



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

**INCORPORACION DE FACTORES
MACROECONOMICOS EN LOS
MODELOS DE VALUACION DE
PRODUCTOS DERIVADOS**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
DOCTORA EN CIENCIAS
P R E S E N T A :
MA. DEL ROCIO ELIZONDO CAMEJO

DIRECTOR DE TESIS: PABLO PADILLA LONGORLA



DIVISION DE ESTUDIOS
MÉXICO, D.F. DE POSGRADO OCTUBRE 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a Dios por permitirme terminar uno más de mis sueños.

Esta tesis es parte de mi esfuerzo, así como de todas las personas que de alguna forma han estado detrás de mi apoyándome incondicionalmente.

Agradezco a mi esposo Julio, quien me ha dado su apoyo y su amor incondicional y ha estado conmigo en los buenos y malos momentos.

A mis padres y hermanos por estar conmigo en todo momento y confiar en mí en cada paso que doy.

A mis sobrinos, a quienes quiero como mis hijos, por darme todo su amor y la oportunidad de ser parte de su vida.

A mi familia por darme su amor y su ternura, así como su apoyo.

Gracias a la UNAM por permitirme realizar mis estudios de preparatoria, licenciatura y ahora de doctorado.

Quiero agradecer muy especialmente a Pablo Padilla por ayudarme y guiarme en mi camino profesional y por darme todo su tiempo para terminar esta tesis. Para mí además de ser un gran profesor, asesor y tutor es un excelente ser humano y un gran amigo.

También quiero agradecer a mis sinodales: Dr. Gilberto Flores Gallegos, Dr. Mogens Bladt Petersen y Dr. Alvaro Cartea por sus comentarios y sugerencias para mejorar mi tesis.

De una manera muy especial agradezco a mi sinodal la Dra. Patricia Saavedra por sus importantes sugerencias, ya que gracias a ellas la tesis dio un giro muy importante, principalmente en el capítulo de americanas.

Agradezco a todos mis maestros por sus enseñanzas y a la coordinación del posgrado por todo su apoyo.

A todos mis amigos y compañeros del doctorado por hacerme la carga más ligera.

También agradezco de todo corazón el apoyo económico otorgado por CONACYT Y DGEP, ya que sin su apoyo no hubiera sido posible realizar mis estudios de doctorado.

Gracias a Daniel Garcés por insistirme arduamente a que realizara mis estudios de doctorado.

Finalmente no sin ser más importante que los demás agradecimientos, le doy gracias al BANCO DE MÉXICO por su apoyo al otorgarme mi licencia sin goce de sueldo durante el tiempo que duro el doctorado y por permitirme seguir laborando en tan importante institución.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	XIII
1. Herramientas matemáticas	1
1.1. Ecuaciones de Kolmogorov	1
1.1.1. Motivación	1
1.1.2. Deducción usando caminatas aleatorias	2
1.1.3. Interpretación	8
1.1.4. Deducción matemática formal	16
1.2. Representación de Feynman-Kac	22
1.2.1. Un caso especial	23
1.2.2. Movimiento browniano: ruina o descuento	24
1.2.3. La representación para el movimiento browniano	25
1.2.4. La representación para procesos de difusión	31
1.2.5. La representación y la ecuación de Black-Scholes	33
2. Enfoque analítico de la TROM	37
2.1. Introducción	38
2.2. Principio del máximo	40
2.2.1. Principio débil del máximo	40
2.2.2. Principio fuerte del máximo	41
2.3. Valuación de opciones	44
2.3.1. Opciones de compra europeas y americanas	44
2.3.2. Extensión a modelos semi lineales	61
2.4. Resultados importantes	62
2.4.1. Principio del máximo para dominios estrechos	62
2.4.2. Método de deslizamiento en dominios generales	65
3. Opciones americanas	69
3.1. Valuación mediante la desigualdad diferencial parcial (DDP)	70
3.1.1. Análisis para una opción de venta americana	72
3.1.2. Opción de compra americana con dividendos	73

3.1.3.	Solución de las opciones de tipo americano	74
3.2.	Método probabilístico	75
3.3.	Una nueva forma de valuar opciones americanas	76
3.3.1.	La nueva fórmula general	77
3.3.2.	Fórmula para una opción de venta	83
3.3.3.	Consistencia de la fórmula	84
3.3.4.	Aplicación de la nueva fórmula	93
3.3.5.	Comparación con otros métodos	97
4.	Factores macroeconómicos	105
4.1.	Introducción	106
4.2.	Modelos con variables macroeconómicas	111
4.2.1.	Modelo generalizado del valor presente neto	113
4.3.	Modelos de riesgo de crédito	117
4.3.1.	Revisión histórica	117
4.3.2.	Nuevas metodologías	128
	Apéndice A. Opciones financieras	141
A.1.	Antecedentes	141
A.1.1.	¿Qué es una opción?	143
A.1.2.	Tipo de opciones	145
	Apéndice B. Movimiento browniano	151
B.1.	Definición	151
B.1.1.	Propiedades de las trayectorias del movimiento browniano	151
B.1.2.	Algunos resultados del movimiento browniano	153
B.1.3.	Definiciones	153
B.1.4.	Procesos de Wiener	154
	Apéndice C. Integración estocástica	157
C.1.	Integración estocástica	157
C.1.1.	Variación cuadrática del movimiento browniano	159
C.1.2.	Construcción de la integral estocástica	161
C.2.	Cálculo de Itô	164
	Apéndice D. Arbitraje	167
D.1.	Definiciones básicas	167
D.1.1.	Precio de arbitraje	169
	Apéndice E. Valuación de opciones europeas	173
E.1.	Nociones de valuación	173
E.1.1.	Modelo del valor presente	173
E.1.2.	Modelo para valuar opciones	174
E.1.3.	Lema de Itô	175

E.1.4. Valuación de una opción europea mediante la ecuación de Black-Scholes	176
E.1.5. Solución explícita de la ecuación de Black-Scholes para opciones europeas	180
Apéndice F. Cambio de medida y fórmula de Samuelson	183
F.1. Cambio de medida representación de martingalas	183
F.1.1. Probabilidades equivalentes	183
F.1.2. Teorema de Girsanov	183
F.1.3. Estimación y cobertura de una opción en el modelo de Black-Scholes	184
F.2. Fórmula de Samuelson	186
Apéndice G. Riesgo de crédito	189
G.1. Definiciones complementarias	189
G.2. Estimación de derivados con contraparte riesgosa	190
G.3. Estimación de derivados de crédito	193
G.4. Como construir matrices de transición	194
Apéndice H. Solución explícita de la ecuación de Fokker-Planck	197
Apéndice I. Probabilidad del tiempo de salida	201
I.1. Ecuación del tiempo de salida	201
I.2. Esperanza del tiempo de salida	202
I.2.1. Solución a la ecuación de la esperanza del tiempo de salida	203

Índice de figuras

1.	Nueva forma de valuar opciones americanas	XV
2.	Propiedades de Merton que se demuestran analíticamente	XVI
3.	Resumen de metodologías más comunes.	XVIII
1.1.	Caminata aleatoria para el problema hacia atrás	4
1.2.	Caminata aleatoria para el problema hacia adelante	7
1.3.	Espacios fase	14
1.4.	Distribución Gaussiana ordinaria	15
1.5.	Distribución estacionaria con dos máximos	16
2.1.	La región de U_T	40
2.2.	Principio fuerte del máximo para la ecuación de calor	42
2.3.	Diferentes tiempos antes de expirar	57
2.4.	Diferentes precios de ejercicio	59
3.1.	Comparación de las opciones europeas con respecto a su función de pago.	77
3.2.	Comparación de las opciones americanas con respecto a su función de pago.	78
3.3.	Relación entre los tiempos de expiración	79
3.4.	Región de solución de una opción americana	81
3.5.	Variación de la Δ con respecto a las opciones europeas.	89
3.6.	Diagrama de flujo para encontrar el precio de una opción de venta americana dada por la fórmula (3.29).	94
4.1.	Función potencial $g(x, y)$	130
4.2.	Solución de la ecuación de F-P 1	132
4.3.	Solución de la ecuación de F-P 2	133
4.4.	Solución de la ecuación de F-P 3	134
4.5.	Solución de la ecuación de F-P 4	135
4.6.	Pozos	136

A.7. Diagrama de pago para una opción de compra $C_{Eu}(S, T)$ (línea gruesa) y el valor de una opción $C_{Eu}(S, t)$ antes de expirar (línea delgada), como función de S	145
A.8. Diagrama de pago para una opción de venta $P_{Eu}(S, T)$ (línea gruesa) y el valor de una opción $P_{Eu}(S, t)$ antes de expirar (línea delgada), como función de S	146

Índice de cuadros

3.1. Comparación de probabilidades ρ	96
3.2. Ejemplo de probabilidades ρ	96
3.3. Precios de una opción de venta europea	96
3.4. Valores de una opción de venta americana	97
3.5. Comparación de una opción de venta americana 1	102
3.6. Comparación de una opción de venta americana 2	103
3.7. Comparación de una opción de venta americana 3	103
4.1. Desarrollo histórico de la macroeconomía	107
4.2. Calificaciones de crédito	121

Introducción

Desde los griegos, romanos y fenicios ya se llevaban a cabo contratos de derivados, específicamente de opciones. Pero no fue sino hasta el siglo XVI cuando se dio un mercado más organizado en Holanda. En 1900, Louis Bachelier fue el primero en modelar el movimiento browniano para valorar opciones financieras. En 1973 se da una fórmula matemática más completa para valorar opciones financieras, encontrada por Black, Scholes y Merton, la cual, hasta la fecha, ha sido la base en el desarrollo de nuevas formas de valorar diferentes instrumentos financieros. Hay que reconocer que aunque la fórmula de Black-Scholes no es muy realista, proporciona una buena aproximación de referencia [73]. Cualquier nuevo método o forma encontrada, es comparada con la fórmula de Black-Scholes, es decir, dicha fórmula de Black-Scholes puede ser considerada como el problema canónico en la valuación de derivados financieros.

A la fecha, se han desarrollado y siguen desarrollándose, nuevas y diversas formas para estimar derivados financieros, así como riesgo de crédito. El problema de todos los modelos existentes es que son poco realistas, ya que los cambios ocurridos en los sistemas económicos y financieros han puesto de manifiesto la necesidad de desarrollar modelos más complejos. Esto es particularmente cierto en el caso de México, donde las peculiaridades del sistema hacen que las metodologías tradicionales no sean aplicables. La extensión de estas metodologías implica, a su vez, la formulación de problemas matemáticos interesantes per se en probabilidad y procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales parciales (problemas de frontera libre), etc. Cada día se está en la necesidad de aplicar matemáticas más sofisticadas.

Los objetivos principales de la tesis son los siguientes:

- 1) Se propone un método alternativo para estimar el precio de una opción americana basado en la fórmula de Samuelson. La idea principal del método radica en valorar una opción europea en cada paso del tiempo, multiplicada por un ponderador muy especial, que representa la probabilidad de permanencia en el estado S (es decir, es la probabilidad de que el activo subyacente tome el valor de S) al tiempo t . Dicha probabilidad se determinará mediante la ecuación de Fokker-Planck (o Kolmogorov hacia adelante). Es importante mencionar que en este caso también se tiene el problema de frontera libre.

Lo relevante de utilizar este método alternativo radica en que en esta nueva forma de valorar opciones americanas se puede incorporar de manera sistemática el impacto de los factores macroeconómicos. Para ello es necesario estudiar la influencia que dichos factores ejercen en la medida libre de riesgo y la forma en que se obtiene dicha medida (en el caso de no arbitraje). En este caso la integración es con respecto al tiempo y no con respecto al activo, como en la mayoría de las fórmulas existentes para valorar opciones americanas muestran.

En el contexto de un modelo log-normal, se muestra rigurosamente que esta fórmula coincide con los resultados conocidos del modelo Black-Scholes. En este mismo apartado se da una primera aproximación de la nueva forma de valorar opciones americanas y se compara con otros métodos tradicionales (tales como árboles binomiales y método explícito e implícito). Esta aproximación no resulta muy satisfactoria pero tampoco proporciona resultados ilógicos, en este sentido se tiene que trabajar mucho más en dicha aproximación, lo cual se dejará para trabajo futuro.

Para visualizar dicha propuesta se muestra el mecanismo de la figura 1.

- 2) Como un segundo punto se da un acercamiento a la teoría racional de opciones de Merton (TROM), es decir, se demuestran las propiedades de opciones financieras dadas por Merton, utilizando herramientas puramente matemáticas. Esto no quiere decir que no existen otras, simplemente aquí se enfoca el análisis a técnicas de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Cabe mencionar que desde un punto de vista probabilístico, algunas propiedades pueden demostrarse con el teorema de paro óptimo.

En la figura 2, se muestra en forma resumida las propiedades de Merton que serán demostradas mediante las técnicas de EDP.

Cabe mencionar que la técnica que se utilizará en las demostraciones de la TROM, puede ser extendida a modelos semilineales y no lineales ([18] y [65]). Al final del capítulo correspondiente se muestra el caso semilineal.

Este punto surge por la necesidad de demostrar algunas propiedades de monotonía de los precios de las opciones, desde un punto de vista más analítico, las cuales servirán de apoyo y justificación para probar algunos hechos importantes de la tesis.

- 3) Como una aplicación de todas las herramientas desarrolladas en los incisos an-

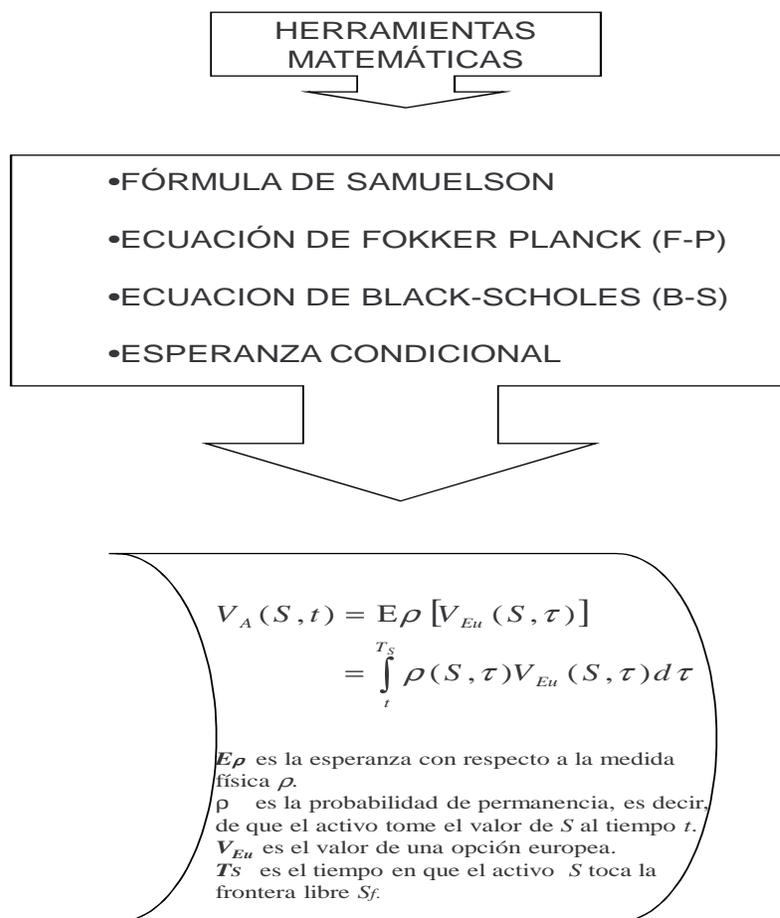


Figura 1: Nueva forma de valuar opciones americanas

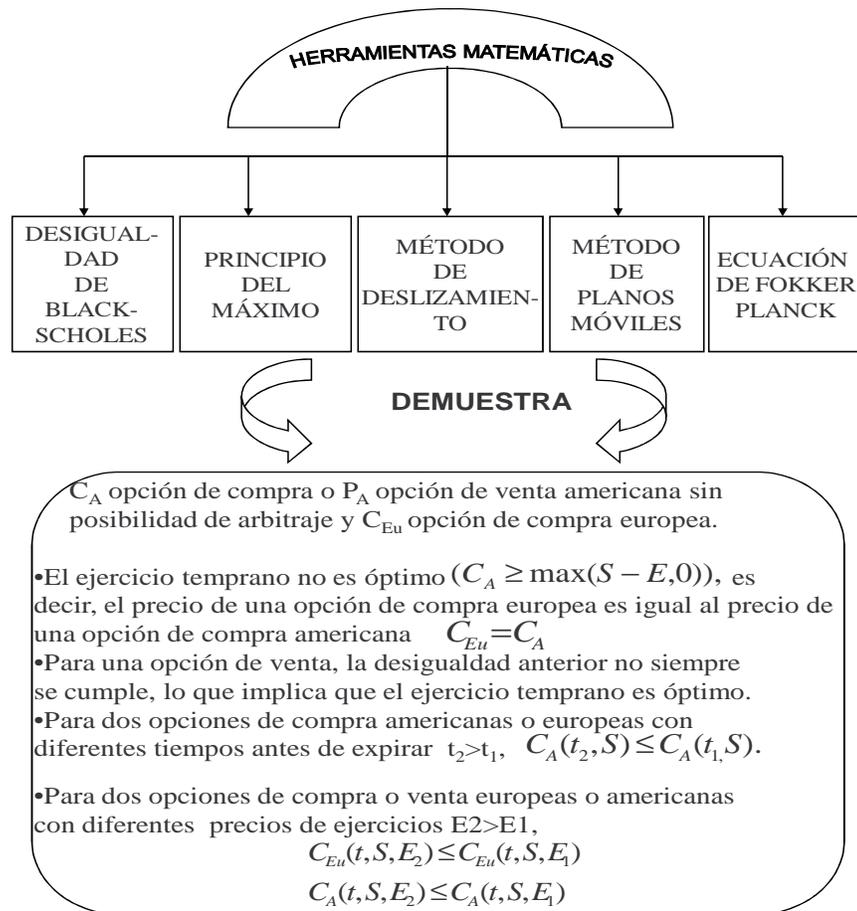


Figura 2: Propiedades de Merton que se demuestran analíticamente

teriores, particularmente de la parte de incorporar factores macroeconómicos a diversos modelos de productos derivados y riesgo de crédito, se propone una estructura dinámica para la valuación de derivados de crédito, así como la estimación de las probabilidades de transición en las calificaciones de transición en riesgo crediticio. También se modifica la metodología del modelo de valor presente neto (VPN) incorporando factores macroeconómicos usando la misma probabilidad de transición antes mencionada.

En la figura 3 se muestran las metodologías históricas más comunes, que llevaron a encontrar la mejor forma de llegar a los objetivos principales de la tesis.

Las herramientas naturales para llegar a los objetivos son:

- a) La fórmula de Samuelson y su conexión con la fórmula de representación de Feynman-Kac ([66] o Capítulo 1).

La fórmula de Samuelson está dada por el siguiente resultado.

Considere un proceso estocástico S_t con valor inicial S_0 definido en un espacio de probabilidad (Ω, P) , donde P es la medida física bajo la cual la distribución de las variables S_t son consideradas. Dicho proceso describe el desarrollo del precio del activo en un mercado financiero. Suponga que la tasa libre de riesgo es r .

El rendimiento esperado del activo en el intervalo de tiempo $[0, T]$ es $E_P(S_T)/S_0$, donde E_P denota la esperanza bajo la medida física P . Entonces el valor presente de S_T está dado por

$$\frac{S_0}{E_P(S_T)} S_T.$$

Su valor futuro libre de riesgo es entonces

$$e^{rT} \frac{S_0}{E_P(S_T)} S_T.$$

Definición 1 *El precio $p(g)$ de un derivado europeo $g(S_T)$ está dado por*

$$p(g) = e^{-rT} E_P \left[g \left(\frac{S_T}{E_P(S_T)} S_0 e^{rT} \right) \right], \quad (1)$$

donde E_P representa la esperanza con respecto a la medida física, r es la tasa de interés libre de riesgo y $E_P(S_T) = e^{\mu T} S_0$ con S_0 y S_T el valor inicial y final del activo subyacente y μ no es necesariamente la tasa instantánea del rendimiento.

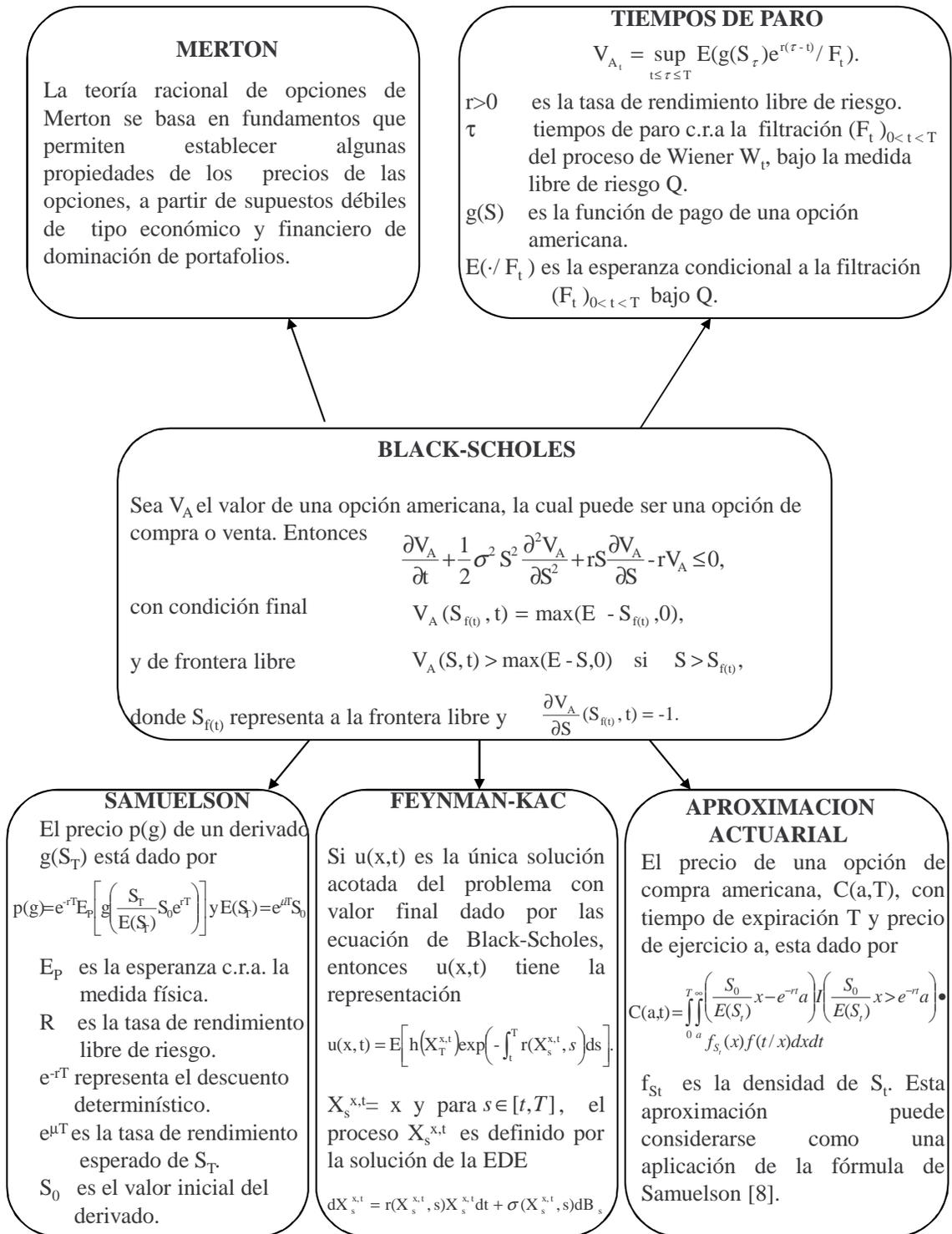


Figura 3: Resumen de metodologías más comunes.

El hecho importante de la fórmula de Samuelson es que no hace referencia a ninguna distribución específica.

En el caso particular donde S_t sigue un proceso lognormal, puede demostrarse que la fórmula (1) coincide con la fórmula de Black-Scholes, es decir,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma^2 S_t dW_t,$$

con valor inicial S_0 , μ corresponde a la tasa media en el crecimiento del activo, σ es la volatilidad del activo y W_t es el movimiento browniano.

Entonces la solución a la ecuación diferencial estocástica es

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t},$$

entonces el precio del activo está dado por

$$p(g) = e^{-rT} E_Q \left[g \left(\frac{S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}}{S_0 e^{\mu T}} S_0 e^{rT} \right) \right] \quad (2)$$

$$= e^{-rT} E_Q [g(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma X_T})]. \quad (3)$$

En este caso se transforma el problema de calcular una esperanza con una medida física, en una esperanza con una medida neutral al riesgo, considerando el descuento apropiado. Para más detalles ver Apéndice *F*.

La ventaja y la importancia de usar la fórmula de Samuelson para llegar al primer objetivo de esta tesis es que al considerar la medida física, se puede introducir la función de densidad de probabilidad, la cual puede depender de factores macroeconómicos.

Como consecuencia de la fórmula de Samuelson, se da un nuevo enfoque que relaciona el problema analítico, de la solución de la ecuación diferencial parcial (Black-Scholes) y el problema probabilístico, de calcular una esperanza. Dicho enfoque está representado por la fórmula de Feynman-Kac (ver Capítulo 1). La importancia de esta formulación radica en hacer todos los cálculos en un mundo neutral al riesgo, es decir, se utiliza r la tasa libre de riesgo en lugar de usar μ , la tasa media de crecimiento en el precio del activo subyacente (ver [51], Apéndice B, Apéndice C y figura 3).

- b)** La ecuación de Fokker-Planck (Kolmogorov hacia adelante) y Kolmogorov hacia atrás asociadas a la densidad de la medida libre de riesgo ([72], [58], [61] y [71] y Capítulo 1).

Las ecuaciones de Kolmogorov son importantes para alcanzar el objetivo, ya que se considera que la función de densidad de probabilidad mencionada en a), satisface una ecuación de Fokker-Planck.

La importancia de usar esta ecuación de Fokker-Planck radica en que cada factor macroeconómico puede ser descrito por una determinada ecuación diferencial estocástica y así para varios factores macroeconómicos se tendrá un sistema de ecuaciones. Sin embargo la densidad de transición de dicho sistema satisface una sola ecuación diferencial parcial para la probabilidad de permanencia (ρ) en un determinado estado en algún tiempo dado. Esto simplifica el problema considerablemente, en caso de introducir factores macroeconómicos.

- c)** La relación con el enfoque probabilístico (martingalas, tiempos de paro, etc., ver la figura 3 y [42], [51], [54], [66] y [69]).
- d)** La relación con el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales (Black-Scholes [55] y [73]).

Los cuatro puntos de a)-d) dan la pauta para proporcionar una nueva forma de valorar opciones americanas.

La tesis está dividida de la siguiente forma. En el capítulo 1 se proporcionan las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de la tesis, tales como las ecuaciones de Kolmogorov y la representación de Feynman-Kac. En el capítulo 2 se muestran los principios en los que se basa la teoría racional de opciones de Merton [51] y se proporciona una de las contribuciones de la tesis, es decir, las demostraciones analíticas de las propiedades de la teoría racional de opciones de Merton, basadas en el principio del máximo ([23] y [14]), métodos de planos móviles y de deslizamiento [6]. En el capítulo 3 se proporcionan las metodologías más comunes para valorar opciones americanas y se da la principal contribución de la tesis, que es la nueva forma de valorar opciones americanas. En el capítulo 4 se bosquejan algunos modelos, tanto de derivados financieros, valor presente neto, así como de riesgo de crédito, en los cuales se aplican los métodos o técnicas desarrolladas en el capítulo 3. Y en los apéndices del A al I, se proporcionan definiciones básicas de opciones financieras, movimiento browniano, integración estocástica, arbitraje, cambios de medida y riesgo de crédito.

Capítulo 1

Herramientas matemáticas

En este capítulo se darán las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de la tesis. En la primera sección se muestran detalladamente las ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante que proporcionarán la densidad libre de riesgo, la cual es indispensable, ya que se utilizará para la valuación de derivados financieros, así como el cálculo de riesgo de crédito. En la segunda sección se muestra la fórmula de representación de Feynman-Kac que no es más que una derivación de la fórmula de Samuelson que relaciona la solución de la ecuación diferencial parcial (EDP(1.25)) y el problema probabilístico, de calcular una esperanza (1.26). Lo interesante de esta representación es que un problema en el mundo real es transformado a un problema en un mundo neutral al riesgo.

1.1. Ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante (Fokker-Planck)

En esta sección primeramente se obtienen intuitivamente las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante (*forward*) y hacia atrás (*backwards*), para la probabilidad de transición usando caminatas aleatorias [73]. Posteriormente se deduce la ecuación de Fokker-Planck mediante un enfoque físico, así como su representación al problema estacionario. Se darán ejemplos representativos de dichas ecuaciones ([71], [61] and [?]). Finalmente se proporcionan las deducciones matemáticas formales de las ecuaciones de Kolmogorov, desde un punto de vista probabilístico.

1.1.1. Motivación

En un mundo realista, existen una multitud de factores o variables que afectan la economía de un país, en particular los mercados financieros, los cuales en muchas ocasiones no se pueden manipular o medir, por lo que se dice que dichos factores o variables tienen un comportamiento aleatorio en sistemas económicos o financieros.

Una herramienta natural para poder representar este tipo de efectos aleatorios es la probabilidad, ya que por medio de ella se pueden desarrollar modelos matemáticos o económicos tan complejos como sea necesario, de tal forma que capten los efectos aleatorios que se desean analizar.

Las herramientas matemáticas más adecuadas, para el análisis de datos económicos y financieros, son las ecuaciones diferenciales estocásticas, ecuaciones diferenciales, esperanzas condicionales, tiempos de paro, etc.

Para fines de la tesis lo que interesa es poder estimar los precios de derivados financieros, así como riesgo del crédito con un enfoque más realista, es decir, se desean encontrar modelos financieros y de riesgo de crédito en los cuales se puedan introducir sistemáticamente los efectos de los factores macroeconómicos.

En el caso de la valuación de derivados financieros se utilizará como base la fórmula de Samuelson (1), que corresponde a calcular la esperanza con respecto a la medida física P . Es importante recordar, que cuando se calcula una esperanza, hay que considerar una función de densidad con respecto de quien se esté tomando la esperanza (probabilidad del tiempo de transición). La forma natural en que se calculará esta función de densidad será por medio de las ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás o hacia adelante (Fokker-Planck), por tal motivo es interesante e importante conocer como funciona este tipo de ecuaciones para el desarrollo de esta tesis.

La ventaja de usar cualquiera de estas ecuaciones, es que la función de densidad en estudio puede depender de un sistema de ecuaciones (para el caso de esta tesis pueden ser los factores macroeconómicos), y a su vez dicha densidad puede representarse cómo la solución a una sólo ecuación diferencial parcial, lo cual hace el estudio más simple.

La utilidad de las ecuaciones de Kolmogorov radica en calcular la densidad asociada a una ecuación diferencial estocástica, como se muestra en lo siguiente.

A continuación se da la deducción intuitiva de las ecuaciones de Kolmogorov utilizando trayectorias trinomiales aleatorias.

1.1.2. Deducción usando caminatas aleatorias

La función de densidad de transición

Se derivará una ecuación para la función de densidad para una variable aleatoria definida por una ecuación diferencial estocástica (EDE). Dicha densidad describe la evolución temporal de la posición, x , y el tiempo, t , del fenómeno en estudio.

Se introduce una variable aleatoria x , la cual satisface la EDE

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dW, \quad (1.1)$$

donde f y g son funciones que dependen de x y t , y W es un proceso de Wiener o movimiento browniano.

$f(x, t)dt$ corresponde a la parte determinística del proceso y

$g(x, t)dW$ es la parte aleatoria del mismo proceso.

Entonces, la función de densidad de transición $p(x, t; x^*, t^*)$ con x^* y t^* los valores futuros de x y t respectivamente, con $t \leq t^*$, para algún conjunto X , tiene las siguientes propiedades:

i) La probabilidad de que $x \in X$ al tiempo t dado x^* al tiempo t^* es

$$\int_X p(x, t; x^*, t^*)dx.$$

ii) La probabilidad de que $x^* \in X$ al tiempo t^* dado que x al tiempo t es

$$\int_X p(x, t; x^*, t^*)dx^*.$$

Para entender mejor las dos propiedades anteriores (i-ii) véase el siguiente ejemplo: suponga que se conoce el valor de x en algún tiempo t , entonces a menos de que $g = 0$ en la EDE (1.1), existe incertidumbre en el valor futuro de x . El tiempo y valor futuro de la variable aleatoria se denota por t^* y x^* respectivamente. En el inciso i), se conoce el valor futuro de x^* con certeza, por lo cual se podría encontrar su función de densidad si después de todo (1.1) tiene toda la información del movimiento de x . A esta función de densidad se le llamará problema hacia atrás (backwards). Inversamente, si se conoce el valor de x y t , entonces se puede determinar la función de densidad para x^* en el tiempo futuro t^* . Este último será llamado el problema hacia adelante (forward). Las dos densidades anteriores están contenidas en la función de densidad de transición $p(x, t; x^*, t^*)$. Esta función p puede ser derivada como la solución de la ecuación diferencial parcial (EDP), que resultará de la deducción de las ecuaciones de Kolmogorov.

La EDP se resuelve para cada uno de dichos problemas. La deducción no es rigurosa pero está basada en una simple representación trinomial de una caminata aleatoria. Esta es una versión discreta de una caminata aleatoria para x , dado el proceso descrito en (1.1).

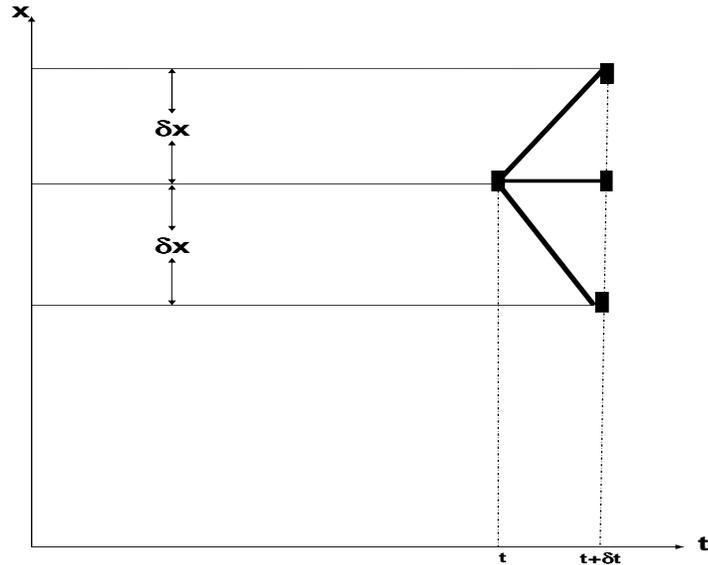


Figura 1.1: Caminata aleatoria para el problema hacia atrás

El problema hacia atrás (retrógrado o backwards)

En la figura 1.1 se muestra el diagrama de una caminata aleatoria trinomial en x .

Al tiempo futuro t^* la variable aleatoria toma el valor de x^* . Al tiempo anterior t , la variable tiene el valor de x . Si se considera un lapso de tiempo δt , la variable tiene tres posibilidades de desplazarse una distancia δx : hacia arriba, hacia abajo o quedarse sobre la misma recta; con probabilidades $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$ y $1 - \alpha(x, t) - \beta(x, t)$ respectivamente. Si la variable puede tomar sólo uno de los tres nuevos valores al tiempo $t + \delta t$, es muy simple relacionar la probabilidad inicial de x al tiempo t a la probabilidad inicial con las otras x , $x + \delta x$ o $x - \delta x$ en un tiempo δt después. En otras palabras, se tiene el siguiente análisis.

La probabilidad de que la variable aleatoria esté en (x, t) es igual a la probabilidad de ir a $(x + \delta x, t + \delta t)$ multiplicada por la probabilidad de moverse hacia arriba, más la probabilidad de seguir en x multiplicada por la probabilidad de no movimiento, más la probabilidad de ir a $(x - \delta x, t + \delta t)$ multiplicada por la probabilidad de moverse hacia abajo.

Por simplicidad, no se considerará la dependencia de p en x^* y t^* , entonces la probabilidad de estar en x al tiempo t es

$$p(x, t) = p(x + \delta x, t + \delta t)\alpha(x, t) + p(x, t + \delta t)(1 - \alpha(x, t) - \beta(x, t)) \\ + p(x - \delta x, t + \delta t)\beta(x, t),$$

para δt y δx pequeños, se pueden expandir todos los términos de la ecuación anterior en series de Taylor alrededor de (x, t) . Después de cálculos directos se obtiene

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\delta x^2 + \frac{\partial p}{\partial t}\delta t = 0. \quad (1.2)$$

Para encontrar los valores de las funciones α y β , se considerarán las propiedades de la ecuación (1.1).

Así la media del salto en x debe ser $f(x, t)\delta t$ y la varianza del salto estará dada por $g^2(x, t)\delta t$. El proceso trinomial, sin embargo, tiene media de salto $(\alpha - \beta)\delta x$ y varianza $(\alpha + \beta - (\alpha - \beta)^2)\delta x^2$. Para encontrar α y β es importante considerar que $\delta x^2/\delta t = O(1)$, es decir, que dicho cociente permanece acotado cuando $\delta \rightarrow 0$, entonces queda

$$\alpha(x, t) = \frac{\delta t}{2\delta x^2}[g^2(x, t) + f(x, t)\delta x] \\ \beta(x, t) = \frac{\delta t}{2\delta x^2}[g^2(x, t) - f(x, t)\delta x].$$

Si se substituyen α y β en (1.2) y se divide por δt , se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{2}g^2(x, t)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f(x, t)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Kolmogorov hacia atrás, o como la ecuación diferencial parcial hacia atrás o retrógrada. Se le da este último nombre porque es un problema bien planteado con condiciones finales.

Es importante observar que la EDP retrógrada es un problema bien planteado, porque tiene una solución y es única [23], además de que la solución depende continuamente de los datos en el problema. También se deben de imponer condiciones de frontera y una condición final, como se mencionó antes.

Las condiciones de frontera se determinan mediante consideraciones específicas sobre la variable aleatoria, mientras que la condición final es más directa.

Si se toma en cuenta la dependencia en x^* y t^* , entonces la condición final queda como

$$p(x, t; x^*, t^*) = \delta(x - x^*), \quad \text{para } t = t^*.$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac¹. Esta condición simplemente dice que al tiempo t^* , la variable x puede tomar sólo el valor x^* .

Es importante mencionar que si la ecuación (1.3) se multiplica por una función $q(x, t)$ y se integra por partes, se puede obtener directamente la ecuación de Kolmogorov hacia adelante (Fokker-Planck) y se hace el cambio de variable $t = t^* - \tau$ para transformar el problema de condiciones finales a un problema con condiciones iniciales.

El problema hacia adelante (forward)

Análogamente al problema retrógrado, se considera la caminata trinomial, con la misma elección para las probabilidades de cada rama de la caminata, α y β .

Haciendo el análisis y dejando a un lado la dependencia de p sobre x y t por simplicidad, se obtiene

$$\begin{aligned} p(x^*, t^*) &= p(x^* - \delta x, t^* - \delta t)\alpha(x^* - \delta x, t^* - \delta t) \\ &+ p(x^*, t^* - \delta t)(1 - \alpha(x^*, t^* - \delta t)) - \beta(x^*, t^* - \delta t) \\ &+ p(x^* + \delta x, t^* - \delta t)\beta(x^* + \delta x, t^* - \delta t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Esto es similar a la ecuación hacia atrás. La diferencia principal radica en que las probabilidades α y β son ahora evaluadas en $x^* - \delta x$, $x^* + \delta x$ y x^* . Si se expande en series de Taylor y se hace un análisis similar al anterior, se tiene

¹La delta de Dirac puede representar la distribución de densidad de una masa unidad concentrada en un punto x_0 . En ocasiones se denomina también función de impulso.

Se escribe como

$$\delta_{xD}(x) = \delta(x - x_0),$$

siendo $\delta(x)$ para el caso $x_0 = 0$.

También puede definirse por la integral

$$\int_a^b \delta(x - x_0)f(x)dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } a < x_0 < b, \\ 0 & \text{si } x_0 < a \text{ o } x_0 > b. \end{cases}$$

o bien por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)f(x)dx = f(x_0) \quad \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \right].$$

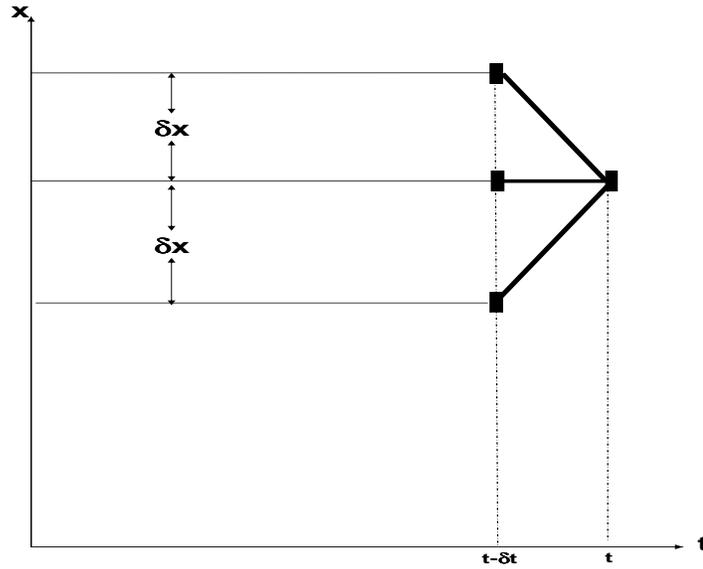


Figura 1.2: Caminata aleatoria para el problema hacia adelante

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (g^2(x^*, t^*)p)}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial (f(x^*, t^*)p)}{\partial x^*} - \frac{\partial p}{\partial t^*} = 0, \quad (1.5)$$

la cual es conocida como la ecuación de Kolmogorov hacia adelante o bien como la ecuación de Fokker-Planck o como la ecuación parabólica hacia adelante. Se le da este nombre porque es un problema bien planteado con condiciones iniciales.

Introduciendo nuevamente la dependencia en x y t , la condición inicial es

$$p(x, t; x^*, t^*) = \delta(x^* - x) \quad \text{para } t = t^*.$$

Para entender mejor el funcionamiento matemático de las ecuaciones de Kolmogorov, antes de proporcionar demostraciones formales y estrictas, se da la interpretación de la ecuación de Fokker-Planck desde un punto de vista físico. Al final se dan algunos ejemplos de su aplicación en el caso más simple, la ecuación de Fokker-Planck estacionaria en una dimensión.

1.1.3. Interpretación

En esta sección se da un análisis un poco más formal para llegar a la ecuación de Fokker-Planck utilizando sistemas dinámicos² mediante un enfoque físico.

La idea de introducir sistemas dinámicos o sistemas de ecuaciones, radica en mostrar que las ecuaciones de Kolmogorov pueden depender de varias variables, las cuales están representadas por la dinámica del sistema. Cabe mencionar que aunque se tenga un sistema de ecuaciones, como argumentos, sólo se tendrá una sola ecuación diferencial parcial representada por las ecuaciones de Kolmogorov o la ecuación del tiempo de salida.

Este punto es muy importante para la tesis, porque se intentará mostrar un modelo financiero que depende de varios factores macroeconómicos, los cuales son representados por medio de un sistema dinámico.

A continuación se muestra cual es el efecto que tiene un sistema dinámico en la construcción de las ecuaciones de Kolmogorov.

Formulación del problema

Supóngase que se tiene un sistema dinámico determinado por k ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\frac{dx_i}{dt} = f^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_k); \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.6)$$

Para condiciones iniciales dadas, estas ecuaciones determinan únicamente el comportamiento del punto que representa el sistema en su dominio³. Se considera que dicho sistema esta sujeto a impulsos o perturbaciones, las cuales actúan de acuerdo con leyes de cambio bien determinadas (diferentes hipótesis de probabilidad son posibles aquí).

Ecuación para la distribución de densidad

Se considerará el caso más simple cuando $n = 1$ y el dominio es la línea recta. Del sistema (1.6) se obtiene la ecuación

²Un sistema dinámico es un sistema complejo que representa un cambio o evolución de su estado en un tiempo, el comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

³Se restringe el análisis a sistemas autónomos, es decir, a sistemas para los cuales la ecuación diferencial no depende explícitamente del tiempo. Un análisis similar puede ser desarrollado para sistemas no autónomos.

$$dx = f(x)dt. \quad (1.7)$$

En este caso supóngase que el impulso aleatorio ocurre como sigue: después de cada intervalo de tiempo τ , el punto fase salta instantáneamente una distancia a , a lo largo de una dirección aleatoria (la dirección es de derecha a izquierda con la misma probabilidad), cuando transcurren otros τ segundos de acuerdo con la ecuación del movimiento, el punto fase da otro salto y así sucesivamente.

Como el movimiento del punto representativo es determinado no sólo por la ecuación anterior, sino también por la ley de probabilidad es imposible considerar a x como una función definida de t y en este caso se puede hablar sólo de la probabilidad para el punto representativo definido en alguna región particular del dominio.

El análisis probabilístico necesario, está dado comparativamente en el caso límite cuando se supone que $a \rightarrow 0$ junto con τ , tal que $\frac{a^2}{\tau} \rightarrow g^2$, donde g^2 es un límite finito que caracteriza la intensidad de los impulsos (en la caminata trinomial corresponde a la varianza del salto), es decir, en el límite se obtiene la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [f(x)p(x, t)]}{\partial x} = \frac{1}{2}g^2(x) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}; \quad g^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a^2}{\tau}, \quad (1.8)$$

la cual se satisface por la distribución de densidad $p(x, t)^4$.

En un caso más general, se debe suponer que se tiene un movimiento determinístico del punto representativo de acuerdo con la ecuación (1.8) y sobreimpuesto esto, un proceso aleatorio que satisface una cierta ley estadística que depende de la posición del punto representativo. Si se supone que este proceso, al cual se le llamará proceso estocástico, no tiene alguna direccionalidad intrínseca y que las perturbaciones aleatorias son tales que la probabilidad de un desplazamiento grande tiende a cero suficientemente rápido en un tiempo decreciente τ , entonces la ecuación (1.8) se transforma en:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [f(x)p(x, t)]}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [g^2(x)p(x, t)]}{\partial x^2}, \quad (1.9)$$

donde $g(x)$, es el coeficiente que caracteriza la intensidad distributiva del proceso estocástico, la cual es definida como, $\lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{\epsilon}^2/\tau$, donde $\bar{\epsilon}^2$ es la media cuadrática

⁴Hay que observar que si $p(x, t)$ es la distribución de la densidad, la probabilidad de encontrar el punto representativo al tiempo t en la región G es $W(G, t) = \int_G p(x, t)dx$

del desplazamiento durante el tiempo τ bajo la influencia del proceso estocástico⁵. A esta ecuación se le conoce como la ecuación de Fokker-Planck o Kolmogorov hacia adelante [?].

De acuerdo con el significado de la densidad se está interesado en las soluciones de la ecuación (1.9) para la cual⁶,

i) $p(x, t) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dx = 1$

Ahora, para encontrar la solución de la ecuación (1.9), se necesita conocer la distribución de la probabilidad inicial. Si se desea estudiar el comportamiento del punto representativo que al tiempo inicial tuvo la posición definida ϵ , entonces es necesario encontrar la densidad $p(x, t)$ que en el límite ($t \rightarrow 0$) tiende a cero en todos los puntos excepto para ϵ y adicionalmente satisface la condición ii). La función determinada de esta manera depende solamente del punto ϵ y se denotará por $p(x, t, \epsilon)$, por lo que $p(x, t, \epsilon) dx$ es la probabilidad de que un punto aleatorio situado al tiempo $t = 0$ en la posición ϵ al transcurrir un tiempo t , dicho punto se encuentre entre la posición x y $x + dx$.

Si sucede lo antes mencionado (es lo que esperaría uno), para cada función de distribución no estacionaria $p(x, t)$ converge a la función límite definida $p(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$, bajo ciertas condiciones que se verán específicamente más adelante [?]. Para encontrar la función de distribución límite estacionaria⁷ se impone la restricción $\partial p / \partial t = 0$ en la ecuación (1.9), por lo que dicha ecuación se reduce a

⁵Sea $p(x, \tau, y) dy$ la probabilidad del punto representativo, situado en la posición x , llegando como un resultado del proceso aleatorio a la posición desde y a $y + dy$ durante el intervalo de tiempo τ . Entonces

$$g(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \tau, y) (y - x)^2 dy.$$

Si se ha supuesto que el proceso estadístico no tiene alguna direccionalidad, entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \tau, y) (y - x) dy = 0.$$

La tasa de decrecimiento de la probabilidad de desviaciones grandes con decrecimiento en τ es caracterizado por la relación

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \tau, y) |y - x|^3 dy = 0.$$

⁶Bajo ciertas suposiciones de una naturaleza general supuestas a la ecuación (1.9), se puede afirmar que si $f(x, 0)$ es positiva en todas partes y normalizada en $t = 0$, entonces estas condiciones se mantendrán para toda $t > 0$. Es decir, este hecho se conserva generalmente cuando se tienen ecuaciones de tipo parabólico

⁷La función estacionaria, se define como la función límite de una función no estacionaria cuando

$$\frac{\partial[f(x)p(x)]}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2[g^2(x)p(x)]}{\partial x^2}, \quad (1.10)$$

la cual se conoce como la ecuación estacionaria de Fokker Planck. La solución de esta ecuación no depende de condiciones iniciales.

En la mayoría de los casos, este tipo de ecuaciones se resuelven mediante métodos numéricos, ya que es complicado encontrar soluciones cerradas. Una forma en que se pueden obtener soluciones analíticas, es considerar el caso en que la ecuación en estudio es estacionaria. A continuación se muestra este caso para la ecuación de Fokker-Planck, así como algunos ejemplos específicos..

Solución de la ecuación de Fokker-Planck estacionaria

Ahora se trabajará sobre la línea recta. Como ya se había visto, una distribución estacionaria es una solución normalizada no negativa de la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left[f(x)p(x) - \frac{d}{2dx} (g^2(x)p(x)) \right] = 0. \quad (1.11)$$

En el caso general, no se puede asegurar la existencia de una solución estacionaria. Las condiciones más naturales bajo las cuales se puede esperar la existencia de dicha solución, y las cuales de aquí en adelante se supondrán que se satisfacen son [?]

- i) $c^{**} > g^2(x) > c^* > 0$, donde c^{**} y c^* son constantes positivas,
- ii) $f(x) < 0$ para $x > 0$ suficientemente grande y $f(x) > 0$ para $x < 0$ suficientemente grande, en ambos casos es mayor en modulo que alguna constante $r > 0$.

