UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

Programa de Maestría y Doctorado en Filosofía

Instituciones y π-instituciones: Formalización categórica de la noción de estructura lógica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN FILOSOFÍA

P R E S E N T A:
CECILIA CHÁVEZ AGUILERA

DIRECTORES DE TESIS:
Dra. Atocha Aliseda Llera
Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea

Octubre de 2009

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer a CONACYT por la beca que me brindó para realizar mis estudios de maestría. Además quiero agradecer especialemente a mis tutores, Atocha y Favio quienes me han ayudado infnita y desinteresadamente. Con Atocha he tenido la oportunidad de trabajar en varios seminarios y ser parte de muchos proyectos que me han alimentado intelectualmente. Atocha me ha tendido su mano siempre que he necesitado sin preguntar más nada. Mi gratitud por ello.

No ha sido la excepción con Favio de quien no he dejado de aprender cosas nuevas desde el día que tuve la oportunidad de tomar sus cursos en la Facultad de Ciencias. Favio ha sido un gran soporte para mí no sólo académicamente sino moralmente. Su cubículo es un espacio en el que siempre están fluyendo las ideas, el trabajo y la alegría.

En particular debo agradecer a Francisco quien, a pesar de no ser de formación filosfófica, aceptó con gusto y sin mayores miramientos leer mi tesis. Debo decir además que su lectura fue excepcionalmente cuidadosa y me ayudó a rectificar varios aspectos. Es un orgullo haber contado con la lectura de este enamorado de la teoría de categorías.

Problemas mayores hubo que enfrentar para que Barteld pudiera realizar la lectura de esta tesis: el idioma, que nos llevó a traducirla al inglés, la distancia, los trámites especiales etc. Sin embargo nada de esto menguo el ánimo y la amabilidad con que Barteld leyó mi tesis. Le agradezco haber soportado todas estas dificultades y todos sus comentarios que fueron de gran ayuda.

A Carlos, quien fue el último en recibir mi tesis, le agradezco infinitamente haber aceptado leerla bajo la presión, mía y de Favio, de dedicar tiempo extra en su corrección. Le agradezco además la confianza que tuvo en mi trabajo y en mi responsabilidad.

Finalmente, pero no por ello al último quiero agradecer a mi familia. Lejos, a veces no sólo por la distancia, siempre me han apoyado. Mis padres Miguel y Cecilia, han sido un ejemplo para mí en muchos aspectos. Mis hermanas siempre me provocan una secreta alegría cuando pienso en ellas, todas unas hermosísimas mujeres a las que quiero con todo mi corazón, Vero, Gaby y Cristi muchas gracias por existir.

A Marco Antonio

Introducción

Desde finales del siglo XIX hasta nuestros días se ha producido el surgimiento (o re-surgimiento) de una gran diversidad de sistemas y lenguajes lógicos. Ejemplo de ello son los sistemas modales de Lewis ([Lew60]), que pueden considerarse como una extensión de la lógica clásica añadiendo un operador modal, así como su enriquecimiento con diversas modalidades como la de la lógica epistémica, temporal, dinámica, etc. ([Via00]), las lógicas no clásicas como la intuicionista desarrollada por Brouwer ([Bro75]), los sistemas de lógica paraconsistente ([dC63]) o bien el uso que se ha dado a formalismos como el cálculo λ ([Bar81]) o el cálculo μ ([NA01]).

Esta circunstancia ha dado pie a investigaciones que tienen como finalidad el desarrollo de herramientas o teorías que nos permitan lograr algún conocimiento general de esta diversidad. Su motivación está dada bien por problemas teóricos, como saber el alcance de ciertos metateoremas de la lógica clásica, saber las relaciones que existen entre diversos sistemas lógicos, o bien por problemas prácticos, como el desarrollo de *especificaciones* en computación, para lo cual se requiere el uso de diversas lógicas.

La manera en la que se han tratado este tipo de problemas ha sido muy diversa. Un ejemplo notable dentro de la teoría de modelos abstracta es el trabajo hecho por Barwise en [Bar74], donde establece una axiomatización para dicha teoría. La motivación detrás de este trabajo es el dar un marco lo suficientemente general para trabajar con todas las lógicas que extienden la lógica clásica de primer orden.

Siguiendo este mismo derrotero pero utilizando diferentes herramientas, podemos mencionar el trabajo de Hintikka [Hin02], en el que se utiliza teoría de juegos para modelar el comportamiento de cuantificadores ramificados de manera semántica (Ver apéndice A). Cualquier sistema lógico que pueda tener este tipo de semántica, se dice que es *libremente afín* con la lógica clásica. De manera semejante se han establecido propiedades como la *afinidad lógica* para los sistemas en los que se puede generalizar el operador de consecuencia ([Mak05]).

Como se puede observar, los enfoques mencionados se concentran en establecer conexiones entre sistemas lógicos de acuerdo a la relación que guarden con la lógica clásica. En este sentido, a pesar de la diversidad de sus métodos, dan un tratamiento muy semejante a los problemas antes mencionados. Existen al menos dos enfoques que intentan dar cuenta de estos problemas mediante otro tipo de herramientas. La tendencia denominada *Lógica Universal*, fundada en el trabajo de J. Y. Béziau ([Béz95a]), y la propuesta que se da desde la *Lógica Algebraica Abstracta Categórica* se centran en el estudio de los sistemas lógicos vistos como una estructura matemática.

Sin embargo estos dos enfoques difieren entre sí. Para el primero, juega un papel fundamental el rechazo a la dependencia de ciertas herramientas como el álgebra, la lógica algebraica o la teoría de categorías para el análisis de los sistemas lógicos y sus propiedades. El segundo es propiamente una generalización de los métodos usados tradicionalmente en lógica algebraica mediante el uso de teoría de categorías. Esto implica la postulación de dos diferentes nociones de lo que pueda ser un sistema lógico visto como una estructura matemática, es decir, de lo que pueda ser una estructura lógica.

Por un lado, desde el enfoque de la lógica categórica, se define una noción como la de *Lógicas generales* de Meseguer ([Mes89]) que es una estructura que refleja las propiedades de un sistema lógico. Por el otro, con Béziau tenemos la siguiente definición base: una estructura lógica es una estructura $\langle \mathcal{S}, \vdash \rangle$, donde $\mathcal{S}$ es un conjunto que debe poder tomar cualquier tipo de estructura, y $\vdash$ es una relación sin axiomas predeterminados. Béziau parte de esta base para dar algunas variantes de esta definición y para dar una taxonomía de las diversas estructuras lógicas existentes.

En el presente trabajo defendemos que en la formalización de una noción de estructura lógica, no se puede dejar de lado una herramienta como la teoría de categorías, que nos ha dado una formalización de la idea de estructura matemática en general, así como un poderoso aparato para manejar estructuras matemáticas y obtener información de ellas. Esta defensa consta de dos partes propiamente: en primer lugar, una crítica al rechazo del uso de la lógica algebraica (que más tarde se extiende en una crítica al rechazo del uso de la teoría de categorías) y a la noción de estructura lógica y estructura matemática postulada por Béziau y en segundo lugar la presentación de la noción de estructura lógica dada desde la lógica algebraica abstracta categórica así como de sus ventajas.

Debemos notar que las motivaciones del rechazo al uso de la lógica algebraica no son nuevas. Desde su inicio con el trabajo de Boole, se puso en tela de jucio la pertinencia de sus métodos. Ello, llevó a discutir el papel de la lógica dentro de las matemáticas (y viceversa), en particular, con respecto al álgebra. Ciertos resabios de esta discusión parecen seguir jugando un papel determinante en la postura de Béziau. En el capítulo 1 exponemos un panorama de lo que han sido las constantes en el rechazo al uso del álgebra en el estudio de los sistemas lógicos.

En el capítulo 2 exponemos la postura particular de Béziau para este rechazo y discutimos la pertinencia de tal postura. Como se mencionó, el corazón de su propuesta se centra en la noción de estructura lógica, noción que se pretende formalizar para llegar a una estructura matemática que sea incluida dentro de las existentes.

En el capítulo 3 exponemos la idea de estructura matemática y de estructura lógica que propone Béziau y criticamos tales nociones. Proponemos la definición de *categoría concreta*, que es la definición categórica de estructura matemática, como el punto de partida óptimo para las preguntas planteadas desde su postura.

Por último en el capítulo 4 exponemos el trabajo que se ha hecho en Lógica Algebraica Abstracta Categórica y las nociones que han sido la base de tal propuesta que son la noción de *institución* y π-*institución*. En particular defendemos que la Lógica Algebraica Abstracta Categórica da una herramienta que resuelve muchos de los problemas planteados por el enfoque de la Lógica Universal como es el de saber qué tipo de estructura es un sistema lógico o qué relación guardan entre sí diversos sistemas, y se ha desarrollado con anterioridad a la propuesta de Jean-Yves Béziau.

Capítulo 1

La idea de Universalidad

El inicio de las relaciones entre álgebra y lógica en lo que conocemos como lógica algebraica, se da con el trabajo de Boole ([Boo58]).[1] Sin embargo, el uso de sus métodos en lógica y el surgimiento de ciertos sistemas lógicos, se han visto como trabajos que implican distintos proyectos para el desarrollo de la lógica.

Uno de los sistemas que más frecuentemente se confronta con el trabajo de Boole es el propuesto por Frege ([Fre72]). De aquí que generalmente se hable de una tradición Boole-Schröeder-Tarski y otra Frege-Russell. No obstante que la idea de una disputa Frege-Boole es una idea falsa – el trabajo de Frege es posterior al de Boole y él nunca estuvo interesado en discutir con Frege, es más bien éste último el que quería deslindarse del trabajo de Boole – es importante notar lo que se dirime detrás de tal confrontación en tanto que

[1] También es usual encontrar a Tarski como iniciador de esta área en tanto que es el primero en proponer una manera de relacionar las álgebras booleanas con el cálculo de predicados. Sobre esto se comenta en el capítulo 2.

estas ideas iluminan parte del desarrollo de la lógica algebraica y parecen seguir teniendo vida en el papel que pueda jugar el álgebra dentro de la lógica o el papel de la lógica algebraica misma dentro del desarrollo de las lógicas actuales, en particular en algunas propuestas que intentan construir una teoría general de las lógicas.

Un cambio importante para el desarrollo de la lógica es aquel que representa el paso de la lógica de predicados a la teoría cuantificacional, dado por el trabajo de Frege. En [vH67], van Heijenoort hace énfasis en una diferencia que Frege mismo establece entre su sistema y el de Boole: su lógica, a diferencia de la desarrollada por Boole, no es un *calculus ratiocinator* o no meramente un *calculus ratiocinator*, sino una *lingua characterica*, [2] refiriéndose a la distinción que Leibniz tenía en mente para la creación de una lógica matemática.

Jean van Heijenoort señala que con esta distinción Frege intenta dar un carácter universal a su proyecto de lógica. Tal *universalidad*, es en primera instancia, la universalidad que la teoría de cuantificación tiene en su vocabulario y que falta en el cálculo proposicional. Para Frege, el trabajo desarrollado por Boole es una lógica abstracta: las fórmulas de un lenguaje lógico son reducidas a sus valores de verdad, en cambio, con la introducción de variables predicativas, variables, y cuantificadores las fórmulas pueden tener significado.

Sin embargo lo importante del señalamiento de van Heijenoort es que hace notar otra cara de la universalidad que implica el proyecto de Frege que se juega en el dominio de cuantificación supuesto. Para Frege, los cuantificadores

[2] Artículo citado en [Hin97].

corren sobre todos los objetos, en tanto que en los sistemas de Boole, De Morgan etc. tal dominio puede ser cambiado. En este sentido, el sistema de Russell en [WR90], no obstante que corre sobre tipos estratificados, sigue siendo fijo.[3]

Esto llevó a diferentes respuestas en las tradiciones que representan tales trabajos en cuestiones metalógicas. Por ejemplo, la respuesta a si un sistema lógico es completo, en un lado (Frege-Russell) era, *experimental*, nota van Heijenoort utilizando una expresión de Herbrand. Del otro lado, Löwenheim retomando la escuela de Boole nos lega su famoso teorema[4] fruto de la libertad de poder cambiar de dominio de cuantificación.

Ahora bien, no obstante que en los trabajos de Skolem ([Sko70]), Löwenheim ([Löw67]) y Herbrand ([Her68]) se da la unión de estas tendencias, es decir, que históricamente ambos proyectos terminan complementándose; para algunos por los trabajos ya mencionados para otros por los trabajos de Henkin ([Hen56, HMT85]); se sigue manteniendo la distinción entre dos tipos de trabajos lógicos. De forma maniquea, esta distinción se puede caracterizar mediante el ejercicio de una lógica abstracta sin significado, y una lógica más natural, apegada a una idea intuitiva de su uso en un lenguaje natural.

[3]La necesidad de que tal dominio fuera único no tiene una motivación lógica, y existen diversas explicaciones a este respecto. Van Heijenoort señala que es debido a la ontología de Frege: sólo existen objetos y funciones, y nada debe quedar fuera del sistema de la lógica. Hintikka ([Hin97]) señala que para Frege sólo hay un posible *Begriffsschrift* en tanto que sólo existe un tipo de pensamiento humano que debe reflejar. Sin embargo esta discusión no es importante para la presente exposición.

[4]Teorema de Löwenheim-Skolem: Si un conjunto Σ de sentencias de L tiene un modelo infinito, entonces para cada cardinal $\kappa \geq |L| + \omega$ tiene un modelo de cardinalidad κ.

1.1. Dos proyectos de lenguaje universal

Otra característica por la que se ha diferenciado a estas dos tendencias es el papel que se le asigna a la lógica dentro de las diversas áreas de las matemáticas, en particular con respecto al álgebra y a su interrelación. Un ejemplo de ello es el señalamiento que hacen Dunn y Hardegree: 'The divergences between the two fields (algebra and logic) was in part a matter of attitude. Thus Boole, following in the tradition of Leibniz, wanted to study the mathematics of logic, whereas the aim of Frege, Whitehead and Russell was to study the logic of mathematics' ([DH01]).[5]

Comúnmente se dice que tal diferencia en la visión de las matemáticas con respecto a la lógica, está alimentada por la ya citada distinción que establece Leibniz con miras al desarrollo de una lógica matemática. Sin embargo, se debe notar que tal distinción, a la luz de su motivación histórica, no contiene en sí una visión que determine cierto papel a la lógica dentro de las matemáticas o viceversa.

Antes bien, la idea de universalidad que está detrás de esta distinción es algo que podemos ver no sólo en Leibniz sino en los filósofos de su tiempo, más aún, esta idea es compartida por el proyecto de la lógica de Leibniz y por el proyecto del álgebra abstracta, ambos en su espíritu más ilustrado.

Leibniz en su *Ars Combinatoria* se propuso la tarea de encontrar un alfabeto del pensamiento humano con el cual se pudiera, por medio del arte

[5]La diferencia entre estas dos áreas (algebra y lógica) era en parte una cuestión de actitud. Así, Boole, siguiendo la tradición de Leibniz, quería estudiar las matemáticas de la lógica, en tanto que el objetivo de Frege, Whitehead y Russell era estudiar la lógica de las matemáticas.

combinatoria, dar cuenta de todo lo pensable, con lo que el razonamiento quedaría reducido a una operación cuasi-mecánica. En esta tarea, se debía dar seguridad de que tal alfabeto fuera completo en el sentido lógico es decir, que el procedimiento elegido nos diera efectivamente todas las combinaciones posibles. Esta preocupación es la que dió lugar a la búsqueda de una buena notación para este tipo de descubrimientos, cosa que no podía provenir tan sólo de una *characteristica universalis* sino que debían conocerse bien los símbolos para las nociones que se tomarían como no analizables.

Kneal y Kneal ([KK86]) hacen notar al respecto, que Leibniz en algunas obras se pronunciaba por el álgebra como el modelo a seguir en este proyecto, en otras mencionaba que debía ser como el alfabeto chino. El propósito principal era, en todo caso, que una gramática construida filosóficamente facilitaría el razonamiento dando el marco para un *calculus ratiocinator*, es decir, para este método cuasi-mecánico de trazar conclusiones.

Es interesante señalar que Leibniz estaba interesado en que se hiciera una enciclopedia ya que pensaba que la colección sistemática del conocimiento ayudaría a crear su *characteristica universalis*. En este tiempo, el proyecto ilustrado de la enciclopedia, sólo lo ayudó en concebir que el conocimiento podía organizarse en un sistema deductivo.

No obstante, aquellos que intentaron llevar a cabo este proyecto –una enciclopedia que recogiera todo el saber humano– quienes crearon la *Encyclopédie* tenían asignado este mismo papel al lenguaje formal del álgebra. Esto no sólo por el carácter universal que se pretendía dar al álgebra que se desarrollaba en esta época, que es la semilla de lo que se autodenominó un álgebra moderna o un *algébre nouvelle*; sino por los fines para los que se quería desarrollar tal formalismo.

La distinción que D'Alembert plantea –y con él gran parte de los matemáticos iluministas– en la entrada de *Algébre* ([DBdlLC84]) entre dos especies de álgebra: la numeral (*numérale ou vulgaire*) y la literal (*littérale ou spécieuse, ou la nouvelle Algébre*) es un eco perfecto de la distinción establecida antes: se busca el lenguaje formal en el que se pueda representar un problema independientemente de su naturaleza.

El álgebra numeral o vulgar es aquella de los antiguos algebristas, que no tenía lugar más que para la resolución de cuestiones aritméticas. La cantidad buscada era representada por cualquier letra, pero todas las cantidades dadas eran expresadas en número. El álgebra literal o aparente o la nueva álgebra es aquella donde las cantidades dadas, así como las desconocidas son expresadas o representadas generalmente por letras del alfabeto.

El álgebra aparente no nació como la numeral, tiene un tipo distinto de problemas. Las letras usadas en el álgebra representan cada una separadamente líneas o números dependiendo de si el problema es aritmético o geométrico, y puestos juntos representan el producto de planos, sólidos y de potencias más elevadas. Es decir, se está en la búsqueda de la definición de nuevas operaciones hechas en un lenguaje nuevo: el del álgebra aparente.

Este lenguaje debía servir dentro de los diversos problemas que plantea la matemática, sin embargo autores como Condillac tenían en mente el poder aplicar este formalismo a todo problema humano:

> Les mathématiques sont un science bien traitée dont la langue est l'álgebre (...) Voilá ce que je me propose. Ainsi les mathématiques, dont je traiterai, sont dans cet ouvrage un objet subor-

> donné á un objet bien plus grand. Il s'agit de faire voir comment on peut donner á toutes les sciences cette exactitude qu'on croit être le partage exclusif des mathématiques ([dC98]).[6]

El caso de Condillac representa el extremo del proyecto ilustrado del álgebra, sin embargo en matemáticos como Lagrange, este mismo espíritu está presente en la intención de convertir las ecuaciones de la mecánica analítica al lenguaje del álgebra:

> On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expofe ne demandent ni conftructions, ni raifonnemens géométriques ou méchaniques, mais fuelement des opérations algébriques, affujetties á une marche réguilere & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyfe, verront avec plaifir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, & me fauron gré d'en avoir étendu ainfi le domaine ([Lag88]).[7]

Podemos ver, entonces, que la distinción leibniziana responde a cierta

[6]Las matemáticas, cuyo lenguaje es el álgebra, son una ciencia muy trabajada (...) Es esto lo que me propongo. Pues las matemáticas tal como las trataré en esta obra son un objeto subordinado a un objeto mucho más grande. Se trata de mostrar cómo se puede dar a todas las ciencias esta exactitud que creemos es la propiedad exclusiva de las matemáticas.

[7]En esta obra no se hallará ninguna figura. Los métodos que en ella expongo no requieren ni construcciones ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino solamente operaciones algebraicas, sujetas a un desarrollo regular y uniforme. A quienes les gusta el análisis, verán con placer a la mecánica volverse una nueva rama, y sabrán agradecerme haber extendido así la materia.

idea de universalidad que era propia de la época y que llevó a la búsqueda de ese lenguaje formal que pudiera ser una lengua común para la resolución de problemas. No tiene que ver en principio con el establecimiento de un lugar determinado para la lógica dentro de las matemáticas o viceversa. Esta última interpretación está ligada con la recepción que ha tenido tal idea y no con ella misma ni con un problema de la época.

