que el producto de las incertidumbres de  $q$  y  $p$  no exceda  $1/2\hbar$  [10]. En el artículo seminal [220], E. P. Wigner propuso una función de distribución para describir un sistema cuántico en el espacio de fase usando el operador de densidad<sup>6,7</sup>  $\hat{\rho}$  [10, 47, 151]

$$\mathcal{W}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\langle q - \frac{1}{2}y \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{1}{2}y \right\rangle \exp\left(\frac{ipy}{\hbar}\right) \quad (3.37)$$

donde  $p$  es el momento conjugado de  $y$ . Si el estado es puro,  $\hat{\rho} \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi|$  la función de distribución toma la forma

$$\mathcal{W}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi\left(q - \frac{1}{2}y\right) \Psi^*\left(q + \frac{1}{2}y\right) \exp\left(\frac{ipy}{\hbar}\right) \quad (3.38)$$

Estos resultados son para el caso unidimensional, la generalización al caso multidimensional es directa: el término  $2\pi\hbar$  deberá ser reemplazado por  $(2\pi\hbar)^n$  donde  $n$  es el número de variables

<sup>6</sup>En la referencia [92] la función de distribución de Wigner está definida con un factor de 2 extra:

$$\mathcal{W}(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\langle q - y \left| \hat{\rho} \right| q + y \right\rangle \exp\left(\frac{2ipy}{\hbar}\right)$$

<sup>7</sup>Es posible reescribir las reglas de mecánica cuántica usando el formalismo del operador de densidad [sección 6.4 de 47]. El operador de densidad  $\hat{\rho}$  se define como sigue [ibid.]: Sean  $E_1, \dots, E_\alpha, \dots, E_\mu$  con  $\mu$  ensambles de sistemas físicos del mismo tipo, sea  $N_\alpha$  el número de elementos de  $E_\alpha$ , sea  $\tilde{E}$  el ensamble de todos los  $N = N_1 + \dots + N_\alpha + \dots + N_\mu$  elementos de los diversos  $E_\alpha$ . Supongamos además, que cada  $E_\alpha$  puede ser descrito por un ket normalizado  $|\phi_\alpha\rangle$ , entonces el operador

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha=1}^{\mu} |\phi_\alpha\rangle \frac{N_\alpha}{N} \langle\phi_\alpha|$$

es llamado “el operador estadístico del ensamble  $\tilde{E}$ ”, también conocido como “operador de densidad” o “matriz de densidad”. El operador de densidad tiene como propiedades que (i)  $\hat{\rho}$  es hermítico, (ii)  $\hat{\rho}$  es positivo definido, (iii)  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ , (iv)  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$  donde la igualdad se cumple si  $\hat{\rho}$  es un operador de proyección. Si un ensamble  $\tilde{E}$  se puede describir con un vector  $|\Psi\rangle$  entonces es llamado *estado puro* y puede ser descrito tanto por  $|\Psi\rangle$  como por  $\hat{\rho} \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , el cual es un operador de proyección. Si el ensamble  $\tilde{E}$  contine elementos de diversos sub-ensambles  $E_\alpha$  se le conoce como *mezcla* (mixture en inglés).

de  $\Psi$ , y el producto  $py$  de la exponencial es cambiado por el producto escalar de los vectores  $n$ -dimensionales  $p$  y  $y$ .

*Propiedades de la función de Wigner.* Se listan a continuación las propiedades de la distribución de Wigner [92],

I.  $\mathcal{W}(q, p)$  con cumple

$$\int d p \mathcal{W}(q, p) = |\Psi(q)|^2 = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \quad (3.39a)$$

$$\int d q \mathcal{W}(q, p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle \quad (3.39b)$$

$$\int d p \int d q \mathcal{W}(q, p) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1 \quad (3.39c)$$

II.  $\mathcal{W}(q, p)$  es invariante ante transformaciones de Galileo, i.e.  $\psi(q) \rightarrow \psi(q + a)$  entonces  $\mathcal{W}(q, p) \rightarrow \mathcal{W}(q + a, p)$  y si  $\psi(q) \rightarrow e^{ip'q/\hbar}\psi(q)$  entonces  $\mathcal{W}(q, p) \rightarrow \mathcal{W}(q, p - p')$ .

III.  $\mathcal{W}(q, p)$  debe de ser invariante ante inversiones temporales.

IV. Si  $\mathcal{W}_\phi(q, p)$  y  $\mathcal{W}_\psi(q, p)$  corresponden a los estados  $\phi(q)$  y  $\psi(q)$ , respectivamente, se tiene

$$\left| \int \phi^*(q)\psi(q) \right|^2 = (2\pi\hbar) \int d q \int d p \mathcal{W}_\phi(q, p)\mathcal{W}_\psi(q, p). \quad (3.40)$$

Esta propiedad tiene dos consecuencias interesantes. Si  $\phi(q) = \psi(q)$  entonces

$$\int d q \int d p [\mathcal{W}_\phi(q, p)]^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}, \quad (3.41)$$

y si  $\phi$  y  $\psi$  son ortogonales

$$\int d q \int d p \mathcal{W}_\phi(q, p)\mathcal{W}_\psi(q, p) = 0, \quad (3.42)$$

lo cual implica que  $\mathcal{W}(q, p)$  no puede ser positiva en todos lados del espacio de fase. Esta conclusión es general [221]: si la función de distribución satisface la propiedad (i) entonces asumirá valores negativos para algunos  $p$  y  $q$ <sup>8</sup>.

V. La representación de Wigner de un operador cuántico  $R_w(p, q)$  es

$$R_w(p, q) = \int \left\langle q - \frac{1}{2}y \left| \hat{R} \right| q + \frac{1}{2}y \right\rangle \exp\left(\frac{ipy}{\hbar}\right). \quad (3.43)$$

Recordando que el promedio de la variable dinámica  $R$  en el estado  $\rho$  está dada por  $\langle R \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{R})$

$$\langle R \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{R}) = \int \int \mathcal{W}(q, p)R_w(q, p)dp dq. \quad (3.44)$$

<sup>8</sup>La función de Husimi  $\mathcal{H}(q, p)$  no satisface la propiedad (I) y es positiva en todo el espacio de fase [sección 15.3 de 10].

VI. Definiendo la transformada de Fourier de la función de onda

$$\phi(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq \psi(q) \exp\left(\frac{-iqp}{\hbar}\right), \quad (3.45)$$

la ecuación (3.37) puede reescribirse de la manera

$$\mathcal{W}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dk \left\langle p - \frac{1}{2}k \middle| \hat{\rho} \middle| p + \frac{1}{2}k \right\rangle \exp\left(\frac{-ipy}{\hbar}\right) \quad (3.46)$$

En [221] se muestra que las propiedades I-IV determinan la función de distribución de manera única: la dada por la ecuación (3.37).

*Dinámica y límite clásico.* La dinámica de la función de Wigner (toda esta sección está basada en el capítulo 5 [10] y la sección 2.3 de [92]), puede ser deducida de la ecuación de evolución del operador de estado  $\hat{\rho}$ ,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}] = \frac{i}{\hbar} (\hat{\rho}\hat{H} - \hat{H}\hat{\rho}),$$

donde  $\hat{H} = \hat{p}^2/2M + \hat{V}$  es el Hamiltoniano del sistema. Es conveniente reescribir esta ecuación separando las contribuciones de la energía cinética y la potencial.

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} \equiv \frac{\partial_K \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial_V \hat{\rho}}{\partial t},$$

siendo

$$\frac{\partial_K \hat{\rho}}{\partial t} \equiv \frac{i}{2M\hbar} (\hat{\rho}\hat{p}^2 - \hat{p}^2\hat{\rho}), \quad (3.47a)$$

$$\frac{\partial_V \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (\hat{\rho}\hat{V} - \hat{V}\hat{\rho}), \quad (3.47b)$$

Resulta conveniente evaluar (3.47a) en el espacio de momentos

$$\frac{\partial_K}{\partial t} \langle p | \hat{\rho} | p' \rangle = \frac{i}{2M\hbar} \langle p | \hat{\rho} | p' \rangle (p'^2 - p^2) \quad (3.48)$$

$$= \frac{i}{2M\hbar} \langle p | \hat{\rho} | p' \rangle (p' + p)(p' - p). \quad (3.49)$$

Usando (3.46) para transformar a la representación de Wigner, obtenemos

$$\frac{\partial_K}{\partial t} \mathcal{W}(q, p, t) = \frac{i}{\hbar M} \int dk \left\langle p - \frac{1}{2}k \middle| \hat{\rho} \middle| p + \frac{1}{2}k \right\rangle pk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) dk, \quad (3.50)$$

el factor de  $k$  dentro de la integral puede ser reemplazada por el operador  $-\left(\frac{\hbar}{i}\right) \frac{\partial}{\partial q}$  obteniendo

$$\frac{\partial_K}{\partial t} \mathcal{W}(q, p, t) = -\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{W}(q, p, t). \quad (3.51)$$

Realizando pasos similares para  $\frac{\partial_V \hat{\rho}}{\partial t}$ , pero en la representación de posiciones:

$$\frac{\partial_V}{\partial t} \langle x | \hat{\rho} | x' \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x | \hat{\rho} | x' \rangle [V(x) - V(x')],$$

usando (3.37)

$$\frac{\partial_V}{\partial t} \mathcal{W}(q, p, t) = \frac{i}{\hbar(2\pi\hbar)} \int \langle q - \frac{1}{2}y | \hat{\rho} | p + \frac{1}{2}y \rangle \left[ V\left(q + \frac{1}{2}y\right) - V\left(q - \frac{1}{2}y\right) \right] e^{ipy/\hbar} dy.$$

Si  $V(x)$  es analítica se puede expandir en Series de Taylor

$$V\left(q + \frac{1}{2}y\right) - V\left(q - \frac{1}{2}y\right) = \sum_{n=\text{impar}} \frac{2}{n!} y^n \frac{d^n V(q)}{dq^n}$$

Como antes, podemos reemplazar  $y^n$  dentro de la integral por  $\left[\left(\frac{\hbar}{i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]^n$ , fuera de la integral

$$\frac{\partial_V}{\partial t} \mathcal{W}(q, p, t) = \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n!} (-i\hbar)^{n-1} \frac{d^n V(q)}{dq^n} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{W}(q, p, t) \quad (3.52)$$

Sumando las ecuaciones (3.51) y (3.52),

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}(q, p, t) = -\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{W}(q, p, t) + \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n!} (-i\hbar)^{n-1} \frac{d^n V(q)}{dq^n} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{W}(q, p, t), \quad (3.53)$$

la suma de términos en potencias de  $\hbar$  podría sugerir que esta ecuación tiene un límite clásico fácil de extraer.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}(q, p, t) = -\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{W}(q, p, t) + \frac{dV(q)}{dq} \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{W}(q, p, t) + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (3.54)$$

Despreciando la contribución de las correcciones  $\mathcal{O}(\hbar^2)$ , esta es la ecuación de Liouville. Pero esta apariencia clásica es engañosa, los términos de orden  $\hbar^n$  involucran la derivada  $n$ -ésima de  $\mathcal{W}(q, p, t)$  con respecto a  $p$ . Esto puede generar factores de  $1/\hbar$  y cancelar<sup>9</sup> así los factores explícitos de  $\hbar$ . En estos casos las correcciones no desaparecen en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ , ver Ballentine [10] para una discusión más extensa.

<sup>9</sup>El caso de dos ondas gaussianas separadas, es un ejemplo claro de esto:

$$\Psi(q) = \frac{N}{\sqrt{2}(2\pi a^2)^{1/4}} \left[ e^{-(q-c)^2/4a^2} + e^{-(q+c)^2/4a^2} \right] \quad (3.55)$$

*Distribución de Wigner para campos cuánticos.* A cualquier estado de  $N$  partículas  $|\Psi_N\rangle$  en el espacio de Fock le corresponde la función de onda de  $N$  partículas [92] dada por

$$\Psi_N(r_1, r_2, \dots, r_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \hat{\psi}(r_1) \dots \hat{\psi}(r_N) | \Psi_N \rangle \quad (3.56)$$

donde  $\hat{\psi}(r_i)$  es el operador de campo cuántico [ver 173, para una explicación más detallada]. Nótese que la función de onda está expresada en la base del espacio de Fock, en este caso tenemos que la función de distribución para el estado  $|\Psi_N\rangle$ , es

$$\mathcal{W}(r_1, \dots, r_N; p_1, \dots, p_N) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{3N} \int \dots \int d^3 y_1 \dots d^3 y_N \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p \cdot y \right] \times \quad (3.57)$$

$$\Psi_N^* \left( r_1 + \frac{1}{2} y_1, \dots, r_N + \frac{1}{2} y_N \right) \Psi_N \left( r_1 - \frac{1}{2} y_1, \dots, r_N - \frac{1}{2} y_N \right) \quad (3.58)$$

Como se puede observar, esta forma de la función de distribución de Wigner es para estados con un número de partículas definido. Lo que se necesita es calcular la función de onda en la base de  $\hat{y}$ .

### 3.4.2 Función de onda del campo escalar $\hat{y}$

Para obtener la distribución de Wigner del campo del inflatón primero obtendremos la función de onda, recordemos antes que los operadores hermitianos son  $\hat{y}^{(R,I)}$  y  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$ , dados por (2.133).

Si usamos la relación (2.122) es posible despejar  $\hat{a}_k^{(R,I)}$ .

$$\frac{i}{\sqrt{2}} \hat{a}_k^{(R,I)} = \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}(\eta) y_k^*(\eta) - \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta) g_k^*(\eta). \quad (3.59)$$

Tomando el complejo conjugado de (2.127) y (2.128) tenemos

$$\hat{a}_k^{(R,I)} = \sqrt{2} \left\{ i \sqrt{\frac{1}{2k}} \left( 1 + \frac{i}{k\eta} \right) e^{ik\eta} \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} - i^2 \sqrt{\frac{k}{2}} e^{ik\eta} \hat{y}_k^{(R,I)} \right\},$$

acomodando términos,

$$\hat{a}_k^{(R,I)} = i\alpha \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} + \beta \hat{y}_k^{(R,I)},$$

donde

$$\alpha(\eta) = \sqrt{\frac{1}{k}} \left( 1 + \frac{i}{k\eta} \right) e^{ik\eta}, \quad \beta(\eta) = \sqrt{k} e^{ik\eta}.$$



Por definición, la aplicación del operador de aniquilación,  $\hat{a}_k^{(R,I)}$  al estado vacío, es cero

$$\hat{a}_k^{R,I} |0\rangle = 0,$$

entonces, usando esta propiedad y sustituyendo en ella a (3.59), obtenemos [187]

$$\left\{ i\alpha \hat{\pi}_k^{R,I} + \beta \hat{y}_k^{R,I}(\eta) \right\} |0\rangle = 0.$$

Es importante notar que al ser un operador hermitiano,  $\hat{y}_k^{(R,I)}$ , tiene garantizada la existencia de ciertos estados,  $|\mathbf{y}_k^{R,I}\rangle$  que son sus eigenestados, con eigenvalores<sup>10</sup>  $\mathbf{y}_k^{R,I}$ :

$$\hat{y}_k^{(R,I)} |\mathbf{y}_k^{R,I}\rangle = \mathbf{y}_k^{R,I} |\mathbf{y}_k^{R,I}\rangle.$$

Los eigenestados son ortonormales y completos. Proyectando sobre estos estados

$$i\alpha \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} |0\rangle + \beta \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \hat{y}_k^{(R,I)} |0\rangle = 0$$

Usando la relación de completitud de los eigenestados  $|\mathbf{y}_k^{R,I}\rangle$

$$\int |\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I}\rangle \langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} | d\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} = 1$$

llegamos a

$$0 = \int i\alpha \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} | \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I}\rangle \langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} |0\rangle d\tilde{\mathbf{y}}_k' + \int \beta \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \hat{y}_k^{(R,I)} | \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I}\rangle \langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} |0\rangle d\tilde{\mathbf{y}}_k' \quad (3.60)$$

$$= \int i\alpha \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} | \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I}\rangle \langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} |0\rangle d\tilde{\mathbf{y}}_k' + \int \beta \mathbf{y}_k \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I}\rangle \langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} |0\rangle d\tilde{\mathbf{y}}_k' \quad (3.61)$$

Como los eigenestados son ortonormales y normalizados mediante

$$\langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I}\rangle = \delta(\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I}) \quad (3.62)$$

<sup>10</sup>Las unidades de los eigenvalores son las mismas que las de  $\hat{y}_k$ , es decir  $[y_k] = M^{1/2} L^{5/2}$ . Es importante no confundir con las elecciones de vacío (2.127).

Además, de las relaciones de conmutación (2.131), se obtiene <sup>11</sup>

$$\langle \mathbf{y}_k^{R,I} | \hat{\pi}_k^{R,I} | \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} \rangle = -\frac{1}{2} i \hbar L^3 \delta'(\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I}). \quad (3.68)$$

Integrando

$$\left( \frac{\alpha \hbar L^3}{2} \frac{d}{d\mathbf{y}_k^{R,I}} + \beta \mathbf{y}_k^{R,I} \right) \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | 0 \rangle = 0, \quad (3.69)$$

dividiendo por  $\alpha \hbar L^3 / 2$ ,

$$\left( \frac{d}{d\mathbf{y}_k} + \frac{2\beta}{\hbar \alpha L^3} \mathbf{y}_k^{R,I}(\eta) \right) \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | 0 \rangle = 0. \quad (3.70)$$

Esta ecuación tiene como solución <sup>12</sup>

$$\langle \mathbf{y}_k^{R,I} | 0 \rangle = A \exp \left( -\frac{\beta}{\alpha \hbar L^3} \left( \mathbf{y}_k^{R,I} \right)^2 \right) \quad (3.71)$$

La constante  $A$  se puede obtener de la condición de normalización:

$$\langle 0 | \mathbf{y}_k^{R,I} \rangle \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | 0 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\langle 0 | \mathbf{y}_k^{R,I} \rangle|^2 d\mathbf{y}^{R,I} = 1 \quad (3.72)$$

Obteniendo

$$A = \left( \frac{2\beta}{\alpha \pi \hbar L^3} \right)^{1/4} = \left( \frac{2k}{\left( 1 + \frac{i}{k\eta} \right) \pi \hbar L^3} \right)^{1/4}. \quad (3.73)$$

Si expresamos el valor de  $\alpha$  y  $\beta$  en (3.71)

<sup>11</sup>Los pasos de la deducción se muestran a continuación

$$[\hat{y}_k^{R,I}, \hat{\pi}_k^{R,I}] = \frac{1}{2} i \hbar L^3 \quad (3.63)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} | \hat{y}_k^{R,I} \hat{\pi}_k^{R,I} - \hat{\pi}_k^{R,I} \hat{y}_k^{R,I} | \mathbf{y}_k^{R,I} \rangle = \frac{1}{2} i \hbar L^3 \langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} | \mathbf{y}_k^{R,I} \rangle = i \hbar L^3 \delta(\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I}) \quad (3.64)$$

$$\left( \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I} \right) \langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} | \hat{\pi}_k^{R,I} | \mathbf{y}_k^{R,I} \rangle = \frac{1}{2} i \hbar L^3 \delta(\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I}) \quad (3.65)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} | \hat{\pi}_k^{R,I} | \mathbf{y}_k^{R,I} \rangle = \frac{1}{2} i \hbar L^3 \frac{\delta(\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I})}{\left( \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I} \right)} \quad (3.66)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} | \hat{\pi}_k^{R,I} | \mathbf{y}_k^{R,I} \rangle = -\frac{1}{2} i \hbar L^3 \delta'(\tilde{\mathbf{y}}_k^{R,I} - \mathbf{y}_k^{R,I}) \quad (3.67)$$

donde en el último renglón se usó una propiedad muy conocida de las deltas de Dirac.

<sup>12</sup>Notese que  $[y_k] = M^{1/2} L^{5/2}$ , entonces  $p_k$  en la última exponencial de la función de Wigner tiene unidades de  $[p_k] = M^{1/2} L^{3/2}$ .

$$\Psi^{R,I}(\mathbf{y}_k^{R,I}, \eta) \equiv \langle \mathbf{y}_k^{R,I} | 0 \rangle = \left( \frac{2k}{\left(1 + \frac{i}{k\eta}\right) \pi \hbar L^3} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{k}{\hbar L^3 \left(1 + \frac{i}{k\eta}\right)} \left( \mathbf{y}_k^{R,I} \right)^2 \right) \quad (3.74)$$

A partir de ahora dejaremos de usar el símbolo de  $\mathbf{y}_k$  y por comodidad usaremos  $y_k$ , salvo en los casos que pueda haber confusión. Procedemos a escribir la función de onda en una forma más cómoda para obtener su complejo conjugado,

$$\Psi^{R,I}(y_k^{R,I}, \eta) = A \exp \left\{ -\frac{k}{\hbar L^3} \cdot \frac{1 - \frac{i}{k\eta}}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \left( y_k^{R,I} \right)^2 \right\}, \quad (3.75)$$

su complejo conjugado es entonces

$$\Psi^{R,I}(y_k^{R,I}, \eta)^* = A^* \exp \left\{ -\frac{k}{\hbar L^3} \cdot \frac{1 + \frac{i}{k\eta}}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \left( y_k^{R,I} \right)^2 \right\}. \quad (3.76)$$

### 3.4.3 Funcional de Wigner para el modo $\hat{y}_k$ campo escalar $\hat{y}$

Evaluamos (3.75) y (3.76) en  $\left( y_k^{R,I} - \frac{1}{2} Y_k^{R,I} \right)$  y las multiplicamos entre sí antes de sustituirlas en (3.38)<sup>13</sup>:

$$\Psi_k \left( y_k^{R,I} - \frac{1}{2} Y_k^{R,I} \right) \Psi_k^* \left( y_k^{R,I} + \frac{1}{2} Y_k^{R,I} \right) = AA^* \exp \left\{ -\frac{2k}{\hbar L^3} \left( y_k^2 + \frac{1}{4} Y_k^2 + \frac{i}{k\eta} y_k Y_k \right) \right\},$$

obteniendo, luego de la sustitución,

<sup>13</sup>Nótese que dividimos el último exponencial de la función de Wigner (3.38) por  $L^3$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y_k^{R,I}, \pi_k^{R,I}, \eta) = & AA^* \exp \left\{ -\frac{k}{\hbar L^3} \left( \frac{2}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \right) (y_k^{R,I})^2 \right\} \times \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{k (Y_k^{R,I})^2}{2\hbar L^3 \left( 1 + \frac{1}{k^2 \eta^2} \right)} \right\} \times \\ & \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar \eta L^3} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \cdot y_k^{R,I} Y_k^{R,I} \right\} \exp \left( \frac{i \pi_k^{R,I} Y_k^{R,I}}{\hbar L^3} \right) dY_k^{R,I} \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Euler y definiendo una nueva variable  $\gamma$ , en la penúltima exponencial,

$$\gamma(y_k^{R,I}, \eta) \equiv \frac{1}{\hbar \eta L^3} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} y_k^{R,I}$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y_k^{R,I}, \pi_k^{R,I}, \eta) = & AA^* \exp \left\{ -\frac{2k}{\hbar L^3} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \right) (y_k^{R,I})^2 \right\} \times \\ & \int_{-\infty}^{\infty} dY_k^{R,I} \exp \left\{ -\frac{k}{2\hbar L^3} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \right) (Y_k^{R,I})^2 \right\} \times \\ & \left[ \cos(\gamma Y_k^{R,I}) - i \operatorname{sen}(\gamma Y_k^{R,I}) \right] \left[ \cos \left( \frac{\pi_k^{R,I} Y_k^{R,I}}{\hbar L^3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi_k^{R,I} Y_k^{R,I}}{\hbar L^3} \right) \right], \end{aligned}$$

notando que la integral es sobre un intervalo simétrico, los términos impares no contribuirán (serán cero) a la integral. Utilizando la identidad de ángulos múltiples del coseno:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y_k^{R,I}, \pi_k^{R,I}, \eta) = & AA^* \exp \left\{ -\frac{2k}{\hbar L^3} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \right) (y_k^{R,I})^2 \right\} \times \\ & \int_{-\infty}^{\infty} dY_k^{R,I} \exp \left\{ -\frac{k}{2\hbar L^3} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}} \right) (Y_k^{R,I})^2 \right\} \cos \left[ \left( \gamma - \frac{\pi_k^{R,I}}{\hbar L^3} \right) Y_k^{R,I} \right]. \end{aligned}$$

Para simplificar la notación introducimos

$$\zeta = \frac{k}{2\hbar L^3 \left(1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}\right)}$$

entonces el funcional de Wigner es hasta ahora,

$$\mathcal{W}(y_k^{R,I}, \pi_k^{R,I}, \eta) = AA^* \exp\left(-4\zeta \left(y_k^{R,I}\right)^2\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} dY_k^{R,I} \exp\left(-\zeta \left(Y_k^{R,I}\right)^2\right) \cos\left[\left(\gamma - \frac{\pi_k^{R,I}}{\hbar L^3}\right) Y_k^{R,I}\right].$$

Es posible integrar ya que es simplemente la transformada de Fourier de la función gaussiana, y usando

$$AA^* = \sqrt{\frac{2k}{\hbar \pi L^3}} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}}\right)^{1/4}$$

llegamos al funcional de Wigner del estado vacío del campo escalar escalado  $\hat{y}_k$ :

$$\mathcal{W}(y_k^{R,I}, \pi_k^{R,I}, \eta) = 2 \left(1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}\right)^{1/4} \exp\left(-4\zeta \left(y_k^{R,I}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{\left(\gamma - \frac{\pi_k^{R,I}}{\hbar L^3}\right)^2}{4\zeta}\right) \quad (3.77)$$

La función de Wigner calculada<sup>14</sup>, (3.77), tiene una forma parecida a la de una función gaussiana bidimensional generalizada, como era de esperarse. Para hacer esto más claro, acomodaremos términos<sup>15</sup>

$$\mathcal{W}(y_k^{R,I}, \pi_k^{R,I}, \eta) = 2 \left(1 + \frac{1}{k^2 \eta^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{2k}{\hbar L^3} \left(y_k^{R,I}\right)^2\right) \times \exp\left(\frac{2}{k\eta\hbar L^3} y_k^{R,I} \pi_k^{R,I}\right) \exp\left(-\frac{(1+k^2\eta^2)}{2\hbar L^3 k^3 \eta^2} \left(\pi_k^{R,I}\right)^2\right).$$

Comparando con

<sup>14</sup>La función de Wigner es adimensional.

<sup>15</sup>En este reacomodo se utilizó

$$\gamma = \frac{4\zeta}{k\eta} \left(y_k^{R,I}\right)^2.$$

$$f(x, y) = A \exp \left( - \left( a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 \right) \right),$$

vemos que la gaussiana está centrada en  $(0, 0)$ , y sus coeficientes son<sup>16</sup>

$$a = \frac{2k}{\hbar L^3}, \quad b = -\frac{2}{k\eta\hbar L^3}, \quad c = \frac{(1 + k^2\eta^2)}{2\hbar L^3 k^3 \eta^2},$$

la aparición del término cruzado (es decir,  $b \neq 0$ ) es indicativo que los ejes principales de las secciones transversales de la gaussiana están girados respecto a los ejes  $(y_k^{R,I}, \pi_k^{R,I})$ . Estamos interesados en las dispersiones de ambas variables ( $\sigma_{y_k^{R,I}}$  y  $\sigma_{p_k^{R,I}}$ ). Para obtenerlas rotaremos los ejes para obtener una gaussiana bidimensional en su forma normal<sup>17</sup>.

Es conocido que la ecuación de una cónica,

$$C = a_{11} \left( y_k^{R,I} \right)^2 + a_{22} \left( \pi_k^{R,I} \right)^2 + 2a_{12} y_k^{R,I} \pi_k^{R,I} + 2a_{01} y_k^{R,I} + 2a_{02} \pi_k^{R,I} + a_{00} = 0,$$

se puede expresar de una forma matricial

$$C = \begin{pmatrix} 1 & y_k^{R,I} & p_k^{R,I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_k^{R,I} \\ p_k^{R,I} \end{pmatrix},$$

A la matriz central, que llamaremos  $\mathcal{A}$  se le conoce como *matriz de la cónica*. De aquí también se puede definir la matriz  $A_0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

Se puede demostrar que la matriz  $A_0$  define el tipo de cónica y los ejes principales de la misma. La ecuación característica de  $A_0$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - A_0) = \lambda^2 - \text{Tr}(A_0)\lambda + \det(A_0), \quad (3.78)$$

En nuestro caso en particular

<sup>16</sup>Las unidades son:  $[a] = (ML^5)^{-1}$ ,  $[b] = (ML^4)^{-1}$  y  $[c] = (ML^3)^{-1}$ . Las unidades de  $y_k^{R,I}$  y  $p_k^{R,I}$  son  $[y_k^{R,I}] = M^{1/2}L^{5/2}$  y  $[p_k^{R,I}] = M^{1/2}L^{3/2}$ .

<sup>17</sup>Nótese que reescalamos el eje  $\pi_k$  a  $\Pi_k = \pi_k/k$  e hicimos una simple rotación (i.e.  $y_k^{R,I} = y_k^{R,I} \cos \Theta_k + \Pi_k^{R,I} \sin \Theta_k$ ,  $\Pi_k^{R,I} = \Pi_k^{R,I} \cos \Theta_k - y_k^{R,I} \sin \Theta_k$ )

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a & b/2 \\ 0 & b/2 & c \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix},$$

donde  $a, b$  y  $c$  están dados arriba. La ecuación característica (3.78) es

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - \frac{b^2}{4}) = 0.$$

Se puede observar que  $ac$  y  $b^2$  son dimensionalmente compatibles, pero que  $a$  y  $c$  no lo son. Para arreglar esto multiplicáremos y dividiremos la variable  $\pi_k^{R,I}$  por  $k$ . Ahora definiremos una nueva variable  $\Pi_k = \pi_k^{R,I}/k$ , y los coeficientes  $a, b$  y  $c$  se convierten en

$$a' = a = \frac{2k}{\hbar L^3}, \quad b' = -\frac{2}{\eta \hbar L^3}, \quad c' = \frac{(1 + k^2 \eta^2)}{2\hbar L^3 k \eta^2},$$

teniendo todos los coeficientes unidades de  $(ML^5)^{-1}$ . La ecuación característica después del escalamiento es

$$\lambda^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1 + 5k^2 \eta^2}{\hbar L^3 k \eta^2} \right) \lambda + \frac{k^2}{\hbar^2 L^6} = 0, \quad (3.79)$$

con soluciones dadas por la fórmula estándar de las ecuaciones cuadráticas<sup>18</sup>:

$$\lambda_{(\pm)} = \frac{1 + 5k^2 \eta^2 \pm \sqrt{1 + 10k^2 \eta^2 + 9k^4 \eta^4}}{4\hbar L^3 k \eta^2}. \quad (3.80)$$

El ángulo de rotación respecto al eje  $y_k^{R,I}$ , se puede obtener mediante

$$\text{tg } 2\Theta_k = \frac{b}{a - c},$$

resultando en

$$2\Theta = \text{arctg} \left( \frac{4k\eta}{1 - 3k^2 \eta^2} \right). \quad (3.81)$$

La ecuación reducida está dada por

$$\lambda_{(+)} y_k'^{R,I} + \lambda_{(-)} \Pi_k'^{R,I} + \frac{\det \mathcal{A}}{\det A_0} = 0, \quad (3.82)$$

<sup>18</sup>Las unidades son  $[\lambda] = (ML^5)^{-1}$

donde  $\det \mathcal{A} / \det A_0 = a_{00}$ . De aquí podemos observar que la elipse en estas nuevas coordenadas es una elipse vertical<sup>19</sup>. La función de Wigner en estos nuevos ejes es

$$\mathcal{W}_{rot} = 2 \left( 1 + \frac{1}{k^2 \eta^2} \right)^{1/4} \exp \left( -\lambda_{(+)} \left( y_k^{R,I} \right)^2 \right) \exp \left( -\lambda_{(-)} \left( \Pi_k^{R,I} \right)^2 \right), \quad (3.83)$$

donde  $\mathcal{W}_{rot} \equiv \mathcal{W}_{rot}(y_k^{R,I}, \Pi_k^{R,I}, \eta)$ . Las dispersiones<sup>20</sup> pueden leerse directamente siendo

$$\sigma_{y_k^{R,I}}^2 = \frac{1}{\lambda_{(+)}}, \quad \sigma_{\Pi_k^{R,I}}^2 = \frac{1}{\lambda_{(-)}}. \quad (3.84)$$

### 3.4.4 Esquema de Colapso à la Wigner

En el capítulo, “Crítica al origen de la estructura propuesta por la Inflación” (cap. 2), se propone que los valores medios de  $\hat{y}_k^{(R,I)}$  y  $\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}$  en el estado posterior al colapso adquieran valores aleatorios independientes, estos esquemas de colapso obviamente estaban ignorando las correlaciones entre las variables canónicas  $\left( \hat{y}_k^{(R,I)}, \hat{\pi}_k^{(y)(R,I)} \right)$  que impone la mecánica cuántica a través del principio de incertidumbre de Heisenberg. En esta sección se propondrá una relación más *natural* que tomará en cuenta la correlación entre las variables  $\hat{y}^{(R,I)}$  y  $\hat{\pi}^{(y)(R,I)}$ . El nuevo esquema de colapso esta basado en la recién calculada función de distribución de Wigner, y propone un colapso donde los valores medios de los estados post-colapso estén dados por<sup>21</sup>

$$\langle \hat{y}_k^{R,I} \rangle_{\Xi} = x_k^{(R,I)} \Lambda_k \cos \theta, \quad (3.85a)$$

$$\langle \hat{\pi}_k^{R,I} \rangle_{\Xi} = x_k^{(R,I)} \Lambda_k k \sin \theta. \quad (3.85b)$$

Es decir, colapsarán a un valor dado por  $x^{(R,I)}$  - la cual es una variable aleatoria gaussiana normalizada centrada en cero - y con una dispersión  $\Lambda_k \angle \theta_k$ , con  $\Lambda_k$  dada por

$$\Lambda_k \equiv 2 \sigma_{P'_k} = 2 \sqrt{\frac{1}{\lambda_{(-)}}} = \frac{4\eta \sqrt{\hbar L^3 k}}{\sqrt{1 + 5k^2 \eta^2 - \sqrt{1 + 10k^2 \eta^2 + 9k^4 \eta^4}}}, \quad (3.86)$$

y  $\Theta_k$  estará dada por (3.81). La dispersión es elegida basándose en el hecho de que la distribución de Wigner del estado vacío de un oscilador armónico es una función gaussiana bidimensional,

<sup>19</sup>Ya que el eigenvalor menor corresponde al eje mayor. Esto se puede observar de la ecuación de la elipse vertical

$$\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{a} = 1, \quad a > b$$

<sup>20</sup>La dispersión estadística de una variable  $x$ , tiene unidades de  $[\sigma_x] = [x^2]$

<sup>21</sup>Se agregó una  $k$  en la segunda ecuación (3.85b) por la definición que se hizo del momento conjugado  $P_k$  para que tuviese las mismas unidades de  $y_k$



entonces,  $\Lambda_k$  está dada por el semi-eje mayor de la elipse definida por la función gaussiana bi-dimensional. Esta elipse corresponde a la frontera de la región en el “espacio de fase” donde la función de Wigner tiene una magnitud de  $1/2$ .

De esta manera, este esquema de colapso no ignora las correlaciones entre las variables canónicas que estaban presentes en el estado anterior del colapso (i.e. , el estado de vacío y en todos los estados), ya que esta información está integrada en la función de distribución de Wigner. La elección de esta función para describir estas correlaciones es justificada [ver por ejemplo 10, 92, 221].

Igualando (2.139) con (3.85) tenemos

$$\sqrt{2}\Re\left(y_k d_k^{R,I}\right) = x_k^{(R,I)} \Lambda_k \cos \theta, \quad (3.87a)$$

$$\sqrt{2}\Re\left(g_k d_k^{R,I}\right) = x_k^{(R,I)} \Lambda_k k \sin \theta, \quad (3.87b)$$

Como vimos en el capítulo 2 es deseable expresar en forma polar a  $d_k^{R,I} = |d_k^{R,I}| e^{i\alpha_k}$ ,  $y_k^{R,I}(\eta) = |y_k^{R,I}| e^{i\beta_k^{R,I}}$  y  $g_k^{R,I}(\eta) = |g_k^{R,I}| e^{i\gamma_k^{R,I}}$  en particular nos interesan estas ecuaciones al tiempo del colapso:  $\eta_c^k$ , para indicar esto usaremos un superíndice  $c$  (de colapso) en los ángulos  $\beta_k$  y  $\gamma_k$ .

Recordando además que,

$$\Re(y_k d_k) = |y_k| |d_k^{(R,I)}| \cos\left(\alpha_k^{(R,I)} + \beta_k\right), \quad [2.150a]$$

$$\Re(g_k d_k) = |g_k| |d_k^{(R,I)}| \cos\left(\alpha_k^{(R,I)} + \gamma_k\right), \quad [2.150b]$$

llegamos al par de ecuaciones

$$|d_k^{R,I}| \cos(\alpha_k + \beta_k) = \frac{1}{\sqrt{2}|y_k|} x_k^{R,I} \Lambda_k \cos \theta, \quad (3.88a)$$

$$|d_k^{R,I}| \cos(\alpha_k + \gamma_k) = \frac{1}{\sqrt{2}|g_k|} x_k^{R,I} \Lambda_k k \sin \theta. \quad (3.88b)$$

Es posible reescribir  $g_k(\eta)$  y  $y_k(\eta)$  en forma polar,

$$|y_k(\eta)| = \sqrt{\frac{1}{2k}} \left( \frac{\sqrt{1+k^2\eta^2}}{k\eta} \right), \quad \beta_k = - \left[ k\eta + \arctg\left(\frac{1}{k\eta}\right) \right], \quad [2.149a]$$

$$|g_k(\eta)| = \sqrt{\frac{k}{2}}, \quad \gamma_k = - \left( k\eta + \frac{\pi}{2} \right) \quad [2.149b]$$

Usando las identidades trigonométricas

$$\cos^2(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \sin^2(\arctg x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad (3.89)$$

Las ecuaciones (3.88) quedan ahora

$$\frac{|d_k^{R,I}|}{\sqrt{1+k^2\eta^2}} \left\{ \cos(\alpha_k^{R,I} - k\eta)k\eta + \sin(\alpha_k^{R,I} - k\eta) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}|y_k|} x_k^{R,I} \Lambda_k \cos \theta \quad (3.90a)$$

$$|d_k^{R,I}| \sin(\alpha_k^{R,I} - k\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}|g_k|} x_k^{R,I} \Lambda_k k \sin \theta \quad (3.90b)$$

Sustituyendo (3.90b) en (3.90a), obtenemos una expresión para  $|d_k^{R,I}|$ :

$$|d_k^{R,I}| = \frac{x_k^{R,I} \Lambda_k}{\sqrt{2}|y_k||g_k|} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha_k^{R,I} - k\eta)k\eta} \left( \sqrt{1+k^2\eta^2}|g_k| \cos \theta - k|y_k| \sin \theta \right) \quad (3.91)$$

insertando esta ecuación en (3.90b)

$$(\alpha_k^{R,I} - k\eta) = \arctg \left( \frac{k\eta \sin \theta}{k\eta \cos \theta - \sin \theta} \right), \quad (3.92)$$

Usando de nuevo las identidades (3.89), podemos expresar  $\cos(\alpha - k\eta)$  y  $\sin(\alpha - k\eta)$  de la forma siguiente

$$\cos(\alpha_k - k\eta) = \frac{k\eta \cos \theta - \sin \theta}{\sqrt{k^2\eta^2 - 2k\eta \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}}, \quad (3.93a)$$

$$\sin(\alpha_k - k\eta) = \frac{k\eta \sin \theta}{\sqrt{k^2\eta^2 - 2k\eta \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}}. \quad (3.93b)$$

Entonces podemos expresar (3.91) como

$$|d_k^{R,I}| = \frac{x_k^{R,I} \sqrt{k}}{k\eta} \Lambda_k \sqrt{k^2\eta^2 - 2k\eta \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta} \quad (3.94)$$

El valor de expectación del momento conjugado de  $\widehat{\delta\varphi}_k$  en el estado post-colapso  $|\Omega\rangle$  es

$$\langle \widehat{\delta\varphi}_k' \rangle_\Omega = \frac{|g_k|}{a} \left[ |d_k^R| \cos(\alpha_k^R + \gamma_k + \Delta_k) + i |d_k^I| \cos(\alpha_k^I + \gamma_k + \Delta_k) \right], \quad [2.154]$$

donde será bueno recordar que  $\gamma_k$  no está evaluada en  $\eta_c$  y  $\Delta_k \equiv k(\eta - \eta_k^c)$  es el tiempo transcurrido desde el colapso. Insertando (3.94) en el valor de expectación del estado post-colapso

$$\langle \widehat{\delta\varphi}_k' \rangle_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2a}|y_k|} \frac{\Lambda_k}{k\eta} \left( x_k^R + i x_k^I \right) \times \left[ k^2\eta|y_k| \cos \Delta_k \sin \theta + \sin \Delta_k \left( |g_k| \cos \theta \sqrt{1+k^2\eta^2} - k|y_k| \sin \theta \right) \right], \quad (3.95)$$

usando una vez más las identidades trigonométricas (3.89) pero ahora aplicadas al ángulo  $\Theta_k$  (3.81) y sustituyendo (3.86) en esta expresión llegamos a

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{\phi}'_k \rangle_\Omega = & \frac{2}{a(\eta_c)} \cdot \frac{k\eta_c \sqrt{\hbar L^3 k}}{(1 + 10k^2\eta_c^2 + 9k^4\eta_c^4)^{1/4}} \cdot \frac{x_k^R + ix_k^I}{\sqrt{1 + 5k^2\eta_c^2 - \sqrt{1 + 10k^2\eta_c^2 + 9k^4\eta_c^4}}} \\ & \left\{ \cos \Delta_k \sqrt{\sqrt{1 + 10k^2\eta_c^2 + 9k^4\eta_c^4} - 1 + 3k^2\eta_c^2} + \right. \\ & \left. \text{sen } \Delta_k \left[ \sqrt{\sqrt{1 + 10k^2\eta_c^2 + 9k^4\eta_c^4} + 1 - 3k^2\eta_c^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{k\eta_c} \sqrt{\sqrt{1 + 10k^2\eta_c^2 + 9k^4\eta_c^4} - 1 + 3k^2\eta_c^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Ahora tomaremos el valor medio del ensamble *imaginario de universos* del cuadrado de  $\langle \delta \hat{\phi}'_k \rangle_\Omega$  (cf. §2.7.3 para una mayor explicación), dejando afuera el factor de  $\hbar L^3 k / 4a^2$ , y lo denominaremos  $C_{Wigner}(k)$

$$\begin{aligned} C_{Wigner}(k) = & \frac{32z_k^2}{\sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4}} \cdot \frac{1}{1 + 5z_k^2 - \sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4}} \\ & \left\{ \left[ \sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4} - 1 + 3z_k^2 \right] \left( \cos \Delta_k - \frac{\text{sen } \Delta_k}{z_k} \right)^2 + \right. \\ & \left. \text{sen}^2 \Delta_k \left[ \sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4} - 3z_k^2 - 7 \right] + 8z_k \cos \Delta_k \text{sen } \Delta_k \right\}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

donde se ha reemplazado  $k\eta_k^c(k)$  por  $z_k$ . Por lo tanto la cantidad observacional (2.161) es

$$|\alpha_{lm}|_{ML}^2 = \frac{s^2 \hbar}{2\pi a^2} \int \frac{C_{Wigner}(x/R_D)}{x} \mathcal{T}(x/R_D)^2 j_l^2(x) dx. \quad (3.98)$$

Con esta expresión podemos comparar las predicciones de este esquema de colapso con las observaciones, análisis que se hará en la sección 3.5. Antes de hacerlo, es preciso recordar que los resultados observacionales estándar son obtenidos si la función  $C$  es una constante, y para poder obtener una función constante, en este, o en los otros esquemas estudiados hasta ahora, parece haber sólo una opción: que  $z_k$  sea independiente de  $k$  indicando así, que el tiempo de colapso para el modo  $k$ ,  $\eta_k^c$  dependa de inversamente de  $k$ ,  $\eta_k^c = z/k$ , donde  $z$  es constante e independiente de  $k$ .

### 3.5 Comparación de los diferentes esquemas de colapso y las observaciones

Hemos estudiado tres diferentes esquemas de colapso, teniendo todos ellos diferentes comportamientos al tiempo de colapso  $\eta_k^c$  sobre el nuevo valor de expectación del estado posterior al colapso. En el primer esquema propuesto en [170] y estudiado en el capítulo 2, ambos, el valor de expectación del campo escalado  $\hat{y}_k^{(R,I)}$  y el valor de expectación del momento conjugado  $\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}$  en el estado post-colapso,  $|\Omega\rangle$ , están distribuidos aleatoriamente en los respectivos rangos de las incertidumbres del estado pre-colapso y no se encuentran correlacionados. De una manera más precisa el valor al tiempo  $\eta_k^c$  está determinado por

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_\Omega = x_1^{(R,I)} \sqrt{(\Delta y_k^{(R,I)})_0^2}, \quad \langle \hat{\pi}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_\Omega = x_2^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \pi_k^{(R,I)})_0^2}, \quad (3.99)$$

y su espectro de potencias resultante es

$$C_1(k) = 1 + \frac{2}{z_k^2} \text{sen}^2 \Delta_k + \frac{1}{z_k} \text{sen}(2\Delta_k). \quad [2.162]$$

El segundo esquema de colapso, también propuesto en [170], tiene la forma

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_\Omega = 0, \quad \langle \hat{\pi}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_\Omega = x_2^{(R,I)} \sqrt{(\Delta \pi_k^{(R,I)})_0^2}, \quad (3.100)$$

está inspirado en el hecho, que en la ecuación (2.143) sólo el momento conjugado del campo inflatónico aparece como fuente<sup>22</sup>, por lo tanto, su valor de expectación cambia de cero a otro valor dado por el rango de incertidumbre del momento conjugado en el estado vacío, por otra parte, después del colapso, el valor de expectación de  $\hat{y}_k$  permanece sin cambio, i.e. , es cero. Su espectro de potencias es

$$C_2(k) = 1 + \text{sen}^2 \Delta_k \left( 1 - \frac{1}{z_k^2} \right) - \frac{1}{z_k} \text{sen}(2\Delta_k). \quad [2.163]$$

El último esquema estudiado (ver sección 3.4) y propuesto por vez primera en [45] es, en el sentido siguiente, más natural, ya que toma en cuenta las correlaciones entre los valores de expectación del campo y de su momento conjugado en el estado anterior al colapso, tal como es codificado por la distribución de Wigner.