La primera integración de la ecuación (1.11) da

$$f(x)p(x) - \frac{d}{2dx} [g^2(x)p(x)] = C_1. \quad (1.12)$$

$t \rightarrow \infty$, es decir

$$p(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t).$$

Dicha función es invariante con respecto al tiempo. Concretamente se puede decir que la función estacionaria existe y es única si dicho límite existe y además $\int p(x) = 1$.

Si las condiciones i) y ii) se satisfacen, $p(x) > 0$ y normalizable, entonces $C_1 = 0^8$. Integrando por segunda vez

$$p(x) = \frac{C}{g^2(x)} e^{\rho(x)}; \quad \rho(x) = 2 \int_0^x \frac{f(\epsilon)}{g^2(\epsilon)} d\epsilon, \quad (1.13)$$

y C es una nueva constante de integración o un coeficiente de normalización. Hay que notar que para la constante $g^2(x)$, la máxima y mínima solución coinciden con los puntos de equilibrio estable para el sistema dinámico original determinado por (1.7). Como e^z es monótona, la máxima y mínima solución coinciden con las soluciones de la función $\rho(x)$.

Ahora se analiza la solución bajo la suposición de que $g^2(x)$ decrece uniformemente en x . Para esto, se representa en la forma $g^2(x) = \lambda q(x)$, donde $q(x)$ ($c^{**} > q(x) > c^* > 0$) es una función fija, mientras λ es un parámetro real que en el límite tiende a cero ($\lim \lambda \rightarrow 0$).

Haciendo el cambio de g , la solución puede escribirse de la forma

$$p(x) = \frac{C(\lambda)}{q(x)} e^{\frac{\psi(x)}{\lambda}}, \quad (1.14)$$

donde

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{f(\epsilon)}{q(\epsilon)} d\epsilon, \quad \frac{1}{C(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{\psi(\epsilon)}{\lambda}}}{q(\epsilon)} d\epsilon. \quad (1.15)$$

Supóngase que existe un único punto en el cual $\psi(x)$ alcanza su máximo absoluto. Se puede mostrar [?] que en el $\lim \lambda \rightarrow 0$, la función, $p(x)$, tiende a cero en todas partes excepto en el origen, aquí la función se va a infinito. En este caso se puede estimar la $C(\lambda)$ para λ suficientemente pequeña:

$$\frac{1}{C(\lambda)} = s(\lambda) \lambda^{\frac{1}{n}}, \quad (1.16)$$

donde n es un entero positivo par y $s(\lambda)$ está entre límites positivos⁹. Así

⁸Se puede mostrar que bajo las condiciones anteriores, p y sus derivadas decrecen muy rápido cuando $x \rightarrow \infty$, así el lado izquierdo de la ecuación anterior tiende a cero y $C_1 = 0$.

$$\frac{1}{C(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q(\epsilon)} e^{\psi(\epsilon)/\lambda} d\epsilon = \int_{-h}^h \frac{1}{q(\epsilon)} e^{\psi(\epsilon)/\lambda} d\epsilon + \int_{-\infty}^{-h} \frac{1}{q(\epsilon)} e^{\psi(\epsilon)/\lambda} d\epsilon + \int_h^{\infty} \frac{1}{q(\epsilon)} e^{\psi(\epsilon)/\lambda} d\epsilon.$$

$$p(x) = \frac{e^{\frac{\psi(x)}{\lambda}}}{q(x)[s(\lambda)\lambda^{\frac{1}{n}}]}. \quad (1.17)$$

Si $x \neq 0$, entonces la expresión (1.17) tiende a cero ya que el numerador decrece más rápido cuando $\lambda \rightarrow 0$ que el denominador. Pero si $x = 0$, el numerador no depende de λ lo que implica que la expresión tiende a infinito.

Dada $f(x)$, se puede escoger la función $q(x)$ de tal forma que el máximo absoluto de $\psi(x)$ se alcance en algún punto de equilibrio estable de la ecuación (1.7). La distribución estacionaria tiende a cero casi seguramente cuando $\lambda \rightarrow 0$, excepto en el punto de equilibrio estable que es donde $\psi(x)$ alcanza su máximo absoluto.

Se consideran un par de ejemplos para distribuciones estacionarias:

Ejemplo 1

$$\frac{dx}{dt} = -kx; \quad k > 0; \quad g^2(x) = 2D,$$

donde D es una constante.

El dominio en este caso es una línea recta infinita con un estado de equilibrio en $x = 0$ (ver figura 1.3). Este estado de equilibrio es estable. Las condiciones i) y ii)

Sea h un número positivo muy pequeño. De acuerdo a las propiedades de $\psi(\epsilon)$ y de que en el límite $\lambda \rightarrow 0$, las dos últimas integrales son infinitesimalmente pequeñas comparadas con la primera integral. En un intervalo suficientemente pequeño $(-h, h)$, la función $\psi(x)$ puede ser representada aproximadamente en la forma $-kx^n$, donde n es un entero par positivo, es decir,

$$-k^*x^n > \psi(x) > k^{**}x^n,$$

donde $-k^* > k^{**} > 0$.

Así en el mismo intervalo se tiene

$$\frac{1}{q^{**}}e^{-k^{**}x^n/\lambda} < \frac{1}{q(x)}e^{\psi(x)/\lambda} < \frac{1}{q^*}e^{-k^*x^n/\lambda}.$$

Entonces en la ecuación

$$\int_{-h}^h e^{-k\epsilon^n/\lambda} d\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\epsilon^n/\lambda} d\epsilon - 2 \int_h^{\infty} e^{-k\epsilon^n/\lambda} d\epsilon,$$

análogamente como se había hecho antes, se puede ignorar el segundo término del lado derecho y entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\epsilon^n/\lambda} d\epsilon = \lambda^{\frac{1}{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kz^n} dz = f(k)(\lambda)^{\frac{1}{n}}.$$

donde $f(k)$ no depende de λ .

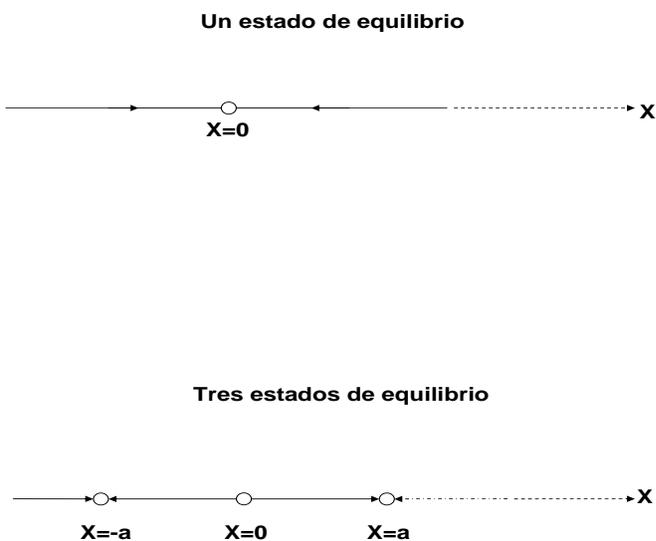


Figura 1.3: Espacios fase

se satisfacen. La ecuación dinámica se resuelve por medio de la función $x = Ce^{-kt}$. Si en $t = 0$ se tiene $x = x_0$, entonces la solución es $x = x_0e^{-kt}$

$$\rho(x) = 2 \int \frac{f(\epsilon)}{g^2(\epsilon)} d\epsilon = -2 \int \frac{k\epsilon}{2D} d\epsilon = -\frac{k}{2D} \epsilon^2, \quad (1.18)$$

con

$$p(x) = Ce^{-\frac{kx^2}{2D}}, \quad \frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{kx^2}{2D}} dx = \sqrt{\frac{2\pi D}{k}}. \quad (1.19)$$

Se obtiene la distribución Gaussiana ordinaria.

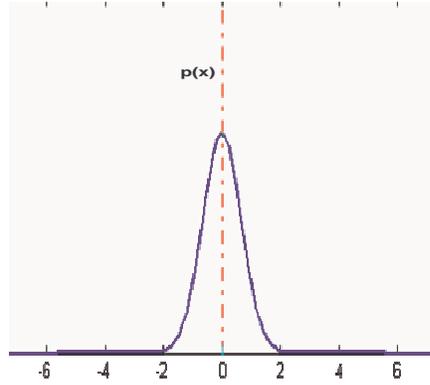


Figura 1.4: Distribución Gaussiana ordinaria

Ejemplo 2

$$\frac{dx}{dt} = kx(a^2 - x^2); \quad k > 0; \quad g^2(x) = 2D, \quad D = cte. \quad (1.20)$$

En este caso el dominio es la línea recta con tres estados de equilibrio (ver figura 1.3): $x = 0$, $x = a$ y $x = -a$. De éstos, $x = 0$ es inestable mientras que $x = a$ y $x = -a$ son estables. Las condiciones i) y ii) se satisfacen. La siguiente ecuación dinámica (depende del tiempo) es solución de la ecuación (1.20)

$$x^3 = \frac{a^2}{1 + C'e^{-2a^2kt}}. \quad (1.21)$$

En $t = 0$ se tiene $x = x_0$, entonces

$$C' = \frac{a^2 - x_0^3}{x_0^3}.$$

Por lo tanto

$$\rho(x) = 2 \int_0^x \frac{ka^2\epsilon - k\epsilon^3}{2D} d\epsilon = \frac{k}{D} \left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right].$$

con lo que

$$p(x) = Ce^{(\frac{k}{4D})[a^2x^2 - x^4]},$$

siendo

$$\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{k}{4D}[a^2\epsilon^2 - \epsilon^4]} d\epsilon.$$

Entonces la distribución estacionaria tiene dos máximos ($x = +a$ y $x = -a$) y un mínimo en $x = 0$.

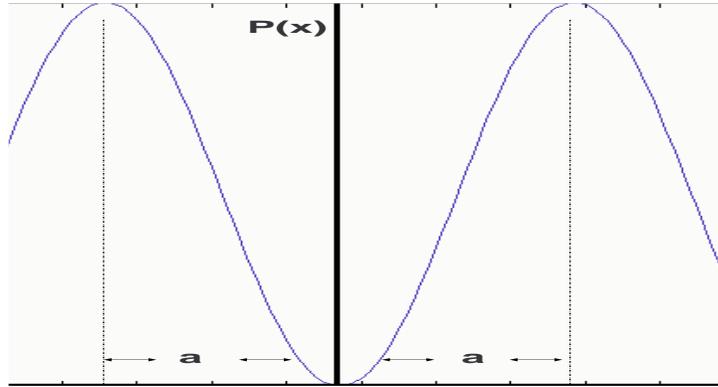


Figura 1.5: Distribución estacionaria con dos máximos

Independiente de las funciones de densidad, existe otra función importante para caracterizar el comportamiento de un proceso estocástico, la probabilidad del tiempo de salida, la cual puede verse como una aplicación a la ecuación de Fokker-Planck. Su análisis y desarrollo, al igual que su esperanza se muestran en el Apéndice I.

Ya conociendo la parte intuitiva de las ecuaciones de Kolmogorov y la solución analítica de la ecuación de Fokker-Planck estacionaria. Se está preparado para dar demostraciones formales de la deducción de las ecuaciones de Kolmogorov.

1.1.4. Deducción matemática formal

Por completez se deducen a continuación de forma rigurosa las ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante, utilizando la desigualdad de Chapman-Kolmogorov, así como resultados básicos de procesos estocásticos.

En este caso se consideran más de dos variables por lo cual se dejan a un lado los asteriscos (*) considerados en la deducción por medio de caminatas aleatorias y se toman a los valores futuros como $x^* = y$ y $t^* = t$ y los valores pasados como $x = x$ y $t = s$, para hacer el análisis más sencillo.

Procesos Markovianos de Difusión

Supóngase que al tiempo t se determina el proceso X_t en el estado x . El incremento ΔX_t del proceso X_t está dado por

$$\Delta X_t = f_\lambda(x) + \sigma g(x) \Delta W_t.$$

Definiendo $a = f_\lambda(x)$ y $\sqrt{D} = \sigma g(x)$, entonces

$$\Delta X_t = a \Delta t + \sqrt{D} \Delta W_t,$$

es un movimiento browniano. D es la constante de difusión y a es la tendencia o velocidad del proceso. Para más detalle ver [72].

Dichos procesos son caracterizados por tres propiedades: siempre son continuos, es decir, sea X_t un proceso de Markov con probabilidad de transición $p(y, t|x, s)$

a) $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \epsilon} p(y, t|x, s) dy = 0,$$

o bien

$$p[|X_t - X_s| > \epsilon | X_s = x] = o(t-s).$$

El proceso de Markov es continuo, diferenciable y determinístico $\dot{X} = f(X(t))$ con $X_{t_0} = C$, donde el elemento aleatorio es la condición inicial C .

b) $\forall \epsilon > 0$ existe una función $f(x, s)$, llamada la tendencia o dirección del proceso, tal que

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x) p(y, t|x, s) dy = f(x, s).$$

c) $\forall \epsilon > 0$ existe una función $g(x, s)$, llamada difusión del proceso, tal que

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)^2 p(y, t|x, s) dy = g^2(x, s).$$

Un proceso de Markov que cumple con a), b) y c) es llamado un proceso de difusión. En b) y c) los momentos generalmente no existen, entonces se usan los momentos truncados, es decir,

a*) Existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_R |y-x|^{2+\delta} p(y, t|x, s) dy = 0.$$

o bien

$$E(|X_t - X_s|^{2+\delta} | X_s = x) = o(t - s).$$

Se tiene

$$\begin{aligned} o(t - s) &= \int_{|y-x|>\epsilon} |y - x|^{2+\delta} p(y, t|x, s) dy \\ &= \epsilon^{2+\delta} \int_{|y-x|>\epsilon} \frac{|y - x|^{2+\delta}}{\epsilon^{2+\delta}} p(y, t|x, s) dy \\ &> \epsilon^{2+\delta} \int_{|y-x|>\epsilon} p(y, t|x, s) dy \end{aligned}$$

$$\int_{|y-x|>\epsilon} |y - x| p(y, t|x, s) dy \leq \frac{1}{\epsilon^{1+\delta}} \int_R |y - x|^{2+\delta} p(y, t|x, s) dy = o(t - s)$$

y

$$\int_{|y-x|>\epsilon} (y - x)^2 p(y, t|x, s) dy \leq \frac{1}{\epsilon^\delta} \int_R |y - x|^{2+\delta} p(y, t|x, s) dy = o(t - s)$$

Entonces se puede reemplazar b) y c) por

b^*) Existe una función $f(x, s)$ tal que

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t - s} \int_R (y - x) p(y, t|x, s) dy = f(x, s).$$

c^*) Existe una función $g(x, s)$ tal que

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t - s} \int_R (y - x)^2 p(y, t|x, s) dy = g^2(x, s).$$

Las condiciones a^*), b^*) y c^*) son suficientes para que un proceso de Markov X_t sea un proceso de difusión. Si X_t es un proceso de Markov con tiempo homogéneo, es decir,

$$p(y, t|x, s) = p(y, t - s|x).$$

Entonces la dirección de f y la difusión g^2 son funciones independientes del tiempo.

La condición b^*) puede escribirse como:

$$E\{(X_t - X_s) | X_s = x\} = f(x, s)(t - s) + o(t - s).$$

Para la varianza del incremento condicionado en $X_s = x$, se obtiene

$$\begin{aligned} & E\{(X_t - X_s) - E\{(X_t - X_s)\}^2|X_s = x\} \\ &= E\{(X_t - X_s)^2|X_s = x\} - E\{(X_t - X_s)|X_s = x\}^2 \\ &= g^2(x, s)(t - s) + o(t - s) - f^2(x, s)(t - s)^2 + o(t - s) \\ &= g^2(x, s)(t - s) + o(t - s). \end{aligned}$$

Teorema 1 *Supóngase que la dirección $f(x, s)$ y la difusión $g(x, s)$ son funciones continuas y sea $\nu(x)$ una función continua y acotada tal que*

$$u(x, s) = E\{\nu(X_t)|X_s = x\} = \int_R \nu(y)p(y, t|x, s)dy,$$

tiene derivadas parciales continuas $\partial u(x, s)|\partial x$ y $\partial^2 u(x, s)|\partial x^2$. Entonces la derivada parcial $\partial u(x, s)/\partial s$ existe y $u(x, s)$ satisface la ecuación:

$$-\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} = f(x, s)\frac{\partial u(x, s)}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2(x, s)\frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2}, \quad (1.22)$$

o bien

$$-\frac{\partial p(y, t|x, s)}{\partial s} = f(x, s)\frac{\partial p(y, t|x, s)}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2(x, s)\frac{\partial^2 p(y, t|x, s)}{\partial x^2}, \quad (1.23)$$

con la condición de frontera $\lim_{s \uparrow t} u(x, s) = \nu(x)$.

En este caso se tiene información disponible sobre el comportamiento de x hasta el momento s y se desea inferir sobre su valor de y al tiempo futuro t .

Haciendo la analogía con el caso de caminatas aleatorias y sin pérdida de generalidad: y y t corresponden a x^* y t^* y s es t .

Demostración

Considérese $s_1 \leq s \leq s_2 \leq t$. De acuerdo a la definición de $u(x, s)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv u(x, s_1) - u(x, s_2) = \int_R \nu(y)p(y, t|x, s_1)dy - \int_R \nu(y)p(y, t|x, s_2)dy \\ &= \int_R \nu(y) \left[\int_R p(y, t|z, s_2)p(z, s_2|x, s_1)dz \right] dy \\ &\quad - \int_R \nu(y)p(y, t|x, s_2)dy \int_R p(z, s_2|x, s_1)dz \\ &= \int_R u(z, s_2)p(z, s_2|x, s_1)dz - \int_R u(x, s_2)p(z, s_2|x, s_1)dz \\ &= \int_R [u(z, s_2) - u(x, s_2)]p(z, s_2|x, s_1)dz. \end{aligned}$$

Descomponiendo el espacio de estados en dos partes se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \int_{|z-x| \leq \epsilon} [u(z, s_2) - u(x, s_2)] p(z, s_2 | x, s_1) dz \\ & + \int_{|z-x| > \epsilon} [u(z, s_2) - u(x, s_2)] p(z, s_2 | x, s_1) dz \equiv J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Primeramente se verá que sucede con J_2 . Sea $\nu(x)$ acotada, $u(x, s)$ cumple con la propiedad $\sup_x |u(x, s_2)| < \infty$. Así,

$$J_2 \leq 2 \sup_z |u(z, s_2)| \int_{|z-x| > \epsilon} p(z, s_2 | x, s_1) dz,$$

y por la condición (a), se tiene

$$J_2 = o(s_2 - s_1)$$

Para J_1 , se usa la fórmula de Taylor de la siguiente forma:

$$J_1 = \int_{|z-x| \leq \epsilon} \left[u'_x(x, s_2)(z-x) + \frac{1}{2} u''_x(x, s_2)(z-x)^2 + r_\epsilon(x, z, s_2) \right] p(z, s_2 | x, s_1) dz.$$

El término de error tiene la siguiente propiedad

$$|r_\epsilon(x, z, s_2)| \leq |z-x|^2 o_\epsilon,$$

donde

$$o_\epsilon = \sup_{|z-x| \leq \epsilon} \left| \frac{\partial^2 u(x + \vartheta(z-x), s_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, s_2)}{\partial x^2} \right|,$$

$0 < \vartheta < 1$ y $o_\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Usando las otras dos condiciones en la definición de proceso de difusión, se tiene

$$\Delta u = \left[f(x, s) \frac{\partial u(x, s_2)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x, s) \frac{\partial^2 u(x, s_2)}{\partial x^2} + R_\epsilon \right] (s_2 - s_1) + o(s_2 - s_1),$$

donde $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{s_2 \downarrow s_1} R_\epsilon = 0$.

Dividiendo ambos lados por $(s_2 - s_1)$ y tomando el límite $s_2 \downarrow s_1, s_1 \uparrow s$ y $\epsilon \downarrow 0$, se obtiene (1.22).

Si se recuerda que $u(x, s) = \int_R \nu(y)p(y, t|x, s)dy$. Entonces (1.22) puede escribirse en la forma

$$\int_R \nu(y) \left[\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} + f(x, s) \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x, s) \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2} \right] dy = 0.$$

Como $\nu(y)$ es una función arbitraria, se sigue que la densidad de la probabilidad de transición de un proceso de difusión satisface la ecuación diferencial parcial:

$$-\frac{\partial p(y, t|x, s)}{\partial s} = f(x, s) \frac{\partial p(y, t|x, s)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x, s) \frac{\partial^2 p(y, t|x, s)}{\partial x^2},$$

o

$$-\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} = f(x, s) \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x, s) \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2} \quad .\S$$

La cual como ya se ha visto, es la ecuación de Kolmogorov hacia atrás.

Ahora se dará la ecuación de Fokker Planck.

Teorema 2 *Si se cumplen las condiciones a) y b) uniformemente en x , entonces la densidad de la probabilidad de transición $p(y, t|x, s)$ del proceso de difusión X_t satisface:*

$$\frac{\partial p(y, t|x, s)}{\partial t} = -\frac{\partial [f(y, t)p(y, t|x, s)]}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [g^2(y, t)p(y, t|x, s)]}{\partial y^2},$$

las respectivas derivadas parciales existen y son continuas.

Demostración

Sea $\nu(x)$ una función arbitraria doblemente diferenciable, la cual converge dentro de un intervalo acotado. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_R p(y, t|x, s) \nu(y) dy &= \lim_{t_1 \uparrow t; t_2 \downarrow t} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_R [p(y, t_2|x, s) - p(y, t_1|x, s)] \nu(y) dy \\ &= \lim_{t_1 \uparrow t; t_2 \downarrow t} \int_R p(y, t_1|x, s) \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_R p(z, t_2|y, t_1) \nu(z) dz - \nu(y) \right] dy. \end{aligned}$$

La igualdad se obtiene usando Chapman-Kolmogorov en el primer término,

$$\int p(y, t_2|x, s)\nu(y)dy = \int \int p(y, t_2|z, t_1)p(z, t_1|x, s)\nu(y)dydz,$$

y renombrando las variable: $y \longleftrightarrow z$

$$= \int \int p(z, t_2|y, t_1)p(y, t_1|x, s)\nu(y)dzdy.$$

Por otro lado se sabe que

$$\begin{aligned} & \lim_{t_1 \uparrow t; t_2 \downarrow t} \int_R [u(z) - u(x)]p(z, s_2|x_1, s_1)dz \\ &= \lim_{t_1 \uparrow t; t_2 \downarrow t} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_R [u(z)p(z, s_2|x_1, s_1)dz - u(x)] \\ &= f(x, s) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}g(x, s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Aplicando este resultado a (1.24) del lado derecho se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R p(y, t|x, s)\nu(y)dy = \int p(y, t|x, s) \left[f(y, t) \frac{\partial \nu(y)}{\partial y} + \frac{1}{2}g^2(y, t) \frac{\partial^2 \nu(y)}{\partial y^2} \right] dy.$$

Integrando por partes se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R p(y, t|x, s)\nu(y)dy = \int_R dy \nu(y) \left[-\frac{\partial f(y, t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^2(y, t)}{\partial x^2} \right] p(y, t|x, s).$$

De aquí se sigue

$$\frac{\partial p(y, t|x, s)}{\partial t} = -\frac{\partial [f(y, t)p(y, t|x, s)]}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [g^2(y, t)p(y, t|x, s)]}{\partial y^2}. \quad \S$$

1.2. Representación de Feynman-Kac

Como se mencionó anteriormente, para propósitos de esta tesis se está buscando una fórmula que no dependa de la tasa de interés μ , es decir se necesita una fórmula en donde la tasa de interés no dependa de que tan rápido crece o decrece el activo subyacente, cuando se está hablando de derivados financieros. Se necesita trabajar en un mundo neutral al riesgo.

Como ya se vio en la introducción, una fórmula que relaciona la medida física con la medida neutral al riesgo es la fórmula de Samuelson y como un caso particular

se describirá a continuación la representación de Feynman-Kac.

La representación básica del teorema de Feynman-Kac establece a grandes rasgos, que para un par de funciones acotadas $q : R \rightarrow R$, $f : R \rightarrow R$ y para alguna solución acotada $u(x, t)$ del problema con valores iniciales

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x)u(x, t) \quad u(x, 0) = f(x), \quad (1.25)$$

se puede representar a $u(x, t)$ por la fórmula de Feynman-Kac como:

$$u(x, t) = E \left[f(x + W_t) \exp \left(\int_0^t q(x + W_s) ds \right) \right]. \quad (1.26)$$

La importancia de este resultado (así como sus generalizaciones) relaciona al problema analítico, de la solución de la ecuación diferencial parcial (EDP (1.25)) y el problema probabilístico, de calcular la esperanza (1.26).

Naturalmente, existen relaciones entre las ecuaciones (1.25) y (1.26) para procesos que son generalizaciones de movimientos brownianos y éstas pueden ser usadas para representar las soluciones de interés de las EDP. En particular, se debería de encontrar la versión de la fórmula de Feynman-Kac que da una nueva representación para la solución de la EDP de Black-Scholes y sus diversas extensiones.

1.2.1. Un caso especial

Se sabe de la ecuación de difusión que para una función bien comportada, $f : R \rightarrow R$, existe una única solución acotada $u(x, t)$ del problema con valores iniciales

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad u(x, 0) = f(x), \quad (1.27)$$

cuya solución puede escribirse como la integral Gaussiana

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{(u-x)^2}{2t}} du. \quad (1.28)$$

Ahora, por inspección se puede ver que $u(x, t)$ también puede escribirse como:

$$u(x, t) = E[f(x + W_t)]. \quad (1.29)$$

Esta fórmula es precisamente la representación de Feynman-Kac para el caso $q(x) \equiv 0$. Esta observación puede ser utilizada para probar la fórmula de Feynman-Kac para el caso general q , y en particular, se debe probar la fórmula de Itô conveniente. Pero antes se determinará la derivación de la fórmula general de Feynman-Kac, para el caso cuando $q(x)$ es una constante.

1.2.2. Movimiento browniano: ruina o descuento

Se construirá el problema de la ruina mediante el movimiento browniano exponencial de la ruina y se verá que este proceso recupera la fórmula de representación de Feynman-Kac.

Se considera una variable aleatoria (v.a.) no negativa T . El movimiento browniano descontado es definido como el proceso $\{X_t\}$ con valores en el conjunto $R \cup \{\theta\}$, el cual está definido al tiempo t por

$$X_t = \begin{cases} W_t & \text{si } 0 \leq t \leq T, \\ \theta & \text{si } T > t. \end{cases}$$

Aquí $\{\theta\}$ es un estado especial que introduce el movimiento browniano que debería tomar su lugar cuando se obtiene la ruina.

Dada alguna $f : R \rightarrow R$, se puede extender la definición de f a $R \cup \{\theta\}$ tomando $f(\theta) = 0$, así se puede dar un análogo de la fórmula del movimiento browniano (1.29) que resuelve la ecuación de calor (1.27). Ahora se determina T para la distribución exponencial con parámetro λ , así se tiene $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$ y para el último momento, se supone que T es independiente del movimiento browniano $\{B_t\}$. En este caso, el proceso $\{X_t\}$ es llamado movimiento browniano exponencial de la ruina con tasa instantánea de ruina $\lambda \geq 0$.

En este momento, se desea saber si se puede encontrar una solución para el problema (1.27) con valores iniciales que satisfaga:

$$u(x, t) = E[f(x + X_t)].$$

Como consecuencia de que $X_0 \equiv x$, se tiene $u(x, 0) = f(x)$.

De la definición de $u(x, t)$ junto con la independencia del proceso $\{W_t\}$ y el tiempo de ruina T , se tiene la factorización explícita

$$u(x, t) = E[f(x + W_t)1(T > t)] = e^{-\lambda t} E[f(x + W_t)], \quad (1.30)$$

aquí $1(T > t)$ representa a la función indicadora, la cual toma el valor de uno para toda $T > t$ y cero en $T \leq t$.

Por cálculo directo se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} E[f(x + W_t)] - \lambda e^{-\lambda t} E[f(x + W_t)] \\
&= e^{-\lambda t} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} E[f(x + W_t)] - \lambda E[f(x + W_t) 1(T > t)] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} E[f(x + W_t) 1(T > t)] - \lambda E[f(x + W_t) 1(T > t)] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \lambda u(x, t).
\end{aligned}$$

Esto nos dice que para el caso especial $q(x) = -\lambda$, la fórmula de representación de Feynman-Kac está dada por:

$$u(x, t) = E \left[f(x + W_t) \exp \left(\int_0^t q(x + W_s) ds \right) \right] = E \left[f(x + W_t) e^{-\lambda t} \right], \quad (1.31)$$

lo que debería ser una representación de la solución de (1.25), con $u(x, 0) = f(x)$. En otras palabras, la fórmula de Feynman-Kac es válida cuando $q(x)$ es una constante no positiva.

A la esperanza (1.31) es más natural darle una interpretación económica y ver a $E \left[f(x + W_t) e^{-\lambda t} \right]$ como el pago descontado, donde λ es la tasa de interés. Con este punto de vista, no existen razones para que la tasa de interés no sea constante y si se considera que la tasa de interés depende de $\{x + W_t\}$, entonces la fórmula de Feynman-Kac es más evidente.

1.2.3. La representación para el movimiento browniano

En esta sección se dará la fórmula de Feynman-Kac que representa el movimiento browniano mediante el siguiente teorema.

Teorema 3 (*Teorema de representación de Feynman-Kac para el movimiento browniano*)

Supóngase que la función $q : R \rightarrow R$ es acotada y considérese el problema con valores iniciales:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x)u(x, t) \quad \text{con} \quad u(x, 0) = f(x),$$

donde $f : R \rightarrow R$ es también acotada. Si $u(x, t)$ es la única solución acotada del problema con valores iniciales, entonces $u(x, t)$ tiene la representación

$$u(x, t) = E \left[f(x + W_t) \exp \left(\int_0^t q(x + W_s) ds \right) \right]. \quad (1.32)$$

Demostración

Antes de dar la demostración, se proporcionan las definiciones básicas para entender tanto esta demostración, así como las subsecuentes. Para más detalles ver Apéndice B.

Definición 2 Sea $F = (F_t)$ una filtración¹⁰. Un proceso M es una martingala, si éste es integrable, adaptado¹¹ y

$$E[M(t)|F_s] = M(s),$$

para $s, t \in T$, $0 \leq s \leq t$.

Definición 3 Si un proceso $\{M_t\}$ es adaptado a la filtración $\{F_t\}$ para todo $0 \leq t < \infty$, entonces $\{M_t : 0 \leq t < \infty\}$ es llamado una martingala local, dado que existe una sucesión no decreciente de tiempos de paro $\{\tau_k\}$ que cumplen la propiedad $\tau \rightarrow \infty$ con probabilidad uno cuando $k \rightarrow \infty$ y tal que para cada k el proceso definido por

$$M_t^{(k)} = M_{t \wedge \tau_k} - M_0 \quad \text{para } t \in [0, \infty),$$

es una martingala con respecto a la filtración $\{F_t : 0 \leq t < \infty\}$.

Existen diferentes demostraciones de la fórmula de Feynman-Kac, pero la idea básica es encontrar una martingala $\{M_s\}$ para la cual se tiene

$$M_0 = u(x, t) \quad y \quad E(M_t) = E \left[f(x + W_t) \exp \left(\int_0^t q(x + W_s) ds \right) \right].$$

Alguna martingala trivialmente satisface $E(M_0) = E(M_t)$ y esto es identificado como la fórmula de Feynman-Kac. Se puede pensar a esta técnica como un método de interpolación, de donde se desprenden muchas identidades interesantes que tienen demostraciones análogas [66].

Sea el proceso $\{M_s\}$ que es definido para $0 \leq s \leq t$ por

$$M_s = u(x + W_s, t - s) \exp \left(\int_0^s q(x + W_\nu) d\nu \right), \quad (1.33)$$

por la fórmula de Itô y la suposición de que $u(x, t)$ se resuelve mediante su EDP, se tiene

¹⁰Si un subconjunto $\{F_t : 0 \leq t < \infty\}$ de sub σ álgebras de F tiene la propiedad de que si $s \leq t$ implica que $F_s \subset F_t$, entonces el subconjunto es llamado una filtración.

¹¹Si las variables aleatorias $\{M_t : 0 \leq t < \infty\}$ son tales que X_t es F_t medibles, entonces se dice que X_t es adaptado a la filtración.

$$\begin{aligned}
du(x + W_s, t - s) &= \frac{\partial u(x + W_s, t - s)}{\partial x} dW_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x + W_s, t - s)}{\partial x^2} ds \\
&\quad - \frac{\partial u(x + W_s, t - s)}{\partial t} ds \\
&= \frac{\partial u(x + W_s, t - s)}{\partial x} dW_s - q(x + W_s)u(x + W_s, t - s) ds,
\end{aligned}$$

por la regla del producto se ve que

$$\begin{aligned}
dM_s &= \exp\left(\int_0^s q(x + W_r) dr\right) \left[\frac{\partial u(x + W_s, t - s)}{\partial x} dW_s - q(x + W_s)u(x + W_s, t - s) ds \right] \\
&\quad + \exp\left(\int_0^s q(x + W_r) dr\right) q(x + W_s)u(x + W_s, t - s) ds \\
&= \exp\left(\int_0^s q(x + W_r) dr\right) \frac{\partial u(x + W_s, t - s)}{\partial x} ds.
\end{aligned}$$

Esta última fórmula dice que $\{M_s : 0 \leq s \leq t\}$ es una martingala local y de la definición de la ecuación (1.33) se tiene

$$\sup_{\{0 \leq s \leq t\}} |M_s| \leq \|u\|_\infty \exp(t \|q\|_\infty), \quad (1.34)$$

donde $\|u\|_\infty$ y $\|q\|_\infty$ son acotadas, ya que por hipótesis q y u son acotadas. La desigualdad (1.34) dice que la martingala local $\{M_s : 0 \leq s \leq t\}$ es acotada y como consecuencia ésto es una martingala.

Dicha consecuencia es la igualdad de las esperanzas $E(M_0) = E(M_t)$, es decir,

$$E(M_0) = u(x, t) = E(M_t) = E\left[f(x + W_t) \exp\left(\int_0^t q(x + W_s) ds\right)\right], \quad (1.35)$$

justamente como se desea mostrar. §

Este teorema puede ser utilizado para establecer un gran número de teoremas de representación para funciones que satisfacen la EDP parabólica. A continuación se dará una aplicación clásica de la fórmula básica de Feynman-Kac para el movimiento browniano.

Ley del arco seno de Lévy

Ahora se aplicará la fórmula de Feynman-Kac a un problema concreto. No existe mejor ejercicio que trabajar a través de la derivación de Mark Kac de la famosa Ley del Arco seno de Levy para la distribución del tiempo T_t que el movimiento browniano se desplaza en la línea positiva $[0, \infty)$ durante el periodo de tiempo $[0, t]$.

Teorema 4 (*Ley del arcoseno de Lévy*)

Para alguna $0 \leq p \leq 1$ y alguna $t \geq 0$, se tiene

$$P(t_t \leq pt) = \frac{2}{\pi} \text{arcoseno}(\sqrt{p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^p \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}. \quad (1.36)$$

Se obtiene el comportamiento físico de esta ley, se debería notar que la densidad del arcoseno es $\pi^{-1}u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}$ tiene una masa cercana a $u = 0$ y $u = 1$, entonces la masa mínima se alcanza en $u = \frac{1}{2}$.

Demostración

La demostración de este teorema se hará por pasos.

1) Traslación a la EDP

Para el caso $q(x) = -\lambda 1(x > 0)$ y $f(x) = 1$, se obtiene

$$-\lambda T_t = \int_0^t q(W_s) ds.$$

La relación de Feynman-Kac también dice que

$$E \left[\exp \left(\int_0^t q(x + W_s) ds \right) \right] = u(x, t), \quad (1.37)$$

dado que $u(x, t)$ es la única solución del problema con valores iniciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda 1(x > 0)u \quad y \quad u(x, 0) = 1 \quad \forall x \in R. \quad (1.38)$$

Se necesita resolver el problema con valores iniciales (1.38), encontrando la transformada de Laplace de T_t y checando que esta transformación coincide con la densidad del arcoseno.

2) Resolviendo la EDP

Del problema con valor inicial (1.38) se obtienen dos ecuaciones:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \lambda u(x, t) & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.39)$$

y la condición inicial puede ser escrita como

$$u(x, 0^+) = 1,$$

donde $u(x, 0^+)$ denota el límite de $u(x, t)$ cuando $t \rightarrow 0$, a través de un valor positivo. La función $u(t, x)$ representa la transformada de Laplace, pero el camino más rápido para resolver el problema con valor inicial (1.38) es tomando la transformada de Laplace de ambos lados para convertirla en una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Si se toma la transformada de Laplace de $u(x, t)$ en la variable t y se escribe

$$\hat{u}(x, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(x, t) dt,$$

entonces integrando por partes, se muestra que $\partial u(x, t)/\partial t$ es transformada a $1 + \alpha \hat{u}(x, \alpha)$, mientras que la diferenciación bajo el signo de la integral muestra que $\partial^2 u(x, t)/\partial x^2$ es transformada a $\partial^2 \hat{u}(x, \alpha)/\partial x^2$. La EDP(1.27), se transforma en la EDO

$$1 + \alpha \hat{u}(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}(x, \alpha)}{\partial x^2} - \lambda \hat{u}(x, \alpha) & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}(x, \alpha)}{\partial x^2} & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

La solución general de la EDO debe ser obtenida por la substitución exponencial usual, se encuentra que las soluciones acotadas de la EDO (1.40) están dadas por

$$\hat{u}(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha + \lambda} + C_0 \exp(-x\sqrt{2(\alpha + \lambda)}) & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{\alpha} + C_1 \exp(x\sqrt{2\alpha}) & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.41)$$

donde C_0 y C_1 son constantes de integración, que deben ser determinadas. Estas constantes son encontradas si existe la solución del problema con valores iniciales (1.38). La única solución se sigue de la correspondiente a la EDO y a su transformada de Laplace.

3) Usando la suavidad en el ajuste

La forma más natural para encontrar las dos variables C_0 y C_1 es buscar un sistema de dos ecuaciones lineales que ambas satisfagan. Una solución de la EDP (1.25) debe ser doblemente diferenciable en x y para alguna $u(x, t)$ esto es continuamente diferenciable, así se tiene

$$u(0^+, t) = u(0^-, t) \quad y \quad \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(0^-, t)}{\partial x}.$$

Como una consecuencia, la transformada de Laplace \hat{u} debe también satisfacer

$$\hat{u}(0^+, \alpha) = \hat{u}(0^-, \alpha) \quad y \quad \frac{\partial \hat{u}(0^+, \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}(0^-, \alpha)}{\partial x}, \quad (1.42)$$

y estas ecuaciones deben dar un sistema necesario. Cuando se calculan los correspondientes límites en la fórmula (1.41), se ve que la primera ecuación de (1.42) da:

$$\frac{1}{\alpha + \lambda} + C_0 = \frac{1}{\alpha} + C_1,$$

y la segunda ecuación de (1.42) queda como

$$-C_0 \sqrt{2(\alpha + \lambda)} = C_1 \sqrt{2\alpha}.$$

Cuando se resuelve este sistema para C_0 y C_1 , se encuentran sus respectivos valores, los cuales son:

$$C_0 = \frac{\sqrt{\alpha + \lambda} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha + \lambda)} \quad y \quad C_1 = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha + \lambda}}{\alpha \sqrt{\alpha + \lambda}}.$$

Si se considera $x = 0$ en (1.41) y la colección de términos, se encuentra

$$\hat{u}(0^+, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(0, t) dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}(\alpha + \lambda)}, \quad (1.43)$$

esto es una fórmula simple, tal y como se esperaba encontrar.

4) Checando la transformada y Confirmando la Ley

La ley del Arcoseno dice que T_t/t tiene la densidad del arcoseno en $[0, 1]$, es decir, ésto es equivalente a mostrar que T_t tiene la densidad del arcoseno en $[0, t]$. En términos de la transformada de Laplace, esto significa que la demostración del Teorema de Lévy debe estar completo si se muestra que

$$E\left(e^{-\lambda T_t}\right) = \int_0^t \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{s(t-s)}} ds. \quad (1.44)$$

Por la unicidad de la transformada de Laplace, la identidad (1.44) debe seguirse si se prueba la igualdad de la transformada

$$\int_0^\infty E(e^{-\lambda T_t}) e^{-\alpha t} dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-\alpha t} \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{s(t-s)}} ds dt, \quad (1.45)$$

el lado izquierdo de la integral (1.45) es justo $\hat{u}(0, t)$, para la cual se tiene la fórmula (1.41), así la demostración del teorema de Lévy debe completarse al checar que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \lambda)}} = \int_0^\infty \int_0^t e^{-\alpha t} \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{s(t-s)}} ds dt. \quad (1.46)$$

Afortunadamente, el lado derecho de la ecuación (1.46) es fácil de calcular. Si se comienza con el teorema de Fubini, se puede terminar con dos aplicaciones de la integral gama,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}},$$

se encuentra en un orden rápido que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{s}} \int_s^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t-s}} dt ds &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{\sqrt{t}} dt ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda+\alpha)s}}{\sqrt{s}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \lambda}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Ahora se cancelan las π 's y se obtiene la ecuación (1.46) lo que termina la demostración de la Ley del Arcoseno o de Lévy. §

1.2.4. La representación para procesos de difusión

La técnica de Martingala de interpolación que ayuda a probar la fórmula de Feynman-Kac para el movimiento Browniano, puede también usarse para obtener resultados análogos para un proceso más general.

Teorema 5 Sea $q : R \rightarrow R$ y $f : R \rightarrow R$ funciones acotadas y suponga que $u(x, t)$ es la única solución al problema definido por la ecuación

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + q(x)u(x, t) \quad (1.47)$$

y condición inicial

$$u(x, 0) = f(x).$$

Si las funciones $\mu : R \rightarrow R$ y $\sigma : R \rightarrow R$ son Lipschitz y satisfacen la condición de crecimiento

$$\mu^2(x) + \sigma^2(x) \leq A(1 + x^2), \quad (1.48)$$

para alguna constante $A > 0$, entonces la función $u(x, t)$ tiene la representación

$$u(x, t) = E \left[f(x + X_t) \exp \left(\int_0^t q(x + X_s) ds \right) \right], \quad (1.49)$$

donde el proceso X_t es la solución única de la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE), dada por

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad X_0 = 0. \quad (1.50)$$

Demostración

Considérese el proceso

$$M_s = u(X_s, t - s) \exp \left(\int_0^s q(X_\nu) d\nu \right). \quad (1.51)$$

Si se escribe $M_s = U_s I_s$, el próximo paso es usar la regla del producto para mostrar que $\{M_s : 0 \leq s \leq t\}$ es una martingala local.

Aplicando la fórmula de Itô a U_s , se tiene

$$\begin{aligned} dU_s &= \frac{\partial u(X_s, t - s)}{\partial x} dX_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(X_s, t - s)}{\partial x^2} dX_s dX_s - \frac{\partial u(X_s, t - s)}{\partial t} ds \\ &= \frac{\partial u(X_s, t - s)}{\partial x} \sigma(X_s) dW_s + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(X_s, t - s)}{\partial x^2} \sigma^2(X_s) + \frac{\partial u(X_s, t - s)}{\partial x} \mu(X_s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u(X_s, t - s)}{\partial t} \right\} ds \\ &= \frac{\partial u(X_s, t - s)}{\partial x} \sigma(X_s) dW_s - q(X_s) u(X_s, t - s) ds, \end{aligned}$$

y para I_s la fórmula de Itô se reduce al cálculo ordinario dado por

$$dI_s = \left[\exp \left(\int_0^s q(X_\nu) d\nu \right) \right] q(X_s) ds = I_s q(X_s) ds. \quad (1.52)$$

Por la regla del producto aplicada a M_s , se obtiene

$$\begin{aligned} dM_s &= I_s dU_s + U_s dI_s \\ &= I_s \left[\frac{\partial u(X_s, t-s)}{\partial x} \sigma(X_s) dW_s - q(X_s) u(X_s, t-s) ds \right] + u(X_s, t-s) I_s q(X_s) ds \\ &= I_s \frac{\partial u(X_s, t-s)}{\partial x} \sigma(X_s) dW_s. \end{aligned}$$

La EDE confirma que $\{M_s\}$ es una martingala local y el primer paso del argumento de interpolación es completo.

Finalmente, la representación definida en (1.51) para M_s y la hipótesis de que u y q son acotadas, implica

$$\sup_{0 \leq s \leq q} |M_s| \leq \|u\|_\infty \exp(t \|q\|_\infty) < \infty, \quad (1.53)$$

lo que indica que la martingala local $\{M_s : 0 \leq s \leq t\}$ es acotada y se ve que $\{M_s\}$ es una martingala. Para la martingala identidad se tiene, $E(M_0) = E(M_t)$, esta identidad es una transcripción de la ecuación (1.49), así la demostración de la representación de Feynman-Kac es completa. §

1.2.5. La representación y la ecuación de Black-Scholes

La búsqueda tradicional para las aplicaciones financieras del método de Feynman-Kac, está dado por el conjunto de modelos de bonos y activos que pueden escribirse como:

$$dS_t = \mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) dW_t \quad y \quad d\beta_t = r(S_t, t) \beta_t dt, \quad (1.54)$$

donde los coeficientes del modelo $\mu(S_t, t)$, $\sigma(S_t, t)$ y $r(S_t, t)$ están dados por funciones explícitas del tiempo y el precio del activo subyacente actual. Este conjunto de modelos contiene al modelo clásico de Black-Scholes, donde los coeficientes toman la forma específica

$$\mu(S_t, t) \equiv \mu S_t, \quad \sigma(S_t, t) \equiv \sigma S_t \quad y \quad r(S_t, t) \equiv r,$$

para constantes μ , σ y r .

Una de las características para este conjunto de modelos definidos por el sistema (1.54), es que dichos modelos son esencialmente una clase amplia, en la cual se puede usar el método de la EDP para las reclamaciones contingentes. De hecho, si se repite la derivación original de la EDP clásica de Black-Scholes, se puede mostrar que al tiempo t el precio de arbitraje es $u(S_t, t)$ y al tiempo de ejercicio T de una reclamación europea, dado por $X = h(S_T)$, debe satisfacer el siguiente problema con valor final

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2(x, t)x^2\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - r(x, t)x\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + r(x, t)u(x, t), \quad (1.55)$$

$$u(x, T) = h(x). \quad (1.56)$$

La pregunta que surge a partir del problema anterior es la siguiente: ¿Cuál es la modificación del método de Feynman-Kac que da la representación para la solución del problema con valor terminal (1.55)?

Para contestar la pregunta anterior, supóngase que el proceso de la tasa de interés no negativo $r(x, t)$ es acotado y que los parámetros del activo $\mu(x, t)$ y $\sigma(x, t)$ satisfacen, ambos, las condiciones de Lipschitz

$$(\mu(x, t) - \mu(y, t))^2 + (\sigma(x, t) - \sigma(y, t))^2 \leq A(x - y)^2,$$

y la condición de la tasa de crecimiento lineal

$$\mu^2(x, t) + \sigma^2(x, t) \leq W(1 + x^2).$$

Se debe suponer que $h(x)$ es acotada. Después de todo, las opciones de compra europeas corresponden a funciones no acotadas $h(x) = (x - k)_+$. Ahora, si se reemplaza $h(x)$ por $h_0(x) = \min(h(x), M)$, donde M denota al total de dinero en el universo, entonces h_0 es acotada y el nivel de claridad del modelo fundamentado debe ayudar a aceptar el precio de $h_0(S_T)$ como una elección razonable para el precio de $h(S_T)$.

La fórmula de Feynman-Kac para la solución de la EDP de Black-Scholes, puede ser más compleja que la del problema con valor final. Este hecho se verá en el siguiente teorema.

Teorema 6 *Si $u(x, t)$ es la única solución acotada del problema con valor final dado por las ecuaciones (1.55) y (1.56), entonces $u(x, t)$ tiene la representación*

$$u(x, t) = E \left[h(x) \exp \left(- \int_t^T r(x, s) ds \right) \right], \quad (1.57)$$

donde para $s \in [0, t]$, el proceso es simplemente x y para $s \in [t, T]$, el proceso es definido por la solución de la siguiente EDE

$$dx = r(x, s)xdt + \sigma(x, s)dW_s \quad (1.58)$$

Demostración

Se usará nuevamente la técnica de martingalas de interpolación.

Se considera

$$M_s = u(x, s) \exp\left(-\int_t^s r(x, \nu) d\nu\right) = U_s I_s, \quad \text{para } t \leq s \leq T, \quad (1.59)$$

entonces se encuentra que $M_t = u(x, t)$. También, la esperanza de M_T es igual al lado derecho de la identidad (1.57), así se puede probar que M_s es una martingala para $s \in [t, T]$, por lo cual se considera que la demostración del teorema es completa.

Como es usual, se debería extraer la propiedad de la martingala M_s , con la regla del producto de dM_s . Para ello, se calcula primero dU_s por la fórmula de Itô para encontrar

$$\begin{aligned} dU_s &= \left[\frac{\partial u(x, s)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, s)\frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2} \right] ds + \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} dx \\ &= \left[\frac{\partial u(x, s)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, s)\frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} r(x, s) \right] ds \\ &\quad + \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} \sigma(x, s) dW_s. \end{aligned}$$

Después se nota que $dI_s = -I_s r(x, s) ds$, así la regla del producto da

$$\begin{aligned} dM_s &= I_s dU_s + U_s dI_s \\ &= I_s [dU_s - U_s r(x, s) ds] \\ &= I_s \left[\frac{\partial u(x, s)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, s)\frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} r(x, s) \right] ds \\ &\quad - u(x, s) r(x, s) ds - I_s \frac{\partial u(x, s)}{\partial x} \sigma(x, s) dW_s \end{aligned} \quad (1.60)$$

Por la suposición de que $u(x, t)$ satisface la ecuación de Black-Scholes (1.57), se ve que el término puntual ds de dM_s debe converger y como consecuencia, M_s es

una martingala local, como se esperaba. Así, como $r(x, t)$ es positiva y $u(x, t)$ es acotada, de la definición de M_s dada por la ecuación (1.59), se observa que M_s es acotada. Esto implica que M_s es una martingala, lo que completa la demostración. §

Algunas de las posibles dificultades que se desprenden de la integral (1.57), se pueden solucionar transformando la integral de tal forma que se obtenga el proceso $\{x : t \leq s \leq T\}$ y cuya EDE se represente de la siguiente forma

$$dx = r(x, s)xdt + \sigma(x, s)dW_t. \quad (1.61)$$

Cuando las soluciones de la EDE son bien entendidas, existe una excelente posibilidad de que la esperanza (1.57) puede ser obtenida explícitamente.

Para problemas más complicados, la característica de Feynman-Kac (1.57), representa un problema que es directamente accesible por simulación.