Las posturas que estos autores han emitido acerca del papel que tiene, o puede tener la lógica dentro del conjunto de las matemáticas responden más bien a otro tipo de ideas.[8] Sin embargo, esta preocupación sigue vigente, cuando se plantea la pregunta por el papel que debe jugar la lógica dentro de las diversas áreas matemáticas y la preocupación de que sea una rama dependiente de una o más de estas áreas, o bien la preocupación inversa.

[8]Ejemplo de ello son las siguientes citas de Boole y Halmos:

> Tomando como fundamento este principio general, me propongo establecer el Cálculo de la Lógica para el que reclamo un lugar entre las formas conocidas del Análisis Matemático, prescindiendo del hecho de que, en la actualidad, sea único tanto por su objeto como por sus instrumentos ([Boo79]).

> La física no es la única fuente externa de las teoría matemáticas; otras disciplinas (como la economía y la biología) pueden jugar un rol similar. Una adición reciente, y tal vez un tanto sorprendente, a esta colección es la lógica formal; la rama de las matemáticas puras que se ha decantado de esta será llamada aquí *Logica algebraica*.
> La lógica algebraica comienza desde ciertas consideraciones lógicas especiales, abstrae de ellas, la coloca en un contexto algebraico, y vía la generalización hace contacto con otras ramas de las matemáticas (como la topología y el análisis funcional.) ([Hal56]).

Es importante mencionar no obstante, que tal tipo de ideas pudo llevar a postular diferentes tipos de sistemas. Dunn y Hardegree ([DH01]) señalan que la distinción entre las dos tradiciones en este punto (sus sistemas) es tan sutil que no pudo ser vista hasta que Curry ([Cur77]) contó con los elementos suficientes para hacer la distinción entre un sistema aseverativo y un sistema relacional o bien uno ecuacional. Esta distinción, tal vez ahora más familiar, puede darse en términos informales como sigue.

Curry, da una definición general de sistema, como una cierta clase conceptual de objetos llamados objetos formales, y una clase conceptual de predicados, llamados predicados básicos, que tienen asociado un número natural llamado su grado. Llama enunciados elementales a aquellos enunciados que aseveran que un predicado básico se satisface para una secuencia ordenada de objetos formales en un número igual a su grado:

$$\Phi(a_1, ..., a_n)$$

Dada esta definición, podemos decir, de manera general, que un sistema en el que hay un sólo predicado que es una relación (binaria) se llama un *sistema relacional (binario)*. Si la teoría del sistema es tal que la relación es reflexiva y transitiva, entonces el sistema se llama *cuasi ordenado*, si la relación tiene las propiedades de la igualdad se llama un *sistema ecuacional.*

Un sistema en el que sólo existe un predicado y es unario se llama de tipo *aseverativo* o *logicista*. Se le da tal nombre por la prevalencia de este sistema dentro de importantes estudios lógicos.

Para la operación unaria se utiliza la operación $\vdash$, es decir, los enunciados elementales serán de la forma:

$$\vdash X$$

donde X es un objeto formal. El signo $\vdash$ es llamado signo de aserción y usualmente un sistema arbitrario puede ser reducido a un sistema aseverativo.

Esta distinción ha dado dos maneras de acercarse a casi cualquier lógica (mediante un sistema asertivo o uno ecuacional o relacional). El método de Tarski-Lidenbaum nos ha dado una manera de relacionar este tipo de sistemas,[9] y es un trabajo que une estos dos enfoques y que da lugar a uno de los problemas más importantes en lógica algebraica. Cuando Curry establece esta distinción, la ejemplifica con lo que considera los sistemas relacionales más importantes hasta esos años (1963) ([Cur77, p.66]).

Curry se refiere a las obras de Tarski en álgebras cilíndricas y los trabajos de Halmos en álgebras poliádicas ([Cur77]). Si añadimos a estas obras los trabajos de Rasiowa ([Ras74]), Sirkoski ([RS63]) y de Wajsberg (obras que no comentaremos aquí), tenemos un buen panorama de lo que fueron los inicios de la lógica algebraica. Notemos además que, en particular, las álgebras cilíndricas de Henkin, Monk y Tarski ([HMT85], HMT en adelante) y las poliádicas de Halmos ([Hal54, Hal56]), se desarrollan a partir del trabajo de Boole enriqueciéndolo con operadores de cuantificación, en este sentido, podemos verlos también como trabajos que han unido (nuevamente) los resultados importantes de las tradiciones antes mencionadas.

[9] Ver capítulo 2.

1.2. Piedras de toque en la lógica algebraica

El sistema que Boole presentó en [Boo58] era de fácil manipulación pero presentaba algunos defectos.[10] En el curso de la mitad del siglo después de la publicación de tal obra, estos inconvenientes fueron removidos por sus seguidores. Jevons comenzó esta reforma en 1864 en [Jev64], en donde sugiere el uso del símbolo $+$ en el sentido del o inclusivo. La forma actual de las 'álgebras booleanas' es una herencia de E.V. Huntington que desarrolló en [Hun04].

Recordemos entonces la definición de álgebra booleana actual que heredamos de Huntintong:

Podemos construir lo que es un álgebra booleana partiendo de una latiz que es un conjunto parcialmente ordenado en donde cada subconjunto de dos elementos tiene tanto supremo como ínfimo. Entonces, dado un orden parcial $\langle X, \leq \rangle$ definimos $\vee$ y $\wedge$ como sigue:

Para cada dos elementos $x, y \in X$ $x \vee y = sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = inf\{x, y\}$

Dada una latiz L y para cualesquiera elementos $x, y, z \in L$; si L cumple las siguientes identidades:

L_1. $x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x$

L_2. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

L_3. $(x \vee y) \wedge y = y \qquad (x \wedge y) \vee y = y$

[10] No se podía escribir $x + y$ a menos que se supiera el valor de verdad de la ecuación $xy = 0$, así como algunos defectos de rigor como el uso de la letra v para la expresión de proposiciones existenciales, que no se admitieran coeficientes numéricos que no fueran el 0 y el 1, y el uso de la operación de división al cual no se le asigna un significado constante en lógica ([KK86]).

y, si además cumple ser complementada, es decir, si tiene un elemento máximo 1 y un elemento mínimo 0 y para cada $x \in L$, existe $y \in L$ tal que :

L_4. $x \vee y = 1 \;\; y \;\; x \wedge y = 0$

(tal elemento y se llama el complemento de x y es denotado por x') y distributiva:

L_5. $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$(x \wedge y) \vee z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

lo cual obliga a ser único al complemento; entonces tenemos un álgebra booleana. Alternativamente podemos decir que B una estructura algebraica:

$$B = \langle B, \vee, \wedge, *, 0, 1 \rangle$$

donde $*$ es una operación unaria llamada de complementación, y $\vee, \wedge$ satisfacen $L_1 - L_5$, es un álgebra booleana ([KK86, BS97]).

1.2.1. Henkin, Monk y Tarski

Como mencionamos, la construcción de álgebras cilíndricas comienza con la finalidad de introducir la cuantificación explícita dentro de las álgebras booleanas mediante la introducción de operaciones de cilindrificación c_κ. La definición de álgebra booleana de la que parte el trabajo de HMT es ligeramente distinta a la dada anteriormente, pero son equivalentes. Un álgebra booleana es una estructura algebraica $\mathfrak{U} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ en donde $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias y $-$ es una operación unaria sobre A, mientras que como es costumbre 0, 1 son elementos distinguidos de A y que satisfacen bien conocidos postulados. Sin embargo la versión que presentan aquí HMT tiene

algunas modificaciones sugeridas por [Ber50] –para mayores detalles véase [HMT85, pp.161 y ss.]–, y es la siguiente:
Para cualesquiera $x, y, z \in A$:

$$(B_0) \quad x + y = y + x, \qquad x \cdot y = y \cdot x \tag{1.1}$$

$$(B_1) \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z), \qquad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \tag{1.2}$$

$$(B_2) \quad x + 0 = 0, \qquad x \cdot 1 = x \tag{1.3}$$

$$(B_3) \quad x + -x = 1 \qquad x \cdot -x = 0 \tag{1.4}$$

Se define un álgebra cilíndrica de dimensión α donde α es cualquier ordinal como una estructura algebraica:

$$\mathfrak{U} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1, c_\kappa, d_{\kappa,\lambda} \rangle_{k,\lambda < \alpha}$$

tal que, 0, 1 y $d_{\kappa\lambda}$ son elementos distinguidos de A llamados elementos diagonales (para todo $\kappa, \lambda < \alpha$), + y $\cdot$ operaciones binarias sobre A, y las operaciones c_κ, con $c_\kappa : A \to A$, llamadas cilindrificaciones, tales que los siguientes postulados se satisfacen para cualesquiera $x, y \in A$ y cualesquiera $\kappa, \lambda, \mu < \alpha$:

- (C_0) La estructura $\mathfrak{U}_\uparrow = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ es un álgebra booleana
- (C_1) $c_\kappa 0 = 0$
- (C_2) $x \leq c_\kappa x$ $(i.e.\ x + c_\kappa x = c_\kappa x)$
- (C_3) $c_\kappa(x \cdot c_\kappa y) = c_\kappa x \cdot c_\kappa y$
- (C_4) $c_\kappa c_\lambda x = c_\lambda c_\kappa x$

- (C_5) $d_{\kappa\kappa} = 1$
- (C_6) *Si* $\kappa \neq \lambda, \mu,$ *entonces* $d_{\lambda\mu} = c_\kappa(d_{\lambda\kappa} \cdot d_{\kappa\mu})$
- (C_7) *Si* $\kappa \neq \lambda$ *entonces,* $c_\kappa(d_{\kappa\lambda} \cdot x) \cdot c_\kappa(d_{\kappa\lambda} \cdot -x) = 0$

Notemos que este tipo de formulación, al igual que el de las álgebras poliádicas que se definirán adelante, supone un conjunto contable de variables.

Otra fuente más concreta de álgebras cilíndricas es la de las álgebras cilíndricas de conjuntos que Tarski introdujo como una contraparte algebraica de la semántica de lógica de primer orden.

No obstante que estas álgebras son en gran medida equivalentes en muchos resultados con las álgebras poliádicas, las primeras han representado una fuente muy amplia de problemas para la lógica algebraica, como se expone en el capítulo 2 y en el apéndice A.

1.2.2. Halmos

Utilizando también como base un álgebra booleana, Halmos desarrolló un formalismo semejante a las álgebras cilíndricas, y este fue el de las álgebras poliádicas, que definimos a continuación.

Sea α un ordinal arbitrario. Un *álgebra poliádica* de dimensión α es una estructura algebraica:

$$\mathfrak{A} = \langle A, +, -, \cdot, 0, 1, c_\Gamma, s_\tau \rangle_{\Gamma \subseteq \alpha, \tau \in T}$$

donde $T = \{\tau | \tau : \alpha \to \alpha\}$, $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias sobre A, $-$ y c_Γ son operaciones unarias sobre A, $0, 1 \in A$ y los siguientes postulados son satisfechos para cualesquiera $x, y \in A$, cualesquiera $\Gamma, \Delta \subseteq \alpha$ y cualesquier $\sigma, \tau \in T$:

- (P_0) La estructura $\mathfrak{U}_{\uparrow} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ es una álgebra booleana
- (P_1) $c_\Gamma 0 = 0$
- (P_2) $x \leq c_\Gamma x$
- (P_3) $c_\Gamma(x \cdot c_\Gamma y) = c_\Gamma x \cdot c_\Gamma y$
- (P_4) $c_0 x = x$
- (P_5) $c_\Gamma c_\Delta x = c_{\Gamma\cup\Delta} x$
- (P_6) $s_{\alpha\uparrow Id} x = x$
- (P_7) $s_{\sigma\circ\tau} x = s_\sigma s_\tau x$
- (P_8) $s_\sigma(x + y) = s_\sigma x + s_\sigma y$
- (P_9) $s_\sigma(-x) = -s_\sigma x$
- (P_{10}) Si $(\alpha\tilde{\ }\Gamma) \uparrow \sigma = (\alpha\tilde{\ }\Gamma) \uparrow \tau$, entonces $s_\sigma c_\Gamma x = s_\tau c_\Gamma x$
- (P_{11}) Si $(\tau^{-1} \cdot \Gamma) \uparrow \tau$ es uno a uno, entonces, $c_\Gamma s_\tau x = s_\tau c_\Delta x$, con $\Delta = \tau^{-1} \cdot \Gamma$

donde el subíndice $\alpha \uparrow Id$ significa que se toma el dominio de la función identidad restringido a α, y $\alpha\tilde{\ }\Gamma$ significa la diferencia de α y Γ, y τ^{-1} es la inversa de τ. Notemos que los elementos de T son permutaciones de los elementos de un conjunto de cardinalidad α, por lo que son funciones que tienen inverso.

Con lo que tenemos la formalización alternativa a las álgebras cilíndricas para definir un cuantificador en un álgebra booleana. Las relaciones que se establecen entre las álgebras cilíndricas y las poliádicas fueron detalladas también en [HMT85].

Notemos entonces que esta diferencia entre sistemas nos da dos herramientas para abordar el estudio de diversos sistemas lógicos, y que sería incorrecto juzgar que responden simple y sencillamente a una diferencia de enfoques. Como se mencionó la lógica algebraica ha dado medios de relacionar estos dos tipos de construcciones y con ello brinda información que no tenemos dentro de ninguno de estos enfoques por separado como sucede en la aplicación del método de Tarski-Lindenbaum (Ver capítulo 2). Sin embargo, esta diferencia entre sistemas sigue mencionandose como una diferencia entre dos tradiciones. Por un lado, una tradición cuyos formalismos ayudan poco al estudio de lógicas existentes y por otro, una tradición que se preocupa más por el carácter no-formal y lingüístico de la lógica.

Capítulo 2

Nuevas lógicas, nuevos problemas

En el capítulo anterior señalamos las constantes más relevantes en las críticas que se han hecho a la tradición lógica que privilegia el uso de herramientas algebraicas para la formalización de sistemas o su estudio. Estas constantes siguen vigentes ahora en el nuevo contexto de un patente crecimiento de los sistemas lógicos existentes. En este capítulo nos interesa ver el papel que juegan en la propuesta de la lógica universal. Para ello veamos primero un esbozo de lo que es ésta propuesta.

2.1. Lógica Universal

El término *Lógica Unviersal*, ideado por J.Y. Béziau, aparece por primera vez en 1995 ([Béz95c, Béz95a]). Éste, reemplaza al término *lógica abstracta* ([Béz94]), que fue una idea temprana acerca de lo que debería ser un estudio de los sistemas lógicos en abstracto. Ambos términos fueron acuñados en analogía con términos de origen algebraico. El último en analogía a la definición de álgebra abstracta dada por Birkhoff en [Bir40],[1] el primero en analogía al álgebra universal.

Así, una lógica abstracta era pensada como una relación de consecuencia sobre un conjunto indeterminado ([Béz01]), y si el álgebra universal tiene como objeto el estudio de las estructuras algebraicas, la lógica universal tendría como objeto el estudio de las estructuras lógicas.

Podemos dar una visión de lo que es esta tendencia mediante la siguiente caracterización que Béziau ha dado en sus manuales [BCL05, BHC$^+$07]:

> What is universal logic?
>
> In the same way that universal algebra is a general theory of algebraic structures, universal logic is a general theory of logical structures. (...) Universal logic is not a new logic, it is a way of unifying this multiplicity of logics by developing general tools and concepts that can be applied to all logics.
>
> One aim of universal logic is to determine the domain of validity of such and such metatheorem (...) and to give general formulations of metatheorems. (...) Universal logic can also be seen as a toolkit for producing a specific logic required for a given situation, (...)
>
> Universal logic helps to clarify basic concepts explainig what is an extension and what is a deviation of a given logic, what does

[1] Damos a continuación la idea de álgebra abstracta o simplemente álgebra de Birkhoff: Un *álgebra* A es un par $\langle S, F\rangle$ donde S es un conjunto de elementos no vacío, y F es un conjunto dado de operaciones f_α en donde para cada α se establece $f_\alpha : S^{n(\alpha)} \to S$, para algún entero finito no negativo apropiado $n(\alpha)$. En particular, por ejemplo, para el caso de grupos, tal operación satisface los axiomas de grupo [Bir40, p.132].

> it mean for a logic to be equivalent or translatable into another one (...).[2]

Propone que una teoría general de las lógicas debe ser una teoría formal que no dependa de su objeto. En este sentido, menciona a Tarski como el iniciador de una teoría general de las lógicas con el desarrollo de su teoría de la consecuencia lógica como un operador que se puede caracterizar por medio de algunos axiomas básicos sin importar la lógica que se esté tratando.

Este operador es lo que se conoce como un operador de consecuencia finitario. Consideremos para algún conjunto contable A, funciones

Cn: $\wp(A) \longrightarrow \wp(A)$

tales que satisfacen para cada $X \subseteq A$,

1. $X \subseteq Cn(X)$

2. $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$

[2]Del mismo modo que el álgebra universal es una teoría general de las estructuras algebraicas, la lógica universal es una teoría general de las estrucutras lógicas. (...) La lógica universal no es una nueva lógica, es una forma de unificar la multiplicidad de lógicas mediante el desarrollo de herramientas generales y conceptos que puedan ser aplicables a todas las lógicas.

Una de las metas de la lógica unviersal es determinar el dominio de validez de tal y tal metateorema (...) y dar una formulación general de ciertos metateoremas. (...) La lógica universal también puede ser vista como una caja de herramientas para producir una lógica específica requerida para una situación dada, (...)

La lógica universal ayuda a clarificar conceptos básicos explicando qué es una extensión y que es una desviación de una lógica dada, qué significa para una lógica que pueda ser traducida en otra o ser equivalente a otra lógica(...).

3. $Cn(X) = \bigcup\{Cn(Y) : Y \subseteq X, Y\, finito\}$

   La condición 3 es llamada la condición finitaria, que implica la propiedad débil de monotonía de Cn, es decir:

4. Si $X \subseteq Y$, entonces $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$

El operador de consecuencia no necesita definirse sobre un conjunto contable y es cualquier función $Cn : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$ que satisface las condiciones 1 y 2. Si además satisface 3 el operador de consecuencia se denomina finitario ([FJP03]). Tarski añade además algunos axiomas que ya no son válidos para cualquier disciplina deductiva, sino sólo para aquellas que presuponen el cálculo de proposiciones ([Tar28, Tar30, Tar35]).

La importancia de las propiedades que determina este operador es que son el punto de partida para la investigación de propiedades estructurales que sean aplicables a diversas lógicas. Esto ha sido así desde el inicio de la teoría de modelos abstracta, hasta la propuesta de la lógica universal. En particular, el enfoque de la lógica universal intenta ver en qué medida este tipo de propiedades pueden determinar a un sistema lógico como una estructura matemática, además de clasificar las lógicas que denomina 'normales'.[3]

No se busca saber si un sistema lógico tiene una estructura de anillo conmutativo con unidad bajo su representación como un álgebra o si tiene algún orden bajo alguna relación o es algún tipo de espacio bajo cierto operador. Se busca encontrar qué tipo de estructuras son las estructuras lógicas de manera que se logre una formalización de una estrucutra que no sea de ninguno de los tipos antes mencionados y que deba ser incluida dentro el catálogo de es-

[3] Es decir, las lógicas que cumplen reflexividad monotonía y transitividad.

tructuras matemáticas existentes ([Béz02, Béz00]). Y este es el punto nodal de su propuesta: determinar el tipo de estructuras que son las estructuras lógicas.

Ahora bien como se mencionó en la introducción, para Béziau lo que llamamos lógica algebraica no es una herramienta que sea lo suficientemente general en su análisis como para abarcar las diversas lógicas existentes y para ser de ayuda en esta tarea. La crítica al uso de este tipo de herramientas constituye el punto de partida de su propuesta y en gran medida una de las motivaciones principales para el surgimiento de la misma.

2.1.1. El papel de la lógica algebraica

¿En qué radica la crítica al trabajo que se hace en lógica algebraica? Su crítica es de dos tipos. Por un lado critica la 'calidad' del análisis que ofrece ésta área y por otro el alcance que puede tener. Antes de presentar éstas críticas, debemos tener en cuenta que Béziau restringe lo que debe entenderse por lógica algebraica. Para él, bajo este nombre se han agrupado trabajos que hacen un estudio de las lógicas que involucran conceptos algebraicos, o bien simplemente los trabajos hechos desde la lógica polaca. Pero eso es incorrecto y lleva a confusiones ([Béz00]). Para Béziau, por lógica algebraica debemos entender 'el estudio de las estructuras de tipo Tarski-Lindenbaum'[Béz00].