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_\Omega = x_k^{(R,I)} \Lambda_k \cos \Theta_k, \quad \langle \hat{\pi}_k^{(R,I)}(\eta_k^c) \rangle_\Omega = x_k^{(R,I)} \Lambda_k k \text{sen} \Theta_k, \quad (3.101)$$

donde  $\Lambda_k$  está dado por el semi-eje mayor de la elipse caracterizada por la función bidimensional gaussiana definida por la frontera en el "espacio de fase" donde la función de Wigner tiene una

<sup>22</sup>Recuérdese que esta ecuación es sólo a primer orden, a órdenes posteriores ambos valores de expectación aparecen, ver A

magnitud mayor a  $1/2$  y  $\Theta_k$  es el ángulo entre este eje y el eje de  $y_k^{R,I}$ . Aquí repetimos su espectro de potencias (3.97) para ayudar a la comparación:

$$C_{Wigner}(k) = \frac{32z_k^2}{\sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4}} \cdot \frac{1}{1 + 5z_k^2 - \sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4}} \left\{ \left[ \sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4} - 1 + 3z_k^2 \right] \left( \cos \Delta_k - \frac{\text{sen} \Delta_k}{z_k} \right)^2 + \text{sen}^2 \Delta_k \left[ \sqrt{1 + 10z_k^2 + 9z_k^4} - 3z_k^2 - 7 \right] + 8z_k \cos \Delta_k \text{sen} \Delta_k \right\}. \quad (3.97)$$

Podemos ver que la expresión  $C_{Wigner}$  (ecuación 3.97) es más complicada que la de  $C_2$  (ecuación 2.163) y que la de  $C_1$  (ecuación 2.162).

En todos los esquema  $x_{1,2}^{(R,I)}$  son variables aleatorias caracterizados por una distribución Gaussiana centrada en cero y con dispersión uno.

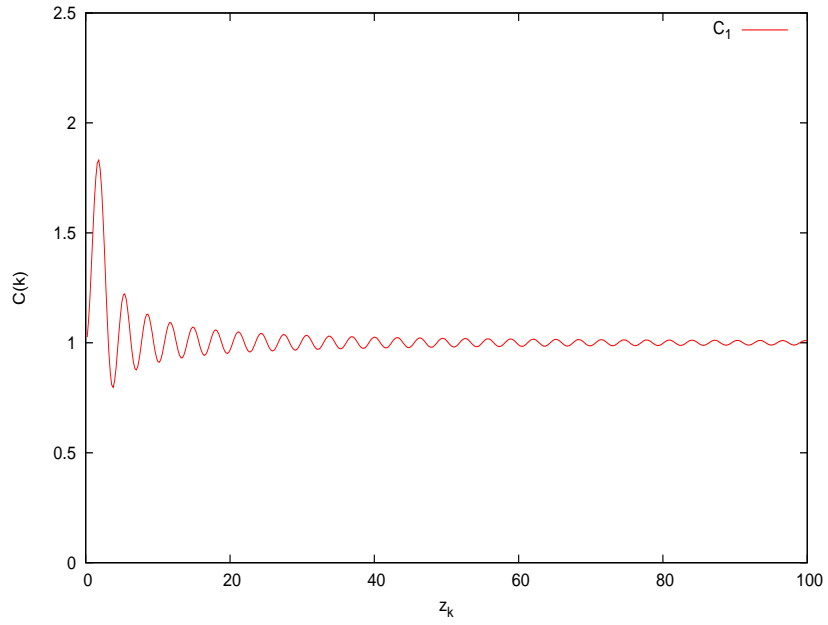
A pesar del hecho de que la expresión para  $C_{Wigner}$  aparece mucho más complicada que  $C_2$ , su dependencia en  $z_k$  es muy similar, excepto en la amplitud de las oscilaciones. (ver figuras 3.2 y 3.3). Otro hecho interesante que puede ser detectado en el comportamiento de los diferentes esquemas de colapso se observa al considerar el límite  $z_k \rightarrow \pm\infty$ . Así vemos que  $C_1(k) \rightarrow 1$  recuperando el espectro invariante de escala estándar, mientras que  $C_2(k)$  o  $C_{Wigner}(k)$  no tienen un límite bien definido (ver figuras 3.2 y 3.3).

### 3.5.1 Un único colapso

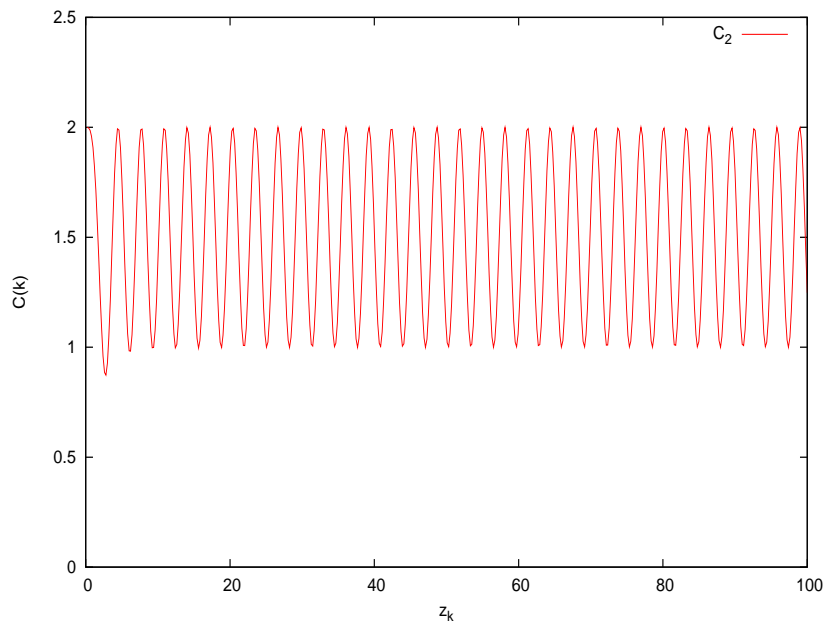
Nuestro objetivo, en esta sección es comparar estas gráficas con el espectro invariante de escala predicho por Harrison- Zel'dovich y que es generado por varios modelos inflacionarios (i.e. un valor constante para  $2l(l+1)|\alpha_{lm}|^2$ ) y no directamente con el espectro observado. En el análisis siguiente nos concentraremos en el espectro primordial e ignoraremos los efectos de la física que corresponde al recalentamiento y a las oscilaciones acústicas (representadas mediante las funciones de transferencia  $\mathcal{T}(k)$ , cf. §2.5). Un estudio considerando los efectos tardíos con datos empíricos requeriría un análisis que está fuera del alcance de esta tesis.

Recordemos que  $C(k)$  encapsula todos los detalles del esquema de colapso en el espectro de potencias observacional.

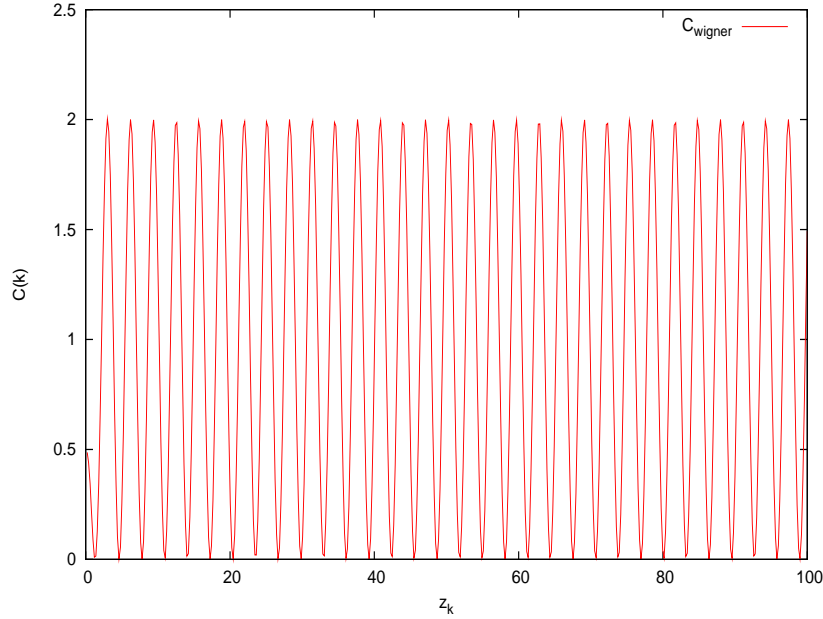
El espectro de potencias observado es recuperado tomando  $C(k) = 1$ . Dado esto, podemos investigar en particular que tan sensibles son las predicciones de los diferentes esquemas, ante pequeños desvíos del caso en el cual  $z_k$  es independiente de  $k$ , que, como se argumentó arriba, nos lleva a una concordancia precisa con el espectro de potencias estándar. Para poder llevar a cabo este análisis,



**Figura 3.1:**  $C_1$  del esquema de colapso independiente, en el ambas variables de campo  $\hat{y}_k^{(R,I)}$  y  $\hat{\pi}_k^{(y)(R,I)}$  colapsan a un valor aleatorio de manera independiente de la incertidumbre del estado de vacío.



**Figura 3.2:**  $C_{Wigner}$ , esquema de colapso de Wigner. Este esquema propone una correlación entre los valores posteriores al colapso determinada por la distribución de Wigner del estado de vacío.



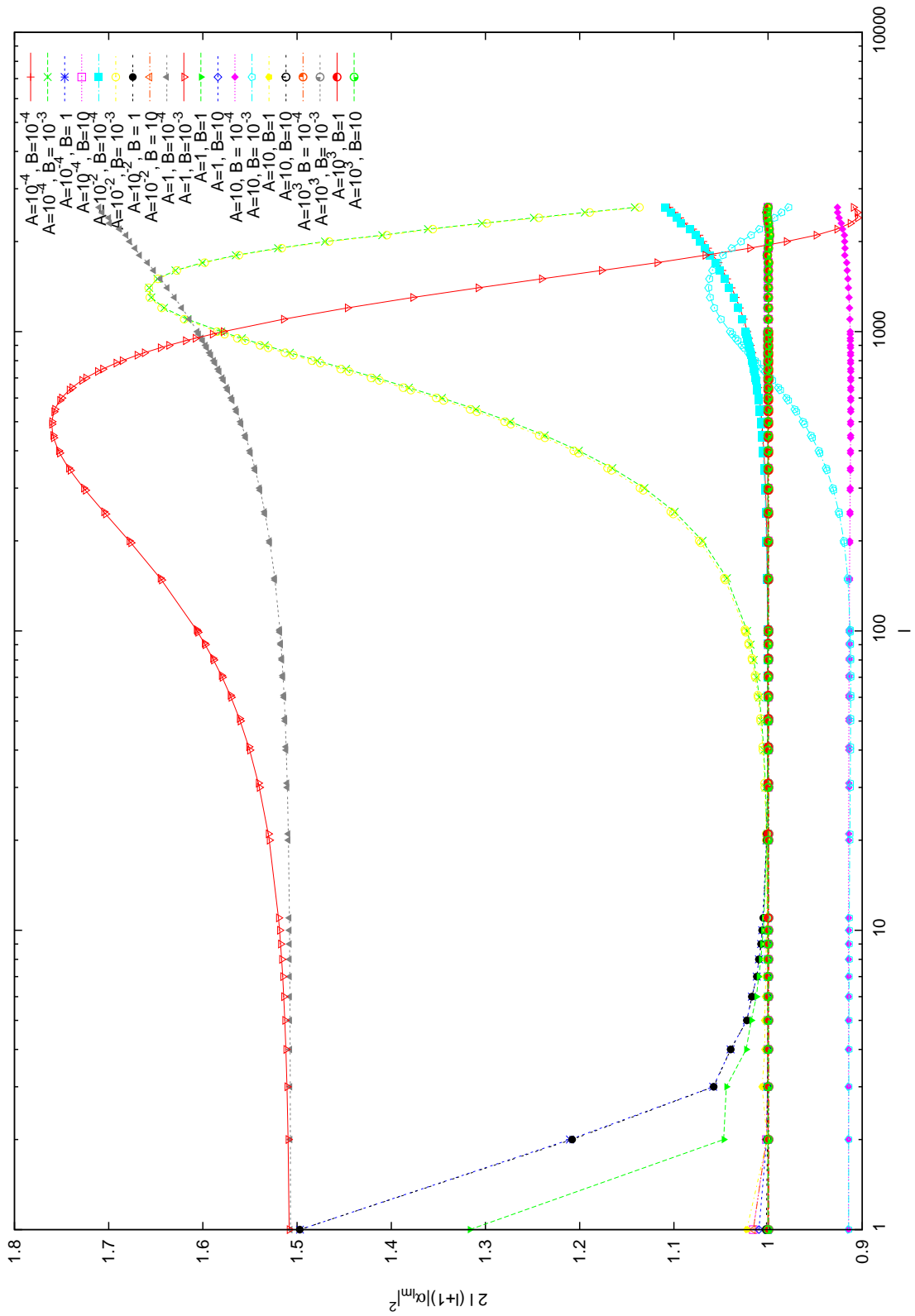
**Figura 3.3:**  $C_{Wigner}$ , esquema de colapso de Wigner. Este esquema propone una correlación entre los valores posteriores al colapso determinada por la distribución de Wigner del estado de vacío.

debemos de evaluar las integrales (2.161) para los esquemas de colapso caracterizados por las funciones  $C_1(k)$ ,  $C_2(k)$  y  $C_{Wigner}(k)$ . Será conveniente definir la cantidad adimensional  $\tilde{z}_x \equiv xN(x)$ , donde  $x = kR_D$  y  $N(x) \equiv \eta_{k(x)}^c / R_D$ . Se supondrá lo siguiente: (a) La evolución de las cantidades de interés (e.g.  $\langle \widehat{\delta\varphi}_k \rangle$ ) desde el colapso hasta el final de la inflación, es más significativa que la evolución desde el fin de inflación hasta nuestros días, entonces usaremos  $\Delta_k = -\tilde{z}_x$ ; (b) Para explorar la robustez del esquema ante pequeñas desviaciones de “la receta  $z_k$  es independiente de  $k$ ” considerando perturbaciones lineales de esto, caracterizadas por  $\tilde{z}_x$  as  $\tilde{z}_x = A + Bx$ . Nótese que en estas unidades  $A$  y  $B$  son adimensionales.

Las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 reflejan la manera en la que el espectro se comporta como función de  $l$ , debemos recordar que la predicción estándar (ignorando física tardía como las oscilaciones del plasma) es una línea horizontal. Estas gráficas representan varios valores de  $A$  y  $B$  elegidos como muestra para cubrir un dominio relativamente amplio. Las gráficas (3.7, 3.8 y 3.9) muestran la forma del espectro para varias elecciones del valor  $B$  manteniendo el valor de  $A$  fijo.

Como se observó antes, el comportamiento de  $C_2$  (fig. 3.5) y  $C_{Wigner}$  (fig. 3.6) es cualitativamente similar, siendo su principal diferencia las amplitudes de la oscilación del funcional.

De estos resultados podemos obtener algunas constricciones razonables a los valores de  $A$  y  $B$  para los diferentes esquemas de colapso. En el estudio numérico realizado se exploraron diferentes valores de  $A$  y  $B$ ,  $A = \{0.0001, 0.01, 1, 10, 1000\}$  y  $B = \{0.0001, 0.001, 1, 10\}$ . Para cuantificar la



**Figura 3.4:** Gráfica semilogarítmica de  $|\alpha_{lm}|^2(C_1(k))$  para diferentes valores de  $(A, B)$  representando que tan robusto es el esquema de colapso cuando se desvía de  $z_k$  constante. La abscisa es el multipolo  $l$  hasta  $l = 2600$ .



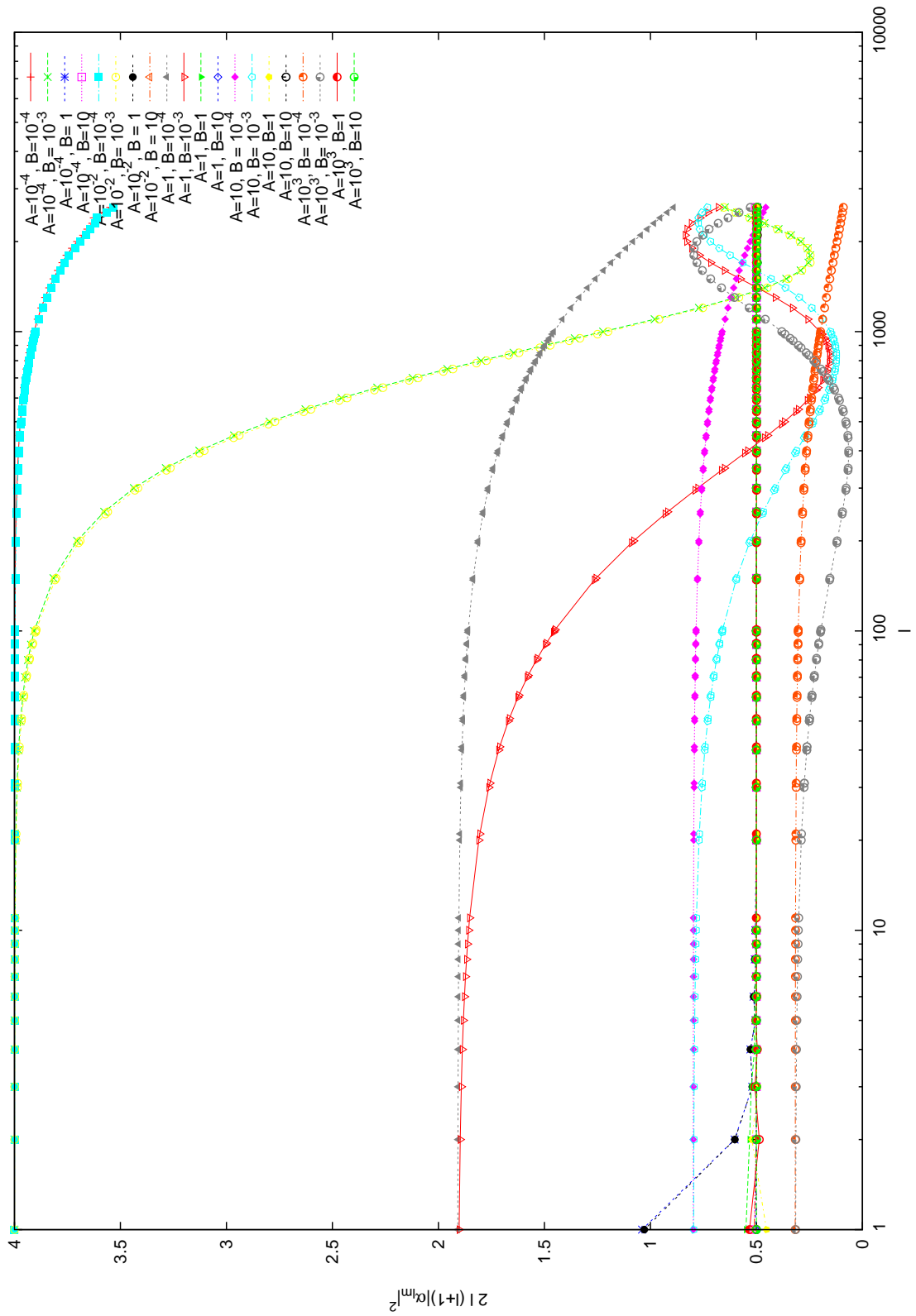
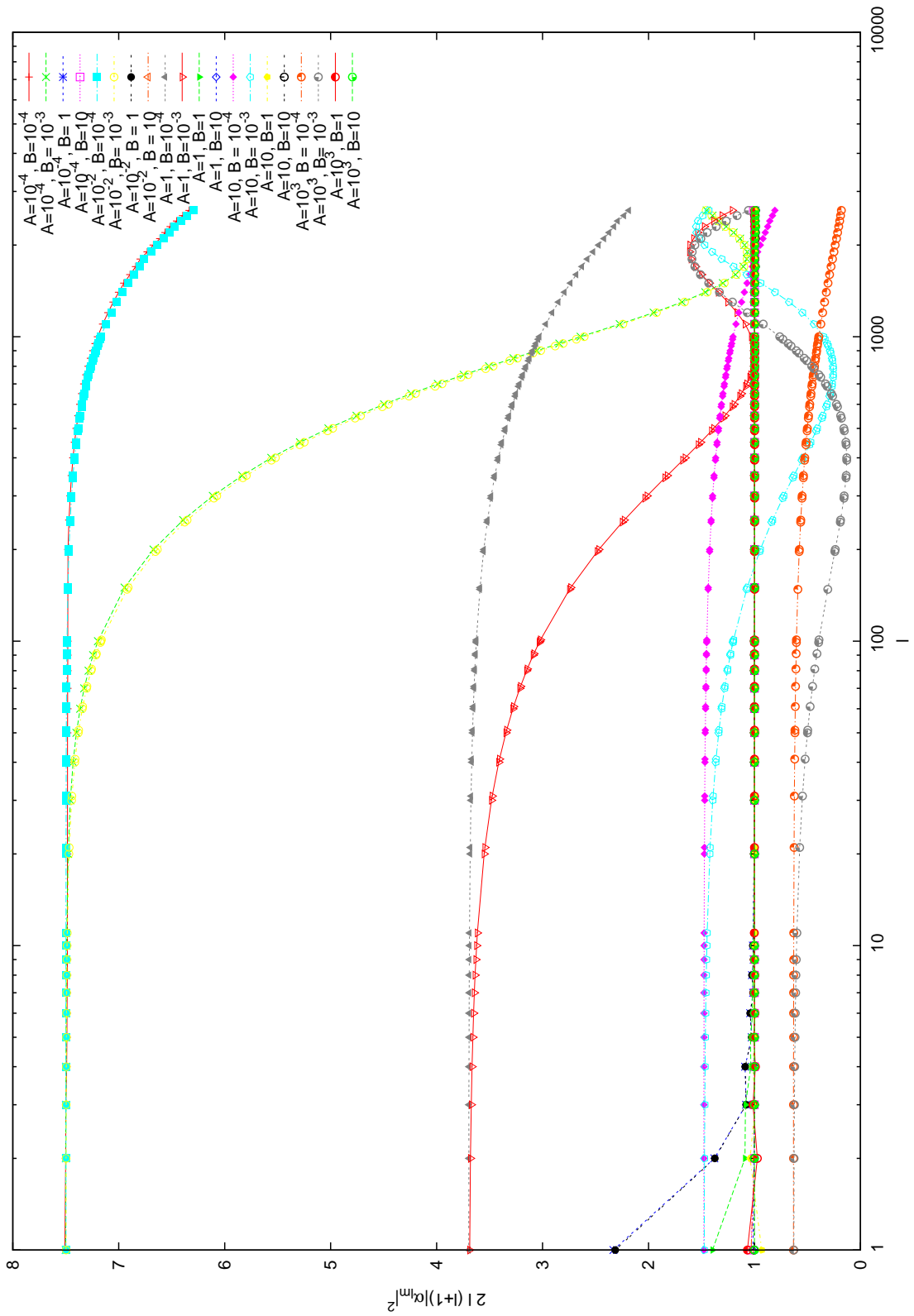
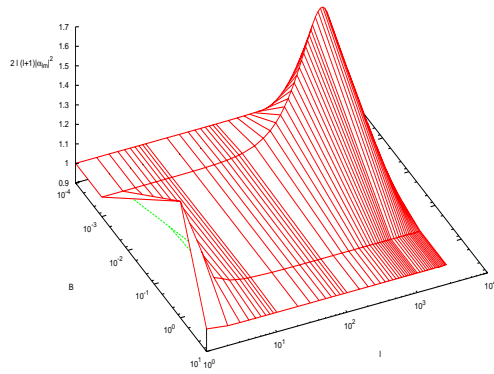


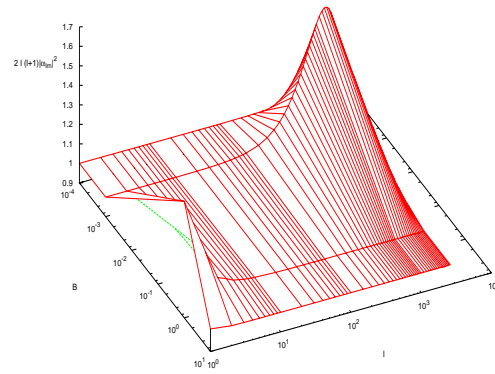
Figura 3.5: Gráfica semilogarítmica de  $|\alpha_{lm}|^2(C_2(k))$  para diferentes valores de  $(A, B)$  representando que tan robusto es el esquema de colapso cuando se desvía de  $z_k$  constante. La abscisa es el multipolo  $l$  hasta  $l = 2600$ .



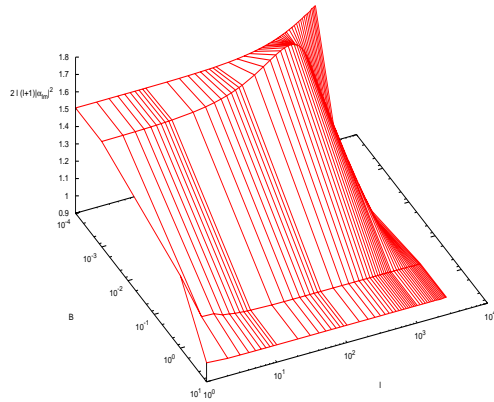
**Figura 3.6:** Gráfica semilogarítmica de  $|\alpha_{lm}|^2(C_{Wigner}(k))$  para diferentes valores de  $(A, B)$ , representando que tan robusto es el esquema de colapso cuando se desvía de  $z_k$  constante. La abscisa es el multipolo  $l$  hasta  $l = 2600$ .



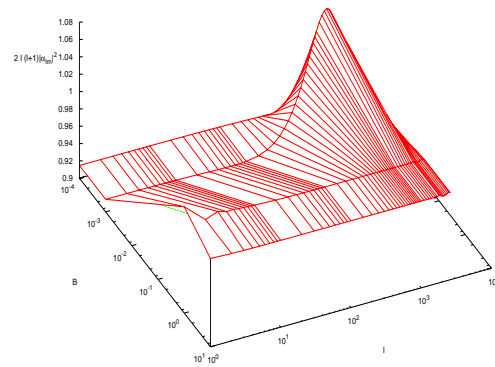
(a)  $C_1(k)$ ,  $A = 10^{-4}$



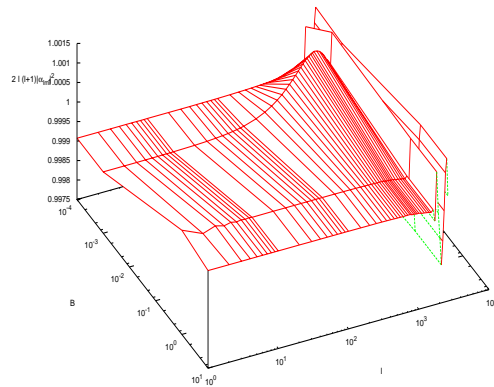
(b)  $C_1(k)$ ,  $A = 10^{-3}$



(c)  $C_1(k)$ ,  $A = 1$



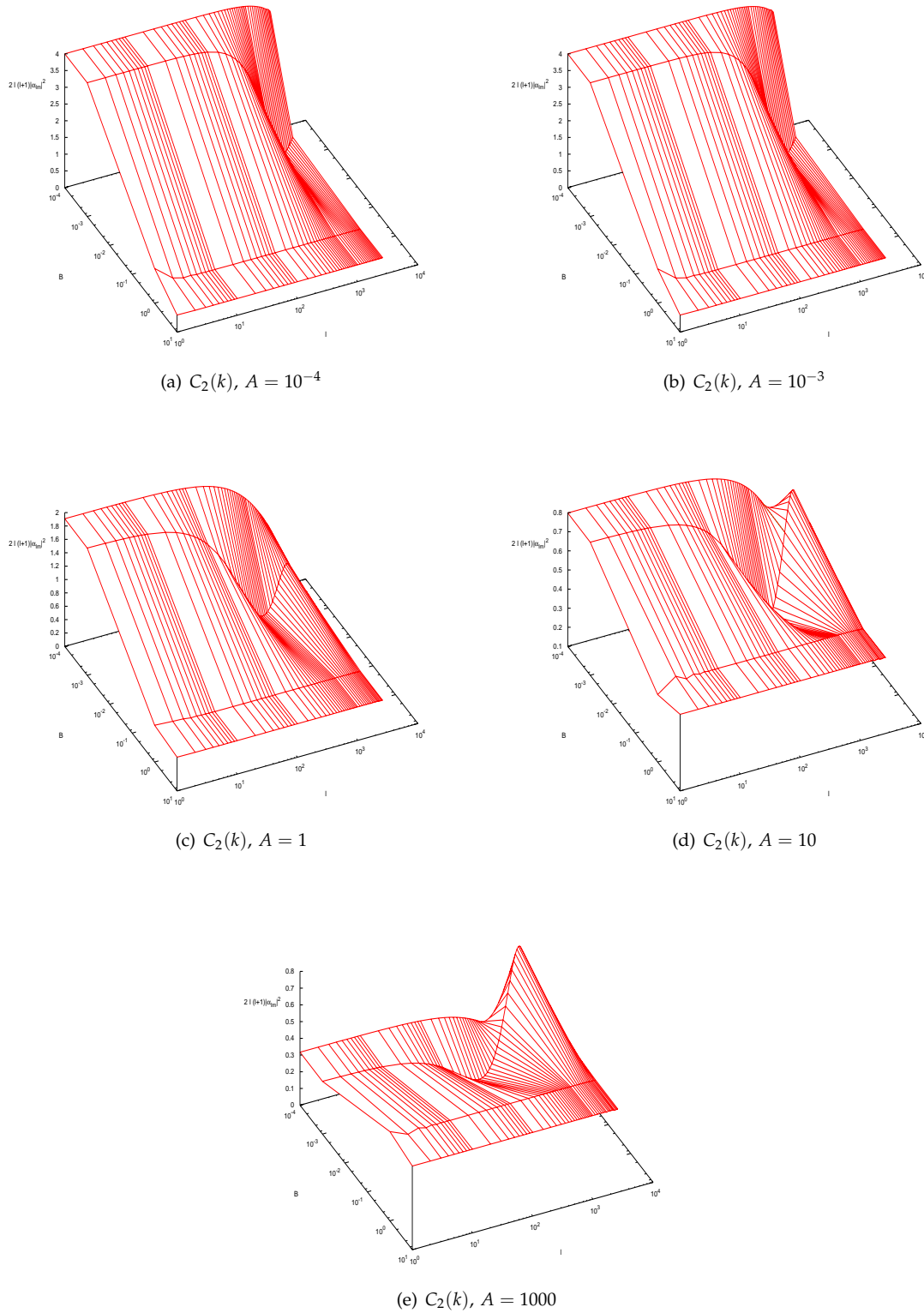
(d)  $C_1(k)$ ,  $A = 10$



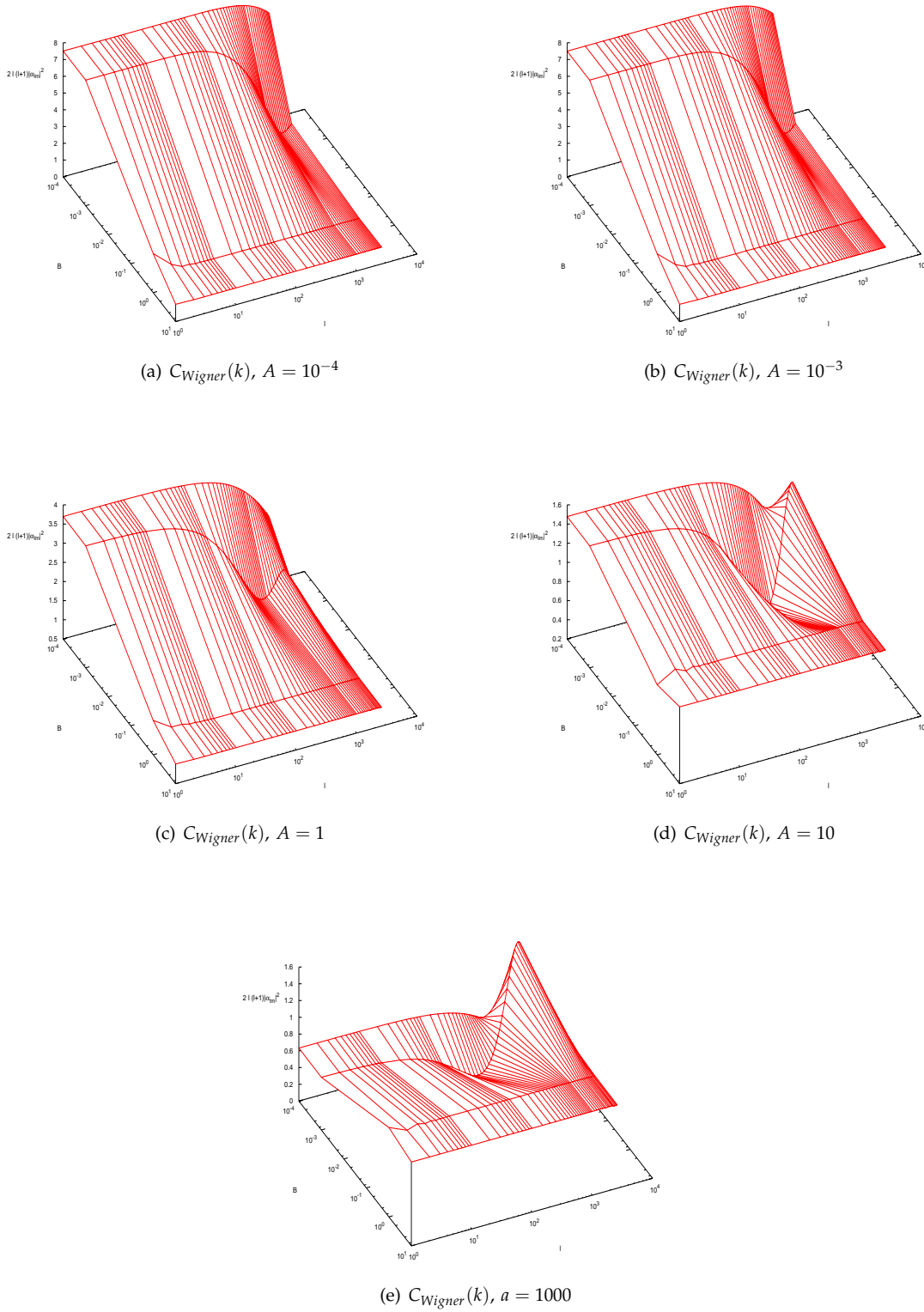
(e)  $C_1(k)$ ,  $A = 1000$

**Figura 3.7:** Gráfica mostrando como la integral de  $|\alpha_{1m}|^2(C_1)$  varía con respecto a cambios en  $B$  ( $10^{-4} - 10$ ), manteniendo  $A$  fija. Ambos ejes  $B$  y  $l$  están en escala logarítmica. Ver el texto para una explicación más extensa.

ESTUDIO DETALLADO DE LOS ESQUEMAS DE COLAPSO



**Figura 3.8:** Gráfica mostrando como la integral de  $|\alpha_{1m}|^2(C_2)$  varía con respecto a cambios en  $B$  ( $10^{-4} - 10$ ), manteniendo  $A$  fija. Ambos ejes  $B$  y  $l$  están en escala logarítmica. Ver el texto para una explicación más extensa.



**Figura 3.9:** Gráfica mostrando como la integral de  $|\alpha_{lm}|^2(C_{Wigner})$  varía con respecto a cambios en  $B$  ( $10^{-4} - 10$ ), manteniendo  $A$  fija. Ambos ejes  $B$  y  $l$  están en escala logarítmica. Ver el texto para una explicación más extensa.

robustez del esquema de colapso se utilizó simplemente una desviación de la siguiente forma

$$\Delta_{l_{max}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{l_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} \left[ l(l+1) \cdot \frac{1}{(2l+1)} \sum_m |\alpha_{lm}|_{colapso}^2 - S \right]^2}}{S}, \quad (3.102)$$

donde  $S$  representa el espectro plano dado por  $S \equiv \frac{1}{l_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} (l(l+1) \frac{1}{2l+1} \sum_m |\alpha_{l,m}|^2)$ . Se considerará que una desviación aceptable es aquella menor a 10 %, i.e.  $\Delta_{l_{max}} < 0.1$ , donde  $l_{max} = 1500$ . Haciendo el análisis numérico, obtendremos, para los diversos esquemas de colapso los rangos permitidos correspondientes para  $A$  y  $B$ . Los resultados de este análisis son presentados en la tabla 3.3.

**Tabla 3.1:** Valores de  $A$  y  $B$  para los cuales se obtuvieron los mejores desempeños de la robustez de los diferentes esquemas de colapso.

Esquema de colapso	A	B	$\Delta_{l_{max}}$ (%)
$C_1$	10	1	0.195523
$C_2$	1000	1	0.208227
$C_{Wigner}$	0.0001	10	0.162458

El mejor comportamiento de cada uno de los diferentes esquemas de colapso se muestran en la tabla 3.1. Hay que mencionar que se obtuvieron varios valores que cumplían con la condición  $\Delta_{l_{max}} < 0.1$ :  $C_1$  tuvo 15 (y se podría considerar uno más que apenas sobrepasa el 10 % de desviación),  $C_2$  12 y  $C_{Wigner}$  10 (aunque en este último esquema de colapso hay tres valores más apenas por encima del 10 %). Los peores valores de  $A$  y  $B$  son mostrados en la tabla 3.2.

**Tabla 3.2:** Valores de  $A$  y  $B$  para los cuales se obtuvieron los peores desempeños de la robustez de los diferentes esquemas de colapso.

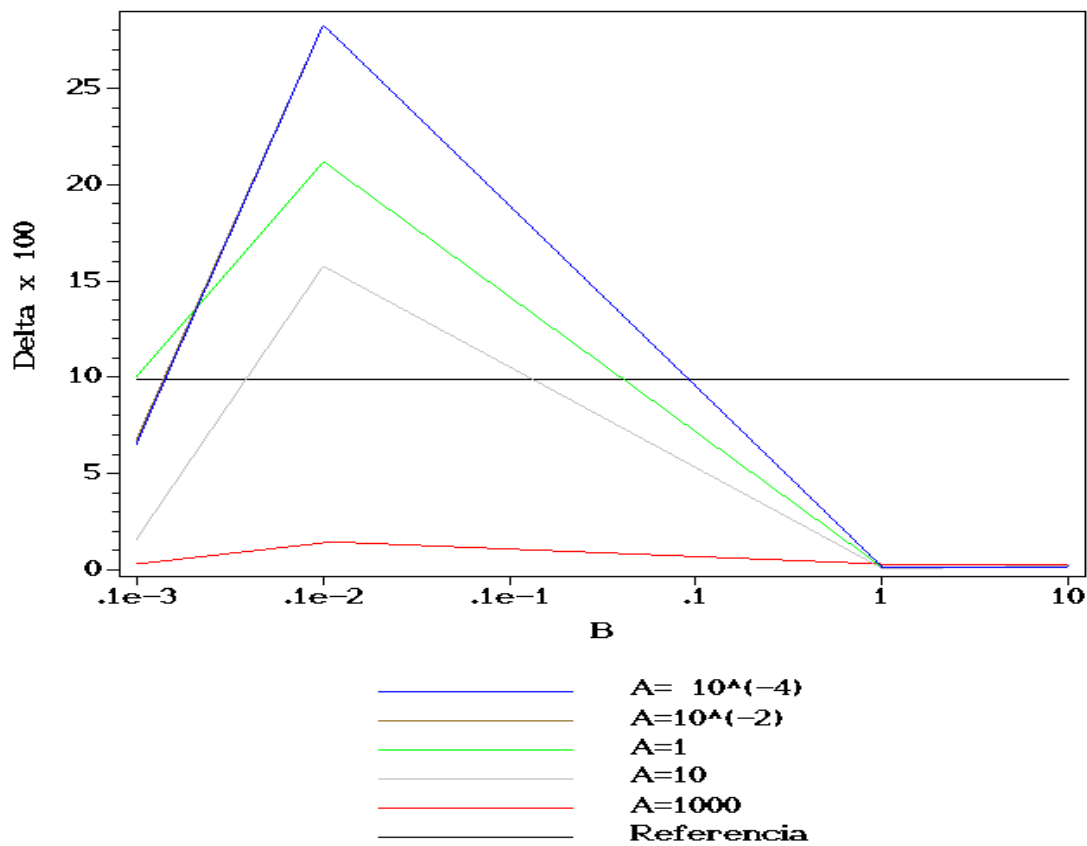
Esquema de colapso	A	B	$\Delta_{l_{max}}$ (%)
$C_1$	0.0001	0.001	28.3844
$C_2$	1000	0.001	56.2369
$C_{Wigner}$	1000	0.001	56.2646

Presentando la información de la tabla 3.3 en gráficas por esquema de colapso se puede extraer más información sobre los mismos. Las figuras 3.10, 3.11 y 3.12 tienen escalado logarítmicamente el eje  $x$ , el cual representa los distintos valores de  $B$ . El eje vertical representa el porcentaje de desviación (ecuación 3.102), i.e.  $\Delta_{l_{max}} \times 100$ .

**Tabla 3.3:** Robustez del espectro de los diferentes esquemas de colapso cuando los parámetros  $(A, B)$  son variados entre  $10^{-4} \leq A \leq 10^3$  y  $10^{-4} \leq B \leq 10$ . Los mejores valores están resaltados.

A	B	$\Delta_{lmax} \times 100$		
		$C_1(k)$	$C_2(k)$	$C_{Wigner}(k)$
0.0001	0.0001	6.63019	7.92849	10.0763
0.0001	0.001	28.3844	53.9872	47.3616
0.0001	1	0.288273	0.423473	0.506768
0.0001	10	0.301883	0.249129	0.162458
0.01	0.0001	6.84475	8.12093	10.2874
0.01	0.001	28.3706	54.2265	47.494
0.01	1	0.282546	0.277929	0.359852
0.01	10	0.301614	0.251313	0.165756
1	0.0001	10.1258	21.8266	18.445
1	0.001	21.3117	50.6328	34.1731
1	1	0.247444	0.312876	0.358535
1	10	0.341509	0.443572	0.394309
10	0.0001	1.67782	18.4953	19.3128
10	0.001	15.8869	46.1397	45.1946
10	1	0.195523	0.917963	0.51842
10	10	0.384265	0.445398	0.430548
1000	0.0001	0.44236	28.9085	28.9273
1000	0.001	1.58567	56.2369	56.2646
1000	1	0.394892	0.208227	0.197662
1000	10	0.402706	0.434914	0.445794

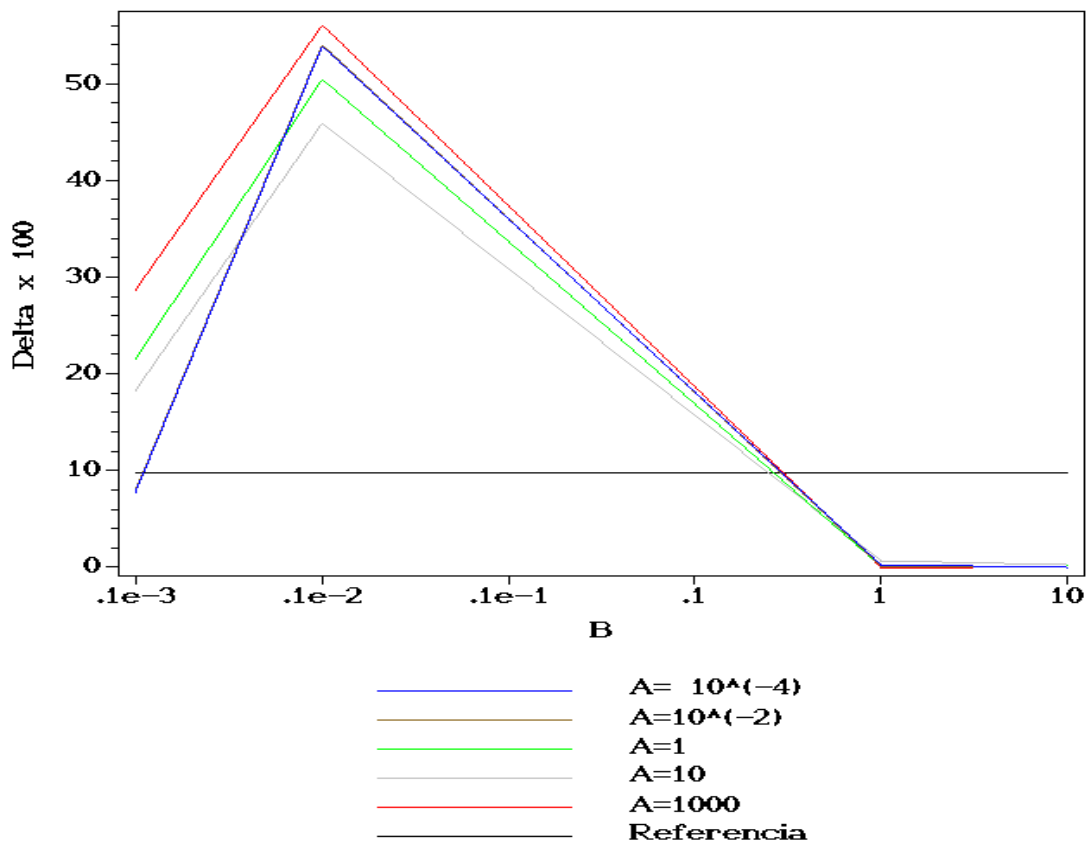
Primero se presenta la gráfica que muestra el desempeño del esquema de colapso uno (figura 3.10). En esta figura podemos notar que el peor comportamiento ocurre en  $B = 0.001$  indistintamente del valor tomado por  $A$ , esta característica aparecerá en todos los esquemas de colapso. También se advierte en esta gráfica la existencia de un valor de  $A$  ( $A = 1000$ ) el cual se ve poco afectada por el cambio de  $B$  en el rango estudiado ( $B \in [0.0001, 10]$ ). Otra característica a observar es que el comportamiento numérico de los valores de  $A = 0.0001$  y  $A = 0.01$  son casi indistinguibles con la resolución mostrada en la figura en rango de  $B$  explorado (aunque muestra ligeras desviaciones para valores de  $B$  mayores, cf. ver las gráficas 3.13) este comportamiento (justamente en los mismos valores de  $A$ ) estará presente en los esquemas de otros dos esquemas de colapso, por último, en la gráfica de  $C_1$  enseña que a medida que  $A$  toma valores mayores las restricciones sobre  $B$  se hacen más débiles.