La fórmula explícita de la EDE para el proceso x , significa que la interpolación plausible del método de Euler para la solución numérica de EDO, puede ser usada para generar muestras de x . Como es usual, el total exacto de estas simulaciones debe ser difícil de encontrar, pero en este caso si los pasos de Euler son pequeños, entonces las simulaciones deben ser válidas. Esta observación y la oportunidad de reducir el tamaño de los pasos de Euler en una serie de simulaciones independientes puede ser desarrollada dentro de la aproximación práctica de la evaluación de la esperanza descontada (1.57).

El campo de la simulación de EDE es grande y crece rápidamente. En la práctica, la simulación está dentro de los tópicos más importantes en el cálculo estocástico. Para los seguidores de la fórmula de Feynman-Kac, la observación clave es que en cada avance de la técnica de simulación y en cada incremento en el gasto computacional se adiciona la importancia a la representación de Feynman-Kac, para la solución de la EDP de Black-Scholes en general.

Como una aplicación de las ecuaciones de Kolmogorov y la representación de Feynman-Kac, se verá a continuación como se relacionan ambas con la ecuación de Black-Scholes.

Capítulo 2

Una aproximación analítica a la teoría racional de opciones de Merton

En el año 1970, Merton desarrolló una teoría basada en argumentos económicos y financieros para estudiar las propiedades del precio de una opción [49]. La herramienta principal que usa Merton en sus demostraciones, es el principio de dominancia de portafolios. En el contexto donde el precio de una reclamación contingente satisface una EDP se dan demostraciones analíticas de la teoría racional de opciones de Merton (TROM) para una opción.

Se utilizarán diferentes versiones del principio del máximo ([14], [23], [59], [26] y [68]), así como, el método de planos móviles y deslizamiento [6], para demostrar los resultados. La importancia de usar este enfoque es la posibilidad de poder extender esta teoría a modelos semi lineales y no lineales ([18] y [65]). Aquí se da una idea de como extender esta herramienta a modelos semi lineales.

Cabe mencionar que en las demostraciones, utilizando como herramienta un enfoque de ecuaciones diferenciales parciales, de los lemas 1 al 5 y de los teoremas del 10 al 12 son parte de la contribución a esta tesis. Como se mencionó con anterioridad, Merton sólo basa su teoría en argumentos económicos y financieros y sus demostraciones no son formales desde un punto de vista matemático. También se puede mencionar que algunos de los resultados de Merton, pueden ser demostrados por medio de herramientas probabilísticas, tales como: tiempos de paro, martingalas, entre otras.

2.1. Introducción

A continuación se muestran los supuestos más importantes de la TROM.

La teoría racional de opciones de Merton se basa en fundamentos que permiten establecer algunas propiedades de los precios de las opciones, a partir de supuestos débiles que proporcionan validez universal, es decir, sus supuestos son de tipo económico y financiero de dominación de portafolios.

Dichos supuestos están dados por:

- a) Un inversionista prefiere ganar más que menos, esto es para obtener una fórmula consistente.
- b) No hay costos de transacción, todas las ganancias están sujetas al mismo impuesto y es posible obtener y conceder préstamos con una tasa libre de riesgo.
- c) La tasa a la que se obtiene un préstamo se llama tasa pasiva y la tasa a la que se concede éste es la tasa activa. Es importante mencionar que en el caso de esta tesis, ambas tasas son iguales y están representadas por r , la tasa libre de riesgo.

Antes de plantear las restricciones a los precios racionales de opciones, Merton consideraba cuatro tipos de instrumentos de inversión: contratos garantizados (*warrants*) americanos y europeos, ambos son emitidos por una empresa, el americano puede ser ejercido en cualquier fecha del periodo de vigencia del contrato, mientras que el europeo sólo podrá ser ejercido en la fecha de vencimiento, opciones americanas y europeas, de acuerdo a la fecha de ejercicio son similares a los contratos garantizados, la diferencia radica en que las opciones son emitidas por un individuo.

Es importante mencionar que la diferencia de valorar una opción de compra y un contrato garantizado (*warrant*) radica en que el agregado de la oferta de las opciones es cero, mientras que el agregado de la oferta de un contrato garantizado es positivo, lo que implica que la oferta de un contrato garantizado puede modificar los precios de las acciones emitidas en cantidades positivas.

De la definición de un contrato garantizado o de una opción se sigue que ambos, ya sean americanos o europeos, siempre toman valores mayores o iguales a cero. También se deduce que el valor de un contrato garantizado (o de una opción) de compra americano(a) y europeo(a) son iguales en la fecha de vencimiento. Al considerar la posibilidad de arbitraje en el mercado ambos contratos americanos siempre son mayores o iguales a su pago, lo que no necesariamente sucede en el caso de un contrato europeo.

Para fines de esta tesis, de aquí en adelante, sólo se manejará el caso de opciones. Para plantear las restricciones sobre los precios de opciones se define la dominancia entre valores o portafolios de éstos. Se considera a un valor o portafolio A como **dominante** sobre un valor o portafolio B , en una fecha conocida en el futuro, si el pago en A es mayor que el pago en B para algunos posibles estados de la naturaleza, entendiendo por éstos las condiciones que pueden darse en el mercado y es al menos igual al pago de B en todos los posibles estados de la naturaleza.

El supuesto más importante que considera Merton es dar una condición necesaria que asigne a las opciones un precio tal que no sea un valor ni dominado ni dominante, es decir, que si se tienen dos opciones americanas en donde el tiempo de duración de una es más largo que el de la otra, entonces la opción con tiempo más largo debe tener un valor más grande que la otra. Cabe mencionar que debido a que la opción americana permite el ejercicio temprano, lo que no es posible en la opción europea, deja la posibilidad de que antes de la fecha de vencimiento la opción americana tome un valor estrictamente mayor que el valor de una opción europea, en cuyo caso sería un valor dominante. De este mismo supuesto se desprende el hecho de que para dos opciones europeas o americanas con diferente precio de ejercicio se cumple que la que tiene precio de ejercicio más grande toma un valor más chico que la otra. El resultado más importante que surge de este supuesto es que una opción de compra americana no será ejercida antes de la fecha de vencimiento del contrato. En cuyo caso el valor de una opción de compra americana es el mismo que el de su contraparte europea.

Lo que se desea hacer en esta parte de la tesis es un análisis similar al dado en la teoría racional de opciones de Merton, justificándolo usando un enfoque analítico (EDP), aquí se verá que los supuestos dados por Merton son similares a los usados en la EDP. Se utilizarán herramientas matemáticas como el principio del máximo ([14], [23], [59], [68]), método de deslizamiento y planos móviles [6], así como la aplicación de la ecuación de Fokker-Planck (capítulo anterior). Se verá que es más ventajoso demostrar estos resultados matemáticamente ya que hasta el momento sólo se han justificado con argumentos de tipo económico y financiero de dominación (o preferencia) de los activos. Es importante mencionar que esto lleva a generalizar esta teoría a modelos no lineales y semi lineales que son de importancia en la práctica ([3], [4] y [18]). Se muestra a grandes rasgos la extensión a modelos semi lineales.

2.2. Principio del máximo (para operadores parabólicos lineales)

2.2.1. Principio débil del máximo

Para una variable $u : \bar{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$ y $u = u(x, t)$ ¹, se considera un operador L de la forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu, \quad (2.1)$$

donde los coeficientes a^{ij}, b^i y c son continuos. Siempre se supondrá la condición de parabolicidad uniforme y también que $a^{ij} = a^{ji}$ ($i, j=1, \dots, n$). Se considera a U como un subconjunto de \mathbb{R}^n abierto y acotado. Se denota a $U_T = U \times (0, T]$ para algún tiempo fijo $T > 0$. Hay que recordar que la frontera parabólica es $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$.

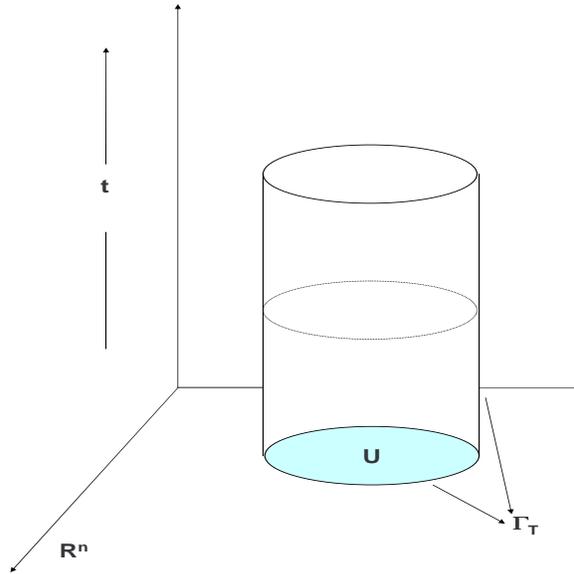


Figura 2.1: La región de U_T

Teorema 7 (*Principio débil del máximo*)

Se considera que $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ y $c \equiv 0$ en U_T .

i) Si

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.2)$$

¹Se define $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ y $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

En el caso de finanzas, se puede considerar a u como el valor del derivado, es decir, $u(S, t) = V(S, t)$.

entonces

$$\frac{\text{máx } u}{\bar{U}_T} = \frac{\text{máx } u}{\Gamma_T}.$$

ii) Análogamente, si

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.3)$$

entonces

$$\frac{\text{mín } u}{\bar{U}_T} = \frac{\text{mín } u}{\Gamma_T}.$$

NOTA: una función u que satisface la desigualdad (2.2) es llamada una subsolución y así se asegura que dicha subsolución alcanza su máximo en la frontera parabólica de Γ_T . Análogamente, u es una supersolución si se verifica (2.3) y en este caso u alcanza su mínimo en Γ_T .

Teorema 8 (*Principio débil del máximo para $c \geq 0$*)

Se supone que $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ y $c \geq 0$ en U_T .

i) Si

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.4)$$

entonces

$$\frac{\text{máx } u}{\bar{U}_T} \leq \frac{\text{máx } u^+}{\Gamma_T}.$$

ii) Análogamente, si

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.5)$$

entonces

$$\frac{\text{mín } u}{\bar{U}_T} \geq \frac{\text{mín } u^-}{\Gamma_T}.$$

NOTA: en particular, si $u_t + Lu = 0$ en U_T , entonces

$$\frac{\text{máx } |u|}{\bar{U}_T} = \frac{\text{máx } |u|}{\Gamma_T}.$$

2.2.2. Principio fuerte del máximo

Teorema 9 (*Principio fuerte del máximo para $c = 0$*)

Se supone que $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ y $c = 0$ en U_T . Suponga también que U es conexo.

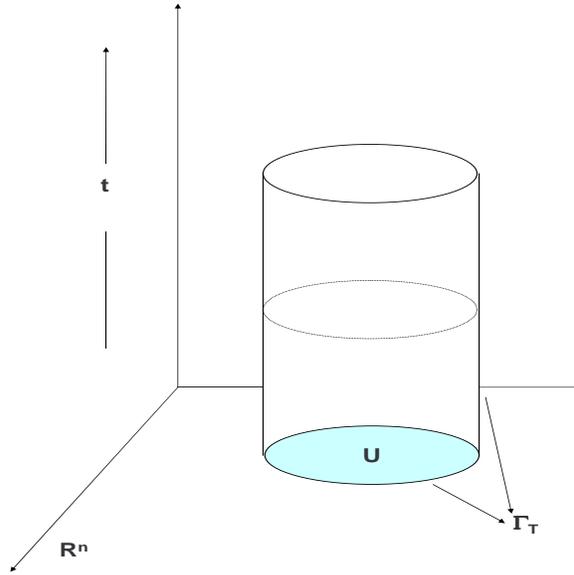


Figura 2.2: Principio fuerte del máximo para la ecuación de calor

i) Si

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.6)$$

y u alcanza su máximo sobre \bar{U}_T en el punto $(x_0, t_0) \in U_T$, entonces u es constante en U_{t_0} .

ii) Análogamente, si

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.7)$$

y u alcanza su mínimo sobre \bar{U}_T en el punto $(x_0, t_0) \in U_T$, entonces u es constante en U_{t_0} .

Teorema 10 (Principio fuerte del máximo para $c \geq 0$)

Se supone que $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ y $c \geq 0$ en U_T . Suponga también que U es conexo.

i) Si

$$u_t + Lu \leq 0 \quad \text{en } U_T \quad (2.8)$$

y u alcanza su máximo y éste es no negativo sobre \bar{U}_T en el punto $(x_0, t_0) \in U_T$, entonces u es constante en U_{t_0} .

ii) Análogamente, si

$$u_t + Lu \geq 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.9)$$

y u alcanza su mínimo y éste es no positivo sobre \bar{U}_T en el punto $(x_0, t_0) \in U_T$, entonces u es constante en U_{t_0} .

Como consecuencia de los resultados anteriores surge el siguiente lema, el cual será muy útil para las próximas demostraciones.

Lema 1 Sean u^1 y u^2 , dos soluciones que satisfacen la ecuación

$$u_t + Lu = 0 \quad \text{en } U_T, \quad (2.10)$$

y satisfacen la condición

$$u^1 \leq u^2 \quad \text{en } \Gamma_T,$$

entonces

$$u^1 \leq u^2 \quad \text{en } U_T.$$

Demostración

Si u^1 y u^2 satisfacen (2.10), entonces

$$u_t^i + Lu^i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Si $w = u^1 - u^2$, entonces

$$w_t + Lw = 0 \quad \text{en } U_T,$$

y se sabe por hipótesis que $u^2 \geq u^1$ en Γ_T , implica que

$$w \leq 0 \quad \text{en } \Gamma_T.$$

Y si se aplica el principio del máximo, se obtiene

$$w \leq 0 \quad \text{en } U_T,$$

es decir, $u^1 \leq u^2$ en U_T . \square

Los resultados correspondientes pueden ser fácilmente adaptados para ecuaciones hacia atrás (backwards).

2.3. Valuación de opciones de compra y venta

2.3.1. Opciones de compra europeas y americanas

La EDP de Black-Scholes para una opción de compra europea está dada por

$$\frac{\partial C_{Eu}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{Eu}}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_{Eu}}{\partial S} - rC_{Eu} = 0, \quad (2.11)$$

con función de pago $C_{Eu}(S, T) = \max(S - E, 0)$ y condiciones de frontera $C_{Eu}(0, t) = 0$ y $C_{Eu}(S, t) \rightarrow S$ si $S \rightarrow \infty^2$.

Análogamente la desigualdad de Black-Scholes para una opción de compra americana es

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_A}{\partial S} - rC_A \leq 0, \quad (2.12)$$

con función de pago $C_A(S, t) = \max(S - E, 0)$ y condiciones de frontera $C_A(0, t) = 0$ y $C_A(S, t) \rightarrow S$ si $S \rightarrow \infty$ y condición de frontera libre $C_A(S, t) \geq \max(S - E, 0)$ para $t \leq T$.

Nota: Para el precio de una opción de compra europea o americana, la condición de frontera cuando $S \rightarrow \infty$, de ahora en adelante se considerará en un dominio acotado, pues técnicamente es más sencillo. En general si $V(S, t) \rightarrow S$ cuando $S \rightarrow \infty$, donde V puede ser una opción de compra o de venta europea o americana, entonces $V(\bar{S}, t) \leq C$ para \bar{S} suficientemente grande.

La afirmación anterior se demuestra de la siguiente manera:

Si $V(S, t) \rightarrow S$ cuando $S \rightarrow \infty \Rightarrow \exists S_0 \ni |V(S, t) - S| < \epsilon$ si $S \geq S_0 \Rightarrow V(S, t) \leq S + \epsilon$.

Si $\bar{S} \geq S_0 \Rightarrow V(\bar{S}, t) \leq \bar{S} + \epsilon$ con $C = \bar{S} + \epsilon$.§

Un primer resultado trivial que se desprende del principio del máximo es el siguiente.

Lema 2 *La positividad en los precios para una opción de compra europea C_{Eu} y americana C_A están dados por*

$$C_{Eu}(S, t) \geq 0 \quad \text{y} \quad C_A(S, t) \geq 0 \quad \text{para} \quad t \leq T.$$

²Más formalmente $C_{Eu}(S, t) \sim S$ si $t \rightarrow \infty$, es decir, C_{Eu} es asintóticamente equivalente a S . Para más detalles ver símbolos de orden asintótico (O, o, \sim) en [19].

Demostración

Se hará la demostración sólo para una opción de compra americana, el caso europeo es similar.

P.D. $C_A(S, t) \geq 0$

Se considera la desigualdad de Black-Scholes para una opción de compra americana (2.12).

Por argumentos de regularidad estándar [23], $C_A(S, t) \in C_1^2(U_t) \cap C(\bar{U}_t)$ y $\Gamma_t = \bar{U}_t - U_t$.

Haciendo el cambio de variable

$$\tau = T - t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C_A}{\partial t} = -\frac{\partial C_A}{\partial \tau},$$

entonces (2.12) es transformada en

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} - L_{BS}(C_A) = \frac{\partial C_A}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_A}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C_A}{\partial S} + rC_A \geq 0, \quad (2.13)$$

o bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-C_A)}{\partial \tau} - L_{BS}(-C_A) &= \frac{\partial(-C_A)}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2(-C_A)}{\partial S^2} \\ &\quad - rS \frac{\partial(-C_A)}{\partial S} + r(-C_A) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

como $r \geq 0$, se cumplen las condiciones para aplicar el principio del máximo débil para $c = r \geq 0$ (ecuación (2.4)), entonces para la ecuación (2.14), se desea verificar el principio del máximo

$$C_A \geq 0 \quad \text{o} \quad -C_A \leq 0$$

Sea $u = -C_A$, entonces por la ecuación (2.14) se tiene

$$u_\tau - L_{BS}(u) \leq 0.$$

Entonces aplicando el principio del máximo, se llega a:

$$\max_{\bar{U}_\tau}(-C_A) \leq \max_{\Gamma_\tau}(-C_A)^+ = 0, \quad (2.15)$$

dado que en la frontera se tiene:

i) Si $S > E$

$$\Rightarrow C_A = S - E \geq 0 \Rightarrow -C_A \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-C_A)^+ = 0.$$

ii) Si $S < E$

$$\Rightarrow C_A = 0 \Rightarrow -C_A = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-C_A)^+ = 0.$$

iii) Si $S = 0$

$$\Rightarrow C_A = 0 \Rightarrow -C_A = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-C_A)^+ = 0.$$

iv) Si S es grande

$$\Rightarrow C_A \sim S \Rightarrow -C_A \sim -S \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-C_A)^+ = 0.$$

Del análisis anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \max_{\bar{U}_\tau}(-C_A) &\leq 0 \\ \Rightarrow -C_A &\leq 0 \quad \Rightarrow C_A \geq 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

que es lo que se deseaba demostrar. §

Análogo a las definiciones anteriores, se considera la EDP de Black-Scholes para una opción de compra europea cuyo activo subyacente paga dividendos, la cual está dada por

$$\frac{\partial C_{ED}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{ED}}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C_{ED}}{\partial S} - rC_{ED} = 0, \quad (2.17)$$

con función de pago $C_{ED}(S, T) = \max(S - E, 0)$.

Y para una opción de compra americana con pago de dividendos de su activo subyacente, la igualdad de la ecuación (2.17) cambia a desigualdad (ver [73]). En este caso, se tiene la condición de frontera libre $C_{AD}(S, t) \geq \max(S - E)$.

Observación 1 *Por simplicidad se dirá que la opción, ya sea de compra o venta europea o americana, paga o no dividendos. Pero queda claro que ese dividendo, aunque ya no se mencione explícitamente, es siempre sobre el activo subyacente.*

Lema 3 *Para una opción de compra americana sin dividendos y sin posibilidades de arbitraje se debe cumplir que*

$$C_A(S, t) \geq \max(S - E, 0) \quad (2.18)$$

Demostración

Esta desigualdad siempre se ha demostrado mediante argumentos económicos y financieros de la siguiente forma:

Sea la paridad entre una opción de compra C_{Eu} y de venta P_{Eu} , dada por

$C_{Eu} = P_{Eu} + S - VP(E)$, donde VP representa el valor presente. Entonces

$$\begin{aligned} C_{Eu} &= P_{Eu} + S - VP(E) + E - E \\ &= (S - E) + \{E - VP(E)\} + P_{Eu} \\ &\geq S - E. \end{aligned}$$

Ahora se desea demostrar el mismo lema utilizando la nueva herramienta que es el principio del máximo.

$$\text{P.D. } C_A(S, t) \geq \max(S - E, 0)$$

Se sabe por el lema 2 que $C_A(S, t) \geq 0$, así que sólo resta demostrar que $C_A(S, t) \geq S - E$.

Se considera la desigualdad de Black-Scholes para una opción de compra americana (2.12) y se le aplica el cambio de variable análogo al lema 2, $\tau = T - t$, y se llega a la ecuación (2.14), para la cual hay que verificar el principio del máximo.

$$C_A \geq S - E \quad \text{o} \quad (S - E) - C_A \leq 0$$

Sea $u = (S - E) - C_A$, entonces se tiene que verificar que

$$u_\tau - L_{BS}(u) \leq 0$$

substituyendo el valor de u , se obtiene

$$\begin{aligned}
& (S - E)_\tau + (-C_A)_\tau - L_{BS}(S - E) - L_{BS}(-C_A) \\
& \leq \frac{\partial(S - E)}{\partial\tau} - L_{BS}(-C_A) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2(S - E)}{\partial S^2} \\
& \quad - rS \frac{\partial(S - E)}{\partial S} + r(S - E) + L_{BS}(-C_A) \\
& \leq -rS + rS - rE = -rE \leq 0
\end{aligned}$$

pues $r \geq 0$, $E \geq 0$.

Entonces aplicando el principio del máximo, se llega a:

$$\max_{\bar{U}_\tau}((S - E) - C_A) \leq \max_{\Gamma_\tau}((S - E) - C_A)^+ = 0,$$

dado que en la frontera se tiene:

i) Si $S > E$

$$\Rightarrow C_A = S - E \Rightarrow (S - E) - C_A = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}((S - E) - C_A)^+ = 0.$$

ii) Si $S < E$

$$\Rightarrow C_A = 0 \Rightarrow (S - E) - C_A = S - E \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(S - E)^+ = 0.$$

iii) Si $S = 0$

$$\Rightarrow C_A = 0 \Rightarrow (S - E) - C_A = -E \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-E)^+ = 0.$$

iv) Si S es suficientemente grande

$$\Rightarrow C_A \sim S \Rightarrow (S - E) - C_A \sim -E \leq 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(-E)^+ = 0.$$

Del análisis anterior se obtiene que

$$\max_{\bar{U}_\tau}((S - E) - C_A) \leq 0$$

$$\Rightarrow (S - E) - C_A \leq 0 \text{ en } \bar{U}_\tau, \quad y \quad C_A \geq (S - E).$$

Esto completa la demostración. §

La interpretación financiera de este hecho nos da un resultado muy importante: el ejercicio temprano para una opción de compra americana no es óptimo, lo que quiere decir que el valor de una opción de compra americana es igual al valor de una opción de compra europea.

Lema 4 *Para el caso de una opción de compra americana con pago de dividendos, la desigualdad $C_{AD} \geq (S - E)$ no siempre se satisface.*

Demostración

Sea la desigualdad de Black-Scholes para una opción de compra americana con dividendos

$$\frac{\partial C_{AD}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{AD}}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C_{AD}}{\partial S} - rC_{AD} \leq 0, \quad (2.19)$$

Analogamente a la demostración anterior se considera el cambio de variable $\tau = T - t$, para obtener

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(-C_{AD})}{\partial \tau} - L_{BSD}(-C_{AD}) \\ = & \frac{\partial(-C_{AD})}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2(-C_{AD})}{\partial S^2} - (r - D_0)S \frac{\partial(-C_{AD})}{\partial S} + r(-C_{AD}) \leq 0, \end{aligned}$$

$$\text{P.D. } (S - E) - C_{AD} \leq 0$$

Se toma $u = (S - E) - C_{AD}$, entonces se obtiene

$$u_\tau - L_{BSD}(u) \leq -rS + SD_0 + rS - rE \leq SD_0 - rE.$$

En este caso no se puede aplicar directamente el principio del máximo, ya que en general no se sabe el signo de $SD_0 - rE$, por tal motivo no se puede garantizar que $C_{AD} \geq S - E$ se mantenga siempre. Este hecho se puede interpretar financieramente como que el ejercicio temprano sí puede ser óptimo.

Lo importante de utilizar el principio del máximo es que se puede decir con precisión en qué casos el ejercicio temprano no es óptimo. A continuación se da un análisis más detallado.

Si $SD_0 < rE$ implica que $u_\tau - L_{BSD}(u) \leq 0$ y por el principio del máximo se obtiene la desigualdad $C_{AD} \geq S - E$, lo que quiere decir por la demostración del lema anterior que el ejercicio temprano no es óptimo.

Para el caso en que $SD_0 > rE$, se obtiene que $u_\tau - L_{BSD}(u) \geq 0$ y aplicando el principio del máximo se llega a la desigualdad $C_{AD}(S, t) \leq \max(S - E, 0)$. El problema de tener esta desigualdad es que se pueden dar oportunidades de arbitraje, las cuales se resuelven con los resultados dados en [14], en donde nos dice que pequeñas oportunidades de arbitraje son permitidas, ya que el principio del máximo sigue siendo válido para muy pequeñas ventanas de arbitraje. Y financieramente quiere decir que el ejercicio temprano es permitido. Un análisis más detallado de este hecho, se deja como un problema abierto o bien para un trabajo posterior a esta tesis. §

Por consistencia, se verificará que el ejercicio temprano para una opción de venta americana, no puede ser excluido con esta metodología.

Lema 5 *Para una opción de venta americana sin dividendos, la desigualdad $P_A \geq (E - S)$ no siempre se satisface.*

Demostración

Se procederá por contradicción, se tratará de mostrar que $P_A - (E - S) \geq 0$.

Su desigualdad de Black-Scholes, está dada por

$$\frac{\partial P_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A \leq 0, \quad (2.20)$$

haciendo el cambio de variable $\tau = T - t$, se llega a

$$\frac{\partial(-P_A)}{\partial \tau} - L_{BS}(-C_A) = \frac{\partial(-P_A)}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2(-P_A)}{\partial S^2} - rS \frac{\partial(-P_A)}{\partial S} + r(-P_A) \leq 0,$$

P.D. $P_A - (E - S) \geq 0$

Sea $u = P_A - (E - S)$, entonces

$$u_\tau - L_{BS}(u) \leq -rS - rE + rS \leq -rE \leq 0.$$

Por el principio del máximo se tiene la desigualdad

$$\max_{\bar{U}_\tau}(P_A - (E - S)) \leq \max_{\Gamma_\tau}(P_A - (E - S))^+.$$

Se revisará que pasa en la frontera

i) Si $S > E$

$$\Rightarrow P_A = 0 \Rightarrow P_A - (E - S) = S - E \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(S - E)^+ = S - E.$$

ii) Si $S < E$

$$\Rightarrow P_A = E - S \Rightarrow P_A - (E - S) = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(0)^+ = 0.$$

iii) Si $S = 0$

$$\Rightarrow P_A = E \Rightarrow P_A - (E - S) = S \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(S)^+ = S.$$

iv) Si $S \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow P_A = 0 \Rightarrow P_A - (E - S) = S \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(S)^+ = S.$$

De acuerdo al análisis, no existe un resultado concreto o congruente con el cual se pueda asegurar que el máximo sobre la frontera sea cero, como en los casos anteriores, por tal razón no se da la desigualdad $P_A \geq \max(E - S, 0)$. Es decir, una opción de venta americana sin dividendos puede ser ejercida en cualquier periodo de tiempo, es decir, $P_A \leq \max(E - S, 0)$ y análogo a una opción de compra americana con dividendos, ésta desigualdad no quiere decir que existan oportunidades de arbitraje. Ya que se puede aplicar el principio del máximo en pequeñas bandas donde el arbitraje es permitido. Ver [14].§

Ya teniendo la idea de los modelos para una opción de compra europea y americana, se desea probar el siguiente resultado.

Teorema 11 *Si el activo subyacente no paga dividendos, el valor de una opción de compra europea es el mismo que el valor de una opción de compra americana, es decir, el ejercicio temprano para una opción de compra americana no ocurre.*

De alguna forma ya se hizo, demostrando que las opciones de compra americanas tienen que cumplir con la condición de que $C_A \geq \max(S - E)$, para evitar oportunidades de arbitraje. Pero ahora se desea demostrar este teorema utilizando otros métodos. Como es bien sabido, la ecuación de Black-Scholes coincide con la fórmula de Samuelson (en el caso log-normal), entonces se utilizará una representación basada en ésta última, las ecuaciones de Kolmogorov para encontrar la densidad correspondiente en la fórmula de Samuelson y el principio del máximo para obtener lo que se desea.

Muchos de los resultados que a continuación se presentan, se verán con detalle en el capítulo 3, aquí se darán por hechos. Se hace la demostración de este resultado en esta parte, porque en dicha demostración se utiliza también el principio del máximo.

Antes de dar la demostración, se muestran algunos hechos importantes.

Considérese la ecuación para una opción de compra europea (2.11).

De acuerdo a la fórmula de Samuelson, el precio de una opción de compra europea es

$$C_{Eu}(S, t) = e^{-r(T-t)} E_P^{S,t} \left(g \left(\frac{S_{(T-t)}}{E(S_{(T-t)})} S_0 e^{r(T-t)} \right) \right),$$

donde $g(\cdot)$ es la función de pago; $E(S_t) = e^{\mu t} S_0$ es el valor esperado del activo al tiempo t , con tasa de rendimiento μ y valor inicial del activo S_0 ; y $E_P^{S,t}$ es el valor esperado al tiempo t y valor del activo S , con respecto a la medida física P .

Si se escribe el precio de una opción de compra americana en términos de una opción de compra europea (ver próximo capítulo), se obtiene la siguiente fórmula

$$C_A(S, t) = E_P^{S,t} (C_{Eu}(S, t)/\tau) = \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) C_{Eu}(S, \tau, T) d\tau, \quad (2.21)$$

donde $C_{Eu}(S, t, T)$ es el valor de una opción de compra europea con tiempo de ejercicio T y tiempo antes de expirar t , con $\rho(S, t)$ es la densidad con respecto a la medida física correspondiente, que da la probabilidad de que el activo tenga o alcance un precio S al tiempo t , $\rho_n(S, t) = \rho(S, t) / \int_t^{T_S} \rho(S, \tau) d\tau$ y T_S es el tiempo en que el activo subyacente toca la frontera libre. Es importante mencionar que se ha usado el hecho de que las opciones europeas y americanas sin dividendos son idénticas.

Y se sabe que $\rho(S, t)$, satisface la siguiente ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} + (2\sigma^2 - \mu) S \frac{\partial \rho}{\partial S} + (\sigma^2 - \mu) \rho. \quad (2.22)$$

Con condiciones de frontera $\rho(0, \tau) = 0 \forall \tau < t$ y $\rho(0, \tau) = 1 \forall \tau = t$, $\rho(S, 0) = \delta(S - S_0)$ y $\rho(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$. Para más detalles ver capítulo 3.

Demostración al Teorema 11

Usando ésta aproximación (2.21), se puede verificar fácilmente $C_A(S, t) \leq C_{Eu}(S, t)$.

$$\begin{aligned} C_A(S, t) &= \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) C_{Eu}(S, \tau) d\tau \quad (\text{por el Teorema 12, ver abajo}) \\ &\leq \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) C_{Eu}(S, t) d\tau \\ &\leq \int_t^T \rho_n(S, \tau) C_{Eu}(S, \tau) d\tau \\ &= C_{Eu}(S, t) \int_t^T \rho_n(S, \tau) d\tau \quad (C_{Eu}(S, t) \text{ no depende de } \tau) \end{aligned}$$

$$\leq C_{Eu}(S, t) \quad (\text{por ser } \rho \text{ una función de distribución de probabilidad que integra a uno en } [t, T])$$

La desigualdad opuesta, $C_A \geq C_{Eu}$, se demostrará por el principio del máximo (ver [23]). La demostración es análoga a la mostrada en el lema 2 .

Sea $u = C_{Eu} - C_A$, se verificará

$$u_\tau - L_{BS}(u) \leq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (C_{Eu} - C_A)_\tau - L_{BS}(C_{Eu} - C_A) &= (C_{Eu})_\tau + (-C_A)_\tau - L_{BS}(C_{Eu}) - L_{BS}(-C_A) \\ &= (C_{Eu})_\tau - L_{BS}(C_{Eu}) + (-C_A)_\tau - L_{BS}(-C_A) \leq 0. \end{aligned}$$

Es menor que cero pues los primeros dos términos corresponden a la ecuación de Black-Scholes los cuales son iguales a cero y los últimos dos términos por la desigualdad (2.14) es menor que cero, por lo tanto la combinación de ambos resultados da una desigualdad menor o igual a cero.

Entonces aplicando el principio del máximo se tiene

$$\max_{\bar{U}_\tau}(C_{Eu} - C_A) \leq \max_{\Gamma_\tau}(C_{Eu} - C_A)^+ = 0,$$

dado que en la frontera se tiene:

i) Si $S > E$

$$\Rightarrow C_A = C_{Eu} = S - E \Rightarrow C_{Eu} - C_A = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(C_{Eu} - C_A)^+ = 0.$$

ii) Si $S < E$

$$\Rightarrow C_A = C_{Eu} = 0 \Rightarrow C_{Eu} - C_A = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(C_{Eu} - C_A)^+ = 0.$$

iii) Si $S = 0$

$$\Rightarrow C_A = C_{Eu} = 0 \Rightarrow C_{Eu} - C_A = 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(C_{Eu} - C_A)^+ = 0.$$

iv) Si S es suficientemente grande

$$\Rightarrow C_A = C_{Eu} \sim S \Rightarrow C_{Eu} - C_A \rightarrow 0 \Rightarrow \max_{\Gamma_\tau}(C_{Eu} - C_A)^+ = 0.$$

Del análisis anterior se obtiene que

$$\max_{\bar{U}_\tau} (C_{Eu} - C_A) \leq 0$$

$$\Rightarrow C_{Eu} - C_A \leq 0 \text{ en } \bar{U}_\tau, \quad y \quad C_A \geq C_{Eu}.$$

Por un lado se tiene que $C_{Eu} \leq C_A$ y por otro $C_{Eu} \geq C_A$, entonces no queda más que $C_A = C_{Eu}$.

Por lo tanto,

$$C_A(S, t) = \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) C_{Eu}(S, \tau) d\tau = C_{Eu}(S, t).$$

Y para que se de la igualdad $\rho_n = \delta(S, \tau - t)$, lo que significa que la porción de la frontera donde ρ puede ser diferente de cero está en $\{t = T\}$ y como $\int_{U_T} \rho_n = 1$, se verifica que esta medida es una delta de Dirac concentrada en $\{t = T\}$.

Con lo que se concluye que el valor de una opción de compra americana es igual al valor de una opción de compra europea, es decir, el ejercicio temprano no es óptimo para una opción de compra americana. §

Otros resultados importantes acerca de opciones de compra europeas y americanas se mencionan a continuación. Sus demostraciones se harán utilizando nuevamente el principio del máximo.

Considérese la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu,$$

en el rectángulo $[0, L] \times [0, T]$, con condiciones inicial y de frontera $u(x, 0) = u_0(x)$ convexa y $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, respectivamente.

Teorema 12 *Si u es una solución clásica, entonces u es monótona en t , i.e.,*

$$u(x, t) \geq u(x, t') \quad \text{si } t \geq t', \quad \forall x \in [0, L].$$

Demostración

La demostración se hará por contradicción.

Supóngase que $u(x, t) < u(x, t')$, con $t \geq t'$ y sea

$$t^* = \sup\{t \mid u(x, t) \geq u(x, t'), x \in [0, L]\}.$$

Si $t^* > 0$, entonces

$$u(x, t) \geq u(x, t') \quad \forall x \in [0, L] \quad y \quad 0 \leq t' \leq t \leq t^*.$$

Hay que notar que esto es verdadero si la condición inicial es convexa.

Se define

$$u^\tau = u(x, t + \tau), \quad \text{para } t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon],$$

con ε suficientemente pequeño, así que la medida de $[0, L] \times [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$ es pequeño y el principio del máximo se mantiene [14]. τ también es pequeña.

Entonces $u^\tau(x, t^* - \varepsilon) \geq u(x, t^* - \varepsilon)$, por definición de t^* .

Del principio del máximo se sigue que la desigualdad previa es válida en $[0, L] \times [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$.

Esto implica que $u(x, t) \geq u(x, t')$, para $t' < t < t^* + \varepsilon$, lo cual es una contradicción. §

Como un caso particular, se tiene el próximo lema.

Lema 6 *Dadas dos opciones de compra con el mismo precio subyacente, S , y el mismo precio de ejercicio, E , pero ejercidas en diferentes tiempos antes de expirar (tiempo real), $t_2 > t_1$, se debe de cumplir*

$$C(S, E, t_2) \leq C(S, E, t_1) \tag{2.23}$$

Hay que darse cuenta que por el teorema 5, C puede ser una opción europea o americana.

Demostración

Sean $C(S, E, t_2)$ y $C(S, E, t_1)$ dos opciones con $t_2 > t_1$.

Considérese los cambios de variables siguientes:

$$S = Ee^x, \quad t_i = T - \frac{\tau_i}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad y \quad C_A(S, E, t) = Ev(x, \tau_i), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

De acuerdo a este cambio, la ecuación (2.11) se transforma en la siguiente ecuación de calor con las τ 's que corresponden a los tiempos de expiración

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - k_1 v, \quad k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{para } i = 1, 2, \quad (2.24)$$

y la condición final se transforma en condición inicial de la siguiente manera

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0).$$

Y su condición de frontera es

$$v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Y por el teorema anterior, se considera $t = \tau_1$, $t' = \tau_2$, $u(x, t) = v(x, \tau_1)$ y $u(x, t') = v(x, \tau_2)$.§

Ahora se muestra una gráfica para ver más claramente este hecho, con diferentes tiempos antes de expirar $t = 5 < t = 12$ se tiene $C(S, E, t = 5) > C(S, E, t = 12)$.

Observación 2 *Es fácil mostrar con el principio del máximo, que para dos opciones de compra con el mismo activo subyacente S , con el mismo precio de ejercicio E , pero con diferentes tiempos al expirar, $T_2 > T_1$, ellas satisfacen $C(S, T_2) \geq C(S, T_1)$.*

Lema 7 *Dadas dos opciones de compra idénticas excepto que una tiene un precio de ejercicio más grande que la otra, es decir $E_2 > E_1$, se deben cumplir las siguientes desigualdades*

$$C_{Eu}(S, E_2, t) \leq C_{Eu}(S, E_1, t), \quad (2.25)$$

$$C_A(S, E_2, t) \leq C_A(S, E_1, t). \quad (2.26)$$

Demostración

Se demostrará para el caso europeo $C_{Eu}(S, E_2, t) \leq C_{Eu}(S, E_1, t)$. El caso americano es análogo.

Sean dos opciones de compra europeas, $C_{Eu}(S, E_1, t)$ y $C_{Eu}(S, E_2, t)$, que cumplen la ecuación (2.11), con las siguientes condiciones de frontera:

- $C_{Eu}(0, E_i, t) = 0$, para $i = 1, 2$
- $C_{Eu}(S, E_i, t) \rightarrow S$ si $S \rightarrow \infty$, para $i = 1, 2$ y
- $C_{Eu}(S, E_i, T) = \max(S - E_i, 0)$, para $i = 1, 2$

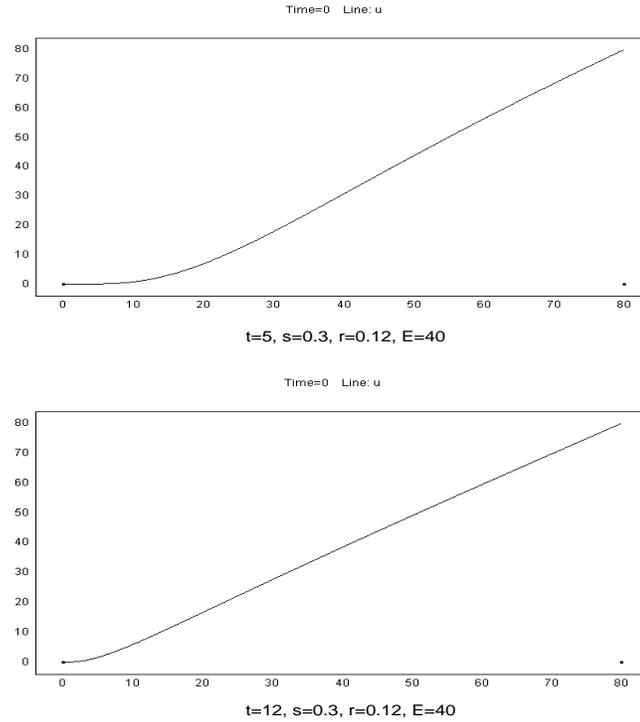


Figura 2.3: Diferentes tiempos antes de expirar

Utilizando el lema 1 y haciendo el cambio de variable análogo a las demás demostraciones para cada E_i :

$$S = E_i e^{x_i}, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad y \quad C_A(S, E_i, t) = E v(x_i, \tau).$$

la ecuación (2.11) se transforma en la ecuación de la conducción de calor.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + (k_1 - 1) \frac{\partial v}{\partial x_i} - k_1 v, \quad k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (2.27)$$

y la condición final se transforma en condición inicial de la siguiente manera

$$v(x_i, 0) = \max(e^{x_i} - 1, 0).$$

Como lo que se necesita es llegar a la ecuación de calor se hace otro cambio de variable dado por

$$v(x_i, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x_i - (k_1+1)\tau} u(\tau, x_i), \quad i = 1, 2.$$

Así con este cambio de variable la ecuación (2.27) nos da

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad -\infty < x_i < \infty \quad y \quad \tau > 0, \quad (2.28)$$

y la condición a su vez se transforma en

$$u(x_i, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_i} - e^{(k_1-1)x_i}, 0).$$

Para usar el lema 1, solo falta demostrar que $u(x_1, 0) > u(x_2, 0)$.

Primero, se consideran dos casos

- 1) Si $S \geq E_i \Rightarrow \frac{S}{E_i} \geq 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{E_i}\right) \geq 0$, para $i = 1, 2$.
- 2) Si $S \leq E_i \Rightarrow \frac{S}{E_i} \leq 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{E_i}\right) \leq 0$, para $i = 1, 2$.

Sin pérdida de generalidad sólo se considera el caso $S \geq E_i$, porque para el segundo caso se tiene $\max(S - E_i, 0) = 0$.

Sea $E_1 < E_2$, $S \geq 0$ y $S \geq E_i$ para $i = 1, 2$,

$$\Rightarrow \frac{1}{E_1} > \frac{1}{E_2} \Rightarrow \frac{S}{E_1} > \frac{S}{E_2} \Rightarrow \ln\left(\frac{S}{E_1}\right) \geq \ln\left(\frac{S}{E_2}\right) \Rightarrow x_1 \geq x_2.$$

Por un lado se tiene con $k_1 = \frac{2r}{\sigma^2} > 0$

$$\frac{1}{2}(k_1 + 1)x_1 \geq \frac{1}{2}(k_1 + 1)x_2 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_1} \geq e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_2}, \quad (2.29)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(k_1 - 1)x_1 \geq \frac{1}{2}(k_1 - 1)x_2 &\Rightarrow e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_1} \geq e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_2}, \\ &\Rightarrow -e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_1} \leq -e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

De las desigualdades (2.29) y (2.30) se obtiene la siguiente desigualdad

$$e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_1} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_1} \geq e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_2} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_2}$$

De aquí se obtiene

$$\max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_1} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_1}, 0) \geq \max(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x_2} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x_2}, 0),$$

por lo tanto $u(x_1, 0) \geq u(x_2, 0)$ para $x_2 < x_1$.

Entonces, aplicando el lema 1 se tiene

$$u(x_1, t) \geq u(x_2, t).$$

Así queda demostrado que

$$C_{Eu}(S, E_2, t) \leq C_{Eu}(S, E_1, t) \text{ si } E_1 < E_2.$$

Para el caso de opciones americanas, la demostración es análoga, ya que tienen las mismas condiciones de frontera. §

Este hecho se puede ver fácilmente mediante la siguiente figura, es decir, para $E_1 = 20 < E_2 = 70$ se tiene $C_{Eu}(S, E = 20, t = 12) > C_{Eu}(S, E = 70, t = 12)$.

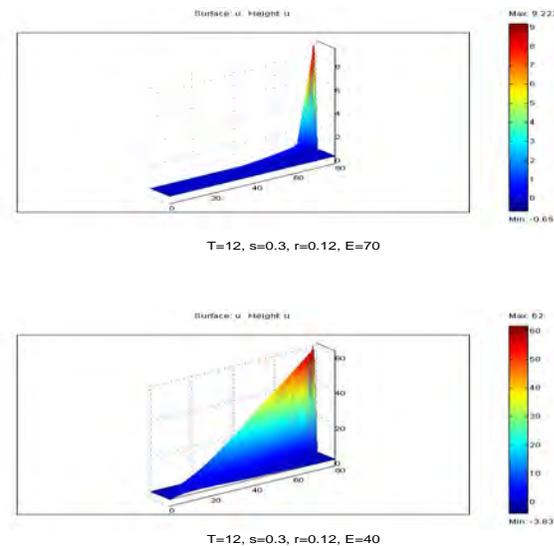


Figura 2.4: Diferentes precios de ejercicio

Finalmente, de acuerdo a Merton, supóngase que una opción europea es equivalente a una posición larga en su activo común apalancado por un préstamo descontado con una obligación limitada, donde el deudor promete pagar E dólares al final de τ periodos, pero en el evento de incumplimiento es sólo obligado a extender el valor del activo en ese tiempo. Si el valor presente del préstamo es una función decreciente de la tasa de interés, entonces, para un precio del activo dado, el precio

de una opción será una función creciente de la tasa de interés.

Sea $P(\tau)$ el precio de un préstamo (o bono) descontado sin riesgo (en términos de incumplimiento), el cual paga un dólar τ años a partir de ahora. Si se supone que ahora y en el futuro las tasas de interés son positivas, entonces

$$1 = P(0) > P(t_1) > P(t_2) > \dots > P(t_n), \quad \text{para } 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

Teorema 13 *Si el precio de ejercicio de una opción de compra europea es E y no paga dividendos y se construye el stock común sobre la vida de la opción, entonces*

$$C_{Eu}(S, E, t) \geq \max(0, S - EP(t)).$$

Demostración

Se hará de una manera análoga a la demostración del Teorema 7.

Si $S < EP(t) \Rightarrow \max(0, S - EP(t)) = 0$, entonces

$$C_{Eu}(S, E, t) \geq 0$$

Si $S > EP(t) \Rightarrow \max(0, S - EP(t)) = S - EP(t)$, entonces

$$C_{Eu}(S, E, t) \geq S - EP(t).$$

$$\mathbf{P.D.} \quad (S - EP(t)) - C_{Eu}(S, E, t) \leq 0$$

Para $C_{Eu}(S, E, t)$ se considera su EDP, dada por la desigualdad (2.14).

Sea $u = (S - EP(t)) - C_A$, entonces se tiene que verificar que

$$u_\tau + L_{BS}(u) \leq 0$$

substituyendo el valor de u , se obtiene

$$u_\tau + L_{BS}(u) = -rS + rS - rEP(t) = -rEP(t) + L_{BS}(-C_A) \leq 0 \quad (2.31)$$

pues $r \geq 0$, $EP(t) \geq 0$.

Entonces aplicando el principio del máximo, se llega a:

$$\max_{\bar{U}_\tau}((S - EP(t)) - C_A) \leq \max_{\Gamma_\tau}((S - EP(t)) - C_A)^+ = 0. \quad (2.32)$$

Pues sobre la frontera $P(t) = P(0) = 1$ y $C_A(S, t) = S - E$.

$$\Rightarrow \max_{\bar{U}_\tau}((S - EP(t)) - C_A) \leq 0. \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow (S - EP(t)) - C_A \leq 0 \quad \Rightarrow \quad C_A \geq (S - EP(t)). \quad (2.34)$$

En conclusión se ha encontrado una técnica, usada en las demostraciones del capítulo correspondiente, que puede ser extendida tanto a modelos semi lineales como a ecuaciones no lineales.(ver [18] y [65]).

2.3.2. Extensión a modelos semi lineales

Una forma práctica de extender dicha técnica a modelos semi lineales es la siguiente.

Supóngase que se tiene un modelo semi lineal de la forma

$$\Delta u + f(u) = 0,$$

con $u(x)$ y $u(2\lambda - x) = \nu_\lambda(x)$ su valor trasladado [6].

Sea $w(x) = \nu_\lambda(x) - u(x)$.

Por demostrar que $w(x) \geq 0$ con $x \leq 0$, entonces

$$\Delta w = \Delta \nu_\lambda - \Delta u + f(\nu_\lambda) - f(u) = 0,$$

de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} f(\nu_\lambda) - f(u) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(t\nu_\lambda - (1-t)u)) dt \\ &= \left(\int_0^1 f'(t\nu_\lambda - (1-t)u) dt \right) (\nu_\lambda - u), \end{aligned} \quad (2.35)$$

si se considera $c(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(t\nu_\lambda - (1-t)u)) dt$ y $w = \nu_\lambda - u$, entonces

$$\Delta w + c(x)w = 0.$$

Entonces se redujo el problema semi lineal al problema lineal que ya se conoce y al cual se le puede aplicar directamente el principio del máximo.

Otra aplicación puede darse al considerar modelos que permiten pequeñas oportunidades de arbitraje. En cuyo caso esta aproximación permitirá considerar ecuaciones de la forma (2.11) con tasa de interés variable. En este contexto, una oportunidad de arbitraje se generaría si $r(t)$ fuera negativa en un periodo corto.

Sin embargo, las herramientas empleadas en esta tesis podrán ser aplicadas dadas estas ventanas en el tiempo, siempre y cuando dichas ventanas no sean muy grandes.

2.4. Resultados importantes

2.4.1. Principio del máximo para dominios estrechos

Los siguientes resultados fueron encontrados y demostrados por Xavier Cabré [14]. Se hace mención de ellos específicamente porque son importantes en algunas demostraciones hechas en este capítulo.

Sea L el operador parabólico en un dominio $D \subset R^{n+1} = \{(x, t) \in R^n \times R\}$ de la forma

$$Lw = Mw + c(x, t)w = -\partial_t w + a_{ij}(x, t)\partial_{ij}w + b_i(x, t)\partial_i w + c(x, t)w, \quad (2.36)$$

tal que $a_{ij} = a_{ji}$ son funciones medibles en D , no necesariamente continuas y

$$c_0 |\varepsilon|^2 \leq a_{ij}(x, t)\varepsilon_i \varepsilon_j \leq C_0 |\varepsilon|^2 \quad \forall \varepsilon \in R^n \quad \forall (x, t) \in D, \quad (2.37)$$

para algunas constantes positivas c_0 y C_0 .

D puede ser acotada o no acotada y no se supone que D sea un cilindro. Se supone que $b_i \in L^\infty(D)$ y se fija una constante positiva b tal que

$$\left(\sum b_i(x, t)^2\right)^{1/2} \leq b \quad \forall (x, t) \in D. \quad (2.38)$$

También se supone que c es una función medible en D , no necesariamente acotada.