Recordemos la construcción a la que el autor intenta referirse. Ésta álgebra se da definiendo una relación $\equiv$ sobre un conjunto F de fórmulas del cálculo proposicional dada por:

$$\varphi \equiv \psi \textit{ si y sólo si } \vdash \varphi \to \psi \textit{ y } \vdash \psi \to \varphi \tag{2.1}$$

que es una relación de equivalencia sobre F. Ahora, dado $\varphi \in F$ denotamos con $[\varphi]$ su clase de equivalencia bajo $\equiv$, esto es:

$$[\varphi] = \{\psi \in F : \varphi \equiv \psi\}$$

Sea

$$F/\equiv\, = \{[\varphi] : \varphi \in F\}$$

Definimos una relación $\leq$ sobre $F/\equiv$ dada por

$$[\varphi] \leq [\psi] \;\; \textit{si y sólo si} \;\; \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

y tenemos el álgebra booleana llamada de Tarski-Lindenbaum, TL en adelante ([BS97]).

Podríamos denotar por $\boldsymbol{TL} = \langle F, \equiv \rangle$ lo que Béziau llama estructuras de tipo TL, donde F es un conjunto de fórmulas y $\equiv$ es la relación antes definida. Entonces

> If one considers algebraic logic as the study of this kind of structures, and this is probably the only rigorous way to use this terminology, it seems then that algebraic logic is too restricted for developing a general theory of logics ([Béz00]).[4]

Partir de tal visión de la lógica algebraica es, sin embargo, desafortunado ya que restringe el campo de lo que es este ejercicio de manera innecesaria.

[4]Si se considera la lógica algebraica como el estudio de este tipo de estructuras (TL), y esta es probablemente la única manera posible usar este término rigurosamente, parece entonces que la lógica algebraica es demasiado restingida para desarrollar una teoría general de las lógicas.

Lo que conocemos como las álgebras de TL es *un* método que relaciona álgebras de lógicas con sistemas lógicos. Intuitivamente, decir que una lógica es *algebraizable* es decir que esta lógica puede ser relacionada con algún tipo de estructura algebraica mediante algún tipo de relación. En este sentido, el método particular TL ha jugado un papel muy importante dentro del desarrollo de la lógica algebraica, sin embargo esta área dista mucho de ser únicamente el estudio de tal método.

Tradicionalmente la lógica algebraica se concentró en la investigación algebraica de clases particulares de algebras de lógicas, pudieran éstas o no ser relacionadas con algún sistema aseverativo por medio del método de TL ([FJP03]).

Las álgebras cilíndricas, poliádicas y de Wajsberg[5] fueron delineadas antes de que éste método fuera aplicado por primera vez. Por el contrario, las álgebras de Heyting ([Bor94, DH01]), parecen ser el primer ejemplo de una de las álgebras de la lógica que fueron identificadas por la aplicación de TL a un sistema aseverativo conocido, a saber, el cálculo proposicional intuicionista ([Bro75, Gab81]).

De modo que la independencia de este tipo de álgebras del método citado es evidente. Es importante señalar en este sentido que el estudio de los procesos por los cuales una clase de álgebras puede ser asociada a una lógica arbitraria es uno de los principales temas de investigación dentro de ésta área.

Además debemos notar que las álgebras cilíndricas o las poliádicas no han sido sólo construcciones que historicamente resolvieron el problema de

[5] Ver apéndice B.

incluir la cuantificación explícita dentro de los modelos algebraicos, sino que son un objeto de estudio en sí mismas. Un ejemplo de ello es la utilidad que ha tenido el uso de las álgebras cilíndricas y su papel en el desarrollo de formalismos como las álgebras cilíndricas modales ([Ven95]).

Las álgebras cilíndricas también dieron pie al surgimiento de uno de los problemas que tal vez sea el que menos se restringe al estudio del método TL. Nos referimos al problema de representación.[6]

Ahora bien, la crítica que Béziau hace con respecto a la extensión o el alcance que tiene este tipo de métodos tuvo como motivación el mostrar que el tipo de formalismos dados desde la lógica algebraica eran carentes de significado, o abstracciones que en su complejidad no capturaban un ejercicio más natural de las lógicas, muy en el espíritu de las críticas hechas por Frege a Boole [Béz93, Béz96b, Béz99, Béz00].

En este sentido, Béziau trabaja en dar contraejemplos de lógicas que no puedan ser capturadas por estos formalismos y en 1997 ([Béz97]), se pregunta ¿Existen lógicas que sean algebraizables mediante una relación de congruencia diferente a la que propone el método TL? Blok y Pigozzi, entre otros, se habían preguntado esto mismo en 1986 en su artículo [BP86].

La respuesta en ambos casos es: sí, existen lógicas que son algebraizables y a las que no se puede aplicar el método de TL. Sin embargo, el marco de la pregunta hecha por Béziau presupone, como se mencionó, que el único método para algebraizar una lógica, es TL. Por ello, Béziau da como respuesta un ejemplo de este tipo de lógica, que es el sistema C_1 de da Costa[7] y

[6] Ver apéndice C.

[7] El problema de la algebraizabilidad de C_1 fue planteado por da Costa mismo casi desde la formulación de su sistema. Él desarrolló un método alternativo para algebraizar

propone un sistema alternativo: C_1^+ ([Béz95b]), que es algebraizable por TL. Blok y Pigozzi dieron un criterio por el cual podemos decir en sentido estricto cuándo una lógica es algebraizable o no, independientemente de que sea algebraizable por el método TL o por algún otro método. El punto importante para Béziau detrás de esta pregunta es el mostrar que existen lógicas que no son algebraizables mediante el método TL, y que sin embargo son susceptibles de ser vistas como una estructura.[8] En este sentido, Béziau toma como *el ejemplo* de los límites de esta área el hecho de que la lógica paraconsistente C_1 como es presentada por da Costa en [dC63] no es algebraizable ([Béz93, Béz97, Béz98, Béz00, Béz01]).

Los sistemas C son una familia de sistemas basados en la idea de permitir el uso de la lógica clásica en proposiciones 'normales' o consistentes pero no en el caso de las proposiciones 'abnormales' o inconsistentes. Esto lleva a la formulación de un operador $\circ$ para poder hacer esta división formal. '$\circ\varphi$' significa, intuitivamente 'φ es consistente'. Estos sistemas cumplen con una serie de condiciones básicas que damos a continuación ([CCIDo02]).

Sean $\mathcal{L}_{cl}^+ = \{\vee, \wedge, \rightarrow\}, \mathcal{L}_{cl} = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg\}$, y $\mathcal{L}_C = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \circ\}$

su lógica mediante lo que llama 'álgebras de Curry' ([dC66, dCBB95]). Tal construcción ha sido de utilidad en otro tipo de lógicas paraconsistentes ([AAN]). Mortensen, en [Mor80] prueba que en C_1 no se pueden establecer más relaciones de congruencia sobre el álgebra de fórmulas que no sean las triviales. Sin embargo, tal prueba no cuenta con un criterio de algebraizabilidad, pero fue hecha antes de que algún criterio fuera formulado.

[8] Béziau menciona que hay personas (no ofrece referencias al respecto) que piensan que las lógicas que no son algebraizables no son susceptibles de ser vistas como estructuras. Sin embargo, debemos notar que ésta idea no ha surgido desde el ejercicio de la lógica algebraica. Esto será mucho más claro en los siguientes capítulos.

Sea $\mathbf{HCL}^+$ un sistema estándar de tipo Hilbert que tiene MP como única regla de inferencia, y que es correcto y fuertemente completo para el fragmento $\mathcal{L}_{cl}^+$ de lógica proposicional clásica.
Se definen los siguientes sistemas en $\mathcal{L}_C$:

bC o **C** es el sistema que se obtiene de $\mathbf{HCL}^+$ adicionando los esquemas:

(t) $\neg\varphi \vee \varphi$

(c) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

(b) $\circ\varphi \rightarrow ((\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi)$

Ci es el sistema obtenido de **C** por la adición del esquema:

(i) $\neg \circ \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

Cia es el sistema obtenido de **Ci** por la adición del siguiente esquema:

(a) $\circ\varphi \wedge \circ\psi \rightarrow \circ(\varphi * \psi), \quad \text{con } * \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

Ahora para $\mathbf{L} \in \{\mathbf{C},\ \mathbf{Ci},\ \mathbf{Cia}\}$

Le es el sistema obtenido de **L** adicionando:

(e) $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

L1 es obtenido de **L** adicionando:

(1) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \circ\varphi$

L1e es el sistema que se obtiene adicionando (1) y (e).

El sistema **Cia1** es equivalente al sistema C_1 de da Costa ([dC74]. El papel de este contraejemplo no es el de dar un caso que invalide los resultados obtenidos mediante lógica algebraica en el estudio de otros sistemas lógicos (para lo cual sería suficiente), sino el de ser un caso en el que no podemos aplicar el método de TL. Entonces, como contraejemplo, es al menos uno muy particular,[9] y puede considerarse sin ninguna novedad ya que el hecho de que el método TL no es el único que puede dar algún tipo de estructura a un sistema lógico es algo que es sabido al menos desde la propuesta del criterio de algebraizabilidad de Blok y Pigozzi, y ya se tenían pruebas de la no-algebraizabilidad de C_1 por TL.[10]

La suposición de que el único método para relacionar sistemas lógicos con álgebras es TL parece estar detrás de muchos de los trabajos de Béziau. Por ejemplo, en [Béz98] intenta dar una prueba de que una lógica con negación paraconsistente no es algebraizable. Es fácil ver cómo esta idea es asumida aquí.

Dada una lógica $\mathcal{L} = \langle S, Cn \rangle$ donde S es un conjunto cualquiera, define una negación paraconsistente como un operador unario sobre S que cumple la siguiente condición:

$$\text{Existe } a \in S \text{ tal que } Cn\{a, \neg a\} \neq S$$

Para esta prueba establece el siguiente criterio de algebraizabilidad:

Criterio 2.1 *Una negación es algebraizable si dados $a, b \in S$, tales que $a \equiv b$ entonces $\neg a \equiv \neg b$. Esto es, una lógica es algebraizable si la equivalencia lógica es una congruencia*[11] *sobre su conjunto de formulas.*

De donde, si demuestra que la negación paraconsistente con $\neg(a \wedge \neg a)$ como teorema (lo que constituye una negación paraconsistente plena que es

[9]Podríamos mencionar que existen lógicas paraconsistentes que sí son algebraizables, como la lógica paraconsistente $P1$ ([LMS94]).

[10]Ver nota 8 de este capítulo.

[11]Una congruencia es una relación de equivalencia sobre el álgebra de fórmulas compatible con las operaciones lógicas. Esta idea se definirá formalmente más adelante.

la que utiliza el sistema de da Costa) no es algebraizable, entonces se seguirá que toda lógica que tenga tal negación no será algebraizable ([Béz98, p.137]).

Este criterio es sin embargo parcial o no es estricto. Del hecho de que no podamos establecer una ecuación del tipo (2.1) que sea una congruencia sobre el álgebra de fórmulas no se sigue necesariamente que la lógica en cuestión no sea algebraizable. Existen lógicas para las que esta ecuación no puede ser definida directamente sin que ello signifique que son no-algebraizables.

Un ejemplo muy claro es el sistema **R** de relevancia ([AB75]), en donde (2.1) no se puede establecer de manera directa en tanto que en esta lógica existen teoremas φ y ψ para los cuales la implicación $\varphi \rightarrow \psi$ no es un teorema. Sin embargo, es un sistema algebraizable de acuerdo al criterio que daremos a continuación.

2.1.2. Algebraizabilidad

La utilidad de un buen criterio de algebraizabilidad radica en que es éste el que nos mostrará los límites de aplicación de los métodos de la lógica algebraica. El hecho de mostrar una lógica que no es algebraizable no dice mucho de los alcances de estos métodos. Además resuelve el problema que representa saber cuándo podemos establecer que una lógica no es algebraizable en sentido estricto.

Un buen punto de partida para esto es el trabajo que Blok y Pigozzi han hecho al respecto.[12] Nos han dado un criterio y una condición suficiente para poder establecer este tipo de propiedades.

[12] En un sentido un poco distinto Andréka, Németi y Sain han introducido un proceso de algebraización mediante semánticas [AN94, ANS84, ANS93].

Este criterio para lógica proposicional es el siguiente: Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebraizable si éste tiene una semántica algebraica equivalente ([BP86]). Vayamos poco a poco para exponerlo. Para ello debemos dar primero algunas definiciones.

Definición 2.1 *Por un lenguaje proposicional se entenderá un conjunto $\mathcal{L}$ de conectivas proposicionales. Las $\mathcal{L} - fórmulas$ son construidas sobre el conjunto de variables proposicionales $p_0, p_1, \ldots$ usando las conectivas de $\mathcal{L}$. Se denota el conjunto de todas las fórmulas de $\mathcal{L}$ por $Fm_{\mathcal{L}}$, y es llamado el álgebra de fórmulas.*

Definición 2.2 *Un* sistema deductivo $\mathcal{S}$ *sobre $\mathcal{L}$ está definido por un conjunto (posiblemente infinito) de reglas de inferencia y axiomas.*[13] *Consiste de un par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas individuales, y se define por la condición: $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ si y sólo si ψ está contenido en el conjunto más pequeño que incluya a Δ unión el conjunto de todas las instancias de sustitución de los axiomas de $\mathcal{S}$, y sea cerrado bajo derivabilidad directa* [14] *mediante las reglas de inferencias de $\mathcal{S}$. La relación $\vdash_{\mathcal{S}}$ es llamada la relación de consecuencia de S.*[15]

---

[13]Por una regla de inferencia (finitaria) se entenderá un par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ donde Γ es un conjunto finito de fórmulas y φ una fórmula ([BP86]).

[14]Decimos que una fórmula ψ es directamente derivable de un conjunto Δ de fórmulas por la regla de inferencia $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ si existe una sustitución σ tal que $\sigma(\varphi) = \psi$ y $\sigma(\Gamma) \subset \Delta$, donde: $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\vartheta) : \vartheta \in \Gamma\}$ y σ está definida como sigue:
A partir de una asignación $\sigma : \{p_0, p_1 \ldots\} \to Fm_{\mathcal{L}}$ extendemos a una una función de sustitución: $\sigma : Fm_{\mathcal{L}} \to Fm_{\mathcal{L}}$ donde $\sigma(\varphi(p_0, \ldots, p_{n-1})) = \varphi(p_0/\sigma(p_0), \ldots, p_{n-1}/\sigma(p_{n-1}))$

[15]Usualmente denominamos a esta relación la relación de derivabilidad.

Ejemplos de la definición anterior son los siguientes:

El cálculo proposicional clásico:

$$CP = \langle \mathcal{L}_{CP}, \vdash_{CP} \rangle \text{ con } \mathcal{L}_{CP} = \langle \vee, \wedge, \rightarrow, \neg \rangle$$

como conjunto de axiomas:

$$A_{CP} = \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)),$$

$$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\}$$

y su conjunto de reglas de inferencia es:

$$R_{CP} = \{\langle \{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}, \beta \rangle\}$$

El sistema de relevancia **R**

$$\mathbf{R} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{R}}, \vdash_{\mathbf{R}} \rangle \text{ con } \mathcal{L}_{\mathbf{R}} = \langle \vee, \wedge, \rightarrow, \neg \rangle$$

su conjunto de axiomas es:

$$A_{\mathbf{R}} = \{p \rightarrow p,$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q),$$

$$(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q),$$

$$(p \wedge q) \rightarrow p,$$

$$p \rightarrow (p \vee q),$$

$$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)),$$

$$((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)),$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)),$$

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p),$$

$$\neg\neg p \rightarrow p\}$$

y su conjunto de reglas de inferencia es:

$$R_{\mathbf{R}} = \{\langle \{p, p \rightarrow q\}, q \rangle,\ \langle \{p, q\}, p \wedge q \rangle\}$$

Ahora bien, lo primero que se debe construir para ver si una lógica es algebraizable o no, es su semantica algebraica. Para ello debemos introducir algunas definiciones.

Definición 2.3 *Un $\mathcal{L}-$ álgebra es una estructura $\boldsymbol{A} = \langle A, \omega^{\boldsymbol{A}} \rangle_{\omega \in \mathcal{L}}$ donde A es un conjunto no vacío llamado el universo de $\boldsymbol{A}$, y ω^{A} es una operación sobre A de índice k para cada conectiva ω de k argumentos.*

Definición 2.4 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Por una $\mathcal{L}-$ ecuación o simplemente una ecuación, se entenderá una expresión formal $\varphi \approx \psi$ donde $\varphi, \psi \in Fm_{\mathcal{L}}$. Se denota el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-ecuaciones por $Eq_{\mathcal{L}}$.*[16]

Definición 2.5 *Sea K una clase de $\mathcal{L}$-álgebras. Sea $\models_K$ la relación que se da entre un conjunto de ecuaciones Γ y una ecuación $\varphi \approx \psi$ como sigue:*
$\Gamma \models_K \varphi \approx \psi$ si y sólo si para cada $\boldsymbol{A} \in K$ y cada interpretación $\vec{a}$ de las variables de $\Gamma \cup \{\varphi \approx \psi\}$ como elementos de A, se cumple que:

$$\text{Si } \xi^{\boldsymbol{A}}(\vec{a}) = \mu^{\boldsymbol{A}}(\vec{a}) \text{ para cada } \xi \approx \mu \in \Gamma \quad \text{entonces } \varphi^{\boldsymbol{A}}(\vec{a}) = \psi^{\boldsymbol{A}}(\vec{a})$$

Por mor de la claridad de este criterio, añadimos una definición de lo que es interpretar una fórmula en un álgebra dada mediante una asignación ν. Si bien dicha definición estaba implícita en [BP86], nunca es formalizada.

Definición 2.6 *Dada una asignación ν:*

$$\nu : Var \to A$$

[16]Cuando la lógica de la que se esté hablando esté clara, se omitirá el subíndice.

donde Var es el conjunto de variables proposicionales dado, definimos la interpretación de una fórmula φ en un álgebra $\boldsymbol{A} = \langle A, \omega^{\boldsymbol{A}} \rangle$ como sigue:
Si $\varphi = p$

$$p^{\boldsymbol{A}}[\nu] = \nu(p)$$

Si $\varphi = f_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$

$$f_i^{\boldsymbol{A}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[\nu] = f_i^{\boldsymbol{A}}(\varphi_1^{\boldsymbol{A}}[\nu], \ldots, \varphi_n^{\boldsymbol{A}}[\nu])$$

Dados estos elementos, queremos dar la definición de lo que es una semántica algebraica:

Definición 2.7 *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo y K una clase de álgebras. K es llamada una* semántica algebraica para $\mathcal{S}$ *si existe un conjunto finito de ecuaciones con una sola variable p,*

$\{\delta_i(p) \approx \epsilon_i(p)\}_{i \in I}$ *con I un conjunto de índices finito,*

tal que para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$ y algún $j \in I'$, con I' un conjunto de índices finito:

(i) $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si $\{\delta_i[\psi/p] \approx \epsilon_i[\psi/p], \psi \in \Gamma\} \models_K \delta_j[\varphi/p] \approx \epsilon_j[\varphi/p]$

El conjunto de ecuaciones $\{\delta_i \approx \epsilon_i\}_{i \in I}$ es llamado el conjunto de ecuaciones definitorias para $\mathcal{S}$ y K[17]

[17]En adelante se omiten los índices y las asignaciones, p.e. (i) se abrevia:

(i) $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si $\{\delta(\psi) \approx \epsilon(\psi) : \psi \in \Gamma\} \models_K \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$.