**Figura 3.10:** Desempeño del esquema de colapso 1. La figura muestra las desviaciones de  $C(z_k)$ , respecto al espectro plano, para diferentes valores de  $A$  y  $B$ . El desempeño deseable está definido mediante  $\Delta_{I_{max}} < 0.1$  que está representado en la figura con una línea recta horizontal con la leyenda "Referencia". Valores por abajo de la línea de referencia son desempeños aceptables.



La gráficas para los esquemas  $C_2$  (figura 3.11) y  $C_{Wigner}$  (figura 3.12) son muy parecidas entre sí (como se comentó antes en este capítulo). Las diferencias que se pueden mencionar en el desempeño del esquema de Wigner respecto al del esquema de colapso dos son: (a) el peor de los desempeños ocurre en  $B = 0.001$  en ambos esquemas de colapso, pero el de  $C_{Wigner}$  es mejor que el de  $C_2$  por una diferencia del casi 10%, en  $A = \{0.0001, 0.01\}$ , de casi el 15% para  $A = 1$ , pero para los valores superiores de  $A$  (10 y 1000) esta brecha se cierra a 1% en  $A = 10$  y se invierte (-1%) en  $A = 1000$ , (b) para los valores de  $B = 0.0001$  y cualquier valor de  $A$  (exceptuando  $A = 1$ ) su desempeño es ligeramente peor que el del esquema dos.



**Figura 3.11:** Desempeño del esquema de colapso 2. La figura muestra las desviaciones de  $C(z_k)$ , respecto al espectro plano, para diferentes valores de  $A$  y  $B$ . El desempeño deseable está definido mediante  $\Delta_{l_{max}} < 0.1$  que está representado en la figura con una línea recta horizontal con la leyenda "Referencia". Valores por abajo de la línea de referencia son desempeños aceptables.

Al comparar las actuaciones de los esquemas de colapso dos y de Wigner con el esquema de colapso uno se encuentran muchas similitudes, pero algunas diferencias resaltan inmediatamente:

(a) el peor desempeño ante desviaciones de la receta mencionada (que también se da en  $B = 0.001$ , cf. tabla 3.2) es casi el doble comparado con el obtenido con  $C_1$  ( $\sim 55\%$  contra el  $\sim 29\%$ ), (b) la inexistencia de un valor de  $A$  para el cual independientemente del valor de  $B$  -en el rango estudiado- se obtenga un desempeño dentro de lo deseado ( $\Delta_{l_{max}} < 0.1$ ) y (c) la carencia de la relajación del valor de  $B$  necesario para cumplir con el desempeño aceptado para valores mayores de  $A$ .

Para recuperar el rango de tiempos de colapso para los diferentes valores de  $A$  y  $B$ , para lograrlo, despejamos  $\eta_k^c$  de  $N(x) = A/x + B$ , obteniendo  $|\eta_k^c(k)| = A/k + R_D B$ ,  $R_D$  es el radio *comóvil* de la LSS. Considerando geodésicas nulas radiales llegamos a  $R_D = \eta_0 - \eta_d$ , donde  $\eta_d$  es el tiempo del desacople. El desacople ocurre bien entrada la época de dominación de materia, por lo que podemos usar la expresión de  $R_D$  en términos del factor de escala de la época de materia,

$$R_D = \frac{2}{H_0} (1 - \sqrt{a_d}), \quad (3.103)$$

donde se normalizó el factor de escala de tal manera que en la actualidad es  $a_0 = 1$ , entonces,  $a_d \equiv a(\eta_d) \simeq 10^{-3}$  y  $H_0$  es la variable de Hubble hoy. Su valor numérico es  $5807.31 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$ . Por lo tanto,

$$|\eta_k^c(k)| = \frac{A}{k} + \frac{2B}{H_0} (1 - \sqrt{a_d}). \quad (3.104)$$

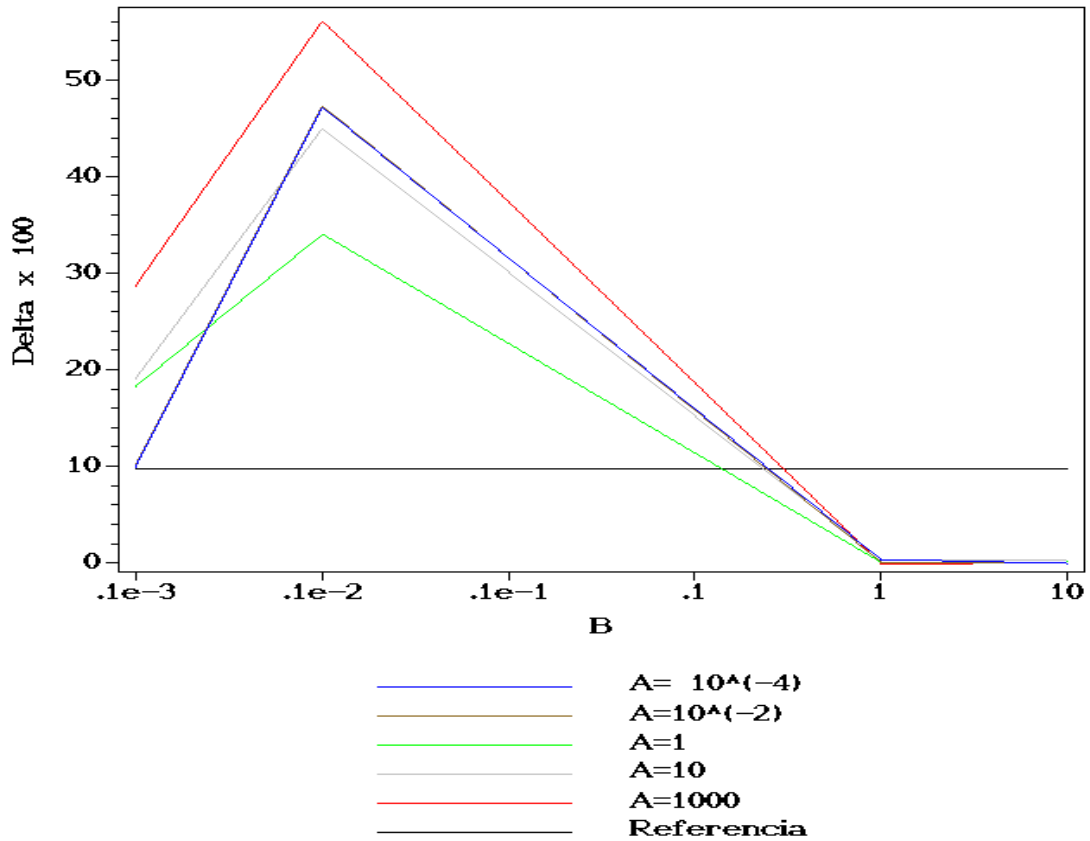
Entonces, podemos usar esta fórmula par calcular los tiempos de colapso de los modos interesantes que observamos en el CBR, en particular el rango entre  $10^{-3} \text{ Mpc}^{-1} \leq k \leq 1 \text{ Mpc}^{-1}$ . Estos modos cubren el rango de multipolos  $l$  de interés:  $1 \leq l \leq 2600$ , donde usamos la relación<sup>23</sup>  $l = kR_D$ . Los tiempos de colapso del modo  $k$  indican el momento en que las inhomogeneidades y anisotropías emergieron a la escala correspondiente a  $k$ . Los tiempos de colapso se ven en la figura (3.14) para los mejores valores de  $(A, B)$  dados en las tablas<sup>24</sup> (3.3).

Podemos observar que los esquemas de colapso newtoniano y de Wigner, presentan una caída en el espectro de potencia conforme  $l$  se incrementa. Es importante notar que esta caída es atribuida en la interpretación de los datos del CMB [148], a efectos de extinguiamiento (*Damping Effect*<sup>25</sup> en inglés), debidos a que la superficie de última dispersión no es instantánea [9], [52, cap. 8], [157, cap 15, 18]. Como se observa en la figuras (3.5, 3.6) para algunos valores de  $(A, B)$  obtenemos una fuente adicional de “extinguiamiento” debido a las fluctuaciones en el tiempo de colapso alrededor de  $\eta_k^c k = \text{constante}$ . Se espera que el satélite PLANCK provera con mayor información sobre el espectro para mayores valores de  $l$ , lo cual provera con restricciones en los parámetros  $(A, B)$ . Ade-

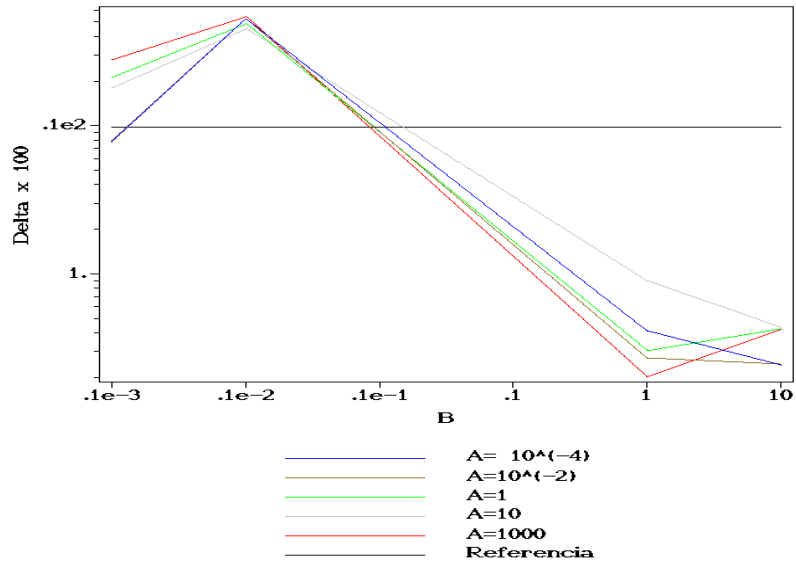
<sup>23</sup>La relación aproximada entre la escala angular  $\theta$  y el multipolo  $l$  es  $\theta \sim \pi/l$ . La escala angular comóvil  $d_A$ , entre nosotros y un objeto de tamaño físico lineal  $L$ , es  $d_A = L/(a\theta)$ .  $L/a \sim 1/k$ ,  $d_A = R_D$  si el objeto está en el LSS, y usando la primera expresión de este pie de página, obtenemos  $l = kR_D$ .

<sup>24</sup>El lector debe de recordar que nuestra parametrización del régimen infalcionario tiene el tiempo conforme desde números grandes negativos *hacia* números pequeños negativos.

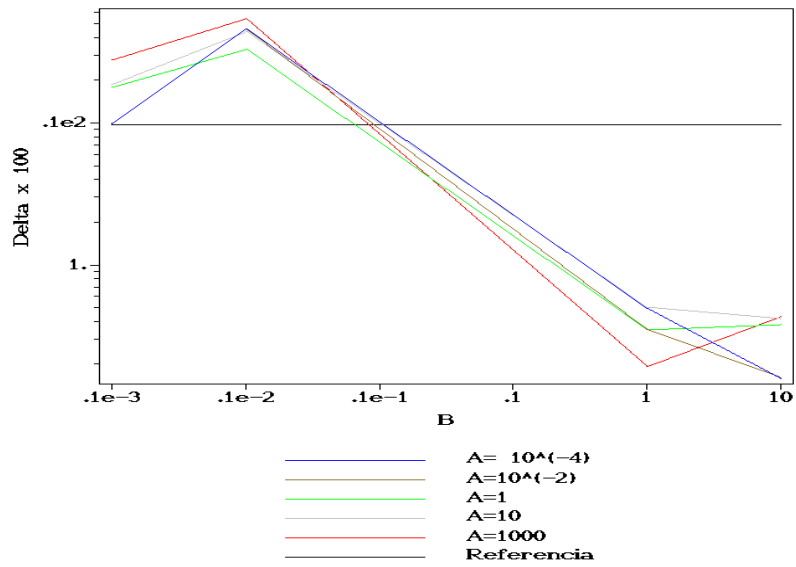
<sup>25</sup>Este efecto es básicamente un extinguiamiento para la densidad de fotones en la escala  $k$  al tiempo de desacople por un factor de  $e^{-k^2/k_D^2}$ , donde  $k_D$  es una escala de difusión que depende en la física de las colisiones entre electrones y fotones. Acordemente, el espectro  $C_l$  es extinguido como  $e^{l^2/l_D^2}$  donde  $l_D \sim k_D d_A(\eta_d) \sim 1500$ , para parámetros cosmológicos típicos.



**Figura 3.12:** Desempeño del esquema de colapso “de Wigner”. La figura muestra las desviaciones de  $C(z_k)$ , respecto al espectro plano, para diferentes valores de  $A$  y  $B$ . El desempeño deseable está definido mediante  $\Delta_{l_{max}} < 0.1$  que está representado en la figura con una línea recta horizontal con la leyenda “Referencia”. Valores por abajo de la línea de referencia son desempeños aceptables.



(a)  $C_{\text{newtoniano}}(k)$



(b)  $C_{\text{Wigner}}(k)$

**Figura 3.13:** Desempeño de los esquemas de colapso newtoniano y “de Wigner”. La figuras muestran las desviaciones de  $C(z_k)$ , respecto al espectro plano, para diferentes valores de  $A$  y  $B$ . Ambos ejes están escalados logarítmicamente. El desempeño deseable está definido mediante  $\Delta_{l_{\max}} < 0.1$  que está representado en la figura con una línea recta horizontal con la leyenda “Referencia”. Valores por abajo de la línea de referencia son desempeños aceptables.

más, creemos que es posible distinguir entre los dos efectos, debido a que en nuestro modelo para los parámetros en los cuales se predice un extinguiamiento adicional, también predice un “rebote” para valores aún mayores de  $l$  (cf. figs. 3.4, 3.5, 3.6).

Dado un  $k$  se puede comparar el valor del factor de escala en el tiempo de colapso  $a(\eta_k^c)$ , con el factor de escala al momento del “cruce del horizonte”<sup>26</sup>  $a_k^H$ . El “cruce del horizonte” ocurre cuando la longitud que corresponde al modo  $k$  tiene el mismo tamaño que el radio de Hubble,  $H_I^{-1}$  (en coordenadas comóviles  $k = aH_I$ ), entonces,  $a_k^H \equiv a(\eta_k^H) = \frac{k}{H_I} = \frac{3k}{8\pi G V}$ . Entonces el radio entre el factor de escala en el momento de cruzar el horizonte para el modo  $k$  y factor de escala evaluada en el tiempo de colapso para el mismo modo es

$$\frac{a_k^H}{a_k^c} = k\eta_k^c(k) = A + BR_D k = A + Bl. \quad (3.105)$$

Usando los mejores valores para los diferentes esquemas de colapso, podemos graficar los *e-folds* transcurridos entre el colapso del modo y su cruce de horizonte. Como podemos observar en la figura (3.15) esta cantidad cambia –a lo mucho– en un orden de magnitud en el rango de  $k$  para los valores de  $A$  y  $B$  que consideramos más razonables, i.e.  $a_k^H > a_k^c$ , el tiempo de colapso  $\eta_k^c \simeq 10^{-3} \eta_k^H$  en este rango.

### 3.5.2 Múltiples Colapsos: caso coherente

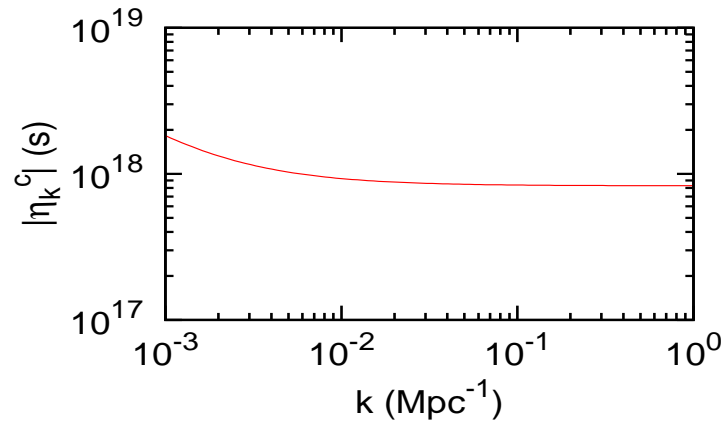
En esta sección estudiaremos cómo afecta al espectro de potencias predicho por cada esquema de colapso si ocurriesen varios colapsos. Para simplificar el análisis supondremos que el estado post-colapso es un estado coherente y que *todos* los colapsos ocurren durante la época inflacionaria.

*Estados Coherentes.* Un estado coherente es un tipo específico de estado del oscilador armónico cuya dinámica es muy parecida a la de un oscilador armónico clásico. Los estados coherentes se definen como los eigenestado del operador de aniquilación  $\hat{a}$ ,

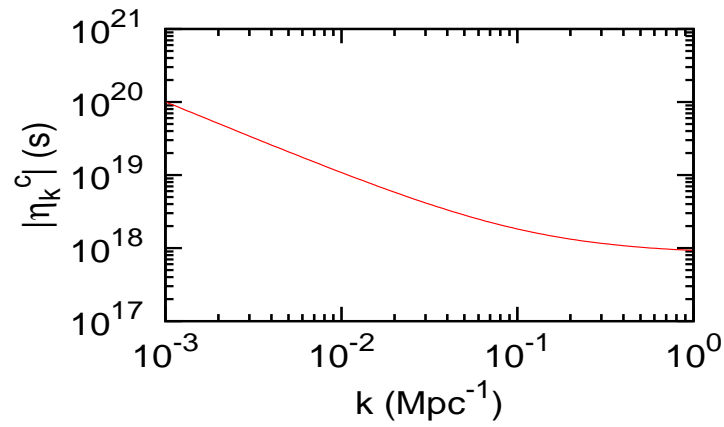
$$\hat{a}|\xi\rangle = \zeta|\xi\rangle,$$

donde como  $\hat{a}$  no es hermítico  $\zeta$  es un número complejo no necesariamente real y puede ser representado por  $\zeta = |\zeta|e^{i\chi}$ , donde  $|\zeta|$  es la amplitud y  $\chi$  la fase del estado. Físicamente la fórmula recién mostrada implica que un estado coherente no se ve afectado por la detección o aniquilación de una partícula. En los estados coherentes, el principio de incertidumbre toma su mínimo valor, i.e. el producto de las incertidumbres de  $p$  y  $q$  toman su mínimo valor  $\Delta p \Delta q = \frac{1}{2} \hbar$ .

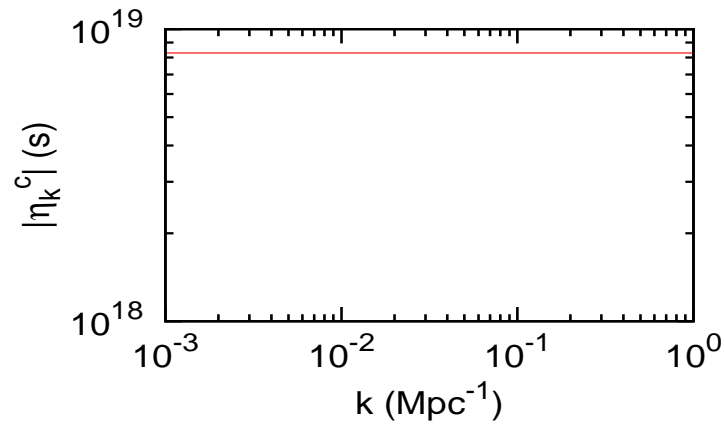
<sup>26</sup>En la explicación estándar marca “la transición de clásico a cuántico” (capítulo 2)



(a)  $C_1$ , with  $A = 10, B = 1$ .

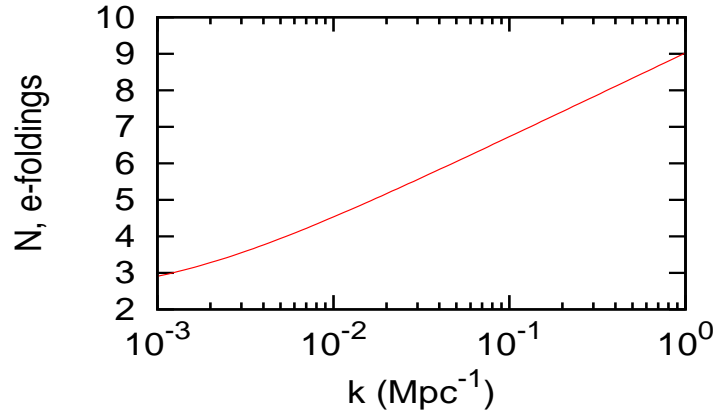


(b)  $C_2$ , with  $A = 1000, B = 1$ .

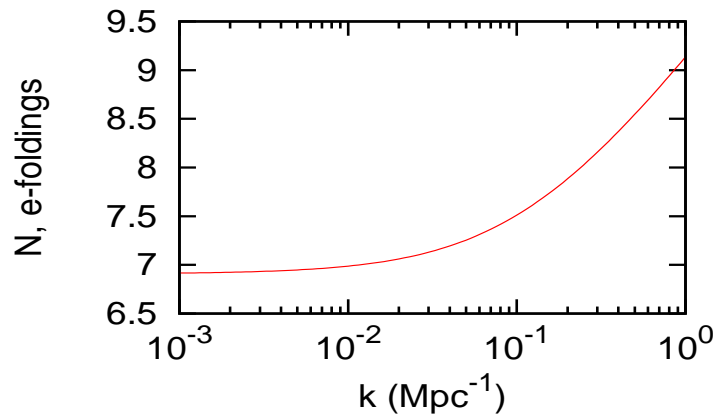


(c)  $C_{Wigner}$ , with  $A = 0.01, B = 10$ . Note how in this scheme almost all the modes must collapse at the same time.

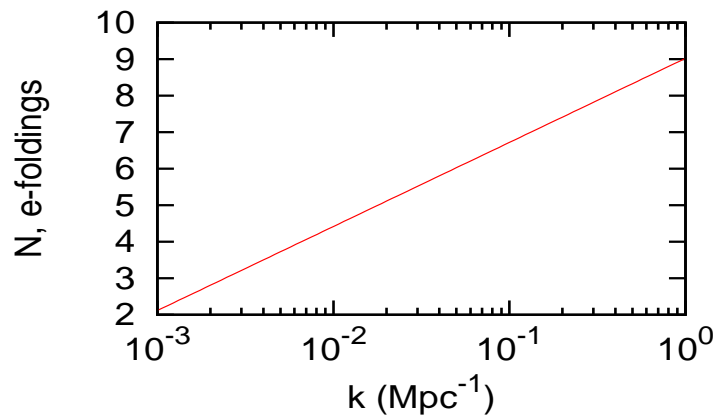
**Figura 3.14:** Gráficas con escala logarítmica en ambos ejes, de los tiempos de colapso  $|\eta_k^c|$  (en segundos), para los tres esquemas tomando en cuenta solo los mejores valores de  $(A, B)$  en el rango de  $10^{-3} \text{ Mpc}^{-1} < k < 1 \text{ Mpc}^{-1}$ . en estas gráficas:  $h = 0.7$ .



(a)  $C_1$ , with  $A = 10, B = 1$ .



(b)  $C_2$ , with  $A = 1000, B = 1$ .



(c)  $C_{Wigner}$ , with  $A = 0.01, B = 10$ .

**Figura 3.15:** Gráficas semi logarítmica del número de  $e$ -foldings entre  $a_k^H$  y  $a_k^c$  para los tres esquemas, tomando en cuenta solo los mejores valores  $(A, B)$ . El rango de interés es  $10^{-3} \text{ Mpc}^{-1} < k < 1 \text{ Mpc}^{-1}$ . En estas gráficas:  $h = 0.7$ .

Exceptuando el estado de vacío, todos los estados coherentes pueden ser obtenidos desplazando el estado vacío  $|0\rangle$  en el espacio de fase del modo  $k$  usando el operador unitario  $\hat{D}(\xi) = \exp(\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a})$ :

$$|\xi\rangle = \hat{D}(\xi)|0\rangle.$$

*Esquemas de colapso y estados coherentes* Usando las simples propiedades de los estados coherentes podemos calcular los valores de  $d_{k,\xi}^{(R,I)}$ ,  $c_{k,\xi}^{(R,I)}$  y  $e_{k,\xi}^{(R,I)}$ , (ecuaciones 2.137)) para el caso cuando el estado postcolapso es un estado coherente  $|\xi\rangle$ ,

$$d_{k,\xi}^{(R,I)} = \xi_k^{(R,I)}, \quad (3.106a)$$

$$c_{k,\xi}^{(R,I)} = \left(\xi_k^{(R,I)}\right)^2, \quad (3.106b)$$

$$e_{k,\xi}^{(R,I)} = \left|\xi_k^{(R,I)}\right|^2. \quad (3.106c)$$

Como podemos observar, los cálculos que involucran los valores de expectación o sus incertidumbres, son los mismos para los estados coherentes, tan sólo haciendo la sustitución  $d_k^{(R,I)} \rightarrow \xi_k^{(R,I)}$ , de hecho todas las propiedades de los estados coherentes están determinadas por el valor  $\xi_k$ . Entonces, los valores de expectación para los estados coherentes son (ver la ecuación 2.150)

$$\langle \hat{y}_k^{(R,I)} \rangle_\xi = \sqrt{2} \Re(y_k \xi_k^{(R,I)}) = \sqrt{2} |y_k^{(R,I)}| |\xi_k^{(R,I)}| \cos(\alpha_k^{(R,I)} + \beta_k), \quad (3.107a)$$

$$\langle \hat{\pi}_k^{(R,I)} \rangle_\xi = \sqrt{2} \Re(g_k \xi_k^{(R,I)}) = \sqrt{2} |g_k^{(R,I)}| |\xi_k^{(R,I)}| \cos(\alpha_k^{(R,I)} + \gamma_k), \quad (3.107b)$$

y las dispersiones son (comparar con la ecuación 2.140)

$$\begin{aligned} \left(\Delta \hat{y}_k^{(R,I)}\right)_\xi^2 &= \Re\left(y_k^2 \left(\xi_k^{(R,I)}\right)^2\right) + \frac{1}{2} |y_k|^2 \left(\hbar L^3 + 2 \left|\xi_k^{(R,I)}\right|^2\right) - 2\Re\left(y_k \xi_k^{(R,I)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} |y_k(\eta)|^2 \hbar L^3, \end{aligned} \quad (3.108a)$$

$$\begin{aligned} \left(\Delta \hat{\pi}_k^{(R,I)}\right)_\xi^2 &= \Re\left(g_k^2 \left(\xi_k^{(R,I)}\right)^2\right) + \frac{1}{2} |g_k|^2 \left(\hbar L^3 + 2 \left|\xi_k^{(R,I)}\right|^2\right) - 2\Re\left(g_k \xi_k^{(R,I)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} |g_k(\eta)|^2 \hbar L^3. \end{aligned} \quad (3.108b)$$

Observando este último resultado podemos decir que las incertidumbres de los estado coherentes son las mismas que las del estado de vacío. Este resultado es independiente de si se trata de



un estado post-colapso o no. Otra característica importante es que conforme el tiempo pasa, las incertidumbres en la posición crecen, pero no así en el momento conjugado (ver eq. 2.149).

*Esquemas de colapso.* Para el esquema de colapso independiente (2.147) en su  $n$ -ésima colapso, tenemos que

$$N_{\pi_n}^{R,I} = x_{2,n}^{R,I} \sqrt{\frac{\hbar L^3}{2}} |g(\eta_k^{c_n})| = \frac{1}{2} \sqrt{\hbar k L^3}, \quad N_{y_n}^{R,I} = x_{1,n}^{R,I} \sqrt{\frac{\hbar L^3}{2}} |y(\eta_k^{c_n})| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar L^3}{k}} \left( \frac{1 + z_n^2}{z_n^2} \right).$$

Sustituyendo estas expresiones en el valor medio del producto de valores de expectación del momento conjugado para  $n$ -colapsos (3.34) obtenemos, por ejemplo para dos colapsos

$$\overline{\langle \widehat{\delta\varphi}'_k \rangle \langle \widehat{\delta\varphi}'_{k^*} \rangle} = \frac{\hbar L^3}{2a(\eta)^2} \left\{ \mathbf{A}_2^2 k + \mathbf{B}_2^k \frac{1}{k} \left( \frac{1 + z_2^2}{z_2^2} \right) + \mathbf{A}_1^1 k + \mathbf{B}_1^k \frac{1}{k} \left( \frac{1 + z_1^2}{z_1^2} \right) \right\}. \quad (3.109)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.158) podemos observar que la cantidad  $C(k)$  para dos colapsos en este caso es la suma de dos funciones similares  $C^1(k) + C^2(k)$  del tipo (2.162), siendo la diferencia entre  $C^1(k)$  y  $C^2(k)$  los tiempos de colapso. Este comportamiento (superposición de dos funciones ondulatorias) se repetirá para  $n$ -colapsos obteniendo  $C(k) = \sum_n C^n(k)$ .

Para el esquema de colapso newtoniano, el resultado es similar. La "receta" para el  $(n + 1)$ -ésimo queda definida por

$$N_{\pi_n}^{R,I} = x_{2,n}^{R,I} \sqrt{\frac{\hbar L^3}{2}} |g(\eta_k^{c_n})| = \frac{1}{2} \sqrt{\hbar k L^3}, \quad N_{y_n}^{R,I} = 0,$$

usando la ecuación (3.34) se obtiene una expresión muy sencilla

$$\overline{\langle \widehat{\delta\varphi}'_k \rangle \langle \widehat{\delta\varphi}'_{k^*} \rangle} = \frac{\hbar L^3 k}{2a(\eta)^2} \sum_n \mathbf{A}_n^2, \quad (3.110)$$

la cual presentará el mismo comportamiento para  $n$  colapsos que el esquema independiente para  $C(k)$ , i.e.  $C(k) = \sum_n C^n(k)$ .

El comportamiento del espectro de potencias  $C(k)$  para  $n$  colapsos con el esquema de Wigner (cf. §3.4,  $N_n^{R,I}$  dados por (3.85) ) presenta un comportamiento similar al de los esquemas anteriores.



## CAPÍTULO 4

### CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

A lo largo de este trabajo de tesis se ha analizado el surgimiento de las inhomogeneidades primordiales que dieron origen a la estructura cosmológica que observamos hoy. La explicación estándar es que las fluctuaciones cuánticas del inflatón siguiendo la evolución del sistema Einstein-Inflatón cruzan el radio de Hubble y en ese momento el investigador iguala las incertidumbres cuánticas con fluctuaciones estadísticas, siguiendo las ideas de Decoherencia [105–108, 178]. En la literatura esto se conoce como *la transición cuántico-clásica*. El lector reconocerá que este problema está relacionado con el *el problema de la medición de mecánica cuántica* también conocido como *problema de la macro-objetificación*.

A diferencia del enfoque basado en Decoherencia, en este trabajo de tesis se estudio las diferentes implicaciones de la *hipótesis del colapso* propuesta por Perez, Sahlmann y Sudarsky en [170]. El colapso se supone inducido de alguna manera por la gravedad y corresponde a un proceso  $\mathbf{R}$  en la notación de Penrose [166–169]. El colapso imprime en el campo gravitatorio la inhomogeneidad que veremos reflejada en el CMB, esto se logra ya que el colapso rompe la simetría del estado vacío. Puesto de manera diferente, en el análisis estándar se intenta justificar la identificación de las correlaciones de dos puntos cuánticas con correlaciones estadísticas clásicas, sin romper la unitariedad de la evolución del sistema Einstein-Inflatón. La evolución unitaria en este caso preserva las simetrías originales del estado de vacío (homogeneidad e isotropía), lo cual permite que uno se pregunte entonces ¿Cómo se terminó en un estado inhomogéneo y anisotrópico? Es aquí donde la hipótesis del colapso muestra sus ventajas sobre el enfoque tradicional: no sólo intenta explicar la aparición de una estadística clásica, sino que además explica el origen de la inhomogeneidad (el estado post-colapso no tiene por qué ser homogéneo e isotrópico).

En este trabajo de tesis se ha considerado varios esquemas *ad hoc* de colapso del campo cuántico inflacionario como posibles explicaciones del problema del origen de las semillas de la formación de estructura cosmológica. Se estudiaron a mayor profundidad los esquemas de colapso *newtoniano* e *independiente* (cf. §2.7 y [170]) y además se propuso un nuevo esquema de colapso basado en el funcional de Wigner (cf. §3). El esquema de colapso *de Wigner* respeta la correlación que existe entre variables conjugadas canónicas cuánticas y que fue ignorada en los dos primeros esquemas de colapso, por lo que se puede decir que tiene mayor motivación física que los anteriores.

Los colapsos, en todos los esquemas estudiados, se suponen inducidos o provocados por un efecto gravitacional. El rompimiento de la evolución unitaria que estos esquemas de colapso conllevan, es congruente con la posición de que hay que modificar a la mecánica cuántica estándar cuando se

toma en cuenta a la gravedad [48–50, 74, 161, 162, 166–169, 210]. En esta tesis no se discutieron con profundidad estos temas y solo nos concentramos en los aspectos fenomenológicos del problema.

Los diferentes esquemas de colapso fueron analizados y desarrollados para que sus consecuencias observacionales pudieran ser comparadas con los datos obtenidos de los estudios del Fondo Cósmico de Micro-ondas (CMB). Estas comparaciones ilustraron varios puntos dignos de mencionar: Primero, dependiendo de los detalles del esquema de colapso y de sus parámetros, su efecto en el espectro de potencias resultante puede ser muy diferente del espectro plano de potencias que se espera resulte de inflación. Claro que esta diferencia o separación del espectro de potencias plano se puede –y se obtiene– en los estudios de la comunidad inflacionaria con modificaciones del *slow-roll* o considerando diversos potenciales, pero en este estudio las diferencias surgen solo de considerar los detalles del esquema de colapso cuántico, el cual, desde nuestro punto de vista es necesario para comprender de una manera satisfactoria la emergencia de la estructura desde las fluctuaciones cuánticas.

El estudio de los esquemas de colapso al compararlo con las observaciones (en particular con el espectro plano de Harrison- Zel’dovich (HZ)<sup>1</sup>) impuso condiciones sobre los tiempos conformes de colapso para recuperar el espectro HZ: *los tiempos de colapso (en tiempo conforme) por modo deben de satisfacer  $\eta_k^c k = \text{constante}$* . Esta restricción permitiría comprobar algunos *mecanismos* de colapso tal como se hizo preliminarmente en [170]. La extensión de este estudio de mecanismos de colapso se está haciendo actualmente por parte del autor de esta tesis.

La naturaleza estocástica del colapso hace muy improbable que se cumpla con exactitud la condición  $\eta_k^c k = \text{constante}$ , por lo que hemos estudiado la robustez de los esquemas de colapsos estudiados. Con este fin hemos considerado desviaciones lineales de comportamiento de  $\eta_k^c$  como función de  $k$ , i.e. , hemos explorado en los tres esquemas de colapso los efectos de tener tiempos de colapso dados por  $\eta_k^c = A/k + BR_D$ . Los resultados de dicho estudio se presentaron en §3.5, donde se mostró que los diferentes esquemas de colapso se desvían de manera diferente del espectro plano de potencias, por ejemplo el esquema newtoniano y el de Wigner producen una caída natural en el espectro para  $l$  grande.

Se analizó también el efecto en el espectro de potencias debido a múltiples colapsos ocurridos durante la época inflacionaria. Para llevar a cabo este análisis se encontraron las fórmulas para  $n$ –colapsos, de estas expresiones se observó que el espectro de potencias para el caso de  $n$ –colapsos es como la suma de  $n$  expresiones de espectros de potencias de un solo colapso ocurriendo a diferentes tiempos de colapso.

Sin embargo, la conclusión más importante, ilustrada por este trabajo de tesis, es que enfocándose en problemas que se pueden pensar como filosóficos o de principios, se ha encontrado la posibilidad de estudiar problemas que pueden mostrar algunos aspectos de lo que posiblemente sea nueva física.

Actualmente se está extendiendo este análisis de diversas maneras, entre las que podemos nombrar colapsos múltiples para el caso en que el estado post-colapso sea un estado *apachurrado* (*sque-*

<sup>1</sup>Como se comentó en el capítulo 2, el espectro plano es observacionalmente visible para valores pequeños en el multipolo  $l$  (ángulos grandes), para  $l$  mayores aparecen efectos sobreimpuestos relacionados principalmente con física de plasmas.

*zee*) (a diferencia del trabajo presentado en esta tesis que fue para estados post-colapso coherentes) [114], mecanismos de colapso basados en las ideas de Penrose i.e. , provocados por la gravedad [44] y estudios detallados y exactos sobre cómo se afecta el espectro de potencias predicho por los esquemas de colapso luego de tomar en cuenta todos los efectos de la física de plasmas [111].



## APÉNDICE A

### TEORÍA DE PERTURBACIONES COSMOLÓGICAS

#### A.1 Introducción

La teoría de Relatividad General es conceptualmente sencilla y particularmente elegante, pero presenta en la práctica dificultades que tienen su raíz en que las ecuaciones de campo de Einstein (ECE) forman un sistema no-lineal acoplado de 10 ecuaciones diferenciales parciales en cuatro dimensiones, por lo tanto, la mayoría de los problemas que se estudian en la teoría de Relatividad General son difíciles o imposibles de solucionar de manera exacta.

Una de las estrategias populares en la física para resolver problemas complicados es utilizar un análisis perturbativo alrededor de una solución conocida. En la teoría de Relatividad General, sin embargo, el análisis perturbativo posee varias sutilezas que no comparten otras áreas de la física. Estas sutilezas surgen en Relatividad General debido al principio de covariancia general y al carácter dinámico del espacio-tiempo: en Relatividad General además de perturbar los campos de materia es necesario perturbar la métrica del espacio-tiempo; pero, debido a la covariancia intrínseca de la teoría, es posible, perturbar la métrica de una manera en la que se deforme el sistema de coordenadas sin afectar la física subyacente al espacio-tiempo, esto tendría como consecuencia la aparición de información ficticia (debida a la deformación del sistema coordenado y no al fenómeno en sí) sobre el fenómeno físico estudiado. En este apéndice trataremos de elucidar el papel de este principio y revisaremos tres propuestas hechas en la literatura para establecer una teoría perturbativa de Relatividad General que permita solucionar problemas de una manera confiable.

La teoría perturbativa de Relatividad General se aplica actualmente en diferentes problemas como lo son Relatividad Numérica (aparece por ejemplo en el planteamiento de las condiciones iniciales) [7], el estudio de ondas gravitacionales [215], el análisis de la dinámica en espacios-tiempos (cuerpos extendidos, movimiento cerca de agujeros negros [127, 179], auto-fuerzas [175–177], problema de los tres cuerpos [36, 101], etc.), el estudio del problema de los promedios [24, 68, 224] o el análisis de la formación de estructura en cosmología [22, 57, 58, 138, 200].

En esta revisión se estudiarán las diferencias que existen en el análisis perturbativo de Relatividad General respecto al de otras disciplinas de la física y el origen de esta discrepancia (§A.2) y se expondrá de una manera formal el problema y su tratamiento para el desarrollo de una teoría de perturbaciones en Relatividad General (§A.3). Finalmente se presentarán los tres principales enfoques conocidos para hacer el análisis perturbativo (§A.5), dándole énfasis a la teoría invariante

de norma expuesta principalmente por Kouji Nakamura, [por ejemplo ver 143] (§A.6). A lo largo del ensayo se estará usando como ejemplo la métrica de Roberston-Walker de los Universos de Friedmann-Lemaître con un campo escalar (presentada en la §A.4). La elección de un modelo cosmológico para el estudio de teoría de perturbaciones se debe a dos motivos, el primero es una conveniencia de cálculo, ya que las simetrías de este espacio-tiempo simplifican los cálculos que se mostrarán, segundo, la Cosmología de precisión [54, 148] es actualmente un tema candente en la física por lo cual este trabajo podrá servir de apoyo o referencia al lector al revisar la bibliografía cosmológica.

En esta revisión se elegirán unidades en las que  $c = 1$ , la métrica tendrá la signatura  $(- + + +)$  y se seguirá la notación abstracta de índices y las definiciones del tensor de Riemann dadas por Wald en [215]. Los índices latinos ( $i, j, k$ , etc). indican componentes espaciales mientras que los griegos ( $\mu, \nu$ , etc.) representan las cuatro componentes espacio-temporales.

## A.2 Relatividad General y el principio de covariancia general

La teoría de Relatividad General es conceptualmente sencilla y se puede resumir en pocas palabras citando [134] el famoso adagio “El espacio le dice a la materia como moverse y la materia le dice al espacio como curvarse <sup>1</sup>”, o de una manera más formal: “El espacio-tiempo es una variedad  $\mathcal{M}$ , en la cual está definida una métrica Lorentziana  $g_{ab}$ . La curvatura de  $g_{ab}$  está relacionada con la distribución de materia en el espacio-tiempo mediante las ecuaciones de Einstein (ECE)” [215, pag. 73]. La métrica  $g_{ab}$  no sólo representa las propiedades crono-geométricas del espacio-tiempo, además define los potenciales del campo gravitacional.

Las ecuaciones de Relatividad General, referidas en el párrafo anterior como las ECE son

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{R} = \kappa T_{ab} \quad (\text{A.1})$$

donde los símbolos representan lo que sigue:  $G_{ab}$  es el tensor de Einstein,  $R_{ab}$  es el tensor de Ricci que está relacionado con el tensor de Riemann,  $R_{abd}{}^c$  mediante una contracción de índices,  $R_{ac} \equiv R_{abc}{}^b$  y  $\mathcal{R}$  es el escalar de curvatura o escalar de Ricci, que se obtiene de la traza de  $R_{ab}$ , i.e.  $\mathcal{R} \equiv R_a{}^a$ . En el lado derecho de la ecuación tenemos a la constante de Einstein  $\kappa$  que está relacionada con la constante gravitacional de Newton mediante  $\kappa = 8\pi G$  y para finalizar,  $T_{ab}$ , el tensor de energía-momento que representa la distribución de materia en el espacio-tiempo y cuya expresión exacta depende de la teoría con la que se esté describiendo la materia. La información geométrica de la teoría esta codificada en el lado izquierdo de la ecuación (A.1) debido a sus relaciones con el tensor de curvatura  $R_{abd}{}^c$ .

---

<sup>1</sup>En el idioma original: “Space acts on matter, telling it how to move. In turn, matter reacts back on space, telling it how to curve”[134, pag. 5]



Conceptualmente, Relatividad General, está basada en dos principios importantes: (a) el *principio de equivalencia*: el movimiento de los cuerpos<sup>2</sup> en un campo gravitacional es independiente de su composición o su masa; y (b) el *principio de relatividad o covariancia general*: Las leyes de la naturaleza son expresadas de manera natural mediante ecuaciones que sean iguales en todos los sistemas de coordenadas, esto es, que sean *covariantes* con respecto a sustituciones cualesquiera, i.e. ecuaciones tensoriales. Aparte de estos principios, se podrían mencionar dos más de soporte o guía: el *principio de acople gravitacional mínimo* –una versión de la navaja de Occam, i.e. una exigencia de simplicidad– y el *principio de correspondencia* –las ecuaciones de Relatividad General deben de coincidir en el límite apropiado con Relatividad Especial y con la Teoría Gravitacional Newtoniana– [51, 215].

El establecimiento de cual es el significado físico, la importancia, el número<sup>3</sup> o simplemente que es lo que dicen exactamente estos principios<sup>4</sup> ha sido objeto de debate a lo largo de décadas, debate cuyo inicio se puede remontar al mismo Einstein y su lucha para establecer la teoría tal como la conocemos actualmente [ver 150, para una clara y extensa discusión].

El principio de relatividad o covariancia general es el que más problemas causará cuando abordemos la cuestión de la teoría perturbativa, por lo que, le dedicaremos un estudio un poco más extenso para poder alcanzar a ver todas las sutilezas que encierra.

Este principio, intuitivamente establece que todos los observadores son equivalentes, o expresado de otra manera: no existe un sistema coordinado privilegiado en la naturaleza. Esto se puede entender de la siguiente manera: los sistemas de coordenadas son simple etiquetas puestas a los puntos del espacio-tiempo y de ninguna manera esta colocación de etiquetas afecta al fenómeno natural. El principio de covariancia causó y causa acaloradas discusiones en la literatura científica y en un principio motivó que A. Einstein y D. Hilbert lo desecharan como fundamento de la teoría debido al siguiente argumento conocido como el *argumento del agujero*<sup>5</sup> (para la versión original de este argumento consúltase [122, 150], para la versión moderna véase [99, 100, 149]): Sea  $\mathbf{g}$  –por el momento eliminaremos los subíndices para no complicar la notación– una solución de las ECE, entonces, el *pull-back*,  $\phi^*(\mathbf{g})$ , inducido por el difeomorfismo  $\phi$  en  $\mathcal{M}$  también satisface las ECE. La pregunta a responder es ¿Todas las métricas  $\phi^*(\mathbf{g})$  describen el mismo campo gravitacional? Si suponemos el principio de covariancia general como válido, la respuesta es si. Supóngase ahora que el espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  contiene una región abierta  $H$  (el “agujero”) vacía, es decir, únicamente

<sup>2</sup>En realidad de las *partículas de prueba*, definidas como aquellas partículas que sienten el efecto del campo gravitacional pero no lo afectan de manera alguna.

<sup>3</sup>Por ejemplo, en [51] menciona el *principio de Mach* –en realidad el principio de Mach está determinado por tres enunciados: (1) La distribución de materia determina la geometría, (2) Si no hay materia no hay geometría y (3) Un cuerpo en un universo vacío, no posee propiedades inerciales– dentro de los principios fundamentales, aunque reconoce que quizá sólo sirva como principio guía para la formulación de Relatividad General.

<sup>4</sup>Como ejemplo, la expresión del *principio de equivalencia* es diferente en [51, 134, 215]; en [38, pags. 13-15] se mencionan tres variantes distintas de este principio.