L siempre se considerará como una función en el espacio de Sobolev³ $W_{n+1,loc}^{2,1}(D)$.

Se considera para $(x_0, t_0) \in R^{n+1}$,

$$Q_R(x_0, t_0) = B_R(x_0) \times (t_0 - R^2, t_0).$$

$Q_R(x_0, t_0)$ será llamado el cilindro parabólico de radio R con centro en (x_0, t_0) y $B_R(x_0)$ es una bola con radio R centrada en x_0 . Si $Q_R = Q_R(x_0, t_0)$, entonces se denota a $Q_{\tau R}(x_0, t_0)$ por $Q_{\tau R}$. Es importante observar que Q_R y $Q_{\tau R}$, tienen el mismo centro (x_0, t_0) .

Se considera a $|D|$ como la medida de Lebesgue $(n+1)$ -dimensional de D (en el caso finito) y por ∂D la frontera parabólica de D .

Bajo estas suposiciones se tiene la siguiente estimación para subsoluciones de $Lw = f$, las que se llamarán estimación de ABP-Krylov-Tso.

Teorema 14 KRYLOV

Se supone que $D \subset B_d \times (0, \infty)$, donde d es una constante positiva, B_d es una bola en R^n de radio d , $c \leq 0$ en D , $w \in W_{n+1,loc}^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$, $f \in L^{n+1}(D)$ y $Lw \geq f$ en D .

Entonces

$$\sup_D w \leq \sup_{\Gamma_p D} w^+ + C d^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(D)}, \quad (2.39)$$

donde C es una constantes que sólo depende de n , c_0 y bd .

Para el caso en que $D = \Omega \times (0, T)$ es un cilindro, se tiene el siguiente resultado.

Definición 4 Sean $0 < \tau \leq \sigma < 1$ números fijos y D un dominio de R^{n+1} . Se dice que un número positivo satisface la condición (PG) relativo a σ , τ y D , si para algún $(x, t) \in D$ existe un cilindro parabólico $Q_{R(x,t)}$ de radio $R(x,t)$ tal que $R(x,t) \leq R$ y

$$(x, t) \in Q_{\tau R(x,t)} \quad y \quad |Q_{R(x,t)} \setminus D_{(x,t)}| \geq |Q_{R(x,t)}|, \quad (2.40)$$

donde $D_{(x,t)}$ es la componente de $Q_{R(x,t)} \cap D$ que contiene a (x, t) .

³El espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$, consiste de todas las funciones sumables localmente $u : U \rightarrow R$, tales que para cada multi índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe en un sentido débil y pertenece a $L^p(U)$. Para más detalles ver [23]

Resultados

(i) Sean $|D| < \infty$ y R una constante positiva tal que $|Q_R| = 2|D|$, donde Q_R es algún cilindro parabólico de radio R . Entonces $R = C(n)|D|^{1/(n+2)}$, para alguna constante positiva $C(n)$ que depende sólo de n y R , la cual satisface la condición (PG) relativa a $1/2$, $1/2$ y D .

(ii) Se supone que

$$D \subset \Omega \times (0, \infty),$$

donde Ω es un dominio de R^n con medida de Lebesgue $|\Omega|$ n -dimensional finita. Sea R_1 tal que $|B_{R_1}| = 2|\Omega|$, donde B_{R_1} es una bola en R^n de radio R_1 . Sea $Q_{R_1} = B_{R_1} \times (s - R_1^2, s)$, donde s es algún número real.

Si $|Q_{R_1} \cap [\Omega \times (0, \infty)]| \leq |Q_{R_1}|/2$, de aquí se tiene

$$|Q_{R_1} \setminus D| \geq |Q_{R_1} \setminus [\Omega \times (0, \infty)]| \geq |Q_{R_1}|/2$$

(iii) Se supone que

$$D \subset R^n \times (0, T).$$

Sea R_2 tal que $R_2^2 = 2T$. Sea $Q_{R_2} = B_{R_2} \times (s - R_2^2, s)$, donde B_{R_2} es alguna bola de radio R_2 en R^n y s es algún número real.

Como en (ii), si $|Q_{R_2} \cap [R^n \times (0, T)]| \leq |Q_{R_2}|/2$, de aquí se tiene que $R_2 = (2T)^{1/2}$ satisface la condición (PG) relativa a $1/2$, $1/2$ y D .

Con estas suposiciones se enunciará un resultado similar a la estimación de ABP-Krylov-Tso, con la diferencia de que $d^{n/(n+1)}$ es reemplazada por $R^{n/(n+1)}$.

Teorema 15 *Suponga que R satisface la condición (PG) relativa a σ , τ , D y $R \leq R_0$, para algunas constantes σ , τ y R_0 . Se supone también la ec. (2.36) con w acotada en D . Entonces*

$$\sup_D w \leq \sup_{\Gamma_p D} w^+ + C R^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(D)}, \quad (2.41)$$

donde C es una constante que sólo depende de n , c_0 , bR_0 , σ y τ .

Y como consecuencia de los resultados anteriores y el último teorema se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1 *Se supone la ec. (2.36) con w acotada en D .*

(i) Si D tiene una medida Lebesgue $|D|$ $(n+1)$ -dimensional finita, entonces

$$\sup_D w \leq \sup_{\Gamma_p D} w^+ + C |D|^{n/(n+1)(n+2)} \|f\|_{L^{n+1}(D)}, \quad (2.42)$$

donde C es una constante que depende de n , c_0 , C_0 , y $b|D|^{1/(n+2)}$.

(ii) Si $D \in \Omega \times (0, \infty)$, y Ω tiene una medida Lebesgue $|\Omega|$ n -dimensional finita, entonces

$$\sup_D w \leq \sup_{\Gamma_p D} w^+ + C |\Omega|^{1/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(D)}, \quad (2.43)$$

donde C es una constante que depende de n , c_0 , C_0 , y $b|\Omega|^{1/n}$.

(iii) Si $D \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$, entonces

$$\sup_D w \leq \sup_{\Gamma_p D} w^+ + C T^{n/2(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(D)}, \quad (2.44)$$

donde C es una constante que depende de n , c_0 , C_0 , y $bT^{1/2}$.

2.4.2. Método de deslizamiento en dominios generales

Este método fue encontrado por Berestycki H. y Nirenberg L. [6]. También se dan los resultados más importantes de este método, porque fueron usados en algunas demostraciones de esta tesis.

Teorema 16 Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^n arbitrario acotado, el cual es convexo en la dirección de x_1 . Sea $u \in W_{loc}^{2,n}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una solución de

$$\Delta u f(u) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (2.45)$$

$$u = \varphi \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \quad (2.46)$$

La función f se considera Lipschitz continua. Aquí se supone que para cualesquiera tres puntos $x' = (x'_1, y)$, $x = (x_1, y)$ y $x'' = (x''_1, y)$, sobre un segmento paralelo al eje x_1 con $x'_1 < x_1 < x''_1$ y $x'_1, x''_1 \in \partial\Omega$, lo siguiente se mantiene

$$\varphi(x') < u(x) < \varphi(x'') \quad \text{si} \quad x \in \Omega \quad (2.47)$$

y

$$\varphi(x') < \varphi(x) < \varphi(x'') \quad \text{si} \quad x \in \Gamma\Omega. \quad (2.48)$$

Entonces, u es monótona con respecto a x_1 en Ω :

$$u(x_1 + \tau, y) > u(x_1, y) \quad \text{para} \quad (x_1, y), (x_1 + \tau, y) \in \Omega \quad \text{y} \quad r > 0$$

Así, si f es diferenciable, entonces $u_{x_1} > 0$ en Ω . Finalmente, u es la única solución de (2.45) y (2.46) en $W_{loc}^{2,n}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ que satisfacen (2.47).

La condición (2.48) requiere la monotonía de φ en algún segmento paralelo al eje x situado en la $\Gamma\Omega$. Por esta razón es necesaria una condición para que el resultado se mantenga.

Demostración

Se demuestra utilizando la técnica de deslizamiento. Para $\tau \geq 0$ se tiene $u^\tau(x_1, y) = u(x_1 + \tau, y)$. La función u^τ es definida en el conjunto $\Omega^\tau = \Omega - \tau e_1$ obtenido de Ω y deslizando hacia la izquierda una distancia τ paralela al eje x_1 . La parte principal de la demostración consiste en demostrar que

$$u^\tau > u \quad \text{en} \quad \Omega^\tau \cap \Omega \quad \text{para alguna} \quad \tau > 0, \quad (2.49)$$

esta desigualdad quiere decir que u es monótona creciente en la dirección x_1 .

Sea $w^\tau(x) = u^\tau(x) - u(x)$, es decir, $w^\tau(x_1, y) = u(x_1 + \tau, y) - u(x_1, y)$, w^τ es definida en $D^\tau = \Omega \cap \Omega^\tau$. Como antes, u^τ satisface la misma ecuación (2.45) en Ω^τ , como u está en Ω , se ve que w^τ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \Delta w^\tau + c^\tau(x)w^\tau &= 0 & \text{en} & \quad D^\tau \\ w^\tau &\geq 0 & \text{sobre} & \quad \Gamma D^\tau, \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde c^τ es alguna función L^∞ que satisface $|c^\tau(x)| \leq b$, $\forall x \in D^\tau$ y $\forall r$. La desigualdad sobre la frontera $\partial D^\tau \subset \partial\Omega \cup \partial\Omega^\tau$ sigue las suposiciones (2.47)-(2.48).

Sea $\tau_0 = \sup\{\tau > 0; D^\tau \neq \emptyset\}$. Para $0 < \tau_0 - \tau$ pequeño $|D^\tau|$ es pequeño, esto es, D^τ es un "dominio estrecho". Así, de (2.50) se sigue que para $0 < \tau_0 - \tau$ pequeño, $w^\tau > 0$ en D^τ .

Posteriormente, se comienza a deslizar Ω^τ hacia la derecha, esto es, se decrece τ de τ_0 a una posición crítica $\tau \in [0, \tau_0)$. Sea (τ, τ_0) el intervalo máximo, con $\tau \geq 0$, tal que para todo τ en $\tau < \tau' < \tau_0$, $w^{\tau'} \geq 0$ en $D^{\tau'}$. Se quiere probar que $\tau = 0$. Se demostrará por contradicción, suponiendo que $\tau > 0$.

Por continuidad se tiene que $w^\tau \geq 0$ en D^τ . Por (2.47) se sabe que para alguna $x \in \Omega \cap \partial D^\tau$, $w^\tau(x) > 0$. Por lo que $w^\tau \neq 0$ en cada componente del conjunto abierto D^τ . Por el principio del Máximo fuerte, se sigue de (2.50) que $W^\tau > 0$ en D^τ . Ahora si $x = (x_1, y)$ es algún punto interior de D^τ , entonces la línea media $\{x_1 + t, y; t \geq 0\}$ toca la ΓD^τ en un punto $\bar{x} \in \Gamma \Omega^\tau \cap \Gamma \Omega$. Este punto \bar{x} está en la frontera de la componente de D^τ a la cual x pertenece y $u(\bar{x}) > 0$.

Ahora se escoge $\delta > 0$ en un conjunto cerrado $K \subset D^\tau$ tal que $|D^\tau \setminus K| < \delta/2$. Se sabe que $w^\tau > 0$ sobre K . Para $\varepsilon > 0$ pequeñas, $w^{\tau-\varepsilon}$ es también positiva en K . Sin embargo, para $\varepsilon > 0$ pequeña $|D^{\tau-\varepsilon} \setminus K| < \delta$. Entonces $\Gamma D^{\tau-\varepsilon} \subset \Gamma D^{\tau-\varepsilon} \cup K$, se ve que $w^{\tau-\varepsilon} > 0$ sobre $\Gamma(D^{\tau-\varepsilon} \setminus K)$. Así, $w^{\tau-\varepsilon}$ satisface

$$\begin{aligned} \Delta w^{\tau-\varepsilon} + c^{\tau-\varepsilon}(x)w^{\tau-\varepsilon} &= 0 & \text{en} & \quad D^{\tau-\varepsilon} \\ w^{\tau-\varepsilon} &\geq 0 & \text{sobre} & \quad \Gamma(D^{\tau-\varepsilon} \setminus K). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Por lo que se obtiene $w^{\tau-\varepsilon} \geq 0$ en $D^{\tau-\varepsilon} \setminus K$, así como en $D^{\tau-\varepsilon}$. Por lo que se obtiene la contradicción y se prueba que u es monótona:

$$u^\tau > u \quad \text{en} \quad D^\tau, \quad \forall \tau > 0.$$

Si f es diferenciable, u_{x_1} satisface la ecuación lineal en Ω , por diferenciación de (2.45):

$$\Delta u_{x_1} + f'(u)u_{x_1} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Entonces ya se conoce que $u_{x_1} \geq 0$, $u_{x_1} \neq 0$ y se infiere por esta ecuación que $u_{x_1} > 0$ en Ω .

Para demostrar la última afirmación del teorema, supóngase que v es otra solución. Se toma como antes $w^\tau = v^\tau - u$. La misma demostración muestra que $v^\tau \geq u \forall \tau \geq 0$. Aquí $v \geq u$ y por simetría se tiene $v = u$. §

Capítulo 3

Opciones americanas

En este capítulo se muestra uno de los resultados más importantes de la tesis, que es el dar una nueva forma para valorar opciones americanas. El precio se obtiene del correspondiente de una opción europea al tiempo t ponderado por la probabilidad de que el activo subyacente tome el valor S al tiempo t (probabilidad de transición). Dicho ponderador está dado por la solución a la ecuación de Fokker-Planck (función de densidad). La principal utilidad de usar esta ecuación es que se pueden introducir el efecto de n factores macroeconómicos de forma sistemática, dados por algún sistema dinámico de ecuaciones y sólo se tiene que resolver una sola ecuación diferencial parcial que depende directamente de dicho sistema. En este contexto se verifica, sólo por consistencia, que dicha fórmula es válida en el marco log-normal.

La nueva forma de valorar opciones americanas, no pretende ser mejor que los métodos ya existentes, en el contexto del modelo de Black-Scholes. Simplemente se desea mostrar que es consistente con éstos. Lo más interesante de este nuevo método es la técnica empleada (introducir la ecuación de Fokker-Planck), ya que por medio de ésta se pueden resolver problemas más complejos, en donde el activo subyacente no necesariamente siga un proceso log-normal o no se conozca a priori la distribución de la densidad generada por la ecuación de Fokker-Planck, permitiendo incorporar modelos macroeconómicos más generales.

A continuación se describen los dos métodos más comunes para valorar opciones americanas: ecuaciones diferenciales parciales y tiempos de paro óptimo, en el caso log-normal. Para los fines de esta tesis, el método más importante es el primero, por lo cual se muestra con más detalle.

3.1. Valuación mediante la desigualdad diferencial parcial (DDP)

Para analizar una opción americana hay que tener en mente que ésta puede ser ejercida antes de expirar, lo que lleva a resolver problemas de frontera libre. Al evaluar opciones americanas no se conoce a priori dónde se aplican las condiciones de frontera, es decir, el tiempo óptimo al que se ejerce la opción. Esta situación es común en muchos problemas físicos y como ejemplos canónicos se mencionan el problema del obstáculo y el problema de Stefan [73].

El problema de encontrar el precio de una opción americana es especificado por un conjunto de restricciones similares al problema del obstáculo [73], las cuales son:

- 1) El valor de la opción debe ser mayor o igual que su función de pago (*payoff*).

Sea $V_A(S, t)$ el valor de una opción americana de compra o venta y $\max(S - E, 0)$ o $\max(E - S, 0)$ su función de pago respectivamente, entonces se debe de cumplir que

$$V_A(S, t) \geq \begin{cases} \max(S - E, 0), & \text{opción de compra;} \\ \max(E - S, 0), & \text{opción de venta,} \end{cases} \quad (3.1)$$

para toda t .

Si se cumpliera lo contrario, es decir, sin pérdida de generalidad para el caso de una opción de venta $V_A(S, t) < \max(E - S, 0)$, entonces la opción es ejercida inmediatamente, pues ya se tiene una ganancia cuyo valor será $\max(E - S, 0)$. Si el valor de la opción es $V_A(S, t) > \max(E - S, 0)$, entonces el ejercicio temprano no debería ocurrir. Finalmente si $V_A(S, t) = \max(E - S, 0)$, el ejercicio temprano es óptimo. Este hecho se demostró con detalle en el capítulo 2, utilizando el principio del máximo en la parte del enfoque analítico a la teoría racional de opciones de Merton.

- 2) La igualdad de Black-Scholes es reemplazada por una desigualdad.

Recuérdese que $L_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r$.

Si $V_A(S, t) < \max(E - S, 0)$ ya se mencionó que la opción se ejerce.

Si $V_A(S, t) > \max(E - S, 0)$ el ejercicio temprano no es óptimo, lo que quiere decir que la opción debe ser ejercida para tiempos posteriores (también se

demostró en el capítulo 2 que una opción de compra europea sin dividendos es igual a una opción de compra americana), es decir, se sigue cumpliendo la ecuación de Black-Scholes y $L_{BS}(V_A) = 0$.

Para el caso de una opción de venta, $V_A(S, t) = \max(E - S, 0)$, el ejercicio temprano puede ser óptimo y se satisface $L_{BS}(V_A) \leq 0$.

Para ilustrar la última afirmación se da un ejemplo:

Sea $V_A = E - S$ el valor de una opción de venta americana para $S < E$, entonces

$$L_{BS}(E-S) = \frac{\partial}{\partial t}(E-S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}(E-S) + rS \frac{\partial}{\partial S}(E-S) - r(E-S) = -rE \leq 0,$$

es decir, la ganancia del portafolio es menor o igual que la ganancia de depositarlo en el banco y así el ejercicio temprano es óptimo, esta interpretación puede verse con más detalle en [73]. Para el caso en que $V_A > E - S$ entonces se sigue cumpliendo $L_{BS}(V_A) = 0$ y el ejercicio temprano no es óptimo.

3) El valor de la opción debe ser una función continua de S .

En caso contrario, si V_A es discontinua, siempre existe la posibilidad de construir un portafolio en donde existe arbitraje.

Se define el portafolio

$$\pi = V_A - S,$$

es decir, se compran opciones, V_A y se venden acciones, S . Para un lapso de tiempo pequeño Δt , el valor del portafolio se incrementa como

$$\Delta\pi = \Delta V_A - S e^r \Delta t,$$

con $\Delta V_A = V_A^+ - V_A^-$ en el punto de discontinuidad \bar{S} . Por simplicidad se supondrá que $\Delta V_A > 0$ ¹.

Si Δt tiende a cero implica que el incremento del portafolio tiende a $\Delta\pi = \Delta V_A > 0$. Por lo cual siempre se obtiene un beneficio.

Financieramente esto quiere decir que un inversionista podría pedir dinero prestado a una tasa libre de riesgo e invertir en un portafolio π que da un beneficio seguro y estrictamente positivo. Este hecho implicaría una posibilidad de arbitraje.

¹El caso general es ligeramente más complicado, pero se obtiene finalmente la misma conclusión.

4) La razón de cobertura delta debe ser continua.

Para la cuarta restricción se considera el caso de una opción de venta americana $P_A(S, t)$, cuya frontera de ejercicio $S = S_f(t)$ es la frontera libre y su valor varía con el tiempo, donde la opción debe ser ejercida si $S < S_f$ y conservarse en otro caso. Suponiendo que $S_f(t) < E$, la pendiente de la función de pago dada por $\max(E - S, 0)$ en el punto de contacto es -1 . Por lo cual $\partial P_A / \partial S$ en $S = S_f(t)$ es

$$\frac{\partial P_A}{\partial S} = -1.^2$$

Para más detalles ver [73].

3.1.1. Análisis para una opción de venta americana

En las opciones americanas se divide la región en dos partes, una donde el ejercicio temprano es óptimo y

$$P_A = E - S, \quad \frac{\partial P_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A < 0, \quad (3.2)$$

y otra donde el ejercicio temprano no es óptimo

$$P_A > E - S, \quad \frac{\partial P_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A = 0. \quad (3.3)$$

De las dos regiones se tiene la desigualdad de Black-Scholes para opciones de venta americanas dada por

$$\frac{\partial P_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P_A}{\partial S} - rP_A \leq 0. \quad (3.4)$$

Con condiciones de frontera $P_A(0, t) = E$, $P_A(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$, con función de pago $P_A(S, T) = \max(E - S, 0)$.

Como se mencionó antes, para $S = S_f(t)$ la frontera libre está dada por

$$P_A(S_f(t), t) = \max(E - S_f(t), 0) \quad (3.5)$$

²De acuerdo a las condiciones de regularidad en el interior, la igualdad puede expresarse como

$$\lim_{S \rightarrow S_f} \frac{\partial P_A}{\partial S} = -1.$$

y

$$P_A(S, t) > \max(E - S, 0) \quad \text{si} \quad S > S_f(t). \quad (3.6)$$

Un análisis local cerca de la frontera libre muestra que

$$\frac{\partial P_A}{\partial S}(S_f(t), t) = -1, \quad (3.7)$$

lo cual proporciona las dos condiciones en la frontera libre (3.5 y 3.7). Para más detalles ver [73].

3.1.2. Opción de compra americana con dividendos

La EDE que obedece un activo que proporciona dividendos con tasa D_0 es:

$$dS = (\mu - D_0)Sdt + S\sigma dW,$$

y la correspondiente desigualdad de Black-Scholes está dada por

$$\frac{\partial C_{AD}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{AD}}{\partial S^2} + (r - D_0)S \frac{\partial C_{AD}}{\partial S} - rC_{AD} \leq 0, \quad (3.8)$$

con pago $C_{AD}(S, T) = \max(S - E, 0)$ y restricción $C_{AD}(S, t) \geq \max(S - E, 0)$.

Para un ejercicio óptimo en la frontera $S = S_f(t)$, se deben cumplir las siguientes condiciones de frontera libre

$$C_{AD}(S_f(t), t) = \max(S_f(t) - E, 0), \quad \frac{\partial C_{AD}}{\partial S}(S_f(t), t) = 1,$$

cuya deducción es análoga a la de una opción de venta.

En general no es posible resolver explícitamente el problema de determinar el precio de una opción americana, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos que proporcionen buenas aproximaciones a dicho precio, tales como el método de diferencias finitas, el método de árboles, el método de elemento finito, entre otros.

En la siguiente subsección se muestra a grandes rasgos una forma eficiente de resolver numéricamente el problema de la DDP (3.4). Para más detalles ver [73]

3.1.3. Solución de las opciones de tipo americano

En esta subsección se muestra el caso de una opción de venta. El caso de una opción de compra es similar y se puede consultar en [73].

La formulación de Black-Scholes para las opciones de venta americanas, considerado un problema de frontera libre, puede ser reducido a un problema complementario lineal y a una desigualdad variacional parabólica.

Considere la igualdad en (3.4), tomando el cambio de variable siguiente

$$S = Ee^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad P_A(S, t) = E\nu(x, \tau),$$

de donde se obtiene el valor de la opción

$$P_A(S, t) = Ee^{-\frac{1}{2}(k_2-1)x - \left(\frac{1}{4}(k_2+1)^2 + k_1\right)\tau} u(x, \tau),$$

con $k_1 = r/\frac{1}{2}\sigma^2$. Como se mencionó antes entonces la igualdad en (3.4) se transforma en

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.9)$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = g(x, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0\right), \quad (3.10)$$

y restricción

$$u(x, \tau) \geq g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}((k_1+1)^2)\tau} \max\left(e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}, 0\right). \quad (3.11)$$

La condición de frontera libre se transforma en $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) = 0$.

Con u y $\partial u/\partial x$ continuas en todas partes.

De lo anterior se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0 \quad \text{para } x \neq 0.$$

El esquema numérico es restringido a un intervalo finito. Entonces el problema (3.9)-(3.11) es resuelto en el intervalo $-x^- < x < x^+$, donde x^+ y x^- son suficientemente grandes. Entonces se imponen las condiciones de frontera

$$u(x^+, \tau) = 0, \quad u(-x^-, \tau) = g(-x^-, \tau).$$

En términos financieros se pueden reemplazar las condiciones de frontera exacta por las aproximaciones de valores pequeños de S , tales que $P_A = E - S$. Mientras que para valores grandes de S , se tiene que $P = 0$.

Una forma de reescribir el problema (3.9)-(3.11) en una forma complementaria lineal es

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \geq 0, \quad (u(x, \tau) - g(x, \tau)) \geq 0, \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0, \quad (3.13)$$

con condiciones inicial y de frontera

$$u(x, 0) = g(x, 0). \quad (3.14)$$

$$u(-x^-, \tau) = g(-x^-, \tau) \quad y \quad u(x^+, \tau) = g(x^+, \tau), \quad (3.15)$$

con $u(x, \tau)$ y $\partial u / \partial x(x, \tau)$ continuas.

La ventaja de la formulación complementaria lineal es que no existe una mención de la frontera libre, es decir, el problema de frontera libre se transformó en un problema de frontera fija. Si se puede resolver el problema complementario lineal, entonces se puede encontrar la frontera libre. Sea $S_f(\tau)$ la condición que define esto,

$$u(S_f(\tau), \tau) = g(S_f(\tau), \tau) \quad pero \quad u(x, \tau) > g(x, \tau) \quad para \quad x > S_f(\tau),$$

Para aproximar la solución del problema (3.9)-(3.10) o (3.12)-(3.15), se utilizan métodos numéricos, tales como el método de diferencias finitas, explícito o implícito, entre otros. Para más detalles ver [73].

3.2. Valuación de opciones americanas mediante métodos probabilísticos

El caso de opciones americanas es considerablemente más complicado, porque el precio o la inversión de estas opciones debe tomar en cuenta diferentes estrategias

o políticas de ejercicio. Para ciertas opciones con funciones de pago convexas, tales como las opciones de compra con activos que no pagan dividendos, la estrategia óptima es ejercer sólo al tiempo de ejercicio (al vencimiento). En otros casos, incluyendo las opciones de venta, existe también una estrategia de ejercicio óptimo; sin embargo, esta estrategia óptima es raramente simple o fácil de calcular.

Se considera el precio y ejercicio óptimo de opciones americanas en el conjunto más simple no trivial, el modelo de Black-Scholes, donde el activo subyacente no paga dividendos y el precio sigue un proceso S_t bien comportado, bajo la medida neutral de riesgo Q , como un simple movimiento browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\}.$$

Aquí $r > 0$, es la tasa de rendimiento libre de riesgo, la cual es constante y W_t es el proceso estándar de Wiener bajo Q . Para una opción americana sobre el activo subyacente, las estrategias de ejercicio admisibles deben ser tiempos de paro³, τ , con respecto a la filtración $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ del proceso de Wiener W_t . Si $g(S)$ es la función de pago de una opción americana ejercida cuando el precio del activo es S y si T es la fecha de expiración de la opción, entonces su valor V_{A_t} al tiempo $t \leq T$ es

$$V_{A_t} = \sup_{t \leq \tau \leq T} E_Q(g(S_\tau)e^{r(\tau-t)} / F_t).$$

Una vez mencionados los dos enfoques clásicos de valorar opciones americanas, se proporciona en lo subsecuente una de las principales contribuciones de esta tesis.

3.3. Una nueva forma de valorar opciones americanas

Se desean valorar opciones americanas utilizando la fórmula de Samuelson (1), usando un enfoque probabilístico generando la densidad correspondiente con la ecuación de Fokker-Planck ([72], [45], [58], [61] y [71]), de manera analítica y numérica. Por consistencia, se hará una comparación de esta nueva forma de obtener el precio de una opción de venta americana con las tradicionales en el marco de la teoría de Black-Scholes, caso log-normal ([42], [45], [51], [54], [66], [69] y [73]). Se comparará también esta propuesta con ejemplos específicos estimados con métodos de árboles (binomial y Cox, Ingersoll y Rubinstein) y método de diferencias finitas, más adelante se explica brevemente cada uno de ellos.

³Una variable aleatoria τ que toma valores en $[0, \infty)$ es llamado tiempo de paro para la sucesión $\{F_n\}$ si

$$\{\tau \leq n\} \in F_n \quad \forall 0 \leq n < \infty,$$

donde F_n es una filtración.

Es importante mencionar que el planteamiento del problema usando la fórmula de Samuelson y la ecuación de Fokker-Planck es probar que la última funciona eficientemente para resolver problemas de derivados financieros, en este caso se enfoca el estudio en las opciones americanas donde el activo subyacente sigue un proceso log-normal. Pero la idea principal detrás de esta formulación radica en poder utilizar la ecuación de Fokker-Planck en problemas más generales o complejos, como es el caso de poder introducir el efecto de factores macroeconómicos a diversos modelos de derivados financieros y de riesgo de crédito, en donde no se conozca a priori la distribución exacta de la densidad y en donde el activo subyacente no necesariamente tenga una distribución log-normal.

Para entender mejor el comportamiento de las opciones, en las Figuras (3.1) y (3.2) se muestran las opciones europeas y americanas con respecto a sus funciones de pago respectivas.

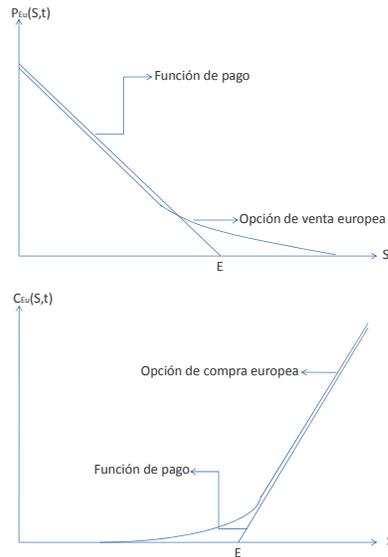


Figura 3.1: Comparación de las opciones europeas con respecto a su función de pago.

3.3.1. La nueva fórmula general

Introduciendo la nueva forma de valorar opciones americanas, se define el precio de una opción americana de la siguiente forma.

Para una S fija, se tiene:

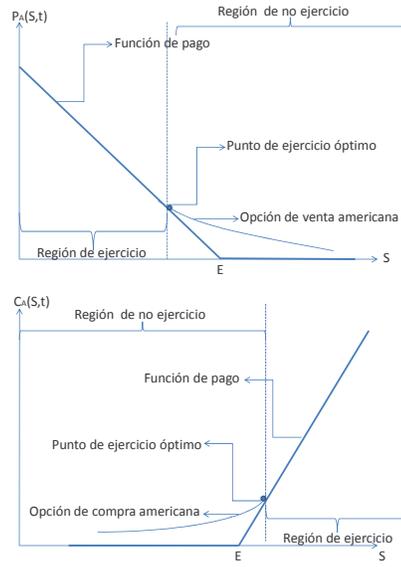


Figura 3.2: Comparación de las opciones americanas con respecto a su función de pago.

$$V_A(S, t) = \begin{cases} \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) V_{Eu}(S, \tau) d\tau, & S > S_f; \\ PO, & S \leq S_f. \end{cases} \quad (3.16)$$

$$PO = \begin{cases} \max(S - E, 0), & \text{para una opción de compra;} \\ \max(E - S, 0), & \text{para una opción de venta.} \end{cases} \quad (3.17)$$

$S \in [0, \infty)$, S_f corresponde a la frontera libre, $0 \leq t \leq T_S$ es el tiempo antes de ejercer, $0 \leq T_S \leq T$ es el tiempo de ejercicio en la frontera⁴, T es el tiempo de expiración (para ver la relación entre los tiempos T y T_S se muestra la figura 3.3), $\rho_n(S, t)$ es la probabilidad normalizada de que el activo tome el valor de S al tiempo t y V_{Eu} es la solución analítica a la ecuación de Black-Scholes, es decir,

$$V_{Eu}(S, \tau) = \begin{cases} SN(d_1) - Ee^{-r(\tau)}N(d_2), & \text{opción de compra;} \\ Ee^{-r(\tau)}N(-d_2) - SN(-d_1), & \text{opción de venta,} \end{cases} \quad (3.18)$$

donde

⁴Nótese que cuando se dice que T_S es el tiempo de expiración, se refiere al tiempo correspondiente de la frontera libre, es decir, para cada S existe un tiempo T_S sobre la frontera libre.

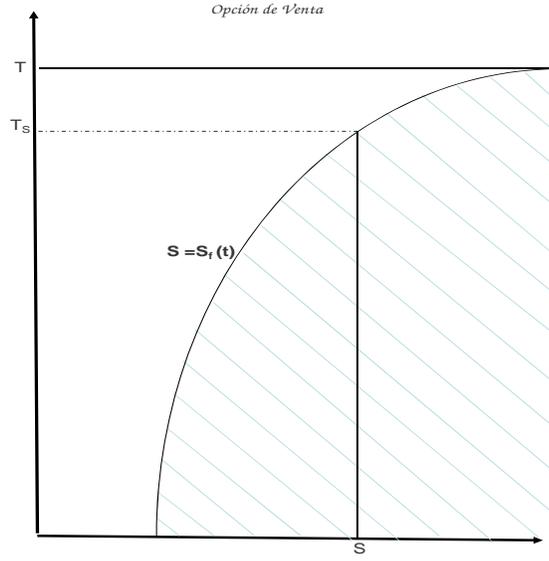


Figura 3.3: Relación entre los tiempos de expiración

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \sigma^2/2)(\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
 d_2 &= \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \sigma^2/2)(\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

y $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa de una normal con media cero y desviación estándar uno.

Las condiciones de consistencia están dadas por

$$V_A(0, t) = \begin{cases} 0, & \text{opción de compra;} \\ E, & \text{opción de venta,} \end{cases} \tag{3.20}$$

y

$$V_A(S, t) \xrightarrow{S \rightarrow \infty} \begin{cases} S, & \text{opción de compra;} \\ 0, & \text{opción de venta.} \end{cases} \tag{3.21}$$

Cabe mencionar que una fórmula análoga para valorar opciones americanas, en donde la integración se hace con respecto al tiempo, puede verse en [16].

Antes de continuar con los detalles de la neva forma de valuar opciones americanas, es necesario hacer algunas precisiones sobre la frontera libre, para ello se muestran a continuación los siguientes resultados.

Frontera libre

Como se mencionó al principio del capítulo, el problema de encontrar el valor de una opción americana se traduce en hallar una solución a un problema de frontera libre. La estrategia para aproximarse a dicha solución es localizar la frontera libre S_f .

Entonces si V_A es continua y monótona, existe un valor $0 < S_f < E$, donde se encuentra localizada la frontera libre y $V_A(S_f, t) = E - S$ para una opción de venta y $V_A(S_f, t) = S - E$ para una opción de compra. Si S_f es calculada, se debe cumplir

Opción de Compra (C_A).

$$\begin{cases} S < S_f, & \text{se mantiene;} \\ S \geq S_f, & \text{se ejerce .} \end{cases} \quad (3.22)$$

Opción de Venta (P_A).

$$\begin{cases} S < S_f, & \text{se ejerce;} \\ S \geq S_f, & \text{se mantiene .} \end{cases} \quad (3.23)$$

La curva S_f divide el dominio de S en dos partes tal como se muestra en la Figura 3.4. La curva $S = S_f(t)$ representa la frontera libre. Las partes sombreadas de ambas gráficas, representan el dominio donde la opción, de compra ($S < S_f$) o de venta ($S > S_f$), no es ejercida y su valor está dado por

$$V_A = \begin{cases} \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) C_{Eu}(S, \tau) dt, & \text{opción de compra;} \\ \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) dt, & \text{opción de venta .} \end{cases} \quad (3.24)$$

La región fuera de la curva, $S = S_f(t)$, es donde la opción es ejercida. Dicha región para la opción de compra es $S > S_f$ y para la opción de venta es $S < S_f$, y su valor está dado por sus respectivas funciones de pago PO .

Un punto fuera de la curva para una opción de venta está dado por (S, t^*) , para $0 < t^* \leq T$ y $S < S_f$. Un punto sobre la curva está representado por (S_f, t) para $0 < t \leq T_S$ y $S = S_f$. Finalmente, un punto dentro de la curva es (S, t) para $0 < t \leq T_S$ y $S > S_f$. El caso de una opción de compra es similar, solo hay que invertir las desigualdades correspondientes a S respecto a S_f .§

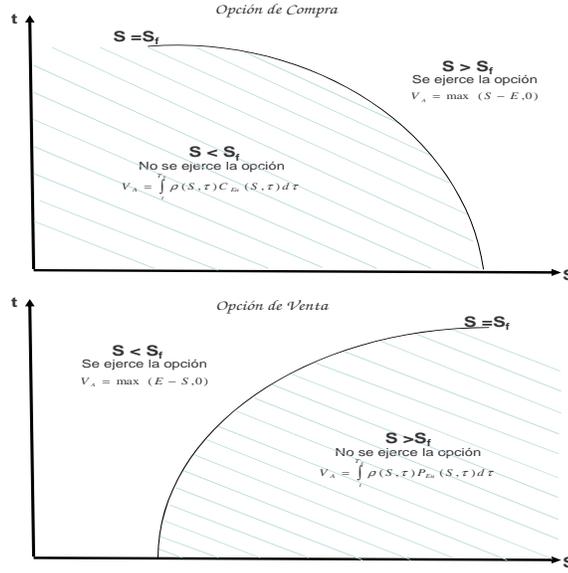


Figura 3.4: Región de solución de una opción americana

Ya definida la región de solución de la opción americana, se regresa al problema de la nueva forma de valuar opciones americanas.

Entonces en palabras, se define el precio de una opción americana en términos de calcular el precio de una opción europea para cada tiempo t , donde $t \in [0, T_S]$ (hay que observar que el tiempo de expiración corresponde al tiempo cuando se toca la frontera libre T_S), multiplicada por un ponderador normalizado que representa la probabilidad de permanencia en S al tiempo t . Finalmente estos valores son integrados con respecto al tiempo. Cabe mencionar que se sigue teniendo un problema de frontera libre, ya que el valor de T_S depende de donde se encuentre ubicada la frontera libre.

Matemáticamente para cada t , dicho ponderador, ρ , corresponde a la función de densidad, la cual está determinada por la ecuación de Fokker-Planck siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2 S^2 \rho)}{\partial S^2} - \frac{\partial (rS\rho)}{\partial S}, \quad (3.25)$$

o bien calculando las parciales correspondientes, se llega a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} + (2\sigma^2 - r)S \frac{\partial \rho}{\partial S} + (\sigma^2 - r)\rho, \quad (3.26)$$

con condición de frontera:

- a) $\rho(0, 0) = 0$. Esta condición no es necesaria para el caso de una opción de venta americana.
- b) $\rho(S, 0) = \delta_{Dirac}(S - S_0)$ para $S \in [0, \infty)$.
- c) $\rho(S_f, t) = \tilde{\rho}(S_f, t)$, donde S_f representa la frontera libre.

La ecuación de Fokker-Planck con respecto a $\tilde{\rho}(S, t)$ se define en el rectángulo $[0, S] \times [0, T]$ y tiene condiciones de frontera $\tilde{\rho}(0, t) = 0$ y $\tilde{\rho}(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$. En el caso de la nueva fórmula, la región de solución está restringida por la curva resultante de la frontera libre S_f .

- d) $\rho(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$.

Otra condición de consistencia pero con respecto al parámetro es $\rho(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S_0 \rightarrow \infty$.

Observación 3 *Es muy importante tener en mente que la densidad ρ no satisface un problema de frontera libre. La frontera libre está determinada por el precio de la opción, es decir, el dominio en el que se resuelve ρ está bien determinado y no depende de ρ misma.*

Observación 4 *Cabe mencionar que dicha ecuación de Fokker-Planck con respecto a $\tilde{\rho}$ tiene una solución explícita en el caso log-normal (Black-Scholes)⁵, y dicha solución está dada como sigue.*

Sean S_0 el valor inicial del activo subyacente y t_0 el tiempo inicial. S y t son los valores futuros correspondientes. Entonces la probabilidad de que el activo subyacente tome el valor de S al tiempo t , dado que al tiempo inicial t_0 tuvo el valor de S_0 es

$$\tilde{\rho}(S_0, t_0; S, t) = \frac{1}{\sigma S \sqrt{2\pi(t-t_0)}} e^{-\left[\log\left(\frac{S}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-t_0)\right]^2 \frac{1}{2\sigma^2(t-t_0)}}. \quad (3.27)$$

La demostración de que la ecuación (3.27) satisface la ecuación de Fokker-Planck, así como la ecuación de Kolmogorov hacia atrás, se puede verificar en el apéndice H.

Observación 5 *La normalización para la función de densidad esta dada por:*

$$\int_t^{T_S} \rho(S, \tau) d\tau = 1,$$

⁵En general la ecuación de Fokker-Planck no tiene soluciones explícitas.

de donde se obtiene que

$$\rho_n(S, t) = \frac{\rho(S, t)}{\int_t^{T_S} \rho(S, \tau) d\tau}. \quad (3.28)$$

3.3.2. Fórmula para una opción de venta

En lo que sigue y para efectos de los cálculos numéricos, se especifica el caso de una opción de venta americana.

Sea P_{Eu} y P_A el precio de una opción de venta europea y americana respectivamente, entonces la nueva forma de valuar una opción de venta americana está dada por

$$P_A(S, t) = \begin{cases} \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) d\tau, & S > S_f; \\ \max(E - S, 0), & S \leq S_f, \end{cases} \quad (3.29)$$

La probabilidad ρ cumple las mismas condiciones antes mencionadas.

Las condiciones de consistencia para el caso de una opción de venta son:

- a) $P_A(0, t) = \max(E - 0, 0) = E$
- b) $P_A(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} P_A(S, t) &= \lim_{S \rightarrow \infty} \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) d\tau \\ &\leq \int_t^{T_S} \lim_{S \rightarrow \infty} \{\rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau)\} d\tau \\ &\leq \int_t^{T_S} \lim_{S \rightarrow \infty} \rho_n(S, \tau) \lim_{S \rightarrow \infty} P_{Eu}(S, \tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Se pasa de la igualdad a la desigualdad por el lema de Fatou. $\int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) d\tau$ es acotada cuando $S \rightarrow \infty$. Además claramente $P_A \geq 0$.

- c) Además $\frac{\partial P_A(S_f, t)}{\partial S} = -1$ para $S = S_f$

El precio de una opción de venta de acuerdo a [16] cerca de la frontera en una vecindad de S_f y considerando que $S_f < E$ ⁶ puede escribirse como

⁶Si V_A es continua y monótona, existe S_f tal que $0 < S_f < E$. En el caso contrario, $S_f > E$, se ejerce la opción. Para más detalles se puede consultar [73].

$$P_A = E - S + o(\text{dist}(S, S_f)), \quad (3.31)$$

con $d = \text{dist}(S, S_f)$. Esta ecuación corresponde a la condición que debe satisfacer una opción americana en la frontera libre $S = S_f$.

$$\begin{aligned} & \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) d\tau \\ &= \int_t^{T_S} [E - S + o(d)] \rho_n(S, \tau) d\tau \\ &= (E - S) \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) d\tau + o(d) \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) d\tau \\ &= (E - S) + o(d). \end{aligned} \quad (3.32)$$

La primera igualdad se da aplicando Taylor a P_{Eu} .

Si se toma la parcial con respecto a S de la ecuación (3.32)

$$\frac{\partial P_A(S, t)}{\partial S} = \frac{\partial [E - S]}{\partial S} + o(1) = -1, \quad (3.33)$$

y como consecuencia al evaluar en $S = S_f$ se tiene

$$\frac{\partial P_A(S_f, t)}{\partial S} = \lim_{S \rightarrow S_f} \left[\frac{\partial [E - S]}{\partial S} + o(1) \right] = -1. \quad (3.34)$$

Del análisis anterior se puede observar que la nueva forma de valorar opciones americanas cumple con las condiciones necesarias de un problema americano (opciones de venta) en el caso de Black-Scholes.

A continuación se mostrará, por consistencia, que la nueva fórmula satisface la desigualdad de Black-Scholes.

3.3.3. Consistencia de la fórmula

La ventaja de usar esta nueva fórmula es que se puede introducir de forma sistemática el efecto de factores macroeconómicos a la valuación⁷. Se obtendrá la

⁷En el análisis de este capítulo no se consideró el efecto de los factores macroeconómicos. En el capítulo 4 se proporciona la forma en que puede introducirse dicho efecto.

función ρ numéricamente, pero antes de eso lo primero que se quiere es verificar, por consistencia, que esta nueva forma de valuar opciones americanas es equivalente con la ya conocida en el caso log-normal.

Hay que recordar que la desigualdad de Black-Scholes para opciones americanas está dada por

$$\frac{\partial V_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_A}{\partial S} - rV_A \leq 0. \quad (3.35)$$

Sea $\bar{\tau} = \tau + t$, entonces

$$V_A = \int_t^{T_S} \rho_n(S, \bar{\tau}) V_{Eu}(S, \bar{\tau}) d\bar{\tau} = \int_0^{T_S-t} \rho_n(S, \tau + t) V_{Eu}(S, \tau + t) d\tau. \quad (3.36)$$

Sin pérdida de generalidad y para simplificar los cálculos, se toma a $\rho_n(S, \tau + t) = \rho_n$, $\rho(S, \tau + t) = \rho$, $V_{Eu}(S, \tau + t) = V_{Eu}$, $I_\rho = \int_{t+\tau}^{T_S} \rho(S, k) dk$ y como ya se mencionó anteriormente $0 \leq t \leq T_S$.

Ahora, de las ecuaciones (3.28) y (3.36) se determinan las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} &= \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_n^2 \\ \frac{\partial \rho_n}{\partial S} &= \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} - \frac{\rho_n}{I_\rho} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk - \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \\ \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial S^2} &= \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} - \frac{2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk - \frac{\rho_n}{I_\rho} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk + \frac{2\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 \\ &\quad - \frac{2\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{4\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk - \frac{2\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \\ &\quad + \frac{2\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 - \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} \\ \frac{\partial V_A}{\partial t} &= \int_0^{T_S-t} \rho_n \frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} d\tau + \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} V_{Eu} d\tau + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau \\ &\quad - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) \\ \frac{\partial V_A}{\partial S} &= \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \int_0^{T_S-t} \rho_n \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\ &\quad - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} \\ \frac{\partial^2 V_A}{\partial S^2} &= \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau - 2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& -2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 4 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& -2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + 2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& -2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& + \int_0^{T_S-t} \rho_n \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} d\tau + \frac{2}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \frac{2\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} \\
& - \frac{2\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \frac{2\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Si se substituye (3.37) en la desigualdad (3.35) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_S-t} \rho_n \left[\frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} + rS \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} - rV_{Eu} \right] d\tau + \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} V_{Eu} d\tau \\
& + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) + rS \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau \\
& - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + rS \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} \\
& + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu}
\end{aligned}$$

$$-\sigma^2 S^2 \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} \leq 0.$$

los términos que están dentro de los paréntesis cuadrados son cero, ya que dichos términos corresponden a la ecuación de Black-Scholes para opciones europeas. Además se sabe cuál es el valor de $\partial \rho / \partial t$, sólo hay que observar el hecho de que la ecuación de Black-Scholes es una ecuación hacia atrás o retrógrada. Entonces para hacer todos los cálculos consistentes, hay que considerar la ecuación de Kolmogorov hacia atrás para ρ . Por tal motivo se toma la siguiente ecuación (haciendo el cambio de variable $\tau = T_S - t$ y abusando de la notación, volviendo a usar t en vez de τ)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -rS \frac{\partial \rho}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2}. \quad (3.38)$$

Substituyendo la ecuación anterior en la desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} & -rS \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau \\ & + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) + rS \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau \\ & - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + rS \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\ & + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau \\ & - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\ & - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\ & - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\ & - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\ & + \sigma^2 S^2 \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} \\ & - \sigma^2 S^2 \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} \leq 0. \end{aligned}$$

Se puede ver fácilmente que el primer término se elimina con el quinto y el segundo con el noveno término, entonces los términos que quedan son

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) \\
& - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau \\
& + rS \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} \\
& - \sigma^2 S^2 \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} \\
& + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} \leq 0. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Sólo falta verificar que el lado izquierdo de la desigualdad es menor o igual que cero, lo cual se hará a continuación. La mayoría de los términos son negativos, así que sólo se necesitan estimar los términos con signo positivo. De hecho se mostrará que los términos positivos, después de un rescalamiento apropiado, son siempre de menor orden que los negativos. Antes hay que recordar algunos hechos importantes que serán útiles en la demostración. El término $\partial V_{Eu}/\partial S$, está dado por la letra griega Δ , que corresponde a la expresión

$$\Delta P_{Eu} = \frac{\partial P_{Eu}}{\partial S} = N(d_1) - 1 \quad \text{con} \quad d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{3.40}$$

la cual es negativa para el caso de la opción de venta europea cuyo activo subyacente no paga dividendos y

$$\Delta C_{Eu} = \frac{\partial C_{Eu}}{\partial S} = N(d_1) \quad \text{con} \quad d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (3.41)$$

es siempre positiva para una opción de compra europea, cuyo subyacente no paga dividendos (ver [73] y [28]). A continuación se muestra en la Figura 3.5 la variación de la delta de una opción de compra y venta con respecto al activo subyacente, así como la variación de la delta con respecto al tiempo de maduración.

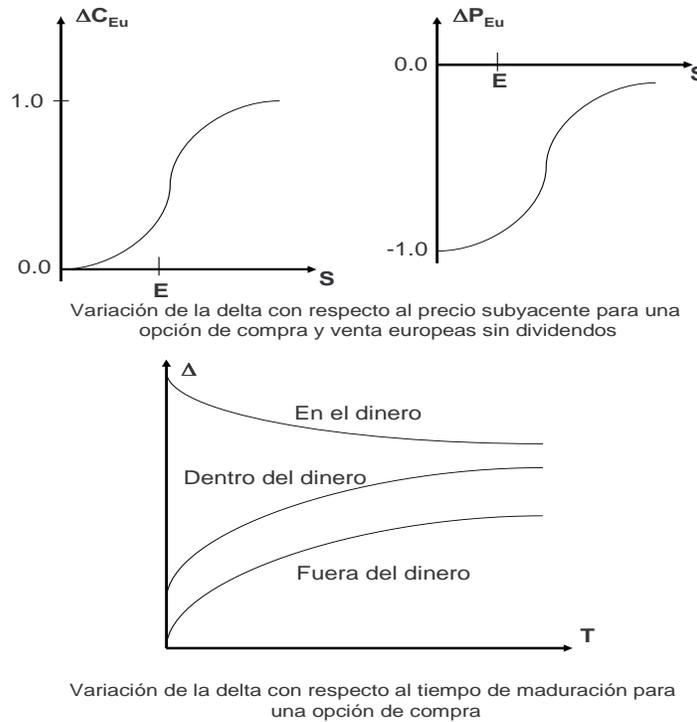


Figura 3.5: Variación de la Δ con respecto a las opciones europeas.