Un ejemplo ([BP86]) de una semántica algebraica para el cálculo proposicional (CP en adelante), es la clase de las álgebras booleanas BA, donde:

$BA = \{\boldsymbol{B} | \boldsymbol{B}$ es una $\mathcal{L}_{CP}-$álgebra$\}$

En particular el álgebra booleana de dos elementos:

$$\boldsymbol{B} = \langle \{0,1\}, \wedge^{\boldsymbol{B}}, \vee^{\boldsymbol{B}}, \neg^{\boldsymbol{B}}, \top^{\boldsymbol{B}} \rangle$$

donde $\top^{\boldsymbol{B}} = 1$ y $\wedge^{\boldsymbol{B}}, \vee^{\boldsymbol{B}}, \neg^{\boldsymbol{B}}$ se definen mediante las tablas de verdad usuales, por sí sola es una semántica algebraica para el cálculo proposicional con el conjunto de ecuaciones definitorias:

$$\{p \approx \top\}$$

En este caso la condición (i) toma la forma:

$$\Gamma \vdash_{CP} \varphi \text{ si y sólo si } \{\psi \approx \top : \psi \in \Gamma\} \models_{\boldsymbol{B}} \varphi \approx \top.$$

Ahora bien, dada una semántica algebraica para un sistema deductivo $\mathcal{S}$, ésta debe cumplir con algunas otras condiciones para ser equivalente a tal sistema deductivo.

Definición 2.8 *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo y K una semántica algebraica para $\mathcal{S}$ con un conjunto de ecuaciones definitorias $\{\delta_i \approx \epsilon_i\}_{i \in I}$, es decir, ecuaciones cumpliendo la condición (i), se dice que K es equivalente a $\mathcal{S}$ si existe un conjunto finito:*

$\{\Delta_j(p,q)\}_{j \in I}$, *con I como antes,*

donde $\Delta_j(p,q)$ es una conectiva binaria definida, es decir, una fórmula con dos variables tal que, para cada

$$\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathcal{L}},$$

se cumple que:

$$(ii)\ \varphi \approx \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models}_K \delta(\varphi\Delta\psi) \approx \epsilon(\varphi\Delta\psi)^{18}$$

el conjunto $\{\Delta_j\}_{j\in I}$ de conectivas binarias satisfaciendo (ii) es llamado el conjunto de fórmulas de equivalencia para $\mathcal{S}$ y K.

Ahora bien, la condición (i) garantiza que $\vdash_{\mathcal{S}}$ puede ser interpretada en $\models_K$. También se pueden dar condiciones que garanticen que $\models_K$ pueda ser interptetada en $\vdash_{\mathcal{S}}$.[19] Pero esta condición es suficiente para entender el presente criterio de algebraización.

Criterio 2.2 *Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebraizable si éste tiene una semántica algebraica equivalente.*

Establecido este criterio, podemos ver que $\mathbf{R}$ es algebraizable con las fórmulas de equivalencia

$$\{p \to q, q \to p\}$$

y conjunto de ecuaciones que definen:

$$\{p \wedge (p \to p) \approx p \to p\}.$$

[18] Se escribe $(\varphi\Delta\psi)$ en lugar de $\Delta(\varphi,\psi)$, y $\varphi \mathrel{=\!\!|\!\!\models}_K \psi$ es una abreviación de $\varphi \models_K \psi$ y $\psi \models_K \varphi$.

[19] Ver [BP86].

Sin embargo, este criterio depende de que exista una semántica algebraica para el sistema deductivo que se desea analizar, por lo que Blok y Pigozzi dan otros criterios que llaman intrínsecos, es decir, independientes de esta condición. Uno de ellos se da por medio del operador de Leibniz, y este criterio es además una condición suficiente para saber si un sistema es algebraizable.

El operador de Leibniz es una relación de equivalencia que es una congruencia, y puede ser definido en esos términos ([BP86]).

Definición 2.9 *Una relación de equivalencia* Θ *sobre* $\boldsymbol{A}$ *un* $\mathcal{L}$*-álgebra, es llamada* congruencia *si para cada* $\mathcal{L}$*-fórmula* $\varphi(p_0, \ldots p_{k-1})$ *se tiene que:*

$$\langle \varphi^{\boldsymbol{A}}(a_0, \ldots, a_{k-1}), \varphi^{\boldsymbol{A}}(b_0, \ldots, b_{k-1}) \rangle \in \Theta$$

siempre que $\langle a_i, b_i \rangle_{i<k} \in \Theta$ *para toda* $i < k$*.*

Se dice que una congruencia Θ es compatible con un subconjunto F de $\mathbf{A}$ si, dado $a \in F$ y $\langle a, b \rangle \in \Theta$, entonces $b \in F$ para todo $a, b \in A$.

Entonces, para cualquier álgebra $\boldsymbol{A}$ y cualquier subconjunto $F \subseteq A$, $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{A}} F$ es la máxima congruencia de $\boldsymbol{A}$ compatible con F ([BP86]).

Ahora bien, este operador nos da un criterio de algebraizabilidad intrínseco de acuerdo al comportamiento que tenga sobre las teorías de un sistema deductivo dado, y con ello nos da una jerarquía de éstos.

Definición 2.10 *Dado un sistema deductivo* $\mathcal{S}$*, un conjunto* T *de fórmulas es llamado una teoría de* $\mathcal{S}$ *(una* $\mathcal{S}$*-teoría) si* $T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ *implica que* $\varphi \in T$ *para cada* $\varphi \in Fm$*.*

El conjunto de todas las teorías de $\mathcal{S}$, denotado $Th\mathcal{S}$ es cerrado bajo intersecciones, lo que le da una estructura de latiz bajo $\vee^{\mathcal{S}}$. Esto es:

$$\boldsymbol{Th\mathcal{S}} = \langle Th\mathcal{S}, \cap, \vee^{\mathcal{S}} \rangle$$

es una latiz completa, donde, dadas dos $\mathcal{S}$-teorías :

$$T \vee^{\mathcal{S}} S = \bigcap \{R \in Th\mathcal{S} : T \cup S \subseteq R\}$$

Entonces, el operador de Leibniz sobre estas teorías nos da la llamada jerarquía de Leibniz. Un ejemplo de las clases de esta jerarquía está dado por las siguientes definiciones.

Definición 2.11 *Dado un sistema deductivo $\mathcal{S}$, este es algebraizable si y sólo si:*

(i) $\mathbf{\Omega}$ es inyectivo y preserva orden sobre $Th\mathcal{S}$,

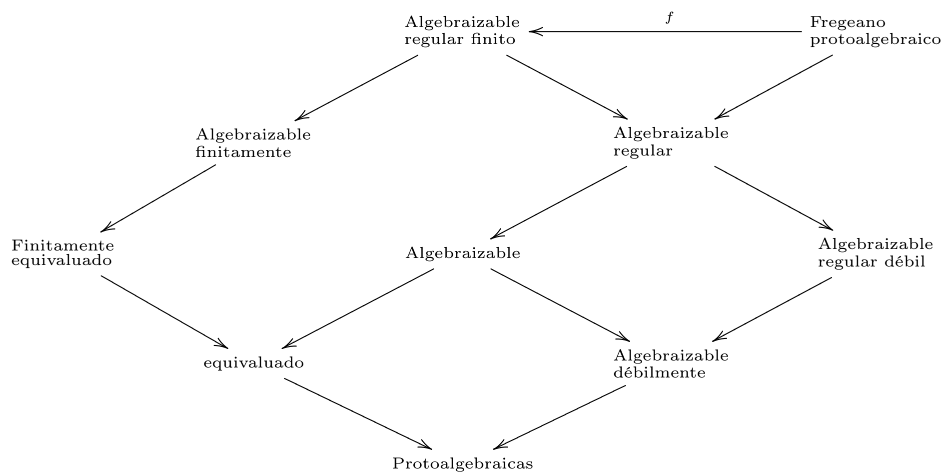
(ii) $\mathbf{\Omega}$ preserva uniones de subconjuntos dirigidos de $Th\mathcal{S}$[20]

Definición 2.12 *Dado un sistema deductivo $\mathcal{S}$, este es protoalgebraico si y sólo si $\mathbf{\Omega}$ preserva orden sobre la latiz de $\mathcal{S}$-teorías, i.e. Dadas dos teorías arbitrarias $T, S \in Th\mathcal{S}$ tales que:*

$$T \subseteq S \textit{ entonces } \mathbf{\Omega}T \subseteq \mathbf{\Omega}S$$

Las definiciones que dan la totalidad de la jerarquía de Leibniz se pueden ver en [FJP03]. La ilustración de la clasificación completa es la siguiente:

[20]Un subconjunto Y de una latiz arbitraria es *dirigido* si cada subconjunto finito de Y tiene una cota superior en Y.



Estas son las principales clases de lógicas en la jerarquía de Leibniz. $\rightarrow$ significa $\subseteq$ y el superíndice f denota 'para lógicas finitarias'.

Una prueba de la no-algebraizabilidad de C_1 que utiliza este criterio se puede encontrar en [LMS91]. Una vez establecido, podemos ver que la aplicación de los métodos de la lógica algebraica *no se restringe* a las lógicas algebraizables, sino que, por ejemplo, son también aplicables a lógicas como las protoalgebraicas, y en mayor o menor medida a todos los sistemas lógicos que vemos en esta clasificación.

Es decir, además de ser un criterio en sentido estricto, nos ofrece un mapa completo de los alcances de ésta área, con lo que podemos ver que este tipo de análisis se aplica a una cantidad mayor de sistemas lógicos que la supuesta por Béziau. Con esto, también vemos que la concepción de la que parte Béziau acerca de la lógica algebraica no es la mejor, y que sus resultados en este aspecto no son novedosos ni ofrecen una generalidad mayor a la que ofrecen los métodos existentes.

Ahora bien, las críticas que Béziau hace con respecto a la 'calidad' de este tipo de análisis, están ligadas a la noción de estructura lógica que propone, y que será discutida en el capítulo siguiente. Sin embargo, es importante señalar antes de finalizar este capítulo, que es principalmente con base en las críticas expuestas hasta ahora que Béziau postula la necesidad de una *'nueva'* noción de estructura lógica que no dependa de su carácter algebraico o que no 'reduzca la lógica al álgebra' suponiendo que sólo se había hablado de estructura lógica como estructura algebraica.[21] Es importante notar que cuando Béziau menciona que existen personas que piensan que las lógicas que no tienen una formulación algebraica no pueden ser definidas como una estructura matemática no ofrece referencias ([Béz97, Béz99, Béz00, Béz01]).[22]

Como se puede notar, en los trabajos presentados hasta ahora, nunca se ha hablado de *estructura lógica*. Se intenta ver cómo se pueden relacionar diversos sistemas lógicos con diversos tipos *de álgebras, o de espacios,* como es el caso del problema de representación, pero no es sino hasta que se intenta dar una genera- lización de este tipo de herramientas que podemos hablar propiamente de una 'estructura lógica'.

[21]En escritos posteriores comienza a hacer críticas acerca del carácter que debe tener una estructura lógica y su relación con teoría de categorías. Estas críticas las exponemos en el capítulo siguiente.

[22]En la mayoría de los casos en los que Béziau menciona esto, tener una formulación algebraica se restringe a ser una 'estructura' de tipo TL.

Capítulo 3

Estructuras Matemáticas

La propuesta de Béziau tiene como principal interés el poder generar una noción de estructura lógica. Pretende mostrar con esto que un enfoque estructuralista no necesariamente implica una reducción de la lógica al álgebra [Béz97, p.133]. El rechazo a la idea de que la lógica dependa del álgebra se extiende aquí en un rechazo a una 'dependencia de la teoría de categorías', [Béz00] en el mismo sentido de las críticas[1] citadas en el capítulo 1. Una teoría que verse sobre estructuras lógicas no debe ser una rama más de la teoría de categorías debe poder aportar resultados desde su particularidad que puedan ser aplicables a otras estructuras matemáticas.

[1] Concernientes a cuál debe ser el papel de la lógica entre las distintas áreas de las matemáticas.

3.1. Estructuras lógicas

Béziau nota que existen diversas maneras de considerar lógicas como estructuras matemáticas. Una de ellas, menciona Béziau, ha surgido de la lógica polaca con Wójcicki ([Wój88]), que presenta una lógica $\mathcal{L}$ como una estructura $\langle F, \vdash \rangle$ donde:

1. F es un algebra absolutamente libre[2]

2. $\vdash$ es una relación sobre $\wp(F) \times F$ obedeciendo los tres axiomas tarskianos usuales.[3]

Debemos notar que Wójcicki, *no* presenta tal par como una *estructura lógica*, sino que lo presenta, como es usual, como un *sistema lógico*, y habla de una relación $\vdash$ que puede ser estructural en tanto que cumpla con la propiedad de invariancia ([Wój88, p.22 y ss.]).

[2]Decimos que Σ una signatura o tipo de semejanza es algebraica si no contiene símbolos relacionales. La clase de álgebras construidas sobre el lenguaje $\mathcal{L}$ que tiene como tipo a Σ se denotará $\boldsymbol{A_\Sigma}$. Sea $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A_\Sigma}$ y $X \subseteq \boldsymbol{A}$, se dice que X es un conjunto de generadores para $\boldsymbol{A}$, libre con respecto a Σ si y sólo si:

a) $\boldsymbol{A}$ es generada por X

b) Para todo $\boldsymbol{A_i} \in \boldsymbol{A_\Sigma}$, toda función de X en $\boldsymbol{A_i}$ se puede extenderse a un homomorfismo de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{A_i}$

Decimos que el álgebra $\boldsymbol{A}$ es libre sobre X en la clase $\boldsymbol{A_\Sigma}$ si y sólo si X es un conjunto generador para $\boldsymbol{A}$ libre con respecto a $\boldsymbol{A_\Sigma}$ y se dice que $\boldsymbol{A}$ es libre en la clase $\boldsymbol{A_\Sigma}$ si y sólo si $\boldsymbol{A}$ es libre sobre algún conjunto en la clase $\boldsymbol{A_\Sigma}$. Entonces, dada una signatura Σ algebraica y $\boldsymbol{A}$ un álgebra sobre esa signatura se dice que es *absolutamente libre* sobre el conjunto de generadores X si y sólo si es libre sobre X en la clase $\boldsymbol{A_\Sigma}$

[3]Ver capítulo 2 sección 2.1.

Como se mencionó en la introducción, Béziau da ciertos lineamientos o *desideratums* acerca de lo que debe ser una estructura lógica . Esta estructura no debe ser reducida a una estructura algebraica, topológica o de orden, debe ser incluida dentro de las 'estructuras madre' que planteó el grupo Bourbaki en su popular artículo [Bou50], que en gran medida es una especie de manifiesto para esta propuesta ([Béz00, Béz01, Béz02]).

No obstante, plantea que desea dar una definición de estructura lógica más abs- tracta que la que pueda plantearse dentro de la visión Bourbaki. La idea general de lo que debe ser este tipo de estructura consiste en lo siguiente:

Definición 3.1 *Una estructura lógica es una estructura de tipo* $\langle \mathbb{S}, \vdash \rangle$ *donde* $\vdash$ *es una relación sobre* $\wp(\mathbb{S}) \times \mathbb{S}$ *y* $\mathbb{S}$ *no tiene ninguna estructura dada, puede ser cualquiera y ningún axioma se debe imponer a* $\vdash$ *en analogía a la definición de álgebra abstracta de Birkhoff (Ver sección 2.1).*

Estos son todos los lineamientos generales que Béziau propone como desideratums para una formalización de los sistemas lógicos como estructuras matemáticas. Por otro lado, además de estos lineamientos, Béziau hace una *clasificación* de las estructuras lógicas existentes. Ejemplos de la taxonomía que elabora son las siguientes definiciones:

Definición 3.2 *Una* estructura tarskiana *([Béz00, Béz01]) es un par* $\langle \mathbb{S}, Cn \rangle$ *donde* $\mathbb{S}$ *es un conjunto y* Cn *obedece los siguientes axiomas:*[4]

[4]Estos son los axiomas dados en el capítulo 2 sección 2.1. En [Béz95b], Beziau llama a esta estructura una estructura de consecuencia, pero añadiendo en esta sola estructura la propiedad de invariancia.

1. $\mathbb{S} \subseteq Cn(\mathbb{S})$

2. $Cn(Cn(\mathbb{S})) = Cn(\mathbb{S})$

3. $Cn(\mathbb{S}) = \bigcup\{Cn(Y) : Y \subseteq \mathbb{S}, Y finito\}$

Definición 3.3 *Una* estructura de Łos *es un par* $\langle \mathbb{S}, Cn \rangle$ *donde* $\mathbb{S}$ *es un álgebra absolutamente libre y* Cn *cumple con los axiomas de una estructura tarskiana y además con la propiedad de ser invariante bajo sustituciones, es decir, para cada endomorfismo* $F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$,

$$F(Cn(\mathbb{S})) \subseteq Cn(F(\mathbb{S}))$$

Definición 3.4 *Una* estructura de Susko *es un par* $\langle \mathbb{S}, Cn \rangle$ *donde* $\mathbb{S}$ *es una lógica abstracta y* Cn *cumple con los axiomas de una estructura tarskiana.*[5]

Otras definiciones que corresponden a distintos sistemas lógicos se pueden ver en [Béz00]. Algunos otros ejemplos son:

[5]No queda claro cuál es la definición de lo que Béziau llama una lógica abstracta. En [Béz95b] da la siguiente definición: Now we give the following definition of a *Logic* (or *Logical Structure*, or *Abstract Logic*),

A *Logic* is a pair $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ where:

- $\mathcal{L}$ is a set,
- $\vdash$ is a relation over $\wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$

The *quality* and *quantity* of the elements of $\mathcal{L}$ is left unspecified.

Otra definición que llega a dar es la siguiente. Una lógica abstracta es una relación de consecuencia sobre un conjunto dado indeterminado [Béz01]. Esta definición pretende hacer una analogía con la idea de álgebra abstracta de Birkhoff dada en [Bir40].

Definición 3.5 *Por una* estructura lógica *[Béz96b, BK98] se entiende una triada* $\langle S, L, tv\rangle$*, donde* S *es un conjunto,* L *es un conjunto de enunciados acerca de los elementos de* S *y no contiene enunciados de la forma* $a = b$ *y* tv *es una función* $tv : L \to \{0, 1\}$.

Definición 3.6 *Una* estructura fregeana*, es una estructura lógica que cumple con la siguiente condición:*

Si $tv(\varphi) = tv(\psi)$ *y* $tv(\chi) = tv(\chi[\varphi/\psi])$ *entonces*

$$tv(\chi[p/\varphi]) = tv(\chi[p/\psi])$$

Definición 3.7 *Dada una estructura lógica* $\langle S, L, tv\rangle$*, un endomorfismo lógico* F *es una función que cumple:*

$$tv(\varphi(\vec{a})) = tv(\varphi(F(\vec{a}))$$

donde $\vec{a}$ *es una secuencia de elementos de* S *y* F *es un endomorfismo propio (i.e. no es inyectivo).*

Definición 3.8 *Una* estructura rígida*, es una estructura lógica que no tiene endomorfismos lógicos propios.*

Obsérvese que la definición de morfismo lógico se da restringida a las estructuras que denominó lógicas en [Béz96b, BK98]. Esto es lo que denomina una extensión de la noción de morfismo ([Béz96b]).

3.2. Estructuras matemáticas

Una vez dada esta taxonomía es natural que surjan ciertas preguntas. ¿Bajo qué definición de estructura matemática podemos afirmar que las estructuras anteriores son eso: una estructura matemática? El proyecto de Béziau busca insertarse en el programa planteado por el grupo Bourbaki en su artículo [Bou50]. Sin embargo partir de tal marco sería un comienzo desafortunado ya que, a pesar de los aportes que este grupo pudo dar a las matemáticas, este artículo no es uno que pueda ser útil para los fines que se buscan desde la lógica universal: dar una formalización estructural de los sistemas lógicos.