<sup>5</sup>Originalmente, Einstein expresó este argumento usando sistemas de coordenadas, de la siguiente manera, Sea  $G(x)$  el tensor métrico que satisface las ECE en el sistema de coordenadas  $x$  y  $G'(x')$  representa el mismo campo gravitacional en el sist. coordinado  $x'$ . Si suponemos covariancia general, entonces  $G(x')$  (piénsese este cambio de coordenadas, únicamente en el sentido matemático, i.e. el cambio de  $x \rightarrow x'$  no cambia el significado funcional de  $G$ , pero podríamos interpretarlo como un nuevo campo en  $x'$ ). A partir de esto, se puede demostrar que no hay manera de especificar la métrica afuera y en la frontera de un “agujero” pude determinar el campo dentro del agujero. Invalidando así, la utilidad de las ECE. Aunque Einstein planteó este argumento, como un problema de frontera, Hilbert lo planteó, como un problema de valores iniciales[150], relacionándolo así con el *Problema de Cauchy* de Relatividad General [215].

el campo  $g$  está presente y es solución a las ECE en vacío. Debido a la covariancia general, aún cuando encontremos una solución  $g$  fuera de  $H$  y especifiquemos las derivadas a un orden finito en la frontera de  $H$ , para conectar la métrica fuera con la de adentro de  $H$  de una manera suave, la métrica dentro de  $H$  no se puede determinar de manera única, no importa que tan pequeño sea el “agujero”, así, pareciera que las ECE no poseen un problema de valores de frontera (o iniciales en la versión del argumento del agujero de Hilbert [150]) bien planteado si se sostiene como verdadero el principio de covariancia general.

El argumento del agujero, básicamente nos enfrenta a la decisión de declarar al espacio-tiempo como entidad “real” y con esto sacrificar la covariancia general, o, eliminar la calidad de ente al espacio-tiempo y mantener la covariancia general.

Tiempo después, Einstein resolvió esta aparente paradoja quitándole “realidad autónoma” al espacio-tiempo si no existe materia en él:

En la base de la teoría de relatividad general ... espacio y “lo que llena el espacio” no tienen una existencia separada ... No hay tal cosa como el espacio vacío i.e. un espacio sin campo [gravitacional] ... [El] espacio-tiempo no reclama una existencia por sí mismo, si no únicamente como cualidad estructural del campo. [60]

esto se puede entender, si se recuerda que toda la experiencia que obtenemos del espacio-tiempo está dada por “coincidencias” entre nuestros aparatos de medición y otros campos, i.e. la “realidad” del espacio-tiempo está en los *eventos* no en los puntos de la variedad. Otra forma de verlo, es que la variedad sin la especificación de una métrica, con la cual se obtengan las cantidades observables, no es un espacio-tiempo, ya que los puntos de la variedad  $\mathcal{M}$  no tienen propiedades gravitacionales o crono-geométricas *per se*. Lo que conforma al espacio-tiempo es el par  $(\mathcal{M}, g_{ab})$ . Asumiendo esta postura, los *pull-backs* de la métrica no difieren físicamente de la métrica original. Dos métricas  $g_1$  y  $g_2$  soluciones de las ECE representan la misma solución si son *isométricas* entre sí, i.e. todas ellas forman una clase de equivalencia. Este argumento puede extenderse con facilidad al caso de que haya más campos dentro de  $H$ . Esto resuelve el argumento del agujero, recuperando la covariancia general y permite plantear el problema de condiciones iniciales en Relatividad General de una manera satisfactoria.

A pesar de haberse resuelto el argumento del agujero, los problemas no acabaron para el principio de covariancia, tan pronto como Einstein publicó en 1916 la solución al argumento del agujero y retomaba como principio fundacional a la covariancia general, Kretschmann en 1917 [150], utilizó el argumento de solución de Einstein y lo volvió en su contra, estableciendo que el principio de covariancia tenía significado físico vacío, argumentando que cualquier teoría puede ser puesta de manera covariante si es formulada correctamente<sup>6</sup>. Esta objeción, a la fecha, es tema de discusión académica, como atestiguan artículos como [63].

Además de lo dicho, el principio de covariancia y su interpretación está ligado con el significado de “promediar” en la teoría de Relatividad General [63] [ver también 24, 224], y como se muestra

<sup>6</sup>Einstein se defendió diciendo que el argumento de Kretschmann era falso, poniendo como ejemplo la teoría gravitacional de Newton ya que no podía escribirse de manera covariante. Poco tiempo después Cartan, escribió la teoría newtoniana en forma covariante [134].

en la siguiente sección es el causante de las complicaciones en la teoría de perturbaciones en Relatividad General. Se invita al lector interesado en estas sutilizas a consultar las referencias hasta aquí expuestas.

### A.3 Teoría de perturbaciones en Relatividad General

La teoría de perturbaciones de manera general –sin restringirla a Relatividad General– es el conjunto de métodos matemáticos usados para encontrar la solución a un problema que no puede ser resuelto de manera exacta. Intuitivamente el análisis perturbativo, propone que si se conoce la solución exacta de un problema, la solución de un nuevo problema ligeramente diferente es una “pequeña modificación” de la solución conocida.

Los métodos perturbativos sólo podrán ser aplicados si es posible agregar una término “pequeño” a la solución exacta del problema conocido, i.e. la nueva solución estará expresada en términos de una serie de potencias en el parámetro “pequeño”,  $\lambda$ . El parámetro  $\lambda$  cuantifica la desviación del nuevo problema respecto a el problema que se sabe solucionar de manera exacta. Por ejemplo si queremos obtener la cantidad  $F$  a partir de la solución exacta  $F_0$  de un problema similar,  $F$  estará expresada a segundo orden en  $\lambda$  como sigue:

$$F = F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Estos métodos son usados con gran éxito en Mecánica Clásica, Mecánica Cuántica, Electrodinámica, etc. Entonces, ¿De dónde proviene la dificultad de usarla en Relatividad General?

Los problemas con los que nos encontraremos en la teoría perturbativa son varios. El primer problema proviene del objeto dinámico de la teoría. En Relatividad General, el espacio-tiempo no es un escenario estático, absoluto, sobre el cual se pueda estar sin afectarlo, modificarlo; al contrario, es un ente dinámico que actúa sobre y es actuado por los participantes. Por lo tanto, es necesario perturbar, además de los campos de materia (los participantes) representados por  $T_{ab}$ , al espacio-tiempo, representado por  $g_{ab}$  (el escenario) i.e.  $g_{ab} = g_{ab}^0 + \delta g_{ab}$ ; el segundo problema se observa al escribir una cantidad física (i.e. representada por un tensor)  $\mathcal{Q}$  de manera perturbada (a primer orden):

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \lambda \delta \mathcal{Q}. \tag{A.2}$$

Esta ecuación no es, en ningún sentido, precisa o correcta,  $\mathcal{Q}$  es un campo tensorial, el cual, para reflejar el número que se va a medir u observar en un experimento [sec. 4.1 de 215], debe de estar evaluada en un punto del espacio-tiempo (i.e. en un *evento* del espacio-tiempo), luego de esta corrección la ecuación es

$$\mathcal{Q}(p) = \mathcal{Q}_0(p) + \lambda \delta \mathcal{Q}(p). \tag{A.3}$$

Aunque mejor, esta ecuación sigue siendo problemática, pues el punto  $p$  del lado izquierdo de la ecuación no es el mismo punto  $p$  del lado derecho, ya que, estos puntos se encuentran en diferentes variedades  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_0$ . Cuando se está realizando teoría de perturbaciones en Relatividad General, se está trabajando con dos variedades, una física,  $\mathcal{M}$  (la solución que intentaremos describir con perturbaciones), y otra de fondo,  $\mathcal{M}_0$ , que es una variedad ficticia, preparada por nosotros para desarrollar el análisis perturbativo (la solución exacta que conocemos). Al espacio-tiempo físico lo denotaremos de manera general por  $(\mathcal{M}, \bar{g}_{ab})$ , y al espacio-tiempo de fondo por  $(\mathcal{M}_0, g_{ab})$ . Además, denotaremos a los campos tensoriales que estén sobre  $\mathcal{M}$  mediante  $\mathcal{Q}$  y los definidos sobre  $\mathcal{M}_0$  por  $\mathcal{Q}_0$ . Así, la ecuación (A.3) debería de escribirse como:

$$\underbrace{\mathcal{Q}("p")}_{\in(\mathcal{M}, \bar{g}_{ab})} = \underbrace{\mathcal{Q}_0(p) + \lambda \delta \mathcal{Q}(p)}_{\in(\mathcal{M}_0, g_{ab})}. \quad (\text{A.4})$$

La última ecuación nos muestra la aparición del problema relacionado con el principio de covariancia: la ecuación (A.4) nos está dando la relación entre variables definidas en dos variedades diferentes, y para lograrlo **implícitamente** hemos identificado los puntos en estas dos variedades. Es decir, asumimos que  $\exists \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M} : p \in \mathcal{M}_0 \mapsto "p" \in \mathcal{M}$ . Esta identificación no es única en la teoría de Relatividad General debido a que está construida sobre el principio de covariancia general (cf. A.2).

Siendo conscientes de estos problemas procederemos a definir conceptos que permitirán formalizar su planteamiento y encontrar una solución. En teoría de perturbaciones a la elección del mapa de identificación de puntos, i.e.  $\chi : \mathcal{M}_0 \mapsto \mathcal{M}$  se le nombra como *grado de libertad de norma* y esta libertad siempre existe en teorías a las cuales se les imponga el principio de covariancia general. Este grado de libertad no es físico, si no espurio, i.e. no trae información relevante al fenómeno estudiado. Por lo tanto, un enfoque correcto en la teoría perturbativa en Relatividad General debe *eliminar* estos grados de libertad ficticios.

Es importante recalcar, que por la misma naturaleza del análisis perturbativo ("desviaciones pequeñas de la solución exacta conocida", cf. arriba) los espacios-tiempo de fondo y físico deben de ser lo "suficientemente iguales" i.e. "cuasi-isométricos" [199] y debido a los problemas con la obtención de promedios de métricas en Relatividad General, no existe una manera única de hacer esta declaración más precisa[199].

Consideremos una variedad  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$  con  $\dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{M} + \dim \mathbb{R}$ , que en el caso en particular de Relatividad General  $\dim \mathcal{N} = 5$ . El parámetro infinitesimal para la perturbación será denotado por  $\lambda$ . Entonces,  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}|_{\lambda=0}$  y  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{N}|_{\mathbb{R}=\lambda}$ , con  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ . Además, denotemos los puntos en  $\mathcal{N}$  por  $r$ , entonces, cada  $r \in \mathcal{N}$  será identificado con  $(p, \lambda)$ , donde  $p \in \mathcal{M}_\lambda$  y cada punto de  $\mathcal{M}_0$  se identificará mediante  $(p, 0)$ . Esto implica, que hemos construido un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de identificación de puntos entre las hipersuperficies  $\mathcal{M}_\lambda$  en  $\mathcal{N}$ ,  $\phi_\lambda : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} | \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$ , con  $p \in \mathcal{M}_0 \mapsto q = \phi(p) \in \mathcal{M}$ . Si asignamos un sistema de coordenadas  $x^\mu$  en  $\mathcal{M}_0$ ,  $\phi_\lambda(x)$  establecerá las coordenadas  $x^\mu$  en  $\mathcal{M}_\lambda$  y en  $\mathcal{N}$ , mediante  $\phi : (p, 0) \mapsto (p, \lambda)$ . El generador de este difeomorfismo  $\phi$ , es  $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^a$  el cual es tangente a las órbitas de  $\phi$ .

De esta manera hemos foliado  $\mathcal{N}$  mediante las subvariedades  $\mathcal{M}_\lambda$  para cada  $\lambda$ , que son difeo-

mórficas al espacio físico  $\mathcal{M}$  y al espacio de fondo  $\mathcal{M}_0$ . Es importante resaltar que  $\mathcal{N}$  tiene una estructura diferenciable ya que es el producto tensorial directo de  $\mathcal{M}$  y  $\mathbb{R}$  y por construcción las subvariedades  $\mathcal{M}_\lambda$  tienen una estructura diferenciable. Es decir, por construcción, hemos requerido que los puntos en diferentes subvariedades de  $\mathcal{N}$  estén unidas por una curva continua  $\gamma \in \mathcal{N}$ . Podemos elegir entonces cartas con las coordenadas  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ ), en cada *lámina*  $\mathcal{M}_\lambda$  y que tienen a  $x^m \equiv \lambda$ . Las ECE se pueden escribir formalmente como

$$\mathcal{E}[\mathcal{Q}_\lambda] = 0 \quad (\text{A.5})$$

en  $\mathcal{M}_\lambda$  para  $\mathcal{Q}_\lambda$  definido en  $\mathcal{M}_\lambda$ . Es decir, cada  $\mathcal{M}_\lambda$  tiene su métrica  $\mathbf{g}_\lambda$  y un conjunto de campos materiales  $\mathbf{T}_\lambda$  que satisfacen la ecuación anterior. Si el campo tensorial está dado en cada  $\mathcal{M}_\lambda$ ,  $\mathcal{Q}_\lambda$  es extendido a un campo tensorial en  $\mathcal{N}$  mediante  $\mathcal{Q}(p, \lambda) \equiv \mathcal{Q}_\lambda(p)$  con  $p \in \mathcal{M}_\lambda$ . Con esta extensión, la ecuación (A.5) se puede considerar una ecuación en  $\mathcal{N}$ .

Con esta extensión tenemos que  $\mathcal{E}[\mathcal{Q}] = 0$  es una ecuación en  $\mathcal{N}$ . Los campos tensoriales en  $\mathcal{N}$ , como el anterior, son por construcción *tangentes* a cada  $\mathcal{M}_\lambda$ , i.e. su componente normal a cada  $\mathcal{M}_\lambda$  es cero.

La base del espacio tangente de  $\mathcal{N}$ , queda establecida usando el generador del difeomorfismo  $\phi_\lambda$ ,  $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^a$  y su dual  $d\lambda$  que satisfacen

$$(d\lambda)_a \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^a = 1.$$

Por su construcción, la uno-forma  $(d\lambda)_a$  y su dual  $(\partial/\partial \lambda)^a$  son normales a cualquier tensor que es extendido del espacio tangente a cada  $\mathcal{M}_\lambda$ . El conjunto de  $(d\lambda)_a$  y  $(\partial/\partial \lambda)^a$  y la base del espacio tangente a cada  $\mathcal{M}_\lambda$  son considerados como la base del espacio tangente de  $\mathcal{N}$ .

Entonces podemos empezar a considerar a las perturbaciones del campo  $\mathcal{Q}$  como las comparaciones de  $\mathcal{Q}$  en  $\mathcal{M}_\lambda$  con  $\mathcal{Q}_0$  en  $\mathcal{M}_0$ , por lo que es necesario identificar los puntos de  $\mathcal{M}$  con aquellos en  $\mathcal{M}_0$ . Con este fin, se elegirá un nuevo difeomorfismo  $\phi_\lambda$ . Por simplicidad ese mapeo se puede elegir como un mapeo exponencial<sup>7</sup>. Este mapeo de identificación de puntos, está representada por el mapeo  $\phi_\lambda : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ , tal que,  $\phi_\lambda : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$ , y en general  $\phi(p) \neq \phi(p)$ , para  $p \in \mathcal{M}_0$ . El *grado de libertad de norma*  $\phi_\lambda$ , es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos (e.g. un mapeo exponencial) que satisface la propiedad

$$\phi_{\lambda_1 + \lambda_2} = \phi_{\lambda_1} \circ \phi_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_2} \circ \phi_{\lambda_1}. \quad (\text{A.6})$$

Este grupo uniparamétrico de difeomorfismos es generado por el campo vectorial  $\phi X_\lambda^a$ . A este campo vectorial se le conoce como *generador* y es definido por la acción del *pull-back* para un campo tensorial  $\mathcal{Q}$  en  $\mathcal{N}$ :

$$\mathcal{L}_X \mathcal{Q} \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi_\lambda^* \mathcal{Q} - \mathcal{Q}}{\lambda}, \quad (\text{A.7})$$

<sup>7</sup>Esta restricción no afectará las ecuaciones importantes del formalismo invariante de norma, ver sección A.6

y puede ser descompuesto usando la base de  $\mathcal{N}$  como sigue

$$\varphi X_\lambda^a =: \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^a + \theta^a, \quad \theta^a (d\lambda)_a = 0, \quad \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial \lambda}} \theta^a = 0. \quad (\text{A.8})$$

La segunda condición de esta relación se elige por simplicidad, debido a que la elección de  $\theta^a$  es arbitraria salvo la condición de que sea tangente a  $\mathcal{M}_\lambda$ . El campo vectorial  $\theta^a$  está definido en  $\mathcal{M}_\lambda$  y exceptuando las condiciones anteriores es arbitrario, i.e. la arbitrariedad de la elección de norma está contenida en la componente tangente del campo vectorial  $X$ , es decir en el campo vectorial  $\theta^a$ .

El *pull-back*  $\varphi_\lambda^* Q$  mapea el campo tensorial  $Q$  en  $\mathcal{M}_\lambda$  a un tensor  $\varphi_\lambda^* Q$  en  $\mathcal{M}_0$ . Entonces el *pull-back* está representado por la expansión de Taylor (ver apéndice A.9)<sup>8</sup> a segundo orden mediante

$$\varphi_\lambda^* Q(p)|_{\mathcal{M}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{L}_X^k Q|_{\mathcal{M}_0} = Q(p)|_{\mathcal{M}_0} + \lambda \mathcal{L}_X Q|_{\mathcal{M}_0} + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathcal{L}_X^2 Q|_{\mathcal{M}_0} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (\text{A.9})$$

Obsérvese que  $\mathcal{L}_X \equiv \mathcal{L}_{\varphi X_\lambda}$ , pero estamos simplificando la notación. Dado que  $p \in \mathcal{M}_0$ , podemos considerar esta ecuación como

$$\varphi_\lambda^* Q(p) = Q_0(p) + \lambda \mathcal{L}_X Q|_{\mathcal{M}_0}(p) + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathcal{L}_X^2 Q|_{\mathcal{M}_0}(p) + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (\text{A.10})$$

i.e. una ecuación en el espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$ , con  $Q_0 = Q|_{\mathcal{M}_0}$  que es el valor de fondo de la variable física  $Q$ . Armados con esta definición, la perturbación  $\Delta^\varphi Q_\lambda$  del campo tensorial  $Q$  bajo la elección de norma  $\varphi_\lambda$  es definida mediante:

$$\Delta^\varphi Q_\lambda \equiv \varphi_\lambda^* Q|_{\mathcal{M}_0} - Q_0. \quad (\text{A.11})$$

A diferencia de la ecuación (A.4), esta definición tiene todas sus variables definidas en  $\mathcal{M}_0$ . Sustituyendo (A.10) en esta última ecuación, definimos las perturbaciones a primer y segundo orden del campo tensorial  $Q$  bajo la elección de norma  $\varphi_\lambda$  mediante

$$\delta_\varphi Q \equiv \mathcal{L}_X Q|_{\mathcal{M}_0}, \quad \delta^2_\varphi Q \equiv \mathcal{L}_X^2 Q|_{\mathcal{M}_0}. \quad (\text{A.12})$$

Con las definiciones (A.12) podemos tratar de establecer de una manera más exacta a lo que nos referimos por “desviaciones pequeñas” de las métrica de fondo. Serán “desviaciones pequeñas”  $\delta g_{ab} = (\varphi^* g_{ab}) - g_{ab}$ , aquellas que  $|\delta g_{ab}| \ll 1$ . Obviamente existen muchos difeomorfismos que no cumplen con esto, por lo que, toda la discusión desarrollada en este apéndice está limitada a los difeomorfismos que satisfacen esta condición. [37].

Giremos ahora nuestra atención ahora al problema de transformaciones de norma. Sean dos campos vectoriales  $X, Y$  en  $\mathcal{N}$ . Sus curvas integrales definen dos flujos  $\varphi$  y  $\psi$ , respectivamente en  $\mathcal{N}$ . Entonces  $X$  y  $Y$  son transversales a cualquier  $\mathcal{M}_\lambda$  y los puntos sobre la misma curva integral son **considerados el mismo punto** respecto a su norma. Entonces  $\varphi$  y  $\psi$  son mapeos de identificación puntuales. Si descomponemos los campos vectoriales  $X$  y  $Y$  como lo hicimos anteriormente tenemos,

<sup>8</sup>Nótese que  $\delta^{(0)} Q \equiv Q_0$  y  $\delta^{(1)} Q = \delta Q$

$${}^\varphi X_\lambda^a = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^a + \theta^a \quad {}^\psi Y_\lambda^a = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^a + \iota^a \quad (\text{A.13})$$

Cuando  $\theta^a \neq \iota^a$  se dice que tenemos *dos elecciones distintas de norma*. Cada una de estas elecciones de norma define un *pull-back* de un campo tensorial  $\mathcal{Q}$  en  $\mathcal{N}$  a otros dos campos tensoriales,  $\varphi_\lambda^* \mathcal{Q}$  y  $\psi_\lambda^* \mathcal{Q}$  para cualquier valor de  $\lambda$ . Tomando en particular el espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$  vemos que tenemos tres campos tensoriales asociados con  $\mathcal{Q}$ :  $\mathcal{Q}_0$ , el valor de fondo de  $\mathcal{Q}$ , y los dos *pull-back* de  $\mathcal{Q}$  desde  $\mathcal{M}_\lambda$  por las dos elecciones de norma diferentes. Estos dos últimos campos tensoriales pueden ser expandidos en series de Taylor,

$${}^\varphi \mathcal{Q}_\lambda \equiv \varphi_\lambda^* \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left( \delta^{(k)}_\varphi \mathcal{Q} \right) = \mathcal{Q}_0 + \Delta^\varphi \mathcal{Q}_\lambda, \quad (\text{A.14a})$$

$${}^\psi \mathcal{Q}_\lambda \equiv \psi_\lambda^* \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left( \delta^{(k)}_\psi \mathcal{Q} \right) = \mathcal{Q}_0 + \Delta^\psi \mathcal{Q}_\lambda. \quad (\text{A.14b})$$

donde se ha usado la definición recién dada (A.11). Como  $\varphi_\lambda$  y  $\psi_\lambda$  son elecciones de norma que mapean el espacio-tiempo  $\mathcal{M}_0$  en  $\mathcal{M}_\lambda$ ,  ${}^\varphi \mathcal{Q}_\lambda$  y  ${}^\psi \mathcal{Q}_\lambda$  son representaciones en  $\mathcal{M}_0$  del campo tensorial  $\mathcal{Q}$  en dos diferentes normas. Las cantidades  $\delta_\varphi^k \mathcal{Q}$  y  $\delta_\psi^k \mathcal{Q}$  son las perturbaciones de orden  $k$  en las normas  $\varphi$  y  $\psi$  respectivamente. Es muy importante notar que el parámetro  $\lambda$  usado para etiquetar las subvariedades de  $\mathcal{N}$  (recuérdese que proviene del difeomorfismo original  $\phi$ ) también sirve para realizar la expansión, estableciendo así lo que significa “perturbación a orden  $k$ ”, por lo que la división de  $\Delta^\varphi \mathcal{Q}_\lambda$  en perturbaciones de primer, segundo, etc. orden no tiene un significado absoluto, ya que una reparametrización de  $\mathcal{N}$  (i.e. eligiendo un nuevo mapeo primigenio) mezclará todos los ordenes. Lo único que está definido de manera invariante, es la cantidad  $\Delta^\varphi \mathcal{Q}$ . Es importante notar que si el campo tensorial  $\mathcal{Q}$  es invariante de norma, su representación en  $\mathcal{M}_0$  no cambiará ante transformaciones de norma, por definición.

Definimos que un campo tensorial  $\mathcal{Q}$  en  $\mathcal{N}$  es *totalmente invariante de norma* (TIN) si  ${}^\varphi \mathcal{Q}_\lambda = {}^\psi \mathcal{Q}_\lambda$  para cualquier par de elecciones de norma  $\varphi$  y  $\psi$ , implicando así que  $\delta^{(k)}_\varphi \mathcal{Q} = \delta^{(k)}_\psi \mathcal{Q}$  para todo  $k$ . Podemos relajar este requerimiento y definir *invariante de norma* (IN) a orden  $n$  si y sólo si para dos normas cualesquiera  $\varphi$  y  $\psi$

$$\delta^{(k)}_\varphi \mathcal{Q} = \delta^{(k)}_\psi \mathcal{Q} \quad \forall k, \quad \text{con } k < n. \quad (\text{A.15})$$

Con esta definición es posible demostrar por inducción [34] que el campo tensorial  $\mathcal{Q}$  es invariante de norma a orden  $n \geq 1$  si y sólo si  $\mathcal{L}_\xi \delta^{(k)} \mathcal{Q} = 0$ , para cualquier campo vectorial  $\xi^a$  definido en  $\mathcal{M}_0$  y  $\forall k < n$ . Esto generaliza el lema de Stewart-Walker [expuesto por vez primera en 199]:

**Lema de Stewart-Walker.** La perturbación a orden  $n$  del campo tensorial  $\mathcal{Q}$  es invariante de norma a orden  $n$  si y solo si  $\mathcal{Q}_0$  y todas las perturbaciones de orden menor a  $n$ , son, en cualquier norma:

- Cero

- Escalar constantes
- Combinaciones lineales de productos de deltas de Kronecker.

La prueba de este lema es directa usando las definiciones anteriores y se puede encontrar en [199].

El cambio de elección de norma desde  $\varphi_\lambda$  a  $\psi_\lambda$  está representado por el difeomorfismo

$$\Phi_\lambda \equiv (\varphi_\lambda)^{-1} \circ \psi_\lambda \quad (\text{A.16})$$

El difeomorfismo  $\Phi_\lambda$  es un mapeo  $\Phi_\lambda : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$  para cada valor  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Este difeomorfismo cambia el punto de identificación, por lo tanto  $\Phi_\lambda$  se puede considerar como *la transformación de norma*  $\Phi_\lambda : \varphi_\lambda \rightarrow \psi_\lambda$ . Debemos recalcar que  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$  *no es un grupo uniparamétrico* de difeomorfismos en  $\mathcal{M}_0$  debido a que en general, los generadores del difeomorfismo,  ${}^\varphi X^a$  y  ${}^\psi Y^a$ , no conmutan. Como consecuencia de esto, no se podrá expandir a  $\Phi_\lambda$  en una serie de Taylor usando la ecuación (A.9) debido a que esta sólo es válida para grupos uniparamétricos, sin embargo, en el apéndice A.10 se muestra que, a orden  $n$  en  $\lambda$  la familia uniparamétrica de difeomorfismos  $\Phi$  siempre puede ser aproximada por la familia de difeomorfismos de caballo de rango  $n$  (teorema A.10.2), los cuales a su vez pueden ser expresados en una serie de Taylor generalizada (lema A.10.1).

La transformación de norma  $\Phi_\lambda$  induce un *pull-back* desde la representación  ${}^\varphi \mathcal{Q}_\lambda$  del tensor perturbado en la elección de norma  $\varphi_\lambda$  a la representación  ${}^\psi \mathcal{Q}_\lambda$  en la elección de norma  $\psi_\lambda$ . De esta manera estos tensores están conectados por el mapeo lineal  $\Phi_\lambda^*$  mediante

$$\begin{aligned} {}^\psi \mathcal{Q}_\lambda &= \psi_\lambda^* \mathcal{Q}|_{\mathcal{M}_0} \\ &= \left( \psi_\lambda^* (\varphi_\lambda \varphi_\lambda^{-1})^* \mathcal{Q} \right) \Big|_{\mathcal{M}_0} \\ &= \left( \varphi_\lambda^{-1} \psi_\lambda \right)^* (\varphi_\lambda^* \mathcal{Q}) \Big|_{\mathcal{M}_0} \\ &= \Phi_\lambda^* {}^\varphi \mathcal{Q}_\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usando el lema A.10.1, se expresa la serie de Taylor de  $\Phi_\lambda^* {}^\varphi \mathcal{Q}_\lambda$ , obteniendo

$$\Phi_\lambda^* {}^\varphi \mathcal{Q}_\lambda = {}^\varphi \mathcal{Q} + \lambda \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_1} {}^\varphi \mathcal{Q} + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_2} + \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_1}^2 \right\} {}^\varphi \mathcal{Q} + \frac{\lambda^3}{3!} \left\{ \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_1}^3 + 3\mathcal{L}_{\tilde{\xi}_1} \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_2} + \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_3} \right\} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (\text{A.18})$$

donde  $\tilde{\xi}_1$ ,  $\tilde{\xi}_2$  y  $\tilde{\xi}_3$  son los primeros tres generadores de  $\Phi_\lambda$ . Si sustituimos (A.14a) y (A.14b) en (A.18) e igualando término a término llegamos a que las relaciones entre el primer, segundo y tercer orden de la perturbación del tensor  $\mathcal{Q}$  en dos normas diferentes es:

$$\delta_\psi^{(1)} \mathcal{Q} - \delta_\varphi^{(1)} \mathcal{Q} = \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_1} \mathcal{Q}_0, \quad (\text{A.19a})$$

$$\delta_\psi^{(2)} \mathcal{Q} - \delta_\varphi^{(2)} \mathcal{Q} = 2\mathcal{L}_{\tilde{\xi}_1} \delta_\varphi^{(1)} \mathcal{Q} + \left\{ \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_2} + \mathcal{L}_{\tilde{\xi}_1}^2 \right\} \mathcal{Q}_0, \quad (\text{A.19b})$$

Estas relaciones son consistentes con la definición de invariante de norma de orden  $n$  dada anteriormente.



Para finalizar esta sección mostraremos la manera de obtener los generadores del difeomorfismo  $\Phi_\lambda$  en término de las elecciones de norma  $X$  y  $Y$ : sustituyendo (A.14a) y (A.14b), en (A.18), igualando términos en orden  $\lambda$ , usando propiedades de la Derivada de Lie (ver A.8.1) de un tensor y por último considerando que  $Y^m - X^m = 0$  (ambos tienen la misma  $m$ -ésima coordenada:  $\lambda$ ) obtenemos las igualdades siguientes (ver [34] para las demostraciones detalladas de estas últimas dos afirmaciones):

$$\tilde{\zeta}_1^a = Y^a - X^a \quad (\text{A.20a})$$

$$\tilde{\zeta}_2^a = [X, Y]^a \quad (\text{A.20b})$$

## A.4 Espacio-tiempo de ejemplo: el Universo FLRW

### A.4.1 Espacio-tiempo de fondo

Para ejemplificar las diferentes aproximaciones al análisis perturbativo en Relatividad General usaremos el espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker (FLRW). Los Universos FLRW describen la dinámica y la geometría de los universos con hipersuperficies espaciales máximamente simétricas. En particular nos enfocaremos al caso espacialmente plano (i.e.  $\Omega = 1$ ) de FLRW. Usaremos este espacio-tiempo por dos motivos, el primero es que debido a sus características geométricas (simetrías y platitude espacial) es fácil de manipular matemáticamente; y segundo, en la actualidad, debido a los grandes avances observacionales en la cosmología es posible extraer y comparar los cálculos hechos con la teoría de perturbaciones aplicada a estos universos idealizados con los datos proporcionados por el universo real, por ejemplo con los datos extraídos del estudio del fondo de radiación cósmica [148].

Este espacio-tiempo idealizado es homogéneo e isotrópico espacialmente. Esto sólo se cumple -de una manera aproximada y sin una clara justificación teórica- en el universo real a una escala de aproximadamente 100 Mpc. En este apéndice supondremos que la geometría de las hiper superficies espaciales es plana, por lo que su elemento de línea sin perturbar es

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (\text{A.21})$$

donde  $a(\eta)$  es el factor de escala expresado en el tiempo conforme  $\eta$ . La comilla,  $\{\}'$ , indica una derivación respecto al tiempo conforme, i.e.  $\{\}' \equiv \frac{\partial}{\partial \eta}$ . El tiempo conforme se relaciona con el tiempo cosmológico  $t$  (el tiempo medido por los observadores fijos en las coordenadas comóviles espaciales  $x^i$ ), mediante  $d\eta = \int \frac{dt}{a}$ . Los símbolos de Christoffel están definidos por [215]:

$$\Gamma_{bc}^a \equiv \frac{1}{2}g^{ad}(g_{db,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}). \quad (\text{A.22})$$

El inverso de la métrica  $g^{ab}$  es usado para levantar índices espacio-temporales, mientras que la 3-métrica  $\delta^{ij}$  ( $\delta^{ij}\delta_{jk} = \delta^i_k$ ) es usada para elevar los índices de los 3-vectores y 3-tensores. Como el espacio es plano, la 3-derivada covariante es  $\nabla_i \equiv \partial_i$ .

Para la métrica (A.21) los símbolos de Christoffel tienen una forma particularmente, aquellos diferentes de cero son

$$\Gamma_{\eta\eta}^{\eta} = \mathcal{H}, \quad \Gamma_{\eta i}^j = \delta_i^j \mathcal{H}, \quad \Gamma_{ij}^{\eta} = \delta_{ij} \mathcal{H}, \quad (\text{A.23})$$

donde se ha introducido el parámetro de Hubble comóvil,  $\mathcal{H} \equiv \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}$ , que está relacionado con el parámetro de Hubble<sup>9</sup> $H$ , mediante  $\mathcal{H} = aH$ . El tensor de Ricci se puede expresar en términos de los símbolos de Christoffel:

$$R_{ab} = \Gamma_{ab,c}^c - \Gamma_{ac,b}^c + \Gamma_{dc}^d \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{db}^c \Gamma_{ac}^d, \quad (\text{A.24})$$

las componentes de este tensor en este espacio son

$$R_{\eta\eta} = 3 \left( \mathcal{H} - \frac{a''}{a} \right), \quad R_{ij} = \left( \mathcal{H} + \frac{a''}{a} \right). \quad (\text{A.25})$$

El escalar de Ricci,  $\mathcal{R}$ , por su parte, está definido por la contracción total del tensor de Ricci con la métrica  $g_{\mu\nu}$ , i.e.

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.26})$$

sustituyendo (A.25) en esta última fórmula tenemos

$$\mathcal{R} = \frac{6}{a^2} \left( \mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 \right). \quad (\text{A.27})$$

El tensor de Einstein  $G_{ab}$ , está definido por la ecuación

$$G_b^a = R_b^a - \frac{1}{2} g_b^a \mathcal{R}, \quad (\text{A.28})$$

usando (A.25) y (A.27) obtenemos que sus componentes son

$$G_{\eta}^{\eta} = -\frac{3}{a^2} \mathcal{H}^2, \quad (\text{A.29a})$$

$$G_i^j = -\frac{1}{a^2} \delta_i^j \left( 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 \right). \quad (\text{A.29b})$$

En este apéndice sólo estamos interesados en el caso inflacionario, por lo que la materia en el universo estará representada por un campo escalar,  $\varphi = \varphi(\eta)$ , descrito por el tensor de energía-momento

$$T_a^b = \nabla_a \varphi \nabla^b \varphi - \frac{1}{2} \delta_a^b (\nabla_c \varphi \nabla^c \varphi + 2V(\varphi)), \quad (\text{A.30})$$

<sup>9</sup>El nombre –claramente inapropiado– de *constante de Hubble* se reserva para el valor del parámetro de Hubble evaluado en este evento espacio-temporal (hoy, ahora),  $H_0 \equiv H(t)$ .

con componentes en las coordenadas definidas por (A.21)

$$T_{\eta}{}^{\eta} = - \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 + V(\varphi) \right), \quad (\text{A.31a})$$

$$T_i{}^j = \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 - V(\varphi) \right) \delta_i{}^j. \quad (\text{A.31b})$$

Comparando con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto podemos identificar a  $T_{\eta}{}^{\eta}$  con la energía,  $\epsilon$ , y a  $T_i{}^j$  con la presión,  $p$ . Entonces las ecuaciones de Einstein para el espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$  lleno con un campo escalar,  $\varphi$ , es

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \epsilon = \frac{8\pi G}{3} a^2 \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 + V(\varphi) \right), \quad (\text{A.32a})$$

$$2\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}^2 = -8\pi G a^2 p = -8\pi G a^2 \left( \frac{1}{2a^2} (\varphi')^2 - V(\varphi) \right), \quad (\text{A.32b})$$

en el trato perturbativo será útil la siguiente forma que se obtiene sumando ambas ecuaciones

$$\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}' = 4\pi G a^2 (\epsilon + p) = 4\pi G (\varphi')^2. \quad (\text{A.33})$$

#### A.4.2 Perturbaciones a primer orden en el espacio-tiempo FLRW

Antes de introducir los esquemas desarrollados para lidiar con los problemas de norma en la teoría de perturbaciones en Relatividad General, perturbaremos de manera general a primer orden la métrica. Las perturbaciones a segundo orden se verán más adelante en el texto. Los componentes de la perturbación lineal de la métrica (A.21)

$$\delta g_{ab} \equiv h_{ab} = \begin{pmatrix} h_{\eta\eta} & h_{\eta i} \\ h_{i\eta} & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

El elemento de línea perturbado es entonces,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + h_{\eta\eta}) d\eta^2 + 2h_{\eta i} d\eta dx^i + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (\text{A.35})$$

Esta ecuación es completamente general:  $g_{\mu\nu}$  tiene 10 componentes independientes y hemos introducido 10 campos independientes que caracterizan la perturbación (1 de la perturbación escalar + 3 de la perturbación vectorial + 6 de la perturbación tensorial), pero téngase en cuenta que sólo 6 de estos campos representan grados de libertad físicos.

Debido a que la variedad  $(\Sigma(\eta), a^2\delta_{ij})$  es maximamente simétrica, es posible encontrar una descomposición diferente a  $h_{\eta\eta}, h_{\eta i}, h_{ij}$  de la perturbación a primer orden que explote estas simetrías [201]. Existen dos tipos de transformaciones de coordenadas en teoría de perturbaciones en Re-

latitud General: (a) *Transformaciones de norma*, que son las que han sido el tema central de este artículo en las cuales, las coordenadas de  $\mathcal{M}_0$  se mantienen fijas, y, al elegir una correspondencia de puntos diferente entre  $\mathcal{M}_0$  y  $\mathcal{M}$  las coordenadas de este último cambian; y (b) *Transformaciones en  $\mathcal{M}_0$*  que se diferencian de las anteriores, en el hecho de que la norma se mantiene fija y hacemos cambios de coordenadas en  $\mathcal{M}_0$  que inducirá un cambio de coordenadas en  $\mathcal{M}$ . Estas últimas son las que nos ayudarán a descomponer las perturbaciones de la métrica. Como queremos preservar las simetrías de  $\mathcal{M}_0$ , las transformaciones que podremos hacer en esta variedad están restringidas a ser de dos tipos: (a) Reparametrizaciones del Tiempo, (2) Transformaciones en coordenadas espaciales. i.e.  $x^{i'} = X_k^{i'} x^k$ . donde las únicas que preservan la simetría de  $\mathcal{M}_0$  son las rotaciones:

$$X_v^{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_k^{i'} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

La matriz  $\mathbf{R}_k^{i'}$  es una matriz  $O(3)$  que representa las rotaciones. Analizando como se transforman las perturbaciones de la métrica antes estas transformaciones observamos que  $h_{\eta\eta}$  se transforma como *escalar*,  $h_{\eta i}$  como *3-vector* y  $h_{ij}$  como *3-tensor*, donde los términos *escalar*, *3-vector* y *3-tensor* se refieren a las propiedades de transformación ante rotaciones en el espacio de fondo<sup>10</sup>. En particular *escalar* en este contexto NO significa que la perturbación es invariante antes las transformaciones de norma, de hecho, *las perturbaciones escalares no son invariantes de norma*. Estas denominaciones de *escalar* y *3-vectorial* datan del artículo seminal de Lifshitz [116].

Usando el teorema de Helmholtz podemos descomponer a la perturbación vectorial en una parte potencial o libre de rotación y en una parte libre de divergencia. Otras denominaciones son *longitudinal* para la libre de rotacional y *solenoidal* para indicar que la divergencia de este término es cero.

$$h_{\eta i} = h_i^{(rot-free)} + h_i^{(div-free)} = h_i^{(SV)} + h_i^{(V)}, \quad (\text{A.37})$$

donde  $\delta^{ij}h_{i,j}^{(V)} = 0$ ; de manera similar, la perturbación tensorial<sup>11</sup>:

$$h_{ij} = a^2 h^{(S)} \delta_{ij} + a^2 h_{ij}^{(T)}, \quad (\text{A.38})$$

con  $h_i^{(T)i} \equiv \delta^{ij}h_{ij}^{(T)} = 0$ . A su vez,  $h_{ij}^{(T)}$  se puede descomponer en,

$$h_{ij}^{(T)} = \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) h^{(ST)} - \frac{1}{2} \left( h_{i,j}^{(VT)} + h_{j,i}^{(VT)} \right) + h_{ij}^{(TT)}, \quad (\text{A.39})$$

donde  $\delta^{ij}h_{i,j}^{(VT)} = 0$ ,  $\delta^{ik}h_{ij,k}^{TT} = 0$ , y  $\delta^{ij}h_{ij}^{TT} = 0$ . En la literatura al primer término entre paréntesis del lado derecho de la ecuación (A.39) se le conoce como “operador sin traza de doble gradiente”.

Tenemos entonces que la perturbación lineal de la métrica se puede descomponer en tres conjuntos de variables, cada conjunto definido por como se transforman sus elementos<sup>12</sup>: los que transfor-

<sup>10</sup> A veces en la literatura se denominan como variables de espín-0, espín-1 y espín-2, respectivamente.

<sup>11</sup> Se agregó el factor de  $a^2$  para simplificar cálculos más adelante.

<sup>12</sup> Es conveniente decir en este punto que la *nomenclatura* de los símbolos con los cuales identificamos las perturbaciones dista de ser la estándar (salvo en el caso del 3-tensor,  $h^{TT}$ ), de hecho no hay acuerdo en la literatura sobre como nombrar

man como escalar  $\{h_{\eta\eta}, h^{(S)}, h^{(SV)}, h^{(ST)}\}$  que son aquellas que se pueden construir a partir de otros escalares, sus derivadas y cantidades de la métrica de fondo; aquellos que transforman como *3-vectores*,  $\{h_i^{(V)}, h_i^{(VT)}\}$ , que tienen como característica que su divergencia es cero y finalmente un término que transforma como *3-tensor* con divergencia cero (o transversal) y con traza cero:  $\{h^{(TT)}\}$ .

Esta descomposición tiene relaciones inversas que se escriben a continuación:

$$h^{(SV)} = \Delta^{-1} \delta^{ij} h_{\eta j, i} \quad (\text{A.40a})$$

$$h_i^{(V)} = h_{\eta i} - \left( \Delta^{-1} h_{\eta j, i} \right)^{,j} \quad (\text{A.40b})$$

$$h^{(S)} = \frac{1}{3a^2} h_i^{,i} \quad (\text{A.40c})$$

$$h_{ij}^{(T)} = \frac{1}{a^2} \left( h_{ij} - \frac{1}{3} h_k^{,k} \delta_{ij} \right) \quad (\text{A.40d})$$

$$h^{(ST)} = \frac{3}{2} \Delta^{-1} \Delta^{-1} h_{ij}^{(T), i, j} \quad (\text{A.40e})$$

$$h_i^{(VT)} = \Delta^{-1} h_{ik}^{(T), k} - \Delta^{-1} \left( \Delta^{-1} h_{kl}^{(T), k, l} \right)_{,i} \quad (\text{A.40f})$$

$$h_{ij}^{(TT)} = h_{ij}^{(T)} - \frac{3}{2} \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta \right) \Delta^{-1} \Delta^{-1} h_{kl}^{(T), k, l} - 2 \partial_{(i} \Delta^{-1} \partial^{k} h_{j)k}^{(T)} + 2 \partial_{(i} \Delta^{-1} \partial_{j)} \Delta^{-1} h_{kl}^{(T), k, l} \quad (\text{A.40g})$$

donde  $\Delta \equiv \nabla^2$ , es el laplaciano de la hipersuperficie espacial y estamos suponiendo que existe una función de Green inversa del operador  $\Delta$ ,  $\Delta^{-1}$ , que garantice la correspondencia uno a uno entre  $\{h_{\eta\eta}, h_{\eta i}, h_{ij}\}$  y  $\{h_{\eta\eta}, h^{(S)}, h^{(SV)}, h^{(ST)}\}$ ,  $\{h_i^{(V)}, h_i^{(VT)}\}$ ,  $\{h^{(TT)}\}$ . Estas funciones de Green existen si especificamos el dominio de las perturbaciones (por ejemplo,  $L^2$  en el espacio  $\Sigma(\eta)$ ) con las condiciones apropiadas de frontera. Nótese que la suposición de la existencia de estas funciones excluye al *kernel* de los operadores  $\Delta$ , por ejemplo, los campos vectoriales de Killing,  $v_i$ [143] en  $\Sigma(\eta)$ . El estudio de las perturbaciones que pertenezcan al *kernel* de  $\Delta$  queda excluido del alcance de esta revisión.