De aquí se desprende que

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow P_{Eu}(S_1, t) \geq P_{Eu}(S_2, t) \Rightarrow \frac{\partial P_{Eu}}{\partial S} \leq 0,$$

para una opción de venta y

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow C_{Eu}(S_1, t) \leq C_{Eu}(S_2, t) \Rightarrow \frac{\partial C_{Eu}}{\partial S} \geq 0,$$

para una opción de compra.

Este tipo de comparaciones, monotonía en precios, fue la principal motivación para desarrollar el capítulo 2 de esta tesis.

Por lo tanto, para el caso de una opción de venta, que es la que interesa para este análisis, se tiene $\partial P_{Eu}/\partial S \leq 0$.

Lema 8

$$\int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \leq 0.$$

Demostración

Se procederá por contradicción.

Para alguna S_0 se cumple que

$$\int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau > 0. \quad (3.42)$$

Por continuidad la integral sigue siendo positiva para alguna δ arbitraria y pequeña tal que $S \in [S_0 - \delta, S_0 + \delta]$, entonces

$$\begin{aligned} & \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau dS = \int_0^{T_S-t} \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} dS d\tau \\ &= \int_0^{T_S-t} \left[- \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \rho_n \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} dS \right] d\tau + \int_0^{T_S-t} \left[\left(\rho \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \right)_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \right] d\tau \\ &+ \int_0^{T_S-t} \left[\int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) dS \right] d\tau \\ &= \int_0^{T_S-t} (I_1 + I_2 + I_3) d\tau. \end{aligned}$$

Ahora se analizará cada término por separado.

$$I_2 = \left(\rho \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \right)_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} = \rho(S_0 + \delta, t) \frac{\partial V_{Eu}(S_0 + \delta, t)}{\partial S} - \rho(S_0 - \delta, t) \frac{\partial V_{Eu}(S_0 - \delta)}{\partial S} \rightarrow 0.$$

La diferencia I_2 tiende a cero, porque como δ es arbitraria y las funciones involucradas son continuas, puede tomarse tan pequeña como uno desee, lo cual hace dicha diferencia despreciable.

Para el término I_1 se tiene que $\rho \geq 0$ por ser una función de densidad y por otro lado ya se vio que $\partial V_{Eu}/\partial S = N(d_1) - 1 \leq 0$, entonces

$$\frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} = N'(d_1) \geq 0 \quad \text{con} \quad N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_1)^2/2}.$$

Así que $\rho(\partial^2 V_{Eu}/\partial S^2) \geq 0$, entonces

$$I_1 = - \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \rho_n \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} dS \leq 0.$$

Para I_3 de la relación en (3.40) se sabe que $\partial V_{Eu}/\partial S$ es negativa para una opción de venta y $\partial \rho/\partial S < 0$, así que

$$I_3 = \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) dS \geq 0. \quad (3.43)$$

Aunque el término sea mayor que cero, se puede hacer más pequeño que los términos negativos. Lo cual se explica con detalle en la observación 7.

Finalmente se llega a

$$\int_0^{T_S-t} \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} dS d\tau \leq 0. \quad (3.44)$$

Lo cual es una contradicción que vino de suponer la desigualdad (3.42).

Por lo tanto se cumple que

$$\int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \leq 0.$$

Además, $\rho(S, T_S - t) \geq 0$ y $V_{Eu}(S, T_S) \geq 0$ por lo cual

$$-\rho(S, T_S - t)V_{Eu}(S, T_S) \leq 0.$$

Observación 6 *Es importante mencionar que el tiempo T_S depende de la frontera libre S_f , lo que implica que la primera y segunda derivada con respecto a T_S también dependen de dicha frontera libre. Pero sabemos que la frontera libre es regular, concava, creciente y al menos es de clase C^2 , lo que nos garantiza que esta frontera exista y a su vez las derivadas de T_S también existen.*

Observación 7 Para los términos positivos de la desigualdad (3.39), sea m un valor arbitrario muy grande tal que redefinimos

$$\int_{t+\tau}^{T_S} \rho = m$$

Esto es posible porque la ecuación de Fokker-Planck es lineal. Obsérvese que también la fórmula de valuación propuesta es lineal con respecto a ρ . Por lo tanto podemos multiplicar y dividir por m sin alterar el resultado. En el cálculo arriba presentado, así como en la desigualdad (3.39), los términos positivos escalan al menos como $1/I_\rho$ y por lo tanto pueden hacerse más pequeños en relación a los términos negativos que son invariantes bajo dicho rescalamiento. Nótese que hay al menos uno de tales términos, por ejemplo, el segundo de la desigualdad (3.39), $-\rho(S, T_S - t)V_{Eu}(S, T_S)$.

Con esto finalmente se acaba de demostrar la afirmación de que la nueva forma de valuar opciones americanas dada por (3.29) satisface la desigualdad de Black-Scholes para el caso log-normal. Lo cual hace a esta nueva propuesta consistente. §

Observación 8 En el capítulo 2 (TROM) también se utilizó la nueva fórmula para demostrar que el valor de una opción de compra americana es igual al valor de una opción de compra europea, es decir, que una opción de compra americana no se puede ejercer antes de expirar, $C_A(S, t) = C_{Eu}(S, t)$ y para llegar a este resultado se encontró analíticamente que la función ρ es una delta de Dirac concentrada en $\{t = T\}$.

Observación 9 Otra forma de ver la consistencia de la fórmula es verificar que la fórmula de Carr, Jarrow y Myneni [16] es consistente con la nuestra. Para ello a grandes rasgos se define la fórmula de Carr, Jarrow y Myneni como:

Teorema 17 En una región $C \equiv (B_t, \infty) \times [0, T]$, el valor de una opción de venta americana, P_τ , puede ser descompuesto en el precio de una opción de venta europea, p_τ , y una prima de ejercicio temprano, e_τ :

$$\begin{aligned} P_t &= p_t + e_t \\ e_t &= rE \int_t^T e^{-r\tau} N\left(\frac{\ln(B_\tau/S) - \rho_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (3.45)$$

y $N(x) \equiv \int_0^x \exp(-z^2/2)/\sqrt{2\pi} dz$ es la función de distribución normal estándar. B_t es la frontera libre y $\rho_2 = r - \sigma/2$.

Entonces partiendo del teorema anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
P_t &= p_t + e_t \\
&= p_t + rE \int_t^T e^{-r\tau} N\left(\frac{\ln(B_\tau/S) - \rho_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) d\tau \\
&= \int_t^T 2\delta(\tau - t)p_\tau d\tau + \int_t^T rE p_\tau \frac{z_\tau}{p_\tau} d\tau \\
&= \int_t^T p_\tau \left[2\delta(\tau - t) + rE \frac{z_\tau}{p_\tau}\right] d\tau \\
&= \int_t^T p_\tau \rho(S, \tau) d\tau. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Aquí, $p_t = P_{Eu}(S, t)$, $z_\tau = e^{-r\tau} N\left(\frac{\ln(B_\tau/S) - \rho_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$ y $\rho(S, \tau) = 2\delta(\tau - t) + rE \frac{z_\tau}{p_\tau}$.

3.3.4. Aplicación de la nueva fórmula

Para verificar la eficiencia de la nueva forma de valorar opciones americanas, es necesario analizar su comportamiento con ejemplos específicos. Para ello se consideraron diversos casos, en donde se estiman los precios de opciones de venta americanas con la nueva forma de valorar opciones americanas y se compararon con diferentes métodos, tales como: el métodos de árboles y el método de diferencias finitas (método explícito e implícito para EDP), esto por consistencia se hace para el caso log-normal (Black-Scholes).

Antes de entrar en detalles sobre los métodos numéricos, se presenta a continuación el algoritmo por medio del cual se calcularon los precios de las opciones de venta americanas, mediante la nueva forma de valorar opciones americanas.

Para $S \in [0, S_{max}]$ con $S_{max} = 2S$ fija:

1. En general, se estiman las probabilidades mediante la solución de la ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck (3.25), para diferentes tiempos antes o iguales a expirar. Dichas probabilidades para el caso log-normal pueden encontrarse también mediante la solución explícita (3.27).
2. Se normalizan las probabilidades de tal forma que $\int_t^{T_S} \rho(S, \tau) d\tau = 1$.
3. Se calcula el precio de una opción de venta europea, mediante la fórmula explícita de Black-Scholes (3.18) con valor del activo subyacente S en los diferentes tiempos reales t^8 .

⁸A priori no se sabe la ubicación de la frontera libre, lo que implica que el valor del tiempo de expiración en la frontera T_S tampoco se conoce, entonces para los cálculos numéricos en su lugar se toma el tiempo de expiración T .

4. Si no se conoce la frontera libre, se verifica si el ejercicio temprano es óptimo en cada paso del tiempo, es decir, se toma el máximo entre la solución de la ecuación de Black-Scholes ($P_{Eu}(S, t)$) y la función de pago, $\max(E - S, 0)$. En otras palabras se considera la función $P(t) = \max(P_{Eu}(S, t), \max(E - S, 0))$.
5. Se multiplica la probabilidad normalizada ρ con la función $P(t)$ para cada t .
6. Se calcula la integral $\int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau)P(\tau)d\tau$ para determinar el valor de una opción de venta americana.

El algoritmo puede entenderse mejor en la figura 3.6.

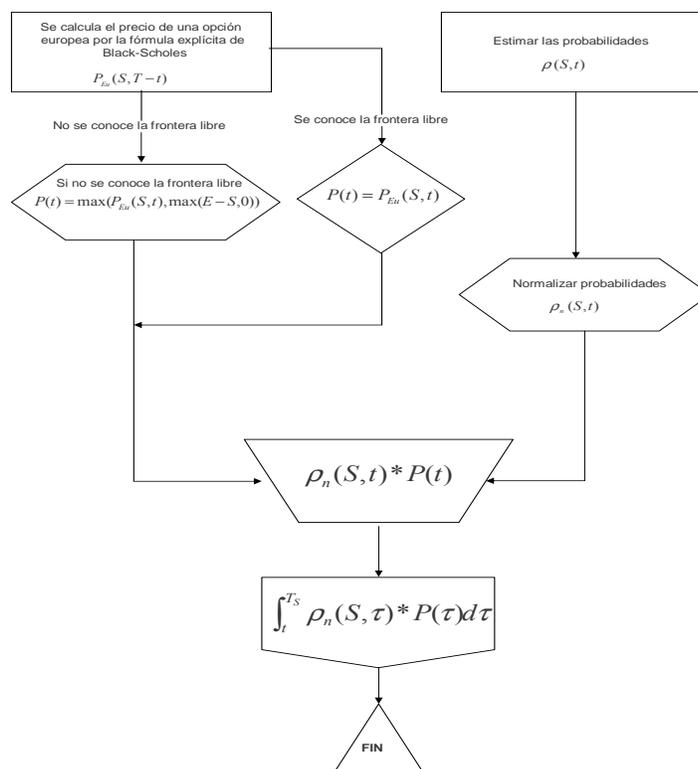


Figura 3.6: Diagrama de flujo para encontrar el precio de una opción de venta americana dada por la fórmula (3.29).

Ya teniendo el algoritmo general, se describe a continuación la forma numérica de resolver los ejemplos específicos que se mencionan más adelante, así como la comparación de algunos de ellos resueltos con métodos tradicionales y la nueva forma

de valorar opciones americanas, para el caso de una opción de venta.

Para encontrar la solución numérica a la EDP de Fokker-Planck, se utilizó el paquete Finite Element Modeling LABORatory (FEMLAB Multiphysics in MATLAB), el cual es un paquete de software avanzado para el modelado y la simulación de cualquier proceso físico que se pueda describir a través de EDP's. La idea del método de elemento finito radica en dividir el dominio en estudio en un número finito de elementos, es decir, discretizar el dominio y resolver sobre cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema, para después ensamblar la solución total. Una forma que se usa en el método para aproximar la solución de una EDP consiste en hacerlo mediante polinomios. Este método fue primeramente descrito por Clough en 1960.

Para obtener la solución de un problema mediante el método de elemento finito, se siguen los pasos genéricos

- a) Generación de la geometría.
- b) Discretización del sistema.
- c) Selección del tipo de elemento.
- d) Asignación de las propiedades del material o materiales.
- e) Definición de las cargas y de las condiciones de frontera.
- f) Solución del conjunto de ecuaciones.

Para este caso en particular, donde S sigue un proceso log-normal (Black-Scholes), se puede utilizar la solución explícita (3.27) para determinar las probabilidades ρ . A continuación se muestra mediante el cuadro 3.1, la solución explícita de dichas probabilidades y la aproximación numérica. Se consideró $S = S_0 = 80$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ y $\Delta t = 0.0833$ para los doce meses de un año.

Como se puede observar del cuadro 3.1, la aproximación numérica está muy cercana a los valores reales o explícitos de las probabilidades. Así que indistintamente se puede usar tanto la aproximación numérica o la fórmula explícita. Para fines prácticos y sólo en este caso para verificar que la nueva forma de valorar opciones americanas (3.29) es consistente con el caso log-normal (Black-Scholes), se utilizó la fórmula cerrada (3.27), la cual fue implementada en MATLAB.

A continuación se muestra con un ejemplo concreto, los pasos que sigue el algoritmo para valorar opciones americanas mediante la nueva fórmula (3.29). Siguiendo el orden del algoritmo se tienen los siguientes resultados.

Sea el precio del activo subyacente $S = S_0 = 50$, el precio de ejercicio $E = 50$, la tasa de interés libre de riesgo $r = 0.1$, la volatilidad $\sigma = 0.4$, se fija el tiempo

Cuadro 3.1: Comparación explícita y numérica de las probabilidades (ρ)

t_{meses}	ρ explícita	ρ numérica (EDP)
1	0.0432	0.0429
2	0.0305	0.0302
3	0.0249	0.0245
4	0.0216	0.0210
5	0.0193	0.0189
6	0.0176	0.0173
7	0.0163	0.0161
8	0.0153	0.0151
9	0.0144	0.0143
10	0.0136	0.0135
11	0.0130	0.0129
12	0.0125	0.0124

máximo que toma T en 5 meses que corresponde a $T = 0.41667$. En este caso no se conoce explícitamente la frontera libre.

1. Cálculo de las probabilidades ρ para una S fija (cuadro 3.2).

Cuadro 3.2: Probabilidades (ρ)

t_{meses}	0	1	2	3	4	5
ρ	0.9974	0.0691	0.0489	0.0399	0.0345	0.0305

2. Normalización de las probabilidades.

Se suman las ρ 's y el resultado se multiplica por Δt , es decir, se calcula $\rho_T = \int_0^T \rho(S, \tau) d\tau = \sum_{i=0}^5 \rho(S, i) \Delta t = 1.2203$. Después cada $\rho(S, i)$ se divide entre ρ_T , para obtener las $\rho_n(S, i)$ para $i = 1, \dots, 5$, con t el número de meses.

3. Cálculo del precio de una opción de venta europea con la fórmula explícita de Black-Scholes (cuadro 3.3).

Cuadro 3.3: Precios de una opción de venta europea para diferentes valores de t

t_{meses}	0	1	2	3	4	5
$P_{Eu}(S, t)$	5.4011	5.2747	5.1331	4.9738	4.7935	4.5881

Fuente: precios calculados en el paquete de MATLAB, mediante la función `blsprice(S, E, r, T - t_i, sigma)` con $t_i = 0, 0.08333, 0.16667, 0.25, 0.33333$ y 0.41667

4. Verificar si el ejercicio es óptimo, es decir, $P = \max(P_{Eu}(S, t), \max(E - S, 0))$.

En este caso la función de pago, $\max(E - S, 0)$, es cero, pues $E = S = 50$, así que la opción en cada paso del tiempo toma el valor que se deriva de la fórmula de Black-Scholes, $P = P_{Eu}$.

5. Se multiplican las probabilidades por el valor obtenido en 4, $\rho_n * P$.

6. Por último se determina el valor de la opción para las variables deseadas.

Se calcula $V_A(S, t) = \int_t^T P_{Eu}(S, \tau) \rho_n(S, \tau) d\tau$. En este caso se tomó $V_A(50, t) = \int_0^5 P_{Eu}(50, \tau) \rho(50, \tau) d\tau$. Los resultados se muestran en el cuadro 3.4.

Cuadro 3.4: Valores de una opción de venta americana

t_{meses}	$V_A(S, t)$
1	5.3565
2	5.3087
3	5.2573
4	5.2019
5	5.1421

Fuente: cálculos propios utilizando como aproximación a la integral, el método del trapecio.

3.3.5. Comparación con otros métodos

Los métodos numéricos están basados en técnicas específicas que proporcionan resultados cuantitativos a modelos matemáticos que no tienen una solución analítica o cerrada⁹. La idea de los métodos numéricos es construir algoritmos que puedan ser implementados fácilmente y que sean computacionalmente eficientes.

Es importante estar consciente de que no todos los métodos numéricos se ajustan bien a todos los problemas.

Hay diferentes métodos para encontrar la solución numérica a los problemas de opciones financieras. Entre ellos se encuentran los métodos de Monte Carlo; éstos involucran la generación de un gran número de simulaciones numéricas del proceso aleatorio que sigue el activo subyacente. Estos métodos tienen la desventaja de que las características del ejercicio temprano son difíciles o imposibles de implementar.

Otra clase conocida de métodos son los métodos de lattice, los cuales incluyen el método binomial y trinomial. Estos modelos suponen que el proceso estocástico

⁹ Algunos modelos admiten soluciones exactas solo en términos de series infinitas o por funciones especiales muy complejas. En general es más eficiente resolver estos modelos numéricamente que aproximar por series infinitas.

del subyacente es discreto. En estos casos, los modelos pueden escribirse directamente como conjuntos discretos de las ecuaciones en diferencia. Estos métodos son altamente eficientes cuando se estiman simples opciones de compra y venta, pero son menos eficientes cuando las estimaciones consideran opciones más complicadas. Otros métodos lattice comúnmente usados son casos especiales de esquemas de diferencias finitas explícitas.

Los métodos numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales parciales son las diferencias finitas y elementos finitos. Estos métodos se aplican a modelos cuyo activo subyacente supone un proceso estocástico continuo. Se basan en la discretización del problema de tal forma que la aproximación sea estable y convergente.

A continuación se describen brevemente los diferentes métodos más tradicionales utilizados para valorar o aproximar el valor de una opción de venta americana.

1. Método de árbol binomial (encontrada por Cox, Ross y Rubinstein). Suponga que la vida de una opción de venta americana que no paga dividendos es dividida en N subintervalos de longitud Δt . Se denotará al j -ésimo nodo al tiempo $i\Delta t$ como el nodo (i, j) ($0 \leq N, 0 \leq j \leq i$). Se define a f_{ij} como el valor de la opción en el nodo (i, j) . El precio del activo subyacente en dicho nodo es $S_0 u^j d^{i-j}$. Si el valor de una opción de venta en la fecha de expiración es $\max(E - S_T, 0)$ entonces

$$f_{N,j} = \max(E - S_0 u^j d^{N-j}, 0), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N.$$

La probabilidad de movimiento del nodo (i, j) al tiempo $i\Delta t$, al nodo $(i+1, j+1)$ al tiempo $(i+1)\Delta t$ es p . Análogamente la probabilidad de movimiento del nodo (i, j) al tiempo $i\Delta t$, al nodo $(i+1, j)$ al tiempo $(i+1)\Delta t$ es $1-p$. Suponiendo que no hay ejercicio temprano, la valuación neutral al riesgo da

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t} [p f_{i+1,j+1} + (1-p) f_{i+1,j}],$$

para $0 \leq i \leq N-1$ y $0 \leq j \leq i$. Cuando el ejercicio temprano es tomado en cuenta, el valor de $f_{i,j}$ debe ser comparado con el valor intrínseco, entonces

$$f_{i,j} = \max\{E - S_0 u^j d^{N-j}, e^{-r\Delta t} [p f_{i+1,j+1} + (1-p) f_{i+1,j}]\},$$

se considera a $u = 1/d$, $p = (a-d)/(u-d)$, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y $a = e^{r\Delta t}$.

2. Método de diferencias finitas (explícito). Este método es utilizado cuando el precio de una opción europea es expresado en términos de una ecuación diferencial

parcial. Supóngase que el precio de la opción es representado por (3.4) y sin pérdida de generalidad se toma a P_A como f .

Suponga que la vida de la opción es T . Se divide este tiempo en N intervalos iguales de longitud $\Delta t = T/N$, entonces se tienen $N + 1$ tiempos, es decir, $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$.

Suponga que S_{max} es el precio del activo suficientemente grande tal que cuando es alcanzado, la opción de venta ya no tiene valor. Se define $\Delta S = S_{max}/M$, lo que genera $M + 1$ precios del activo espaciados igualmente, es decir, $0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{max}$.

El nivel de S_{max} es escogido de tal forma que uno de éstos es el precio del activo actual.

Ambos conjuntos de puntos definen una malla que consiste de $(M+1) \times (N+1)$ puntos. El punto (i, j) en la malla corresponde al tiempo $i\Delta t$ y al precio del activo $j\Delta S$ y f_{ij} denota el valor de la opción en ese punto.

Para un punto (i, j) en la malla, las parciales pueden ser aproximadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}.\end{aligned}$$

Entonces la ecuación en diferencias queda como

$$\begin{aligned}rf_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}\end{aligned}$$

o

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1},$$

donde

$$\begin{aligned}
a_j^* &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right) \\
b_j^* &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right) \\
c_j^* &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Este método no resuelve el problema de frontera libre.

3. Método de diferencias finitas (implícito). Análogo al método explícito se toman las parciales como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \\
\frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2}.
\end{aligned}$$

Ahora substituyendo las parciales en la igualdad tomada de (3.4), se tiene

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = r f_{i,j},$$

para $j = 1, 2, \dots, M-1$ e $i = 0, 1, \dots, N-1$. Reordenando términos se obtiene

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j},$$

donde

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \\
b_j &= 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t \\
c_j &= \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

El valor de una opción de compra al tiempo T es $\max(E - S, 0)$, es decir,

$$f_{N,j} = \max(E - j\Delta S, 0), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, M.$$

El valor de una opción de venta cuando $S = 0$ es E , es decir,

$$f_{i,0} = E, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N.$$

Se supone que la opción de venta es cero cuando $S = S_{max}$, así que

$$f_{i,M} = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N.$$

Para más detalles del método se pueden consultar los libros [28] y [73].

Ya conociendo un poco la estructura de los métodos tradicionales con los cuales se va a comparar la nueva forma de valuar opciones americanas, a continuación se presentan diferentes ejemplos resumidos en cuadros.

En los siguiente cuadros, para estimar el valor de una opción de venta americana mediante los métodos *Binomial* y diferencias finitas (*Explícito* e *Implícito*), se tomó la implementación numérica de Bernt Arne Ødegaard (ver el sitio de internet: <http://finance.bi.no/bernt/>), mientras que para los métodos *CRR* (precio de una opción americana via árboles de Cox-Ross-Rubenstein calculado usando el método de diferencias finitas aplicado a la EDP de Black-Scholes), *FD* (precio de una opción americana via diferencias finitas aplicado a la EDP de Black-Scholes) se utilizó la implementación numérica de MATLAB (ver el sitio de internet <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=16476&objectType=file>). El método *Nuevo* corresponde a la nueva forma de valuar opciones americanas dada por la ecuación (3.29).

La estimación numérica es una primera aproximación del nuevo método, la cual puede no ser buena, pero la idea es simplemente mostrar que tampoco da resultados ilógicos. El refinamiento numérico del método se dejará para trabajo posterior.

Consideraciones generales de la estimación numérica:

1. El tiempo se considera en años, es decir 5 meses equivale a $5/12 = 0.4167$.
2. t_m es el tiempo mensual: 1,2,...,12 son los meses en donde se estima la opción con respecto al Nuevo método.
3. En los otros métodos (Binomial, Explícito, Implícito, CRR y FD), el tiempo correspondiente es $\tau = T - t_m$, en donde $T = 1$ que equivale a 12 meses.
4. $S = S_0$ y $S_{max} = 2 * S_0$.
5. Se considera $N = 100$ para el tiempo y $M = 100$ para el subyacente, excepto para el método explícito. En dicho método se utilizan $N = 11$ y $M = 20$.

6. $\Delta t = (t/12)/N$ y $\Delta S = (2 * S)/M$.
7. Debido a que no se conoce la frontera libre, entonces se aproxima el método Nuevo como $\int_t^T \rho_n(S, \tau) \max(P_{Eu}(S, \tau), \max(E - S, 0)) d\tau$.
8. En las estimaciones no se conoce la frontera libre, así que se considerara a T_S como T .

A continuación se presentan los cálculos numéricos, considerando las especificaciones antes mencionadas.

En el cuadro 3.5, en cada ejemplo cambian todas las variables involucradas en el modelo.

Cuadro 3.5: Comparación de una opción de venta americana

Variables	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
S_0	300	62	40
E	300	60	45
r	0.08	0.10	0.05
σ	0.3	0.2	0.2
t_m	4	5	7
Método	$V_A(S, t)$		
Nuevo	23.1808	1.6929	5.0000
Binomial	22.9975	1.7652	5.1420
Explícito	22.8051	1.6504	5.0550
Implícito	22.9190	1.7535	5.1340
CRR	22.9970	1.7652	5.4720
FD	22.4680	1.5100	5.4030

En el cuadro 3.6 se muestran otros ejemplos, en los cuales se compara solo el método Binomial con el Nuevo método, en éstos se considera el intervalo de integración $t \in [1, 12]$ para el método Nuevo, así que para el caso Binomial se toma a $T = 0$.

Finalmente, como ejemplo 10 se considera a $S_0 = 78$, $E = 78$, $r = 0.07$ y $\sigma = 0.01$. Para el método Binomial se toma $\tau = T - t_m = 0$ cuyo valor es $V_{AmeBin} = 0$. En la integración del método Nuevo se mueve a t_m en el intervalo $[1, 12]$. Ver cuadro 3.7.

La finalidad de presentar todos estos ejemplos, no es verificar si la propuesta de esta tesis da mejores o peores estimaciones que los métodos tradicionales ya existentes. La idea básica consiste sólo en verificar que el nuevo método dado por la ecuación (3.29) da estimaciones congruentes.

El principal objetivo de la nueva metodología es que permite la incorporación sistemática del efecto de los factores macroeconómicos. Algunos ejemplos teóricos

Cuadro 3.6: Comparación de una opción de venta americana

Variabes	Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8	Ejemplo 9
S_0	40	10	25	30	100	5
E	45	8	25	32	300	2
r	0.05	0.07	0.05	0.08	0.20	0.07
σ	0.05	0.10	0.10	0.10	0.50	0.08
t_m	2-12	1-12	1-12	1-12	1-12	1-12
Método	$V_A(S, t)$					
Binomial	5.000	0.000	0.000	0.000	200	0.000
Nuevo	5.000	6.29e-05	0.391	0.000	200	7.04e-39

En este caso t_m es el intervalo en donde se considera la integración del Nuevo método

En el método Binomial, el tiempo correspondiente es $\tau = T - t_m$, es decir $T = 0.0833$ o $T = 0$.

Cuadro 3.7: Comparación de una opción de venta americana

t_m	1-12	2-12	3-12	6-12	11-12
Nuevo	0.001	0.11e-03	0.13e-04	0.20e-07	0.60e-12

t_m es el intervalo en donde se considera la integración del Nuevo método

serán presentados en el siguiente capítulo de esta tesis. El ejemplo numérico calibrado con datos reales se deja para trabajo posterior. Para fines de la tesis nos quedamos con los modelos teóricos.

En conclusión se puede decir lo siguiente:

1. Matemáticamente se demostró que esta nueva propuesta para valorar opciones americanas satisface la ecuación de Black-Scholes.
2. También se demostró, analíticamente con esta nueva fórmula que una opción de compra americana es igual a una opción de compra europea, es decir, el ejercicio temprano de una opción de compra americana no es óptimo y la probabilidad de ejercicio ρ es una Delta de Dirac concentrada en $\{t = T\}$.
3. Como una aplicación de la nueva forma de valorar opciones americanas se dio una primera aproximación numérica con algunos ejemplos y se compararon con los métodos tradicionales, tales como: árboles (Binomial CRR) y diferencias finitas (Explícito e Implícito). Los resultados no son muy buenos porque no se conoce con precisión la frontera libre y por consiguiente no se sabe el valor de T_S . Se dejará para trabajo futuro mejorar la aproximación numérica.

La ventaja de usar esta propuesta con respecto a las ya existentes es que se hace la integración con respecto al tiempo, lo cual es un tema que se ha explorado poco, además de que por medio de la ecuación de Fokker-Planck se puede incorporar sistemáticamente el efecto de diferentes factores macroeconómicos.

El hecho de que se tenga un sistema de ecuaciones dado por los factores macroeconómicos, no complica mucho el modelo, pues dicho sistema es representado por una sólo ecuación de Fokker-Planck. En este caso ya no se tiene una solución cerrada a dicha ecuación. La solución será una aproximación numérica.

Además, al representar la probabilidad ρ por medio de las ecuaciones de Kolmogorov, se tiene la ventaja de poder incorporar sistemáticamente el efecto de los factores macroeconómicos, lo que haría el cálculo del precio de las opciones más realista.

Capítulo 4

Incorporación de factores macroeconómicos a diversos modelos financieros y de riesgo de crédito

Se propone una estructura dinámica para la valuación de derivados incluyendo derivados de crédito, así como la estimación de las probabilidades de transición en las calificaciones en riesgo crediticio. En la metodología de valuación, esta aproximación está basada en la construcción de modelos macroeconómicos y en ocasiones, incorporando observaciones teóricas y empíricas. La idea central es modelar el ambiente macroeconómico usando una ecuación diferencial estocástica (EDE). Esto conduce de forma natural, a la ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad de transición del activo subyacente. Entonces se utiliza la fórmula de Samuelson para calcular el precio de la reclamación contingente. La ventaja de esta aproximación es que la información macroeconómica puede ser sistemáticamente incorporada dentro del proceso de valuación. Esto es particularmente relevante en el caso de mercados incompletos, donde es bien sabido que las metodologías tradicionales no proporcionan respuestas específicas. En el caso de la valuación del riesgo de crédito, se aplica un modelo similar, el cual puede ser ajustado con datos reales. Además, se proporcionan estimaciones para las probabilidades de transición y de incumplimiento, así como estimaciones de los tiempos esperados de transición. Se presentan diversas aplicaciones usando datos para diferentes escenarios. También se modifica la metodología del modelo de valor presente neto (VPN) incorporando factores macroeconómicos usando la misma probabilidad de transición antes mencionada. En la introducción se presenta una revisión de los aspectos más importantes relativos a los factores macroeconómicos.

4.1. Introducción

El uso de herramientas matemáticas en la economía y las finanzas siempre han sido aplicadas. Sin embargo, los cambios ocurridos en las últimas tres décadas en los sistemas políticos, económicos y financieros han mostrado la necesidad de desarrollar modelos más realistas. Dichos modelos, al ser más realistas, son también más complejos y sofisticados. En muchas ocasiones las metodologías tradicionales no son aplicables. Por lo cual se desarrollarán nuevas metodologías para calcular derivados financieros, así como riesgo de crédito.

Hoy en día la economía se mueve alrededor de diversas variables macroeconómicas, las cuales deben de tomarse en cuenta para cualquier análisis. La originalidad de este trabajo surge a partir de proporcionar un modelo eficaz, el cual considere diferentes ambientes macroeconómicos, que de solución a problemas más realistas, particularmente, el objetivo fundamental de este trabajo es el de incorporar de forma sistemática una serie de factores macroeconómicos relevantes que normalmente se consideran implícitamente al suponer cierto comportamiento de la tasa de interés libre de riesgo y de los activos relevantes.

En este enfoque, se propone, con base en datos reales, diversos modelos económicos que determinen posteriormente la forma en la que se establecen los precios de diversos productos financieros.

Se aplica este marco a la valuación de opciones (europeas y americanas), así como a diversos problemas de riesgo de crédito, administración de portafolios y generalización del modelo del VPN.

La aplicación de factores macroeconómicos no es nuevo, ya que desde el siglo XV, los investigadores han estado interesados en estudiar los fenómenos económicos, así como el desarrollo de algunas de sus variables y por ende se han creado diferentes teorías macroeconómicas. Dichas teorías se construyen a partir de modelos que relacionan las distintas variables agregadas, tales como el producto, el consumo, la inversión, el nivel general de los precios, el empleo, etc. Estas relaciones se establecen mediante supuestos simplificadores de una realidad económica compleja, cuidando que las conclusiones o explicaciones proporcionadas por el modelo no sean irreales. En el cuadro 4.1, se presenta un resumen del desarrollo histórico de la macroeconomía.

En la actualidad existen diversos modelos los cuales consideran el efecto de los factores macroeconómicos, entre ellos está la aproximación de Hull y White que puede producir un ajuste exacto a una curva de mercado precisa y permite soluciones cerradas para opciones. Se tiene la versión de un factor del modelo extendido de Vasicek, así como la versión de dos factores de la aproximación de Hull y White

Cuadro 4.1: Desarrollo histórico de la Macroeconomía

Anteriores a los clásicos		
	William Petty (1665)	* Estudió fenómenos sistemáticos y regulares. * Intenta medir la riqueza total de Irlanda.
	Richard Cantillon (1755)	* Analizó y midió los flujos de ingreso entre los diferentes sectores económicos.
	Francois Quesnay (1755)	* Calculó el primer flujo circular de ingreso y gasto, para evaluar los efectos de las políticas gubernamentales sobre la economía francesa.
Fisiócratas		* Fueron los primeros en hacerse llamar economistas. * Utilizaron y desarrollaron el concepto multiplicador (aumento en exportaciones implica aumento del ingreso).
Monetarista	David Hume (1711-1776)	* Fundador de la economía inglesa de libre comercio. * Hizo el análisis monetario de los flujos comerciales.
Mercantilistas		* Desarrolló el mecanismo de ajuste de la balanza de pagos. * Hicieron la primera formulación de la teoría cuantitativa del dinero.
Clásicos		
	J.S. Mill (1806-1873)	* Habló sobre el "pleno empleo" del capital y no de la fuerza de trabajo.
	Adam Smith (1776,1817) David Ricardo (1776,1817)	* Smith es considerado el padre del liberalismo moderno. * Fueron los primeros en construir un cuerpo analítico sólido, para explicar el funcionamiento de la economía capitalista.
Neoclásicos		
	L.Walras (1834-1910) W. S. Jevons (1835-1882) C. Menger (1840,1921) E.Marshall (1842,1924) F. Von Wieser (1851-1926) E. Bohm-Bawerk (1851-1940)	* Desarrollaron la teoría Neoclásica de los precios determinados por las curvas de la oferta y la demanda. * Hicieron la síntesis de las teorías de la utilidad marginal y la productividad marginal.
Época moderna		
Monetarista	Keynes (1936)	* Originó la Macroeconomía moderna. * Introdujo conceptos que hoy son muy comunes en los libros de Macroeconomía: la preferencia por la liquidez, la eficiencia marginal del capital, la trampa de la liquidez, el efecto riqueza o el efecto Pigou, las expectativas, la propensión marginal a consumir y el multiplicador.
	J. R. Hicks (1937)	* Realizó la "Síntesis Neoclásica". * Introduce el modelo IS-LM de interacción entre los mercados monetarios y reales
	F. Modigliani (1944)	* Estudia el desempleo involuntario usando el modelo IS-LM.
	Patinkin (1965)	* Estudia el fenómeno de la trampa de liquidez en la demanda de dinero.
Monetarista	Milton Friedman(1968)	* Padre del monetarismo moderno * Reformula la curva de Phillips, incorporándole expectativas de precios de los trabajadores (expectativas adaptativas).
	(1960-1970) Robert Lucas Thomas Sargent Robert Barro Neil Wallace	* Dieron origen a la revolución de las expectativas racionales.
	Edward Prescott	* Desarrolla la teoría de los ciclos económicos reales.
	Gregory Mankiw Oliver Blanchard David Romer Larry Summer	* Desarrollan la nueva teoría Keynesiana.

que ofrece una solución al modelo de un factor mediante un proceso de calibración [60].

A continuación se hace una revisión de algunos artículos recientes, en los cuales se aplican variables macroeconómicas. La idea principal de hacer esta revisión es mostrar la forma en que las variables macroeconómicas están inmiscuidas en resolver problemas económicos y financieros reales.

- i) **Análisis de mercados emergentes.** En este artículo se examinan las estructuras comunes de un gran número de crisis de la balanza de pagos, considerando una muestra de 26 mercados emergentes. Se analiza el comportamiento de un conjunto de variables tales como: tipo de cambio, componentes individuales de la balanza de pagos, producto interno bruto, importaciones, exportaciones, etc. Se aplican métodos estadísticos multivariados [63].
- ii) **Valuación en mercados emergentes.** Muestra procedimientos para estimar el flujo descontado de las compañías a una tasa donde los riesgos que refleja son los mismos donde sea. Se enfocan en la forma de incorporar, dentro de la valuación, el nivel extra de riesgo que caracteriza muchos mercados emergentes. Estos riesgos pueden incluir altos niveles de inflación, volatilidad macroeconómica, controles de capital, cambios políticos, guerras o resistencias civiles, cambios regulatorios, derechos de inversionistas probablemente definidos o con contratos forzados, control de cuentas descuidadas y corrupción [34].
- iii) **Factores macroeconómicos que afectan las industrias en Alemania.** Se estudia la importancia de diversos factores macroeconómicos que expliquen la estructura de rendimiento para seis índices industriales. Se concentran en instituciones financieras y comparan resultados empíricos con 5 diferentes índices industriales. Utilizan un modelo multi-factor con los siguientes índices: químicos, utilidades, vehículos, compañías de construcción, así como bienes de consumo. Y como factores macroeconómicos utilizan: la maduración de la ganancia del riesgo, el rendimiento de un bono con cupon cero, tipo de cambio con respecto a U.S.A., el índice de negocios y el rendimiento del DAFOX [7].
- iv) **Modelo de valuación de 3 factores para hipotecas.** Generalizan el modelo de valuación de MBS propuesto por Kariya y Kobayashi a un modelo de 3 factores. Su valuación se basa en un tiempo discreto, en la teoría de no arbitraje, haciendo una asociación entre el comportamiento del prepago y la estructura del flujo de efectivo. Las variables macroeconómicas utilizadas son: la tasa de interés corta, la tasa de hipoteca, el proceso del precio de la casa y una distribución normal bivariada. La distribución normal describe la heterogeneidad de los deudores para el prepago, lo cual proporciona las fronteras de los dos factores incentivos; la tasa de la hipoteca, el proceso de los precios y la tasa de interés generan el factor de descuento [67].

- v) Factores macroeconómicos y la correlación entre el rendimiento de los bonos y las existencias (stock). Se estudia el comportamiento entre el rendimiento del stock y el rendimiento de los bonos largos del gobierno y se intenta explicar la relación de las fuerzas que controlan la economía. Las variables inmiscuidas son: índices de bonos del gobierno (de Estados Unidos, Gran Bretaña, Francia, Alemania, Japón, Canada e Italia) y los rendimientos totales del stock [46].
- vi) Pueden las variables macroeconómicas explicar los movimientos del mercado de stock de Japón y Estados Unidos?. Se seleccionan diversas variables macroeconómicas, recurriendo a resultados empíricos y teóricos. Estas variables son usadas en el modelo del mercado de stock en los Estados Unidos y Japón. Se hace un análisis de cointegración aplicado al modelo para ver la relación de largo plazo entre la producción industrial, el índice de precios al consumidor, la demanda de dinero, las tasas de interés de corto y largo plazo y el precio stock en los Estados Unidos y Japón [29].
- vii) Aplicación de las variables macroeconómicas en el análisis residual de la forma reducida del modelo para estimar errores. Se aplica un modelo de tres factores que incorpora la correlación entre el incumplimiento y la tasa spot al modelo del proceso de incumplimiento de bonos corporativos [74].
- viii) Impacto de las variables macroeconómicas en los sectores del mercado de stock. Se realiza la importancia del riesgo gerencial y el análisis de decisión, específicamente direccionado al impacto de las variables macroeconómicas en el mercado de stock. La estructura teórica cubre la evolución de las herramientas de análisis de inversión del portafolio gerencial a las teorías financieras recientes aplicadas al mercado de stock mexicano [11].

Después de observar, en el resumen de los artículos anteriores, que tan importante son las variables macroeconómicas, para explicar diversos fenómenos económicos y financieros, vale la pena dar ahora algunas definiciones básicas de algunas variables macroeconómicas.

Es importante mencionar que a partir de que Keynes estudia la macroeconomía, surgen diferentes e importantes variables que se utilizan hoy en día, entre ellas las más relevantes son las siguientes:

Producción y ciclo económico. La producción es la creación y procesamiento de bienes, mercancías y servicios económicos. El ciclo de la producción agregada es conocido como ciclo económico, el cual se define como los ascensos, descensos, recesiones y activaciones de la actividad económica.

Una definición más formal de acuerdo a algunos economistas es:

Un ciclo económico consiste en expansiones que ocurren al mismo tiempo en las diversas ramas de la actividad económica, seguidas de recesiones... y recuperaciones que dan lugar a la fase de expansión del siguiente ciclo.

Desempleo. Se define como una situación en la que una fracción de las personas que forman parte de la población en edad de trabajar (o población económicamente activa) se encuentran buscando trabajo y no lo encuentran.

Inflación o tasa de crecimiento de los precios. La inflación es la elevación del nivel agregado de los precios de una economía. Se mide como la variación porcentual del índice de precios al consumidor (IPC). Dicho índice es construido a partir de una canasta de consumo representativa, en un determinado periodo conocido como periodo base o año base.

Déficit fiscal. Es el gasto excedido del gobierno sobre el total de sus ingresos.

Déficit externo. Es el saldo de la balanza de pagos y, en particular, la balanza comercial, que no es más que las exportaciones de bienes y servicios netos de las importaciones de bienes y servicios.

Tasas de interés. Se denomina interés al rendimiento de un activo financiero o de un monto de capital invertido durante un periodo determinado.

Inversión o creación del capital. Se define como el aumento neto del capital real de la comunidad (equipos, edificios, existencias de mercancías, etc.). Esta creación neta del capital la realizan principalmente las empresas. Las oportunidades de inversión dependen de los nuevos descubrimientos, nuevos productos, nuevos territorios y fronteras, nuevos recursos, nueva población, mayor producción y renta, así como de la expansión del sistema económico.

Consumo. Es el gasto total realizado por los consumidores de bienes y servicios en un periodo dado. Incluye todos los bienes de consumo comprados en el periodo, aunque muchos de ellos duran periodos más largos, por ejemplo los muebles, la ropa, los automóviles, etc. No incluye la compra de vivienda que se considera gasto de inversión.

Salario. Es la retribución del trabajo, es decir, es la remuneración monetaria o en especie por la prestación de trabajo en una empresa. Los salarios se pactan entre el patrón o empleador y el trabajador o empleado, de común acuerdo, bilateralmente; o son objeto de convenio colectivo.

Tipo de cambio extranjero. Da el precio de la unidad de dinero extranjera en términos de la nacional. En las importaciones y exportaciones de mercancías entre las naciones con diferentes unidades monetarias se introduce este nuevo factor económico.

Producto interno bruto (PIB) y producto interno nacional (PIN). Se pueden definir como la suma de tres grandes componentes: el gasto privado de consumo, el gasto público en bienes y servicios y el gasto de inversión. En cuanto al PIB se incluye la inversión bruta realizada en toda clase de maquinaria y construcciones, mientras que en el PIN sólo se cuenta la inversión neta, habiendo restado el aumento bruto de bienes de capital una suma adecuada en concepto de depreciación representativa de los bienes de capital consumidos durante el periodo.

Agregados monetarios. Los agregados monetarios son los elementos que integran la masa monetaria, es decir, son las medidas de la cantidad de dinero que hay en la economía, los principales agregados monetarios son:

$M1$ = disponibilidad líquida (moneda fraccionaria y billete de banco). Es la suma de efectivo en poder del público, los depósitos transferibles mediante cheques, cheques de viajero y cuentas corrientes.

$M2$ = $M1$ + disponibilidades cuasi monetarias (depósitos a la vista, cuentas bancarias y libretas de ahorro). $M - 1$ más los depósitos que devengan intereses, pequeños depósitos a plazo y acuerdos de recompra día a día.

$M3$ = $M2$ + depósitos a corto plazo y en divisas, imposiciones a plazo, certificados de depósitos bancarios y bonos a corto plazo.

$M - 2$ más grandes depósitos a plazo y acuerdos de recompra a plazo.

$M4$ = $M3$ + bonos, letras del tesoro y pagarés.

Ya teniendo en mente lo que son las variables macroeconómicas y como se pueden utilizar para resolver problemas económicos y financieros reales, se está preparado para introducir los nuevos modelos matemáticos que pueden depender de variables macroeconómicas.

4.2. Modelos con variables macroeconómicas

La importancia de considerar las variables o factores macroeconómicos que afectan los modelos tanto de productos derivados como de riesgo de crédito, radica en que si dichos factores no son considerados, los precios pueden variar significativamente (ver [57]).

Por ejemplo en el caso del modelo de Black-Scholes, para encontrar el precio de una opción, se considera que la tasa de rendimiento μ y la volatilidad σ del activo subyacente son constantes, lo cual no sucede en la realidad, ya que los movimientos en los precios del activo subyacente dependen de muchísimos factores macroeconómicos que afectan el mercado financiero, lo cual hace al modelo poco realista.

La idea es extender este modelo, para el caso en que los parámetros puedan depender directamente de diferentes factores macroeconómicos o índices. Para ello se usa la técnica mostrada en el capítulo anterior, de generar la función de densidad de probabilidad por medio de la ecuación de Fokker-Planck, la cual permitirá introducir de manera sistemática el efecto de los factores macroeconómicos al modelo de valuación de opciones. A continuación se dará una de las contribuciones más importantes de la tesis, la cual se basa en un modelo financiero que considera el efecto de los factores macroeconómicos y se mostrará la forma en que dicho modelo puede ser extendido o aplicado a diversos problemas tanto de riesgo de crédito, así como al caso específico del modelo del valor presente neto.

Supóngase que se desea calcular el valor de un derivado financiero con activo subyacente S , pero los parámetros μ y σ depende de n factores macroeconómicos.

Considere que el ambiente macroeconómico está formado por n variables macroeconómicas, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, las cuales están representadas por la siguiente dinámica

$$dX = G(X, t)dt + \alpha F(X)d\tilde{W}, \quad (4.1)$$

donde $G(\cdot)$ es una función que depende de los n factores macroeconómicos, X , y del tiempo, t , α es una constante y $d\tilde{W}$ representa al movimiento browniano, el cual corresponde a la parte estocástica del proceso¹.

Ahora suponga que el activo subyacente, S , el cual puede ser representado por un proceso log-normal, en general sigue el proceso o la ecuación diferencial estocástica

$$dS = \mu(X_1, \dots, X_n, t)Sdt + \sigma(X_1, \dots, X_n, t)SdW. \quad (4.2)$$

En este caso la forma de introducir los factores macroeconómicos, así como la dependencia en el tiempo, t , es por medio de la tasa de rendimiento, μ , la volatilidad, σ , y la tasa de interés libre de riesgo, r . En este paso hay que calibrar el modelo (4.1) de tal forma que se determine el efecto que tienen dichos factores macroeconómicos

¹Por ejemplo se considera que el sistema depende de un solo factor macroeconómico tal que $x = r$ la tasa de interés libre de riesgo, entonces se puede considerar la dinámica de r dada por el modelo CIR o Vasicek, es decir $dr = a(b - r)dt + \alpha r^\beta d\tilde{W}$.

en los parámetros μ y σ .

Por otro lado se calcula la probabilidad de transición vía la ecuación de Fokker-Planck, pero generalizada a n variables². En este caso $\rho(X, t)$ es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado X al tiempo t .

La ventaja de usar esta ecuación radica en poder representar de forma concisa la dinámica del sistema de ecuaciones, que provienen de los factores macroeconómicos, por una sola ecuación diferencial parcial.

Posteriormente se aplica la fórmula de Samuelson (1), para obtener el precio de una reclamación contingente

$$\begin{aligned} p(g) &= e^{-rt} E_\rho \left[g \left(\frac{S_t}{ES_t} S_0 e^{rt} \right) \right] \\ &= e^{-rt} \int_0^\infty \int_0^T g \left(\frac{S_t}{ES_t} S_0 e^{rt} \right) \rho(X, t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

y más generalmente la nueva fórmula para valorar opciones americanas (3.29), para encontrar el valor del derivado financiero

$$V_A(S, t) = \int_t^{T_S} \rho(X, \tau) V_{Eu}(S, \tau) d\tau. \quad (4.4)$$

Ahora se verá cómo se aplica esta misma técnica al modelo del valor presente, así como a un modelo de riesgo de crédito.

4.2.1. Modelo generalizado del valor presente neto

El modelo de valor presente neto (VPN) representa la contribución de una inversión al valor de la compañía y, en consecuencia, a la riqueza de los accionistas. Es decir, es el valor actual de los flujos de efectivo futuros esperados menos el desembolso de una inversión realizada por una empresa. En este contexto, el modelo no considera el efecto que pueden tener los factores macroeconómicos o variables externas, lo cual puede hacer a la inversión un poco riesgosa, pues con este modelo no se puede medir la incertidumbre de los eventos futuros.

En esta subsección se presenta una generalización del modelo del valor presente neto, en el cual se incorpora de forma sistemática el efecto de los factores macroeconómicos, mediante la técnica antes analizada, ecuaciones de Kolmogorov.

²Si $F(X_i) = 1$ para toda i en la ecuación 4.1, entonces la ecuación de Fokker-Planck está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(G\rho) + \sqrt{2\alpha}\Delta\rho,$$

con $\text{div}(G\rho) = \sum \frac{\partial(G\rho)}{\partial X_i}$ y $\Delta\rho = \sum \frac{\partial^2 \rho}{\partial X_i^2}$.

Introducción

La importancia de usar este tipo de modelos se basa en la evaluación de proyectos por medio de métodos matemáticos-financieros, para la toma de decisiones por parte de los administradores financieros, ya que un análisis que se anticipe al futuro puede evitar posibles desviaciones y problemas en el largo plazo.

El modelo del VPN tiene varias ventajas:

- a. Es muy fácil de aplicar.
- b. Todos los ingresos y egresos se pueden traer a valor presente y de esta forma se puede ver fácilmente si los ingresos son mayores que los egresos.
- c. Por otra parte, esta metodología que es muy confiable en ambientes cambiantes estables, deja de ser aplicable cuando existe irreversibilidad en las decisiones e incertidumbre en los eventos futuros.

Cuando el VPN es menor que cero, implica que hay una pérdida a una cierta tasa de interés. Si el VPN es mayor que cero entonces existe una ganancia y si éste es igual a cero entonces no se puede decir nada.