Bourbaki mismo aclara esto en su texto, mencionando, después de haber dado una definición de estructura matemática,[6] que esto no tiene la suficiente generalidad para las necesidades de las matemáticas, y llama a consultar para ello su trabajo propiamente matemático sobre estructuras. En este sentido compartimos la crítica que Corry hace de la *recepción* que ha tenido este texto, y que ha llevado a confusiones.[7]

[6] La definición dada en este texto es la siguiente:

> It can now be clear what is to be understood, in general, by a mathematical structure. The common character of the different concepts designated by this generic name, is that they can be applied to sets of elements whose nature has not been specified; to define a structure, one takes as given one or several relations, into which these elements enter (...) then one postulates that the given relation, or relations, satisfy certain conditions (which are explicitly stated and which are the axioms of the structure under consideration)p.225-226

[7] Corry menciona que existen al menos dos sentidos en que Bourbaki habla de estructura,

En algunos trabajos, Béziau sugiere que Bourbaki obviamente está in-

una *estructura* que se refiere a esta idea general de lo que podría establecerse como una Bourbaki-estructura, como esa que dibujaría el mapa de las matemáticas, y una estructura en sentido estricto matemático. Citamos en extenso su crítica:

> Many assertions that were suggested either explicitly or implicitly by Bourbaki or its individual members -i.e., that all mathematical research can be understood as research on structures, that there are mother structures bearing a special significance for mathematics, that there are exactly three, and that these three mother structures are precisely the algebraic, order and topological structures (or *structure*) - all this is by no means a logical consequence of the axioms defining a structure. The notion of mother structures and the picture of mathematics as a hierarchy of structures are not results obtained within a mathematical theory of any kind. Rather, they belong strictly to Bourbaki's non-formal images of mathematics; they appear in non-technical, popular, articles, (...) or in the myth that arose around Bourbaki.
>
> (...) Bourbaki, and in particular Dieudonné, dedicated considerable efforts to historical writing, that produced an influential historiographical body of marked Whiggish spirit. (...) The idea of a mathematical structure appears in it as the culminating comprehensive and definitive stage of historical development of the whole discipline: the structural presentation of mathematics as embodied in Bourbaki's treatise was here to stay. And in saying so, reference was made not only to the image of mathematical knowledge put forward in the book; implicitly, and often also explicitly, Dieudonné asserted that mathematics had come now to be the discipline dealing not only with structures , but more specifically with Bourbaki's *structures*. As a matter of fact, Bourbaki's work did imply many important contributions to twentieth century mathematics, but the concept of *structure* is certainly not among them.

tentando partir de un enfoque 'informal' o sin principios para fundamentar las matemáticas, y es en este sentido que intenta trabajar [Béz01]. Esto es, podemos apelar a definiciones no formales para fundamentar una teoría de las estructuras lógicas. Definiciones como la que da el grupo Bourbaki, o la que ofrece McLane:

> (...) a structure is essentially a list of mathematical operations and relations and their required properties, commonly given as axioms, and often so formulated as to be properties shared by a number of possibly quite different specific mathematical objects ([Mac96])[8]

, o alguna definición similar sería entonces sufuciente para sus propósitos.

Sin embargo, Béziau sostiene que es común el confundir estructura matemática con estructura algebraica, y partir de este enfoque 'informal' o sin principios, deja abierto el camino a no poder discernir, tal como se quiere, una estructura matemática sin más, de una estructura algebraica definida de manera igualmente intuitiva, como es el caso de la siguiente definición: Una estructura algebraica o sistema algebraico es un conjunto C junto con una o más operaciones n-arias definidas en C las cuales satisfacen ciertos axiomas ([Pue06]).

La necesidad de dar una definición formal de lo que se está entendiendo por estructura matemática en esta propuesta proviene del hecho de que,

[8](...) una estructura es esencialmente una lista de operaciones matemáticas y relaciones, así como de sus propiedades requeridas, comunmente dadas como axiomas, y a menudo formuladas de tal manera que puedan ser compartidas por un número objetos matemáticos específicos posiblemente muy diferentes.

dada cierta clasificación de estructuras y una teoría que versa sobre estas estructuras, espera- mos saber ciertas cosas naturales como las siguientes:

1. ¿Cuándo estamos ante dos construcciones de esencialmente la misma estructura? Sabemos por ejemplo, que un espacio topológico puede ser caracterizado por sus conjuntos abiertos, o sus cerrados o por otras diferentes cons- trucciones. Sin embargo, podemos saber que todas ellas son esencialmente diferentes presentaciones de la misma categoría. Entonces, en este caso la pregunta que se debe responder es la siguiente:

   ¿Cuándo estamos ante dos presentaciones de esencialmente la misma lógica?

2. ¿Podemos establecer alguna clasificación de este tipo de estructuras?

   Un ejemplo de los problemas que se pueden presentar al intentar proponer una taxonomía son los problemas que se presentan, por ejemplo, en la clasificación de los grupos.

   La taxonomía de estructuras lógicas que establece Béziau está dada por criterios heterogéneos: propiedades de la relación de consecuencia, propiedades de sustitución dentro de una lógica, propiedades semánticas, etc. Entonces, ¿Es posible una clasificación como la propuesta? ¿Sabemos qué lógicas estamos dejando fuera? ¿Cuáles son el alcance y la correctud de este procedimiento?, es decir, ¿están correctamente representados los sistemas lógicos en su clasificación? y en este sentido, ¿Cómo es que este enfoque nos permite manejar un mayor número de lógicas? Entonces la pregunta en este caso sería:

¿Qué tipo de clasificación se puede establecer para este tipo de estructuras?

3. ¿Bajo qué criterios podemos diferenciar un *sistema lógico* de una *estructura lógica*? Esta última pregunta, es pertinente únicamente para la propuesta de Béziau, ya que, por ejemplo, en la teoría de grupos siempre es claro cuándo estamos hablando de de un grupo particular, por ejemplo, el grupo de permutaciones, y de un grupo en abstracto, como un par ordenado $\langle G, * \rangle$ que satisface conocidos axiomas. Esto no sucede así en la propuesta de Béziau, como explicamos a continuación.

Más adelante, en este capítulo veremos cómo la definición categórica de estructura matemática nos da una formalización que puede responder este tipo de preguntas y en el capítulo 4 veremos cómo se aplica esta formalización a los sistemas lógicos. Expliquemos ahora las motivaciones de éstas preguntas. Tal vez, la motivación de la tercera pregunta sea la menos clara. Cuando Béziau nos da su taxonomía, echa mano de criterios que se han utilizado tradicionalmente para 'clasificar' o definir sistemas lógicos con base en las propiedades de la relación de consecuencia (o bien con base en otro tipo de propiedades) desde la teoría abstracta de modelos y desde la lógica algebraica.

Tomemos como ejemplo la *estructura tarskiana* y la *estructura de Łos*. Cuando Tarski propone su operador de consecuencia Cn en [Tar28], menciona que los axiomas que da son válidos para cualquier 'disciplina deductiva' y procede a dar axiomas particulares para los sistemas deductivos que presuponen el cálculo de predicados. Más tarde, Łos y Suszko en [ŁosS58], añaden a las condiciones de Tarski la invariancia bajo sustitución. Los sistemas deductivos descritos mediante estos componentes han constituido un marco de estudio para la lógica algebraica (entre otras áreas).

Es decir, desde mediados del siglo pasado, una lógica, o un sistema deductivo en un lenguaje $\mathcal{L}$ se describe como un par $\mathcal{S} = \langle Fm, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ donde Fm es el álgebra de fórmulas de $\mathcal{L}$ y $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación de consecuencia invariante bajo sustituciones sobre Fm, esto es, una relación $\vdash \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ que satisface:

1. Si $\varphi \in X$, entonces $X \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$
2. Si $Y \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ para toda $\varphi \in X$, y $X \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, entonces $Y \vdash_{\mathcal{S}} \psi$
3. Si $X \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ y $X \subseteq Y$, entonces $Y \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$

   además de la condición de invariancia

4. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, entonces para toda sustitución $\sigma, \sigma[\Gamma] \vdash_{\mathcal{S}} \sigma(\varphi)$

donde, 1, 2 y 3 son propiedades que la relación de consecuencia Cn hereda a $\vdash$. Esto es claro si transformamos la operación de consecuencia Cn en una relación $\vdash_{Cn} \subseteq \wp(A) \times (A)$ entre subconjuntos de A y elementos de A postulando que para cada subconjunto $X \subseteq A$ y cada $\varphi \in A$:

$$X \vdash_{Cn} \varphi \text{ si y sólo si } \varphi \in Cn(X)$$

Generalmente un sistema deductivo se presenta con las propiedades 1 y 2 ya que juntas implican 3. La condición 4, es la correspondiente propiedad de invariancia asociada a la relación de consecuencia. Entonces, la presentación de Béziau no es novedosa.

Es decir, bajo qué criterios estos componentes de un sistema deductivo, son llamados ahora una estructura de Łos bajo la presentación $\langle \mathbb{S}, Cn \rangle$ con $\mathbb{S} = Fm$ el álgebra de fórmulas, como se acaba de describir. ¿Qué fue lo que cambió en nuestra idea de sistema deductivo para ser ahora una estructura de Łos?

Tomemos el ejemplo de las lógicas que cumplen el principio de extensionalidad de Frege. Éste y el principio débil de Frege, reflejan su idea de composicionalidad, que es la que caracteriza la estructura fregeana de Béziau. Estos principios, formalizados para lógica proposicional clásica (CP) son los siguientes:

Para cada teoría T del CP,

si $T \cup \{\varphi\} \vdash_{CP} \psi$ y $T \cup \{\psi\} \vdash_{CP} \varphi$,

entonces para cada fórmula δ con la variable proposicional $x = p$,

$T \cup \{\delta(\varphi/p)\} \vdash_{CP} \delta(\psi/p)$ y $T \cup \{\delta(\psi/p)\} \vdash_{CP} \delta(\varphi/p)$,

mientras que el principio débil es el siguiente:

Si $\varphi \vdash_{CP} \psi$ y $\psi \vdash_{CP} \varphi$,

entonces para cada fórmula δ con la variable proposicional $x = p$,

$\delta(\varphi/p) \vdash_{CP} \delta(\psi/p)$ y $\delta(\psi/p) \vdash_{CP} \delta(\varphi/p)$

es fácilmente generalizable a la noción de sistema lógico tradicional dada antes, mediante la siguiente relación:

Sea $\mathcal{S}$ un sistema lógico en un lenguaje $\mathcal{L}$. Una relación de Frege en $\mathcal{S}$, denotada $\Lambda\mathcal{S}$ es una relación entre fórmulas definida como sigue:

$$\Lambda\mathcal{S} = \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \vdash_{\mathcal{S}} \psi \ y \ \psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\}$$

Las lógicas que satisfacen este principio son llamadas lógicas auto-extensionales

([FJP03]).

Para el principio de Frege se procede de manera análoga. Dada una $\mathcal{S}$-teoría T decimos que dos fórmulas son T-equivalentes si y sólo si cada cual es consecuencia de la otra cuando son adjuntadas a T. La relación así definida es llamada la relación fregeana sobre T relativa a $\mathcal{S}$ y es denotada $\Lambda_{\mathcal{S}}T$, donde:

$$\Lambda_{\mathcal{S}}T = \{\langle\varphi, \psi\rangle : T, \varphi \vdash_{\mathcal{S}} \psi \ y \ T, \psi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\}$$

Las lógicas que cumplen tal principio son llamadas lógicas extensionales o fregeanas. El primer criterio de distinción formal entre este tipo de lógicas parece haber sido dado por Suszko ([FJP03, Sus75]). Nuevamente, entonces, se debe responder qué es lo que hace que tales principios que han clasificado diversos sistema lógicos como fregeanos o no-fregeanos puedan ser llamados ahora estructuras lógicas.

3.2.1. Morfismos lógicos

La pregunta 1 planteada en la sección anterior, pretende resaltar que, una vez que se han formalizado las estructuras sobre las que versará la lógica universal, debemos dar cuenta del tipo de morfismos que existen entre ellas. Esto es importante ya que gran parte de la información que tenemos acerca de las estructuras en matemáticas, se establece por medio de estas relaciones que se codifican en los *morfismos o en los funtores de sus categorías, no tanto en la formalización de la estructura en sí misma.*

Este tipo de información es algo que se deja pendiente en este enfoque, en dos sentidos: no habla de ello en la mayoría de sus escritos, y en los escritos más recientes menciona que es algo que aún no ha investigado [Béz00]. La idea de morfismo lógico propuesto por Béziau, como se definió antes, claramente no actúa en este sentido, ya que es un morfismo que preserva relaciones *dentro* de una estructura particular,[9] a saber, lo que denomina estructura lógica, no *entre* estructuras.

Béziau menciona que las conectivas lógicas no son susceptibles de ser captadas por una función en tanto que parecen más una relación ya que, por ejemplo, en el lenguaje natural existen diferentes negaciones de una misma fórmula ([Béz95a, Béz96a]). Sin embargo esto no parece ser una gran dificultad en tanto que en un lenguaje formal estas distintas negaciones deben ser consideradas como equivalentes.

3.2.2. Definición categórica de estructura

Ahora bien, teniendo en cuenta las preguntas y observaciones planteadas anteriormente es que podemos decir que debemos tener una idea formal y precisa de lo que es una estructura matemática en general. La teoría de las categorías nos ofrece una definición formal de lo que es una estructura matemática en la noción de *categoría concreta*.

Más aún, creemos que el dejar de lado esta idea formal de lo que es una estructura matemática requiere al menos una justificación en tanto que se aspira a formalizar un sistema lógico como una estructura matemática, y hemos visto que tal formalización facilita el estudio de las relaciones y propiedades del objeto que se esté estudiando, sean grupos, espacios topológicos o sistemas lógicos.

Podemos decir entonces que la idea de estructura matemática de la que se

[9] Como lo hace una función de sustitución común.

debe partir está dada por la noción de 'categoría concreta' ([AHS05]). Para entender qué es una categoría concreta debemos comenzar por definir lo que es un constructo. Un *constructo* es una categoría de conjuntos estructurados y funciones que preservan estructura.[10]

Dado un constructo, existe el funtor subyacente o funtor que olvida,

$U : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$

donde para todo $a \in Ob(\mathbf{A})$, $U(a)$ es el conjunto subyacente de $\mathbf{A}$ y para toda $f \in Mor(\mathbf{A})$, $U(f)$ es la función subyacente del morfismo f.[11]

Tomemos como ejemplo los espacios topológicos. Un espacio topológico es un conjunto con una estructura adicionada por sus abiertos (o equivalentemente por sus cerrados, su operador de cerradura etc. ([Pri04])), y sus morfismos, o las funciones bajo las cuales podemos saber cuando dos espacios son 'isomorfos' son los homeomorfismos.[12]

Informalmente lo que se define como la categoría de los espacios topológicos **Top**, es decir, la categoría que tiene como clase de objetos la clase de todos los

[10]Recordemos que no todas las categorías tienen como objetos conjuntos estructurados ni funciones que preservan estructura. Un ejemplo de ello es la categoría **Mat** cuyos objetos son los números naturales y cuyos morfismos hom(m,n) es el conjunto de todas las matrices $m \times n$ reales, su identidad, $id_n : n \to n$ la matriz unitaria diagonal $n \times n$ y la composición de matrices está definida por $A \circ B = BA$ donde BA denota la multiplicación usual de matrices.

[11]Debemos recordar que la categoría **Set** tiene como clase de objetos la clase de todos los conjuntos, $hom(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A a B, id_A es la función identidad sobre A, y $\circ$ es la composición usual de funciones.

[12]Recordemos la definición de homeomorfismo: una función es homeomorfismo si dados dos espacios topológicos X, Y y $f : X \to Y$ es una aplicación continua, biyectiva y su inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es continua.

espacios topológicos; como morfismos los mapeos continuos de A en B, A,B $\in Ob(\mathbf{Top})$, como multiplicación la composición usual de funciones, y como identidad la función identidad, es lo que corresponde a la que se denomimó su categoría abstracta.

Si damos un funtor que olvida en **Set** $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ tal que:

$U : (\langle X, \tau \rangle) \to X$

a cada espacio topológico lo envía a su conjunto subyacente, y para cada $f \in hom(\langle X, \tau_1 \rangle, \langle Y, \tau_2 \rangle)$,

$$U(f) \to f \text{ donde } f : X \to Y$$

tenemos entonces la formalización correspondiente a su categoría concreta.

Si se quieren estudiar estructuras más complejas como los grupos topológicos, se puede dar la correspondiente categoría abstracta **TopGrp** con funtores que olvidan no sólo sobre **Set** sino sobre **Grp**[13] o sobre **Top**, olvidando en cada caso la estructura de grupo y la topológica, la topológica o la de grupo respectivamente. Esto es si tenemos una categoría particular, en este ejemplo **TopGrp**, entonces se puede dar un funtor que olvida sobre varias categorías base X, es decir, X puede ser **Top**, **Grp** o **Set**.

Esto da lugar a la definición de *categoría concreta* sobre una categoría X como sigue:

Definición 3.9 *Sea X una categoría. Una* categoría concreta *sobre X es un par ($\mathbf{A}$, U) donde $\mathbf{A}$ es una categoría y $U : \mathbf{A} \to X$ es un funtor fiel.*[14] *U es llamado el funtor que olvida y X es llamada la categoría base de ($\mathbf{A}$, U).*

[13] Recordemos que **Grp** es la categoría que tiene como objetos todos lo grupos y como morfismos todos los homeomorfismos entre ellos.

[14] Se dice que un funtor es fiel si es inyectivo siempre que está restringido a cualquier

Obsérvese entonces que un constructo es una categoría concreta sobre **Set**. Esto supone las definiciones de funtor concreto e isomorfismo concreto.

Definición 3.10 *Si* $(\boldsymbol{A}, U)$ *y* $(\boldsymbol{B}, V)$ *son categorías concretas sobre* X *entonces, un funtor concreto de* $(\boldsymbol{A}, U)$ *sobre* $(\boldsymbol{B}, V)$ *es un funtor* $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *con* $U = V \circ F$. *Tal funtor se denota por:*

$$F : (\boldsymbol{A}, U) \to (\boldsymbol{B}, V)$$

Definición 3.11 *Un isomorfismo concreto* $F : (\boldsymbol{A}, U) \to (\boldsymbol{B}, V)$ *entre dos categorías concretas sobre* X *es un funtor concreto que es un isomorfismo de categorías.*

Este es el punto importante para nosotros. Que tal isomorfismo exista significa intuitivamente que cada estructura en $\boldsymbol{A}$, es decir cada A en $\boldsymbol{A}$ puede ser completamente sustituida por una estructura en $\boldsymbol{B}$ a saber, $F(A)$. Volviendo a nuestro ejemplo, esto significa que la descripción de espacios topológicos por:

Conjuntos abiertos

Conjuntos cerrados

Operadores de clausura

son técnicamente diferentes constructos de **Top**, es decir podemos saber cuándo estamos ante dos construcciones de esencialmente la misma estructura.

conjunto de morfismos. Esto es un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es fiel si todas sus restricciones a conjuntos:

$F : hom_{\mathbf{A}}(A, A') \to hom_{\mathbf{B}}(F(A), F(A'))$

son inyectivas

Ahora bien, estos funtores como habíamos mencionado, nos pueden dar también la 'naturaleza' de una estructura determinada.

Por ejemplo el hecho de que el constructo de **Vec**[15] es algebraico y el hecho de que el constructo de **Top** es topológico es formalizado por las propiedades de los funtores subyacentes ([AHS05]). Como ejemplo de lo que determina que una estructura sea topológica véase [AHS05, pp. 357 y ss.].

Sin embargo, esto es suficiente para mostrar la información que nos puede dar esta formalización categorial de la noción de estructura matemática. La finalidad de esta descripción es pues, el enfatizar que tenemos una definición formal de la noción general de estructura matemática en la noción de *categoría concreta*. Notemos que, como hemos enfatizado en su descripción, está definición de estructura matemática nos da una forma sistemática de saber cuándo estamos ante diferentes presentaciones de esencialmente la misma estructura, cuándo podemos establecer algún tipo de relación entre ellas etc., es decir, si podemos formalizar un sistema lógico de una forma semejante, podremos entonces tener las misma respuestas para los sistemas lógicos.

3.3. Observaciones

Es importante resaltar una vez más que desde un enfoque categorial contamos con una definición precisa de lo que es una estructura matemática en la noción de *categoría concreta*. Se debe además recalcar que ver a los sistemas lógicos desde la teoría de las categorías no es reducir la lógica al

[15] Recordemos que **Vec** tiene como clase de objetos todos los espacios vectoriales reales y como morfismos todas las transformaciones lineales entre ellos.