Una característica importante de esta descomposición, es que las ecuaciones físicas construidas en esta métrica no mezclarán, a primer orden, los elementos de un conjunto con los de otro, de tal manera que pueden ser estudiados por separado<sup>13</sup>. La clasificación en escalares, vectores y tensores, es importante ya que cada uno de ellos representan diferentes fenómenos: la gravitación descrita por Newton es un fenómeno escalar, pero los efectos relativistas se ven claramente (ya que están ausentes en las ecuaciones gravitacionales de Newton) en los comportamientos gravitomagnéticos (el conjunto vectorial de las perturbaciones) y de ondas gravitacionales (las perturbaciones tensoriales) [21]. La métrica en esta nueva descomposición se puede escribir como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}^{(S)} + \delta g_{\mu\nu}^{(V)} + \delta g_{\mu\nu}^{(T)},$$

a las variables. En este apéndice sigue las de [142]

<sup>13</sup>Esta característica es cierta solo a primer orden ya que a segundo orden todas las cantidades estarán acopladas, ver más adelante

donde la perturbación lineal escalar ( $\delta g_{\mu\nu}^{(S)}$ ), vectorial ( $\delta g_{\mu\nu}^{(V)}$ ) y tensorial ( $\delta g_{\mu\nu}^{(T)}$ ) son respectivamente:

$$\delta g_{\mu\nu}^{(S)} = a^2(\eta) \left[ -h_{\eta\eta} d\eta^2 + 2h_i^{(SV)} d\eta dx^i + \left( h^{(S)} \delta_{ij} + h_{i,j}^{(ST)} \right) dx^i dx^j \right], \quad (\text{A.41a})$$

$$\delta g_{\mu\nu}^{(V)} = a^2(\eta) \left[ -2h_i^{(V)} d\eta dx^i + \left( h_{i,j}^{(VT)} + h_{j,i}^{(VT)} \right) dx^i dx^j \right], \quad (\text{A.41b})$$

$$\delta g_{\mu\nu}^{(T)} = h_{ij}^{(TT)} dx^i dx^j. \quad (\text{A.41c})$$

La regla de transformación de norma (A.19a), en el caso de FLRW es

$$\varphi h_{ab} - \psi h_{ab} = \mathcal{L}_{\xi} g_{ab} = 2\nabla_{(a} \xi_{b)}. \quad (\text{A.42})$$

El generador  $\xi^a$  de la transformación de norma es un campo vectorial en el espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$ . Este vector puede descomponerse de una manera 3+1:

$$\xi_a = \xi_\eta (d\eta)_a + \xi_i (dx^i)_a, \quad (\text{A.43})$$

De esta manera la transformación de norma para las perturbaciones originales,  $\{h_{\eta\eta}, h_{\eta i}, h_{ij}\}$ , es

$$\varphi h_{\eta\eta} - \psi h_{\eta\eta} = 2(\partial_\eta - \mathfrak{H})\xi_\eta \quad (\text{A.44a})$$

$$\varphi h_{\eta i} - \psi h_{\eta i} = \xi_{\eta,i} + (\partial_\eta - 2\mathfrak{H})\xi_i \quad (\text{A.44b})$$

$$\varphi h_{ij} - \psi h_{ij} = 2\tilde{\xi}_{(i,j)} - 2\mathfrak{H}\delta_{ij}\xi_\eta \quad (\text{A.44c})$$

Procedemos de la misma manera que con las perturbaciones a primer orden y descomponemos a  $\xi_i$  en sus partes longitudinales y solenoidales usando el teorema de Helmholtz:

$$\xi_i = \xi_{,i}^{(SV)} + \xi_i^{(V)} \quad \text{con} \quad \xi_{,i}^i = 0, \quad (\text{A.45})$$

entonces la descomposición (A.44) ahora se escribe,

$$\varphi h_{\eta\eta} - \psi h_{\eta\eta} = 2(\partial_\eta - \mathfrak{H})\xi_\eta \quad (\text{A.46a})$$

$$\varphi h_{\eta i} - \psi h_{\eta i} = \left( (\partial_\eta - 2\mathfrak{H})\xi^{(SV)} + \xi_\eta \right)_{,i} + (\partial_\eta - 2\mathfrak{H})\xi_i^{(V)} \quad (\text{A.46b})$$

$$\varphi h_{ij} - \psi h_{ij} = 2\tilde{\xi}_{(i,j)}^{(V)} + 2 \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \xi^{(SV)} + 2 \left( \frac{1}{3} \nabla^2 \xi^{(SV)} - \mathfrak{H} \xi_\eta \right) \delta_{ij} \quad (\text{A.46c})$$

donde la última expresión se escribe de esa manera para facilitar cálculos posteriores.

Utilizando las relaciones (A.40), las reglas de transformación de norma para la descomposición  $\left\{ \left\{ h_{\eta\eta}, h^{(S)}, h^{(SV)}, h^{(ST)} \right\}, \left\{ h_i^{(V)}, h_i^{(VT)} \right\}, \left\{ h^{(TT)} \right\} \right\}$  son para el conjunto escalar:

$$\varphi h_{\eta\eta} - \psi h_{\eta\eta} = 2(\partial_\eta - \mathfrak{H})\xi_\eta, \quad (\text{A.47a})$$

$${}_{\varphi}h^{(SV)} - {}_{\psi}h^{(SV)} = \xi_{\eta} + (\partial_{\eta} - 2\mathfrak{H})\xi^{(SV)}, \quad (\text{A.47b})$$

$$a^2 {}_{\varphi}h^{(S)} - a^2 {}_{\psi}h^{(S)} = -2\mathfrak{H}\xi_{\eta} + \frac{2}{3}\nabla^2\xi^{(SV)}, \quad (\text{A.47c})$$

$$a^2 {}_{\varphi}h^{(ST)} - a^2 {}_{\psi}h^{(ST)} = 2\xi^{(SV)}, \quad (\text{A.47d})$$

por su parte, para el conjunto de perturbaciones vectoriales,

$${}_{\varphi}h_i^{(V)} - {}_{\psi}h_i^{(V)} = (\partial_{\eta} - 2\mathfrak{H})\xi_i^{(V)}, \quad (\text{A.48a})$$

$$a^2 {}_{\varphi}h_i^{(VT)} - a^2 {}_{\psi}h_i^{(VT)} = \xi_i^{(V)}, \quad (\text{A.48b})$$

y para la parte tensorial,

$$a^2 h_{ij}^{(TT)} - a^2 h_{ij}^{(TT)} = 0. \quad (\text{A.49})$$

Sentadas las ecuaciones básicas de las perturbaciones de la métrica de FLRW, podemos estudiar las diferentes alternativas para tratar las perturbaciones en Relatividad General, utilizándola como ejemplo.

## A.5 Enfoques en el tratamiento perturbativo

Otra forma de expresar el contenido del principio de covariancia es diciendo que los observables físicos no pueden depender de la elección de coordenadas, por lo tanto, una característica deseable de una teoría perturbativa es que especifique de una manera no ambigua tales observables, es decir, los observables deben de ser invariantes de norma. Básicamente existen dos maneras de extraer la física (i.e. eliminar los grados de libertad espurios) en el tratamiento perturbativo: (a) fijar los grados de libertad de norma (opción conocida como *elegir una norma*, o (b) *extraer las partes invariantes de norma de las perturbaciones*. La opción (b) se puede dividir a su vez en (b1) formalismo 1+3 covariante invariante de norma y en (b2) formalismo invariante de norma. Las opciones (a) y (b1) se mostrarán a grandes rasgos en esta sección y la opción (b2) será el tema por el resto de este reporte.

### A.5.1 Fijando la norma

La elección más sencilla para eliminar los problemas de libertad de norma, es elegir o fijar una norma, procedimiento conocido en inglés como *gauge fixing*. Esto significa simplemente que se

escogerá una foliación particular espacial del espacio-tiempo. Esta ha sido una de las opciones más populares de las décadas pasadas y fué iniciada por Lifshitz en 1946 [116], cuando empezó a estudiar la estabilidad (usando perturbaciones) en espacios-tiempos de FLRW.

Los principales problemas de esta aproximación son dos: (1) el eliminar verdaderamente los grados de libertad espurios; y (2) la interpretación física de los resultados obtenidos en una norma en particular. Estos problemas fueron resueltos de manera sistemática en cosmología por Bardeen [11]. El procedimiento de Bardeen es el siguiente: empezando en una norma, es posible definir cantidades invariantes de norma mediante combinaciones algebraicas o diferenciales de variables dependientes de la norma. Esta ha sido la manera de resolver las ambigüedades de la norma estándar en cosmología [138].

A continuación, mencionaremos algunas de las normas favoritas elegidas por la comunidad cosmológica.

### Síncrona

La norma síncrona (*synchronous gauge*) fue introducida por Lifshitz en 1946 [116]. La norma síncrona está definida por  $h_{\eta\eta} = 0$ ,  $h^{(V)} = 0$  y  $h^{(SV)} = 0$ , i.e. dejamos sin perturbar a  $g_{00}$  y a  $g_{0i}$ . La métrica en la norma síncrona tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (\text{A.50})$$

Nótese que para ser compatible con las métricas expresadas en la literatura [116, 163] en esta norma hemos regresado al uso de  $h_{ij}$ .

La norma síncrona es muy popular para los estudios numéricos y es la norma usada en CMBFAST [192]. Su principal problema es que no elimina completamente la libertad de norma. Este problema, aunado a su popularidad ha sido fuente de confusión en el pasado [11, 138].

Esta norma permite la existencia de un conjunto de observadores que caen libremente –i.e. se mueven sobre geodésicas– sin cambiar sus coordenadas espaciales, llamados en la literatura “observadores fundamentales comóviles”<sup>14</sup>. Cada observador está equipado con un reloj que mide el tiempo conforme  $\eta$  y permanece fijo en la coordenada  $x^i$ . Los observadores junto con sus relojes y etiquetas que identifican su geodésica definen las coordenadas en todo el espacio-tiempo. El grado de libertad de norma residual (espurio) se debe a que hay libertad para ajustar las condiciones iniciales de los relojes y coordenadas espaciales. Otro problema de esta norma aparece cuando las perturbaciones son muy grandes, si es así, estas coordenadas pueden deformarse mucho e inclusive llegar a intersectarse [21] causando singularidades coordenadas. Las ecuaciones de Einstein y su relación con otra norma, se pueden obtener de las relaciones derivadas en la sección A.3 y se invita al lector a verlas en [21, 138, 163].

<sup>14</sup>El que los observadores comóviles sigan geodésicas se puede comprobar usando la ecuación geodésica [la fórmula está en 215, pags. 46-47] con las condiciones de esta norma, llegando a que  $u^i = 0$  es una geodésica



### Newtoniana Conforme o Longitudinal

En la norma newtoniana solo son diferentes de cero las perturbaciones escalares  $h_{\eta\eta}$  y  $h^{(S)}$ . De esta definición se puede ver que se eliminan todas las perturbaciones de carácter vectorial y tensorial [138], entonces la métrica en esta norma es

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ - (1 + h_{\eta\eta}) d\eta^2 + (1 + h^{(S)}) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (\text{A.51})$$

Otra forma en la que esta norma es presentada en la literatura esta norma es mediante  $h_{\eta i} = h^{(T)} = 0$  [21].

Las condiciones que dan pie a esta norma sólo pueden ser establecidas si el tensor de energía momento no contiene partes vectoriales o tensoriales y no existen ondas gravitacionales libres<sup>15</sup>. La norma newtoniana solo tiene aplicabilidad a orden lineal perturbativo. Si se ignorara esta limitante se estarían eliminando<sup>16</sup> grados de libertad físicos y no grados de libertad de norma [21].

Esta norma se puede ver como una generalización cosmológica relativista de las ecuaciones de gravitación newtoniana. Permitiendo así una interpretación sencilla de las perturbaciones:  $h_{\eta\eta}$  es el análogo del potencial gravitacional newtoniano  $\Phi$ .

Uno de sus atractivos es que las variables invariantes de norma de primer orden [11, 21, 138], corresponden en esta norma a  $h_{\eta\eta}$  y  $h^{(S)}$  lo cual permite dar una interpretación física sencilla a las variables invariantes de norma. Debido a esta propiedad en [138] se sugiere calcular las ecuaciones en esta norma (debido a su sencillez relativa respecto al cálculo invariante de norma) y luego hacer las sustituciones de  $h_{\eta\eta}, h^{(S)}$  por las variables escalares invariantes de norma para tener las ecuaciones invariantes de norma.

La norma newtoniana o longitudinal es un caso especial de una norma más completa conocida como de *norma de Poisson* [21], la cual no tiene las restricciones mencionadas arriba y que queda definida por  $h_{\eta i}{}^i = 0$  y  $h_{ij}{}^j = 0$ .

### Otros

Existen otras normas populares en la literatura cosmológica, como la (a) *norma espacialmente plana* ( $h_{\eta\eta} = h^{(ST)} = h_i^{(VT)} = 0$ ) en esta norma las hipersuperficies espaciales no son perturbadas escalar o vectorialmente. En esta norma la perturbación del campo escalar coincide con la variable de Mukhanov-Sasaki [136]; (b) la *norma ortogonal comóvil* en las cual la 3-velocidad del fluido se hace cero y (c) la *norma de densidad uniforme* que como nombre indica en sus hipersuperficies espaciales la perturbación de la densidad es nula [124].

<sup>15</sup>Ignorar las perturbaciones vectoriales y tensoriales a segundo orden es inconsistente ya que, aún haciendo las perturbaciones vectoriales y tensoriales iniciales iguales a cero a primer orden, las perturbaciones a segundo orden servirán como fuente de estas perturbaciones lineales

<sup>16</sup>Esta situación es análoga a hacer en electrodinámica  $\vec{A} = 0$ .

### A.5.2 1+3 Covariante-Invariante de Norma

Hasta el momento hemos considerado foliar el espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales etiquetadas por el tiempo  $\eta$ , esta división se conoce como división 3+1 y recibe el nombre de *slicing* en inglés. La división 3+1 es la usada en la formulación hamiltoniana de Relatividad General [215]. Existen otras formas de hacer la separación espacio-temporal, en 1971 G.F.R. Ellis[66] y otros autores después de él, han desarrollado un formalismo basado en una división 1+3 de las identidades de Bianchi y Ricci [32, 61, 62, 69, 78, 214] llamado formalismo 1+3 Covariante-Invariante de Norma.

En el formalismo 1+3 Covariante-Invariante de Norma se ejecuta una operación diferente al *slicing*, llamada en inglés *threading* (literalmente “hilado”). Los objetos geométricos usados son una serie de líneas de mundo temporaloides  $x^\mu(\tau, q)$  donde  $\tau$  es el parámetro afín que mide el tiempo propio sobre la línea de mundo y  $q$  es una etiqueta única para distinguir las diferentes líneas de mundo. Los observadores en este formalismo se mueven a lo largo de estas líneas [21].

La herramienta principal en la construcción de este formalismo, es el vector temporal ( $u^\mu u_\mu = -1$ ) tangente a la línea de mundo  $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ . Los tensores se descomponen en una parte paralela al vector  $u^\mu$  y otra normal a este, usando el operador de proyección  $P_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ , que es la métrica espacial de los observadores moviéndose con  $u^\mu$ . Las ecuaciones a las que se les aplicará este procedimiento de descomposición no son las ECE, si no ecuaciones definidas para el tensor de Riemann o el tensor de Weyl y las ecuaciones de Raychaudhuri [ver 66, 78, y referencias dadas arriba].

Usando el Lemma de Stewart-Walker se escogen las variables invariantes de norma, es decir se eligen las variables que son cero de manera natural en el espacio-tiempo de fondo FLRW (por ejemplo el tensor de Weyl –sus partes eléctrica  $E_{ab}$  y magnética  $H_{ab}$  [214] –, la presión anisotrópica  $\pi_{ab}$  del fluido, el corte de las congruencias de geodésicas  $\sigma_{ab}$ ,  $\dot{u}^a$ , etc [ver 78, para una lista exhaustiva]), por lo tanto las ecuaciones de evolución 1+3 del universo perturbado no poseen ambigüedades de norma. Además las variables elegidas para caracterizar la evolución tienen una interpretación física directa, a diferencia de las variables definidas en el enfoque Invariante de Norma (cf. A.6).

En este formalismo es fácil aplicar técnicas de sistemas dinámicos a la cosmología [214].

### A.6 Formalismo Invariante de Norma

En el formalismo Invariante de Norma –presentado en los trabajos de J.M. Stewart y M. Walker [199], M. Bruni *et al.* [33] y luego desarrollado extensamente en los trabajos de Kouji Nakamura [139, 141–145])– se busca eliminar desde el inicio, cualquier posible elemento no físico de los grados de libertad. Entre las ventajas de este formalismo, se pueden mencionar que (a) no hace ninguna suposición acerca del espacio-tiempo de fondo (a diferencia, por ejemplo, del método

de elección de norma, cf. sección A.5.1); (b) no sólo se aplica a la teoría de Relatividad General sino a toda teoría en la cual se exija la validez del principio de covariancia general [para un ejemplo de esto ver 139, y las referencias ahí dadas], y por último (c) si se cumple cierta condición de separabilidad de la métrica perturbada a primer orden propone un algoritmo para encontrar perturbaciones invariantes de norma a cualquier orden superior al primero.

### A.6.1 Algoritmo

El procedimiento para encontrar invariantes de norma a un orden perturbativo arbitrario es el siguiente:

- I. Se expande mediante la serie de Taylor (A.180) a la métrica  $\bar{g}_{ab}$  de  $\mathcal{M}_\lambda$  luego de aplicarle un *pull-back* usando la elección de norma  $\varphi_\lambda$  a  $\mathcal{M}_0$ , i.e.

$$\varphi_\lambda^* \bar{g}_{ab} = g_{ab} + \lambda \varphi h_{ab} + \frac{\lambda^2}{2} \varphi l_{ab} + \mathcal{O}^3(\lambda), \quad (\text{A.52})$$

donde  $g_{ab}$  es la métrica de  $\mathcal{M}_0$  y hemos definido a  $\delta g_{ab} \equiv h_{ab}$  y a  $\delta^2 g_{ab} \equiv l_{ab}$  como las perturbaciones de la métrica a primer y segundo orden respectivamente. Las transformaciones de norma (A.19a) y (A.19b) de la métrica a primer y segundo orden son

$$\varphi h_{ab} - \psi h_{ab} = \mathcal{L}_{\xi_1} g_{ab}, \quad (\text{A.53a})$$

$$\varphi l_{ab} - \psi l_{ab} = 2\mathcal{L}_{\xi_1} h_{ab} + \left\{ \mathcal{L}_{\xi_2} + \mathcal{L}_{\xi_1}^2 \right\} g_{ab}. \quad (\text{A.53b})$$

- II. Inspeccionando las reglas de transformación de norma (A.53) se procede a separar, en partes invariantes de norma y variantes de norma, a la primera perturbación de la métrica,  $h_{ab}$ .

$$h_{ab} \equiv \mathcal{H}_{ab} + 2\nabla_{(a} X_{b)}. \quad (\text{A.54})$$

donde  $\mathcal{H}_{ab}$  es la parte que es invariante de norma y  $X^a$  es la parte variable. Es decir, ante transformaciones de norma  $\Phi = \varphi^{-1} \circ \psi$ ,

$$\psi \mathcal{H}_{ab} - \varphi \mathcal{H}_{ab} = 0, \quad (\text{A.55a})$$

$$\psi X^a - \varphi X^a = \xi_1^a. \quad (\text{A.55b})$$

Este procedimiento de separación se supone que se conoce y es la condición de entrada del algoritmo. Esta condición puede parecer muy restrictiva, ya que no existe una manera canónica de realizar esta descomposición. En nuestro espacio-tiempo de ejemplo i.e. Universos FLRW, esta descomposición se mostró en A.4.2, a partir de esta primera descomposición se manipulan algebraicamente los elementos para llegar a (A.54) como se mostrará adelante.

Al no existir una manera canónica de realizar la descomposición a primer orden (A.54) se pueden intentar algunas estrategias para lograrla, por ejemplo, si existen algunas simetrías de Killing en el espacio-tiempo de fondo, se puede intentar una descomposición armónica de las variables<sup>17</sup>.

- III. Realice la misma descomposición en partes variantes e invariantes de norma para perturbaciones de orden superior de la métrica. El artículo [139] mostró que esto se puede hacer siempre con algunas manipulaciones algebraicas que resultan de inspeccionar la reglas de transformación de norma a ordenes mayores que el segundo (que se vuelven más complicadas cada vez que aumentamos el orden perturbativo). A segundo orden, por ejemplo, definimos la variable basándonos en la forma de la ecuación (A.53b) para la elección de norma  $\varphi$ ,

$${}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} \equiv {}_{\varphi}l_{ab} - 2\mathcal{L}_{\varphi X} {}_{\varphi}h_{ab} + \mathcal{L}_{\varphi X} g_{ab}, \quad (\text{A.56})$$

y para la norma  $\psi$ ,

$${}_{\psi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} \equiv {}_{\psi}l_{ab} - 2\mathcal{L}_{\psi X} {}_{\psi}h_{ab} + \mathcal{L}_{\psi X} g_{ab}. \quad (\text{A.57})$$

Esta variable se transforma como mostraremos, primero restamos ambas variables,

$$\begin{aligned} {}_{\psi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} - {}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} &= {}_{\psi}l_{ab} - {}_{\varphi}l_{ab} \\ &\quad - 2\mathcal{L}_{\psi X} {}_{\psi}h_{ab} + 2\mathcal{L}_{\varphi X} {}_{\varphi}h_{ab} \\ &\quad + \mathcal{L}_{\psi X}^2 g_{ab} - \mathcal{L}_{\varphi X}^2 g_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

luego, usando la linealidad de la derivada de Lie A.8.1 y las reglas de transformación de norma a primer orden (A.53) y (A.55b)

$$\begin{aligned} {}_{\psi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} - {}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} &= -2\mathcal{L}_{\xi_1} (\mathcal{L}_{\xi_1} g_{ab}) + \mathcal{L}_{\xi_2} g_{ab} + \mathcal{L}_{\xi_1}^2 g_{ab} - 2\mathcal{L}_{\varphi X} (\mathcal{L}_{\xi_1} g_{ab}) + \mathcal{L}_{\psi X}^2 g_{ab} - \mathcal{L}_{\varphi X}^2 g_{ab} \\ &= \mathcal{L}_{\xi_2} g_{ab} + \left( \mathcal{L}_{\xi_1} \mathcal{L}_{\varphi X} - \mathcal{L}_{\varphi X} \mathcal{L}_{\xi_1} \right) g_{ab} \\ &= \mathcal{L}_{\sigma_2} g_{ab} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

donde  $\sigma_2^a \equiv \xi_2^a + [\xi_1, \varphi X]^a$ .

Entonces, la transformación de  $\hat{\mathcal{L}}$  tiene la misma forma que la transformación de primer orden (A.53a). Por lo tanto, como suponemos que existe un procedimiento para descomponer un campo tensorial de rango dos que se transforma como (A.53a) en (A.54), podemos descomponer al tensor  $\hat{\mathcal{L}}_{ab}$  en un campo tensorial  $\mathcal{L}_{ab}$  y un campo vectorial  ${}_{\varphi}Y^b$  de la siguiente manera:

$${}_{\varphi}\hat{\mathcal{L}}_{ab} =: \mathcal{L}_{ab} + \nabla_{(a} {}_{\varphi}Y_{b)} \quad (\text{A.60})$$

donde  $\mathcal{L}_{ab}$  se transforma como la parte invariante de norma de  $\hat{\mathcal{L}}_{ab}$

$${}_{\psi}\mathcal{L}_{ab} - {}_{\varphi}\mathcal{L}_{ab} = 0, \quad (\text{A.61})$$

<sup>17</sup>Es importante mencionar que la expansión armónica depende fuertemente no solamente de las simetrías locales del espacio-tiempo de fondo, si no también en la topología global de la subvariedad en la cual los armónicos escalares, vectoriales y tensoriales son definidos [139].

y el campo vectorial  $Y^b$  como la parte variable de norma

$$\psi Y^a - \varphi Y^a = \zeta_2^a + [\zeta_1, \varphi X]^a. \quad (\text{A.62})$$

Usando este campo tensorial y la definición (A.53b), la perturbación a segundo orden de la métrica es posible descomponerla en

$$l_{ab} = \mathcal{L}_{ab} + 2\mathcal{L}_X h_{ab} + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2) g_{ab}, \quad (\text{A.63})$$

donde  $\mathcal{L}_{ab}$  es la parte invariante de norma y  $Y^a$  es la parte variante de la perturbación a segundo orden. El caso para ordenes superiores es completamente análogo al mostrado para el segundo orden, por ejemplo para tercer orden, el lector puede consultar [139].

- IV. Se pueden definir los invariantes de norma a orden  $n < k$  de cualquier campo tensorial (excluyendo la métrica) usando las perturbaciones de la métrica. Las partes variantes de norma de la métrica ( $X^a, Y^b$  a primer y segundo orden) no poseen nada de contenido físico, mas sin embargo, son importantes para definir las variables invariantes de norma de los campos tensoriales. Las partes invariantes de norma  $\mathbf{Q}$  de un campo tensorial arbitrario  $\mathcal{Q}$  (sin incluir la métrica) están dadas por (a segundo orden)

$${}^{(1)}\mathbf{Q} \equiv {}^{(1)}\mathcal{Q} - \mathcal{L}_X \mathcal{Q}_0, \quad (\text{A.64a})$$

$${}^{(2)}\mathbf{Q} \equiv {}^{(2)}\mathcal{Q} - 2\mathcal{L}_X {}^{(1)}\mathcal{Q} - \{\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2\} \mathcal{Q}_0 \quad (\text{A.64b})$$

Es fácil ver que estas variables son invariantes de norma si se usan las ecuaciones (A.19), (A.55b) y (A.62).

En este momento podemos resolver la pregunta acerca de la generalidad de las ecuaciones (A.64), esta pregunta es válida debido a que nuestras elecciones de norma eran mapeos exponenciales, si esto no fuese así, las ecuaciones afectadas serían (A.10) (la serie de Taylor del *pull-back* de  $\mathcal{Q}_\lambda$ ), las definiciones de las perturbaciones (A.12) y las relaciones entre generadores de los mapeos y los generadores de la transformación de norma (A.20), pero las ecuaciones más importantes (A.64) no se ven cambiadas, ya que son consecuencia directa de la expansión en serie de Taylor del difeomorfismo que define la transformaciones de norma,  $\Phi_\lambda$  [143].

En lo que resta de la sección se seguirá el esquema siguiente, se presentan los cálculos y conceptos de manera general en un apartado y luego se aplican en el apartado siguiente al caso de FLRW. Entonces, el apartado siguiente tratará sobre la descomposición de las partes invariantes de norma de las perturbaciones de la métrica.

### Perturbaciones de la métrica invariantes de norma en el Universo FLRW

En esta sección procederemos a aplicar el algoritmo recién dado (sección A.6.1) al espacio-tiempo de FLRW presentado en la sección A.4. Empezando por descomponer la perturbación lineal de la métrica como en (A.54).

Analizando las transformaciones de norma (A.47), (A.48) y (A.49) podemos encontrar las variables invariantes y variantes de norma a primer orden en la perturbación de una manera sencilla. De la ecuación (A.49) se ve que la parte transversa y sin traza de la perturbación tensorial, es invariante de norma, a la cual llamaremos  $\chi_{ij}^{(1)}$ , donde el superíndice indica que es la variable invariante de norma a primer orden,

$$\chi_{ij}^{(1)} \equiv h_{ij}^{(TT)}, \quad \chi_{ij}^{(1)} = \chi_{ij}^{(1)}, \quad \chi^{(1)i}{}_{i} = 0, \quad \chi_{ij}^{(1),i} = 0, \quad (\text{A.65})$$

podemos ver que  $\chi_{ij}^{(1)}$  tiene dos componentes y es llamado *modo tensorial* en el contexto de las perturbaciones cosmológicas. Usando ahora (A.48a) y (A.48b) podemos definir la variable

$$a^2 v_i^{(1)} \equiv h_i^{(V)} - (\partial_\eta - 2\mathfrak{H}) \left( a^2 h_i^{(VT)} \right) = h_i^{(V)} - a^2 \partial h_i^{(VT)}. \quad (\text{A.66})$$

Esta variable también es invariante de norma y se le conoce como *modo vectorial* y es libre de divergencia, i.e.

$$v_i^{(1),i} = 0, \quad (\text{A.67})$$

esta propiedad nos indica que el modo vectorial,  $v_i^{(1)}$ , tiene dos variables independientes.

Por último, para obtener los *modos escalares*, podemos definir la variable  $\bar{X}_\eta$ , a partir de las ecuaciones (A.47b) y (A.47d) mediante

$$\bar{X}_\eta \equiv h^{(SV)} - \frac{1}{2} (\partial_\eta - 2\mathfrak{H}) (a^2 h^{(ST)}) = h^{(SV)} - \frac{1}{2} a^2 \partial_\eta h^{(ST)}, \quad (\text{A.68})$$

esta variable transforma de la manera siguiente (i.e. es variante de norma)

$${}_\varphi \bar{X}_\eta - \psi \bar{X}_\eta = \zeta_\eta, \quad (\text{A.69})$$

Observando a (A.47a) es fácil definir al invariante de norma  $\Phi$ ,

$$-2a^2 \Phi^{(1)} \equiv h_{\eta\eta} - 2(\partial_\eta - \mathfrak{H}) \bar{X}_\eta. \quad (\text{A.70})$$

Además, de las transformaciones de norma (A.47c), (A.47d) y de la transformación de  $\bar{X}_\eta$  definiremos al invariante de norma  $\Psi$ ,

$$-2a^2 \Psi^{(1)} \equiv a^2 \left( h^{(S)} - \frac{1}{3} \nabla^2 h^{(ST)} \right) + 2\mathfrak{H} \bar{X}_\eta. \quad (\text{A.71})$$

Tenemos entonces seis componentes invariantes de norma: 2 escalares  $(\Phi^{(1)}, \Psi^{(1)})$ , 2 vectoriales  $v_i^{(1)}$  y 2 tensoriales  $\chi_{ij}^{(1)}$ . Como la parte perturbada de la métrica  $h_{ab}$ , tiene 10 componentes independientes las cuatro componentes restantes son la parte variable de norma de la métrica. Para encontrar sus expresiones, escribamos la descomposición 3+1 de la métrica en términos de los invariantes de norma  $\{\Phi, \Psi, v_i, \chi_{ij}\}$ :

$$h_{\eta\eta} = -2a^2\Phi^{(1)} + 2(\partial_\eta - \mathfrak{H})\bar{X}_\eta, \quad (\text{A.72a})$$

$$h_{\eta i} = a^2v_i^{(1)} + a^2\partial_\eta h_i^{(VT)} + h_i^{(SV)}, \quad (\text{A.72b})$$

$$h_{ij} = -2a^2\Psi^{(1)}\delta_{ij} + a^2\chi_{ij}^{(1)} + a^2h_{,i,j}^{(ST)} - 2\mathfrak{H}\bar{X}_\eta\delta_{ij} + 2a^2h_{(j,i)}^{(VT)}, \quad (\text{72c})$$

comparando estas ecuaciones con la descomposición en términos de la separación (A.54)

$$h_{\eta\eta} = \mathcal{H}_{\eta\eta} + 2(\partial_\eta - \mathfrak{H})X_\eta \quad (\text{A.73a})$$

$$h_{\eta i} = \mathcal{H}_{\eta i} + X_{\eta,i} + X_{i\eta} - 2\mathfrak{H}X_i \quad (\text{A.73b})$$

$$h_{ij} = \mathcal{H}_{ij} + 2X_{(i,j)} - 2\mathfrak{H}\delta_{ij}X_\eta \quad (\text{A.73c})$$

de aquí se sigue fácilmente que las partes invariantes de norma de la perturbación a primer orden de la métrica son

$$\mathcal{H}_{\eta\eta} \equiv -2a^2\Phi^{(1)}, \quad \mathcal{H}_{\eta i} \equiv a^2v_i^{(1)}, \quad \mathcal{H}_{ij} \equiv -2a^2\Psi^{(1)}\delta_{ij} + a^2\chi_{ij}^{(1)}. \quad (\text{A.74})$$

Igualando las partes variantes de norma de los conjuntos de ecuaciones (A.72) y (A.73) obtenemos las siguientes ecuaciones que hay que resolver para obtener la parte variable de norma

$$2(\partial_\eta - \mathfrak{H})X_\eta = 2(\partial_\eta - \mathfrak{H})\bar{X}_\eta \quad (\text{A.75a})$$

$$X_{i\eta} - 2\mathfrak{H}X_i = a^2\partial_\eta h_i^{(VT)} + h_i^{(SV)} \quad (\text{A.75b})$$

$$2X_{(i,j)} - 2\mathfrak{H}\delta_{ij}X_\eta = a^2\chi_{ij}^{(1)} + a^2h_{,i,j}^{(ST)} - 2\mathfrak{H}\bar{X}_\eta\delta_{ij} + 2a^2h_{(j,i)}^{(VT)} \quad (\text{A.75c})$$

De la ecuación (A.75a) obtenemos  $X_\eta = \bar{X}_\eta + a\bar{C}_\eta$ , donde  $\bar{C}_\eta$  es una función escalar que satisface  $\partial_\eta\bar{C}_\eta = 0$ . Usando esta solución, (A.68) en (A.75b)

$$X_i = a^2 \left( h_i^{(VT)} + \frac{1}{2}h_{,i}^{(ST)} \right) - \partial_i\bar{C}_\eta a^2 \int \frac{d\eta}{a} + a^2\bar{C}_i, \quad (\text{A.76})$$

con  $\partial_i\bar{C}_i = 0$ . La última ecuación (A.75c) da la siguiente relación de constricción

$$a^2\partial_{(i}\bar{C}_{j)} - \partial_i\partial_j\bar{C}_\eta a^2 \int \frac{d\eta}{a} - \mathfrak{H}\gamma_{ij}a\bar{C}_\eta = 0 \quad (\text{A.77})$$

definiendo  $C_\eta \equiv a\bar{C}_\eta$  y  $C_i \equiv \partial_i\bar{C}_\eta a^2 \int \frac{d\eta}{a} + a^2\bar{C}_i$ , podemos construir el vector  $C_a \equiv C_\eta(\eta)(d\eta)_a + C_i(dx^i)_a$ , el cual es un vector de Killing en el espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$  como se puede verificar fácilmente. Por lo tanto la parte variante de la perturbación de la métrica y su relación con las perturbaciones  $h^{(SV)}, h^{(ST)}, h_i^{(VT)}$  es única salvo el grado de libertad proveniente del campo vectorial de Killing. Además, como la parte variante contribuye a la perturbación de la métrica mediante (A.54), el campo vectorial de Killing  $C_a$  no contribuye a las perturbaciones de la métrica. Finalmente, para satisfacer la constricción (A.77), tenemos  $\bar{C}_\eta = 0, \partial_{(i}\bar{C}_{j)} = 0$ , con lo que  $\bar{C}_j$  es un vector de Killing en  $\Sigma(\eta)$  y como se mencionó antes estos vectores pertenecen al *kernel* de  $\Delta$  y quedan fuera del dominio de las perturbaciones, entonces  $\bar{C}_j = 0$ . Claro que sería posible incluir este *kernel* en nuestra discusión al extender el dominio de las perturbaciones, pero esto queda fuera del alcance de este artículo[141, 143]. Es fácil comprobar que la parte variante de la norma  $X^a$  transforma mediante (A.55b), como era de esperarse.

Las perturbaciones de la métrica a segundo orden se pueden encontrar siguiendo los mismos argumentos y pasos algebraicos que para el orden lineal, pero usando la variable  $\hat{\mathcal{L}}_{ab}$ , definida por (A.56). Repitiendo todos los pasos con esta variable (i.e. descomponiéndola en su parte variable e invariante de norma, descomponiéndola de manera armónica, etc) llegamos a esta expresión para la parte invariante de norma de la perturbación a segundo orden de la métrica (A.63),  $\mathcal{L}_{ab}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ab} = & -2a^2\Phi^{(2)}(d\eta)_a(d\eta)_b + 2a^2v_i^{(2)}(d\eta)_{(a}(dx^i)_{b)} \\ & + a^2\left(-2\Psi^{(2)}\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(2)}\right)(dx^i)_a(dx^j)_b \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

donde  $v^{(2)}$  y  $\chi_{ij}^{(2)}$  satisfacen las ecuaciones

$$v_i^{(2),i} = \delta^{ij}v_{j,i}^{(2)} = 0, \quad \chi_i^{(2),i} = 0, \quad \chi_{ij}^{(2),i} = 0. \quad (\text{A.79})$$

Los invariantes de norma  $\Phi^{(2)}, \Psi^{(2)}$  son los *modos escalares* de la perturbación a segundo orden, y  $v_i^{(2)}$  y  $\chi_{ij}^{(2)}$  son los *modos vectoriales* y *tensoriales* a segundo orden respectivamente.

### A.6.2 Invariantes de norma de variables geométricas

Luego de realizar los primeros tres pasos (encontrar las partes invariantes de norma a primer y segundo orden del *pull-back* de la métrica del universo físico) del algoritmo presentado en la sección A.6.1, el siguiente paso (el cuatro) es encontrar las partes invariantes de norma de las cantidad geométricas de interés.



### Tensor de curvatura

La definición del tensor de curvatura  $\bar{R}_{abc}{}^d$  [215] en el espacio-tiempo físico  $(\mathcal{M}, \bar{g}_{ab})$  es

$$(\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b - \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_a) \bar{\omega}_c = \bar{\omega}_d \bar{R}_{abc}{}^d \quad (\text{A.80})$$

donde  $\bar{\nabla}_a$  es la derivada covariante compatible con  $\bar{g}_{ab}$  y  $\bar{\omega}_c$  es una uno-forma en el espacio físico  $\mathcal{M}$ . Por otra parte, en el espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$ ,  $R_{abc}{}^d$  esta definido por

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = \omega_d R_{abc}{}^d \quad (\text{A.81})$$

con  $\nabla_a$  la derivada compatible con  $g_{ab}$  y  $\omega_c$  una una-forma en  $\mathcal{M}_0$ . Introducimos el operador  $\varphi^* \bar{\nabla}_a (\varphi^{-1})^*$  en  $\mathcal{M}_0$ , que podemos identificar con el *pull-back* de la derivada  $\bar{\nabla}_a$  en  $\mathcal{M}$ . Este operador depende de la elección de norma  $\varphi$ .

La propiedad de que este operador derivada sea compatible con la métrica está dada por

$$\varphi^* \bar{\nabla}_a \left( (\varphi^{-1})^* \varphi^* \bar{g}_{ab} \right) = 0 \quad (\text{A.82})$$

donde  $\varphi^* \bar{g}_{ab}$  es *pull-back* de la métrica en  $\mathcal{M}$ . Dado que el *pull-back*  $\varphi^* \bar{\nabla}_a (\varphi^{-1})^*$  en  $\mathcal{M}_0$  de la  $\bar{\nabla}_a$  en  $\mathcal{M}$  es lineal, satisface la regla de Leibnitz, conmuta con la contracción y es libre de torsión se puede considerar como operador derivada en  $\mathcal{M}_0$ .

Aunque es obvio que los *pull-backs* de las cantidades geométricas del espacio-tiempo  $\mathcal{M}$  dependen de la elección de norma, (e.g. de  $\varphi$ ), a partir de este momento obviaremos a  $\varphi$  en las fórmulas, es decir, con el fin de no complicar la notación expresaremos a  $\varphi^* \bar{\nabla}_a (\varphi^{-1})^*$  simplemente como  $\bar{\nabla}_a$ ,  $\varphi^* \bar{R}_{abc}{}^d$ , como  $\bar{R}_{abc}{}^d$  etc.

Como el operador  $\bar{\nabla}_a$  se puede considerar como un operador derivada en  $\mathcal{M}_0$ , existe entonces, un campo tensorial  $C_{bc}^a$  en  $\mathcal{M}_0$  tal que,

$$\bar{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - C_{ab}^c \omega_c, \quad (\text{A.83})$$

donde  $\omega_c$  es una uno-forma arbitraria en  $\mathcal{M}_0$ . Usando  $\bar{\nabla}_a \bar{g}_{bc} = 0$  en  $\mathcal{M}$  el  $C_{bc}^a$  en  $\mathcal{M}_0$  está dado por

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} \bar{g}^{cd} (\nabla_a \bar{g}_{db} + \nabla_b \bar{g}_{da} - \nabla_d \bar{g}_{ab}). \quad (\text{A.84})$$

Debemos notar que toda la dependencia de la elección de norma del operador  $\bar{\nabla}_a$  en  $\mathcal{M}_0$  está incluida únicamente en  $C_{ab}^c$ .

Usando la definición del tensor de Riemann, (A.80) y la ecuación (A.83), por un lado tenemos,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{abc}{}^d &= \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b - \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_a = \bar{\nabla}_a (\nabla_b - C_{bc}^d) - \bar{\nabla}_b (\nabla_a - C_{ba}^d) \\ &= \nabla_a \nabla_b - C_{ab}^e \nabla_e - \bar{\nabla}_a C_{bc}^d - \nabla_b \nabla_a + C_{ba}^e \nabla_e - \bar{\nabla}_b C_{ac}^d, \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

pero aplicando la definición de  $\bar{\nabla}$  (A.83)

$$\bar{\nabla}_a C_{bc}^d \omega_d = \nabla_a C_{bc}^d \omega_d - C_{ec}^d C_{ab}^e \omega_d - C_{be}^d C_{ac}^e \omega_d,$$

obtenemos entonces,

$$\bar{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a} C_{b]c}^d + 2C_{e[a}^d C_{b]c}^e. \quad (\text{A.86})$$

Así, hemos obtenido el tensor de curvatura en el espacio-tiempo físico  $\mathcal{M}$ , en términos del tensor de curvatura del espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$ .

Para obtener la expresión perturbada de la curvatura  $\bar{R}_{abc}{}^d$ , es necesario calcular las expansiones perturbativas de la inversa de la métrica,  $\bar{g}^{ab}$  y  $C_{ab}^c$ .

*Perturbación de la inversa de la métrica* Expandamos en serie de Taylor la inversa de la métrica

$$\bar{g}^{ab} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^{(k)} \varphi \bar{g}^{ab} = g^{ab} + \lambda D^{ab} + \frac{\lambda^2}{2} E^{ab} + \mathcal{O}(\lambda^3),$$

usando  $\bar{g}^{ab} \bar{g}_{bc} = \delta_c^a$  tenemos

$$\begin{aligned} \delta_c^a &= \left( g^{ab} + \lambda C^{ab} + \frac{\lambda^2}{2} E^{ab} \right) \left( g_{bc} + \lambda h_{bc} + \frac{\lambda^2}{2} l_{ab} \right) \\ &= \delta_c^a + \lambda (h_c^a + C_c^a) + \frac{\lambda^2}{2} \left( l_c^a + 2h_{bc} C^{ab} + D_c^a \right) \end{aligned}$$

de aquí se ve que  $C^{ab} = -h^{ab}$ . En el segundo orden

$$D_c^a = -2h_{bc} \left( -h^{ab} \right) - l_c^a = 2h_{bc} h^{ae} - l_c^a$$

obteniendo finalmente  $D^{ab} = 2h^{ae} h_c^b - l^{ab}$ .