Modelo del valor presente neto discreto

Supóngase que se tiene una sucesión de n pagos futuros, S_0, S_1, \dots, S_n , invertidos a una tasa de interés, r , libre de riesgo por periodo. Entonces el VPN de estos flujos se escribe de la siguiente forma:

$$VPN = S_0 + \frac{S_1}{1+r} + \frac{S_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{S_n}{(1+r)^n}. \quad (4.5)$$

$$VPN = \sum_{k=0}^n \frac{S_k}{(1+r)^k}. \quad (4.6)$$

Si S_0, S_1, \dots, S_n son los flujos de ingreso futuros asociados a una inversión I_0 , entonces el VPN está dado por:

$$VPN = \sum_{k=0}^n \frac{S_k}{(1+r)^k} - I_0. \quad (4.7)$$

Si el VPN es positivo, entonces el flujo de ingresos es mayor que el flujo de gastos.

Modelo del valor presente en tiempo continuo

Si S_0 crece de acuerdo con la fórmula $S_t = S_0 e^{rt}$, es decir, se lleva S_0 a valor futuro, entonces el valor presente de S_t será igual a:

$$S_0 = \frac{S_t}{e^{rt}} = S_t e^{-rt}.$$

En el caso de flujos de ingresos continuos, el valor presente total será:

$$VPT = \int_0^t S(k) e^{-r(k)} dk. \quad (4.8)$$

Aquí el exponente negativo en la función exponencial indica descontar el flujo futuro a su valor actual.

Modelo del valor presente neto generalizado

Supóngase ahora que la tasa de interés r es aleatoria, entonces la esperanza del valor presente neto es :

$$E(VPN) = E\left(\int_0^t S(k) e^{-r(k)} dk\right). \quad (4.9)$$

En los casos en que la tasa de interés es aleatoria, comúnmente se utilizan modelos macroeconómicos de la tasa de interés de Vasicek o Cox, Ingersoll y Ross (CIR), en este caso se aplicará el segundo por ser una generalización del modelo de Vasicek [61].

Suponga que $r(t) = r_t$ es una función aleatoria del tiempo t , la cual corresponde al factor macroeconómico. Si r puede cambiar en todo instante del tiempo, r_t es también llamada la tasa instantánea de interés. El modelo de CIR está dado por la ecuación diferencial estocástica:

$$r_t = r_0 + c \int_0^t (\mu - r_s) ds + \sigma \int_0^t r_s^\beta dW_s, \quad t \in [0, T], \quad (4.10)$$

o en su representación diferencial:

$$dr_t = c(\mu - r_t)dt + r_t^\beta \sigma dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (4.11)$$

donde c , μ y σ son constantes positivas, el exponente β contribuye a la determinación de las propiedades distribucionales de la tasa de corto plazo. En particular, $\beta = 0$ implica tasas “normales” (Vasicek), $\beta = 1/2$ da el modelo CIR y $\beta = 1$ implica

tasas “log-normales” [60].

Entonces el modelo del valor presente neto generalizado (VPNG) está dado por:

$$\begin{aligned} E(VPNG) &= E\left(\int_0^t S(\tau)e^{-r\tau} d\tau\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^t S(\tau)e^{-r\tau} Q(r_\tau) d\tau dr, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $Q(r_t)$ corresponde a la función de densidad obtenida a partir de la ecuación diferencial estocástica (4.11).

La correspondiente ecuación de Kolmogorov hacia atrás para $Q(r_t)$ es

$$\frac{\partial Q(r_t)}{\partial t} = -c(\mu - r_t) \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^\beta \frac{\partial^2 Q(r_t)}{\partial r_t^2}. \quad (4.13)$$

Análogamente, la ecuación de Fokker-Planck (Kolmogorov hacia adelante) es:

$$\frac{\partial Q(r_t)}{\partial t} + \frac{\partial [c(\mu - r_t)Q(r_t)]}{\partial r_t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2 r_t^\beta Q(r_t)]}{\partial r_t^2}. \quad (4.14)$$

Haciendo los cálculos correspondientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial [c(\mu - r_t)Q(r_t)]}{\partial r} &= -cQ(r_t) + c(\mu - r_t) \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r} \\ \frac{\partial [\sigma r_t^\beta Q(r_t)]}{\partial r_t} &= \sigma \beta r_t^{\beta-1} Q(r_t) + \sigma r_t^\beta \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} \\ \frac{\partial^2 [\sigma^2 r_t^\beta Q(r_t)]}{\partial r_t^2} &= \sigma \beta (\beta - 1) r_t^{\beta-2} Q(r_t) + 2\sigma \beta r_t^{\beta-1} \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} + \sigma r_t^\beta \frac{\partial^2 Q(r_t)}{\partial r_t^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las parciales correspondientes en (4.14), se obtiene

$$\frac{\partial Q(r_t)}{\partial t} + f(r_t) \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} - h(r_t) Q(r_t) = g(r_t) \frac{\partial^2 Q(r_t)}{\partial r_t^2}, \quad (4.15)$$

con

$$\begin{aligned} f(r_t) &= c(\mu - r_t) - \sigma \beta r_t^{\beta-1} \\ g(r_t) &= \frac{1}{2} \sigma r_t^\beta \\ h(r_t) &= c + \frac{1}{2} \sigma \beta (\beta - 1) r_t^{\beta-2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por lo tanto, se puede concluir que se obtiene un modelo más general para calcular el valor presente neto. Tal vez resulte un poco más complicado resolver las ecuaciones de Kolmogorov³, pero también es cierto que los resultados pueden resultar mejores al considerar efectos externos que antes no se podían.

A continuación se presenta la aplicación de esta misma metodología, pero ahora aplicada a modelos de riesgo de crédito.

4.3. Modelos de riesgo de crédito

Al igual que los modelos de derivados financieros, los modelos clásicos de riesgo de crédito utilizan como base la aproximación desarrollada por Merton, lo cual también los hace poco realistas, pues no consideran el efecto que el ambiente económico ejerce sobre ellos.

Los modelos modernos utilizados, tales como KMV's Portfolio Manager, JP Morgan's Credit Metrics y CreditRisk calculan las probabilidades de incumplimiento, pero sin considerar directamente los efectos de las variables macroeconómicas. El modelo de McKinsey's CreditPortfolio View considera la distribución de pérdida condicionada con el estado de la economía para cada país. La desventaja de este tipo de modelos es que todos proporcionan calificaciones crediticias basándose en datos históricos de diferentes países, lo cual hace a dichas calificaciones poco realistas para países como México, ya que en muchas ocasiones las probabilidades de incumplimiento pueden no reflejar lo que está sucediendo en la economía.

En base a lo anterior lo que se hará es proporcionar un modelo de riesgo de crédito que utiliza la metodología que se dió en la sección anterior, es decir, se basa en aplicar directamente los factores macroeconómicos a las probabilidades de incumplimiento o calificaciones crediticias, por medio de las ecuaciones de Kolmogorov.

En la primera subsección se da una revisión histórica de los diversos modelos de riesgo de crédito que existen, así como de los conceptos básicos de riesgo de crédito.

En la segunda subsección se proporciona otra de las contribuciones importantes de la tesis, que es un modelo de riesgo de crédito, el cual considera el efecto de los factores macroeconómicos.

4.3.1. Revisión histórica

Para entender un poco más a que nos referimos con modelos de riesgo de crédito es importante mencionar algunas definiciones, antes de dar los modelos históricos.

³En la mayoría de los casos no existen soluciones explícitas, pero siempre es posible aproximar dichas soluciones mediante algún método numérico.

Definición 5 (Riesgo de Crédito) . Puede definirse como la posibilidad de que la parte contractual (o deudor) no conoce el estado de sus obligaciones en el contrato, por medio de eso causa al acreedor una pérdida financiera. En esta definición general, es irrelevante si la contraparte es incapaz de conocer sus obligaciones contractuales debido al apuro financiero o el no estar dispuesto a cumplir el contrato.

Para poder estimar el riesgo de crédito de una simple contraparte, la institución debe considerar tres puntos:

- i) Probabilidad de incumplimiento. No es más que la verosimilitud de que la contraparte incumplirá de sus obligaciones, ya sea sobre la vida de la obligación o sobre algún horizonte de tiempo especificado. También es llamada la *frecuencia de incumplimiento esperada*.
- ii) Crédito expuesto. En el evento de incumplimiento, se desea saber en cuanto tiempo la obligación no será pagada o cobrada cuando el incumplimiento ocurre.
- iii) Tasa de recuperación. En el evento de incumplimiento, se desea saber que fracción de la exposición puede ser recuperada a través del procedimiento de bancarrota o alguna otra forma de arreglo.

Para definiciones complementarias se puede ver el Apéndice G.

Ya teniendo los elementos necesarios, se mencionarán los modelos de riesgo de crédito históricos más importantes.

Estimación de Riesgo de Crédito en Bonos

Para estimar el riesgo de crédito en bonos se usan los siguientes métodos o modelos:

- a) *Métodos tradicionales*. Este tipo de métodos se basan en el concepto de estimar el riesgo de crédito acumulando datos de incumplimiento históricos e infiriendo el crédito spread de estos datos. Los bonos riesgosos son entonces estimados tales que el inversionista es compensado por la pérdida esperada en el bono, basada en estimaciones de datos históricos.

Entre los principales estudiosos de estos modelos se mencionan a: Altman(1989), Litterman e Iben(1991), Fons(1994) y Hurley y Johnson(1996).

- b) *Modelos Estructurales*. Este tipo de modelos a su vez se clasifican en:

b.1) *Modelos del valor de la firma.* Estos modelos usan la aproximación desarrollada por Merton(1974), en la cual el riesgo es considerado como una opción de venta (*put*) en el valor de las acciones de la firma. Los modelos del valor de la firma derivan el precio del riesgo de incumplimiento modelando el valor de las acciones de la firma relativas a sus deudas.

b.1.1) *Extensiones y aplicaciones del modelo de Merton.* Las extensiones incluyen adaptaciones a diferentes tipos de activos tales como bonos con cupón, bono reclamable, hipotecas, bonos convertibles, bonos de tasa variable, etc. Otras extensiones tratan la valuación de las reclamaciones con diferentes fechas de maduración, clases de maduración o provisiones especiales para ligar contratos.

Entre sus principales estudiosos se tienen a: Geske(1977); Cox, Ingersoll y Ross(1980); Ho y Singer(1982); Jamshidian(1989); Chance(1990); Shimko, Tejima y Deventer(1993) y Claessens y Pennacchi(1996).

b.1.2) *Costos de bancarrota e incumplimiento endógeno.* El apuro financiero está acompañado por costos. Tales costos reflejan la situación de la firma y pueden conducirla a su bancarrota. Dichos costos son llamados costos de bancarrota en precios de acciones.

Dentro de sus representantes se tienen a: Jensen y Meckling(1976); Myers(1977); Frank y Tourus (1989,1994); Eberhart, Moore y Roenfeldt(1990); Weiss(1990); Leland(1994a,1994b); Anderson y Sundaresan(1996); Lenand y Toft(1996) y Mella-Barral y Perraudin(1997).

b.2) *Modelos de primer tiempo de paso.* Estos modelos usan el concepto del valor de la firma, pero este valor es usado para determinar el tiempo de incumplimiento. La tasa de recuperación generalmente no está basada en el valor de la firma.

Este tipo de modelos intentan resolver el problema de bancarrota prematura. El modelo de Merton(1974) no permite la bancarrota antes de la maduración del bono. Los modelos de primer tiempo de paso suponen que la bancarrota ocurre si el valor de la firma cruza una frontera específica y generalmente dependiente del tiempo. Estos modelos permiten la bancarrota prematura. En otro caso, modelar la tasa de recuperación llega a ser más difícil. Si la firma supone ir a la bancarrota cuando el valor de la firma cruza por primera vez la frontera y ésta es una función determinista del tiempo, entonces la tasa de recuperación es por sí misma también una función determinista del tiempo. Algunos autores evitan este problema suponiendo a la tasa de recuperación como exógenamente

dada, la cuál es independiente del valor de la firma.

Los principales autores de este tipo de modelos son: Black y Cox(1976); Brennan y Schwartz(1980); Mason y Bhattacharya(1981); Weiss(1990); Franks y Torus(1989,1994); Eberhart, Moore y Ruenfeldt(1990); Kim, Ramaswamy y Sundaresan(1993); Nielsen, Saà-Requejo y Sta. Clara(1993); Briys y de Varenne(1997) y Zhou(1997).

- c) *Modelos de Intensidad.* Consideran una aproximación completamente diferente del modelo basado en el valor de la firma. El incumplimiento o la bancarrota son modelados por un proceso de bancarrota. El proceso de incumplimiento es usualmente definido como un proceso de un salto, el cual puede saltar de no-incumplimiento a incumplimiento. La probabilidad de un salto, en un intervalo de tiempo dado, es determinada por la intensidad del incumplimiento, denotada por λ . Si los modelos del proceso de incumplimiento sólo incumplen en el tiempo y no en la severidad de la pérdida, en el caso del incumplimiento, la tasa de recuperación en la mayoría de los casos se supone exógena.

Entre sus principales exponentes se tienen a: Lando(1994); Jarrow y Turnbull(1995); Duffie y Singleton(1995,1997); Madan y Unal(1996); Duffie, Schroder y Skiadas(1996) y Jarrow, Lando y Turnbull(1997).

Principales métodos utilizados para estimar calificaciones de crédito

Muchos bancos, administradores de inversiones y compañías aseguradoras emplean a sus propios analistas, quienes preparan calificaciones de crédito para su uso interno. Otras firmas, tales como Standar & Poor's, Moody's y Fitch, están en el negocio de desarrollar calificaciones de crédito para uso de inversionistas o terceras partes. Instituciones que han publicamente negociado deuda ajustando una o más de ellas preparando calificaciones de crédito para sus deudas. Estas calificaciones de crédito son distribuidas por pequeños cambios para inversionistas. En los Estados Unidos, la Asociación Nacional de Comisiones de Seguros, publican calificaciones de crédito que son usados para calcular cargos de capital para portafolios de bonos para compañías de seguros.

En el cuadro 4.2 se muestra un ejemplo de un sistema de calificaciones de crédito empleada por Standar & Poor's. Otros sistemas son similares.

Ahora se darán de manera muy resumida las metodologías más importantes para calcular las calificaciones de crédito.

Cuadro 4.2: Calificaciones de crédito de Standar & Poor's

Bueno	AAA	La mejor calidad de crédito- Extremadamente solvente con respecto a obligaciones financieras.
	AA	Muy buena calidad de crédito- Muy solvente.
	A	Más susceptible a condiciones económicas- Buena calidad de crédito.
Precaución	BBB	La más baja calificación en grado de inversión.
	BB	Precaución es necesaria- Mejor sub-inversión en calidad de crédito.
	B	Vulnerable a cambios en condiciones económicas- Actualmente muestra la habilidad de conocer sus obligaciones financieras.
Incumplimiento	CCC	Actualmente vulnerable a no pago- Dependiente a condiciones económicas favorables.
	CC	Altamente vulnerable a un pago incumplido
	C	Cercano o en bancarrota- Pago en la obligación actualmente continuada.
100 % Incumplimiento	D	Pago incumplido en alguna obligación financiera ha ocurrido.
<p>Este es el sistema de calificaciones de crédito de Standar & Poor's aplicado a bonos. Las calificaciones pueden ser modificadas con los signos + o -, así AA- es una calificación más alta que A+. Con cada modificación, BBB- es la más baja inversión en el grado de calificación. Otros sistemas de calificaciones de crédito son similares. Recurso: Standar & Poor's.</p>		

De acuerdo a Ken Phelan y Colin Alexander, el riesgo de crédito es mas difícil de modelar que el riesgo de mercado por diversas razones:

- i) La falta de liquidez en el mercado hace difícil o imposible estimar riesgo de crédito para una obligación específica.
- ii) Las probabilidades de incumplimiento reales en el mercado no pueden ser observadas. Los usuarios no deben determinar estas probabilidades, infringiendo tasas de incumplimiento basadas en la experiencia histórica observada de las calificaciones de crédito públicas, sino usando un modelo tal como el Monitor de crédito KMV's o determinando las tasas de incumplimiento a través de un proceso aprobando el crédito subjetivo.
- iii) Las correlaciones del incumplimiento son difíciles de observar o medir, haciéndolo complicado de agregar al riesgo de crédito.
- iv) Para calcular la reserva de capital/liquidez, es necesario estimar las colas de las probabilidades de riesgo de asimetría, así como las colas pesadas de la distribución de pérdida.

Diversos modelos han sido desarrollados para superar estos obstáculos. A continuación se mencionan dichos modelos:

- *KMV's Portfolio Manager*. Fue presentado en 1993, dicho modelo utiliza una opción-base, usa la aproximación del modelo de Merton para medir las probabilidades de incumplimiento. El KMV's de su propia base de datos crea sus

probabilidades de incumplimiento de distribuciones empíricas, la cual ahora cubre más de 25,000 compañías mundiales.

Este sistema utiliza las medidas de un VAR para optimizar un portafolio de activos de crédito y calcular las proporciones de activos individuales. Esto permite el óptimo de comprar/vender/mantener niveles para negociar u originar oportunidades para determinar y optimizar portafolios, que son calculados re-arreglando los pesos de posiciones ya existentes. El modelo también produce estimaciones de marca-al-modelo para activos de crédito, niveles de capital indicativos y contribuciones de riesgo marginal. Usando una u otra aproximación o simulación de Monte Carlo, el modelo también calcula la distribución de pérdida del portafolio de crédito en una fecha dada en el horizonte e indica el monto del capital económico requerido para soportar diferentes niveles de riesgo.

- JP Morgan's CreditMetrics. Fue presentado en 1997 para medir un VAR en un portafolio de crédito. La estructura de esta metodología da simulaciones de Monte Carlo para crear una distribución de pérdida del portafolio en una fecha en el horizonte. Cada deudor es asignado a una calificación de crédito y se usa una matriz de transición para determinar las probabilidades de las calificaciones de crédito del deudor que serán mejoradas, empeoradas o lo llevarán al incumplimiento. Así el incumplimiento representa el valor extremo de deterioro. Un instrumento de crédito puede también declinar su valor cuando el deudor empeora su calificación.

CreditMetrics calcula el valor del portafolio por simulaciones aleatorias de la calidad de crédito de cada deudor. Los instrumentos de crédito son entonces reestimados bajo cada resultado simulado y el valor del portafolio es simplemente la suma o unión de estas estimaciones. La estructura del portafolio del modelo incorpora beneficios de diversificación los cuales reducen el riesgo agregado de transacciones únicas. Movimientos de crédito correlacionados de los deudores (tales como bajas severas ocurriendo juntas) son direccionadas y concentraciones geográficas o industriales en el portafolio resultarán en incrementos del capital requerido.

- *CreditRisk+*. Este modelo fue introducido por "Credit Suisse Financial Products (CSFP)". Es una estructura para calcular analíticamente la distribución de pérdida del portafolio. La metodología de CreditRisk+ está basada en modelos matemáticos usados en la industria de seguros. En lugar de considerar niveles absolutos de riesgo de incumplimiento, los modelos de CreditRisk+ consideran a las tasas de incumplimiento como variables aleatorias continuas. Dichos modelos observan las tasas de incumplimiento para las calificaciones de crédito que varían en el tiempo y la incertidumbre en estas tasas es cap-

turada por las tasas de incumplimiento estimando la volatilidad (desviaciones estándar). La correlación de incumplimiento es generalmente causada por factores externos que son difíciles de observar y son inestables en el tiempo. En lugar de tratar de modelar estas correlaciones directamente, CreditRisk+ usa las volatilidades de las tasas de incumplimiento para capturar el efecto de las correlaciones de incumplimiento, las cuales producen una cola larga en la distribución de pérdida del portafolio. CreditRisk+ puede manejar miles de exposiciones y usa la aproximación del portafolio, el cual reduce el riesgo para la diversificación. Las exposiciones pueden ser asignadas por sectores geográficos o industriales y diferentes tiempos en el horizonte de exposición pueden ser incorporados. Los datos mínimos requeridos hacen al modelo fácil de implementar y el cálculo analítico de la distribución de pérdida del portafolio es muy rápido.

- *CreditPortfolioView*. Fue creado en 1998 por McKinsey's. Tom Wilson, anteriormente a McKinsey, desarrolla un modelo de portafolio de crédito, el cual toma en cuenta ambientes macroeconómicos actuales. Lo cual es mejor que usar los valores medios de tasas de incumplimiento históricas calculadas de décadas de datos. CreditPortfolioView usa probabilidades condicionales de incumplimiento en el estado actual de la economía. Así un deudor estimado como triple B tendría más alta probabilidad de incumplimiento en una recesión que en una explosión económica. La tabulación de la distribución de pérdida del portafolio es condicionada por el estado actual de la economía para cada país y segmento de la industria.
- *Cópulas*. Como en los modelos anteriores, este tipo de modelos consisten de una colección de probabilidades de incumplimiento (y migración) para firmas individuales y una cópula que describe la dependencia de cierta variable crítica. Se considera que se tienen modelos de riesgo de crédito sólo en incumplimiento y se supone que las probabilidades de incumplimiento individuales han sido satisfactoriamente determinadas. Es mucho más difícil determinar la cópula describiendo la dependencia de incumplimiento y se ve al modelo de riesgo de crédito asociado con una especificación de esta componente del modelo.

La mayoría de los modelos usados en la industria usan la cópula de Gauss, en donde los estudiosos de estos modelos están interesados en la sensibilidad de la distribución del número de incumplimientos M con respecto a la suposición de la dependencia Gaussiana, y con esta idea se puede subestimar la probabilidad conjunta de grandes movimientos de los factores de riesgo.

Matrices de transición

Las matrices de transición empezaron a utilizarse como herramienta para medir el riesgo de crédito en 1997, con la aparición de CreditMetrics de JP Morgan. Desde

entonces, se han convertido en uno de los modelos más utilizados debido a su fácil implementación.

Diferentes grupos como RiskMetrics Group's CreditMetricsTM3 y McKinsey's CreditPortfolioViewTM usan matrices de transición para medir, valorar y clasificar sus riesgos de crédito. Ellos se basan en las hipótesis de que el movimiento de las calificaciones de créditos de diferentes activos en un portafolio sobre el tiempo es indicativo en el desempeño de un portafolio futuro y que las calificaciones de crédito al tiempo presente son suficientes para predecir las calificaciones futuras sin importar los datos futuros. CreditPortafolioView toma este concepto un paso más allá, permitiendo el uso de las probabilidades de transición para diferentes estados de la economía.

Se define la probabilidad de transición p_{ij} como la posibilidad de que un emisor de un bono o un prestatario de un crédito con calificación crediticia i pueda migrar o moverse a otra calificación crediticia j en un horizonte de tiempo dado.

Entonces si se desea construir la matriz de transición P con i filas y j columnas, de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. Todos los elementos de la matriz son no negativos, es decir, $p_{ij} \geq 0$.
2. La suma de los elementos de cada fila es igual a la unidad, es decir, $\sum_j p_{ij} = 1$ para todo i .

Si P es una matriz anual, entonces las entradas de ésta, p_{ij} , representan la fracción de créditos con calificación i que después de un año tienen calificación j .

categoría inicial	Categoría después de un año				
	1	2	3	...	i (Incump.)
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	...	p_{1j}
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	...	p_{2j}
3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	...	p_{3j}
...					
$i - 1$	$p_{(i-1)1}$	$p_{(i-1)2}$	$p_{(i-1)3}$...	$p_{(i-1)j}$
i (Incump.)	0	0	0	...	1

Procesos de Markov en tiempo homogéneo

Una aproximación común para predecir las calificaciones de crédito futuras es suponer que los movimientos de dichas calificaciones siguen un proceso de Markov en tiempo homogéneo. Como se mencionó con anterioridad, un proceso de calificaciones de transición es considerado un proceso de Markov a tiempo discreto, si la calificación crediticia presente es suficiente para predecir el futuro de dicha calificación

de crédito, es decir, el pasado es irrelevante. La suposición de la homogeneidad del tiempo implica que las probabilidades de transición no cambian con el tiempo y son constantes sobre el horizonte de tiempo considerado. La propiedad de la homogeneidad del tiempo implica que si P es una matriz de transición para un año, entonces P^2 es una matriz de transición para dos años. Este procedimiento puede ser extendido hasta obtener P^k , la matriz de transición a k años.

Más específicamente, sea S el espacio de estados tal que $S = S_1, S_2, \dots, S_N, D$. Los primeros N estados representan una medida del riesgo relativa de la exposición de un banco en particular. En el caso de un portafolio corporativo cada valor de S puede ser representado por las calificaciones asignadas internamente por un prestamista o externamente por una agencia de calificaciones. En el caso de un portafolio detallado, el estado puede ser definido o clasificado por medio de rangos correspondientes a un nivel de desempeño específico. El estado D corresponde al estado absorbente que representa el incumplimiento. Un estado absorbente existe si, una vez alcanzado este estado, no existen más cambios, es decir, ya no se puede salir de ese estado.

Consideréese el proceso de transición de las calificaciones. éste es un proceso estocástico que toma valores en el espacio S . Se supone que el proceso de las calificaciones de crédito es un proceso de Markov. Esto significa que si se define a p_{ij} como la probabilidad de que un proceso de calificaciones que está en el estado S_i al tiempo t , estará en el estado S_j al tiempo $t + 1$, p_{ij} depende sólo en el estado actual del proceso. Esto significa que la trayectoria seguida por el proceso al instante $t - 1$ no es relevante en determinar la probabilidad de transición al tiempo t .

Dado un espacio de estados S , una matriz P de $(N + 1) \times (N + 1)$ puede ser definida como:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} & p_{1D} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} & p_{2D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} & p_{ND} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de transición P es llamada la matriz de probabilidades de transición de un paso. Si cada elemento p_{ij} de la matriz representa una probabilidad, lo siguiente debe ser cierto:

- i) $\forall (i, j) \in (S - D) \times S, p_{ij} \geq 0$.
- ii) $\forall (i, j) \in S^2, p_{ij} \leq 1$.
- iii) $\forall i \in S, \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$.

Basándose en esta información, se puede determinar la probabilidad de que un proceso de calificaciones de crédito en el estado S_i al tiempo n estará en el estado S_j al tiempo $n + m$ usando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$\forall (i, j) \in S^2 \wedge (n, m) \in N^2, \quad p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \quad \Rightarrow \quad P^{n+m} = P^n P^m,$$

donde $p_{ij}^{(n)}$ representa la probabilidad de moverse del estado i al estado j en n pasos.

Es importante mencionar que cuando se describe el proceso de calificaciones como un proceso de Markov en tiempo homogéneo puede tener ventajas analíticas, pero esto puede no ser consistente con la realidad. La información necesaria para estimar probabilidades de transición no está totalmente resumida en los estados de las calificaciones. En otras palabras, las calificaciones actuales no son siempre suficientes para predecir las calificaciones futuras.

La observación de un proceso de calificaciones de crédito muestra que:

- En tiempos de “crisis de crédito”, los valores de las calificaciones de crédito tienden a moverse hacia la peor categoría de las calificaciones. Esto es claramente reflejado en el incremento de las tasas de incumplimiento.

De \ a	S_1	S_2	...	S_N	D
S_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1N}	p_{1D}
S_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2N}	p_{2D}
...	...	\Rightarrow	\Rightarrow	\Rightarrow	...
S_N	p_{N1}	p_{N2}	...	p_{NN}	p_{ND}
D	0	0	...	0	1

Las flechas indican que las calificaciones de crédito se mueven hacia un peor estado del que se encontraban en un tiempo anterior.

- En tiempos de “prosperidad de crédito”, el proceso de calificaciones de crédito tiende a moverse hacia la mejor categoría de las calificaciones. Esto puede ser observado por el aumento general en la salud de los portafolios.

De \ a	S_1	S_2	...	S_N	D
S_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1N}	p_{1D}
S_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2N}	p_{2D}
...	...	\Leftarrow	\Leftarrow	\Leftarrow	...
S_N	p_{N1}	p_{N2}	...	p_{NN}	p_{ND}
D	0	0	...	0	1

Las flechas indican que las calificaciones crediticias se mueven hacia un mejor estado del que se encontraban en un tiempo anterior.

Este tipo de modelos para el proceso de calificaciones de crédito, se ajusta más al mundo real. Este tiene la flexibilidad de incorporar las condiciones generales de la economía u otros factores que han sido ignorados dentro de las metodologías pero que pueden tener un efecto en la probabilidad de una transición de las calificaciones.

Procesos de Markov Dependientes del Tiempo

La dependencia de una matriz de transición del tiempo puede ser matemáticamente formulada de la siguiente manera.

Sean $P(t)$, A y B matrices de transición de $(N + 1) \times (N + 1)$ al tiempo t y $r(t)$ es el factor de riesgo resumiendo el estado de la economía.

Si una serie de tiempo del proceso de calificaciones de crédito, así como la clasificación de crédito o el desempeño observado, existe o puede ser construido, los elementos de las matrices A y B pueden ser estimados usando los errores mínimos cuadrados. Entonces se pueden mostrar las siguientes propiedades:

- i) $\forall (i, j) \in (S - D)^2, \alpha_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n p(t)_{ij}}{n}$.
- ii) $\forall (i, j) \in (S - D)^2, \beta_{ij} = \frac{n \sum_{t=1}^n (p(t)_{ij} r(t)) - (\sum_{t=1}^n p(t)_{ij})(\sum_{t=1}^n r(t))}{n \sum_{t=1}^n (r(t))^2 - (\sum_{t=1}^n r(t))^2}$.
- iii) $\forall i \in (S - D), \alpha_{iD} = 1 - \sum_{j \in (S-D)} \alpha_{ij}$.
- iv) $\forall i \in (S - D), \beta_{iD} = - \sum_{j \in (S-D)} \beta_{ij}$.
- v) $\forall i \in (S - D), \alpha_{Di} = 0$.
- vi) $\alpha_{DD} = 1$.
- vii) $\forall i \in S, \beta_{Di} = 0$.

α_{ij} y β_{ij} son los ij -ésimos elementos de las matrices A y B respectivamente.

Ya teniendo todos los elementos necesarios para el análisis de riesgo de crédito, se procede a mostrar un nuevo modelo de riesgo de crédito, en el cual se incorporan sistemáticamente el efecto de los factores macroeconómicos.

4.3.2. Nuevas metodologías

En esta subsección se propone un modelo para calcular riesgo de crédito, incorporando el efecto de factores macroeconómicos. Mediante dicho modelo se pueden construir las matrices de transición, las cuales son esenciales en el caso donde se quiere medir probabilidades de incumplimiento .

Modelo dinámico de riesgo de crédito

El objetivo fundamental, como en el resto de este trabajo, es el de poder incorporar de manera sistemática el efecto de los factores macroeconómicos en las metodologías de valuación. En este caso muy particular al riesgo de crédito. Para ello, se supone que existe una variable financiera que describe el estado del acreditado y que se denota por $X(t)$, dicha variable puede ser un vector. La dinámica de esta variable está dada en términos de una ecuación diferencial estocástica, que como ya se ha justificado, puede incorporar una descripción macroeconómica más o menos detallada, dependiendo de la información disponible, el tipo de crédito etc. Se supone, a su vez, que la parte determinista de esta EDE está dada como un flujo gradiente, más precisamente

$$dX = G(X)dt + \epsilon(X, t)dW,$$

siendo $G(X) = -\nabla g^4$.

De esta forma, las calificaciones crediticias pueden identificarse con los mínimos locales o “pozos” determinados por la función potencial g (dicha función se describe más adelante, ver figura 4.1), de tal manera que la empresa permanece en cierta calificación en tanto no salga del pozo correspondiente. El elemento asociado de una matriz de transición tradicional es entonces la probabilidad de pasar de un pozo a otro y se puede calcular una vez que se resuelva la ecuación diferencial parcial de tipo Fokker-Planck para la densidad de probabilidad de transición, la cual está dada

⁴Si g es una función que depende de k variables, $g(x_1, x_2, \dots, x_k)$, entonces

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_k} \right). \quad (4.17)$$

La divergencia del gradiente de g está dada por

$$\text{div}(\nabla g) = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Y el laplaciano se representa por

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\nabla g) + \epsilon \Delta \rho. \quad (4.18)$$

De esta forma, se recupera el marco tradicional de matrices de transición. Al caso de incumplimiento, se le asocia el entrar en un pozo del cual no es posible salir, es decir, en este caso la función G tendrá un punto de equilibrio estable y la intensidad del ruido $\epsilon(X)$ se anulará en una vecindad de dicho punto. En términos de matrices de transición, se puede identificar al pozo de incumplimiento con el estado absorbente.

Sin embargo, este enfoque permite además el identificar diferentes tipos de riesgo. Existe al menos un tipo de riesgo que se podría llamar estructural y que tiene su origen en la parte determinista del modelo. En este caso, correspondería a un pozo con “paredes” más bajas y del que, por lo tanto, es más fácil escapar. Por otra parte, existe también otro tipo de riesgo de carácter aleatorio y que se identifica únicamente con la intensidad del ruido en la EDE.

Este enfoque permite trabajar con modelos multifactores de manera directa, pues si bien la EDE puede, y en general, se trata de un sistema, el resultado final es el de una sola ecuación diferencial parcial para la densidad de probabilidad de transición. Se ilustran estas ideas con un ejemplo muy concreto, mismo que se resuelve numéricamente.

Como sucede con otros modelos de riesgo de crédito e incumplimiento, la mayor dificultad de su aplicabilidad radica en la posible calibración de parámetros y la selección de variables relevantes.

En este caso, esta dificultad se presenta al momento de describir el comportamiento del acreditado en términos de los factores macroeconómicos relevantes. Sin embargo, a diferencia de la forma usual en la que se implementan las matrices de transición, una vez calibrado el modelo económico, las probabilidades de transición se calculan de manera directa y son una consecuencia del planteamiento. Este hecho se verá más claramente con el siguiente ejemplo.

Considérese la figura 4.1 de la función potencial g .

En este caso dicha función potencial g , tal como se muestra en la figura 4.1, tiene dos factores (x y y) y cuatro mínimos locales o atractores (corresponden a los pozos) M_1, M_2, M_3 y M_4 , todos ellos a la misma altura, es decir, tales que $g(M_i) = 0$ para $i = 1, \dots, 4$, con $M_i = (x_i, y_i)$ para $i = 1, \dots, 4$. En forma explícita la función g se escribe de la siguiente forma.

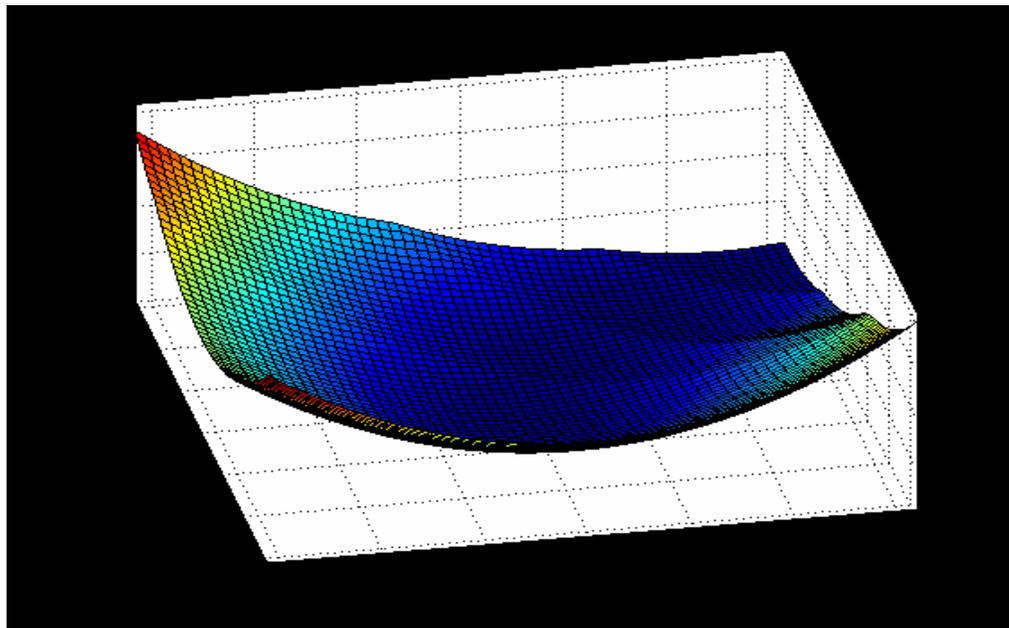
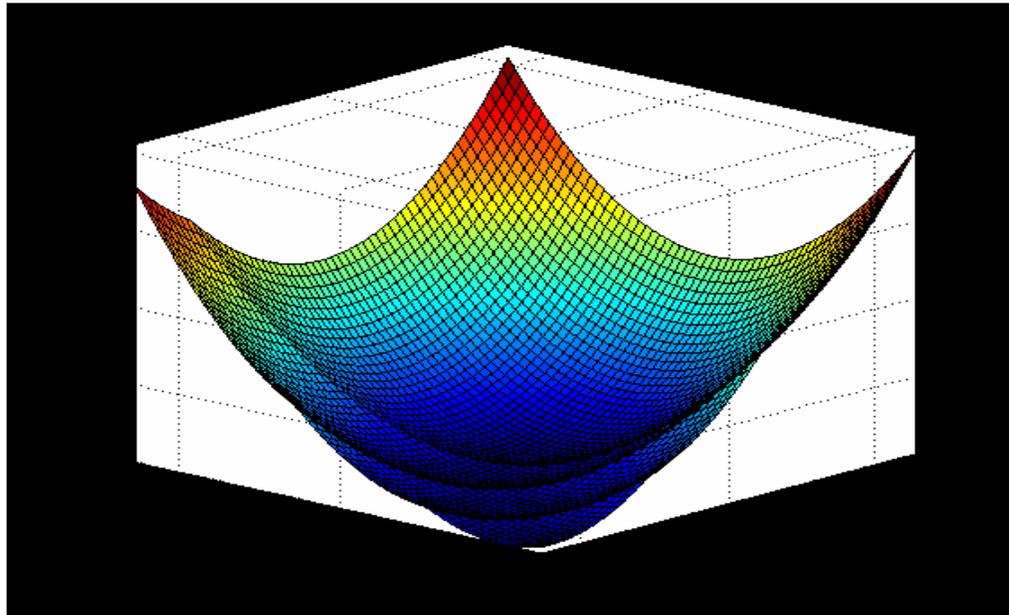


Figura 4.1: Función potencial $g(x, y)$

Sea $K_i = A_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$, para $i = 1, \dots, 4$, donde A_i corresponden a escalares que hacen los pozos más o menos profundo para generar a la función g , se toma el mínimo de la siguiente forma

$$g(x, y) = \min \langle K_1, K_2, K_3, K_4 \rangle. \quad (4.19)$$

En la figura (4.1), la $K_1 = x^2 + y^2$, $K_2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$, $K_3 = (x-3)^2 + (y-4)^2$ y $K_4 = (x-5)^2 + (y-6)^2$.

Al resolver explícitamente la ecuación de Fokker-Planck (4.18) se encuentra la ρ correspondiente, que se escribirá en su forma completa como $\rho(M_i, M_j, t)$, que no es más que la probabilidad de ir del estado o pozo i al estado o pozo j al tiempo t .

La matriz de transición se expresa de la siguiente forma:

De \ a	S_1	S_2	S_3	S_4	D
S_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{1D}
S_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{2D}
S_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{3D}
S_4	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}	p_{4D}
D	0	0	0	0	1

Entonces para calcular explícitamente la matriz de transición se hace el análisis siguiente.

Sea

$$P_{ij} = \int_{c_i} \int_{c_j} \rho(M_i, M_j, t) dM_i dM_j, \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (4.20)$$

en donde c_i es la cuenca de atracción efectiva (ver el caso concreto presentado más adelante para los detalles de como establecer dicha cuenca). Cada elemento de la matriz de transición esta entonces dado por

$$p_{ij} = \frac{P_{ij}}{\sum_{j=1}^n P_{ij}}, \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

Nótese que este planteamiento ignora lo que sucede fuera de las cuencas efectivas. Esto de hecho puede probarse de manera rigurosa, es decir, el tiempo que permanece el sistema fuera de estas regiones es despreciable. A continuación por completez y para ver la efectividad del modelo, se muestran simulaciones preliminares. El detalle del análisis se deja como trabajo posterior a esta tesis. En las figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se muestra la evolución de ρ , la solución de la ecuación de Fokker-Planck tal

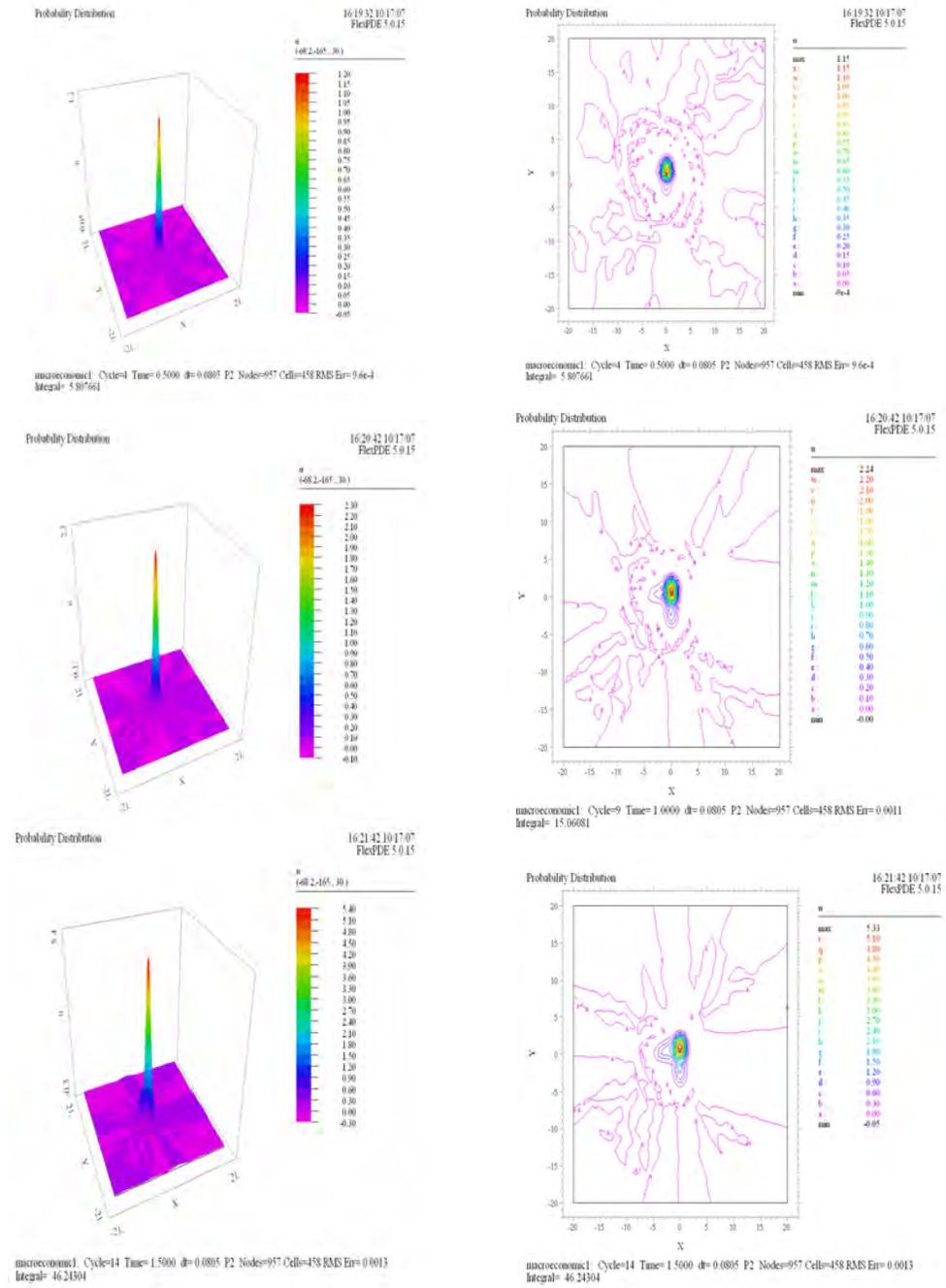


Figura 4.2: Solución de la ecuación de F-P 1

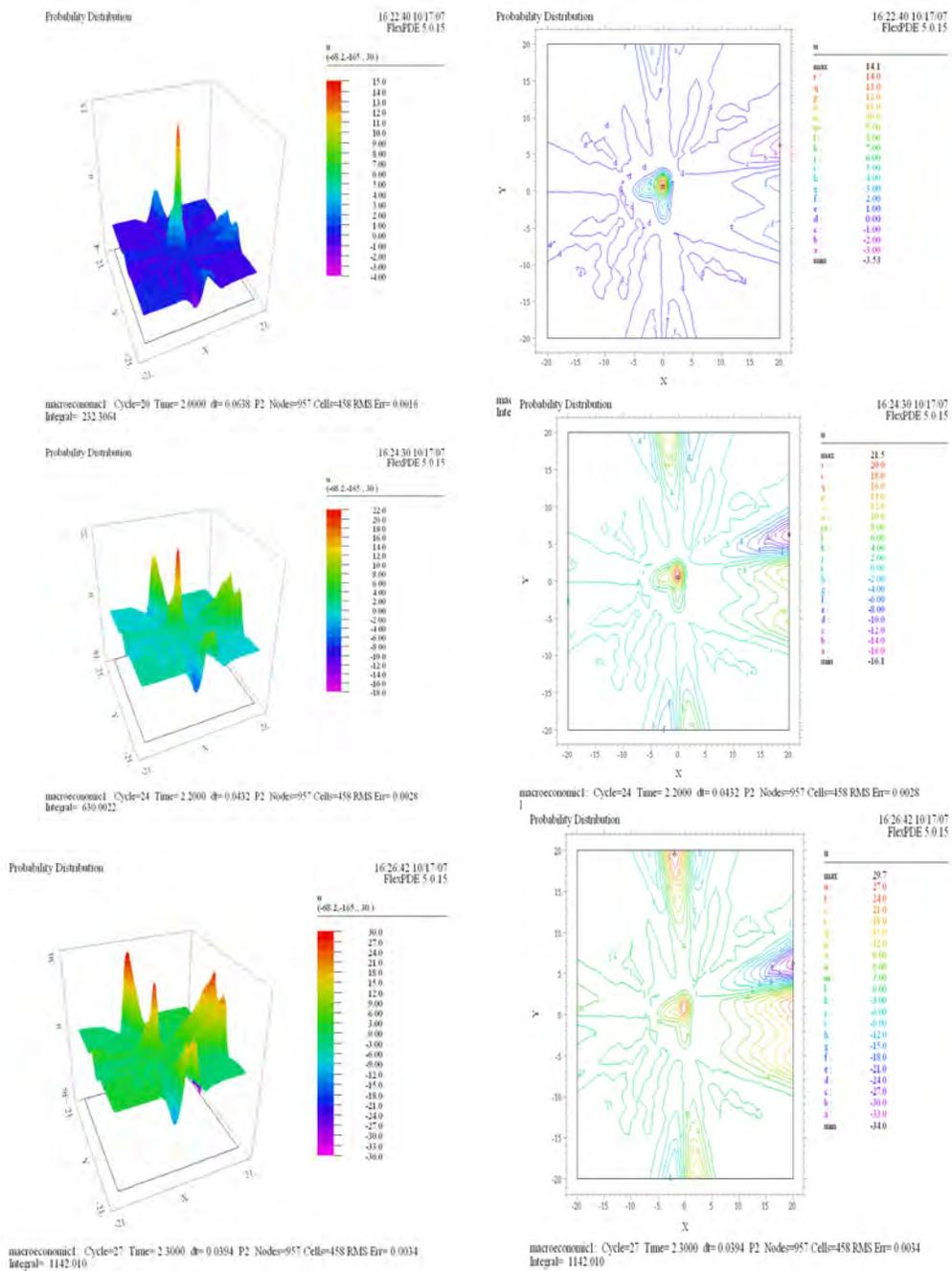


Figura 4.3: Solución de la ecuación de F-P 2

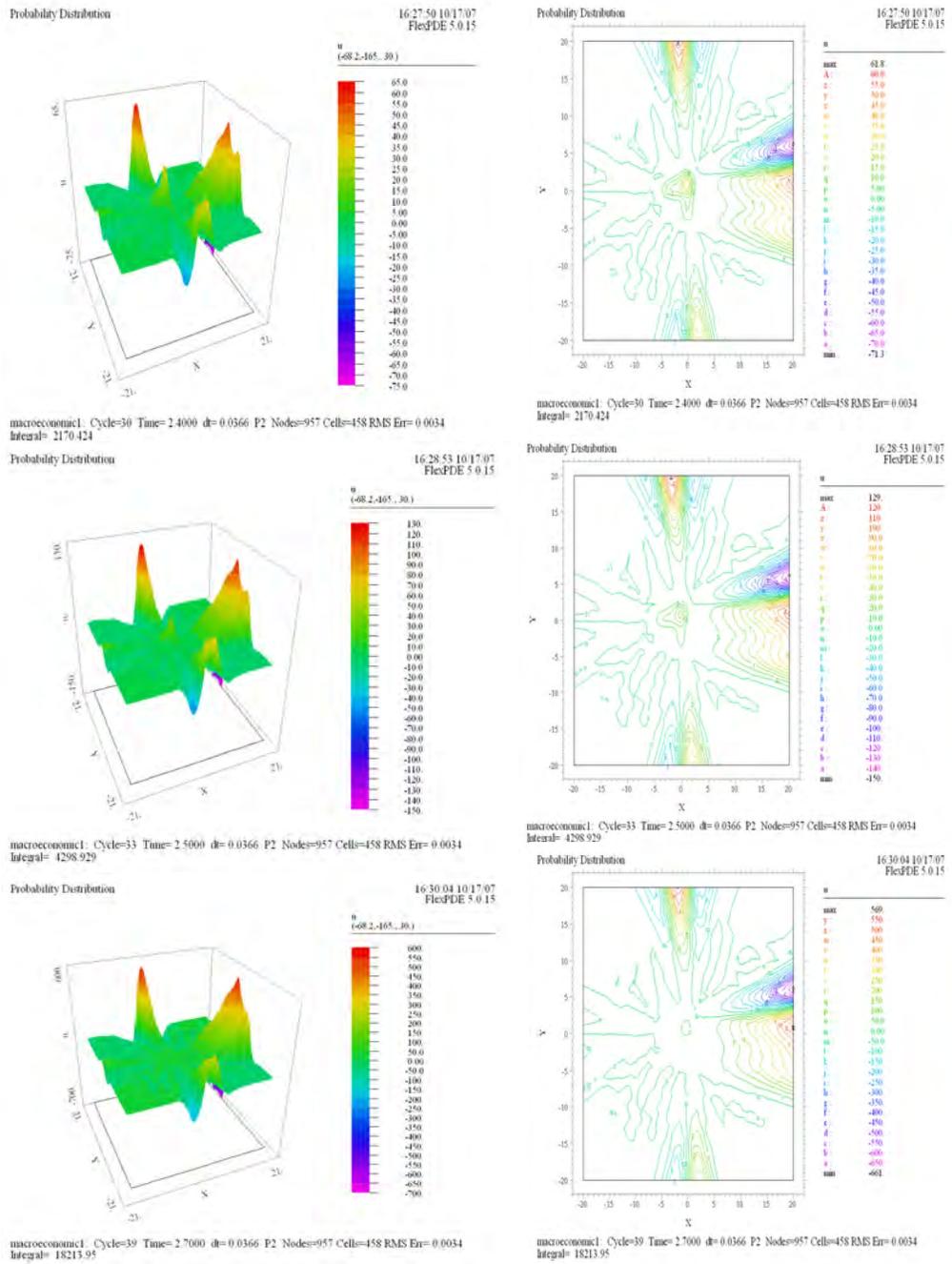


Figura 4.4: Solución de la ecuación de F-P 3

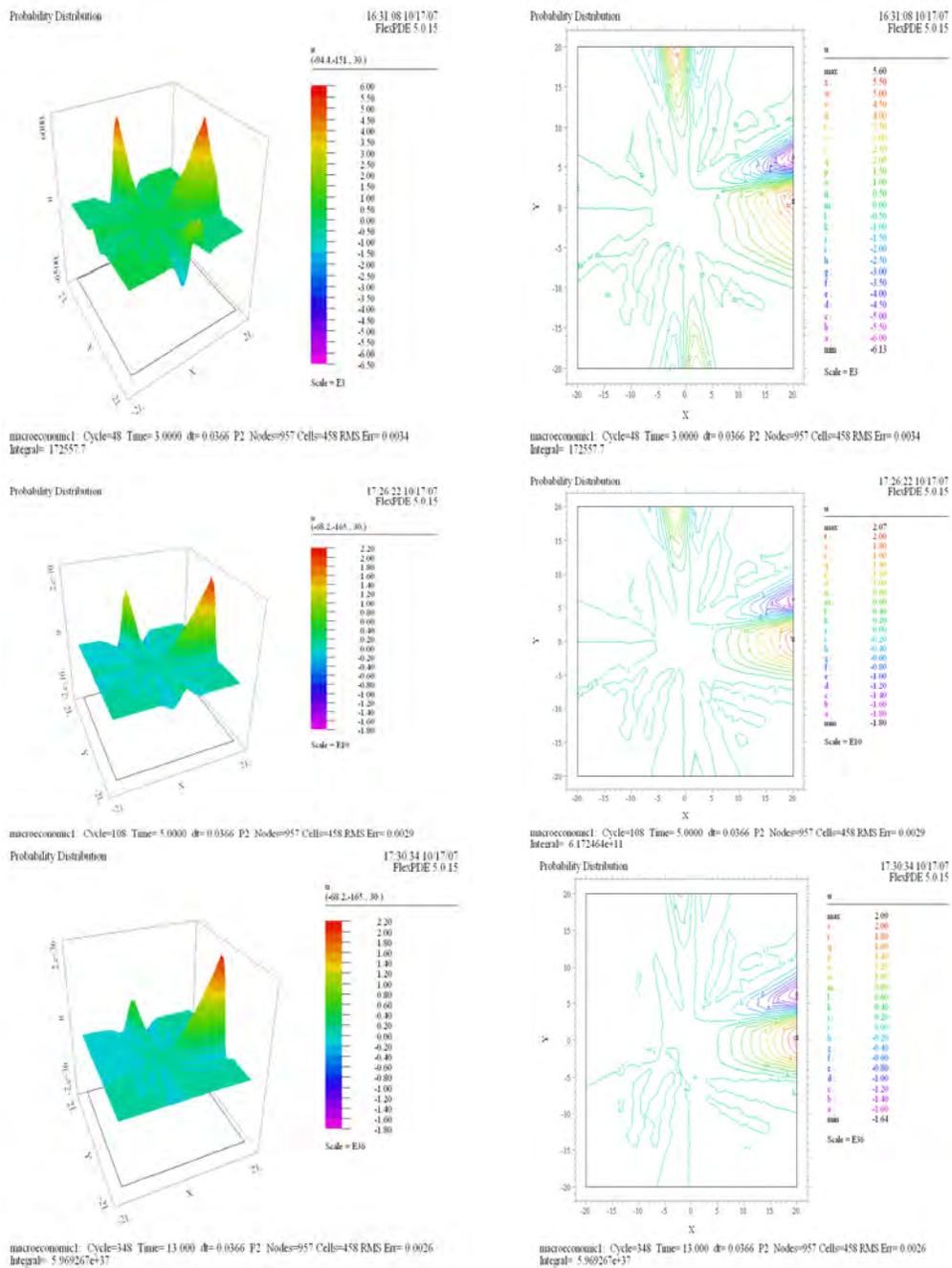


Figura 4.5: Solución de la ecuación de F-P 4

como se obtiene utilizando el paquete FLEXPDE.