álgebra, en tanto que, como acabamos de ejemplificar, la formalización de algún sistema en una categoría y posteriormente en su constructo, podrá darnos información del tipo de estructura con la que estamos tratando, esto es, si es de carácter topológico o algebraico, etc. Entonces si se quiere ver a los sistemas lógicos como estructuras matemáticas, este tipo de herramientas no puede ser soslayado. En este punto, Béziau menciona que no quiere seguir a Bourbaki sino dar una noción un tanto más abstracta de estructura lógica, esto ya que 'desde el punto de vista de Bourbaki' la idea de 'estructura tarskiana' por ejemplo, es topológica ([Béz00, Béz01]), o bien una 'estrucutra mixta', es decir, una estructura que tiene propiedades algebraicas y topológicas. Menciona así que, existen propiedades de los sistemas lógicos que no pueden ser captadas por las estructuras algebraicas, y que pueden ser de orden o topológicas o de algún otro tipo.

Tomemos su argumento y notemos que, si estas propiedades que no son re- presentables en una estructura algebraica son de orden o topológicas, etc. entonces deberá aceptar que las estructuras lógicas se reducen a este tipo de estructuras. De no ser así deberá entonces mostrar[16] qué propiedad es esa que no es reducible a ninguna otra estructura existente y probar que efectivamente no es representable. Pero partir de la idea de que las estructuras lógicas *no deben* ser de tal o cual tipo *es una petición de principio*. Las afirmaciones citadas en el párrafo anterior, fueron hechas sin tener en miras la definición de lo que es ser una estructura topológica, algebraica, etc, y sin tener en cuenta que diversas estructuras pueden ser perfectamente vistas de diversas maneras de acuerdo a la categoría subyacente que utilizemos

[16]Ya que no la ha mostrado.

en nuestro constructo sin que eso invalide en algún punto la formalización categorial.

Notemos entonces que, desde la propuesta de la Lógica Universal, no se da una definición formal de estructura, o en su defecto, no contamos con principios de algún tipo con los cuales definir qué podemos tomar dentro de la taxonomía que ha iniciado Béziau. La mayoría de las estructuras que propone como tales, son sistemas lógicos que *pueden ser tratados algebraicamente* y para los cuales se cuenta con definiciones más generales en la clasificación de sistemas mencionada anteriormente. Con lo cual podemos ver que en este punto tampoco existe alguna novedad en sus planteamientos.

Especificamente, la definición de estructura lógica que propone, parece particu- larizar aún más la aplicación de este enfoque. Debemos recordar que este tipo de estructura no es útil para analizar muchas lógicas proposicionales, en tanto que se basa en la idea de una bivaluación. Si bien, esta idea fue propuesta para analizar diferentes definiciones de igualdad, este tipo de estructura por ejemplo, no es útil para analizar lógicas modales cuya semántica, por marcos de Kripke, no se valúa a $\{0, 1\}$ sino a mundos posibles, o bien no se puede aplicar a todas las lógicas multivaluadas o las difusas que se valúan al intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Más aún no queda claro incluso para qué tipo de lógicas es útil en tanto que no se determina esto y por lo tanto no se determina la correctud de esta abstracción. Esto es, no nos da una idea de los alcances de su taxonomía.

Ahora bien, lo más importante es que su taxonomía hereda los 'defectos' o las limitaciones que tenía la definición de sistema lógico dada antes, que son, por ejemplo, el que nos liga a una sola signatura, es decir, es válida sólo la para lógica subyacente, o bien que no nos da algún mecanismo para cambiarla. También, el hecho de basarse principalmente en la noción de consecuencia o de equivalencia. No nos da una respuesta a cuál es la relación que existe entre este tipo estructuras o a la traducción que pueda hacerse entre diversos sistemas lógicos. El enfoque de lógica algebraica abstracta categórica da una formalización que recupera las ventajas de la definición formal, vale decir, categorial, de estructura matemática e inicia precisamente dando una formalización que permite resolver las limitantes antes mencionadas.

Capítulo 4

Lógica algebraica abstracta categórica

En este capítulo presentaremos el trabajo que se ha hecho dentro del área de la lógica algebraica abstracta en la incorporación de la teoría de categorías para el estudio de diversas lógicas. El uso de teoría de categorías aplicado al análisis de diversas lógicas, puede rastrearse hasta los años 60 con el trabajo de Lawvere ([Law63, Law69]). Desde entonces se han seguido desarrollando conceptos tendientes a incorporar este tipo de herramientas. Como se mencionó en la introducción, las motivaciones para favorecer el uso de esta herramienta fueron tanto teóricas como prácticas.

Uno de los principales problemas a nivel teórico era el dar una definición formal de lo que es un sistema lógico. Recordemos la definición dada en el capítulo anterior de un sistema deductivo o lógica como un par $\mathcal{S} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ donde sólo $\mathbf{Fm}$ y $\vdash_{\mathcal{S}}$ juegan un papel importante, independientemente de cómo se defina $\vdash_{\mathcal{S}}$, por contraposición a otras definiciones de sistema lógico que toman en cuenta aspectos semánticos para su definición. Tomando una lógica como tal par, nos ligamos a un sólo lenguaje fijo. Para algunos propósitos, la semántica de una lógica debe entrar también como una noción abstracta de modelo en la formalización. Estas y otras deficiencias debían desaparecer de una definición formal de sistema lógico. Un panorama de las motivaciones prácticas se encuentra en [FS88, GB84, Gog91].

El trabajo en esta área se enfoca principalmente en uno de los aspectos más importantes de la lógica desde el punto de vista de la lógica algebraica abstracta: su invariancia bajo sustituciones. Tal propiedad, se formaliza en la noción de *institución*, que también incorpora la propiedad de que la lógica debe ser invariante bajo ciertas transformaciones lingüísticas, tales como la selección de conectivas primitivas ([FJP03]), como se verá cuando se muestre la categoría **Sign**.

Como suele suceder en lógica, en los diversos trabajos hechos en esta área se le da mayor peso a los aspectos semánticos, en demérito de los aspectos sintácticos o viceversa. Esto ha dado pie a proyectos que intentan unir ambos enfoques. Ejemplos de ello son el trabajo iniciado con Diskin en [Dis96], y que denomina *Abstract Universal Algebraic Logic*; o bien el trabajo iniciado por Meseguer en [Mes89], que une las dos nociones básicas que han dado pie a la categorización de la lógica –la noción de institución y la de π-institución– dando con ello una generalización de la definición formal de lógica.

4.1. Instituciones y π-instituciones

Las nociones de institución y π-institución han dado pie al desarrollo de una gran cantidad de trabajo en esta área. Sus inicios, los podemos encontrar desde los años ochentas con Goguen y Burstall ([GB84]).

Informalmente hablando, una institución consiste de una categoría **Sign** cuyos objetos son *signaturas*, junto con dos funtores SEN y MOD que dan,[1] respectivamente, para cada objeto Σ en Ob(**Sign**), el conjunto de Σ-fórmulas y la categoría de $\Sigma-$modelos. Para cada objeto Σ de las signaturas, fórmulas y modelos son relacionados vía una Σ-relación de satisfacción. Sus principales axiomas formalizan la propiedad de que la verdad es invariable bajo cambio de notación o traducción.

Basados en esta noción (institución), Fiadeiro y Sernadas ([FS88]) han formalizado el concepto de $\pi - \textit{institución}$ que es la contraparte natural para la relación de derivabilidad. Antes de dar estas dos nociones[2] centrales en esta sección (institución y π-institución), definiremos formalmente los componentes que las constituyen y que se mencionaron informalmente antes.

Una categoría **Sign** tiene como clase de objetos signaturas, como morfismos, morfismos de signaturas: $Mor(\mathbf{Sign}) = \{H \mid H : \Sigma \to \Sigma'\}$ que son funciones que nos permiten cambiar o 'traducir' una lógica de signatura Σ en otra de signatura Σ'; su multiplicación es la composición usual y su identidad la función identidad.

Una *signatura* es una n-ada que consta de conjuntos de símbolos no lógi-

[1] SEN viene del inglés *sentences*.

[2] La presentación que ofrecemos difiere ligeramente de la original. Para conocer ésta última ver apéndice D.

cos. Por ejemplo, para el caso de la lógica proposicional clásica, una signatura Σ es un par (F, P) donde, $F = \{f_1^{(\alpha_0)}, \dots f_n^{(\alpha_n)}\}$ con $f_i^{(\alpha_j)}$ un símbolo de función de índice o número de argumentos α_j y $P = \{p_1^{(0)}, \dots, p_m^{(0)}\}$ donde cada $p_i^{(0)}$ es, como se espera, un símbolo de predicado de índice cero dado que no hay individuos. Para la lógica de proposicional clásica, los morfismos de signaturas son funciones que preservan el índice entre símbolos de predicados y funciones.

El funtor $SEN : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Set}$ nos da por cada $\Sigma \in Ob(\mathbf{Sign})$ el conjunto $SEN(\Sigma) = \{\varphi | \varphi \text{ } es \text{ } una \text{ } \Sigma - fórmula\}$, y por cada morfismo $H \in Mor(\mathbf{Sign})$, si $H : \Sigma \to \Sigma'$, entonces

$$SEN(H) : SEN(\Sigma) \to SEN(\Sigma')$$

manda a cada $\varphi \in SEN(\Sigma)$ a una fórmula $\varphi' \in SEN(\Sigma')$ tal que si $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$, entonces $SEN(H)(\Gamma) \vdash_{\Sigma'} SEN(H)(\varphi)$. Es fácil ver que SEN es en efecto un funtor. Ahora podemos dar nuestra primera definición.

Definición 4.1 *Una π-institución es una terna $\xi = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \vdash \rangle$ donde:*

- ***Sign** es una categoría de signaturas.*
- *SEN: **Sign** $\to$ **Set** es el funtor de fórmulas.*
- $\vdash : Ob(\boldsymbol{Sign}) \to \wp(\wp(SEN(\Sigma)) \times SEN(\Sigma))$ *es una función que asocia a cada $\Sigma \in Ob(\boldsymbol{Sign})$ una relación[3] binaria $\vdash_\Sigma \subseteq \wp(SEN(\Sigma)) \times SEN(\Sigma)$ que satisface las siguientes propiedades:*

[3]En lugar de escribir $\vdash (\Sigma)$, escribiremos $\vdash_\Sigma$. Si $\langle \Gamma, \varphi \rangle \in \vdash_\Sigma$, entonces escribiremos $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$.

1. *Reflexividad: Para toda* $\varphi \in SEN(\Sigma)$, $\{\varphi\} \vdash_\Sigma \varphi$.

2. *Monotonía: Si* $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ *y* $\Gamma \subseteq \Gamma'$, *entonces* $\Gamma' \vdash_\Sigma \varphi$.

3. *Transitividad: Si* $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi_i, i \in I$, *y* $\Gamma \cup \{\varphi_i | i \in I\} \vdash_\Sigma \psi$, *entonces* $\Gamma \vdash_\Sigma \psi$.

4. $\vdash$*-traducibilidad: Si* $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ *entonces para cualquier* $H \in Mor(\textbf{\textit{Sign}})$, $H : \Sigma \to \Sigma'$:
$$SEN(H)(\Gamma) \ \vdash_{\Sigma'} \ SEN(H)(\varphi).$$

Es importante notar que estas restricciones sobre la relación $\vdash$ no deben ser vistas como reglas particulares de algún cálculo de pruebas que genera $\vdash$ sino como *propiedades abstractas*, independientes de cómo se genere esta relación. Es común pensar que este tipo de formalización no se aplica a las llamadas lógicas subestructurales que son las lógicas que no cumplen con alguna o con todas las reglas estructurales, es decir, con reflexividad, monotonía o transitividad. Sin embargo, como se mencionó, esta construcción es independiente de una relación $\vdash$ particular.

La reflexividad puede ser entendida como un esquema de axiomas, la monotonía como una regla de debilitamiento, y la transitividad como una regla de corte ([Mes89]). Meseguer ofrece un ejemplo de esto con la lógica lineal [Gir87, Gir95], en la que debilitamiento y contracción están prohibidas, con lo que su cálculo es en algún sentido no-monótono ([Mes89, p.284]). Se tiene el secuente $A \to A$ como axioma, pero no se puede derivar ni $A, B \to A$ ni $A, A \to A$ como consecuencias. El modo correcto de entender este tipo de cálculo dentro de una π-institución será tomando como objetos de $SEN(\Sigma)$

para Σ una signatura de lógica lineal, secuentes y no fórmulas. Entonces, si definimos $\vdash_{\mathcal{LL}}$ como una forma de generar secuentes de lógica lineal, es decir, identificando $\vdash_{\mathcal{LL}}$ con la barra horizontal que separa nuestros 'secuentes premisas' de nuestro 'secuente conclusión', entonces $\vdash_{\mathcal{LL}}$ sí es reflexiva, monótona y transitiva. Notemos entonces que aquí resultaría irrelevante para una clasificación de las π-instituciones los axiomas particulares que cumpliera una relación $\vdash$ dada. Con ello vemos que los criterios usados por Béziau para la taxonomía de las estructuras lógicas no son suficientemente adecuados.

Ahora procederemos de la misma forma para dar la noción de institución, que hace uso de otra categoría, **Th** cuya definición está en función de una π-institución. Dada una π-institución ξ, podemos asociarle la categoría **Th** que tiene como clase de objetos la clase de todas sus teorías. Una *teoría* es un par $T = \langle \Sigma, \Gamma \rangle$ con Σ una signatura y $\Gamma \subseteq SEN(\Sigma)$ donde, de forma intuitiva, Γ es un conjunto de axiomas. Comunmente entendemos por una teoría un conjunto de fórmulas cerrado bajo consecuencia lógica. Sin embargo, aquí no se pide como requisito que sea cerrado.

El conjunto $Mor(\mathbf{Th})$ de morfismos de **Th** se define como sigue. Dado

$$H : \langle \Sigma, \Gamma \rangle \to \langle \Sigma', \Gamma' \rangle$$

$H \in Mor(\mathbf{Th})$ si y sólo si $H : \Sigma \to \Sigma'$ y para toda $\varphi \in \Gamma$ se cumple que

$$\Gamma' \vdash_{\Sigma'} SEN(H)(\varphi).$$

Tales morfismos son llamados *morfismos de teorías*. Aquí nuevamente la multiplicación es la composición usual de funciones y la identidad la función identidad.

Además se define el funtor MOD: $\boldsymbol{Sign} \to \boldsymbol{Cat^{op}}$, que para cada $\Sigma \in Ob(\mathbf{Sign})$ nos da la clase de todos los Σ-modelos. Dada una signatura Σ un $\Sigma - modelo$ es un par $\langle S, f\rangle$ con f una función de interpretación y S un conjunto universo.

Para cada $H \in Mor(\mathbf{Sign})$, si $H : \Sigma \to \Sigma'$, entonces

$$MOD(H) : MOD(\Sigma') \to MOD(\Sigma)$$

asocia a cada $\Sigma'-$modelo $M' = \langle \Sigma', f'\rangle$ un $\Sigma-$modelo $M = \langle \Sigma, f\rangle$ como sigue: Si $s \in \Sigma$ entonces $f(s) = f'(H(s))$. Ahora podemos dar la definición de institución.

Definición 4.2 *Una institución es una cuádrupla*

$$I = \langle \boldsymbol{Sign},\ SEN,\ MOD,\ \models\rangle$$

donde:

- $\boldsymbol{Sign}$ *es una categoría de signaturas.*
- *SEN:* $\boldsymbol{Sign} \to \boldsymbol{Set}$ *es el funtor de fórmulas.*
- $\models\ : Ob(\boldsymbol{Sign}) \to \wp(MOD(\Sigma)) \times SEN(\Sigma))$ *es una función que asocia a cada signatura* Σ *con una relación*[4] *de satisfacción*

  $$\models_\Sigma \subseteq MOD(\Sigma) \times SEN(\Sigma)$$

  tal que para cada $M' \in MOD(\Sigma')$, *cada* $H : \Sigma \to \Sigma'$ *morfismo de signaturas y cada* $\varphi \in SEN(\Sigma)$ *se cumple que:*

  $$M' \models_{\Sigma'} SEN(H)(\varphi) \text{ si y sólo si } MOD(H)(M') \models_\Sigma \varphi.$$

[4] Si $\langle M, \varphi\rangle \in \models_\Sigma$ escribimos $M \models_\Sigma \varphi$.

Se debe notar que, no obstante que no hemos dado una definición general de lógica, la noción de institución y π-institución por separado pueden servirnos para formalizar categóricamente un sistema lógico. Para ejemplificar esto haremos uso del siguiente teorema:

Teorema 4.1 *Dada una institución* $I = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \boldsymbol{MOD} \models \rangle$ *la tercia:*

$$I^{+} = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \models \rangle$$

con $\models$ *ahora denotando la relación de consecuencia lógica entre conjuntos de fórmulas y fórmulas, es una* π*-institución.*

Por otro lado mediante estas construcciones podemos obtener información importante acerca de la 'naturaleza de la estructura' de una lógica dada, que era una de las preocupaciones centrales de la lógica universal. Como se mencionó en el capítulo anterior, esta información está dada por las propiedades de los funtores que podamos establecer aquí. Por ejemplo, se puede saber el carácter *liberal* de una institución, que es una medida abstracta del carácter *algebraico* de una lógica en cuestión. Es decir, tenemos ahora una formalización que puede darnos información acerca del carácter de nuestras estructuras de la siguiente manera.

Asociada a una π-institución I^{+} tenemos la categoría $\boldsymbol{Th}_{\models}$. Llamamos a una institución *liberal* si para cada morfismo de teorías $H : T \to T'$, con $H \in Mor(\boldsymbol{Th}_{\models})$, el funtor:

$$MOD(H) : MOD(T') \to MOD(T),$$

siempre tiene funtor adjunto izquierdo denotado H^{*}, esto es, existe un isomorfismo natural:

$$\boldsymbol{MOD}(T')(H^*(M), M') \cong \boldsymbol{MOD}(T)(M, MOD(H)(M'))$$

con $M' \in MOD(T'),\ M \in MOD(T)$ y $H^* : MOD(T) \to MOD(T')$

4.2. Lógicas Generales

Como mencionamos antes, el trabajo de Meseguer ha tomado las dos nociones antes presentadas y con ellas generaliza la noción de sistema lógico. Ahora, un sistema lógico consta de una lógica junto con un cálculo de pruebas. Las nociones de institución y π-institución son suficientes para definir una lógica. Sin embargo se debe hacer énfasis en que, como se mencionó antes, se puede hacer uso de estos componentes de acuerdo a la lógica con la que se esté tratando. Es decir, se puede dar mayor énfasis a la parte del cálculo de pruebas o bien omitir ésta y basarse en la idea de institución etc. Veamos ahora como se utilizan en la noción de *lógica general*. Para ello definimos primero lo que es una lógica.

Definición 4.3 *Una lógica es una quíntupla*

$\mathcal{L} = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, MOD \vdash, \models \rangle$

donde:

- $\langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \vdash \rangle$ *es una π-institución,*
- $\langle \boldsymbol{Sign}, SEN, MOD, \models \rangle$ *es una institución*

  y para cada

  $\Sigma \in Ob(Sign),\ \Gamma \subseteq SEN(\Sigma)$ *y* $\varphi \in SEN(\Sigma)$*:*

  se satisface que:

$$Si\ \Gamma \vdash_\Sigma \varphi\ entonces\ \Gamma \models_\Sigma \varphi$$

que es una condición de correctud. Una lógica es completa si cumple la contrapuesta:

$$\Gamma \models_\Sigma \varphi\ entonces\ \Gamma \vdash_\Sigma \varphi$$

Como mencionamos, un sistema lógico tiene además un cálculo de pruebas. La idea básica que maneja Meseguer de un cálculo de pruebas es, que podamos asociar a cada teoría $T = \langle \Sigma, \Gamma \rangle$ una estructura teórico-probatoria $P(T)$, que consiste de todas las pruebas que usan las fórmulas de T como axiomas. La estructura de $P(T)$ generalmente relaciona tales pruebas de algún modo algebraico, pero no se necesita elegir entre diferentes tipos de estructuras algebraicas permitidas para algún cálculo de pruebas particular.