Entonces, las perturbaciones a primer y segundo orden del inverso de la métrica son

$$\delta \bar{g}^{ab} \equiv -h^{ab} \quad (\text{A.87a})$$

$$\delta^{(2)} \bar{g}^{ab} \equiv 2h^{ae} h_c^b - l^{ab} \quad (\text{A.87b})$$

*Perturbaciones de  $C_{bc}^a$*  Sustituyendo en (A.84) las expansiones de la métrica y la métrica inversa a segundo orden, Se pueden obtener las expresiones perturbadas de  $C_{bc}^a$  a primer y segundo orden

$$\delta C_{ab}^c = \nabla_{(a} h_{b)}^c - \frac{1}{2} \nabla^c h_{ab}, \quad (\text{A.88a})$$

$$\delta^{(2)}C_{ab}^c = \left[ \nabla_{(a} l_{b)}^c - \frac{1}{2} \nabla^c l_{ab} \right] - 2h^{cd} \left[ \nabla_{(a} h_{b)d} - \nabla_d h_{ab} \right] \quad (\text{A.88b})$$

Definimos la variable  $H_{ab}{}^c[A]$  donde  $A = \{h, l\}$ ,

$$H_{ab}{}^c[A] \equiv \nabla_{(a} A_{b)}^c - \frac{1}{2} \nabla^c A_{ab}, \quad (\text{A.89})$$

$H_{ab}{}^c[A]$  estará apareciendo repetidamente en los cálculos que siguen con varios acomodos de índices, que son definidos como

$$\begin{aligned} H_{abc}[A] &\equiv g_{cd} H_{ab}{}^d[A], \\ H_a{}^{bc}[A] &\equiv g^{bd} H_{ad}{}^c[A], \\ H_a{}^b{}_c[A] &\equiv g_{cd} H_a{}^{bd}[A]. \end{aligned}$$

escritas en estas nuevas variables las ecuaciones (A.88) son

$$\delta C_{ab}^c = H_{ab}{}^c[h], \quad (\text{A.90a})$$

$$\delta^{(2)}C_{ab}^c = H_{ab}{}^c[l] - 2h^{cd} H_{abd}[h]. \quad (\text{A.90b})$$

Ahora podemos expandir en serie de Taylor el tensor de Riemann a segundo orden

$$\bar{R}_{abc}{}^d = R_{abc}{}^d + \lambda {}^{(1)}R_{abc}{}^d + \frac{\lambda^2}{2} {}^{(2)}R_{abc}{}^d. \quad (\text{A.91})$$

Comparando esta última ecuación con (A.86), luego de sustituir (A.90a) y (A.90b),

$$\delta \bar{R}_{abc}{}^d = -2 \nabla_{[a} H_{b]c}{}^d[h] \quad (\text{A.92a})$$

$$\delta^{(2)} \bar{R}_{abc}{}^d = -2 \nabla_{[a} H_{b]c}{}^d[l] + 4h^{de} \nabla_{[a} H_{b]ce}[h] + 4H_{c[a}{}^e[h] H_{b]e}{}^d[h] \quad (\text{A.92b})$$

Para descomponer el tensor de Riemann en sus partes invariante y variante de norma debemos escribir primero  $H_{ab}^c[*]$  en términos de variables invariantes de norma, esto será sencillo ya que hemos descompuesto a  $h_{ab}$  como (A.54),

$$2H_{abc}[h] = [\nabla_a h_{bc} + \nabla_b h_{ac} - \nabla_c h_{ab}],$$

derivando  $h_{ab}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_a h_{bc} &= \nabla_a \mathcal{H}_{bc} + \nabla_a \nabla_b X_c + \nabla_a \nabla_c X_b \\ \nabla_b h_{ac} &= \nabla_b \mathcal{H}_{ac} + \nabla_b \nabla_a X_c + \nabla_b \nabla_c X_c \\ -\nabla_c h_{ab} &= -\nabla_c \mathcal{H}_{ab} - \nabla_c \nabla_a X_b - \nabla_c \nabla_b X_a \end{aligned}$$

entonces, sumando estas expresiones,

$$2H_{abc}[h] = 2\nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \nabla_c\mathcal{H}_{ab} + R_{acb}{}^d X_d + R_{bca}{}^d X_c + (\nabla_a\nabla_b + \nabla_b\nabla_a)X_c + \nabla_b\nabla_a X_c - \nabla_b\nabla_a X_c$$

en esta última ecuación hemos sumando y restando  $\nabla_b\nabla_a X_c$ . Ahora sumemos y restemos  $R_{cab}{}^d X_d$

$$2H_{abc}[h] = 2\nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \nabla_c\mathcal{H}_{ab} + R_{acb}{}^d X_d + R_{bca}{}^d X_c + R_{abc}{}^d X_d + 2\nabla_b\nabla_a X_c + R_{cab}{}^d X_d - R_{cab}{}^d X_d,$$

usando la primera identidad de Bianchi,  $R_{a[bcd]} = 0$ ,

$$2H_{abc}[h] = 2\nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \nabla_c\mathcal{H}_{ab} + 2\nabla_b\nabla_a X_c + R_{acb}{}^d X_d - R_{cab}{}^d X_d.$$

recordando las simetrías del tensor de Riemann  $R_{acb}{}^d = -R_{cab}{}^d$ , y usando por segunda vez la primera identidad de Bianchi, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} H_{abc}[h] &= \nabla_{(a}\mathcal{H}_{b)c} - \frac{1}{2}\nabla_c\mathcal{H}_{ab} + \nabla_a\nabla_b X_c + R_{bca}{}^d X_d \\ &= H_{abc}[\mathcal{H}] + \nabla_a\nabla_b X_c + R_{bca}{}^d X_d \end{aligned}$$

Derivando esta última expresión obtenemos,

$$\nabla_b H_{acd}[h] = \nabla_b H_{acd}[\mathcal{H}] + \nabla_b\nabla_a\nabla_c X_d + X_e\nabla_b R_{cda}{}^e + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e \quad (\text{A.93})$$

y sustituyéndola en (A.92a)

$$\begin{aligned} \delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] \\ &\quad + (\nabla_b\nabla_a - \nabla_a\nabla_b)\nabla_c X_d + X_e(\nabla_b R_{cda}{}^e - \nabla_a R_{cdb}{}^e) \\ &\quad + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e - R_{cdb}{}^e\nabla_a X_e, \end{aligned}$$

usando  $(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)Q_{cd} = R_{abc}{}^e Q_{ed} + R_{abd}{}^e Q_{ce}$  en esta última ecuación

$$\begin{aligned} \delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + R_{bac}{}^e\nabla_e X_d \\ &\quad + R_{bad}{}^e\nabla_c X_e + X_e(\nabla_b R_{cda}{}^e - \nabla_a R_{cdb}{}^e) + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e - R_{cdb}{}^e\nabla_a X_e \\ &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + R_{bac}{}^e\nabla_e X_d + R_{bad}{}^e\nabla_c X_e \\ &\quad + R_{cda}{}^e\nabla_b X_e - R_{cdb}{}^e\nabla_a X_e + g^{fe}X_e(\nabla_b R_{cdf}{}^e - \nabla_a R_{cdf}{}^e), \end{aligned}$$

una vez más aplicamos las simetrías del tensor de Riemann,

$$\begin{aligned} \delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] - R_{abc}{}^e\nabla_e X_d \\ &\quad + R_{abed}\nabla_c X^e + R_{aecd}\nabla_b X^e - R_{ebcd}\nabla_a X^e + X^e(\nabla_b R_{cdae} - \nabla_a R_{cdbe}) \\ &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + g_{hd}(R_{ebc}{}^h\nabla_a X^e + R_{aec}{}^h\nabla_b X^e + R_{abe}{}^h\nabla_c X^e - R_{abc}{}^e\nabla_e X^h) \\ &\quad + X^e(\nabla_b R_{aecd} + \nabla_a R_{ebcd}), \end{aligned}$$

luego, empleando la segunda identidad de Bianchi,  $\nabla_{[a}R_{bc]de} = 0$

$$\begin{aligned}\delta\bar{R}_{abcd} &= -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] \\ &+ g_{hd} \left( R_{ebc}{}^h \nabla_a X^e + R_{aec}{}^h \nabla_b X^e + R_{abe}{}^h \nabla_c X^e - R_{abc}{}^e \nabla_e X^h \right) \\ &+ X^e (-\nabla_a R_{ebcd} - \nabla_e R_{bacd} + \nabla_a R_{ebcd}),\end{aligned}$$

y utilizando la definición de la derivada de Lie (A.178d) sobre un campo tensorial de rango (1, 3)

$$\delta\bar{R}_{abcd} = -2\nabla_{[a}H_{b]cd}[\mathcal{H}] + g_{hd} \left( \mathcal{L}_X R_{abc}{}^h - X^e \nabla_e R_{abc}{}^h \right) + X^e \nabla_e R_{abcd},$$

llegamos finalmente a la perturbación lineal del tensor de Riemann escrita en sus partes invariantes y variantes de norma,

$$\delta\bar{R}_{abc}{}^d = -2\nabla_{[a}H_{b]c}{}^d[\mathcal{H}] + \mathcal{L}_X R_{abc}{}^d. \quad (\text{A.94})$$

Para la perturbación a segundo orden, usamos la variable definida en (A.56), y calculamos  $H_{ab}{}^c[\hat{\mathcal{L}}]$ ,

$$\begin{aligned}H_{ab}{}^c[\hat{\mathcal{L}}] &= H_{ab}{}^c[l] - \mathcal{L}_X (H_{ab}{}^c[h] + H_{ab}{}^c[\mathcal{H}]) + \\ &(H_{abd}[h] + H_{abd}[\mathcal{H}]) \mathcal{L}_X g^{cd} - (h_c{}^d + \mathcal{H}_c{}^d) \left( \nabla_a \nabla_b X^d - R_{eab}{}^d X^e \right),\end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

despejando  $H_{ab}{}^c[l]$  y sustituyendo en (A.92b), llegamos a

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\bar{R}_{abc}{}^d &= -2\nabla_{[a}H_{b]c}{}^d[\hat{\mathcal{L}}] + 4H_{[a}{}^{de}[\mathcal{H}]H_{b]ce}[\mathcal{H}] + \\ &2\mathcal{H}_e{}^d (\mathcal{L}_X R_{abc}{}^e - \delta\bar{R}_{abc}{}^e) + 2\mathcal{L}_X \left( \delta\bar{R}_{abc}{}^d - \frac{1}{2}\mathcal{L}_X R_{abc}{}^d \right),\end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

usando las fórmulas (A.60) y (A.92a),

$$\delta^{(2)}\bar{R}_{abc}{}^d = -2\nabla_{[a}H_{b]c}{}^d[\mathcal{L}] + 4H_{[a}{}^{de}[\mathcal{H}]H_{b]ce}[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}_e{}^d \nabla_{[a}H_{b]c}{}^e[\mathcal{H}] + 2\mathcal{L}_X^{(1)}\bar{R}_{abc}{}^d + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2) R_{abc}{}^d. \quad (\text{A.97})$$

Usando (A.94) y (A.97) podemos definir los tensores de curvatura invariantes de norma de la siguiente manera

$$\delta\mathbf{R}_{abc}{}^d \equiv \delta\bar{R}_{abc}{}^d - \mathcal{L}_X R_{abc}{}^d \quad (\text{A.98a})$$

$$\delta^{(2)}\mathbf{R}_{abc}{}^d \equiv \delta^{(2)}\bar{R}_{abc}{}^d - 2\mathcal{L}_X \delta\bar{R}_{abc}{}^d - (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2) R_{abc}{}^d. \quad (\text{A.98b})$$

### Perturbaciones del tensor de Ricci

Contrayendo los índices  $b$  y  $d$  en las ecuaciones (A.94) y (A.97), podemos derivar las fórmulas perturbativas de la curvatura de Ricci,

$$\delta\bar{R}_{ab} = -2\nabla_{[a}H_{c]b}{}^c[\mathcal{H}] + \mathcal{L}_X R_{ab} \quad (\text{A.99a})$$

$$\delta^{(2)}\bar{R}_{ab} = -2\nabla_{[a}H_{c]b}{}^c[\mathcal{L}] + 4H_{[a}{}^{cd}[\mathcal{H}]H_{c]bd}[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}_d{}^c\nabla_{[a}H_{b]c}{}^d[\mathcal{H}] + 2\mathcal{L}_X\delta\bar{R}_{ab} + \left(\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2\right)R_{ab}, \quad (\text{A.99b})$$

de estas ecuaciones definimos los invariantes de norma del tensor de Ricci:

$$\delta\mathbf{R}_{ab} = \delta\bar{R}_{ab} - \mathcal{L}_X R_{ab} \quad (\text{A.100a})$$

$$\delta^{(2)}\mathbf{R}_{ab} = \delta^{(2)}\bar{R}_{ab} - 2\mathcal{L}_X\delta\bar{R}_{ab} - \left(\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2\right)R_{ab}. \quad (\text{A.100b})$$

### Perturbaciones del escalar de Ricci

El escalar de Ricci en el espacio-tiempo físico  $\mathcal{M}$  está dado por

$$\bar{\mathcal{R}} \equiv \bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} \quad (\text{A.101})$$

Expandiendo a primer orden ambas cantidades, usando (A.87a) y (A.99a)

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + \lambda^{(1)}\bar{\mathcal{R}} = \left(g^{ab} - \lambda h^{ab}\right) \left(R_{ab} + \lambda\mathcal{L}_X R_{ab} - 2\lambda\nabla_{[a}H_{c]b}{}^c[\mathcal{H}]\right) \quad (\text{A.102})$$

Reconociendo términos a primer orden

$$\delta\bar{\mathcal{R}} = g^{ab}\mathcal{L}_X R_{ab} - h^{ab}R_{ab} - 2\nabla_{[a}H_{c]}{}^{ac}[\mathcal{H}] \quad (\text{A.103})$$

usando la regla de Leibnitz de la derivada de Lie,

$$\delta\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{L}_X \left(g^{ab}R_{ab}\right) - R_{ab}\mathcal{L}_X g^{ab} - h^{ab}R_{ab} - 2\nabla_{[a}H_{c]}{}^{ac}[\mathcal{H}] \quad (\text{A.104})$$

calculando la derivada de Lie de la métrica y usando la descomposición de  $h^{ab}$  (A.54), llegamos a

$$\delta\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{L}_X \mathcal{R} - \mathcal{H}^{ab}R_{ab} - 2\nabla_{[a}H_{c]}{}^{ac}[\mathcal{H}] \quad (\text{A.105})$$

Similarmente, usando (A.87a), (A.87b), (A.99a) y (A.99b) llegamos a

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\bar{\mathcal{R}} = & -2\nabla_{[a}H_c]^{ac}[\mathcal{L}] + R^{ab}(2\mathcal{H}_{ca}\mathcal{H}_b{}^c - \mathcal{L}_{ab}) \\ & + 4H_{[a}{}^{cd}[\mathcal{H}]H_c]{}^a{}_d[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}_c{}^b\nabla_{[a}H_b]{}^{ac}[\mathcal{H}] \\ & + 4\mathcal{H}^{ab}\nabla_{[a}H_d]{}^b{}^d[\mathcal{H}] + 2\mathcal{L}_X\delta\bar{\mathcal{R}} + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2)\mathcal{R}, \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

que es la perturbación a segundo orden del escalar de Ricci. La definición de los escalares de Ricci invariantes de norma es trivial:

$$\delta\mathbf{R} \equiv \delta\bar{\mathcal{R}} - \mathcal{L}_X\mathcal{R} \quad (\text{A.107a})$$

$$\delta^{(2)}\mathbf{R} \equiv \delta^{(2)}\bar{\mathcal{R}} - 2\mathcal{L}_X\delta\bar{\mathcal{R}} - (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2)\mathcal{R}. \quad (\text{A.107b})$$

### Perturbaciones del tensor de Einstein

La perturbación a primer orden el tensor de Einstein es

$$\delta\bar{G}_{ab} = -2\nabla_{[a}H_d]{}^b{}^d[\mathcal{H}] + g_{ab}\nabla_{[c}H_d]{}^{cd}[\mathcal{H}] - \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ab}\mathcal{R} + \frac{1}{2}g_{ab}R_{cd}\mathcal{H}^{cd} + \mathcal{L}_X G_{ab} \quad (\text{A.108})$$

y a segundo orden

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\bar{G}_{ab} = & -2\nabla_{[a}H_c]{}^b{}^c[\mathcal{L}] + 4H_{[a}{}^{cd}[\mathcal{H}]H_c]{}^b{}^d[\mathcal{H}] + 4\mathcal{L}_c{}^d\nabla_{[a}H_d]{}^b{}^c[\mathcal{H}] \\ & - \frac{1}{2}g_{ab}\left(-2\nabla_{[c}H_d]{}^{cd}[\mathcal{L}] + R_{de}(2\mathcal{H}_c{}^d\mathcal{H}^{ec} - \mathcal{L}^{de})\right) \\ & + 4H_{[c}{}^{de}[\mathcal{H}]H_d]{}^c{}_e[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}_e{}^d\nabla_{[c}H_d]{}^{ce}[\mathcal{H}] + 4\mathcal{H}^{ce}\nabla_{[c}H_d]{}^d{}^e[\mathcal{H}] \\ & + 2\mathcal{H}_{ab}\nabla_{[c}H_d]{}^{cd}[\mathcal{H}] + \mathcal{H}_{ab}R_{cd}\mathcal{H}^{cd} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{ab}\mathcal{R} \\ & + 2\mathcal{L}_X\delta\bar{G}_{ab} + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2)G_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Es conveniente usar a  $\bar{G}_a{}^b \equiv \bar{g}^{bc}\bar{G}_{ac}$ , en lugar de  $\bar{G}_{ab}$ . Entonces levantamos el índice en las ecuaciones (A.108) y (A.109) con ayuda de (A.87):

$$\delta\bar{G}_a{}^b = \delta\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}] + \mathcal{L}_X G_a{}^b, \quad (\text{A.110a})$$

$$\delta^{(2)}\bar{G}_a{}^b = \delta\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}] + \delta^{(2)}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}, \mathcal{H}] + 2\mathcal{L}_X\delta\bar{G}_a{}^b + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2)G_a{}^b, \quad (\text{A.110b})$$

donde se introdujeron las variables

$$\delta\mathcal{G}[A]_a{}^b \equiv {}^{(1)}\Sigma_a{}^b[A] - \frac{1}{2}\delta_a^b {}^{(1)}\Sigma_c^c[A], \quad (\text{A.111})$$

$$\delta^{(2)}\mathcal{G}[A]_a{}^b \equiv {}^{(2)}\Sigma_a{}^b[A, B] - \frac{1}{2}\delta_a^b {}^{(2)}\Sigma_c^c[A, B], \quad (\text{A.112})$$

$${}^{(1)}\Sigma_a{}^b[A] \equiv -2\nabla_{[a}H_{d]}{}^{bd}[A] - A^{cb}R_{ac} + \frac{1}{2}\left(2\nabla_{[e}H_{d]}{}^{ed}[A] + R_{ed}A^{ed}\right), \quad (\text{A.113})$$

$$\begin{aligned} {}^{(2)}\Sigma_a{}^b[A, B] \equiv & 2R_{ad}B_c{}^{(b}A^{d)c} + 2H_{[a}{}^{de}[A]H_{d]}{}^b{}_e[B] + 2H_{[a}{}^{de}[B]H_{d]}{}^b{}_e[A] \\ & + 2A_e{}^d\nabla_{[a}H_{d]}{}^{be}[B] + 2B_e{}^d\nabla_{[a}H_{d]}{}^{be}[A] + 2A_c{}^b\nabla_{[a}H_{d]}{}^{cd}[B] + 2B_c{}^b\nabla_{[a}H_{d]}{}^{cd}[A]. \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

donde  $\delta\mathcal{G}[A]_a{}^b$ ,  $\delta^{(2)}\mathcal{G}[A]_a{}^b$  son las partes invariantes de norma del tensor de Einstein a primer y segundo orden, respectivamente.

### Perturbaciones de la divergencia de un tensor (1,1)

Debido a la importancia de la identidad de Bianchi  $\nabla^b\bar{G}_b{}^a = 0$ , en esta sección la perturbación a primer y segundo orden de la divergencia de un tensor (1,1) se calculará para un campo tensorial arbitrario  $\bar{T}_a{}^b$ . Luego de obtener las expresiones generales se mostrará que las identidades de Bianchi se cumplen orden a orden.

La divergencia de  $\bar{T}_a{}^b$  se define como

$$\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a = \nabla_a\bar{T}_b{}^a + C^a{}_{ce}\bar{T}_b{}^c - C^c{}_{ba}\bar{T}_c{}^a. \quad (\text{A.115})$$

Expandiendo en una serie de Taylor esta última ecuación,

$$\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[ \delta^{(k)}(\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a) \right]. \quad (\text{A.116})$$

A orden lineal encontramos

$$\delta(\bar{\nabla}_a\bar{T}_b{}^a) = \nabla_a\bar{T}_b{}^a + (H_{ca}{}^a[\mathcal{H}] + \nabla_c\nabla_a X^a)T_b{}^c - (H_{bac}[\mathcal{H}] + \nabla_b\nabla_a X_c + R_{abc}{}^e X_e)T^{ca}, \quad (\text{A.117})$$

Expandimos ahora a el campo tensorial  $\bar{T}_a{}^b$  usando (A.10). Siguiendo las definiciones (A.64), definimos las perturbaciones invariantes de norma,  $\mathcal{T}_b{}^a$ , como sigue

$$\delta\mathcal{T}_b{}^a \equiv \delta\bar{T}_b{}^a - \mathcal{L}_X T_b{}^a, \quad (\text{A.118})$$

$$\delta^{(2)}\mathcal{T}_b{}^a \equiv \delta^{(2)}\bar{T}_b{}^a - 2\mathcal{L}_X \delta\bar{T}_b{}^a - \left(\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2\right) T_b{}^a, \quad (\text{A.119})$$



luego, usando (A.118) y la fórmula del apéndice (A.179d), obtenemos la división de la parte invariante de norma de la divergencia de un tensor (1,1):

$$\delta(\bar{\nabla}_a \bar{T}_b^a) = \nabla_a \delta \mathcal{T}_b^a + (H_{ca}^a[\mathcal{H}] + \nabla_c \nabla_a X^a) T_b^c - (H_{ba}^c[\mathcal{H}] T_c^a + \mathcal{L}_X \nabla_a T_b^a). \quad (\text{A.120})$$

Podemos verificar la validez de la identidad de Bianchi del tensor de Einstein a orden lineal perturbativo usando la ecuación (A.120) con  $\bar{T}_b^a \rightarrow \bar{G}_b^a$ :

$$\delta(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b^a) = \nabla_a \delta \mathcal{G}_b^a + (H_{ca}^a[\mathcal{H}] + \nabla_c \nabla_a X^a) G_b^c - (H_{ba}^c[\mathcal{H}] G_c^a + \mathcal{L}_X \nabla_a G_b^a), \quad (\text{A.121})$$

necesitamos la derivada de la parte invariante del tensor de Einstein (A.111)

$$\nabla_a \delta \mathcal{G}_b^a = -H_{ca}^a[\mathcal{H}] G_b^c + H_{ba}^c[\mathcal{H}] G_c^a \quad (\text{A.122})$$

y sustituyéndola en (A.121) obtenemos la divergencia del tensor de Einstein a primer orden

$$\delta(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b^a) = \mathcal{L}_X \nabla_a G_b^a, \quad (\text{A.123})$$

pero  $\nabla_a G_b^a = 0$  en un espacio-tiempo arbitrario, entonces a primer orden  $\delta \bar{\nabla}_a \bar{G}_b^a = 0$ .

La perturbación a segundo orden de la divergencia del tensor  $\bar{T}_b^a$  se obtiene de manera similar que la divergencia a orden lineal,

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}(\bar{\nabla}_a \bar{T}_b^a) &= \nabla_a \delta^{(2)} \mathcal{T}_b^a - (2H_{cad}[\mathcal{H}] \mathcal{H}^{da} - H_{ca}^a[\mathcal{L}]) T_b^c + (2H_{bad}[\mathcal{H}] \mathcal{H}^{dc} - H_{ba}^c[\mathcal{L}]) T_c^a \\ &\quad - 2H_{ba}^c[\mathcal{H}] \delta \mathcal{T}_c^a + 2H_{ca}^a[\mathcal{H}] \delta \mathcal{T}_b^c + 2\mathcal{L}_X(\bar{\nabla}_a \bar{T}_b^a) + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2)(\nabla_a T_b^b). \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

Con esta expresión comprobaremos la identidad de Bianchi a segundo orden del tensor perturbado de Einstein

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b^a) &= \nabla_a \left( \delta \mathcal{G}_b^a[\mathcal{L}] + \delta^{(2)} \mathcal{G}_b^a[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \right) - \left( 2H_{cad}[\mathcal{H}] \mathcal{H}^{da} - H_{ca}^a[\mathcal{L}] \right) G_b^c + \\ &\quad \left( 2H_{bad}[\mathcal{H}] \mathcal{H}^{dc} - H_{ba}^c[\mathcal{L}] \right) G_c^a - 2H_{ba}^c[\mathcal{H}] \delta \mathcal{G}_c^a[\mathcal{H}] + \\ &\quad 2H_{ca}^a[\mathcal{H}] \delta \mathcal{G}_b^c[\mathcal{H}] + 2\mathcal{L}_X(\bar{\nabla}_a \bar{G}_b^a) + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2)(\nabla_a G_b^a). \end{aligned} \quad (\text{A.125})$$

Usando la ecuación (A.122) con el reemplazo  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}$  y calculando la divergencia del invariante de norma a segundo orden

$$\nabla_a \delta^{(2)} \mathcal{G}_b^a[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = -2H_{ca}^a[\mathcal{H}] \delta \mathcal{G}_b^c[\mathcal{H}] + 2H_{ba}^e[\mathcal{H}] \delta \mathcal{G}_e^a[\mathcal{H}] - 2H_{bad}[\mathcal{H}] \mathcal{H}^{dc} G_c^a - 2H_{cad}[\mathcal{H}] \mathcal{H}^{ad} G_b^c, \quad (\text{A.126})$$

observamos que la identidad de Bianchi se cumple a segundo orden también ya que  $\bar{\nabla}_a \bar{G}_b^a = 0$  y  $\nabla_a G_b^a = 0$ .

### Ecuaciones de Einstein perturbadas invariantes de norma

Por último escribiremos las ecuaciones de Einstein perturbadas  $\delta^{(k)}G_a{}^b = 8\pi G \delta^{(k)}T_a{}^b$ . Usando las definiciones (A.118) y (A.119) se puede mostrar que las ecuaciones de Einstein se pueden expresar orden por orden en términos de variables invariantes de norma únicamente,

$$\delta\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}] = 8\pi G \delta\mathcal{T}_a{}^b, \quad (\text{A.127a})$$

$$\delta\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}] + \delta^{(2)}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 8\pi G \delta^{(2)}\mathcal{T}_a{}^b. \quad (\text{A.127b})$$

#### A.6.3 Ecuaciones de Einstein invariantes de norma en el Universo FLRW

En esta sección aplicaremos las fórmulas recién deducidas al espacio-tiempo de ejemplo A.4.

*Tensor de energía-momento de un campo escalar.* El tensor de energía momento de un campo escalar está dado por la fórmula (A.30), para obtener la ecuación perturbada debemos expandir al campo escalar en series de Taylor

$$\bar{\varphi} = \varphi + \lambda\delta\varphi + \frac{1}{2}\lambda^2\delta^{(2)}\varphi + \mathcal{O}(\lambda^3), \quad (\text{A.128})$$

donde  $\varphi \equiv \varphi(\eta)$  es una función homogénea en un universo homogéneo e isotrópico. El tensor de energía momento también debe de ser descompuesto en la variedad de fondo

$$\bar{T}_a{}^b = T_a{}^b + \lambda\delta T_a{}^b + \frac{1}{2}\lambda^2\delta^{(2)}T_a{}^b + \mathcal{O}(\lambda^3), \quad (\text{A.129})$$

donde  $\delta T_a{}^b$  es lineal en  $\delta\varphi$  y  $h_{ab}$  y  $\delta^{(2)}T_a{}^b$  incluye las perturbaciones de segundo orden  $\delta^{(2)}\varphi$ ,  $l_{ab}$  y los productos cuadráticos de  $\delta\varphi$  y  $h_{ab}$ . Sustituyendo (A.128) en (A.129) y preservando sólo los términos hasta orden cuadrático,

$$\begin{aligned} \delta T_a{}^b \equiv & \nabla_a\varphi\nabla^b\delta\varphi - \nabla_a\varphi h^{bc}\nabla_c\varphi + \nabla_a\delta\varphi\nabla^b\varphi \\ & - \frac{1}{2}\delta_a{}^b \left( \nabla_c\varphi\nabla^c\delta\varphi - \nabla_c\varphi h^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\delta\varphi\nabla^c\varphi + 2\delta\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.130a})$$

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)}T_a{}^b &\equiv \nabla_a\varphi\nabla^b\delta^{(2)}\varphi - 2\nabla_a\varphi h^{bc}\nabla_c\delta\varphi + \nabla_a\varphi\left(2h^{bd}h_d{}^c - l^{bc}\right)\nabla_c\varphi \\
 &\quad + 2\nabla_a\delta\varphi\nabla^b\delta\varphi - 2\nabla_a\delta\varphi h^{bc}\nabla_c\varphi + \nabla_a\delta^{(2)}\varphi g^{bc}\nabla_c\varphi \\
 &\quad - \frac{1}{2}\delta_a{}^b\left(\nabla_c\varphi\nabla^c\delta^{(2)}\varphi - 2\nabla_c\varphi h^{dc}\nabla_d\delta\varphi + \nabla_c\varphi\left(2h^{de}h_e{}^c - l^{dc}\right)\nabla_d\varphi\right. \\
 &\quad + 2\nabla_c\delta\varphi\nabla^c\delta\varphi - 2\nabla_c\delta\varphi h^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\delta^{(2)}\varphi\nabla^c\varphi \\
 &\quad \left. + 2\delta^{(2)}\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi} + 2(\delta\varphi)^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right). \tag{A.130b}
 \end{aligned}$$

Siguiendo (A.64), se puede descomponer las perturbaciones del campo en su parte invariante y variable de norma:

$$\delta\varphi =: \varphi^{(1)} + \mathcal{L}_X\varphi, \tag{A.131}$$

$$\delta^{(2)}\varphi =: \varphi^{(2)} + 2\mathcal{L}_X\delta\varphi + (\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_X^2)\varphi, \tag{A.132}$$

donde  $\varphi^{(1)}$  y  $\varphi^{(2)}$  son las partes invariantes de norma a primer y segundo orden respectivamente.

Sustituyendo estas ecuaciones en las perturbaciones del tensor de energía-momento (A.130), y usando las descomposiciones de la métrica (A.54) y (A.63), llegamos a

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{T}_a{}^b &= \nabla_a\varphi\nabla^b\varphi^{(1)} - \nabla_a\varphi\mathcal{H}^{bc}\nabla_c\varphi + \nabla_a\varphi^{(1)}\nabla^b\varphi + \\
 &\quad - \frac{1}{2}\delta_a{}^b\left(\nabla_c\varphi\nabla^c\varphi^{(1)} - \nabla_c\varphi\mathcal{H}^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\varphi^{(1)}\nabla^c\varphi + 2\varphi^{(1)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right), \tag{A.133a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)}\mathcal{T}_a{}^b &= \nabla_a\varphi\nabla^b\varphi^{(2)} - 2\nabla_a\varphi\mathcal{H}^{bc}\nabla_c\varphi^{(1)} + 2\nabla_a\varphi\mathcal{H}^{bd}\mathcal{H}_{dc}\nabla^c\varphi - \nabla_a\varphi g^{bd}\mathcal{L}_{dc}\nabla^c\varphi \\
 &\quad + 2\nabla_a\varphi^{(1)}\nabla^b\varphi^{(1)} - 2\nabla_a\varphi^{(1)}\nabla^b\varphi^{(1)} - 2\nabla_a\varphi^{(1)}\mathcal{H}^{bc}\nabla_c\varphi + \nabla_a\varphi^{(2)}\nabla^b\varphi \\
 &\quad - \frac{1}{2}\left(\nabla_c\varphi\nabla^c\varphi^{(2)} - 2\nabla_c\varphi\mathcal{H}^{dc}\nabla_d\varphi^{(1)} + 2\nabla^c\varphi\mathcal{H}^{de}\mathcal{H}_{ec}\nabla_d\varphi - \nabla^c\varphi\mathcal{L}_{dc}\nabla^d\varphi\right. \\
 &\quad \left. + 2\nabla_c\varphi^{(1)}\nabla^c\varphi^{(1)} - 2\nabla_c\varphi^{(1)}\mathcal{H}^{dc}\nabla_d\varphi + \nabla_c\varphi^{(2)}\nabla^c\varphi + 2\varphi^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} + 2(\varphi^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right). \tag{A.133b}
 \end{aligned}$$

Entonces, las componentes del tensor de energía-momento invariantes de norma del campo escalar a primer orden son:

$$\delta\mathcal{T}_\eta{}^\eta = -\frac{1}{a^2}\left(\partial_\eta\varphi^{(1)}\partial_\eta\varphi - \Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2 + a^2\frac{dV}{d\varphi}\varphi^{(1)}\right), \tag{A.134a}$$

$$\delta\mathcal{T}_i{}^\eta = -\frac{1}{a^2}\partial_i\varphi^{(1)}\partial_\eta\varphi, \tag{A.134b}$$

$$\delta\mathcal{T}_\eta{}^i = \frac{1}{a^2}\partial_\eta\varphi\left(\partial^i\varphi^{(1)} + (\partial_\eta\varphi)v^i{}^{(1)}\right), \tag{A.134c}$$

$$\delta \mathcal{T}_i^j = \frac{1}{a^2} \delta_i^j \left( \partial_\eta \varphi^{(1)} \partial_\eta \varphi - \Phi^{(1)} (\partial_\eta \varphi)^2 - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \varphi^{(1)} \right), \quad (\text{A.134d})$$

y a segundo orden,

$$\delta^{(2)} \mathcal{T}_\eta^\eta = -\frac{1}{a^2} \left( \partial_\eta \varphi \partial_\eta \varphi^{(2)} - 4 \partial_\eta \varphi \Phi^{(1)} \partial_\eta \varphi^{(1)} + 4 (\partial_\eta \varphi)^2 \left( \Phi^{(1)} \right)^2 - (\partial_\eta \varphi)^2 \Phi^{(2)} + \right. \\ \left. (\partial_\eta \varphi^{(1)})^2 + \partial_i \varphi^{(1)} \partial^i \varphi^{(1)} + a^2 \varphi^{(2)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + a^2 (\varphi^{(1)})^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right), \quad (\text{A.135a})$$

$$\delta^{(2)} \mathcal{T}_i^\eta = -\frac{1}{a^2} \left( \partial_i \varphi^{(2)} \partial_\eta \varphi + 2 \partial_i \varphi^{(1)} \partial_\eta \varphi^{(1)} - 4 \partial_i \varphi^{(1)} \Phi^{(1)} \partial_\eta \varphi \right), \quad (\text{A.135b})$$

$$\delta^{(2)} \mathcal{T}_\eta^i = \frac{1}{a^2} \left( \partial_\eta \varphi \partial^i \varphi^{(2)} + 4 \partial_\eta \Phi^{(1)} \partial^i \varphi^{(1)} + (\partial_\eta \varphi)^2 v^i{}^{(2)} + 2 \partial_\eta \varphi^{(1)} \partial^i \varphi^{(1)} \right), \quad (\text{A.135c})$$

$$\delta^{(2)} \mathcal{T}_i^j = 2 \frac{1}{a^2} \partial_i \varphi^{(1)} \partial^j \varphi^{(1)} \\ + \frac{1}{a^2} \delta_i^j \left( \partial_\eta \varphi \partial_\eta \varphi^{(2)} - 4 \partial_\eta \varphi \Phi^{(1)} \partial_\eta \varphi^{(1)} + 4 (\partial_\eta \varphi)^2 \left( \Phi^{(1)} \right)^2 - (\partial_\eta \varphi)^2 \Phi^{(2)} \right. \\ \left. + (\partial_\eta \varphi^{(1)})^2 - \partial_k \varphi^{(1)} \partial^k \varphi^{(1)} - a^2 \varphi^{(2)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - a^2 (\varphi^{(1)})^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right). \quad (\text{A.135d})$$

### Ecuaciones de Einstein a primer orden

Antes de poder escribir las componentes de la ecuación (A.111) a primer orden debemos expresar las componentes de  $H_{ab}{}^c$  dadas por la expresión (A.89):

$$H_{\eta\eta}{}^\eta[\mathcal{H}] = \partial_\eta \Phi^{(1)} \quad (\text{A.136})$$

$$H_{i\eta}{}^\eta[\mathcal{H}] = \partial_i \Phi^{(1)} + \mathfrak{H} v_i^{(1)} \quad (\text{A.137})$$

$$H_{ij}{}^\eta[\mathcal{H}] = - \left( 2\mathfrak{H} \left( \Psi^{(1)} + \Phi^{(1)} \right) + \partial_\eta \Psi^{(1)} \right) \delta_{ij} - \partial_{(i} v_{j)}^{(1)} + \frac{1}{2} (\partial_\eta + 2\mathfrak{H}) \chi_{ij}^{(1)} \quad (\text{A.138})$$

$$H_{\eta\eta}{}^i[\mathcal{H}] = \partial^i \Phi^{(1)} + (\partial_\eta + \mathfrak{H}) v^i{}^{(1)} \quad (\text{A.139})$$

$$H_{j\eta}{}^i[\mathcal{H}] = -\partial_\eta \Psi^{(1)} \delta_j^i + \frac{1}{2} \left( \partial_j v^i{}^{(1)} - \partial^i v_j{}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \partial_\eta \chi_j{}^i{}^{(1)} \quad (\text{A.140})$$

$$H_{jk}{}^i[\mathcal{H}] = \partial^i \Psi^{(1)} \delta_{kj} - 2\delta_{(k}^i \partial_{j)} \Psi^{(1)} - \mathfrak{H} \delta_{kj} v^i{}^{(1)} + \partial_{(j} \chi_{k)}{}^i{}^{(1)} - \frac{1}{2} \partial^i \chi_{kj}{}^{(1)} \quad (\text{A.141})$$

Usando estas ecuaciones y la ecuación (A.111), las componentes del tensor de Einstein invariante de norma a primer orden serán

$${}^{(1)}\mathcal{G}_\eta{}^\eta[\mathcal{H}] = -\frac{1}{a^2} \left\{ (-6\mathcal{H}\partial_\eta + 2\Delta)\Psi^{(1)} - 6\mathcal{H}^2\Phi^{(1)} \right\}, \quad (\text{A.142a})$$

$${}^{(1)}\mathcal{G}_i{}^\eta[\mathcal{H}] = -\frac{1}{a^2} \left( 2\partial_\eta\partial_i\Psi^{(1)} + 2\mathcal{H}\partial_i\Phi^{(1)} - \frac{1}{2}\Delta v_i^{(1)} \right), \quad (\text{A.142b})$$

$${}^{(1)}\mathcal{G}_\eta{}^i[\mathcal{H}] = \frac{1}{a^2} \left\{ 2\partial_\eta\partial^i\Psi^{(1)} + 2\mathcal{H}\partial^i\Phi^{(1)} + \frac{1}{2}(-\Delta + 4\mathcal{H}^2 - 4\partial_\eta\mathcal{H})v^i{}^{(1)} \right\}, \quad (\text{A.142c})$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\mathcal{G}_i{}^j[\mathcal{H}] &= \frac{1}{a^2} \left[ \partial_i\partial^j \left( \Psi^{(1)} - \Phi^{(1)} \right) \right. \\ &\quad + \left\{ (-\Delta + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(1)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \Delta)\Phi^{(1)} \right\} \delta_i{}^j \\ &\quad \left. - \frac{1}{2a^2}\partial_\eta \left\{ a^2 \left( \partial_i v^j{}^{(1)} + \partial^j v_i^{(1)} \right) \right\} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \Delta)\chi_i{}^j{}^{(1)} \right]. \quad (\text{A.142d}) \end{aligned}$$

A continuación escribimos las componentes de las ecuaciones de Einstein linealizadas (A.127a) de FLRW lleno con un campo escalar (con perturbaciones lineales dadas por (A.134)), la componente  $\eta - \eta$

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta + \Delta)\Psi^{(1)} - 3\mathcal{H}^2\Phi^{(1)} = 4\pi G \left( \partial_\eta\varphi^{(1)}\partial_\eta\varphi - \Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2 + a^2\frac{dV}{d\varphi}\varphi^{(1)} \right), \quad (\text{A.143})$$

las componentes  $i - \eta$  y  $\eta - i$  son iguales en virtud de (A.33)

$$\partial_\eta\partial_i\Psi^{(1)} + \mathcal{H}\partial_i\Phi^{(1)} - \frac{1}{4}\Delta v_i^{(1)} = 4\pi G\partial_i\varphi^{(1)}\partial_\eta\varphi, \quad (\text{A.144})$$

y por último la componente espacial-espacial es

$$\begin{aligned} &\left[ \partial_i\partial^j \left( \Psi^{(1)} - \Phi^{(1)} \right) + \left\{ (-\Delta + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(1)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \Delta)\Phi^{(1)} \right\} \delta_i{}^j \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2a^2}\partial_\eta \left\{ a^2 \left( \partial_i v^j{}^{(1)} + \partial^j v_i^{(1)} \right) \right\} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \Delta)\chi_i{}^j{}^{(1)} \right] \\ &= 8\pi G\delta_i{}^j \left( \partial_\eta\varphi^{(1)}\partial_\eta\varphi - \Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2 - a^2\frac{dV}{d\varphi}\varphi^{(1)} \right). \quad (\text{A.145}) \end{aligned}$$

Podemos descomponer estas ecuaciones en sus modos escalares, vectoriales y tensoriales, siguiendo los mismos pasos que en la sección A.4.2. Los modos escalares son

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta + \Delta)\Psi^{(1)} - 3\mathcal{H}^2\Phi^{(1)} = 4\pi G \left( \partial_\eta\varphi^{(1)}\partial_\eta\varphi - \Phi^{(1)}(\partial_\eta\varphi)^2 + a^2\frac{dV}{d\varphi}\varphi^{(1)} \right), \quad (\text{A.146})$$

$$\partial_\eta \partial_i \Psi^{(1)} + \mathcal{H} \partial_i \Phi^{(1)} = 4\pi G \partial_i \varphi^{(1)} \partial_\eta \varphi, \quad (\text{A.147})$$

$$\begin{aligned} (-\Delta + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta) \Psi^{(1)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta \mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \Delta) \Phi^{(1)} \\ = 8\pi G \left( \partial_\eta \varphi^{(1)} \partial_\eta \varphi - \Phi^{(1)} (\partial_\eta \varphi)^2 - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \varphi^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.148})$$

$$\partial_i \partial^j (\Psi^{(1)} - \Phi^{(1)}) = 0, \quad (\text{A.149})$$

de esta última ecuación vemos que

$$\Psi^{(1)} = \Phi^{(1)}. \quad (\text{A.150})$$

Usando las ecuaciones de Einstein de fondo, integrando con las apropiadas condiciones de frontera y usando repetidamente (A.32) y (A.33) llegamos a

$$(\Delta - 3\mathcal{H}\partial_\eta - \partial_\eta \mathcal{H} - 2\mathcal{H}^2) \Phi^{(1)} = 4\pi G \left( \partial_\eta \varphi^{(1)} \partial \varphi + a^2 \frac{dV}{d\varphi} \varphi^{(1)} \right), \quad (\text{A.151})$$

$$\partial_\eta \Phi^{(1)} + \mathcal{H} \Phi^{(1)} = 4\pi G \varphi^{(1)} \partial_\eta \varphi, \quad (\text{A.152})$$

$$(\partial_\eta^2 + 3\mathcal{H}\partial_\eta + \partial_\eta \mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2) \Phi^{(1)} = 4\pi G \left( \partial_\eta \varphi^{(1)} \partial_\eta \varphi - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \varphi^{(1)} \right), \quad (\text{A.153})$$

es importante notar que sólo dos de estas ecuaciones son independientes. Para los modos vectoriales tenemos

$$\Delta v^i{}^{(1)} = 0 \quad (\text{A.154})$$

$$\partial_\eta \left\{ a^2 \left( \partial_i v^j{}^{(1)} + \partial^j v_i{}^{(1)} \right) \right\} = 0, \quad (\text{A.155})$$

de donde podemos deducir que el campo escalar *no produce* perturbaciones vectoriales si la condición inicial no los incluye y finalmente, para los modos tensoriales

$$(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \Delta) \chi_{ij}{}^{(1)} = 0. \quad (\text{A.156})$$

Tomando las ecuaciones (A.151) y (A.153) podemos eliminar el término potencial del campo escalar

$$(\partial_\eta^2 + \Delta) \Phi^{(1)} = 8\pi G \partial_\eta \varphi^{(1)} \partial_\eta \varphi, \quad (\text{A.157})$$

y si usamos (A.152) para eliminar  $\partial_\eta \varphi^{(1)}$  de esta ecuación llegamos a

$$\left( \partial_\eta^2 + 2 \left( \mathcal{H} - \frac{\partial_\eta^2 \varphi}{\partial_\eta \varphi} \right) \partial_\eta - \Delta + 2 \left( \partial_\eta \mathcal{H} - \mathcal{H} \frac{\partial_\eta^2 \varphi}{\partial_\eta \varphi} \right) \right) \Phi^{(1)} = 0, \quad (\text{A.158})$$

ecuación que es conocida como la *ecuación maestra* para la perturbación del modo escalar de las perturbaciones cosmológicas en un universo lleno con un único campo escalar.

### Ecuaciones de Einstein a segundo orden

Para derivar las ecuaciones invariantes de norma de Einstein a segundo orden, (A.127b), es necesario contar con  $\mathcal{L}_{ab}$ , (A.78), y luego calcular  $H_{ab}{}^c[\mathcal{L}]$ , (A.89),  $\delta\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}]$ , (A.111),  $\delta^{(2)}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ , (A.127b), y por último  $\delta^{(2)}\mathcal{T}_a{}^b$ , (A.135). Todos estos cálculos algebraicos son largos y tediosos, por eso, se creó una hoja de cálculo de Maple que se puede descargar en la dirección URL dada en el apéndice A.11.

En el caso cosmológico regularmente se supone que las condiciones iniciales de las perturbaciones vectoriales y tensoriales a primer orden son cero, i.e.

$$v^i{}^{(1)} = 0, \quad \chi_{ij}{}^{(1)} = 0, \quad (\text{A.159})$$

esto se puede justificar recordando (cf. A.154) que a primer orden no hay generación de perturbaciones vectoriales, además, las perturbaciones vectoriales están suprimidas por un factor de  $a^{-2}$  (segunda ecuación (A.154)). Para justificar el desprecio del modo tensorial a primer orden usaremos el hecho que las observaciones del CMB indican que la relación escalar-tensor es mucho menor que la unidad. Esto simplificará mucho nuestras expresiones. Si se quisieran las expresiones completas (i.e. sin despreciar a primer orden los modos vectoriales y tensoriales), la hoja de cálculo de Maple del apéndice A.11, se puede modificar fácilmente para obtenerlas.