La forma de asignar las calificaciones de crédito se muestran en la siguiente figura:

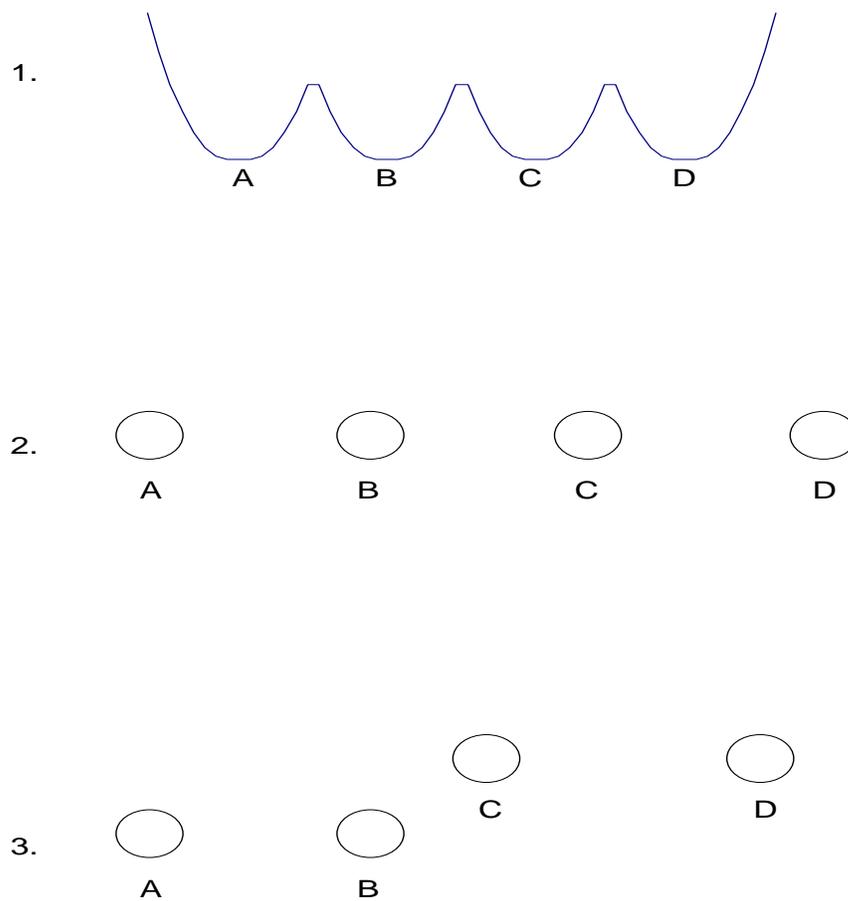


Figura 4.6: Pozos

Suponga que como en los ejemplos de la figura 4.6 se tienen cuatro calificaciones de crédito, A , B , C y D . En donde A corresponde a la mejor calificación y D es la probabilidad de incumplimiento, la peor calificación.

Ahora se analizará cada ejemplo. De acuerdo al ejemplo 1 (caso lineal), el pozo más alejado de la mejor calificación es el que se toma como el pozo de incumplimien-

to. Es decir, no se puede pasar del pozo o calificación A al pozo D directamente, sin haber estado en los pozos C y D , análogamente para B , no se puede pasar a D sin haber cruzado C . Así que la probabilidad más alta de ir al pozo de incumplimiento la tiene C . En este caso una empresa que haya estado en el pozo A y al paso del tiempo este en D , es porque su deterioro se fue dando paulatinamente.

Para los casos bidimensionales 2 y 3, el pozo de incumplimiento es el que se encuentra más alejado de los otros tres pozos. La idea es que la probabilidad de caer en dicho pozo sea pequeña. En estos casos si es posible pasar de la calificación o pozo A al pozo de incumplimiento D , aunque dicha probabilidad es mucho menor que si se está en C . Esto sucede cuando una empresa sana quiebra por alguna crisis financiera, lo cual siempre es posible en la realidad.

Modelos para calcular probabilidades de incumplimiento

El problema de estimar probabilidades de incumplimiento para portafolios de riesgo de crédito no es nuevo. El principal problema al que se enfrenta uno es que hay poca información disponible (lo cual hace imposible calibrar las distribuciones paramétricas supuestas, así estas distribuciones pueden no ser consistentes con el proceso de generación de datos de las acciones analizadas). Por lo cual al calcular la distribución de pérdidas con poca información, afecta las medidas del portafolio de riesgo de crédito en algún punto en el tiempo específico o a través del tiempo. Lo que puede llevar a resultados erróneos o poco realistas.

Hoy en día existe una gran cantidad de modelos enfocados en solucionar este problema (CreditMetrics, PortfolioView, etc.). Pero como se mencionó anteriormente, dichos modelos se basan en datos históricos de diferentes países, lo que puede arrojar resultados no apropiados para un país en particular.

Para resolver todos estos problemas de fondo, se ha desarrollado una nueva metodología llamada CIMDO (Consistent Information Multivariate Density Optimising Methodology). La cual recupera la distribución multivariada del portafolio a partir de un conjunto incompleto de información disponible para la modelación del portafolio de riesgo de crédito de los préstamos otorgados a pequeñas y medianas empresas y firmas no listadas, en un tiempo determinado. En otras palabras, CIMDO es un modelo estático.

El conjunto de información es representado por las probabilidades empíricas de incumplimiento de cada tipo de deudor que tiene préstamos en el portafolio.

Dicha metodología, se basa en una aproximación de entropía, la cual revierte el proceso de modelar la información, es decir, en lugar de suponer probabilidades

paramétricas para caracterizar la información contenida en los datos, la aproximación de entropía usa la información de los datos infiriendo valores para la densidad de probabilidad desconocida.

Con CIMDO se pueden encontrar distribuciones t-multivariadas con marginales que contienen el mismo o diferentes grados de libertad, simulaciones históricas, modelos mezclados⁵ y funciones cópula⁶.

En esta subsección solo se mencionará la forma de proceder para generalizar esta aproximación de manera de capturar la dependencia del tiempo de la función de densidad de probabilidad. Es decir, se planteará el problema dinámico de CIMDO. Es un proyecto que se sigue desarrollando conjuntamente con el Fondo Monetario Internacional. Debido a políticas del mismo, los modelos matemáticos encontrados, no pueden ser mostrados.

Las ventajas de considerar la dependencia del tiempo en esta metodología son las siguientes:

- a) Proporciona pronósticos más realistas para diferentes horizontes de tiempo.
- b) Da una forma natural de interpolar la función de densidad de probabilidad entre dos conjuntos de observaciones dadas en diferentes tiempos, las cuales son consistentes con CIMDO, en el sentido de que coinciden con él en tiempos específicos de observaciones.
- c) Se pueden calcular probabilidades de transición, es decir, si se está interesado en determinar cual es la probabilidad de ir de un estado de incumplimiento en un tiempo específico en el futuro dado el estado en un cierto tiempo previo.

La idea principal para desarrollar esta nueva metodología (CIMDO-t) está basada en la misma estructura de CIMDO, es decir,

1. Se tiene que recuperar la densidad multivariada posteriori $p(x_1, \dots, x_k) \in \mathfrak{R}$ minimizando la función objetivo dada por el funcional de entropía relativa.
2. Incorporar la dependencia del tiempo mediante ecuaciones diferenciales.
3. Aplicar el método de descenso mínimo.
4. Calibrar el modelo con datos reales.

Finalmente faltarían calibrar numéricamente los diversos modelos mostrados aquí. Para fines de esta tesis ya no fue posible hacerlo. Pero queda pendiente para

⁵Mezcla de normales

⁶Una función cópula define la estructura de dependencia en una distribución multivariada.

trabajos subsecuentes. La finalidad de la tesis era mostrar el mecanismo matemático de incorporar el efecto de los factores macroeconómicos a diversos modelos tanto de derivados financieros como de riesgo de crédito.

Apéndice A

Opciones financieras

A.1. Antecedentes

Los contratos de opciones son una de las piezas fundamentales de un mercado financiero moderno. La idea más generalizada entre los inversionistas y profesionales es que las opciones tienen una corta vida y que constituyen uno de los elementos más representativos del proceso de innovación financiera.

La idea generalizada de que las opciones equivalen a innovación financiera oculta una larga historia. Retrocediendo en el tiempo, conviene señalar que los fenicios, los griegos y los romanos negociaban contratos con cláusulas de opción sobre las mercancías que transportaban en sus naves. Por ejemplo Kratz(1990) describe la anécdota de la importante ganancia que obtuvo el filósofo, matemático y astrónomo Tales invirtiendo en opciones sobre aceitunas basándose en una previsión acertada de la cosecha. Con respecto a esta anécdota y otras similares que se pueden encontrar en la literatura financiera, en lo que coinciden los historiadores es en el hecho de que el primer mercado de opciones con cierto nivel de organización aparece en Holanda en el siglo XVII, pues se tienen referencias de que en 1634 precursores de opciones son manejadas durante la gran venta de tulipanes en Holanda. Se concretan contratos sobre bulbos de tulipanes en el que se determina un precio de compra el cual únicamente se vence si luego de cierto tiempo, los bulbos no sobrepasan un determinado peso. En 1637, el mercado de tulipanes se desploma. Dentro de los motivos se hace referencia a los negocios con carácter especulativo de los contratos de las opciones. Para 1668 un judío español asentado en Amsterdam José de la Vega, en su libro “*Confusión de Confusiones*”, analiza y describe las operaciones de una opción y de un futuro (*forward*) que se realizaban en la Bolsa de Amsterdam sobre las acciones de la Compañía de la Indias Orientales, también proporciona la etimología de la palabra opción:

“Llamáronle los flamencos *opsie*, derivado del verbo latino *optio*, *optio-*

nis, que significa elección, por quedar a elección de quien lo da el poder pedir o entregar la partida al que lo recibe... pues desea el que desembolsa el premio elegir lo que más le convenga, y en falta siempre puede dejar de elegir lo que desea.”

A principios del siglo XVIII, en Inglaterra comenzaron a negociarse opciones sobre las acciones de las principales compañías comerciales. El escándalo provocado por la fuerte caída de precios de la South Sea Company en el otoño de 1720, atribuido en parte a la especulación con opciones sobre acciones de esta compañía, provocó que el mercado de opciones fuese declarado ilegal. Esta prohibición estuvo vigente hasta el inicio del siglo XX, aunque también es cierto que se realizaron operaciones sobre opciones de forma semiclandestina.

En 1728 se crean las primeras acciones sobre opciones de la compañía real de las Indias Occidentales y de Guinea, con las cuales se justificaba la compra de partes de la isla francesa St. Croix.

Para el año de 1728 se establece en Estados Unidos el Chicago Board of Trade, el cual años más tarde se convertiría en una de las más grandes bolsas de futuros del mundo. Como indica Kratz(1990), las opciones sobre acciones se negocian en los mercados americanos desde hace 200 años. Un ejemplo ilustrativo es uno de los consejos a los clientes de la firma Tumbridge & Company, con sede en el número dos de Wall Street en 1875:

”Si usted piensa que las acciones se irán hacia abajo, compre una opción de venta (*put*); si usted piensa que las acciones subirán, adquiera una opción de compra (*call*).”

Este principio es aplicado desde hace más de 100 años hasta la actualidad.

Para el año de 1900 en Francia, el matemático Louis Bachelier presenta la primera fórmula seria para calcular el precio de una opción.

Dado el tipo de opciones que se negociaban, opciones sobre acciones, el mercado experimentó una evolución paralela, en cuanto a crisis, auges, etc., a la Bolsa de New York. Desde la década de los cincuenta y setenta, las opciones se negociaban generalmente sobre las acciones cotizadas en la Bolsa de New York y sobre lotes de 100 acciones con vencimientos típicos de 60 y 90 días. En cualquier caso, el mercado de opciones era el típico mercado, manejado mediante un corredor de bolsa (*Over-the-Counter*), sin un sistema normalizado de contratación y con un riesgo de crédito elevado en la medida en que en caso de incumplimiento del vendedor, el único recurso para el comprador era acudir a los tribunales.

Una fecha importante en la historia de las opciones es el 26 de abril de 1973, pues se comienza a operar el CBOE (Chicago Board Options Exchange), el primer mercado organizado que se crea en el mundo. Las primeras operaciones fueron contratos de opciones sobre lotes de 100 acciones, eligiéndose sólo 16 compañías al comienzo del mercado, sobre las que se podían negociar opciones. El primer día se negociaron 911 contratos, mientras que en 1974 se negoció una media diaria de 25720 contratos. También es importante mencionar que en 1973 Fisher Black and Myron Scholes publican sus investigaciones, las cuales incluyen la fórmula de Black-Scholes para la evaluación de *calls* europeos y les hizo acreedores al premio Nobel. Robert Merton publica en el mismo año una generalización de ésta. También recibió el premio Nobel años después, 1997, junto a Myron Scholes.

En 1975 la American Stock Exchange (AMEX) inicia transacciones con opciones. En Suiza se crea la Swiss Options Exchange (Soffex) en 1988. Para 1990 la bolsa de futuros alemana DTB (Deutsche Termin Börse) inicia operaciones. Negocios con mucho riesgo del dueño Nick Leeson llevan a la bancarrota al banco Barings en Inglaterra en 1995. La primera opción para el pueblo surge en en Alemania, 1996, en el mercado con Safe T. En el 2004 se inaugurará formalmente el mercado de opciones financieras en el mercado mexicano de derivados.

Hoy en día se negocian opciones sobre una gama amplia de activos financieros y no financieros y su uso se ha generalizado para todo tipo de agentes económicos. Por otro lado, la teoría de valuación de opciones ha revolucionado la teoría financiera moderna.

A.1.1. ¿Qué es una opción?

Una opción se puede definir como un contrato que da el derecho al poseedor a vender o comprar un activo a un precio determinado durante un periodo o en una fecha establecida de antemano.

Es decir, las opciones incorporan derechos de compra o derechos de venta, por lo que una primera clasificación que se puede hacer es entre opciones de compra u opciones *call* y opciones de venta u opciones *put*. El activo sobre el que se instrumenta la opción se denomina el **activo subyacente** (S). El precio de compra o de venta garantizado en la opción es el **precio de ejercicio** o *strike* (E). Y a la fecha de vencimiento establecida de antemano, se le da el nombre de **fecha de expiración** (T).

Si la opción se puede ejercer en cualquier momento desde la fecha de su adquisición hasta la fecha de ejercicio, se dice que la opción es americana. Por el contrario, si la opción sólo se ejerce en una fecha determinada se habla de una opción europea.

En los contratos de opciones intervienen dos partes:

- a) La parte que compra (comprador) tiene el derecho (no la obligación) de comprar o vender, es decir, ejercer la opción en el plazo correspondiente a la misma.
- b) La parte que emite o vende (vendedor) sólo tiene obligaciones, en el sentido de que tendrá que vender o comprar si el poseedor de la opción decide ejercerla y en caso contrario, no hará nada.

Evidentemente, los compradores ejercerán las opciones cuando la evolución de los precios de mercado del activo subyacente les permita obtener beneficios en el ejercicio. Precisamente estos beneficios del ejercicio de las opciones suponen pérdidas para los vendedores, por lo que el riesgo supuesto por ambas partes es distinto. Un agente económico vende una opción porque recibe una compensación monetaria del comprador. Es decir, los contratos de opción tienen un precio, denominado prima o pago, que deberá compensar al vendedor por el riesgo que adquiere.

De acuerdo al precio de la opción y al precio de ejercicio se tienen tres posiciones:

Dentro del dinero ("in the money"). Se dice que una opción está dentro del dinero, cuando el precio de mercado del bien subyacente se encuentra por arriba del precio de ejercicio en el caso de opciones de compra ($S > E$), o cuando está por abajo de dicho precio en el caso de opciones de venta ($S < E$).

En el dinero ("at the money"). Se dice que una opción está en el dinero, cuando el precio de mercado del bien subyacente es igual al precio de ejercicio en el caso de opciones de compra y venta ($S = E$).

Fuera del dinero ("out of the money"). Se dice que una opción está fuera del dinero, cuando el precio de mercado del bien subyacente se encuentra por debajo del precio de ejercicio en el caso de opciones de compra ($S < E$), o por arriba de dicho precio en el caso de opciones de venta ($S > E$).

Si se deseara ejercer la opción, existen dos formas de hacerlo:

Liquidación en efectivo. Se da cuando al ser ejercida la opción, el emisor de ésta entrega en efectivo la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor de mercado del bien subyacente.

Liquidación en especie. Se da cuando al ser ejercida la opción, el emisor de ésta recibe o entrega en especie la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor del mercado del bien subyacente, de acuerdo con lo establecido en el contrato de la opción.

A.1.2. Tipo de opciones

Como ya se mencionó anteriormente, existen dos principales tipos de opciones:

- 1) Opciones de compra (*call*).- Da al poseedor el derecho, más no la obligación, de comprar un valor en una fecha determinada.

Para el caso de opciones europeas, que se ejercen al final del periodo, se denotará como $t = T$.

De aquí se derivan dos casos:

- a) Si $S > E$, al expirar, tiene sentido financiero ejercer la opción *call*, tomándola sobre el precio de ejercicio E , de donde se obtiene una ganancia del activo subyacente. Por lo cual el beneficio obtenido para cada transacción es entonces $S - E$.
- b) Si $S < E$ al expirar, no debería ejercerse la opción pues existiría una pérdida de $E - S$. En este caso la opción al expirar tiene un valor nulo.

Tomando los dos casos anteriores, se tiene como resultado el valor de una opción de compra al tiempo de ejercicio como:

$$C_{Eu}(S, T) = \max(S - E, 0). \quad (\text{A.21})$$

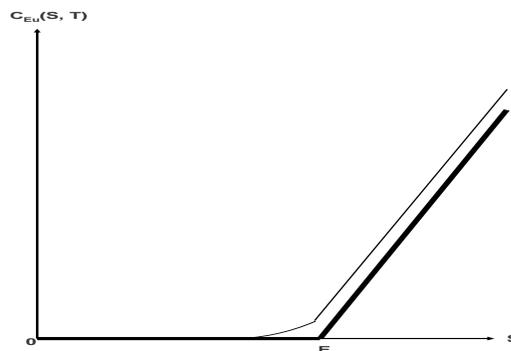


Figura A.7: Diagrama de pago para una opción de compra $C_{Eu}(S, T)$ (línea gruesa) y el valor de una opción $C_{Eu}(S, t)$ antes de expirar (línea delgada), como función de S .

- 2) Opciones de venta (*put*).- Le da al poseedor el derecho, más no la obligación, de vender un valor en una fecha preestablecida.

Cada opción y portafolio tiene un pago al expirar. En este caso si $S > E$ la opción de venta carece de valor, pero si su valor es positivo cuando $S < E$, entonces el beneficio está dado por $E - S$.

De la misma forma que una opción de compra se obtiene el pago al expirar como:

$$P_{Eu}(S, T) = \max(E - S, 0),$$

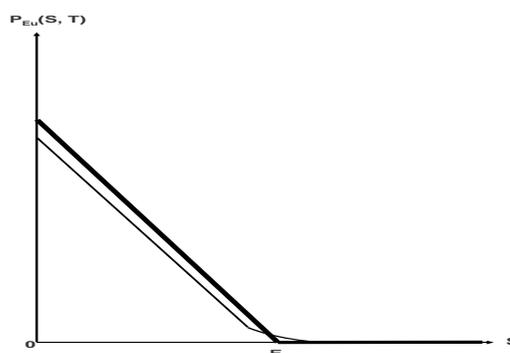


Figura A.8: Diagrama de pago para una opción de venta $P_{Eu}(S, T)$ (línea gruesa) y el valor de una opción $P_{Eu}(S, t)$ antes de expirar (línea delgada), como función de S .

De acuerdo a estas dos definiciones, se pueden hacer diversas combinaciones.

- 3) Paridad entre una opción de compra (*call*) y una opción de venta (*put*).

Supóngase que se tiene una posición larga en un activo (una opción de venta) y una posición corta (una opción de compra), ambos tienen la misma fecha de expiración, T , y el mismo precio de ejercicio, E . Se denota por π el valor del portafolio.

Sea

$$\pi = S + P_{Eu} - C_{Eu},$$

donde P_{Eu} y C_{Eu} son los precios de una opción de venta y una opción de compra respectivamente.

El pago para el portafolio es:

$$S + \max(E - S, 0) - \max(S - E, 0),$$

la expresión anterior puede simplificarse como:

$$\pi = \begin{cases} S + (E - S) - 0 = E, & \text{si } S < E, \\ S + 0 - (S - E) = E, & \text{si } S \geq E, \end{cases}$$

por lo tanto si $S > E$ o $S < E$ al expirar, el pago para este portafolio siempre será E .

Si se desea garantizar E al tiempo $t = T$, ¿Cuánto se debería pagar por el portafolio?

Para contestar la pregunta, se requiere calcular el valor presente de E , que está dado por $M = Ee^{-r(T-t)}$, lo que garantiza un monto E al tiempo $t = T$. Esto iguala la ganancia del portafolio con la ganancia de depositarlo en el banco. Si no fuera el caso entonces los arbitristas podrían hacer un beneficio instantáneo menos riesgoso: comprando y vendiendo opciones y acciones y al mismo tiempo pidiendo dinero prestado en las proporciones correctas, ellos podrían hacer un beneficio hoy con pago cero en el futuro. Por lo tanto el valor del portafolio es: $\pi = Ee^{-r(T-t)}$.

De lo anterior se llega a lo que se llama paridad entre una opción de compra y una opción de venta (*put-call parity*), la cual está dada por la siguiente fórmula:

$$S + P_{Eu} - C_{Eu} = Ee^{-r(T-t)}. \quad (\text{A.22})$$

En esta fórmula existe la eliminación del riesgo, pues los términos aleatorios se cancelan.

También las opciones se clasifican de acuerdo al tiempo en que pueden ser ejercidas:

- a) Opciones europeas.- Sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.
- b) Opciones americanas.- Pueden ejercerse durante la vida de la opción, es decir, en cualquier momento antes de expirar.

Además de las opciones americanas y europeas, existe una familia de opciones con características un poco más complejas que han sido diseñadas para cubrir riesgos más complicados, las llamadas OPCIONES EXÓTICAS, se mencionan algunas de ellas:

- 1) Opciones sobre el precio medio de un activo durante un período determinado (OPCIONES ASIÁTICAS).

Este tipo de opciones se generan a partir de un promedio, es decir, no interesa el valor del activo subyacente o precio de ejercicio en un momento determinado, sino que interesa el promedio de todos los valores del activo subyacente o el precio de ejercicio en un intervalo de tiempo. Para ello, considere los dos tipos de promedio:

- a) Promedio sobre el activo subyacente.

Una opción de compra asiática paga la diferencia (si es positiva) entre el precio medio de un activo determinado en un periodo preestablecido y el precio de ejercicio (E), es decir, $\max[(S_M - E)]$ donde S_M es el valor medio del activo subyacente S durante la vida de la opción.

De todas las opciones exóticas, las opciones asiáticas son quizás las más útiles para los usuarios comerciales.

- b) Promedio sobre el precio de ejercicio.

Una opción de compra asiática paga la diferencia (si es positiva) entre el precio del activo S y el precio de ejercicio E , este último es reemplazado por $\frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau$. Por lo tanto el pago al expirar queda como

$$\max\left(S - \frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau, 0\right)$$

- 2) Opciones que sólo llegan a existir (aparecen), o dejan de existir (desaparecen) si ocurre algún evento que las afecte (OPCIONES BARRERA).

Una opción de este tipo es evidentemente, más barata que una opción europea normal porque existe una posibilidad de que desaparezca. El comprar esta opción cuesta mucho menos, por lo que tiene menor efecto sobre la competitividad de la empresa (y por lo tanto sus beneficios), pero existe un riesgo de que desaparezca.

- 3) Opciones sobre el precio máximo o mínimo de un activo durante un período determinado (OPCIONES HACIA ATRÁS).

El número de aplicaciones de las opciones hacia atrás es menor que el de las opciones barrera (y mucho menor que el de las opciones asiáticas, muy frecuentes en mercados de materias primas), esto es porque muy pocas empresas tienen riesgos en sus negocios que dependen del precio máximo o mínimo de un activo durante un periodo determinado. El uso principal de las opciones lookback es directo; dado que su valor es muy alto, es frecuente que sean vendidas para generar una prima elevada, que es luego utilizada por el vendedor para comprar otras opciones que sí necesita para su negocio.

- 4) Opciones sobre opciones (OPCIONES COMPUESTAS).

Las opciones sobre opciones encuentran su utilidad en los casos en que no está claro si va a hacer falta una opción y que no se desea desembolsar una prima muy fuerte, por ejemplo, en el caso de una empresa compitiendo por un contrato de varios años en el extranjero. Si gana el contrato necesitará protección contra el riesgo de tipos de cambio, luego tendrá que comprar opciones, pero si no gana no necesitará opción alguna. Comprar opciones que puede que no hagan falta jamás es demasiado caro, pero una opción compuesta puede resultar aceptablemente barata.

- 5) Opciones que dan el derecho de elegir sobre una opción de compra o venta (OPCIONES A ESCOGER).

Este tipo de opciones han aparecido esporádicamente en el mercado y da el derecho al poseedor como su nombre lo dice, a escoger en una fecha determinada si la opción deseada es un *put* o un *call*.

- 6) Opciones sobre más de un activo (OPCIONES BINARIAS).

Se puede definir una opción sobre la diferencia entre la variación de dos índices bursátiles distintos (Nikkei y S&P 500), sobre dos índices bursátiles donde la

opción paga el que más haya subido de los dos. También es posible definir opciones como los llamados “quantos”, donde la apreciación de un índice bursátil se paga en otra divisa; por ejemplo, una opción sobre el Nikkei en la que cada punto del Nikkei vale un dólar (en lugar de valuar el Nikkei en yen), pase lo que pase con el tipo de cambio USD/JPY. El concepto de una opción sobre dos activos se puede extender fácilmente a opciones con barrera; se puede definir, por ejemplo, una opción sobre un activo A que desaparece si otro activo B alcanza un nivel determinado.

- 7) Opciones sobre la suma, diferencia, producto u otras operaciones entre uno o más activos (OPCIONES COMBINADAS).

En este caso se pueden definir opciones más complejas como son: opciones sobre el cuadrado del precio de un activo, o sobre cualquier otra función (cubo, raíz, cuadrada, etc.) del mismo.

- 8) Opción digital.

Si el precio de la acción se encuentra por arriba o por abajo de un valor previamente determinado, entonces se obtiene una suma de dinero determinada.

- 9) Opciones sobre un mínimo o máximo de múltiples acciones.

Se obtiene el derecho de comprar (vender) la acción de más bajo valor (mayor valor) de entre un paquete, a un precio previamente determinado.

- 10) Opción índice.

Si el precio de una acción al vencimiento del contrato se encuentra sobre el precio de una acción de control (se utiliza el Dow Jones o el DAX), entonces recibe la diferencia entre los precios.

Apéndice B

Movimiento browniano

B.1. Definición

Un movimiento browniano estándar de dimensión K es un proceso B de dimensión K tal que

1. $B(0) = 0$, con probabilidad uno.
2. B es continua.
3. Si $0 \leq t_0 < \dots < t_n$, entonces los incrementos $B(t_1) - B(t_0), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ son independientes.
4. Si $0 \leq s \leq t$, entonces el incremento $B(t) - B(s)$ es normalmente distribuido con media cero y matriz de covarianza $(t - s)I$, donde I es la matriz identidad de $K \times K$.

En particular, si B es un movimiento browniano estándar en una dimensión y si $0 \leq s \leq t$, entonces el incremento $B(t) - B(s)$ es normalmente distribuido con media cero y varianza $(t - s)$.

B.1.1. Propiedades de las trayectorias del movimiento browniano

Por definición se sabe que las trayectorias del movimiento browniano son continuas, pero al simular dichas trayectorias es evidente que estas funciones de t son extremadamente irregulares, pues oscilan rápidamente. La razón principal de este movimiento es debido a que los incrementos de B son independientes. En particular, incrementos del movimiento browniano en intervalos adyacentes son independientes sin importar la longitud de los intervalos.

Definición 6 Un proceso estocástico $(X_t, t \in [0, \infty))$ es H auto-similar para alguna $H > 0$ si su distribución dimensional finita satisface la condición

$$(T^H B_{t_1}, \dots, T^H B_{t_n}) =^d (B_{Tt_1}, \dots, B_{Tt_n})$$

para cada $T > 0$, alguna elección de $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ y $n \geq 1$.

Aquí d representa igualdad en distribución.

Hay que notar que auto-similitud es una propiedad distribucional no una propiedad de las trayectorias.

Definición 7 El movimiento browniano es 0.5-auto-similitud, es decir,

$$(T^{1/2} B_{t_1}, \dots, T^{1/2} B_{t_n}) =^d (B_{Tt_1}, \dots, B_{Tt_n})$$

para cada $T > 0$, alguna elección de $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ y $n \geq 1$.

El hecho de que el movimiento browniano se auto-similar y estacionario implica que sus trayectorias son no diferenciables casi donde quiera.

Ahora se mostrarán la no diferenciableidad de las trayectorias brownianas en el contexto general de procesos auto-similares, así como la variación no acotada de dichas trayectorias.

Proposición 1 (No diferenciableidad de procesos auto-similares).

Supóngase que (X_t) es H auto-similar con incrementos estacionarios para alguna $H \in (0, 1)$. Entonces para cada tiempo t_0 fijo,

$$\limsup_{t \downarrow t_0} \frac{|X_t - X_{t_0}|}{t - t_0} = \infty,$$

es decir, las trayectorias de procesos H auto-similares son no diferenciables casi en donde quiera con probabilidad uno.

Proposición 2 (Variación no acotada de las trayectorias brownianas)

Para casi todas las trayectorias brownianas,

$$v(B(w)) = \sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| = \infty, \quad \text{c.s.},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las posibles particiones $\tau : 0 = t_0 < \dots < t_n = T$ de $[0, T]$.

B.1.2. Algunos resultados del movimiento browniano

Teorema 18 *Existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y un movimiento browniano estándar de dimensión K en $T = [0, \infty)$.*

Proposición 3 *(Ley del logaritmo iterado).*

Si B es un movimiento browniano estándar, entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln(\ln t)}} = 1,$$

con probabilidad uno

Proposición 4 *(Ley de los grandes números para el movimiento browniano).*

Si B es un movimiento browniano estándar, entonces

$$\frac{B(t)}{t} \rightarrow 0,$$

con probabilidad uno, cuando $t \rightarrow \infty$.

Proposición 5 *Si B es un movimiento browniano estándar, entonces el proceso \hat{B} definido por*

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} tB(1/t) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

es también un movimiento browniano estándar.

B.1.3. Definiciones

Definición 8 *Una filtración es una familia $F = (F_t)_{t \in T}$ de σ álgebras $F_t \subset F$, la cual es creciente en el sentido de que $F_s \subset F_t$, para $s, t \in T$, $s \leq t$.*

Definición 9 *Si X es un proceso y $t \in T$, sea F_t^X la σ álgebra aumentada generada por el valor de los procesos al tiempo t :*

$$F_t^X = \sigma(\sigma(X_s : s \in T, s \leq t) \cup N),$$

donde N es el conjunto de todos los conjuntos nulos en F , estos son los eventos que tienen probabilidad cero.

La filtración aumentada generada por X es la filtración $F^X = (F_t^X)_{t \in T}$.

Definición 10 *Una filtración $F = (F_t)$ se dice que es aumentada si F_t es aumentada para cada t .*

Definición 11 *Un proceso estocástico X es medible si es medible como un mapeo*

$$X : (\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(T)) \rightarrow (\mathbb{R}^K, \mathcal{B}(\mathbb{R}^K))$$

Definición 12 Un proceso estocástico X se dice que es adaptado a la filtración F si para cada $t \in T$, el vector aleatorio o variable aleatoria

$$X_t : w \mapsto X(w, t) = X_t(w) = X(t)(w) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K,$$

es medible con respecto a F_t . Esto significa que el valor $X(t)$ de X al tiempo t depende sólo de la información disponible al tiempo t .

Proposición 6 Para cada proceso adaptado continuo por la izquierda o por la derecha es medible.

Definición 13 Un proceso X se dice que es integrable si $X(t)$ es un vector aleatorio integrable para cada $t \in T$.

Definición 14 Sea $F = (F_t)$ una filtración. Un proceso X es una martingala, si este es integrable, adaptado y

$$E[X(t)|F_s] = X(s),$$

para $s, t \in T$, $0 \leq s \leq t$.

Proposición 7 Sea Q una medida de probabilidad con densidad $dQ/dP = \varepsilon$ con respecto a P y

$$\eta(t) = E[\varepsilon|F_t].$$

Un proceso X es Q integrable si y sólo si ηX es P integrable. Entonces

$$E[\eta(t)X(t)|F_s] = \eta(s)E_Q[X(t)|F_s],$$

para $s \leq t$. En particular, ηX es una martingala con respecto a P , si y sólo si X es una martingala con respecto a Q

Proposición 8 Supóngase que X es un proceso tal que para $0 \leq s \leq t$, el incremento $X(t) - X(s)$ es independiente de F_s . Entonces la σ álgebra

$$\sigma(X(t) - X(s) : s \leq t),$$

es independiente de F_s , para toda $s \geq 0$.

B.1.4. Procesos de Wiener

Sea $F = (F_t)$ una filtración. Un proceso W de dimensión K sobre $T = [0, \infty)$ es un proceso de Wiener de dimensión K relativo a F si

1. $W(0) = 0$ con probabilidad uno.
2. W es continua.

3. W es adaptado a la filtración F .
4. Si $0 \leq s \leq t$, entonces el incremento $W(t) - W(s)$ es independiente de \mathbf{F}_s y normalmente distribuido, con media cero y matriz de covarianza $(t - s)I$, donde I es la matriz identidad de dimensión $K \times K$.

La diferencia formal entre el concepto de un proceso de Wiener y el concepto de un movimiento browniano estándar es que la definición de un proceso de Wiener se refiere a una estructura de información particular, mientras que la definición de un movimiento browniano no la tiene. Un proceso de Wiener es relativo a una filtración pero no es relativo a otra, mientras que un movimiento browniano será un movimiento browniano sin importar cuál filtración se tiene en mente. La diferencia substancial está en la independencia requerida para los incrementos. Futuros incrementos de un movimiento browniano se suponen independientes de incrementos pasados, mientras incrementos futuros de un proceso de Wiener se suponen independientes de la información actual disponible.

Apéndice C

Integración estocástica

C.1. Integración estocástica

Ahora lo que se desea calcular es la integral $\int_0^t f(t)dB_t(w)$, donde f es una función o un proceso estocástico en $[0, 1]$ y $B_t(w)$ es un movimiento browniano. Para ello primero se tratará de usar la integral de Riemann-Stieljes y se verá que de hecho, esto no es posible, dado que las realizaciones del movimiento browniano son de variación no acotada con probabilidad uno.

Definición 15 (*Integral de Riemann-Stieltjes*)

Sea $\tau_n : t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, y una partición intermedia λ_n de τ_n :

$$\lambda_n : t_{i-1} \leq y_i \leq t_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Sean f y g dos funciones reales en el intervalo $[0, 1]$ y se define

$$\Delta_i g = g(t_i) - g(t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

y

$$S_n = S_n(\lambda_n, \tau_n) = \sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta_i g = \sum_{i=1}^n f(y_i) [g(t_i) - g(t_{i-1})].$$

Si el límite

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(y_i) \Delta_i g,$$

existe cuando

$$\text{malla}(\tau_n) := \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$$

y S es independiente de la forma de elegir la partición τ_n y su partición intemedia λ_n , entonces S es llamada la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g en $[0, 1]$. Se escribe

$$S = \int_0^1 f(t)dg(t).$$

Ahora lo que interesa investigar es cuándo esta integral existe y si es posible tomar $g = B$ dado que B es el movimiento browniano en $[0, 1]$.

Para ello se dará una condición suficiente para la integrabilidad de Riemann-Stieltjes.

Definición 16 Sea h una función real en el intervalo $[0, 1]$, se dice que h tiene variación finita $p > 0$ si

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |h(t_i) - h(t_{i-1})|^p < \infty,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones de τ de $[0, 1]$.

Hay que notar que si $p = 1$, h tiene variación acotada.

De acuerdo a la definición anterior, se dan las condiciones para que la integral exista.

Proposición 9 La integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^1 f(t)dg(t)$ existe si las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) Las funciones f y g no tienen discontinuidades en el mismo punto $t \in [0, 1]$.
- b) La función f tiene variación p acotada y la función g tiene variación q acotada para alguna $p > 0$ y $q > 0$ tal que $p^{-1} + q^{-1} > 1$.

Se da un ejemplo para verificar que las condiciones se satisfacen en el caso del movimiento browniano.

Sea $B = (B_t, t \geq 0)$ el movimiento browniano. Para $p > 2$ las trayectorias brownianas tienen variación p acotadas para algún intervalo fijo y mientras que para $p < 2$ la variación p es no acotada (ver más adelante).

Ahora considérese una función determinística $f(t)$ en $[0, 1]$ o un proceso estocástico $f(w, t)$. Se puede definir la integral de Riemann-Stieltjes con respecto a $B_t(w)$,

dado que f tiene variación q acotada para alguna $q < 2$, entonces se toma $q = 1$.

Se supone que f es una función diferenciable con derivada acotada $f'(t)$. Entonces por el teorema del valor medio

$$|f(t) - f(s)| \leq K(t - s), \quad s < t,$$

donde $K > 0$ es una constante dependiente de f . Entonces

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq K \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = k < \infty.$$

Por lo tanto, la integral de Riemann-Stieltjes existe para cada trayectoria browniana $B_t(w)$. Esto no significa que esta integral se pueda evaluar explícitamente en términos del movimiento browniano.

Ahora para el caso de la integral estocástica de $It\hat{o}$, dada por

$$I(B)(w) = \int_0^1 B_t(w) dB_t(w),$$

se tiene el siguiente análisis.

Como ya se vio anteriormente, el movimiento browniano tiene variación acotada para $p > 2$ y no para $p \leq 2$, pero la condición suficiente de $2p^{-1} > 1$ para la existencia de $I(B)$ no se satisface. Por lo tanto la integral de Riemann-Stieltjes no existe y esto es debido a que el movimiento browniano tiene trayectorias de variación no acotada en algún intervalo finito.

C.1.1. Variación cuadrática del movimiento browniano

Sea $B = (B_t, t \geq 0)$ el movimiento browniano. Se consideran las sumas de Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} \Delta_i B,$$

donde

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t,$$

es una partición de $[0, t]$ y para alguna función f en $[0, t]$,

$$\Delta f : \Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

son los correspondientes incrementos de f y

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Así la suma S_n corresponde a la partición τ_n y la partición intermedia (y_i) con $y_i = t_{i-1}$, es decir, y_i es el punto final del lado izquierdo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

S_n puede ser escrita de la siguiente forma:

$$S_n = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Delta_i B)^2 =: \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} Q_n(t),$$

y

$$E(\Delta_i B \Delta_j B) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ \text{var}(\Delta_i B) = t_i - t_{i-1} = \Delta_i, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Entonces es inmediato que

$$E(Q_n(t)) = \sum_{i=1}^n E(\Delta_i B)^2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i = t,$$

y por la independencia de los incrementos del movimiento browniano, se tiene

$$\text{Var}(Q_n(t)) = \sum_{i=1}^n \text{var}([\Delta_i B]^2) = \sum_{i=1}^n [E(\Delta_i B)^2 - \Delta_i^2].$$

y se sabe que para una variable aleatoria $B_1 \sim N(0, 1)$, $E(B_1^4) = 3$.

$$E((\Delta_i B)^4) = E(B_{t_i - t_{i-1}}^4) = E\left[\left((\Delta_i)^{1/2} B_1\right)^4\right] = 3\Delta_i^2,$$

lo cual implica que

$$\text{var}(Q_n(t)) = 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2.$$

Así, si

$$\text{malla}(\tau_n) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i \rightarrow 0,$$

se obtiene que

$$\text{Var}(Q_n(t)) \leq 2 \text{malla}(\tau_n) \sum_{i=1}^n \Delta_i = 2t \text{malla}(\tau_n) \rightarrow 0.$$

Entonces como resultado se obtiene el siguiente lema.

Lema 9 Si $\text{var}(Q_n(t)) = E(Q_n(t) - t)^2$, entonces

a) $Q_n(t)$ converge a t en media cuadrada, en probabilidad.

b) La función límite $f(t) = t$ es característica sólo para el movimiento browniano, la cual es llamada la variación cuadrática del movimiento browniano en $[0, t]$.

Integrales con respecto al movimiento browniano, que no pueden ser definidas en el sentido de Riemann-Stieltjes, pueden ser definidas en el sentido de media cuadrática.

Los incrementos $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ satisface $E(\Delta_i B) = 0$ y $E[(\Delta_i B)^2] = \delta_i = t_i - t_{i-1}$. El límite de la media cuadrática de $Q_n(t)$ es t . Estas propiedades sugieren que $(\Delta_i B)^2$ es del orden de $\Delta_i B$.

En términos diferenciales, la variación cuadrática en $[0, t]$, se escribe

$$(dB_t)^2 = (B_{t+dt} - B_t)^2 = dt,$$

y en términos integrales

$$\int_0^t (dB_s)^2 = \int_0^t ds = t$$

C.1.2. Construcción de la integral estocástica

Supóngase que $(B_t)_{t \geq 0}$ es un F_t movimiento browniano estándar, definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathbf{A}, (F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$.

Definición 17 $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es llamado un proceso simple si se puede escribir como

$$X_t(w) = \sum_{i=1}^p \phi_i(w) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ y ϕ_i es $F_{t_{i-1}}$ medible y acotada.

Entonces, por definición, la integral estocástica de un proceso simple X es el proceso continuo $(I(X)_t)_{0 \leq t \leq T}$, definido para alguna $t \in (t_k, t_{k+1}]$ como

$$I(X)_t = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i(w) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(w) + \phi_{k+1}(B_t - B_{t_k}).$$

Note que $I(X)_t$ puede escribirse como

$$I(X)_t = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}),$$

lo cual da la continuidad de $t \mapsto I(X)_t$. Entonces se define

$$I(X)_t = \int_0^t X_s dB_s.$$

Proposición 10 Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso simple, entonces se satisface:

- a) $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala \mathcal{F}_t continua,
- b) $E\left(\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right) = E\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)$,
- c) $E\left(\sup_{t \leq T} \left|\int_0^t X_s dB_s\right|^2\right) \leq 4E\left(\int_0^T X_s^2 ds\right)$,

Definición 18

$$\int_t^T X_s dB_s = \int_0^T X_s dB_s - \int_0^t X_s dB_s.$$

Si $t \leq T$, y si $A \in \mathcal{F}_t$, entonces $s \rightarrow 1_A 1_{\{t < s\}} X_s$ es un proceso simple y de la definición de la integral se tiene

$$\int_0^T 1_A X_s 1_{\{t < s\}} dB_s = 1_A \int_t^T X_s dB_s. \quad (\text{C.23})$$

Ahora que se ha definido la integral para procesos simples y algunas de sus propiedades, se extenderá el concepto a una clase más amplia de procesos adaptados H :

$$H = \{(X_t)_{0 \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \text{ proceso adaptado}, E\left(\int_0^T X_s^2 ds\right) < \infty\}.$$

Proposición 11 Considere $(B_t)_{t \geq 0}$ un (\mathcal{F}_t) movimiento browniano. Existe un único mapeo J de H al espacio de martingalas (\mathcal{F}_t) continuas, definidas en $[0, T]$, tales que:

- a) Si $(X_t)_{t \leq T}$ es un proceso simple, $J(X)_t = I(X)_t$, para alguna $0 \leq t \leq T$ P c.s.
- b) Si $t \leq T$, $E(J(X)_t^2) = E\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)$.

Este mapeo lineal es único en el siguiente sentido, si ambos J y J' satisfacen las propiedades previas, entonces

$$J(X)_t = J'(X)_t \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad P \text{ c.s.}$$

Se denota, para $X \in H$, $\int_0^t X_s dB_s = J(X)_t$.

La nueva integral estocástica satisface las siguientes propiedades.

Proposición 12 Si $(X_t)_{t \leq T}$ pertenece a H , entonces

- a) Se tiene

$$E\left(\sup_{t \leq T} \left|\int_0^t X_s dB_s\right|^2\right) \leq 4E\left(\int_0^T X_s^2 ds\right) \quad (\text{C.24})$$

b) Si τ es un F_t tiempo de paro

$$\int_0^\tau X_s dB_s = \int_0^T 1_{\{s \leq \tau\}} X_s dB_s, \quad P \text{ c.s.} \quad (\text{C.25})$$

Ahora se analizarán procesos que sólo satisfacen una condición de integrabilidad débil, para ello se define

$$\tilde{H} = \{(X_s)_{0 \leq s \leq T}, (\mathbf{F}_t) - \text{un proceso adaptado}, \int_0^T X_s^2 ds < +\infty \text{ P c.s.}\}.$$

La siguiente proposición define una extensión de la integral estocástica de H a \tilde{H} .

Proposición 13 *Existe un único mapeo lineal \tilde{J} de \tilde{H} dentro del espacio vectorial de procesos continuos definidos en $[0, T]$, tales que:*

a) *Propiedad de extensión: Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso simple, entonces*

$$\tilde{J}(X)_t = I(X)_t, \forall 0 \leq t \leq T, P \text{ c.s.}$$

b) *Propiedad de continuidad: Si $(X^n)_{n>0}$ es una sucesión de procesos en \tilde{X} tales que $\int_0^T (X_s^n)^2 ds$ converge a cero en probabilidad, entonces $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(X^n)_t|$ converge a cero en probabilidad.*

Consistentemente, se escribe $\int_0^t X_s dB_s$ para $\tilde{J}(X)_t$

Nota: Es importante darse cuenta que en este caso $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ no es necesariamente una martingala.

En resumen las condiciones necesarias para definir la integral estocástica con respecto al movimiento browniano son:

- 1) Considérese $(B_t)_{t \leq 0}$ un movimiento browniano y $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un proceso adaptado en F_t .
- 2) Se define la integral estocástica $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ si se cumple $\int_0^T X_s^2 ds < +\infty$ P c.s.
- 3) Por construcción, el proceso $\left(\int_0^t X_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala si $E\left(\int_0^T X_s^2 ds\right) < +\infty$. Esta condición no es necesaria.
- 4) La desigualdad $E\left(\int_0^T X_s^2 ds\right) < +\infty$ si y sólo si se satisface $E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right) < +\infty$.