Se puede hacer abstracción de tal elección diciendo que para un cálculo de pruebas dado existe una categoría **Str** que tiene como objetos algún tipo de estructuras $P(T)$ y un funtor $P : \boldsymbol{Th_0} \to \boldsymbol{Str}$ que asigna a cada teoría T su estructura de pruebas $P(T)$, donde $\boldsymbol{Th_0}$ es una subcategoría de **Th** con los mismos objetos pero con morfismos de teorías que preservan axiomas, es decir, manda axiomas en axiomas. Por ejemplo, $P(T)$ puede ser una multicategoría. En este sentido, los axiomas generales que Meseguer presenta de un cálculo de pruebas no imponen ninguna estructura particular, sólo postulan que $P(T)$ tiene alguna estructura, declarándolo un objeto de alguna categoría de estructuras. En particular aquí se modela mediante multicategorías.

Una multicategoría consiste de

- Una colección de objetos

- Un conjunto de morfismos de $x_1, x_2, \ldots,$ y x_n a y para cada secuencia finita $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ de objetos (para n = 0, 1, 2, ...) y para un objeto y
- Un morfismo identidad $Id : x \to x$ (con n= 1) para cada objeto x

Se definen además las operaciones de composición siguientes. Dada una secuencia de secuencias de objetos

$\langle x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n1}; x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n2}; \ldots; x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,nm}\rangle$,

una secuencia de objetos

$\langle y_1, y_2, ..., y_m\rangle$,

y un objeto z, si:

- f_1 es un morfismo de $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots,$ y $x_{1,n}$ a y_1
- f_2 es un morfismo de $x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots,$ y $x_{2,n}$ a y_2
- $\ldots$
- f_m es un morfismo de $x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots,$ y $x_{m,n}$ a y_m y
- g es un morfismo de $y_1, y_2, \ldots,$ y y_m a z;

entonces exsite un morfismo composición:

$g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$

de $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n2}, \ldots, x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots,$ y $x_{m,nm}$ a z, que satisface los siguientes axiomas:

- si m es 1, z es y y g es el morfismo identidad para y, entonces $g(f)$ debe ser igual a f

- si n_1 es 1, n_2 es 1, …, n_m es 1, x_1 es y_1, x_2 es y_2, …, x_m es y_m, f_1 es el morfismo identidad para y_1, f_2 es el morfismo identidad para y_2, …, y f_m es el morfismo identidad para y_m, entonces $g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ debe ser igual a g

- Una condición de asociatividad

Se denotará **MultiCat** a la categoría que tiene como objetos multicategorías y como morfismos funtores estrictamente monoidales. En la presentación de Meseguer se pide además que los morfismos manden objetos básicos en objetos básicos.

Un ejemplo de multicategoría es la lógica clásica proposicional con secuentes de Gentzen como cálculo de pruebas:

Dada una teoría $T = (\Sigma, \Delta)$ en $\mathcal{L}_{CP}$, asociamos a ella una multicategoría $P(T)$ con $SEN(\Sigma)$ como su conjunto de objetos básicos y sus morfismos:

$\alpha : A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$

consisten de secuencias $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ con α_i un árbol de prueba en secuentes de Gentzen de B_i cuyas hojas sólo tienen fórmulas contenidas en Δ.

La identidad

$$id_{A_1 \ldots A_n} : \; A_1, \ldots, A_n \to A_1, \ldots, A_n$$

es la secuencia $A_1 \ldots A_n$ vista como una secuencia de árboles de prueba. La composición, dados:

$$\alpha : A_1 \ldots A_n \to B_1 \ldots B_m \text{ y } \;\beta : B_1 \ldots B_m \to C_1 \ldots C_k$$

es una secuencia:

$$\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_k$$

con γ_i el árbol de prueba obtenido del árbol β_i pegando el árbol α_j en cada presencia de B_j en las hojas.

Ahora bien, se puede extraer de $P(T)$ el conjunto de todas las pruebas de los teoremas de T:

$proofs(T) = \{\alpha : \varnothing \to \varphi \ en \ P(T) | \varphi \in SEN(T)\}$

como el conjunto $Pr(P(T))$, donde Pr es un funtor,

$Pr : \boldsymbol{MultiCat} \to \boldsymbol{Set}$

que manda cada multicategoría $(\mathcal{O}, \boldsymbol{C})$ al conjunto:

$Pr(\mathcal{O}, \boldsymbol{C}) = \{\alpha : \varnothing \to A \ en \ C | A \in \mathcal{O}\}$.

El modo en que un cálculo de prueba y una π-institución se relacionan está dado por la función :

$\pi_T : proofs(T) \to SEN(T)$

que manda cada prueba $\alpha : \varnothing \to \varphi$ a su correspondiente teorema φ

Finalmente se define lo que es un cálculo de pruebas como sigue:

Definición 4.4 *Un cálculo de pruebas es una séxtupla*

$P = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \vdash, P, Pr, \pi \rangle$ *con:*

1. $\langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \vdash \rangle$ *una* π*- institución,*

2. *Un funtor* $P : \boldsymbol{Th_0} \to \boldsymbol{Str}$*; donde* $\boldsymbol{Th_0}$ *es una subcategoría de* $\boldsymbol{Th}$ *con los mismos objetos pero con morfismos de teorías que preservan axiomas. Para cada teoría* T*, el objeto* $P(T) \in \boldsymbol{Str}$ *es llamado su estructura teórico-probatoria.*

3. *$Pr : \boldsymbol{Str} \to \boldsymbol{Set}$ un funtor; para cada teoría T el conjunto $Pr(P(T))$ es llamado el conjunto de pruebas. Se denota por $proofs$ el funtor compuesto $Pr \circ P : \boldsymbol{Th_0} \to \boldsymbol{Set}$,*

4. *$\pi : proofs \Rightarrow SEN$ una transformación natural tal que por cada teoría $T = (\Sigma, \Gamma)$ la imagen de $\pi_T : proofs(T) \to SEN(T)$ es el conjunto $Cn(\Gamma)$.*

Con estas nociones, finalmente podemos dar la definición generalizada de sistema lógico de Meseguer:

Definición 4.5 *Un sistema lógico es una óctupla;*
$S = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, MOD, \vdash, \models, P, Pr, \pi \rangle$, tal que:

1. *$\langle \boldsymbol{Sign}, SEN, MOD, \vdash, \models \rangle$ es una lógica,*

2. *$\langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \vdash, P, Pr, \pi \rangle$ es un cálculo de pruebas.*

Como tal formalización se desea además implementar, lo siguiente en el trabajo de Meseguer es definir un cálculo de pruebas que sea efectivo. Sin embargo, es suficiente lo expuesto aquí para ilustrar una formalización de un sistema lógico como estructura. Hasta aquí, hemos visto lo que sería una estructura lógica. Para poder dar la categoría de tal estructura, se deben establecer por separado los mapeos de cada parte constituyente de un sistema lógico: esto es, mapeos para π-instituciones, para instituciones y para cálculos de pruebas. Una explicación detallada de su funcionamiento se encuentra en [Mes89, GB84, Gog91].

Es importante señalar que la idea expuesta aquí es una idea básica de cómo se formaliza un sistema lógico en teoría de categorías. Sin embargo el trabajo hecho en esta área es muy diverso y se han propuesto muchas generalizaciones y modificaciones a esta idea base. Por ejemplo, Goguen y Brustall mismos, han propuesto las *instituciones generalizadas*, que permiten valores no booleanos para la relación de satisfacción.

Otras propuestas son, *instituciones contextuadas*, que manejan contextos de variables y sustituciones, *instituciones multivariadas*, que asignan una variedad de conjunto a cada signatura abstracta, *instituciones fibradas* o *de Grothendieck*, que combinan múltiples instituciones en una sola estructura. Éstas últimas fueron desarrolladas para semánticas multiparadigmas. Un panorama de estas variaciones se encuentra en [GR, Vou03].

Debemos resaltar algunas de las ventajas que tiene esta formalización de sistema lógico. El concepto de institución, en sí mismo es una generalización del trabajo hecho por Barwise en [Bar74] en tanto que toma como marco de los axiomas ofrecidos a la teoría de conjuntos lo que puede resultar inconveniente para ciertos modelos. La noción de institución en cambio tiene como trasfondo a la teoría de categorías. En segundo lugar, claramente esta noción no depende de una lógica fija, además de ser una formalización que nos permite obtener información acerca de las relaciones que existen entre los diversos sistemas lógicos. Con esto podemos tener, por ejemplo, representaciones particularmente sencillas de una gran variedad de lógicas. Para las ventajas en cuestiones computacionales véase [GB84].

Conclusiones

Hagamos un resumen de lo hecho hasta ahora. En el capítulo 1 se dio un panorama de las críticas al uso de métodos algebraicos en lógica que han sido constantes desde el trabajo de Boole. Éstas pueden agruparse en tres temas: (i) La pertinencia del uso de métodos algebraicos en lógica, (ii) El papel que se le da a la lógica dentro de las matemáticas y (iii) La postulación de diferentes tipos de sistemas lógicos. Se ejemplificó cómo este tipo de críticas ha trazado distintas tradiciones que se han complementado en el desarrollo de áreas como la teoría de modelos o la lógica algebraica misma.

En el capítulo 2, vimos el papel que juega este tipo de críticas en la propuesta de Béziau. Las críticas que Béziau hace de la lógica algebraica se pueden enmarcar en los temas del tipo (i) y (ii) que mencionamos en el párrafo anterior. Por ejemplo, su postura concerniente a los temas planteados en (i) consiste en mostrar que los métodos algebraicos no son adecuados del todo para el estudio de los sistemas lógicos y da como ejemplo de ello el caso de la lógica paraconsistente C_1, que es una lógica no algebraizable. Se muestra que la concepción de lógica algebraica de la que parte Béziau es excesivamente restringida, y se expone cómo el papel del ejemplo dado por Béziau es limitado y no aporta ningún resultado con respecto a los avances que ya se tenían desde el primer criterio de algebraizablilidad dado por Blok y Pigozzi.

En el capítulo 3 se muestra la propuesta de Béziau con respecto a la noción de estructura lógica y su postura con respecto a la noción de estructura matemática. Se exponen los lineamientos generales que Béziau da para la determinación de lo que puedan ser las estructuras lógicas así como la taxonomía que propone de las mismas. Se muestra que la noción de estructura matemática de la que parte Béziau no es apropiada para sus fines.

Se expone la formalización categorial de estructura matemática señalando que una formalización de este tipo daría respuesta a preguntas planteadas desde la lógica universal cómo son ¿Qué es una estructura lógica? ¿Qué significa que una lógica sea equivalente o 'traducible' a otra lógica? ¿Qué es una extensión o una 'desviación' de una lógica dada? etc. y a otras preguntas que debe responder una teoría de cualquier tipo de estructuras. Se señalan los problemas que tiene la taxonomía iniciada por Béziau, como son el hacer uso de criterios heterogéneos, con lo que no garantiza que su taxonomía sea correcta, el hecho de utilizar básicamente criterios ya conocidos desde la teoría de modelos abstracta y desde la lógica algebraica para caracterizar sistemas lógicos, entre otros.

Por último, en el capítulo 4 se expone la noción categorial de sistema lógico, que utiliza como base las nociones de institución y π-institución. Se muestra cómo este tipo de formalización da una definición de lo que puede ser llamado una 'estructura lógica' y da información acerca de la naturaleza de este tipo de estructuras. Además representa una generalización real, es decir, es una formalización independiente del tipo de lógica con la que se esté tratando, del tipo de cálculo de pruebas que se prefiera, etc. y tiene como ventaja que es la única formalización que nos ha dado un mecanismo para tener información acerca de las relaciones que puedan establecerse entre los diversos sistemas lógicos ya sea la de isomorfía, ser sublógica, ser extensión de una lógica dada, etc.

Debemos observar que los trabajos que se han hecho en lógica algebraica abstracta categorica han tenido como meta explícita desde sus inicios en los ochentas –al menos once años antes de que surgiera la propuesta de Lógica Universal, y la incorporación de las nociones categóricas a la lógica al menos veinte años antes– el 'hacer tanto como sea posible independientemente de la lógica de la que se trate' ([GB84]). En ese afán se ha tenido como objetivo el dar una noción de lógica que no dependa, como se mencionó en el capítulo 3, de un lenguaje fijo, y que se pueda introducir en tal abstracción la idea de modelo de manera directa.

Esta formalización nos da una idea más precisa de lo que son ciertas estructuras lógicas y sus propiedades. Como mencionamos, podemos tener desde este enfoque cierta información que no se brinda desde el enfoque de Lógica Universal. Por ejemplo, una medida del carácter algebraico que pueda tener una lógica dada su formalización como una estructura. En este sentido, podemos tener una claridad mayor de este tipo de características si tomamos en cuenta el trabajo que se ha hecho en esta área.

En general, podemos decir que dentro de otras áreas como la teoría de modelos abstracta, o bien los diversos trabajos que se han hecho dentro de una 'comparación' con la lógica clásica se tiene este mismo propósito: establecer resultados que puedan ser aplicables al mayor número de lógicas posibles. Esto es así en el caso de Barwise ([Bar74]), como se mencionó en la introducción, o bien, en el caso de Hintikka ([Hin02]), en el que existe la posibilidad de pensar nuevas lógicas mediante diversos patrones de cuantificadores ramificados (Ver apéndice A).

Entonces, el alcanzar este tipo de resultados, generalizables al mayor número de lógicas posibles, parece ser un objetivo común a todas estas áreas desde el resurgimiento de diversas lógicas. Sin embargo, lo que parecía ser la carcterística distintiva de la Lógica Universal era el postular a los diversos sistemas lógicos como estructuras matemáticas.

En este sentido no queda claro qué se gana con los desideratums dados por Béziau para establecer una definición de estructura lógica ni en qué aspectos pueda ser más general este tipo propuesta. Es muy importante resaltar, como se mencionó en el capítulo 3, que los lineamientos de Béziau son en realidad una petición de principio. El camino avanzado desde la lógica algebraica es uno mucho mejor definido y nos da una idea clara del tipo de relaciones que se pueden establecer entre los diversos sistemas lógicos.

Los avances dados por la categorización de la lógica algebraica amplían los alcances de esta área. El enfoque de la Lógica Universal particulariza algunos métodos a sistemas específicos. En contraste el trabajo que se está haciendo en las variaciones de la noción de institución, amplia aún más el uso de estas herramientas. Resaltemos además que es el único formalismo que da una respuesta precisa a qué tipo de relaciones se pueden establecer entre los diversos sistemas lógicos así como una idea formal lo que es un sistema lógico. En este sentido los resultado logrados en este campo dan respuesta a muchas de las preguntas planteadas desde la Lógica Universal y han sido postulados con anterioridad a tal propuesta.

Se debe hacer una aclaración más. Meseguer en su artículo [MO] se pregunta: ¿es razonable esperar una respuesta univoca a la pregunta qué es una lógica? Es de suma importancia el señalar lo que podemos aprender de tal pregunta. El hecho de intentar llegar a una generalización del tipo pretendido por la lógica unviersal, puede ser una idealización que no es razonable esperar. El seguir viendo la extensión que pueden tener las propiedades estructurales que conocemos a un nivel tan general como el ofrecido por nociones como la de lógica general, parece una meta mucho más asequible.

Queda pendiente aún el comparar qué ventajas tiene esta formalización y la formalización categorial que presta más peso a las conectivas lógicas como es la propuesta por Goldblat y otros que también es anterior a la propuesta de Béziau. Además es importante notar que se debe proseguir el trabajo en el estudio detallado de las propiedades de los funtores que pueden establecerse dentro de diversos sistemas lógicos y obtener con ello la información detallada de los constructos que podamos obtener.

Bibliografía

[AAN] J. Minoro Abe, S. Akama, and K. Nakamatsu. 'Monadic Curry Algebras Q_τ'. *Lecture Notes in Computer Science.*

[AB75] A. R Anderson and N.D. Belnap. *Entailment. The logic of relevance and necessity.* Princeton University Press, 1975.

[AHS05] J. Adámek, H. Herrlinch, and G. E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats.* Versión online en http://katmat.math.uni-bremen.de/acc, enero 2005.

[AN94] H. Andréka and I. Németi. *'General Algebraic Logic'en.* Oxford University Press, 1994.

[ANS84] H. Andréka, I. Németi, and I. Sain. 'Abstract Model Theoretic Approach to Algebraic Logic'. *Technical Report*, 1984.

[ANS93] H. Andréka, I. Németi, and I. Sain. *'Applying Algebraic Logic to Logic'en.* Springer-Verlag, 1993.

[Bar74] J. Barwise. 'Axioms for abstract model theory '. *Annals of Mathematical Logic*, 7, 1974.

[Bar78] J. Barwise. *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland, 1978.

[Bar81] H.P. Barendregt. *The lambda calculus: its sintax and semantics*. Amsterdam, North-Holland, 1981.

[BCL05] J. Y. Béziau and A. Costa-Leite, editors. *Handobook of the First World Congress and School on Universal Logic*, 26 de marzo al 3 de abril 2005. Suiza.

[Ber50] B. A. Bernstein. 'A dual-symetric definition of Boolean algebra free from postulated special elements'. *Scripta Mathematica*, 16(pp. 157-160), 1950.

[Béz93] J.Y. Béziau. 'Noveaux regard et noveaux résultats sur la logique paraconsistant C_1'. *Logique et Analyse*, 36:45–58, 1993.

[Béz94] J.Y. Béziau. 'De la logique formelle à la logique abstraite'. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, (14):41–50, 1994.

[Béz95a] J. Y. Béziau. 'Negation: what it is and what is not'. *Boletin da Sociedade Paranaense de Matemática*, 15:37–43, 1995.

[Béz95b] J. Y. Béziau. 'Universal Logic'. *Proceedings of the 8th International Colloquium Logica'94*, (pags. 73-93), 1995.

[Béz95c] J.Y. Béziau. 'Universal Logic'. In T. Childrens and O. Major, editors, *Logica'94 Proceedings of the 8th Internationarl Symposium*, pages 73–93, 1995. Praga.

[Béz96a] J. Y. Béziau. *Sobre a verdade lógica*. PhD thesis, University of São Paulo., 1996.

[Béz96b] J.Y. Béziau. 'Identity, Structure and Logic'. *Bulletin of the Section of Logic*, (25), 1996.

[Béz97] J.Y. Béziau. 'Logic may be simple'. *Logic and Logical Philosophy*, 5:129–147, 1997.

[Béz98] J.Y. Béziau. 'Idempotent Full Paraconsistent Negations are Not Algebraizable'. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 39(1), 1998.

[Béz99] J. Y. Béziau. 'The mathematical structure of logical syntax'. In *Advances in logic and computer science*. W.A. Carnielli and d'Ottaviano, 1999.

[Béz00] J.Y. Béziau. *Logica Universalis*. Birkhaüser Verlag, 2000.

[Béz01] J. Y. Béziau. 'From Paraconsistent Logic to Universal Logic'. *Sorites*, 12:5–32, 2001.

[Béz02] J.Y. Béziau. 'La Théorie des Ensembles et la Théorie des Catégories'. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, IX(1), 2002.

[BHC+07] J.Y. Béziau, H. He, A. Costa, Y. Zhong, and Y. Ma, editors. *Handbook of the second World Congress and School on Universal Logic*, 16-22 de agosto 2007. China.

[Bir40] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, 1940.

[BK98] J.Y. Béziau and D. Krause. 'Relativizations of the Principle of Identity'. *Logic Journal of the Interest Group in Pure and Applied Logic*, (39), 1998.

[Boo58] G. Boole. *The laws of thought*. Dover, 1958.

[Boo79] G. Boole. *Análisis Matemático de la Lógica*. Argentina, 1979.

[Bor94] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra*. Cambridge, University Press, 1994.

[Bou50] N. Bourbaki. 'The Architecture of Mathematics'. *The American Mathematical Monthly*, (57), 1950.

[BP86] W. Blok and D. Pigozzi. 'Algebraizable Logics'. *Memoires of the American Mathematical Society*, 396, 1986.

[Bro75] L. E. J. Brouwer. *Collected Works, 1 y 2*. Amsterdam North-Holland, 1975.

[BS97] J.L. Bell and A.B. Slomson. *Models and Ultrapoducts*. Dover, 1997.

[CCIDo02] W.A. Carnielli, M. E. Coniglio, and eds. I.L.M. D ' ottaviano. *Paraconsistency - the logical way to the inconsistent*. Marcel Dekker, 2002.

[Cur77] H. B. Curry. *Foundations of Mathematical Logic*. Dover Publications, Inc,. New York, 1977.