Las expresiones para  $H_{ab}{}^c[\mathcal{L}]$  y  $\delta\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}]$  se obtienen de (A.136) y de (A.142) con los siguientes reemplazos:

$$\Phi^{(1)} \rightarrow \Phi^{(2)}, \quad \Psi^{(1)} \rightarrow \Psi^{(2)}, \quad v^i{}^{(1)} \rightarrow v^i{}^{(2)}, \quad \chi_{ij}{}^{(1)} \rightarrow \chi_{ij}{}^{(2)}, \quad (\text{A.160})$$

entonces tenemos para  $\delta\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{L}]$

$$\delta\mathcal{G}_\eta{}^\eta[\mathcal{L}] = -\frac{1}{a^2} \left\{ (-6\mathcal{H}\partial_\eta + 2\Delta)\Psi^{(2)} - 6\mathcal{H}^2\Phi^{(2)} \right\}, \quad (\text{A.161a})$$

$$\delta\mathcal{G}_i{}^\eta[\mathcal{L}] = -\frac{1}{a^2} \left( 2\partial_\eta\partial_i\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\partial_i\Phi^{(2)} - \frac{1}{2}\Delta v_i^{(2)} \right), \quad (\text{A.161b})$$

$$\delta\mathcal{G}_\eta{}^i[\mathcal{L}] = \frac{1}{a^2} \left\{ 2\partial_\eta\partial^i\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\partial^i\Phi^{(2)} + \frac{1}{2}(-\Delta + 4\mathcal{H}^2 - 4\partial_\eta\mathcal{H})v^i{}^{(2)} \right\}, \quad (\text{A.161c})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}_i{}^j[\mathcal{L}] = & \frac{1}{a^2} \left[ \partial_i\partial^j \left( \Psi^{(2)} - \Phi^{(2)} \right) \right. \\ & + \left\{ (-\Delta + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(2)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \Delta)\Phi^{(2)} \right\} \delta_i{}^j \\ & \left. - \frac{1}{2a^2}\partial_\eta \left\{ a^2 \left( \partial_i v^j{}^{(2)} + \partial^j v_i{}^{(2)} \right) \right\} + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \Delta)\chi_i{}^j{}^{(2)} \right]. \quad (\text{A.161d}) \end{aligned}$$

Las componentes del tensor invariante de norma  $\delta^{(2)}\mathcal{G}_a{}^b[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$  son

$$\delta^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^\eta = -\frac{2}{a^2} \left\{ 3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)} + 3(\partial_\eta\Phi^{(1)})^2 + 8\Phi^{(1)}\Delta\Phi^{(1)} + 12\mathcal{H}^2(\Phi^{(1)})^2 \right\}, \quad (\text{A.162a})$$

$$\delta^{(2)}\mathcal{G}_i{}^\eta = \frac{4}{a^2} \left( 4\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)} - \partial_\eta\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)} \right), \quad (\text{A.162b})$$

$$\delta^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^i = \frac{4}{a^2} \left( \partial_\eta\Phi^{(1)}\partial^i\Phi^{(1)} + 4\Phi^{(1)}\partial_\eta\partial^i\Phi^{(1)} \right), \quad (\text{A.162c})$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}\mathcal{G}_i{}^j &= \frac{2}{a^2} \left[ 2\partial_i\Phi^{(1)}\partial^j\Phi^{(1)} + 4\Phi^{(1)}\partial_i\partial^j\Phi^{(1)} \right. \\ &\left. - \left( 3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)} + 4\Phi^{(1)}\Delta\Phi^{(1)} + (\partial_\eta\Phi^{(1)})^2 + 8\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_\eta\Phi^{(1)} + 4(2\partial_\eta\mathcal{H} + \mathcal{H}^2)(\Phi^{(1)})^2 \right) \delta_{ij} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.162d})$$

donde se usó  $\Psi^{(1)} = \Phi^{(1)}$ . Con las ecuaciones (A.33) y (A.152) las ecuaciones de Einstein  $\delta\mathcal{G}_\eta{}^i[\mathcal{L}] + \delta^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^i[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 8\pi G \delta^{(2)}\mathcal{T}_\eta{}^i$  y  $\delta\mathcal{G}_i{}^\eta[\mathcal{L}] + \delta^{(2)}\mathcal{G}_i{}^\eta[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 8\pi G \delta^{(2)}\mathcal{T}_i{}^\eta$  se reducen a la ecuación

$$2\partial_\eta\partial_i\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\partial_i\Phi^{(2)} - \frac{1}{2}\Delta v_i^{(2)} - 8\pi G\partial_i\varphi^{(2)}\partial_\eta\varphi = \Gamma_i, \quad (\text{A.163})$$

donde

$$\Gamma_i \equiv -4\partial_\eta\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)} + 8\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_i\Phi^{(1)} - 8\Phi^{(1)}\partial_\eta\partial_i\Phi^{(1)} + 16\pi G\partial_i\varphi^{(1)}\partial_\eta\varphi^{(1)}. \quad (\text{A.164})$$

De la misma manera usando (A.33) y (A.157) pero ahora con  $\delta\mathcal{G}_\eta{}^\eta[\mathcal{L}] + \delta^{(2)}\mathcal{G}_\eta{}^\eta[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 8\pi G \delta^{(2)}\mathcal{T}_\eta{}^\eta$ , obtenemos

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta + \Delta)\Psi^{(2)} + (-\partial_\eta\mathcal{H} - 2\mathcal{H}^2)\Phi^{(2)} - 4\pi G \left( \partial_\eta\varphi\partial_\eta\varphi^{(2)} + a^2\varphi^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} \right) = \Gamma_0, \quad (\text{A.165})$$

donde  $\Gamma_0$  es

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \equiv & -2\Phi^{(1)}\partial_\eta^2\Phi^{(1)} - 3 \left( \partial_\eta\Phi^{(1)} \right)^2 - 3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)} - 10\Phi^{(1)}\Delta\Phi^{(1)} - 4(\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2) \left( \Phi^{(1)} \right)^2 \\ & + 4\pi G \left( \left( \partial_\eta\varphi^{(1)} \right)^2 + \partial_k\varphi^{(1)}\partial^k\varphi^{(1)} + a^2(\varphi^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.166})$$

Por último con (A.33) y (A.157) pero ahora con  $\delta\mathcal{G}_i{}^j[\mathcal{L}] + \delta^{(2)}\mathcal{G}_i{}^j[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 8\pi G \delta^{(2)}\mathcal{T}_i{}^j$ , llegamos a

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_j \left( \Psi^{(2)} - \Phi^{(2)} \right) &+ \left\{ (-\Delta + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta)\Psi^{(2)} + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 2\partial_\eta\mathcal{H} + 4\mathcal{H}^2 + \Delta)\Phi^{(2)} \right\} \delta_{ij} \\ &- \frac{1}{a^2}\partial_\eta \left( a^2\partial_{(i}v_{j)}^{(2)} \right) + \frac{1}{2}(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \Delta)\chi_{ij}^{(2)} - 8\pi G \left( \partial_\eta\partial_\eta\varphi^{(2)} - a^2\varphi^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} \right) \delta_{ij} = \Gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{A.167})$$



donde

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij} \equiv & -4\partial_i\Phi^{(1)}\partial_j\Phi^{(1)} - 8\Phi^{(1)}\partial_i\partial_j\Phi^{(1)} + 16\pi G\partial_i\varphi^{(1)}\partial_j\varphi^{(1)} \\
 & + 2\left(8\mathcal{H}\Phi^{(1)}\partial_\eta\Phi^{(1)} - 2\Phi^{(1)}\partial_\eta^2\Phi^{(1)} + (\partial_\eta\Phi^{(1)})^2 + 3\partial_k\Phi^{(1)}\partial^k\Phi^{(1)}\right) \\
 & + 2\Phi^{(1)}\Delta\Phi^{(1)} + 4(\partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2)\left(\Phi^{(1)}\right)^2 + 4\pi G\left((\partial_\eta\varphi^{(1)})^2 - \partial_k\varphi^{(1)}\partial^k\varphi^{(1)} - a^2(\varphi^{(1)})^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right)\delta_{ij}.
 \end{aligned} \tag{A.168}$$

Tomando la divergencia de (A.163) obtenemos su parte escalar

$$2\partial_\eta\Psi^{(2)} + 2\mathcal{H}\Phi^{(2)} - 8\pi G\varphi^{(2)}\partial_\eta\varphi = \Delta^{-1}\partial^k\Gamma_k, \tag{A.169}$$

restándole esta ecuación a (A.163) obtenemos su parte vectorial

$$v_i^{(2)} = 2\Delta^{-1}\left\{\partial_i\Delta^{-1}\partial^k\Gamma_k - \Gamma_i\right\}. \tag{A.170}$$

Podemos dividir la ecuación (A.167) en la parte de traza (escalar), sin traza (escalar), vectorial y tensorial como sigue. Tomando la traza de (A.167) llegamos a

$$\begin{aligned}
 \left(\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \frac{1}{3}\Delta\right)\Psi^{(2)} + \left(\mathcal{H}\partial_\eta + \partial_\eta\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \frac{1}{3}\Delta\right)\Phi^{(2)} \\
 - 4\pi G\left(\partial_\eta\varphi\partial_\eta\varphi^{(2)} - a^2\varphi^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{6}\Gamma_k{}^k,
 \end{aligned} \tag{A.171}$$

donde  $\Gamma_k{}^k \equiv \delta^{ij}\Gamma_{ij}$ . La parte sin traza de (A.167) es

$$\Psi^{(2)} - \Phi^{(2)} = \frac{3}{2}\Delta^{-1}\left\{\Delta^{-1}\partial^i\partial_j\Gamma_i{}^j - \frac{1}{3}\Gamma_k{}^k\right\}, \tag{A.172}$$

con  $\Gamma_i{}^j \equiv \delta^{kj}\Gamma_{ik}$ . La parte vectorial de (A.167)

$$\partial_\eta(a^2v_i^{(2)}) = 2a^2\Delta^{-1}\left\{\partial_i\Delta^{-1}\partial^k\partial_l\Gamma_k{}^l - \partial_k\Gamma_i{}^k\right\}. \tag{A.173}$$

Nótese de las ecuaciones (A.173), (A.170) que aún estableciendo como las condiciones iniciales para las perturbaciones vectoriales iguales a cero, estas se generarán debido a las perturbaciones escalares a primer orden.

Finalmente, obtenemos la parte tensorial

$$\begin{aligned}
 (\partial_\eta^2 + 2\mathcal{H}\partial_\eta - \Delta)\chi_{ij}^{(2)} = \\
 2\Gamma_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\Gamma_k{}^k - 3\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\Delta^{-1}\left(\Delta^{-1}\partial^k\partial_l\Gamma_k{}^l - \frac{1}{3}\Gamma_k{}^k\right) \\
 + 4\left\{\partial_{(i}\Delta^{-1}\partial_{j)}\Delta^{-1}\partial^l\partial_k\Gamma_l{}^k - \partial_{(i}\Delta^{-1}\partial^k\Gamma_{j)k}\right\}.
 \end{aligned} \tag{A.174}$$

Es posible llegar a una *ecuación maestra* para el modo escalar de perturbación cosmológica de segundo orden para un universo lleno con un único campo escalar. Para lograrlo empezamos combinando (A.165) con (A.171), obteniendo

$$\left(\partial_\eta^2 - \mathcal{H}\partial_\eta + \frac{2}{3}\Delta\right)\Psi^{(2)} + \left(\mathcal{H}\partial_\eta + \frac{1}{3}\Delta\right)\Phi^{(2)} - 8\pi G\partial_\eta\varphi\partial_\eta\varphi^{(2)} = \Gamma_0 + \frac{1}{6}\Gamma_k{}^k, \quad (\text{A.175})$$

y

$$\left(-\partial_\eta^2 - 5\mathcal{H}\partial_\eta + \frac{4}{3}\Delta\right)\Psi^{(2)} - \left(2\partial_\eta\mathcal{H} + \mathcal{H}\partial_\eta + 4\mathcal{H}^2 + \frac{1}{3}\Delta\right)\Phi^{(2)} - 8\pi G a^2\varphi^{(2)}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \Gamma_0 - \frac{1}{6}\Gamma_k{}^k. \quad (\text{A.176})$$

Manipulando (A.169), (A.171), (A.172), (A.175) y (A.176), se puede llegar a la *ecuación maestra* a segundo orden:

$$\begin{aligned} & \left\{ \partial_\eta^2 + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\right)\partial_\eta - \Delta + 2\left(\partial_\eta\mathcal{H} - \frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\mathcal{H}\right) \right\} \Phi^{(2)} \\ & = -\Gamma_0 - \frac{1}{2}\Gamma_k{}^k + \Delta^{-1}\partial^i\partial_j\Gamma_i{}^j + \left(\partial_\eta - \frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi}\right)\Delta^{-1}\partial^k\Gamma_k \\ & \quad - \frac{3}{2}\left\{ \partial_\eta^2 - \left(2\frac{\partial_\eta^2\varphi}{\partial_\eta\varphi} - \mathcal{H}\right)\partial_\eta \right\} \Delta^{-1}\left\{ \Delta^{-1}\partial^i\partial_j\Gamma_i{}^j - \frac{1}{3}\Gamma_k{}^k \right\}. \quad (\text{A.177}) \end{aligned}$$

El sistema final de 10 ecuaciones para la perturbación de segundo orden cosmológica para un Universo FLRW con campo escalar está compuesto por (A.169), (A.170), (A.172), (A.173), (A.174), (A.176) y (A.177). Se puede observar en este conjunto de ecuaciones que a pesar de que a primer orden las diferentes ecuaciones para los modos escalares, vectoriales y tensoriales no están acoplados, se acoplarán a segundo orden; además, a pesar de hacer las perturbaciones vectoriales y tensoriales a primer orden iguales a cero, el acople entre diferentes generará estas perturbaciones.

## A.7 Conclusiones

En este apéndice se discutieron las dificultades que aparecen en el análisis perturbativo de Relatividad General. En la discusión se identificó la raíz de este problema: el principio de covariancia general. Debido al principio de covariancia, es posible perturbar los ejes coordenados sin perturbar las variables físicas, y esta “perturbación coordinada” nublará los efectos físicos que se están buscando. Por lo tanto, un buen método perturbativo en Relatividad General elimina completamente estos grados de libertad espurios.

Una vez identificado el problema se presentó un lenguaje geométrico que permite plantear de una manera correcta el análisis perturbativo. Se mostraron tres métodos diferentes para eliminar los grados de libertad ficticios de la teoría perturbativa de Relatividad General: (a) eligiendo o fijando una norma, (b) el formalismo 1+3 covariante-invariante y (c) el formalismo invariante de

norma. De los tres enfoques mostrados, se desarrolló en detalle el formalismo invariante de norma [139, 142, 144]. Se eligió desarrollar este formalismo por ser el más general de los tres ya que puede aplicar en espacios-tiempos generales y a teorías covariantes sin restringirse a Relatividad General si se cuenta con un procedimiento para extraer la parte invariante de la perturbación de la métrica a primer orden. Además, el formalismo invariante de norma cuenta con un algoritmo para generar perturbaciones invariantes de norma a cualquier orden superior al primero. Este formalismo fue aplicado como ejemplo al espacio-tiempo de Friedmann-Lemaître-Roberston-Walker (FLRW) con un campo escalar.

Se incluye una hoja de cálculo en Maple para calcular las ECE invariantes de norma a primer y segundo orden para la métrica de FLRW usando el formalismo invariante de norma. Debido a la generalidad del formalismo invariante de norma, con pequeñas modificaciones se espera que pueda generar ecuaciones invariantes en otras métricas, suponiendo claro, que se tiene la descomposición de la perturbación de orden lineal de la métrica de fondo.

## A.8 Fórmulas útiles

### A.8.1 Derivada de Lie

$$\mathcal{L}_{t+u}W^a = \mathcal{L}_tW^a + \mathcal{L}_uW^a. \quad (\text{A.178a})$$

$$\mathcal{L}_{[v,w]}w^a = -\mathcal{L}_v^2w^a. \quad (\text{A.178b})$$

$$\mathcal{L}_{v+w}^2u^a = \left\{ \mathcal{L}_v^2 + 2\mathcal{L}_v\mathcal{L}_w + \mathcal{L}_w^2 \right\} u^a. \quad (\text{A.178c})$$

$$\mathcal{L}_X T_{abc}{}^d = X^e \nabla_e T_{abc}{}^d + \nabla_a X^e T_{ebc}{}^d + \nabla_b X^e T_{aec}{}^d + \nabla_c X^e T_{abe}{}^d - \nabla_e X^d T_{abc}{}^e. \quad (\text{A.178d})$$

### A.8.2 Conmutación entre la derivada covariante y la derivada de Lie

$$\nabla_a \mathcal{L}_X t_b = \mathcal{L}_X \nabla_a t_b + X^c R_{acb}{}^d t_d + t_c \nabla_a \nabla_b X^c. \quad (\text{A.179a})$$

$$\nabla_a \mathcal{L}_X t_{bc} = \mathcal{L}_X \nabla_a t_{bc} + X^d R_{adb}{}^e t_{ec} + X^d R_{adc}{}^e t_{be} + t_{dc} \nabla_a \nabla_b X^d + t_{bd} \nabla_a \nabla_c X^d. \quad (\text{A.179b})$$

$$\nabla_a \mathcal{L}_X t_b{}^c = \mathcal{L}_X \nabla_a t_b{}^c + X^d R_{adb}{}^e t_e{}^c - X^d R_{ade}{}^c t_b{}^e + t_d{}^c \nabla_a \nabla_b X^d - t_b{}^d \nabla_a \nabla_d X^c. \quad (\text{A.179c})$$

$$\begin{aligned} \nabla_a \mathcal{L}_X t_{bcd} = & \mathcal{L}_X \nabla_a t_{bcd} + X^e R_{aeb}{}^f t_{fcd} + X^e R_{aec}{}^f t_{bfd} + X^e R_{aed}{}^f t_{bcf} \\ & + t_{ecd} \nabla_a \nabla_b X^e + t_{bed} \nabla_a \nabla_c X^e + t_{bce} \nabla_a \nabla_d X^e. \end{aligned} \quad (\text{A.179d})$$

$$\begin{aligned} \nabla_a \mathcal{L}_X t_{bc}{}^d &= \mathcal{L}_X \nabla_a t_{bc}{}^d + X^e R_{aeb}{}^f t_{fc}{}^d + X^e R_{aec}{}^f t_{bf}{}^d - X^e R_{aef}{}^f t_{bc}{}^f \\ &\quad + t_{ec}{}^d \nabla_a \nabla_b X^e + t_{be}{}^d \nabla_a \nabla_c X^e + t_{bc}{}^e \nabla_a \nabla_e X^d. \end{aligned} \quad (\text{A.179e})$$

## A.9 Series de Taylor de Campos Tensoriales

*Esta apéndice y el siguiente están basados en el trabajo de Marco Bruni et al. [34].*

Para funciones en  $\mathbb{R}^m$ , una expansión en series de Taylor es esencialmente una manera conveniente de expresar el valor de la función en un punto dado en términos de su valor y el valor de todas sus derivadas en otro punto. Por supuesto esta definición, tomada al pie de la letra, es imposible de llevar a cabo para un campo tensorial  $\mathcal{T}$  en una variedad  $\mathcal{M}$ , simplemente por que  $\mathcal{T}(p)$  y  $\mathcal{T}(q)$  en  $p, q \in \mathcal{M}$ , con  $p \neq q$  pertenecen a diferentes espacios y no pueden ser comparados directamente.

Una expansión de Taylor, por lo tanto, sólo puede ser escrita si se es dado un mapeo entre dos campos tensoriales en diferentes puntos de  $\mathcal{M}$ . El mapeo  $\phi_\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es en general una familia uniparamétrica de difeomorfismos generados por el campo vectorial  $v^a$ . Un caso especial se da cuando el mapeo es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos. En este apéndice consideremos la expansión de Taylor del *pull-back* de un tensor debido a un grupo uniparamétrico de difeomorfismos, como podría ser por ejemplo el mapeo exponencial. En el siguiente apéndice se tratará el caso más general de una familia uniparamétrica.

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable y sea  $\xi$  un campo vectorial en  $\mathcal{M}$ , que genera un flujo  $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  donde  $\phi(0, p) = p, \forall p \in \mathcal{M}$ . Para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$  escribiremos  $\phi_\lambda(p) \equiv \phi(\lambda, p) \quad \forall p \in \mathcal{M}$ . Sea  $\mathcal{T}$  un campo vectorial en  $\mathcal{M}$ . El mapeo  $\phi_\lambda^*$  define un nuevo campo  $\phi_\lambda^* \mathcal{T}$  llamado *pull-back* de  $\mathcal{T}$ , que es función de  $\lambda$ . Entonces en [34] se demuestra que

**Lema A.9.1.** *El campo  $\phi_\lambda^* \mathcal{T}$  admite la expansión alrededor de  $\lambda = 0$*

$$\phi_\lambda^* \mathcal{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{L}_\xi^k \mathcal{T}. \quad (\text{A.180})$$

## A.10 Difeomorfismos de caballo

Supóngase  $\xi_{(1)}$  y  $\xi_{(2)}$  en  $\mathcal{M}$ . Cada uno de ellos generan los flujos  $\phi^{(1)}$  y  $\phi^{(2)}$ . Al combinarlos podemos formar la familia uniparamétrica de difeomorfismos  $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , cuya acción está dada mediante

$$\Psi_\lambda \equiv \phi_{\lambda^2/2}^{(2)} \circ \phi_\lambda^{(1)} \quad (\text{A.181})$$

Es decir,  $\Psi_\lambda$  desplaza un punto en  $\mathcal{M}$  un intervalo  $\lambda$  a lo largo de las curva integral  $\xi_{(1)}$  y un intervalo  $\lambda^2/2$  a lo largo de la curva integral  $\xi_{(2)}$ . Por su similitud con el movimiento de la pieza de ajedrez se le llama *difeomorfismo de caballo*.

Esta definición se puede generalizar a  $n$  campos vectoriales  $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}$  en  $\mathcal{M}$ , con flujos  $\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n)}$ , de la siguiente manera

$$\Psi_\lambda \equiv \phi_{\lambda^n/n!}^{(n)} \circ \dots \circ \phi_{\lambda^2/2}^{(2)} \circ \phi_\lambda^{(1)}. \quad (\text{A.182})$$

A los campos vectoriales  $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}$  se les denominan como los *generadores* de  $\Psi$ .

Una cosa muy importante de notar es que  $\Psi_\sigma \circ \Psi_\lambda \neq \Psi_{\sigma+\lambda}$ , ya que los generadores no forman un grupo. Esto impide que podamos aplicar el lema A.9.1, i.e. no podemos expandir el *pull-back*  $\Psi_\lambda^* \mathcal{T}$  del tensor  $\mathcal{M}$  definido  $\mathcal{T}$ . Pero como veremos en el siguiente lema, el resultado A.9.1 puede ser generalizado.

**Lema A.10.1.** *El pull-back  $\Psi_\lambda^* \mathcal{T}$  del campo tensorial  $\mathcal{T}$  de la familia uniparamétrica de difeomorfismos de caballo  $\Psi$  con generadores  $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}$  se puede expandir alrededor de  $\lambda = 0$  como*

$$\Psi_\lambda^* \mathcal{T} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \dots \sum_{l_k=0}^{\infty} \dots \frac{\lambda^{l_1+2l_2+\dots+kl_k+\dots}}{2^{l_2} \dots (k!)^{l_k} \dots l_1! l_2! \dots l_k! \dots} \mathcal{L}_{\xi_{(1)}}^{l_1} \mathcal{L}_{\xi_{(2)}}^{l_2} \dots \mathcal{L}_{\xi_{(k)}}^{l_k} \dots \mathcal{T}. \quad (\text{A.183})$$

Los difeomorfismos de caballo parecen ser ejemplos muy artificiales y de poca utilidad, pero como mostraremos en el siguiente teorema, cualquier familia uniparamétrica de difeomorfismos, puede siempre ser transformada o considerada como una familia uniparamétrica de difeomorfismos de caballo, de rango infinito en el caso general.

**Teorema A.10.2.** *Sea  $\Psi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  una familia de difeomorfismos. Entonces  $\exists \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(k)}, \dots$ , grupos uniparamétricos de difeomorfismos en  $\mathcal{M}$ , tales que*

$$\Psi_\lambda = \dots \circ \phi_{\lambda^2/k!}^{(k)} \circ \dots \circ \phi_{\lambda^2/2}^{(2)} \circ \phi_\lambda^{(1)}.$$

La demostración de este teorema se encuentra en [34].

## A.11 Código

El código que acompaña a este artículo ayuda a recuperar todas las expresiones presentadas en el caso de FLRW. Se proveen dos versiones ambas basadas en el lenguaje Maple, una es directa, i.e. sin utilizar ninguna paquetería extra y la segunda utilizando el paquete GRTensor II [1]. El código en ambas versiones se pueden encontrar en <http://nano.dialetheia.net/investigacion/codigo/perturbaciones>.



## APÉNDICE B

### EQUIVALENCIA DE ECUACIONES

Observando la literatura relacionada con perturbaciones cosmológicas nos topamos con diferentes sistemas de ecuaciones que están relacionados con la elección de una norma. Estas ecuaciones pueden llegar a parecer muy diferentes y es posible preguntarse si son equivalentes.

En este apéndice en particular compararemos las ecuaciones (clásicas) a primer orden, obtenidas en la norma newtoniana conforme o longitudinal y las ecuaciones invariantes de norma. Luego de mostrar su equivalencia compararemos su cuantización con la establecida por Mukhanov.

#### B.1 Introducción

Un universo homogéneo e isotrópico (plano) es descrito por un elemento de línea de Robertson-Walker

$$ds^2 = a^2(\eta) \left( -d\eta^2 + d\vec{x}^2 \right) \quad (\text{B.1})$$

donde  $a(\eta)$  es el factor de expansión, y  $\eta$  es el tiempo conforme, relacionado con el tiempo cósmico mediante  $d\eta = dt/a(\eta)$ .

Este universo está lleno con un campo escalar,  $\varphi(\eta)$ , este campo si cumple con que  $p \simeq -\rho$ , i.e. que tenga presión negativa, provocará una etapa inflacionaria del universo.

Las ecuaciones a orden cero, conocidas como ecuaciones de Friedman-Lemaître, son:

$$\mathcal{H}^2 = -\frac{8\pi G}{3} a^2 \rho = -\frac{8\pi G}{3} a^2 \left( \frac{1}{2a^2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \quad (\text{B.2a})$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -8\pi G a^2 p = -4\pi G a^2 \left( \frac{1}{2a^2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right) \quad (\text{B.2b})$$

De estas dos ecuaciones sólo una es no trivial, (B.2a). En las secciones siguientes será de utilidad esta expresión

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = 4\pi G \dot{\varphi}^2 \quad (\text{B.3})$$

### B.1.1 Elemento de línea de FLRW perturbado

La métrica de FLRW puede ser expandida a primer orden para representar un universo perturbado ligeramente del estado homogéneo e isotrópico:

$$g_{ab} = \overline{g}_{ab} + h_{ab} \quad (\text{B.4})$$

Es una propiedad del universo FLRW que a primer orden se pueda encontrar una descomposición tal que las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales se desacoplen<sup>1</sup> A.4.2.

Aquí sólo consideraremos únicamente las perturbaciones escalares. De esta manera la métrica perturbada escalarmente es <sup>2</sup>:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left\{ -(1 + A)d\eta^2 + 2\partial_i B dx^i d\eta + \left[ \left(1 + C - \frac{1}{3}\Delta E\right) \delta_{ij} + \partial_i \partial_j E \right] dx^i dx^j \right\}. \quad (\text{B.5})$$

En este reporte utilizaremos sólo una norma: La Newtoniana Conforme o longitudinal, que es caracterizada por la siguiente elección:

$$A = 2\phi, \quad B = 0, \quad C = -2\psi, \quad E = 0, \quad (\text{B.6})$$

entonces la métrica en la norma de newton conforme es

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left\{ -(1 + 2\phi)d\eta^2 + (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \right\}. \quad (\text{B.7})$$

Las variables escalares perturbadas invariantes de norma son definidas mediante combinaciones lineales de las perturbaciones  $A, B, C, E$ :

$$\Phi = \frac{1}{2}A - (B - E)' + \mathcal{H}(B - E') \quad (\text{B.8a})$$

$$\Psi = -\frac{1}{2} \left( C - \frac{1}{3}\Delta E \right) - \mathcal{H}(B - E') \quad (\text{B.8b})$$

$$\delta\varphi = \delta\phi + (B - E')\phi'. \quad (\text{B.8c})$$

<sup>1</sup>Hay que recordar que estamos usando la terminología estándar y que perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales se refieren a sus propiedades de transformación ante rotaciones en el espacio de fondo.

<sup>2</sup>En el apéndice A se acompaña con un factor extra de  $a(\eta)^2$  a la variable perturbada  $E$ , que es necesaria para simplificar las expresiones vectoriales y tensoriales, que no son consideradas en este reporte, de ahí su omisión



## B.2 Ecuaciones en la Norma Newtoniana Conforme

El sistema de ecuaciones de Einstein obtenidas en la norma conforme de Newton, [170, e.g], son

$$\Delta\psi - 3\mathcal{H}\psi' = 4\pi G \left( \varphi' \delta\varphi' + 2a^2\phi V(\varphi) + a^2\delta_\varphi V(\varphi)\delta\varphi \right) \quad (\text{B.9a})$$

$$\partial_i\partial_\eta\psi + \mathcal{H}\partial_i\phi = 4\pi G\varphi'\partial_i\delta\varphi \quad (\text{B.9b})$$

$$\begin{aligned} (\Delta - \partial_i\partial_j)(\phi - \psi) + 2\psi'' + 2 \left( 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 \right) (\psi + \phi) + 2\mathcal{H}(\psi' + \phi') = \\ 8\pi G \left( -\phi\varphi'^2 + \varphi'\delta\varphi' - \psi \left( \varphi'^2 - a^2V(\varphi) \right) - \frac{1}{2}a^2\partial_\varphi V(\varphi)\delta\varphi \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9c})$$

$$\partial_i\partial_j(\psi - \phi) = 0 \quad (\text{B.9d})$$

De (B.9d) observamos que  $\psi = \phi$ . Usando este resultado (B.9b) queda como

$$\partial_i \left( \partial_\eta\psi + \mathcal{H}\psi - 4\pi G\varphi'\delta\varphi \right) = 0, \quad (\text{B.10})$$

de la cual se obtiene

$$\partial_\eta\psi = -\mathcal{H}\psi + 4\pi G\varphi'\delta\varphi = 0. \quad (\text{B.11})$$

Sumando las ecuaciones (B.2a) y (B.2b) obtenemos una expresión para el potencial,  $V(\varphi)$ ,

$$2a^2 V(\varphi) = \frac{1}{4\pi G} (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2). \quad (\text{B.12})$$

Usando las ecuaciones (B.10) y (B.12) la ecuación (B.9a) se convierte en

$$\Delta\psi + \left( \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' \right) \psi = 4\pi G \left[ \varphi'\delta\varphi' + \left( 3\mathcal{H}\varphi' + a^2\partial_\varphi V(\varphi) \right) \delta\varphi \right] \quad (\text{B.13})$$

Definiendo  $\mu \equiv \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'$  y  $u \equiv (3\mathcal{H}\varphi' + a^2\partial_\varphi V(\varphi))$  llegamos a una ecuación tipo Poisson:

$$\Delta\psi + \mu\psi = 4\pi G (u\delta\varphi + \varphi'\delta\varphi'). \quad (\text{B.14})$$

## B.3 Ecuaciones Invariantes de Norma

El conjunto de ecuaciones invariantes de norma fué obtenido en el apéndice A y se presenta a continuación

$$(-3\mathcal{H}\partial_\eta + \Delta)\Psi - 3\mathcal{H}^2\Phi = 4\pi G \left( \partial_\eta\delta\varphi\partial_\eta\varphi - \Phi(\partial_\eta\varphi)^2 + a^2\frac{dV}{d\varphi}\delta\varphi \right) \quad (\text{B.15a})$$

$$\partial_\eta \partial_i \Psi + \mathcal{H} \partial_i \Phi = 4\pi G \partial_i \delta \varphi \partial_\eta \varphi \quad (\text{B.15b})$$

$$\begin{aligned} & (-\Delta + 2\partial_\eta^2 + 4\mathcal{H}\partial_\eta) \Psi \\ & + (2\mathcal{H}\partial_\eta + 4\partial_\eta \mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2 + \Delta) \Phi \\ & = 8\pi G \left( \partial_\eta \delta \varphi \partial_\eta \varphi - \Phi (\partial_\eta \varphi)^2 - a^2 \frac{dV}{d\varphi} \delta \varphi \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15c})$$

$$\partial_i \partial^j (\Psi - \Phi) = 0 \quad (\text{B.15d})$$

de esta última ecuación vemos que

$$\Psi = \Phi \quad (\text{B.16})$$

Reescribiendo las ecuaciones usando la igualdad anterior y simplificando la notación  $\partial_\eta \varphi \rightarrow \varphi'$  y  $V' \rightarrow V_\varphi$  obtenemos

$$-3\mathcal{H}\Psi' + \Delta\Psi - 3\mathcal{H}^2\Psi = 4\pi G \left( \delta\varphi' \varphi' - \Psi \varphi'^2 + a^2 V_\varphi \delta\varphi \right) \quad (\text{B.17a})$$

$$\partial_\eta \partial_i \Psi + \mathcal{H} \partial_i \Psi = 4\pi G \partial_i \delta \varphi \varphi' \quad (\text{B.17b})$$

$$\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}'\Psi + \mathcal{H}^2\Psi = 4\pi G \left( \delta\varphi' \varphi' - \Psi \varphi'^2 - a^2 V_\varphi \delta\varphi \right). \quad (\text{B.17c})$$

Integrando (B.17b) respecto a  $x_i$  y escogiendo como cero la constante de integración.

$$\Psi' + \mathcal{H}\Psi = 4\pi G \delta\varphi \varphi', \quad (\text{B.18})$$

acomodando términos

$$-3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Psi) + \Delta\Psi = 4\pi G \left( \delta\varphi' \varphi' - \Psi \varphi'^2 + a^2 V_\varphi \delta\varphi \right) \quad (\text{B.19a})$$

$$\partial_i \Psi' = 4\pi G \partial_i \delta \varphi \varphi' - \mathcal{H} \partial_i \Psi \quad (\text{B.19b})$$

$$\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}'\Psi + \mathcal{H}^2\Psi = 4\pi G \left( \delta\varphi' \varphi' - \Psi \varphi'^2 - a^2 V_\varphi \delta\varphi \right) \quad (\text{B.19c})$$

### B.3.1 Ecuación maestra

En el apéndice A a partir del conjunto de ecuaciones (B.19) (o equivalentemente de las ecuaciones de la §B.2) se obtiene una sola ecuación de segundo orden, conocida como *ecuación maestra*. Aquí se reproduce el cálculo por razones de completitud.

Sumemos (B.19a) y (B.19c)

$$\Psi'' + 2\mathcal{H}'\Psi - 2\mathcal{H}^2\Psi + \Delta\Psi = 8\pi G (\delta\varphi' \varphi' - \Psi \varphi'^2), \quad (\text{B.20})$$

sustituyendo (B.3)

$$\Psi'' + \Delta\Psi = 8\pi G\delta\varphi'\varphi'. \quad (\text{B.21})$$

Ahora manipulamos algebraicamente (B.19b), obteniendo

$$4\pi G\delta\varphi = \frac{\Psi' + \mathcal{H}\Psi}{\varphi'}, \quad (\text{B.22})$$

obviamente este caso es válido, sólo si  $\varphi' \neq 0$ . Derivando respecto a  $\eta$

$$\delta\varphi' = \frac{(\Psi'' + \mathcal{H}'\Psi + \mathcal{H}\Psi')\varphi' - (\Psi' + \mathcal{H}\Psi)\varphi''}{\varphi'^2}, \quad (\text{B.23})$$

insertando esta ecuación en (B.21)

$$\begin{aligned} \Psi'' + \Delta\Psi &= 2 \left\{ \frac{(\Psi'' + \mathcal{H}'\Psi + \mathcal{H}\Psi')\varphi' - (\Psi' + \mathcal{H}\Psi)\varphi''}{\varphi'} \right\} \\ \Psi'' + \Delta\Psi &= 2(\Psi'' + \mathcal{H}'\Psi + \mathcal{H}\Psi') - 2(\Psi' + \mathcal{H}\Psi)\frac{\varphi''}{\varphi'} \end{aligned}$$

reacomodando, llegamos

$$\Psi'' + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\varphi''}{\varphi}\right)\Psi' - \Delta\Psi + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\varphi''}{\varphi}\right)\Psi = 0 \quad (\text{B.24})$$

Nótese que para llegar a esta ecuación usamos el conjunto completo de las ecuaciones (B.19). Una cosa interesante es que si se define la variable<sup>3</sup>  $Y$ ,

$$Y \equiv 2\frac{\Psi}{\varphi'} \quad (\text{B.25})$$

La ecuación (B.24) se puede reescribir como

$$Y'' - \Delta Y - \frac{w''}{w} = 0 \quad (\text{B.26})$$

con  $w \equiv \mathcal{H}/\varphi'$ . Aquí obtenemos por primera vez en este reporte, una ecuación del tipo oscilador armónico con masa variable efectiva ( $m_{variable}^2 \equiv w''/w$ ).

### B.3.2 Ecuación de Poisson

A diferencia de lo que se hizo en la subsección anterior, en la cual se obtuvo la *ecuación maestra*, a partir de las ecuaciones (B.19), aquí se seguirá el método de [170], i.e. obtener la ecuación tipo Poisson.

<sup>3</sup>Estas son, salvo un factor de  $a$  en  $Y$  y  $w$ , las variables  $u$  y  $\theta$  de la §2.3.

Usando (B.3) en (B.19a)

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 2\mathcal{H}^2\Psi - \mathcal{H}'\Psi = 4\pi G \left( \delta\varphi'\varphi' + a^2V_\varphi\delta\varphi \right). \quad (\text{B.27})$$

Sustituyendo en esta ecuación (B.19b)

$$\Delta\Psi + \left( \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' \right) \Psi = 4\pi G \left( 3\mathcal{H}\varphi' + a^2V_\varphi \right) \delta\varphi + 4\pi G\delta\varphi'\varphi'. \quad (\text{B.28})$$

Reescribiendo (B.28)

$$\Delta\Psi + \mu\Psi = 4\pi G(u\delta\varphi + \delta\varphi'\varphi'), \quad (\text{B.29})$$

donde  $\nu$  se define como

$$\nu \equiv 3\mathcal{H}\varphi' + a^2V_\varphi, \quad (\text{B.30})$$

y  $\mu$  está definida

$$\mu \equiv \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' \quad (\text{B.31})$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la obtenida en la §B.2. A diferencia del procedimiento para derivar la ecuación maestra, aquí no se usó el conjunto completo de ecuaciones (B.19): la ecuación (B.19c) nunca es utilizada.

#### B.4 Cuantización de $y = a\delta\varphi$

En esta sección y la siguiente no mostraremos el proceso de cuantización ya que es el método estándar, en su lugar presentaremos de el punto de partida tanto para el proceso de cuantización de  $y = a\delta\varphi$  [ver 170] como el la variable de Mukhanov [ver 136].

El lagrangiano  $\mathcal{L}$  que describe el campo escalar del inflatón es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi - V(\varphi), \quad (\text{B.32})$$

para cuantizar utilizamos la acción  $S$ ,

$$S[\varphi, g_{ab}] = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x. \quad (\text{B.33})$$

Siguiendo [170] ignoraremos el efecto de la perturbación de la métrica en este reporte. Expandiendo la acción a primer orden en el campo escalar, variando respecto a la perturbación,  $\delta\varphi$  y finalmente usando la ecuación dinámica del campo inflatónico sin perturbar, obtenemos la ecuación de movimiento de la perturbación <sup>4</sup>

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \Delta\delta\varphi + a^2V_{\varphi\varphi}\delta\varphi = 0. \quad (\text{B.34})$$

<sup>4</sup>En el artículo [170] se desprecia el término del potencial ( $a^2V_{\varphi\varphi}\delta\varphi$ ) también en base a la aproximación de *slow-roll*.

De esta manera la dinámica del sistema perturbado queda definida por las ecuaciones (B.14) y (B.34) mas las ecuaciones a orden cero.

Si se define la variable  $y \equiv a\delta\varphi$ , la ecuación (B.34), se puede reescribir como

$$y'' - \Delta y - \frac{a''}{a}y = 0 \quad (\text{B.35})$$

Esta ecuación una vez más tiene la forma de un oscilador armónico con masa variable

$$m_{\text{variable}}^2 \equiv \frac{a''}{a} \quad (\text{B.36})$$

## B.5 Cuantización de à la Mukhanov

Empezamos con la acción

$$S[\varphi, g_{ab}] = \int \{R\sqrt{-g}\} d^4x + \int \left\{ \left[ -\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi - V(\varphi) \right] \sqrt{-g} \right\} d^4x \quad (\text{B.37})$$

expandiendo a segundo orden en la métrica y en el campo

$$S[\varphi + \delta\varphi, g_{ab} = \bar{g}_{ab} + h_{ab}] = S^{(0)}[\varphi, \bar{g}_{ab}] + S^{(1)}[\delta\varphi, h_{ab}; \varphi, \bar{g}_{ab}] + S^{(2)}[\delta\varphi, h_{ab}; \varphi, \bar{g}_{ab}] \quad (\text{B.38})$$

donde el primer término contiene sólo la parte homogénea,  $S^{(1)}$  está constituido por términos lineales en las perturbaciones y  $S^{(2)}$  está formado por terminos cuadráticos en las perturbaciones [136, 138].

Para escribir esta expresión se necesitarán las siguientes expansiones:<sup>5</sup>

$$g_{00} = -a^2(1 + 2\Phi), \quad g_{ij} = a^2(1 - 2\Psi) \quad (\text{B.39a})$$

$$g^{00} \simeq a^{-2}(-1 + 2\Phi - 4\Phi^2), \quad g^{ij} \simeq a^{-2}(\delta^{ij} + 2\Psi\delta^{ij} + 4\Psi^2\delta^{ij}) \quad (\text{B.39b})$$

$$\sqrt{-g} \simeq a^4 \left( 1 + \Phi - \frac{1}{2}\Phi^2 - 3\Psi - 3\Psi\Phi + \frac{3}{2}\Psi^2 \right) \quad (\text{B.39c})$$

<sup>5</sup>Se usaron las conocidas expresiones:

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= 1 - x + x^2 \dots & -1 \leq x \leq 1 \\ (1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \times 4}x^2 + \dots & -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}a^{-2}\left(-\varphi'^2 - 2\delta\varphi'\varphi' - \delta\varphi'^2 + 2\Phi\varphi'^2 + 4\delta\varphi'\Phi\varphi' - 4\Phi^2\varphi'^2 + \delta\varphi_{,i}\delta\varphi_{,i}\right) - V - \delta\varphi V_\varphi - \frac{1}{2}\delta\varphi^2 V_{\varphi\varphi} \quad (\text{B.39d})$$

Entonces la parte de la acción que corresponde al campo escalar es

$$\begin{aligned} S_{mat} = \int d^4x \left[ \frac{a^2}{2} \left( \varphi'^2 + 2\delta\varphi'\varphi' + \delta\varphi'^2 - 2\Phi\varphi'^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 4\delta\varphi'\Phi\varphi' + 4\Phi^2\varphi'^2 - \delta\varphi_{,i}\delta\varphi_{,i} \right) - a^4V - a^4\delta\varphi V_\varphi - \frac{a^4}{2}\delta\varphi^2 V_{\varphi\varphi} \right. \\ \left. + \frac{a^2}{2} \left( \varphi'^2\Phi + 2\delta\varphi'\varphi'\Phi \right) - a^4V\Phi - a^4\delta\varphi\Phi V_\varphi \right. \\ \left. - \frac{a^2}{4}\varphi'^2\Phi^2 + \frac{a^4}{2}V\Phi^2 - \frac{3a^2}{2} \left( \varphi'^2\Psi + 2\delta\varphi'\varphi'\Psi \right) + 3a^4V\Psi + 3a^4\delta\varphi\Psi V_\varphi \right. \\ \left. - \frac{3a^2}{2}\varphi'^2\Psi\Phi + 3a^4V\Phi\Psi + \frac{3a^2}{4}\varphi'^2\Psi^2 - \frac{3a^4}{2}V\Psi^2 \right] \quad (\text{B.40}) \end{aligned}$$

En esta ecuación podemos identificar

$$S_{mat}^{(0)} = \int \left( \frac{a^2}{2}\varphi'^2 - a^4V \right) d^4x \quad (\text{B.41})$$

Esta es la acción original (o la parte que describe el campo escalar). Nada sorprendente.

$$\begin{aligned} \delta S_{mat}^{(1)} = \int \left[ \frac{a^2}{2} \left( \varphi'^2 - 2\delta\varphi'\varphi' - 2\Phi\varphi'^2 + \varphi'^2\Phi - 3\varphi'^2\Psi \right) \right. \\ \left. + 3a^4V\Psi - a^4V\Phi - a^4\delta\varphi V_\varphi \right] d^4x \quad (\text{B.42}) \end{aligned}$$

Integrando por partes  $S^{(1)}$  y sustituyendo las ecuaciones del universo FLRW (B.2a), (B.2b) y (B.3), encontraremos que  $S^{(1)} = 0$ . Esto no es sorprendente por que esa es la manera en la que obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange que al aplicar en  $\mathcal{L}^{(0)}$  nos da la ecuación dinámica del campo homogéneo.

$$\begin{aligned} \delta S_{mat}^{(2)} = \int \left[ \frac{a^2}{2} \left( \delta\varphi'^2 - 4\delta\varphi'\Phi\varphi' + 4\Phi^2\varphi'^2 - \delta\varphi_{,i}\delta\varphi_{,i} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\delta\varphi'\Phi\varphi' - \frac{1}{2}\varphi'^2\Phi^2 - 3\varphi'^2\Psi - 6\delta\varphi'\Psi\varphi' - 3\varphi'^2\Psi\Phi + \frac{3}{2}\varphi'^2\Psi^2 \right) \right. \\ \left. - \frac{a^4}{2}\delta\varphi^2 V_{\varphi\varphi} - a^4\delta\varphi\Phi V + \frac{a^4}{2}\Phi^2 V + 3a^4\delta\varphi\Psi V_\varphi + 3a^4\Phi\Psi V - \frac{3a^4}{2}\Psi^2 V \right] d^4x \quad (\text{B.43}) \end{aligned}$$

Este pedazo de la acción es el que nos interesa. Variando (B.43) juntamente con  $\delta S_{grav}^2$  respecto a  $\Psi$ ,  $\Phi$  y  $\delta\varphi$ , obtenemos ecuaciones de movimiento que son equivalentes a las obtenidas en secciones anteriores. Si utilizamos las constricciones (B.16) y (B.18) para eliminar dos de las tres variables, y se aplican una vez más las ecuaciones de FLRW<sup>6</sup>, obtenemos una acción para un sólo grado de

<sup>6</sup>¡De verdad es una gran cantidad de trabajo algebraico!

libertad, la llamada variable de Mukhanov-Sasaki,  $\nu$ .

La variación de la acción ahora toma la forma

$$\delta S_{grav+mat}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ \nu'^2 - (\Delta\nu)^2 + \frac{z''}{z} \nu^2 \right], \quad (\text{B.44})$$

con  $z \equiv \varphi' / \mathcal{H}$  y  $\nu$  definida mediante

$$\nu \equiv a \left( \delta\varphi + \frac{\varphi'}{\mathcal{H}} \Psi \right) \quad (\text{B.45})$$

La ecuación de movimiento para  $\nu$  es

$$\nu'' - \Delta\nu - \frac{z''}{z} \nu = 0 \quad (\text{B.46})$$

Una vez más obtenemos la ecuación de un oscilador armónico con masa variable, pero ahora esta masa es  $m_{variable}^2 \equiv z''/z$ .

## B.6 Conclusiones

En este apéndice se mostró que el conjunto de ecuaciones derivadas de las ecuaciones de Einstein para el caso FLRW perturbado en la norma longitudinal conforme tiene la misma forma que las obtenidas de manera independiente de la elección de norma. Esta equivalencia estructural se mantiene ya que  $\Phi, \Psi$  invariantes se reducen a las newtonianas cuando  $B = E = 0$ . Esta equivalencia se mantiene tanto en el formato *ecuación tipo Poisson*, como en la llamada *ecuación maestra*. La diferencia de estas dos es que en la última si se llega a una expresión que sólo incluye un grado de libertad<sup>7</sup>.

En el aspecto de cuantización se mostró el desarrollo para llegar a la variable de Mukhanov, como único grado de libertad, a diferencia, una vez más, del caso ecuación Poisson/campo escalar. De hecho usando la definición de la variable de Mukhanov, (B.45), las constricciones (B.16), (B.18) y (B.25), se demuestra [46] que  $Y$  y  $\nu$  están relacionados mediante

$$\nu = Y' + \frac{z'}{z} Y \quad (\text{B.47})$$

siendo estas variables equivalentes<sup>8</sup>.

Pero para nuestros fines, es decir, estudiar el colapso de la función de onda, causado por la gravedad, el sistema de ecuaciones Poisson/escalar, es el más apropiado ya que muestra la relación que existe entre estas variables cuánticas y los grados de libertad de la métrica.

<sup>7</sup>Aquí hay que ser cuidadoso ya que aparecen en realidad dos ecuaciones: (B.24) y (B.21). En la literatura regularmente se hace la aseveración existe un sólo grado de libertad (en este caso  $\Psi$ ) y le llaman a la segunda ecuación *ecuación de restricción*, en realidad esto es otro nombre para indicar que ambas variables están acopladas.

<sup>8</sup>La diferencia se notará en el momento de cuantizar, pero ese es tema del próximo reporte.





## APÉNDICE C

### LÍNEA TEMPORAL

A lo largo de este trabajo de tesis hicimos referencia a varios momentos importantes de la evolución de nuestro universo. Para facilitarle al lector la consulta de los valores numéricos en varios tipos de unidades, hemos resumido aquí esos datos.

Hemos dividido la historia de universo en tres etapas principales: (a) época inflacionaria, (b) época dominada por radiación y (c) época dominada por materia, e ignoramos la época actual dominada por la energía oscura.