[DBdlLC84] D'Alembert, L'Abbé Bossut, de la Lande, and Condorcet. *Encyclopédie Méthodique,ou par ordre de matières*. Panckoucke, Librarie, Plomteux, Imprimeur des Etats, 1784.

[dC98] É. Bonnot de Condillac. *La Langue des Calculs*. G. Arnoux et Mousnier, 1798.

[dC63] N. C. A. da Costa. 'Calculus propositionnels pour les systèmes formels inconsistants'. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, 257, 1963.

[dC66] N.A.C. da Costa. *Álgebras de Curry*. IME-USP, Sao Paulo, 1966.

[dC74] N. C. A. da Costa. 'On the Theory of Inconsistent Formal Systems'. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XV(4), 1974.

[dCBB95] N.C.A. da Costa, J.Y. Béziau, and O.A.S. Bueno. 'Aspects of Paraconsistent Logic'. *Bulletin of the Interest group in Pure Logic*, 3(4), 1995.

[DH01] J. M. Dunn and G. M. Hardegree. *Algebraic Methods in Philosophical Logic*. Oxford University, 2001.

[Dis96] Z. Diskin. 'Abstract Universal Algebraic Logic'(part I and II). *Proceedings of the Latin American Academy of Science, section B*, (50), 1996.

[FJP03] J. M. Font, R. Jansana, and D. Pigozzi. 'a Survey of Abstract Algebraic Logic'. *Studia Logica*, 74(74), 2003.

[Fre72] G. Frege. *Conceptografía*. UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas, 1972.

[FRT84] J. M. Font, A. J. Rodriguez, and A. Torrens. 'Wajsberg Algebras'. *Stochastica*, VII(1), 1984.

[FS88] J. Fiadeiro and A. Sernadas. 'Structuring Theories on Consequence'. *Recent Trends in Data Type Specification (Lecture Notes in Computer Science)*, 332, 1988.

[Gab81] D. Gabbay. *Semantical Investigations in Heityng's intuitionistic logic*. Dodrecht, Holland: Reidel, 1981.

[GB84] J. A. Goguen and R.M. Burstall. 'Introducing Institutions'. *Proceedings of the Logic of Programing Workshop*, 164, 1984.

[Gir87] J.Y. Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 50:pp. 1–102, 1987.

[Gir95] J.Y. Girard. Linear logic: its syntax and semantics. In *Advances in Linear Logic*. J.Y. Girard, Y Lafont, 1995.

[Gog91] J.A. Goguen. Types as theories. In *Topology and Category Theory in Computer Science*. Oxford, University Press, 1991.

[GR] J. Goguen and G. Rosu. 'Institution Morphisms'. *Formal Aspects of Computing*, (To appear), ?

[Hal54] P. R. Halmos. 'Polyadic Boolean Algebras'. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 40(5), May 15, 1954.

[Hal56] P. R. Halmos. 'The Basic Concepts of Algebraic Logic'. *The American Mathematical Monthly*, 63(6), Jun-Jul, 1956.

[Hen56] L. Henkin. *La structure algebrique des theories mathematiques*. Gauthier-Villars, 1956.

[Her68] J. Herbrand. *Logical Writings of Jaques Herbrand*. Reidel, Dodrecht, 2968.

[Hin97] J. Hintikka. *Lingua Universalis vs Calculus Ratiocinator*. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[Hin02] J. Hintikka. 'Hyperclassical Logic (A.K.A. IF Logic) and its implications for Logical Theory'. *Association for Symbolic Logic*, 8(3), 2002.

[HMT85] L. Henkin, J.D. Monk, and A. Tarski. *Cylindric Algebras, Parts I and II*. Elsevier Science Publishers B.V. The Netherlands, First Printing, 1971, Second Printing 1985.

[Hun04] E.V. Huntington. 'Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic'. *Transactions of the American Mathematical Society*, 5:288–309, 1904.

[Jev64] W.S. Jevons. *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity*. London: Edward Stanford, 1864.

[KK86] W. Kneal and M. Kneal. *The development of logic*. Oxford, Clarendon, 1986.

[Lag88] J. L. Lagrange. *Méchanique Analitique*. La Veuve de Saint, Libraire, 1788.

[Law63] F. W. Lawvere. 'Functorial Semantics of Algebraic Theories'. *Proceedings, National Academy of Science*, (50), 1963.

[Law69] F. W. Lawvere. 'Adjointess in Foundations'. *Dialectica*, 23(3/4), 1969.

[Lew60] C.I. Lewis. *A survey of symbolic logic*. Dover, 1960.

[LMS91] R. A. Lewin, I. F. Mikenberg, and M.G. Schwartz. 'C_1 is not algebraizable'. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32(4), 1991.

[LMS94] R. A. Lewin, I. F. Mikenberg, and Maria G. Schwarze. 'P1 Algebras'. *Studia Logica*, 53, 1994.

[ŁosS58] J. Łos and R. Suszko. 'Remarks on sentential logics'. *Indag. Math*, (20), 1958.

[Löw67] L. Löwenheim. On possibilities in the calculus of relatives. In *A Source book in Mathematical Logic, Harvard*, pages 228–251, 1967.

[Mac96] S. MacLane. 'Structure in Mathematics'. *Philosophia Mathematica*, 4(3), 1996.

[Mak05] D. Makinson. *'Friendliness for logicians'en.* College Publications, 2005.

[McC67] S. McCall. *Polish logics, 1920-1939.* Oxford, 1967.

[Mes89] J. Meseguer. 'General Logics'. *Proceedings Logic Colloquium 1987*, (Elsevier Science Publishers, North-Holland), 1989.

[MO] J. Meseguer and N.M. Oliet. General logics and logical frameworks. In *What is a logic?* Dov Gabbay.

[Mor80] C. Mortensen. 'Every quotient algebra for c_1 is trivial'. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 21(4), 1980.

[NA01] D. Niwisky and A. Arnold. *Rudiments of μ-calculus.* Elsevier, North-Holland, 2001.

[Pri04] C. Prieto. *Topología.* Fondo de Cultura Economica, 2004.

[Pue06] E. Lluis Puebla. *Un primer curso en teoría de grupos.* Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[Ras74] H. Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-classical Logics.* North-Holland, Amsterdam, 1974.

[RS63] H. Rasiowa and R. Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics.* Pánstowe Wydawnictwo Naukowe, 1963.

[Sko70] T.A. Skolem. *Selected works in logic.* Scandinavian University Books, 1970.

[Sus75] R. Suszko. ‘Abolition of the Fregean Axiom’. *Lecture Notes in Mathematics*, (453), 1975.

[Tar28] A. Tarski. ‘On Some fundamental Concepts of Metamathematics’. en [?], 1928.

[Tar30] A. Tarski. ‘Fundamental Concepts on the Methodology of Deductive Science‘. en [?], 1930.

[Tar35] A. Tarski. ‘Foundations of the Calculus of Systems’. en [?], 1935.

[Tar83] A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Hackett Publishing Company, 1983.

[vB79] J.F.A.K. van Benthem. ‘Canonical Modal Logics and Ultrafilters Extensions. *The Journal of Symbolic Logic*, 44(1), 1979.

[Ven95] Y. Venema. ‘Cylindric Modal Logics’. *Journal of Symbolic Logic*, (60), 1995.

[vH67] J. van Heijenoort. ‘Logic as Calculus and Logic and Language’. *Synthese*, 17, 1967.

[Via00] L. Viagnò. *Labelled Non-Classical Logics*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[Vou03] G. Voutsadakis. ‘Categorical Abstract Algebraic Logic: Equivalent Institutions’. *Studia Logica*, (74), 2003.

[Wój88] R. Wójcicki. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Kluwer, Dordrecht, 1988.

[WR90] A. N. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica*. Cambridge University, 1990.

Afinidad

El concepto de *afinidad (friendliness)* ha sido un derrotero en el trabajo de diversos lógicos y se puede caracterizar como el intento de una clasificación, o bien, agrupamiento de las diversas lógicas existentes bajo el criterio de su afinidad o no-afinidad con la lógica clásica, de acuerdo al grado en que podamos aplicar o generalizar resultados de la metateoría de la lógica clásica, o propiedades de este sistema lógico. Uno de los caminos tomados para lograr esto, es aquel de señalar las características que una lógica tendría que generalizar. Un ejemplo de ello lo podemos ver en el trabajo de Hintikka.

En su artículo [Hin02], Hintikka hace notar que en la lógica clásica, la dependencia de las variables en una fórmula cuantificada es una relación antisimétrica y transitiva. Sin embargo, esto no tiene porque ser así en toda lógica posible. Una teoría general de las lógicas que tuviera como deber crear un lenguaje universal, un *Begriffsschrift* en el sentido de Frege ([Hin02, p. 404]), deberá ser capaz de expresar cualquier forma de dependencia e independencia entre variables. Sea cual sea la forma que tenga tal cuantificación, a este tipo de estructuras se le llama 'libremente amigables'.

Un tipo de cuantificación que no es una relación antisimétrica y transitiva es la cuantificación ramificada tipo Henkin.

Por ejemplo en la siguiente fórmula:

$$\forall x \exists y F(x, y)$$

y depende de x, y en la siguiente:

$$\forall x \exists z \forall y \exists u F(x, y, z, u)$$

z depende de x, pero no de y en tanto que u depende tanto de x como de y. Sin embargo, esta dependencia puede ser modificada mediante sus funciones de Skolem si se cuantifica de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
\forall x \exists y \arrow[dr] & \\
& F[x, y, z, u] \\
\forall z \exists u \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(1)

La condición de verdad de 4.2 está dada por sus funciones de Skolem de la siguiente manera:

(A.1) si y sólo si $(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall z)F(x, f(x), z, g(z))$

El significado de esta fórmula puede ser descrito mediante teoría de juegos. Se tienen dos equipos, cada uno con dos agentes, el 'verificador' y el 'falsificador'. Este último elige dos individuos al azar x y z y en el otro equipo uno elige y conociendo únicamente a x y el otro elige u conociendo únicamente a z. El equipo verificador gana si y sólo si los individuos elegidos satisfacen la fórmula. La fórmula es verdadera si y sólo si existe una estrategia ganadora para el equipo verificador. Las estrategias de cada jugador se dan por los diferentes arreglos de sus funciones de Skolem.

Esto ilustra el enfoque llamado de semántica de teoría de juegos y es una herramienta que ayuda en el estudio de patrones más complicados de independencia en cuantificadores. Esto constituye entonces un ejemplo de extensión de ciertas propiedades afines o compatibles con la lógica clásica por medio de la teoría de juegos.

Wajsberg

Un álgebra de Wajsberg ([FRT84]) es una cuádrupla:

$\boldsymbol{A} = \langle A, \rightarrow, \neg, 1 \rangle$

tal que los siguientes axiomas son satisfechos:

- $1 \rightarrow x = x$
- $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$
- $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$
- $(\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$

La obra de Wajsberg es importante no sólo porque dió una axiomatización al cálculo mutivaluado de Łukasiewicz ([McC67]), sino porque este tipo de álgebras, basadas en su trabajo, son las más comunes después de las cilíndricas y las poliádicas.

Problema de representación

Como mencionamos en los capítulos 1 y 2, las álgebras cilíndricas han dado pie a muchos problemas interesantes dentro de la lógica algebraica. Uno de ellos es el llamado problema de representación. Tarski introdujo este tipo de álgebras de forma que cumplieran las siguientes dos condiciones (equivalentes).

Para cualquier álgebra $\mathcal{A}$ que tenga la misma signatura que CA_ω las siguientes dos condiciones son equivalentes:

1. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ para algún conjunto de fórmulas de primer orden,

2. $\mathcal{A}$ es una CA_ω tal que $\Delta_x = \{i \in \omega : c_i x \neq x\}$ es finito para cada $x \in A$.

Donde CA_ω es la clase de todas las álgebras cilíndricas de dimensión ω. Un álgebra para la que el conjunto Δx es finito para toda x es llamada localmente finita. Además, propone el siguiente hecho:
Si $\mathcal{A} \in CA_\omega$ es localmente finita, entonces $\mathcal{A}$ es isomorfa al subproducto directo de Cs_ω.

Tratar de generalizar esta proposición, quitando las restricciones de cardinalidad, es decir, aplicarlo para cualquier cardinal α e intentar quitar la restricción de que $\mathcal{A}$ sea localmente finita, es lo que se ha llamado tradicionalemtne el problema de representación.

El problema de representación en las álgebras booleanas está completamente resuelto por el teorema de representación de Stone, y es en gran medida el mejor conocido de este tipo de problemas. Este teorema formulado algebraicamente tiene una contraparte topológica. Presentamos la versión algebraica.

Si F es un filtro en el álgebra booleana potencia $< \wp(X), \subseteq >$, decimos que F es un filtro sobre X. De forma análoga, un ultrafiltro en $< \wp(X), \subseteq >$ es un ultrafiltro en X.

Dada un álgebra booleana B, sea $S(B)$ el conjunto de todos los ultrafiltros en B. Si $X \subseteq S(B)$ denotamos su complemento en $S(B)$, $S(B) - X$ por cX.

Entonces podemos enunciar el teorema en su versión algebraica:

Teorema .2 *Dada un álgebra booleana B, ésta es isomorfa a un subconjunto del $\wp(S(B))$, considerado como un álgebra booleana potencia.*

Su contraparte topológica se enuncia como sigue:

Teorema .3 *Cada espacio booleano es homeomorfo al espacio de Stone de su álgebra característica.*

Podemos encontrar un ejemplo de este tipo de espacios para lógica de primer orden en el clásico [Bar78].

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y sea S el conjunto de todas sus teorías completas. Llamamos a los elementos $p = Th(\mathfrak{K}) \in S$ *puntos* de S.

Queremos demostrar que S, el espacio de L es un espacio de Stone.

Para cada enunciado φ de L, sea

$$[\varphi] = \{p \in S : \varphi \in p\}$$

y sea S la topología cuyos conjuntos básicos cerrados son los conjuntos de la forma $[\varphi]$

Queremos dar una base mediante una familia $\{[\varphi]\}$ de cerrados tales que:

$Si\ \{[\varphi]\}_{i\in I} \subseteq \{[\varphi]\},\ entonces\ \bigcap_{i\in I}[\varphi]_i \in \{[\varphi]\}$ y si

Si $\{[\varphi]\}_{i\in I} \subseteq \{[\varphi]\},\ finito,\ entonces,\ \bigcup_{i\in I}\{[\varphi]\}i \in \{[\varphi]\}$

Veamos que tales conjuntos forman una base de abiertos-cerrados.

Estos conjuntos forman una base cerrdada ya que:

$$[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$$

y los conjuntos cerrados de S son exactamente aquellos conjuntos que son la intersección de cerrados básicos, es decir, son los conjuntos de la forma:

$$S(T) = \bigcap_{\varphi\in T}[\varphi] = \{p \in S : T \subseteq p\}$$

Observemos que estos conjuntos también son abiertos ya que para cualquier $\varphi \in L$ $[\neg\varphi]$ es abierto ya que

$$[\neg\varphi] = S - [\varphi]$$

tenemos entonces una base de abiertos-cerrados para este espacio.

Ahora queremos ver que este espacio es de Hausdorff.

Sean $p, q \in S$, con $p \neq q$ entonces existe un enunciado $\varphi \in p - q$ y $p \in [\varphi]$, $\ q \notin [\varphi]$, pero esto implica que q pertenece al complemento de $[\varphi]$, es decir, $q \in S - [\varphi] = [\neg\varphi]$ que es abierto como vimos líneas atrás; y claramente $[\varphi] \cap [\neg\varphi] = \varnothing$
Veamos por último que este espacio es compacto.

Una teoría T es satisfacible sólo en caso que:

$$\bigcap_{\varphi \in T} [\varphi] \neq \varnothing$$

entonces por teorema de compacidad, si cada conjunto finito de básicos cerrados $\{[\varphi] : \varphi \in T\}$ tiene una intersección distinta del vacío, entonces, todo el conjunto tiene una intersección distinta del vacío y por tanto, este espacio es compacto. Tenemos entonces que S es un espacio de Stone.

El teorema de representación de Stone ha dado además varias versiones para diferentes áreas. En lógica modal por ejemplo, el teorema conecta un álgebra modal M con el marco que toma los ultrafiltros en M y la relación entre dichos ultrafiltros preservando la estructura como es usual. Este tipo de marcos son utilizados para demostraciones de completud para éstas lógicas. Un artículo que muestra este tipo de pruebas es [vB79].

Institución y π-institución

Definición .6 *(Goguen-Burstall)*
Una institución $I = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, MOD \models \rangle$*, consiste de:*

1. *Una categoría* ***Sign*** *cuyos objetos son llamados signaturas,*

2. *Un funtor SEN:* $\boldsymbol{Sign} \rightarrow \boldsymbol{Set}$ *llamado el funtor de fórmulas y que nos da para cada signatura* Σ *un conjunto cuyos elementos son llamados fórmulas sobre la signatura* Σ *o* Σ*-fórmulas,*

3. *Un funtor* $MOD : \boldsymbol{Sign} \rightarrow \boldsymbol{Cat^{op}}$ *llamado el funtor modelo y que da por cada signatura* Σ *una categoría cuyos objetos son llamados* $\Sigma -$ *modelos y cuyos morfismos son llamados* $\Sigma - morfismos$*,*

4. *Una relación* $\models_\Sigma \subseteq |MOD(\Sigma)| \times SEN(\Sigma)$*, para cada* $\Sigma \in |\boldsymbol{Sign}|$*, llamada* Σ*-satisfacción tal que para cada morfismo* $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 \in \boldsymbol{Sign}$ *la condición de satisfacción:*

$$m_2 \models_{\Sigma_2} SEN(f)(\varphi_1) \text{ si y sólo si } MOD(f)(m_2) \models_{\Sigma_1} \varphi_1$$

se cumple para cada $m_2 \in |MOD(\Sigma_2)|$ *y cada* $\varphi_1 \in SEN(\Sigma_1)$*.*

Esta definición y las conexiones entre sus componentes pueden ser ilustradas mediante el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Set} \\
\mathbf{Sign} \arrow[ur, "SEN"] \arrow[dr, "MOD"'] & \models \\
 & \mathbf{Cat}^{op}
\end{tikzcd}
$$

Más aún, la condición de satisfacción puede ser dada como sigue:

Si $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ es un morfismo en **Sign**, entonces:

$$
\begin{tikzcd}
MOD(\Sigma_1) & \models_{\Sigma_1} & SEN(\Sigma_1) \arrow[d, "SEN(f)"] \\
MOD(\Sigma_2) \arrow[u, "MOD(f)"] & \models_{\Sigma_2} & SEN(\Sigma_2)
\end{tikzcd}
$$

La noción de π-institución es definida como sigue:

Definición .7 *(Fiadeiro y Sernadas)*

Una π-institución $\mathcal{I} = \langle \boldsymbol{Sign}, SEN, \{C_\Sigma\}_{\Sigma \in |\boldsymbol{Sign}|} \rangle$ consiste de:

1. *Una categoría **Sign** cuyos objetos son signaturas,*

2. *Un funtor SEN: **Sign** $\to$ **Set** que a cada signatura le asocia su conjunto de fórmulas,*

3. *Un mapeo $C_\Sigma : \wp(SEN(\Sigma)) \to \wp((\Sigma))$ por cada $\Sigma \in |\boldsymbol{Sign}|$ llamado Σ-cerradura tal que:*

- $A \subseteq C_\Sigma(A)$, *para toda* $\Sigma \in |\boldsymbol{Sign}|, A \subseteq SEN(\Sigma)$,
- $C_\Sigma(C_\Sigma(A)) = C_\Sigma(A)$ *para toda* $\Sigma \in |\boldsymbol{Sign}|, A \subseteq SEN(\Sigma)$,
- $C_\Sigma(A) \subseteq C_\Sigma(B)$ *para toda* $\Sigma \in |\boldsymbol{Sign}|, A \subseteq B \subseteq SEN(\Sigma)$,
- $SEN(f)(C_{\Sigma_1}(A)) \subseteq C_{\Sigma_2}(SEN(f)(A))$, *para toda* $\Sigma_1, \Sigma_2 \in |\boldsymbol{Sign}|,\ f \in \boldsymbol{Sign}(\Sigma_1, \Sigma_2),\ A \subseteq SEN(\Sigma_1)$.