El factor de escala durante estas épocas tiene la ecuación de evolución

$$a(\eta) = \begin{cases} -\frac{1}{H_I \eta}, & -\infty < \eta < \eta_{ei}, \\ C_{rad} (\eta - \eta_{ei}) + a_{ei}, & \eta_{ei} \leq \eta < \eta_{eq}, \\ \left[ \frac{1}{2} C_{mat} (\eta - \eta_{eq}) + \sqrt{a_{eq}} \right]^2, & \eta_{eq} \leq \eta \end{cases} \quad (C.1)$$

donde las constantes (exceptuando  $C_{mat}$  y  $C_{rad}$ ) se obtienen por continuidad de la función. Tomaremos como normalización del factor de escala a

$$a_0 \equiv a(\eta = \eta_0) = 1. \quad (C.2)$$

Las constantes  $C_{rad}$  y  $C_{mat}$  de la ecuación (C.1) están dadas por

$$C_{rad}^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{rad} a^4), \quad C_{mat}^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{mat} a^3), \quad (C.3)$$

donde, las cantidades  $(\rho_{rad} a^4)$  y  $(\rho_{mat} a^3)$  se conservan, como se puede constatar usando la ecuación (1.41c). En estas constantes  $\rho_{rad}$ ,  $\rho_{mat}$  representan la densidad de energía de la radiación y de la materia respectivamente. Si usamos la conservación de  $(\rho_{rad} a^4)$ ,  $(\rho_{mat} a^3)$  y el factor de normalización (C.2) podemos expresar (C.3) como sigue

$$C_{rad}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad,0} = H_0^2 \Omega_{rad,0}, \quad C_{mat}^2 \frac{8\pi G}{3} \rho_{mat,0} = H_0^2 \Omega_{mat,0}, \quad (C.4)$$

donde  $H_0$  es la constante de Hubble y  $\Omega_{X,0} \equiv \rho_{X,0}/\rho_c$  es la densidad de energía de la especie en

cuestión relativa a la densidad crítica  $\rho_c$ .

Con estas ecuaciones y relaciones podemos calcular el factor de escala al tiempo  $\eta_{eq}$  cuando la densidad de energía de la radiación y de la materia son iguales,  $a_{eq} \equiv a(\eta = \eta_{eq})$

$$a_{eq} = \frac{\Omega_{rad,0}}{\Omega_{mat,0}}. \quad (C.5)$$

Evaluando ahora la evolución del factor de escala durante radiación (segunda ecuación de C.1) en  $\eta = \eta_{eq}$  llegamos a una expresión para  $\eta_{eq}$ ,

$$\eta_{eq} = \frac{a_{eq} - a_{ei}}{C_{rad}} + \eta_{ei}. \quad (C.6)$$

Propiamente, la expresión  $(Ta) = \text{constante}$ , es válida (tiene sentido) cuando (1) podemos hablar de temperatura en el sistema, (2) existe radiación en la época en cuestión y posee la mayoría de los grados de libertad del sistema. A pesar de esto, en este apéndice supondremos la validez de esa relación, aún en épocas en las cuales ni (1), ni (2) se cumplen (e.g. durante la época inflacionaria) y habrá que entenderlo como “la temperatura hipotética que tendría la radiación a esa escala”. Entonces, como  $(Ta) = \text{constante}$ , calculamos el factor de escala cuando inflación estaba terminando para dar paso a al época dominada por radiación,

$$a_{ei} = \frac{T_0}{T_{ei}}, \quad \eta_{ei} = -\frac{1}{a_{ei}H_{inf}}, \quad (C.7)$$

donde usamos la tercera expresión de (C.1). Para obtener un punto de referencia se calculará el valor del factor de escala durante la época de Planck,

$$a_{Planck} = \frac{T_0}{T_{Planck}}, \quad \eta_{Planck} = -\frac{1}{a_{Planck}H_{inf}}. \quad (C.8)$$

Usando el requerimiento de que inflación dure al menos 80 e-folds ( $\sim 60$  es el mínimo necesario) podemos calcular  $a_{ii}$  y  $\eta_{ii}$

$$\frac{a_{ei}}{a_{ii}} = e^{80}, \quad \eta_{ii} = -\frac{1}{a_{ii}H_{inf}}. \quad (C.9)$$

Finalmente, durante la época inflacionaria  $H_{inf}$  se supone constante o muy cercano a serlo, su valor se puede calcular de la ecuación de Friedmann,

$$H_{inf}^2 = \frac{8\pi G}{3}V(\varphi). \quad (C.10)$$

Para obtener los valores numéricos mostrados en la tabla C.1, usamos los siguientes datos  $\hbar = c = 1$ ,  $\rho_c = 8.098h^2 \times 10^{-14} \text{ eV}^4$ ,  $T_0 \equiv T(\eta = \eta_0) = 2.4 \times 10^{-13} \text{ GeV}$ ,  $\Omega_{mat,0} = 0.128h^2 = 0.2275$ ,  $\Omega_{rad,0} = 2.47 \times 10^{-5}h^2 = 0.0000439$ ,  $m_{Planck} = 1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}$  y  $G = m_{Planck}^2$ . Supondremos que la escala energética del inflatón al final del periodo inflacionario es  $T_{ei} = 10^{15} \text{ GeV}$  y por lo tanto  $V(\varphi) \simeq (T_{ei})^4$ . Los valores numéricos de las constantes son  $C_{rad} = 0.161 \times 10^{-5} \text{ Mpc}^{-1}$ ,

LÍNEA TEMPORAL

$\eta$	s	Mpc	$a(\eta)$
$\eta_{ii}$	$-0.641 \times 10^{27}$	$-0.64 \times 10^{13}$	$0.43 \times 10^{-62}$
$\eta_{Planck}$	$-0.1157 \times 10^{-3}$	$-0.1157 \times 10^{-17}$	$0.24 \times 10^{-31}$
$\eta_{ei}$	$-0.1157 \times 10^{-7}$	$-0.1157 \times 10^{-21}$	$0.24 \times 10^{-27}$
$\eta = 0$	0		$0.42 \times 10^{-27}$
$\eta_{ns}$	$15 \times 10^9$	0.00015	$0.24 \times 10^{-9}$
$\eta_{eq}$	$1.2 \times 10^{16}$	119.81	0.00019296
$\eta_d$	$2.6 \times 10^{16}$	260.06	0.0009
$\eta_0$	$8.6 \times 10^{17}$	8625.32	1

**Tabla C.1:** Valores numéricos para distintos momentos importantes en la evolución del universo. La conversión se puede realizar usando  $1 \text{ s} \simeq 10^{-14} \text{ Mpc}$ . Si requiere estas cantidades en GeV use la relación de conversión  $1 \text{ GeV}^{-1} = 6.6 \times 10^{-25} \text{ s}$ . Para los valores de las constantes consúltese el texto principal.

$$C_{mat} = 0.00011 \text{ Mpc}^{-1} \text{ y } H_{inf} = 0.36 \times 10^{36} \text{ s}^{-1} = 0.2370 \times 10^{12} \text{ GeV} = 0.36 \times 10^{50} \text{ Mpc}^{-1}.$$



## APÉNDICE D

### ACRÓNIMOS

- CBR** Fondo de Radiación Cósmica *Cosmic Background Radiation*
- CMB** Fondo Cósmico de Micro-ondas , del inglés *Cosmic Microwave Background*
- COBE** *COsmic Background Explorer*
- CSL** Modelos de localización continua del inglés *Continuous Spontaneous Model*
- DE** Energía oscura , del inglés *dark energy*
- DM** Materia oscura , del inglés *dark matter*
- DMR** Radiómetro de Microondas Diferencial del inglés *Differential Microwave Radiometers*
- DRM** Modelos de reducción dinámicos , del inglés *Dynamical Reduction Models*
- ECE** Ecuaciones de Campo de Einstein
- EW** Electro-débil , del inglés *electro-weak*
- FIRAS** Espectrómetro Absoluto del Infrarojo Lejano , del inglés *Far Infrared Absolute Spectrophotometer*
- FLRW** Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
- GRW** Modelo de colapso de la función de onda de Ghirardi-Rimini-Weber
- ISW** Efecto de Sachs-Wolfe Integrado , del inglés *Integrated Sachs-Wolfe*
- LEP** Gran colisionador de Electrones-Positrones del inglés *Large Electron-Positron Collider*
- LHC** Gran Colisionador de Hadrones , del inglés *Large Hadron Collider*
- LSS** Superficie de Última Dispersión , del inglés *Last Scattering Surface*
- RW** Robertson-Walker
- SW** Efecto de Sachs-Wolfe
- WMAP** *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] «GRTensor II». <http://grtensor.phy.queensu.ca/>.
- [2] ABAZAJIAN, K.Ñ. y OTHERS.: «The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey». *Astrophysical Journal Supplement*, 2009, **182**, pp. 543–558. doi: 10.1088/0067-0049/182/2/543.
- [3] ABRAMOWITZ, MILTON y STEGUN, IRENE A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, New York, 1965. Existe una versión en línea: <http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/toc.htm>.
- [4] ADLER, STEPHEN L.: «Why Decoherence has not Solved the Measurement Problem: A Response to P. W. Anderson». *Studies In History and Philosophy of Science Part B Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, 2003, **34**, p. 135.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0112095>
- [5] AGUIRRE, ANTHONY: «Eternal Inflation, past and future», 2007.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0712.0571>
- [6] ALBRECHT, A. y STEINHARD, P. J.: «Cosmology For Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking». *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**, p. 1220.
- [7] ALCUBIERRE, MIGUEL: «Introducción a la relatividad numérica». *Rev. Mex. Fis.*, 2007, **53(2)**, pp. 5–30.
- [8] AMSLER, C. y otros: «Review of particle physics». *Phys. Lett.*, 2008, **B667**, p. 1. doi: 10.1016/j.physletb.2008.07.018.
- [9] ANNINOS, PETER: «Computational Cosmology: From the Early Universe to the Large Scale Structure». *Living Reviews in Relativity*, 2001, **4(2)**.  
<http://www.livingreviews.org/lrr-2001-2>
- [10] BALLENTINE, LESLIE E.: *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.
- [11] BARDEEN, JAMES M.: «Gauge-invariant cosmological perturbations». *Physical Review D*, 1980, **22(8)**, pp. 1882–1905.
- [12] BARDEEN, JAMES M.; STEINHARDT, PAUL J. y TURNER, MICHAEL S.: «Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe». *Phys. Rev.*, 1983, **D28**, p. 679. doi: 10.1103/PhysRevD.28.679.

- [13] BARROW, JOHN D. y DOMBEY, NORMAN: «Cosmology limits the number of neutrinos». *NewScientist*, 1989, (1688).
- [14] BASSI, A.: «Dynamical Reduction Models: present status and future developments», 2007. doi: 10.1088/1742-6596/67/1/012013.
- [15] BASSI, ANGELO y GHIRARDI, GIANCARLO: «A General Argument Against the Universal Validity of the Superposition Principle». *Phys. Lett.*, 2000, **A275**, p. 373. doi: 10.1016/S0375-9601(00)00612-5.
- [16] —: «Dynamical Reduction Models». *Physics Reports*, 2003, **379**, p. 257.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0302164>
- [17] BELL, JOHN S.: «Against Measurement». *Physics World*, 1990, p. 33.
- [18] BELL, M.; GOTTFRIED, K. y VELTMAN, M. (Eds.): *John S. Bell on The Foundations of Quantum Mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [19] —: *John S. Bell on The Foundations of Quantum Mechanics*. capítulo Are There Quantum Jumps? World Scientific Publishing Company, 2001.
- [20] BERGSTRÖM, LARS y GOOBAR, ARIEL: *Cosmology and Particle Astrophysics*. John Wiley and Sons Ltd, 1999.
- [21] BERTSCHINGER, EDMUND: «Cosmological dynamics: Course 1», 1993.
- [22] —: «Cosmological Perturbation Theory and Structure Formation», 2001.
- [23] BIRREL, N. D. y DAVIES, P. C. W.: *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, 1994.
- [24] BOERSMA, JELLE P.: «Averaging in cosmology». *Phys. Rev.*, 1998, **D57**, pp. 798–810. doi: 10.1103/PhysRevD.57.798.
- [25] BÖRNER, GERHARD: *The Early Universe: Facts and Fiction*. Springer, 4th edición, 2004.
- [26] BRANDENBERGER, ROBERT: «Inflationary Universe Models and Cosmic Strings». En: J.A. Peacock; A.F. Heavens y A.T. Davies (Eds.), *Physics of the Early Universe*, pp. 281–360, 1989.
- [27] —: «Topics in Cosmology», 2006.  
 NOTAS: Invited lectures at the Summer School on Particle Physics, Gravity and Cosmology (Dubrovnik, August 2006), publ. in the on-line proceedings (PoS(P2GC)007)
- [28] BRANDENBERGER, ROBERT H.: «Quantum Field Theory Methods and Inflationary Universe Models». *Rev. Mod. Phys.*, 1985, **57**, p. 1. doi: 10.1103/RevModPhys.57.1.
- [29] —: «Topological defects and structure formation». *Int. J. Mod. Phys.*, 1994, **A9**, pp. 2117–2190. doi: 10.1142/S0217751X9400090X.



- [30] —: «Lectures on the Theory of Cosmological Perturbations». volumen 646, pp. 127–167. Springer, 2003.
- [31] —: «Challenges for inflationary cosmology», 2004.
- [32] BRUNI, MARCO; DUNSBY, PETER K. S. y ELLIS, GEORGE F. R.: «Cosmological Perturbations and the Physical Meaning of Gauge-Invariant Variables». *ApJ*, 1992, **395**, pp. 32–53.
- [33] BRUNI, MARCO; GUALTIERI, LEONARDO y SOPUERTA, CARLOS F.: «Two-parameter nonlinear spacetime perturbations: gauge transformations and gauge invariance». *Class. Quantum Grav.*, 2003, **20**, pp. 535–556.
- [34] BRUNI, MARCO; MATARRESE, SABINO; MOLLERACH, SILVIA y SONEGO, SEBASTIANO: «Perturbations of spacetime: gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond». *Class. Quantum Grav.*, 1997, **14**, pp. 2585–2606.
- [35] BURLES, S.; NOLLETT, K. M. y TURNER, MICHAEL S.: «Big-bang nucleosynthesis: Linking inner space and outer space», 1999.
- [36] BURNELL, F. J.; MANN, ROBERT B. y OHTA, T.: «Chaos in a Relativistic 3-body Self-Gravitating System». *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **90**, p. 134101. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.134101.
- [37] CARROLL, SEAN M. y CHEN, JENNIFER: «Spontaneous Inflation and the Origin of the Arrow of Time», 2004.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:hep-th/0410270>
- [38] CIUFOLINI, IGNAZIO y WHEELER, JOHN ARCHIBALD: *Gravitation and Inertia*. Princeton University Press, 1995.
- [39] CRAMER, JOHN G.: «An Overview of the Transactional Interpretation». *Inter. Jour. Theo. Phys.*, 1988, **27**, p. 227.
- [40] DADHICH, NARESH: «Derivation of the Raychaudhuri Equation», 2005.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/0511123>
- [41] DANIELSSON, ULF H.: «A note on inflation and transplanckian physics». *Phys. Rev.*, 2002, **D66**, p. 023511. doi: 10.1103/PhysRevD.66.023511.
- [42] DAVIS, TAMARA M. y LINEWEAVER, CHARLES H.: «Expanding Confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe». *Astronomical Society of Australia*, 2004, **21**, pp. 97–109.
- [43] DE UNÁNUE, ADOLFO.: «Revisión de la teoría de perturbaciones en Relatividad General». Por publicar.
- [44] DE UNÁNUE, ADOLFO y SUDARSKY, DANIEL.: «Penrose's Dynamical Reduction Models and the birth of primordial inhomogeneities». Por publicar.

- [45] DE UNÁNUE, ADOLFO y SUDARSKY, DANIEL: «Phenomenological analysis of quantum collapse as source of the seeds of cosmic structure». *Phys. Rev. D*, 2008, **78**.
- [46] DERUELLE, NATHALIE; GUNDLACH, CARSTEN y POLARSKI, DAVID: «On the quantization of perturbations in inflation». *Class. Quantum Grav.*, 1992, **9**, pp. 137–148.
- [47] D'ESPAGNAT, BERNARD: *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*. Perseus Books, 2nd edición, 1999.
- [48] DIÓSI, LAJOS: «Gravitation and Quantum-Mechanical Localization of Macro-Objects». *Phys. Lett.*, 1984, **105A**, pp. 199–202.
- [49] —: «Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations». *Phys. Rev A*, 1989, **40(3)**, pp. 1165–1174.
- [50] —: «Notes on certain Newton gravity mechanisms of wavefunction localization and decoherence». *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical*, 2007, **40(12)**, p. 2989. doi: 10.1088/1751-8113/40/12/S07.
- [51] D'IVERNO, R.: *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992.
- [52] DODELSON, SCOTT: *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [53] DOLGOV, A. D.: «Cosmological implications of neutrinos». *Surveys High Energ. Phys.*, 2002, **17**, pp. 91–114. doi: 10.1080/0124421021000054202.
- [54] DUPAC, XAVIER: «Cosmology from Cosmic Microwave Background fluctuations with Planck», 2007.
- [55] DURRER, RUTH: «Cosmological structure formation with topological defects», 2000.
- [56] —: «Physics of Cosmic Microwave Background anisotropies and primordial fluctuations», 2001.
- [57] —: «The theory of CMB anisotropies». *J. Phys. Stud.*, 2001, **5**, pp. 177–215.
- [58] —: «Cosmological Perturbation Theory». *Informe técnico*, Université de Genève, Département de Physique Théorique, 2005.
- [59] EHLERS, J. y RINDLER, W.: «A Phase-Space Representation of Friedmann-Lemaître Universe Containing both Dust and Radiation and the Inevitability of a Big-Bang». *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 1989, **238**, pp. 503–521.
- [60] EINSTEIN, ALBERT: *Relativity: The Special and the General Theory*. Methuen, 1952.
- [61] ELLIS, G. F. R. y BRUNI, M.: «Covariant and gauge invariant approach to cosmological density fluctuations». *Phys. Rev.*, 1989, **D40**, pp. 1804–1818. doi: 10.1103/PhysRevD.40.1804.
- [62] ELLIS, G. F. R.; HWANG, J. y BRUNI, M.: «Covariant and gauge independent perfect fluid robertson- walker perturbations». *Phys. Rev.*, 1989, **D40**, pp. 1819–1826. doi: 10.1103/PhysRevD.40.1819.

- [63] ELLIS, G. F. R. y MATRAVERS, D.R.: «General Covariance in General Relativity?» *General Relativity and Gravitation*, 1995, **27(7)**, pp. 777–788.
- [64] ELLIS, G. F. R. y STOEGER, W.: «Horizons in inflationary universes». *Classical and Quantum Gravity*, 1988, **5**, pp. 207–220. doi: 10.1088/0264-9381/5/1/024.
- [65] ELLIS, GEORGE: «Patchy solutions». *Nature*, 2008, **452**, pp. 158–161. doi: 10.1038/452158a.
- [66] ELLIS, G.F.R.: «Relativistic Cosmology». En: R.K. Sachs (Ed.), *Proceedings of XLVII Enrico Fermi Summer School*, Academic Press, 1971.
- [67] —: *Handbook in Philosophy of Physics*. capítulo Issues in the Philosophy of Cosmology. Elsevier, 2006.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/0602280>
- [68] ELLIS, G.F.R. y BUCHERT, T.: «The universe seen at different scales». *Physical Letters A*, 2005, **347(1-3)**, pp. 38–46. doi: 10.1016/j.physleta.2005.06.08.
- [69] ENQVIST, KARI; HOGDAHL, JANNE; NURMI, SAMI y VERNIZZI, FILIPPO: «Covariant generalization of cosmological perturbation theory». *Phys. Rev.*, 2007, **D75**, p. 023515. doi: 10.1103/PhysRevD.75.023515.
- [70] FELDMAN, H. A.; KAMENSHCHIK, A. Y. y ZEL'NIKOV, A. I.: «Decoherence effects of gravitons in quantum cosmology.» *Classical and Quantum Gravity*, 1992, **9**, pp. L1–L6. doi: 10.1088/0264-9381/9/1/001.
- [71] FIELDS, BRIAN y SARKAR, SUBIR: «Big-Bang nucleosynthesis». *Physics Letters B*, 2008, **667**, p. 228. Se puede encontrar una versión más antigua (2004) en [astro-ph/0406663](http://arXiv.org/astro-ph/0406663).
- [72] FREEDMAN, W. L.; MADORE, B. F.; GIBSON, B. K.; FERRARESE, L.; KELSON, D. D.; SAKAI, S.; MOULD, J. R.; KENNICUTT, R. C., JR.; FORD, H. C.; GRAHAM, J. A.; HUCHRA, J. P.; HUGHES, S. M. G.; ILLINGWORTH, G. D.; MACRI, L. M. y STETSON, P. B.: «Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant». *Astrophys. J.*, 2001, **553**, pp. 47–72. doi: 10.1086/320638.
- [73] FREEMAN, WENDY L. y TURNER, MICHAEL S.: «Colloquium: Measuring and understanding the Universe». *Rev. Mod. Phys.*, 2003, **75**, pp. 1433–1447.
- [74] FRENKEL, ANDOR: «A Tentative Expression of the Karolyhazy Uncertainty of the Space-Time Structure through Vacuum Spreads in Quantum Gravity», 2002.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0002087>
- [75] GANGUI, ALEJANDRO: «Cosmology from topological defects». *AIP Conf. Proc.*, 2003, **668**, pp. 226–262. doi: 10.1063/1.1587101.
- [76] GARCIA-BELLIDO, JUAN: «Cosmology and Astrophysics», 2005.
- [77] GARRIGA, JAUME; GUTH, ALAN H. y VILENKIN, ALEXANDER: «Eternal inflation, bubble collisions, and the persistence of memory». *Physical Review D*, 2007, **76**, p. 123512. doi: 10.1103/PhysRevD.76.123512.

- [78] GEORGE F R ELLIS, HENK VAN ELST: «Cosmological Models», 1999, pp. 1–116.
- [79] GHIRARDI, G.C.: «The interpretation of quantum mechanics: where do we stand?», 2009.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0904.0958>
- [80] GHIRARDI, G.C; RIMINI, A. y WEBER, T.: «A Model for a Unified Quantum Description of Macroscopic and Microscopic Systems». En: L. Accardi et al (Ed.), *Quantum Probability and Applications*, Springer Berlin, 1985.
- [81] GHIRARDI, G.C.; RIMINI, A. y WEBER, T.: «Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems». *Physical Review D*, 1986, **34(2)**, p. 470. doi: 10.1103/PhysRevD.34.470.
- [82] GIOVANNI, MASSIMO: *A primer on the physics of the cosmic microwave background*. World Scientific, 2008.
- [83] GOTT, J. R. I.; JURIĆ, M.; SCHLEGEL, D.; HOYLE, F.; VOGELY, M.; TEGMARK, M.; BAH-CALL, N. y BRINKMANN, J.: «A Map of the Universe». *Astrophysical Journal*, 2005, **624**, pp. 463–484. doi: 10.1086/428890.
- [84] GRIB, ANDREY ANATOLJEVICH y JR., WALDYR ALVES RODRIGUES: *Nonlocality in Quantum Physics*. Kluwer Academic Plenum Publishers, New York, NY, 1999.
- [85] GRØN, ØYVIND y HERVIK, SIGBJORN: *Einstein's General Theory of Relativity*. Springer, 2007.
- [86] GUTH: «Inflation and eternal inflation». *Physics Reports*, 2000, **333-334(1)**, p. 555. doi: 10.1016/S0370-1573(00)00037-5.
- [87] GUTH, A. H.: «The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems». *Phys. Rev. D*, 1981, **23**, p. 347.
- [88] GUTH, ALAN H.: «Eternal inflation and its implications». *J.PHYS.A*, 2007, **40**, p. 6811. doi: 10.1088/1751-8113/40/25/S25.
- [89] HALLIWELL, JONATHAN J.: «Decoherence in Quantum Cosmology». *Phys. Rev.*, 1989, **D39**, p. 2912. doi: 10.1103/PhysRevD.39.2912.
- [90] HARRISON, EARNEST. R.: «Fluctuations at the threshold of classical cosmology». *Phys. Rev. D*, 1970, **1**, p. 2726.
- [91] HAWKING, S.W. y ELLIS, G.F.R.: *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1999.
- [92] HILLERY, M.; O'CONNELL, R.F; SCULLY, M.O. y WIGNER, E.P.: «Distribution Functions in Physics: Fundamentals». *Physics Reports*, 1984, **106(3)**, pp. 121–167.
- [93] HINSHAW: «Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature Analysis». *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2007, **170(2)**, p. 288. doi: 10.1086/513698.
- [94] HOGG, DAVID W.: «Distance measures in Cosmology», 2000.

- [95] HU, WAYNE y WHITE, MARTIN: «The Cosmic Symphony». *Scientific American*, 2004.
- [96] HUANG, QING-GUO; LI, MIAO y WANG, YI: «Eternal Chaotic Inflation is Prohibited by Weak Gravity Conjecture», 2007. doi: 10.1088/1475-7516/2007/09/013.
- [97] HWANG, J.; PADMANABHAN, T.; LAHAV, O. y NOH, H.: « $1/3$  factor in the CMB Sachs-Wolfe effect». *Phys. Rev. D*, 2002, **65(4)**, pp. 043005–+. doi: 10.1103/PhysRevD.65.043005.
- [98] HWANG, J.-C. y NOH, H.: «Sachs-Wolfe effect: Gauge independence and a general expression». *Phys. Rev. D*, 1999, **59(6)**, pp. 067302–+. doi: 10.1103/PhysRevD.59.067302.
- [99] IFTIME, MIHAELA: «Gauge and the hole argument», 2006.
- [100] IFTIME, MIHAELA y STACHEL, JOHN: «The Hole Argument for Covariant Theories». *Gen. Rel. Grav.*, 2005, **38**, pp. 1241–1252.
- [101] IMAI, TATSUNORI; CHIBA, TAKAMASA y ASADA, HIDEKI: «Choreographic solution to the general relativistic three-body problem». *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**, p. 201102. doi: 10.1103/PhysRevLett.98.201102.
- [102] JOSÉ, JORGE V. y SALETAN, EUGENE J.: *Classical Mechanics - A contemporary approach*. Cambridge University Press, 2002.
- [103] KIEFER, CLAUS: «Origin of classical structure from inflation». *Nucl.Phys.Proc.Suppl*, 2000, **88**, pp. 255–258.
- [104] —: «On the interpretation of quantum theory - from Copenhagen to the present day», 2002.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0210152>
- [105] KIEFER, CLAUS y JOOS, ERICH: «Decoherence: Concepts and Examples», 1998.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/9803052>
- [106] KIEFER, CLAUS; LESGOURGUES, JULIEN; POLARSKI, DAVID y STAROBINSKY, ALEXEI A.: «The Coherence of Primordial Fluctuations Produced During Inflation», 1998.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/9806066>
- [107] KIEFER, CLAUS; LOHMAR, INGO; POLARSKI, DAVID y STAROBINSKY, ALEXEI A.: «Pointer states for primordial fluctuations in inflationary cosmology». *Classical and Quantum Gravity*, 2007, **24(7)**, p. 1699. doi: 10.1088/0264-9381/24/7/002.
- [108] KIEFER, CLAUS y POLARSKI, DAVID: «Why do cosmological perturbations look classical to us?», 2008.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0810.0087>
- [109] KINNEY, WILLIAM H.: «TASI Lectures on Inflation», 2009.
- [110] KOLB, EDWARD W. y TURNER, MICHAEL S.: *The Early Universe*. Addison Wesley, 1990.
- [111] LANDAU, SUSANA; SCOCCOLA, CLAUDIA; SUDARSKY, DANIEL y DE UNÁNUE, ADOLFO.: Por publicar.

- [112] LANGLOIS, DAVID: «Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations», 2003.
- [113] LAZARIDES, GEORGE: «Basics of Inflationary Cosmology», 2006.
- [114] LEÓN, GABRIEL; DE UNÁNUE, ADOLFO y SUDARSKY, DANIEL.: «Multiple collapses and its implications on the seeds of cosmic structure: Coherent and Squeezed states». Por publicar.
- [115] LIDDLE, ANDREW R. y LYTH, DAVID H.: *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [116] LIFSHITZ, E.: «On the Gravitational stability of the expanding universe». *J. Phys. (USSR)*, 1946, **10**, p. 116.
- [117] LINDE, ANDREI: «A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems». *Phys. Lett. B*, 1982, **108**, p. 389.
- [118] LONGAIR, MALCOM S.: *Galaxy Formation*. Springer, 2000.
- [119] LYTH, D. H.: «Large Scale Energy Density Perturbations and Inflation». *Phys. Rev.*, 1985, **D31**, pp. 1792–1798. doi: 10.1103/PhysRevD.31.1792.
- [120] LYTH, DAVID H.: «Introduction to Cosmology», 1993.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/9312022>
- [121] MA, CHUNG-PEI y BERTSCHINGER, EDMUND: «Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous vs. Conformal Newtonian Gauge». *The Astrophysical Journal*, 1995, **455**, p. 7.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:astro-ph/9401007>
- [122] MACDONALD, ALAN: «Einstein's hole argument». *American Journal of Physics*, 2001, **69**, pp. 223–225.
- [123] MAGUEIJO, JOAO y BRANDENBERGER, ROBERT H.: «Cosmic defects and cosmology», 2000.
- [124] MALIK, KARIM A. y WANDS, DAVID: «Cosmological perturbations», 2008.
- [125] MAROTO, ANTONIO LOPEZ y RAMIREZ, JUAN: «A conceptual tour about the standard cosmological model», 2004.
- [126] MARRA, VALERIO; KOLB, EDWARD W.; MATARRESE, SABINO y RIOTTO, ANTONIO: «On cosmological observables in a swiss-cheese universe». *Phys. Rev.*, 2007, **D76**, p. 123004. doi: 10.1103/PhysRevD.76.123004.
- [127] MARTEL, KARL y POISSON, ERIC: «Gravitational perturbations of the Schwarzschild space-time: A practical covariant and gauge-invariant formalism». *Phys. Rev.*, 2005, **D71**, p. 104003. doi: 10.1103/PhysRevD.71.104003.
- [128] MARTIN, JEROME: «Inflationary Cosmological Perturbations of Quantum-Mechanical Origin», 2004.

- [129] MARTIN, JEROME y BRANDENBERGER, ROBERT H.: «The trans-Planckian problem of inflationary cosmology». *Phys. Rev.*, 2001, **D63**, p. 123501. doi: 10.1103/PhysRevD.63.123501.
- [130] MARTIN, JEROME y SCHWARZ, DOMINIK J.: «The influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations». *Phys. Rev.*, 1998, **D57**, pp. 3302–3316. doi: 10.1103/PhysRevD.57.3302.
- [131] MERLÍN, CÉSAR: ????? Tesina o Proyecto, ICN - UNAM, 2009.
- [132] MERLÍN, CÉSAR y SALGADO, MARCELO: Por publicar.
- [133] MERSINI-HOUGHTON, L. y PARKER, L.: «Eternal Inflation is .Expensive"», 2007.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0705.0267>
- [134] MISNER, CHARLES W.; THORNE, KIP S. y WHEELER, JOHN A.: *Gravitation*. W. H. Freeman & Company, 1973.
- [135] MUKHANOV, V.: *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [136] MUKHANOV, V. F.: «The quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations». *Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1988, **94**, pp. 1–11.
- [137] MUKHANOV, V. F. y WINITZKI, S.: *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [138] MUKHANOV, VIATCHESLAV F.; FELDMAN, H. A. y BRANDENBERGER, ROBERT H.: «Theory of cosmological perturbations». *Phys. Rept.*, 1992, **215**, pp. 203–333. doi: 10.1016/0370-1573(92)90044-Z.
- [139] NAKAMURA, KOUJI: «Gauge Invariant Variables in Two-Parameter Nonlinear Pertubations». *Prog. of Theo. Phys.*, 2003, **110(4)**, pp. 723–755.
- [140] —: «Second Order Gauge Invariant Perturbation Theory – Perturbative curvatures in the two-parameter case –», 2005.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/0410024>
- [141] —: «Second-Order Gauge Invariant Perturbation Theory -Perturbative Curvaturas in the Two-Parameter Case-». *Prog. of Theo. Phys.*, 2005, **113(3)**, pp. 481–511.
- [142] —: «Short note on second-order gauge-invariant cosmological perturbation theory», 2006.
- [143] —: «Second-order Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory: – Einstein equations in terms of gauge invariant variables –», 2007.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/0605108>
- [144] —: «Consistency relations between the source terms in the second-order Einstein equations for cosmological perturbations», 2009.
- [145] —: «Inclusion of the first-order vector- and tensor-modes in the second-order gauge-invariant cosmological perturbation theory», 2009.

- [146] NARLIKAR, JAYANT V.: «????» *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1999, **(327)**, p. 841.
- [147] NARLIKAR, JAYANT V. y PADMANABHAN, T.: «Standard Cosmology and Alternatives: A critical appraisal». *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 2001, **39**, pp. 211–248.
- [148] NOLTA, M. R.; DUNKLEY, J.; HILL, R. S.; HINSHAW, G.; KOMATSU, E.; LARSON, D.; PAGE, L.; SPERGEL, D.Ñ.; BENNETT, C. L.; GOLD, B.; JAROSIK, N.; ODEGARD, N.; WEILAND, J. L.; WOLLACK, E.; HALPERN, M.; KOGUT, A.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; TUCKER, G. S.; y WRIGHT, E. L.: «Five-year wilkinson microwave anisotropy probe observations: angular power spectra». *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2009, **180(2)**, pp. 296–305.  
<http://stacks.iop.org/0067-0049/180/296>
- [149] NORTON, JOHN: «The Hole Argument». En: Edward N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, , Winter 2008.  
<http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/spacetime-holearg/>
- [150] NORTON, JOHN D.: «General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute». *Rep. Prog. Phys.*, 1993, **56**, pp. 791–858.
- [151] OMNÈS, ROLAND: *The Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1994.
- [152] PADMANABHAN, T.: *Structure formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [153] —: *Cosmology and Astrophysics - Through Problems*. Cambridge University Press, 1996.
- [154] —: *After the first three minutes - The story of our Universe*. Cambridge University Press, 1998.
- [155] —: «Advanced topics in cosmology: A pedagogical introduction». *AIP Conf. Proc.*, 2006, **843**, pp. 111–166. doi: 10.1063/1.2219327.
- [156] PAGE, D.N.: «Inflation does not explain time asymmetry». *Nature*, 1983, **39**, p. 304.
- [157] PEACOCK, J.A.: *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [158] —: «Cosmology: Standard Model», 2001. doi: 10.1888/0333750888/1632.
- [159] PEARLE, PHILIP: «True Collapse and False Collapse», 1994.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/9805049>
- [160] —: «Collapse Models», 1999.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/9901077>
- [161] —: «Wave Function Collapse. Could It Have Cosmological Consequences?», 2007.
- [162] PEARLE, PHILIP y SQUIRES, EUAN: «Gravity, energy conservation and parameter values in collapse models», 1995.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/9503019>
- [163] PEEBLES, P.J.E.: *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.



- [164] PEEBLES, P.J.E.: «The Standard Cosmological Model». En: *Results and Perspectives in Particle Physics*, , 1998.
- NOTAS: Presentado en 12do Les Rencontre de Physique de la Vallee d'Aoste, La Thuile, Aosta Valley, Italy, 1-7 Mar 1998.
- [165] PENROSE, ROGER: «Difficulties with inflationary cosmology». *New York Academy Sciences Annals*, 1989, **571**, pp. 249–264. doi: 10.1111/j.1749-6632.1989.tb50513.x.
- [166] PENROSE, ROGER: *Shadows of the Mind. A search for the missing science of consciousness*. Oxford University Press, 1994.
- [167] —: «On gravity's role in quantum state reduction». *Gen. Rel. Grav.*, 1996, **28**, pp. 581–600. doi: 10.1007/BF02105068. Se puede encontrar también en \*Callender, C. (ed.): *Physics meets philosophy at the Planck scale*\* 290-304.
- [168] —: *La mente nueva del emperador. En torno a la cibernética, la mente y las leyes de la física*. Fondo de Cultura Económica, 2da edición, 2002.
- [169] —: *The Road to Reality. A complete guide to the laws of the universe*. Jonathan Cape, Londres, 2004.
- NOTAS: Publicado en español, *El camino a la realidad. Una guía completa de las leyes del universo*, Random House Mondadori S.A. colección DEBATE, traducción de Javier García Sanz, 2006
- [170] PEREZ, ALEJANDRO; SAHLMANN, HANNO y SUDARSKY, DANIEL: «On the quantum origin of the seeds of cosmic structure». *Class.Quant.Grav.*, 2006, **23**, pp. 2317–2354.
- [171] PERLMUTTER, S. y otros: «Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First 7 Supernovae at  $z \geq 0.35$ ». *Astrophys. J.*, 1997, **483**, p. 565. doi: 10.1086/304265.
- [172] —: «Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe and its Cosmological Implications». *Nature*, 1998, **391**, pp. 51–54. doi: 10.1038/34124.
- [173] PESKIN, MICHAEL E. y SCHROEDER, DANIEL V.: *Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [174] PETROV, A. Z.: «The classification of spaces defining gravitational fields». *Gen. Rel. Grav.*, 2000, **32**, pp. 1661–1663.
- [175] PFENNING, MICHAEL J. y POISSON, ERIC: «Scalar, electromagnetic, and gravitational self-forces in weakly curved spacetimes». *Phys. Rev.*, 2002, **D65**, p. 084001. doi: 10.1103/PhysRevD.65.084001.
- [176] POISSON, ERIC: «The Gravitational self-force», 2004.
- [177] —: «The motion of point particles in curved spacetime». *Living Rev. Rel.*, 2004, **7**, p. 6.

- [178] POLARSKI, DAVID y STAROBINSKY, ALEXEI A.: «Semiclassicality and Decoherence of Cosmological Perturbations». *Class.Quant.Grav.*, 1996, **13**, pp. 377–392.
- [179] PRESTON, BRENT y POISSON, ERIC: «A light-cone gauge for black-hole perturbation theory». *Phys. Rev.*, 2006, **D74**, p. 064010. doi: 10.1103/PhysRevD.74.064010.
- [180] RAYCHAUDHURI, AMALKUMAR: «Relativistic Cosmology. I». *Phys. Rev.*, 1955, **98**, pp. 1123–112.
- [181] RIESS, ADAM G. y otros: «Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant». *Astron. J.*, 1998, **116**, pp. 1009–1038. doi: 10.1086/300499.
- [182] —: «Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution». *Astrophys. J.*, 2004, **607**, pp. 665–687. doi: 10.1086/383612.
- [183] RINDLER, W.: «Visual horizons in world-models». *Gen. Rel. Grav.*, 2002, **34**, pp. 133–153. doi: 10.1023/A:1015347106729.  
<http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1956MNRAS.116..662R>
- [184] RINDLER, WOLFGANG: *Relativity Special, General and Cosmological*. Oxford University Press, 2nd edición, 2006.
- [185] RIOTTO, ANTONIO: «Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations», 2002.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:hep-ph/0210162>
- [186] SARKAR, SUBIR: «Neutrinos from the big bang». *Proc. Indian Natl. Sci. Acad.*, 2004, **70A**, pp. 163–178.
- [187] SCHIFF, LEONARD I.: *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1968.
- [188] SCHLOSSHAUER, MAXIMILIAN: «Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics», 2004. doi: 10.1103/RevModPhys.76.1267.
- [189] SCHRAMM, DAVIDÑ.: «On the relation of the cosmological constraints on neutrino flavors to the width of the  $Z_0^*1$ ». *Physics Letters B*, 1984, **141(5-6)**, pp. 337–341.
- [190] SCOTT, DOUGLAS: «The standard cosmological model», 2005.
- [191] SCOTT, DOUGLAS y SMOOT, GEORGE: «Cosmic Background Radiation Mini-Review». *Physics Letters B*, 2008, **667**, p. 246. Se puede encontrar una versión más antigua (2004) en [astro-ph/0406567v1](http://astro-ph/0406567v1).
- [192] SELJAK, UROS y ZALDARRIAGA, MATIAS: «A Line of Sight Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies». *Astrophys. J.*, 1996, **469**, pp. 437–444. doi: 10.1086/177793.  
<http://www.cfa.harvard.edu/~mzaldarr/CMBFAST/cmbfast.html>
- [193] SHIU, G.: «Inflation as a probe of trans-Planckian physics: A brief review and progress report». *J. Phys. Conf. Ser.*, 2005, **18**, pp. 188–223. doi: 10.1088/1742-6596/18/1/005.

- [194] SMOOT, G. F.; BENNETT, C. L.; KOGUT, A.; AYMÓN, J.; BACKUS, C.; DE AMICI, G.; GALUK, K.; JACKSON, P. D.; KEEGSTRA, P.; ROKKE, L.; TENORIO, L.; TORRES, S.; GULKIS, S.; HAUSER, M. G.; JANSSEN, M.; MATHER, J. C.; WEISS, R.; WILKINSON, D. T.; WRIGHT, E. L.; BOGGESS, N. W.; CHENG, E. S.; KELSALL, T.; LUBIN, P.; MEYER, S.; MOSELEY, S. H.; MURDOCK, T. L.; SHAFER, R. A. y SILVERBERG, R. F.: «First results of the COBE satellite measurement of the anisotropy of the cosmic microwave background radiation». *Advances in Space Research*, 1991, **11**, pp. 193–205. doi: 10.1016/0273-1177(91)90490-B.
- [195] SOTIRIOU, THOMAS P. y FARAONI, VALERIO: «f(R) Theories Of Gravity», 2008.
- [196] SPERGEL, D.N. y otros: «Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology». *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2007, **170(2)**, pp. 377–408. doi: 10.1086/513700.  
<http://dx.doi.org/10.1086/513700>
- [197] STAROBINSKY, A. A.: «Spectrum Of Relict Gravitational Radiation And The Early State Of The Universe». *JETP Lett.*, 1979, **30**, p. 682.
- [198] STEWART, A. M.: «Longitudinal and transverse components of a vector field», 2008.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0801.0335>
- [199] STEWART, J.M. y WALKER, M.: «Perturbations of Space-Times in General Relativity». *Proc. Roy. Soc. Series A*, 1974, **341(1624)**, pp. 49–74.
- [200] STRAUMANN, NORBERT: «From primordial quantum fluctuations to the anisotropies of the cosmic microwave background radiation». *Annalen Phys.*, 2006, **15**, pp. 701–847. doi: 10.1002/andp.200610212.
- [201] —: «Proof of a decomposition theorem for symmetric tensors on spaces with constant curvature», 2008.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0805.4500>
- [202] SUDARSKY, DANIEL: «The Seeds of Cosmic structure as a door to New Physics». *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2006, **68**. doi: 10.1088/1742-6596/68/1/012029.
- [203] —: «The seeds of cosmic structure as door to Quantum Gravity Phenomena», 2007.
- [204] —: «A signature of quantum gravity at the source of the seeds of cosmic structure?» *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2007, **67**. doi: 10.1088/1742-6596/67/1/012054.
- [205] —: «Shortcomings in the Understanding of Why Cosmological Perturbations Look Classical», 2009.
- [206] TEGMARK, M.: «Measuring Cosmological Parameters with Galaxy Surveys». *Physical Review Letters*, 1997, **79**, pp. 3806–3809. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.3806.
- [207] TEGMARK, M. y otros: «Cosmological parameters from SDSS and WMAP». *Phys. Rev. D*, 2004, **69(10)**, pp. 103501–+. doi: 10.1103/PhysRevD.69.103501.

- [208] —: «The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey». *Astrophysical Journal Supplement*, 2004, **606**, pp. 702–740. doi: 10.1086/382125.
- [209] TSUJIKAWA, SHINJI: «Introductory Review of Cosmic Inflation», 2003.
- [210] TUMULKA, RODERICH: «Collapse and Relativity», 2006.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0602208>
- [211] VACHASPATI, TANMAY: «Topological defects in cosmology», 1993.
- [212] VALKENBURG, WESSEL: «Swiss Cheese and a Cheesy CMB», 2009.
- [213] VON NEUMANN, JOHN: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1996.
- [214] WAINWRIGHT, J. y ELLIS, GEORGE FRANCIS RAYNER: *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, 1997.
- [215] WALD, ROBERT M.: *General Relativity*. Chicago University Press, 1984.
- [216] WALECKA, JOHN D.: *Fundamentals of Statistical Mechanics - Manuscript and Notes of Felix Bloch*. Imperial College Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.
- [217] WANG, YI: «Eternal Inflation: Prohibited by Quantum Gravity?», 2008.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0805.4520>
- [218] WEINBERG, S.: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley-VCH., 1972.
- [219] WHITE, MARTIN y HU, WAYNE: «The Sachs-Wolfe effect». *Astronomy and Astrophysics*, 1997, **89(321)**.
- [220] WIGNER, E.P.: «On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium». *Phys. Rev.*, 1932, **40**, pp. 749–759.
- [221] —: «Quantum Mechanical Distribution Functions Revisited». En: W. Yourgrad y A. van der Merwe (Eds.), *Perspectives in Quantum Theory*, pp. 25–36. Dover, 1971.
- [222] WOOD-VASEY, W. MICHAEL y otros: «Observational Constraints on the Nature of the Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey». *Astrophys. J.*, 2007, **666**, pp. 694–715. doi: 10.1086/518642.
- [223] YORK, D. G. y otros: «The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary». *Astronomical Journal*, 2000, **120**, pp. 1579–1587. doi: 10.1086/301513.
- [224] ZALALETDINOV, ROUSTAM M.: «Averaging Problem in General Relativity, Macroscopic Gravity and Using Einstein's Equations in Cosmology». *BULL.ASTRON.SOC.INDIA*, 1997, **25**, p. 401.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:gr-qc/9703016>

- [225] ZEL'DOVICH, YAKOV BORISOVICH: «A Hypothesis, unifying the structure and the entropy of the universe». *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1972, **160**, pp. 1P-3P.
- [226] ZUREK, WOJCIECH H.: «Decoherence and the transition from quantum to classical – REVISITED», 2003.  
<http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:quant-ph/0306072>

---

Redacción y edición de tesis  
con  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ , *GNU Emacs*  
y sistema operativo libre  
*GNU/LINUX*.