C.2. Cálculo de Itô

Definición 19 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y $(B_t)_{t \geq 0}$ un movimiento browniano en \mathbb{F}_t . $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso de Itô valorado en \mathbb{R} y puede ser escrito como:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s,$$

donde

- a) X_0 es \mathcal{F}_0 medible.
- b) $(u_t)_{0 \leq t \leq T}$ y $(v_t)_{0 \leq t \leq T}$ son procesos adaptados \mathcal{F}_t .
- c) $\int_0^T |u_s| ds < +\infty$ \mathbb{P} c.s.
- c) $\int_0^T |v_s|^2 ds < +\infty$ \mathbb{P} c.s.

Proposición 14 Si $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala continua tal que

$$M_t = \int_0^t u_s ds, \quad \text{con} \quad \int_0^T |v_s| ds < +\infty, \quad \mathbb{P} \text{ c.s.},$$

entonces

$$M_t = 0 \quad \forall t \leq T, \quad \mathbb{P} \text{ c.s.}$$

La proposición implica que

1. La descomposición de un proceso de Itô es única. Esto significa que si

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s = X'_0 + \int_0^t u'_s ds + \int_0^t v'_s dB_s,$$

entonces

$$X_0 = X'_0 \text{ d}\mathbb{P} \text{ c.s.}, \quad v_s = v'_s \text{ ds} \times \text{d}\mathbb{P} \text{ c.d.q. (casi en donde quiera)} \quad \text{y} \quad u_s = u'_s \text{ ds} \times \text{d}\mathbb{P} \text{ c.d.q.}$$

2. Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala de la forma $X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s$, entonces $u_t = 0 \text{ dt} \times \text{d}\mathbb{P}$ a.e.

Teorema 19 Sea $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un proceso de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s,$$

y f una función continua doblemente diferenciable, entonces

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s,$$

donde por definición

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t v_s^2 ds,$$

y

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) u_s ds + \int_0^t f'(X_s) v_s dB_s.$$

Asimismo, si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ es una función la cual es doblemente diferenciable con respecto a x y una vez con respecto a t , y si estas derivadas parciales son continuas con respecto a (t, x) (es decir, f es una función de clase $C^{1,2}$), entonces la fórmula de Itô queda como

$$f(X_t, t) = f(X_0, t) + \int_0^t f'_s(X_s, s) ds + \int_0^t f'_x(X_s, s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(X_s, s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Apéndice D

Arbitraje

D.1. Definiciones básicas

Se darán los resultados principales de la teoría general de arbitraje en una economía en tiempo continuo. También se revisará la implicación de no arbitraje si un mercado admite una medida de probabilidad equivalente tal que los precios de los activos relativos son martingalas. Consecuentemente, el precio de una reclamación europea arbitraria está dada por el valor esperado descontado de la reclamación bajo la medida martingala.

- 1) La ausencia de arbitraje en un mercado significa que este mercado es justo, racional y uno no puede hacer beneficios sin riesgo con una inversión inicial neta sea nula.
- 2) Se especifica un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. El intervalo de transacción es continuo en $t \in [0, T]$.
- 3) Se supone que el mercado consiste de n activos, tales que el vector del proceso estocástico adaptado \mathbf{F}_t en \mathbb{R}^n está dado por $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^n)$, donde cada S_t^i corresponde al modelo del precio del activo i .
- 4) Se supone que se tiene un mercado perfecto donde la transacción toma lugar en un tiempo continuo y no existen fricciones.
- 5) Sea el proceso no negativo $r_t \in L^1$ que denota la tasa corta libre de riesgo. Un proceso definido por

$$\beta_t \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad t \in [0, T],$$

satisface $d\beta_t = r_t \beta_t dt$ con $\beta_0 = 1$ que es llamado bono libre de riesgo. Como r es la tasa libre de riesgo obtenida bajo un periodo de tiempo pequeño, entonces

β es generalmente considerada una inversión libre de riesgo. Se dice que es sin riesgo puesto que se tiene un proceso predecible, lo que significa que la tasa al próximo instante del tiempo es conocida.

- 6) Sea W_t el movimiento browniano en \mathbb{R}^d definido en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathbf{F}, (\mathbf{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$. Se supone que existen n activos definidos como procesos X_t adaptados \mathbf{F}_t .
- 7) Una estrategia de negocios θ es definida como el vector del proceso predecible \mathbf{F}_t valuado en \mathbb{R}^n $\theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$, tal que

$$V_t = \sum_{i=1}^n \theta_t^i X_t^i = \theta_t X_t,$$

donde V_t es la riqueza total al tiempo t . Al conjunto de estrategias de negocios es representada como Θ . Un mercado $\mathbf{M}(X, \Theta)$ es un conjunto de activos con un conjunto de estrategias de negocios.

Se define el proceso G_t adaptado \mathbf{F}_t valuado en \mathbb{R} como

$$G_t = \int_0^t \theta_s dX_s.$$

- 8) Una estrategia de transacción θ es llamada *autofinanciable* si se satisface $V_t = V_0 + G_t(\theta)$. En otras palabras, el portafolio definido por esta estrategia no debe por sí mismo asociarse a ningún dinero aparte de la inversión inicial. Esta inversión inicial será el precio del activo que la estrategia está replicando.

Una reclamación contingente (europea) al tiempo de maduración T es una variable aleatoria g medible \mathbf{F}_T . En una reclamación americana es un proceso adaptado \mathbf{F}_t para $0 \leq t \leq T$.

- 9) Una estrategia de transacción θ es replicable si es autofinanciada y $V_T(\theta) = g$. Es decir, la estrategia debe replicar el pago del activo que se está tratando de valorar, así el portafolio generado por la estrategia deberá siempre producir el mismo resultado a pesar de los cambios en el activo subyacente, es decir, el valor del portafolio generado por la estrategia deberá ser determinístico y no depender de ninguna componente estocástica (excepto para las componentes estocásticas de las derivadas del activo subyacente).
- 10) Una estrategia θ es llamada oportunidad de arbitraje (o simplemente un arbitraje) si

$$V_0 < 0 \quad y \quad P(V_T(\theta) \geq 0) = 1,$$

(D.26)

o

$$V_0 = 0 \quad y \quad P(V_T(\theta) > 0) > 0.$$

D.1.1. Precio de arbitraje

Teorema 20 *Si existe una medida martingala equivalente para el mercado M , entonces no existen oportunidades de arbitraje.*

El siguiente teorema muestra la relación entre la medida martingala equivalente y los precios de las reclamaciones contingentes.

Teorema 21 *Si el mercado admite una medida martingala única Q^i y Q para $S_i(t)$ y β_t respectivamente, entonces el precio de una reclamación contingente alcanzable $X_u \in \mathcal{X}(L^2)$ coincide para ambas cantidades y está dada por*

$$X_t = S_i(t)E \left[S_i(u)^{-1} X_u | \mathcal{F}_t \right] = \beta_t E_Q \left[\beta_u^{-1} X_u | \mathcal{F}_t \right], \quad (\text{D.27})$$

para alguna $t, u \in [0, T]$ tal que $t \leq u$.

Este teorema da los correspondientes precios libres de arbitraje bajo la medida martingala.

El comportamiento dinámico de $S(t)$ es definido por

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu(k, S) dk + \int_0^t \sigma(k, S) dW(k),$$

donde $W(t)$ es un vector Browniano en \mathbb{R}^d definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, S toma valores en \mathbb{R}^n , $\mu(t)$ es un vector de un proceso predecible valuado en \mathbb{R}^n y σ es una matriz de un proceso predecible valuado en $\mathbb{R}^{n \times d}$. $\sigma(t)$ y $\mu(t)$ satisfacen las propiedades de integrabilidad $\mu(t) \in (L_1)^n$ y $\sigma(t) \in (L^2)^{n \times d}$. $\mu(S, t)$ y $\sigma(S, t)$ satisfacen las condiciones de crecimiento y de Lipschitz, i.e., $\|\mu(x, t) - \mu(y, t)\| + \|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)\| \leq K \|x - y\|$ y $\|\mu(x, t)\|^2 + \|\sigma(x, t)\|^2 \leq K(1 + \|x\|^2)$, para alguna constante positiva K . Como una consecuencia, existe un proceso adaptado $S(t)$ el cual es una solución fuerte de la ecuación integral.

Generalmente se supone que los precios de los activos son determinados por las siguientes ecuaciones, para algún activo $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} S_i(t) &= S_i(0) + \int_0^t S_i \mu_i(k) dk + \int_0^t S_i(t) \sigma_i(t) dW(k) \\ &= S_i(0) \exp \left(\int_0^t \mu_i(k) - \frac{1}{2} \|\sigma_i(k)\|^2 dk + \int_0^t \sigma_i(k) dW(k) \right), \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

con

$$dS_i(t) = S_i(t) (\mu_i(t)dt - \sigma_i(t)dW(t)).$$

$S_i(t)$ y $\mu_i(t)$ son valuados en \mathbb{R} .

Ahora considere el mercado de activos M_i , con activos que siguen el proceso definido por (D.27) y activos (numéraire) S_i . Sea $Z(t)$ un proceso en \mathbb{R}^n definido por $Z_k(t) = S_k(t)/S_i(t) \forall k \in \{1, \dots, n\}$. $Z(t)$ tiene la representación

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t \phi(k)dk + \int_0^t \nu(k)dW(k), \quad (\text{D.29})$$

ϕ y ν son procesos predecibles en \mathbb{R}^n y $\mathbb{R}^{n \times d}$ respectivamente, los cuales satisfacen las mismas condiciones de frontera de μ y σ en la ecuación (D.27), $Z(t)$ es llamado el proceso del precio relativo o el proceso del precio descontado.

El siguiente teorema muestra las condiciones bajo las cuales una medida martingala existe en un mercado seguro. Note que la medida martingala no es invariante con respecto a la elección de S_i .

Teorema 22 (*Riesgo de Mercado*)

Sea el proceso del precio relativo valuado en \mathbb{R}^n dado por la ecuación (D.29). Si

$$-\nu(t)\gamma(t) = \phi(t),$$

tiene una solución no trivial única para el proceso $\gamma(t) \in (L^2)^d$ en \mathbb{R}^d , entonces el mercado M_i admite una medida martingala única.

Nota: El proceso $\gamma(t)$ es llamado el proceso del precio de mercado relativo de riesgo. Es relativo porque el riesgo es determinado con respecto al activo S_i por comparación. Es un precio de mercado de riesgo porque el flujo excesivo del proceso del precio del activo sobre el activo S_i como punto de referencia es proporcional al riesgo excesivo del activo relativo al punto de referencia. $\gamma(t)$ es el factor de proporción y puede así ser interpretado como el precio por unidad de riesgo.

Corolario 2 Considere un proceso del precio valuado en \mathbb{R}^n dado por la ecuación (D.29). Si el proceso se mantiene para una solución γ_t de acuerdo con el teorema anterior, la medida martingala Q^i con respecto a S_i es definido por

$$\frac{dQ^i}{dP} = \exp \left(\int_0^T \gamma(k)dW(k) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma(k)\|^2 dk \right),$$

donde

$$\gamma_t = \Omega^T \left(\Omega \Omega^T \right)^{-1} (\mu_i(t) \mathbf{1}_n - \mu(t)),$$

y

$$\Omega = \sigma(t) - \mathbf{1}_n \sigma_i(t),$$

donde $\mathbf{1}_x$ es el vector identidad x -dimensional.

Ejemplo 1 Un uso frecuente de S_i es el mercado de dinero para β_t . Sea

$$Z_j(t) = \frac{S_j(0)}{\beta(0)} \exp \left(\int_0^t \mu_j(k) - r(k) - \frac{1}{2} \|\sigma_j(k)\|^2 dk + \int_0^t \sigma_j(k) dW(k) \right).$$

Se define una medida equivalente

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left(\int_0^T \gamma(k) dW(k) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma(k)\|^2 dk \right),$$

con $\gamma_t = \sigma^T \left(\sigma(t) \sigma(t)^T \right)^{-1} (r(t) \mathbf{1}_n - \mu(t))$.

Aplicando el teorema de Girsanov, se tiene que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} Z_j(t) &= \frac{S_j(0)}{\beta(0)} \exp \left(\int_0^t \mu_j(k) - r(k) - \frac{1}{2} \|\sigma_j(k)\|^2 dk \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \sigma_j(k) \left(d\tilde{W}(k) + \sigma_j(k)^T \left(\sigma(k) \sigma(k)^T \right)^{-1} (r(k) - \mu_j(k)) \right) dk \right) \\ &= \frac{S_j(0)}{\beta(0)} \exp \left(\int_0^t -\frac{1}{2} \|\sigma_j(k)\|^2 dk + \int_0^t \sigma_j(k) d\tilde{W}(k) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

La fórmula de Itô da la correspondiente EDE

$$dZ_j = \frac{S_j(t)}{\beta(t)} \sigma_j(t) d\tilde{W}(t).$$

El proceso del activo bajo Q es

$$S_j(t) = S_j(0) \exp \left(\int_0^t \left(r(k) - \frac{1}{2} \|\sigma_j(k)\|^2 \right) dk + \int_0^t \sigma_j(k) d\tilde{W}(k) \right).$$

La medida Q es generalmente llamada la medida neutral libre de riesgo, bajo esta medida algún flujo de los activos es igual a la tasa de apreciación del mercado de dinero libre de riesgo.

Cambiando de $\beta(t)$ a $S_i(t)$, simplemente se define una nueva medida dada por

$$\frac{dQ^i}{dQ} = \exp \left(\int_0^T \gamma(k) dW(k) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma(k)\|^2 dk \right),$$

con

$$\gamma(t) = -\sigma_i(t).$$

En el caso de Black-Scholes $(\mu - r)/s = \lambda$.

Apéndice E

Valuación de opciones europeas mediante la ecuación diferencial parcial (EDP)

E.1. Nociones de valuación

Para entender un poco más a las opciones, es necesario conocer algunos elementos matemáticos que ayuden a formular los modelos que permiten su descripción cuantitativa, es decir, el cálculo del precio de una opción, así como cuál es el mejor tiempo para ejercerla.

Es importante mencionar que el estudio se hace basándose en opciones europeas (pueden ser sólo ejercidas en la fecha de vencimiento), ya que son las más fáciles de estudiar.

Para llevar a cabo un buen análisis de cuál es el precio de ejercicio (*strike*) de una opción, primeramente se mencionan dos ideas básicas.

E.1.1. Modelo del valor presente

Uno quisiera saber ¿Cuánto se tendría que pagar ahora, para garantizar un monto E en un tiempo futuro T ?, en otras palabras, ¿Cuál será el monto obtenido al invertir el dinero en el banco?. Este hecho está representado por el proceso determinístico siguiente:

$$\frac{dM}{dt} = rM(t). \tag{E.31}$$

Donde M corresponde al monto de dinero invertido en el banco, r la tasa de interés libre de riesgo y t el tiempo.

Y la solución general está dada por

$$M = E e^{-\int_t^T r(s) ds}.$$

E.1.2. Modelo para valorar opciones

Las condiciones de constante cambio en el mercado, afectan el comportamiento del activo subyacente y es necesario incorporarlas en los modelos de valuación de opciones. Supóngase que procesos estocásticos de tipo markoviano son los adecuados para describir el comportamiento de productos financieros.

El cambio absoluto en el precio de la opción no es en sí mismo una cantidad útil. Con cada cambio en el precio se asocia una ganancia normalizada, definida como el cambio en el precio dividido por el valor original, dS/S .

Ahora se dará un modelo para el cálculo de la ganancia.

Sean

t = tiempo,

S = precio del activo subyacente.

Si se consideran pequeños intervalos de tiempo dt , en los cuales S cambia como $S+dS$, se desea saber a qué corresponde la ganancia de la opción normalizada dS/S .

La ganancia del modelo se descompone en dos partes:

- 1) μdt corresponde a la parte determinística del modelo, donde μ es la tasa media de crecimiento del precio del activo subyacente.
- 2) σdX representa el cambio aleatorio en el precio del activo subyacente en respuesta a efectos externos. Esto se representa al sumar el término σdX a dS/S , en donde σ es la volatilidad, es decir, mide la desviación estándar del activo subyacente, y dX representa un proceso de Wiener o movimiento Browniano.

De acuerdo a los dos factores que conforman la descomposición, se obtiene la *Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)*:

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt. \quad (\text{E.32})$$

Considérese el caso en el que $\sigma = 0$, es decir, el activo subyacente está libre de riesgo. La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Si μ es constante, se obtiene la solución explícita de la ecuación, usando el método de variables separables:

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)},$$

con S_0 el valor de S al tiempo $t = t_0$.

Por lo tanto, si $\sigma = 0$, el precio es determinístico y se puede predecir en un futuro con certeza y obedece a la ley de interés compuesto.

Ahora, si se considera el término de la ecuación σdX , el problema resulta más complejo, pues se tiene en efecto una EDE cuya solución es, a su vez, un proceso estocástico. (No tiene sentido visualizar a la solución como una única curva. Es más útil pensar en las diferentes realizaciones de este proceso).

Como se mencionó con anterioridad dX representa un proceso de Wiener o movimiento Browniano.

Si se consideran tanto las propiedades de dS/S como la propiedad markoviana, entonces $S + dS$ depende sólo del precio de hoy y

$$E[dS] = \mu S dt,$$

pues $E[dX] = 0$. Además

$$\text{var}[dS] = E[(dS)^2] - E[dS]^2 = \sigma^2 S^2 dt.$$

A partir de lo anterior, se genera el resultado más importante para la manipulación de variables aleatorias.

E.1.3. Lema de Itô

De acuerdo al Teorema 2, a continuación se enuncia lema de Itô, en forma de ecuaciones diferenciales.

Lema 10 Sea X_t una integral estocástica, que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t.$$

Sea $(x, t) \rightarrow f(x, t) \in R$ es C^2 ; $t \in [0, \infty)$, $x \in R$ en $R \times [0, \infty)$, entonces

$$Y_t = f(X_t, t),$$

es nuevamente una integral estocástica y se puede representar como

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(dX_t)^2. \quad (\text{E.33})$$

Para nuestro caso, considérese en el lema de Itô el proceso definido por la EDE (E.32) y a Y_t dependiendo solo de la variable S , entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial

$$df = \sigma S \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt. \quad (\text{E.34})$$

Este es el lema de Itô relativo a cambios pequeños en una función de variables aleatorias.

Si se generaliza el Lema de Itô se obtiene el siguiente resultado.

Se considera una función $f(S, t)$ con variables S y t . De acuerdo al lema de Itô se llega a la ecuación

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt. \quad (\text{E.35})$$

Para una demostración rigurosa véase ([55]).

E.1.4. Valuación de una opción europea mediante la ecuación de Black-Scholes

La solución a esta ecuación ofrece con un alto índice de confiabilidad el precio de una opción, por lo cual en esta sección se discutirá con más detalle.

Se presentan a continuación algunos hechos para poder entender mejor la ecuación de Black-Scholes.

- 1) El precio del activo subyacente, S , es un proceso lognormal que satisface la EDE (E.32).
- 2) El interés libre de riesgo, r , y la volatilidad del activo, σ , son conocidas como funciones del tiempo sobre la vida de la opción (por simplicidad se considerarán en lo que sigue constantes).
- 3) No hay costos de transacción asociados con las inversiones de portafolio.
- 4) El activo subyacente no proporciona dividendos durante la vida de la opción.
- 5) No existen posibilidades de arbitraje.

Por el principio de no arbitraje (ver subsección 3.5), algún portafolio que puede replicar el pago de una opción debe tener el mismo valor que el de la opción. El análisis de Black-Scholes utiliza un argumento dinámico de cobertura para crear un portafolio, el cual replica al pago de la opción.

En resumen, un inversionista no puede tener ganancias excesivas sin sufrir ningún riesgo. Esta importante suposición implica que la ganancia de algún portafolio sin riesgo esta asociada a una tasa de interés libre de riesgo.

- 6) Las transacciones del activo subyacente pueden efectuarse de manera continua en el tiempo.
- 7) Ventas en corto son permitidas. Se supone que se puede comprar y vender un número (no necesariamente entero) de activos subyacentes.

Ahora se construirá la ecuación de Black-Scholes utilizando como base el lema de Itô.

Supóngase que se tiene una opción, de compra o venta, con precio $V_{Eu}(S, t)$, que depende de S y t .

Usando el lema de Itô (E.35),

$$dV_{Eu} = \sigma S \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} + \frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} \right) dt. \quad (\text{E.36})$$

Esto da el camino aleatorio seguido por V_{Eu} . Se construirá un portafolio replicador de tal forma que se elimine la componente aleatoria mediante la elección adecuada de cierto número $-\Delta$.

El valor del portafolio es:

$$\pi = V_{Eu} - \Delta S. \quad (\text{E.37})$$

Por consiguiente el incremento en el valor de este portafolio en cada paso del tiempo es:

$$d\pi = dV_{Eu} - \Delta dS. \quad (\text{E.38})$$

Aquí Δ se mantiene fijo en este intervalo.

Sustituyendo (E.32) y (E.36) en (E.38) se obtiene:

$$d\pi = \sigma S \left(\frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} + \frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt \quad (\text{E.39})$$

se puede eliminar la componente aleatoria escogiendo a

$$\Delta = \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S}, \quad (\text{E.40})$$

Note que Δ es el valor de $\partial V/\partial S$ al comienzo de cada paso del tiempo dt . Entonces se obtiene un portafolio cuyo incremento es completamente determinístico:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} \right) dt. \quad (\text{E.41})$$

Si se consideran los conceptos de arbitraje y oferta y demanda, con la suposición de no costos de transacción. La ganancia de un monto π invertido en activos sin riesgo tendrá un crecimiento de $r\pi dt$ en un tiempo dt . Si el lado derecho de (E.41) fuera mayor que este monto, un oportunista podrá garantizar un beneficio sin riesgo pidiendo prestado un monto π e invertirlo en el portafolio. La ganancia de ésta estrategia será mayor que el costo del préstamo. Inversamente, si el lado derecho de (E.41) fuera menor que $r\pi dt$ entonces el oportunista acortará el portafolio e invertirá π en el banco. Ambas estrategias del oportunista harán un beneficio instantáneo sin riesgo, sin costo. La existencia de cada estrategia del oportunista con la habilidad de un negocio a bajo costo asegura una ganancia en el portafolio y un monto sin riesgo más o menos igual. Entonces para garantizar ausencia de arbitraje, será lo mismo invertir en el portafolio que invertir el dinero en el banco. Por lo tanto se tiene de hecho la igualdad:

$$r\pi dt = \left(\frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} \right) dt, \quad (\text{E.42})$$

sustituyendo (E.37) y (E.40) en (E.42) se tiene:

$$\frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} - rV_{Eu} = 0, \quad (\text{E.43})$$

que se conoce como *Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes*.

De la ecuación (E.43) se observa que:

- a) Δ es la tasa de cambio en el precio de una opción en un portafolio de opciones con respecto a S , la cual es también conocida como cobertura del portafolio.
- b) El operador lineal diferencial L_{BS} dado por:

$$L_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r,$$

tiene una interpretación financiera: es una medida de la diferencia entre la ganancia si se invierte en el portafolio (E.37) y la ganancia al depositarlo en el banco.

- c) La ecuación de Black-Scholes no contiene a μ , es decir, la valuación de una opción es independiente de que tan rápidamente crece un activo.
- d) La ecuación es de tipo retrógrado (*backwards*).

Ahora se determinarán las condiciones de frontera para una opción de compra y una opción de venta.

Condiciones de frontera y final para opciones europeas

Para una opción de compra el pago al expirar se denota por $C_{Eu}(S, T)$ con precio de ejercicio E y fecha de expiración T .

La condición final puede ser determinada fácilmente en $t = T$, pues está dada por:

$$C_{Eu}(S, T) = \max(S - E, 0).$$

Las condiciones de frontera son determinadas por el precio del activo cuando $S = 0$ y $S \rightarrow \infty$ de la siguiente manera.

- 1) Si $S = 0 \Rightarrow dS = 0$, por lo tanto S no cambia (de E.32).
- 2) Si $S = 0 \Rightarrow$ al expirar el pago es $C_{Eu}(0, t) = 0$.

3) Si $S \rightarrow \infty$ el precio es $C_{Eu}(S, t) = S - E \sim S$.

Análogamente para una opción de venta, la condición final sería el pago

$$P_{Eu}(S, T) = \max(E - S, 0).$$

En el caso límite en el que $S = 0$, el pago final debe ser ciertamente E y por consiguiente:

$$P_{Eu}(0, t) = Ee^{-r(T-t)}.$$

Más generalmente se obtiene:

$$P_{Eu}(0, t) = Ee^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}.$$

Si $S \rightarrow \infty$, el precio de la opción $P_{Eu}(S, t) \rightarrow 0$.

E.1.5. Solución explícita de la ecuación de Black-Scholes para opciones europeas

Para poder encontrar el precio de una opción es necesario entonces resolver la ecuación de Black-Scholes. Para ello se tiene una herramienta muy útil que es la ecuación de calor, ya que después de hacer una serie de transformaciones adecuadas, la ecuación de Black-Scholes se reduce a la ecuación de calor, que es posible resolver explícitamente.

Haciendo los siguientes cambios de variable en la ecuación (E.43),

$$S = Ee^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{y} \quad C_{Eu} = Ev(x, \tau)$$

y después el cambio de variable $v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$, se llega a

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad \tau > 0,$$

donde

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x - \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} u(x, \tau),$$

con $u(x, 0) = u_0(x) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0\right)$, con $k_1 = r/\frac{1}{2}\sigma^2$.

La solución de la ecuación de difusión es:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds, \quad (\text{E.44})$$

donde $u_0(x)$ es $u(x, 0)$.

Si se regresa a las variables originales

$$x = \log\left(\frac{S}{E}\right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \quad \text{y} \quad C_{Eu} = Ev(x, \tau),$$

se tiene que:

$$C_{Eu}(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (\text{E.45})$$

donde

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

$N(\cdot)$, es la función de distribución acumulativa para una distribución normal,

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

y

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

(E.45) es la solución explícita a la ecuación de Black-Scholes.

Apéndice F

Cambio de medida y fórmula de Samuelson

F.1. Cambio de medida representación de martingalas

La idea principal de la técnica de cambio de medida consiste en introducir una nueva medida de probabilidad llamada función de densidad, la cual generalmente no es una función de densidad de probabilidad.

F.1.1. Probabilidades equivalentes

Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad. Una medida de probabilidad Q en (Ω, A) es absolutamente continua relativa a P si

$$\forall a \in A \quad P(a) = 0 \Rightarrow Q(a) = 0.$$

Teorema 23 Q es absolutamente continua relativa a P si y solo si existe una variable aleatoria no negativa Z en (Ω, A) tal que

$$\forall a \in A \quad Q(a) = \int_a Z(w) dP(w).$$

Z es llamada la densidad de Q relativa a P y algunas veces es denotada por dQ/dP .

F.1.2. Teorema de Girsanov

Sea $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado bajo un movimiento browniano estándar $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ en el intervalo de tiempo $[0, T]$.

Teorema 24 Sea $(q_t)_{0 \leq t \leq T}$ un proceso adaptado que satisface $\int_0^t q_s^2 ds < \infty$ c.s. y tal que el proceso M_t es definido por

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t q_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t q_s^2 ds\right), \quad (\text{F.46})$$

es una martingala. Entonces bajo la probabilidad $P^{(M)}$ con densidad M_T relativa a P , el proceso $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ definido por $W_t = B_t + \int_0^t q_s ds$, es un movimiento browniano.

F.1.3. Estimación y cobertura de una opción en el modelo de Black-Scholes

- i) Black-Scholes describen el comportamiento del precio como un modelo a tiempo continuo con un activo sin riesgo (con precio S_t al tiempo t) y una acción sin riesgo, llamada bono (con precio β_t al tiempo t), ésta última descrita como la ecuación diferencial determinística

$$d\beta_t = r\beta_t dt, \quad t \in [0, T], \quad (\text{F.47})$$

donde $r > 0$ es la tasa de interés del bono.

- ii) Se supone que el precio del subyacente es determinado por la siguiente ecuación diferencial parcial

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad t \in [0, T], \quad (\text{F.48})$$

donde μ y σ son constantes, la primera es la tasa de crecimiento y la segunda es la volatilidad, ambas del activo subyacente respectivamente, (B_t) es el movimiento browniano estándar y T es el tiempo de maduración o ejercicio de la opción.

La solución cerrada de dicha ecuación está dada por

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right), \quad (\text{F.49})$$

donde S_0 es el precio al tiempo 0. Es importante mencionar que S_t es considerado un proceso lognormal.

- iii) El portafolio al tiempo t consiste de a_t unidades del subyacente y b_t acciones del bono. Así el valor de dicho portafolio al tiempo t es

$$V_t = a_t S_t + b_t \beta_t, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{F.50})$$

iv) El portafolio es autofinanciable, es decir,

$$dV_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{F.51})$$

v) Al tiempo de maduración, V_T es igual a la reclamación contingente $h(S_T)$ para alguna función h dada. En el caso de una función de compra europea se tiene el pago, $h(s) = (S - E)^+$, donde E es el precio de ejercicio de la opción y análogamente para una opción de venta, $h(s) = (E - S)^+$.

Considerando el modelo anterior, se probará que existe una probabilidad equivalente a P , bajo la cual el precio del activo descontado $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ es una martingala. De la EDE satisfecha por (S_t) , se tiene

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= \tilde{S}_t ((\mu - r)dt + \sigma dB_t). \end{aligned} \quad (\text{F.52})$$

Consecuentemente, si se considera a $W_t = B_t + (\mu - r)t/\sigma$,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t.$$

Entonces por el teorema de Girsanov, con $q_t = (\mu - r)/\sigma$, existe una probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un movimiento browniano estándar.

Se admitirá que la definición de una integral estocástica (Apéndice C) es invariante por el cambio de probabilidad equivalente. Entonces bajo la probabilidad P^* , se deduce que (\tilde{S}_t) es una martingala y que

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right). \quad (\text{F.53})$$

Suponiendo que en el modelo de Black-Scholes existe una estrategia autofinanciable (a_t, b_t) tal que el valor de V_t del portafolio al tiempo t está dada por (F.50) y que V_T es igual a la reclamación contingente $h(S_T)$.

Entonces el valor del portafolio al tiempo t es

$$V_t = E_Q \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) \mid F_t \right], \quad t \in [0, T], \quad (\text{F.54})$$

donde $E_Q(A \mid F_t)$ denota la esperanza condicional de la variable aleatoria A , dada la filtración F_t bajo la nueva medida de probabilidad Q .

F.2. Fórmula de Samuelson

Valuación de opciones europeas mediante la fórmula de Samuelson

Considérese un modelo financiero de un periodo en el que hay una acción con valor inicial S_0 y valor final S_T , un bono con precio unitario y ganancia e^{rT} y sea $g(S_T)$ el valor de un derivado de tipo europeo.

Supóngase que el proceso S_t considera una tasa de rendimiento esperado μ (medida física P) al tiempo T definida como

$$e^{\mu T} = \frac{E_P(S_T)}{S_0}.$$

La ganancia para asegurar la pérdida potencial causada al ejercer la opción, cuando es justa, está dada como la pérdida esperada cuando se ejerce en valor presente. Entonces la tasa de rendimiento esperado de S_T es $e^{\mu T}$ y su valor presente es $e^{-\mu T} S_T$.

Teorema 25 *El precio $p(g)$ de un derivado $g(S_T)$ está dado por*

$$p(g) = e^{-rT} E_P \left[g \left(\frac{S_T}{E_P(S_T)} S_0 e^{rT} \right) \right]. \quad (\text{F.55})$$

donde E_P representa la esperanza matemática con respecto a la medida física y r es la tasa de rendimiento libre de riesgo.

Este teorema no es más que la esperanza del derivado valuada en el valor presente de S_T , multiplicada por un uno (e^{-rT+rT}). Aquí e^{-rT} representa el descuento determinístico.

Es interesante observar que la fórmula de Samuelson no hace alusión a una distribución en particular, lo que es de gran utilidad cuando la distribución de S_T es cualquiera.

Como un caso particular se puede obtener la fórmula de Black-Scholes si se supone el modelo log-normal, es decir S_T puede escribirse como

$$dS_T = \mu S dt + \sigma S dX_T$$

cuya solución está dada por

$$S_T = S_0 e^{(\mu T - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma X_T}.$$

Entonces si se sustituye el valor de S_T y la correspondiente $S_0/E_P(S_T)$, se obtiene

$$p(g) = e^{-rT} E_Q \left[g \left(\frac{S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma X_T}}{S_0 e^{\mu T}} S_0 e^{rT} \right) \right] \quad (\text{F.56})$$

$$= e^{-rT} E_Q [g(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma X_T})]. \quad (\text{F.57})$$

aquí E_Q es la esperanza matemática con respecto a la medida neutral, es decir, libre de riesgo. En este caso se obtiene una medida libre de riesgo puesto que la esperanza no depende del valor de μ , sino únicamente de r , la cual es tasa de rendimiento libre de riesgo. Para cambiar de la medida física a la medida neutral ver las ecuaciones (F.52, F.53 y F.54).

Así se tiene la solución

$$p(g) = S_0 N(d_1) - E e^{-rT} N(d_2).$$

donde $N(\cdot)$ corresponde a la función de distribución acumulativa de una normal. La cual coincide con la solución analítica obtenida en Black-Scholes.

Apéndice G

Riesgo de crédito

G.1. Definiciones complementarias

Definición 20 (*Riesgo*) . *Se define como la posibilidad de una pérdida financiera debida a la componente aleatoria en la variabilidad del mercado.*

El riesgo se puede dividir de la siguiente forma:

1. Riesgo específico o no sistemático. Es la componente del riesgo asociada con una posición simple, es decir, afecta sólo a un sector del mercado.
2. Riesgo no específico o sistemático. Es el asociado con factores que afectan a todo el mercado en general.
3. Riesgo de portafolio. Es la varianza de la ganancia, es decir, es la diferencia entre la ganancia real y la ganancia esperada.

Definición 21 (*Crédito*) . *“Término utilizado para referirse a las transacciones que implican una transferencia de dinero que debe devolverse transcurrido cierto tiempo. Por tanto, el que transfiere el dinero se convierte en acreedor y el que lo recibe en deudor; los términos crédito y deuda reflejan una misma transacción desde dos puntos de vista contrapuestos.”*

Definición 22 (*Calidad de crédito de una obligación*) . *Se refiere a la habilidad de la contraparte a cumplir su obligación. Esto abarca ambas, la probabilidad de incumplimiento de la obligación y la tasa de recuperación anticipada.*

Para poner la exposición y la calidad de crédito en perspectiva, cada riesgo incluye dos elementos: la exposición y la incertidumbre. Para el riesgo de crédito, la exposición del crédito corresponde al primero y la calidad de crédito representa el segundo.

Para préstamos a personas físicas o pequeños negocios, la calidad de crédito es evaluada a través de un proceso de calificación de crédito. Para extender el crédito, un banco u otro prestamista obtendrá información de la parte que solicita el préstamo. En el caso de un banco que emite tarjetas de crédito, esta puede incluir la parte del ingreso anual, existencia de deudas, si cuenta o es dueño de su casa, etc. Una fórmula estándar es aplicada a la información para producir un número el cual es llamada calificación de crédito. De acuerdo a esta calificación, la institución prestamista decidirá si extiende el crédito o no.

Definición 23 (*Análisis de crédito*) . *Es usado para describir algún proceso para evaluar la calidad de crédito de la contraparte.*

Definición 24 (*Analista de crédito*) . *Es la persona o personas que se dedicarán a revisar la información de la contraparte. Esta puede incluir su hoja de balance, estado de ingreso, ambiente económico actual, etc. Ellos pueden también estimar la naturaleza exacta de la obligación.*

G.2. Estimación de derivados con contraparte riesgosa

Los derivados financieros con riesgo de incumplimiento en la contraparte pueden ser estimados usando muchos de los modelos mencionados anteriormente de la siguiente forma:

- a) *Modelos del valor de la firma.* El primer modelo de valuación que direcciona el problema de la contraparte riesgosa, fue hecho por Johnson y Stulz(1987). Ellos también introducen el término de la opción vulnerable para una opción que contiene riesgo de incumplimiento de la contraparte. Su aproximación es una extensión del modelo de bono corporativo de Merton. Específicamente se supone que la función de pago de una opción de compra vulnerable está dada por

$$\Lambda(T) = \min(V(T), \max(S(T) - E)),$$

donde $V(T)$ es el valor de la contraparte de las acciones de la firma, $S(T)$ es el valor del activo subyacente y E es el precio de ejercicio de la opción.

Existe una extensión del modelo de Johnson y Stulz para muchas pequeñas reclamaciones, considerando la siguiente función de pago para una opción de compra

$$\Lambda(T) = \max(S(T) - E, 0) \min\left(\frac{\Lambda}{V(T)} D, 1\right).$$

Otros estudiosos de estos modelos son Hull & White(1992,1995), ellos consideran el incumplimiento de la firma en sus obligaciones cuando el valor de la firma alcanza una frontera exógena específica. La tasa de cobertura es también exógena y se supone cero en su implementación. También consideran la correlación entre el valor de la firma y el valor del activo subyacente. Obtienen los precios de las opciones vulnerables construyendo un árbol trinomial.

Klein (1996) supone que cada reclamación no pagada es insignificante con respecto a todas las reclamaciones. En caso de bancarrota al madurar cada dueño de la reclamación recibe una acción del resto de las acciones de acuerdo al valor de la reclamación relativa a la suma de los valores de todas las reclamaciones restantes.

- b) *Modelos de intensidad.* Algunos de los modelos de intensidad también pueden ser usados para valuar opciones vulnerables. El precio de una reclamación contingente es

$$X_t = B(t)E_Q \left[B^{-1}(T)X(T) \mid F_t \right], \quad (\text{G.58})$$

donde $B(t)$ es el mercado de dinero libre de riesgo. Este hecho pertenece también a las reclamaciones vulnerables. La única diferencia en el caso de las reclamaciones vulnerables es que la función de pago $X(t)$ es diferente.

Entre los autores se encuentran Jarrow & Turnbull(1995), quienes llegan a una simple representación para opciones con crédito riesgoso, dada por la siguiente representación

$$X^d(t) = X(t)E_Q[e(T) \mid F_t],$$

$X(T)$ en (G.58) es $X(T)e(T)$ para la reclamación riesgosa y $e(T)$ es independiente de la tasa de interés.

Los modelos que pueden ser extendidos a opciones vulnerables fueron estudiados por: Lando(1994); Jarrow, Lando & Turnbull(1995,1997); Duffie & Singleton(1995) y Duffie, Schoroder y Skiadas(1996). El resultado principal de estos modelos de intensidad es que el riesgo de crédito puede ser tomado en cuenta cambiando la tasa de descuento de acuerdo a

$$r^d(t) = r(t) - \lambda(t)(1 - \delta(t)),$$

donde $\lambda(t)$ es la intensidad de incumplimiento y $1 - \delta(t)$ apunta en la reclamación cuando el incumplimiento ocurre. La representación general del precio

de la reclamación contingente de acuerdo a la ecuación (G.58) cambia

$$X^d(t) = E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) - \lambda(s)(1 - \delta(s)) ds \right) X(T) \mid F_t \right].$$

- c) *Swaps*. Estos poseen dos problemas especiales para la estimación de modelos de riesgo de crédito. Primero, los swaps involucran una serie de flujos de efectivo. Esto hace al tiempo de incumplimiento modelado crítico a un análisis. Segundo, el riesgo de incumplimiento está en dos lados, es decir, ambas partes de la firma a un swap puede incumplir. Además, los contratos de swaps generalmente contienen redes implícitas de acuerdos con el efecto de que sólo el pago de diferencias son pagadas en lugar de un cambio de pagos totales.

La valuación de los swaps con riesgo de incumplimiento fue primeramente considerado por Sundaresan(1991), el incorpora el resgo de incumplimiento como una prima instantánea en la tasa corta. Se especifica una prima de incumplimiento x dada por el proceso de Cox-Ingersoll-Ross $dx = b(a - x)dt + \sigma\sqrt{x}dW(t)$, donde $W(t)$ no está correlacionado con el movimiento browniano del proceso de la tasa corta.

Cooper y Mello(1991) direcciona los efectos del riesgo de crédito en swaps entre la estructura del valor de la firma de Merton. Consideran el caso en que la firma riesgosa entra dentro de un swap de acuerdo con la contraparte sin riesgo. Si la firma no incumple, el pago del swap simple a la parte sin riesgo es $\Lambda(T) = F(T) - X(T)$, donde F y X son los valores de las partes fijas y variables del swap, respectivamente. Suponen que existe sólo un pago final sin provocación, sin embargo la contraparte debe hacer el pago si el riesgo de la firma está ya en bancarrota. Muestran que bajo estas condiciones en el pago, el valor del swap puede ser escrito como

$$S_t = f_t - X_t - P_t(V, X, F).$$

S_t es el valor del swap, F_t y X_t son los valores fijos y variables del swap al tiempo t , anterior al pago y $P_t(V, X, F)$ el valor de una opción en el máximo del valor de la firma y el pago variable con un precio de ejercicio del valor del pago fijo. Aplican este resultado a la tasa de interés y a los swaps actuales y extienden su análisis para cubrir reglas de pago alternativas, considerando el caso donde los pagos son hechos sólo si ambas partes son solventes y el caso donde las reclamaciones del swap son pagadas antes de las reclamaciones del bono, es decir, donde las reclamaciones del swap son mayores a las reclamaciones del bono. En este caso, la expresión para el precio del swap se simplifica como:

$$S_t = f_t - X_t - P_t(V + X, F),$$

donde $P_t(V + X, F)$ es una opción de venta estándar al valor fijo del swap en la fecha de pago. Esta opción es equivalente al de una opción de venta que aparece en el precio de un bono incumplido en el modelo de Merton.

Sorensen y Bollier(1994) analizan la emisión de un riesgo de incumplimiento bilateral. Ellos usan una aproximación tradicional, basada en probabilidades empíricas de incumplimiento, no en un modelo de riesgo de crédito.

Hull y White(1995) usan su modelo de riesgo de crédito, con respecto al valor de la firma, para estimar los swaps sujetos al incumplimiento por una contraparte.

Jarrow y Turnbull(1996a) extienden la version del tiempo discreto de su propia aproximación a un swap bilateral de incumplimiento riesgoso. En lugar de un sólo proceso de bancarrota, hay dos procesos, uno para cada proceso de incumplimiento. Las intensidades son exógenas y constantes.

G.3. Estimación de derivados de crédito

Los derivados de crédito son derivados con riesgo puro de crédito, donde el pago es dependiente de una sólo variable de crédito y no es afectada por otras variables tales como la tasa de interés. Se distinguen entre el seguro de deuda y derivados spread.

- a) *Seguro de deuda.* La forma más simple de derivados de crédito son contratos de seguro de deuda. Dichos seguros o deudas garantizadas han existido por un largo tiempo y son designados para cubrir la pérdida financiera completa, resultado de un evento de incumplimiento. Todos los modelos de riesgo de crédito que dan estimaciones para el bono de crédito riesgoso pueden también estimar simples derivados de crédito. La estimación del seguro es determinado por la diferencia de los precios del incumplimiento libre y los bonos incumplidos. Estos fueron estudiados por Merton(1977,1978).
- b) *Derivados spread.* Estos derivados se distinguen de los derivados de crédito tradicionales, en que ellos no aseguran la pérdida de incumplimiento, pero dan un cambio de la calidad del crédito. Este cambio en la calidad del crédito es usualmente medida en la forma de spreads dados. Sin embargo, derivados con

solvencia son también concebibles. Simples modelos de crédito tales como los presentados anteriormente y generalmente modelos de riesgo de crédito para bonos riesgosos no pueden ser usados para valuar derivados de crédito spread, así que algunas extensiones son posibles.

Los autores que hacen referencia a estos modelos son: Das(1995), Longstaff y Schwartz(1995b) y Pierides(1997).

G.4. Como construir matrices de transición

Construir matrices de transición de ciclo dependiente es similar usando las calificaciones de crédito (exposición corporativa) o clasificación de crédito (exposición detallada) y los pasos a seguir son los siguientes:

1. **Determinar el espacio de estados S .** En el caso de portafolios corporativos cada calificación de crédito puede corresponder a un estado particular en S . En el caso de portafolios detallados, puede ser más apropiado definir rangos de clasificaciones para cada estado.
2. **Determinar el tamaño del paso de la transición.** El tamaño del paso de la transición no sólo dependerá de los objetivos de la institución sino también de la disponibilidad de las estadísticas macroeconómicas afines.
3. **Colectar datos de las calificaciones de crédito.** Colectar datos de las calificaciones de crédito de los deudores considerando un horizonte de tiempo razonable. Estos datos serán subsecuentemente usados para el desarrollo de la matriz de transición. Es aconsejable considerar un ciclo económico completo que permita sesgar la estimación y en el caso de prolongar la prosperidad del crédito usar de dos a cinco años de ciclos de actividad.
4. **Construcción de la matriz de transición $P(t)$.** Una vez que las exposiciones han sido clasificadas dentro de sus respectivos estados en el espacio S , la matriz de transición para un periodo en particular puede ser construido. Para hacer esto, sólo las exposiciones que tengan una calificación al comienzo del periodo t y $k + 13$ meses más tarde deberían ser considerados.

Si se llama $N(t)_i$ al número de exposiciones que están en el estado i al tiempo t , y $N(t+k)_{ij}$ el número de exposiciones que estuvieron en el estado i al tiempo t y están en el estado j al tiempo $t+k$, se tiene:

$$p(t)_{ij} = \frac{N(t+k)_{ij}}{N(t)_i - N(t+k)_{iNR}},$$

donde NR representa la exposición no estimada.

Es importante tener en mente que la exposición de incumplimiento al tiempo t debería ser considerada como la exposición de incumplimiento al tiempo $t + k$. La metodología supone que el estado de incumplimiento es un estado absorbente.

5. **Determinar el factor de riesgo y construir el vector $r(t)$.** Un factor de riesgo macroeconómico debería ser determinado. Por construcción este factor de riesgo debería tomar valores mayores cuando el riesgo se incrementa. Este factor puede ser tan simple como una variable macroeconómica o el resultado de una regresión econométrica.
6. **Hacer la regresión de la matriz de transición $P(t)$ con el vector $r(t)$.** La regresión dará los valores de las matrices A y B .
7. **Implementar las matrices de transición.**

Apéndice H

Solución explícita de la ecuación de Fokker-Planck

En este apéndice se verificará que la función de densidad, determinada para el caso particular en que S sigue un proceso lognormal (Black-Scholes), dada por

$$\rho(S, t; S^*, t^*) = \frac{1}{\sigma S^* \sqrt{2\pi(t^* - t)}} e^{-\left[\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t^* - t)\right]^2 \frac{1}{2\sigma^2(t^* - t)}}. \quad (\text{H.59})$$

satisface tanto la ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck, así como la ecuación de Kolmogorov hacia atrás.

Sean S el valor inicial del activo subyacente y t tiempo inicial y S^* , t^* son los valores futuros correspondientes. Entonces la función de densidad mide la probabilidad de que el activo subyacente tome el valor de S^* al tiempo t^* , dado que al tiempo inicial (o anterior) t tomó el valor de S .

Lema 11 *La función de densidad (H.59) satisface la ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck dada por*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^{*2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^{*2}} + (2\sigma^2 - \mu)S^* \frac{\partial \rho}{\partial S^*} + (\sigma^2 - \mu)\rho. \quad (\text{H.60})$$

Demostración

Para verificar que la ecuación (H.59) satisface la ecuación diferencial parcial (H.60), hay que determinar las derivadas correspondientes, pero antes se define

$$A = \frac{1}{\sigma S \sqrt{2\pi}}$$

$$B = e^{-\left[\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-t_0)\right]^2 \frac{1}{2\sigma^2(t-t_0)}}.$$

De acuerdo a las definiciones anteriores, se tiene $\rho(S, t; S^*, t^*) = AB$.

Tomando las derivadas con respecto a S^* y t^* correspondientes de la ecuación (H.59) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial S^*} &= -\frac{1}{\sigma S^{*2} \sqrt{2\pi}(t^* - t)} B + \frac{1}{\sigma S^* \sqrt{2\pi}(t^* - t)} B \left[\frac{-2 \left(\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t^* - t) \right)}{2S^* \sigma^2 (t^* - t)} \right] \\ &= -\frac{AB}{S^*} + ABK, \end{aligned}$$

con

$$K = \left[\frac{-2 \left(\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t^* - t) \right)}{2S^* \sigma^2 (t^* - t)} \right].$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^{*2}} &= \frac{2B}{\sigma S^{*3} \sqrt{2\pi}(t^* - t)} - \frac{BK}{\sigma S^{*2} \sqrt{2\pi}(t^* - t)} - \frac{BK}{\sigma S^{*2} \sqrt{2\pi}(t^* - t)} + \frac{BK^2}{\sigma S^* \sqrt{2\pi}(t^* - t)} \\ &\quad + \frac{B}{\sigma S^* \sqrt{2\pi}(t^* - t)} \left(\frac{-2}{2\sigma^2(t^* - t)} \left[\frac{(1/S^*)S^* - \log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t)}{S^{*2}} \right] \right) \\ &= 2\frac{AB}{S^{*2}} - 2\frac{ABK}{S^*} + ABK^2 \\ &\quad + AB \left(\frac{-2}{2\sigma^2(t^* - t)} \left[\frac{1 - \log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t)}{(S^*)^2} \right] \right) \\ &= 2\frac{AB}{S^{*2}} - 2\frac{ABK}{S^{*2}} + ABK^2 \\ &\quad + AB \left(\frac{-2}{2\sigma^2 S^{*2}(t^* - t)} + \frac{2(\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t))}{2\sigma^2 S^{*2}(t^* - t)} \right) \\ &= 2\frac{AB}{S^{*2}} - 2\frac{ABK}{S^*} + ABK^2 - \frac{AB}{\sigma^2 S^{*2}(t^* - t)} - \frac{ABK}{S^*}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t^*} &= \frac{-2\pi B}{2\sigma S^*(2\pi(t^* - t))^{3/2}} + AB \left[\frac{2(\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t))(\mu - (1/2)\sigma^2)}{2\sigma^2(t^* - t)} \right] \\ &\quad + AB \left[\frac{(\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t))^2}{2\sigma^2(t^* - t)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\pi B}{\sigma S^*(2\pi(t^* - t))^{3/2}} - AB \left[S^* K(\mu - (1/2)\sigma^2) + \frac{S^* K(\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t))}{2(t^* - t)} \right] \\
&= \frac{-\pi AB}{2\pi(t^* - t)} - AB \left(S^* K(\mu - (1/2)\sigma^2) - \frac{1}{4} S^{*2} K^2 2\sigma^2 \right) \\
&= \frac{-AB}{2(t^* - t)} - AB \left(S^* K\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 S^* K - \frac{1}{2} S^{*2} K^2 \sigma^2 \right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo las respectivas derivadas en la ecuación (H.60) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t^*} &= \frac{1}{2}\sigma^2 S^{*2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^{*2}} + (2\sigma^2 - \mu) S^* \frac{\partial \rho}{\partial S^*} + (\sigma^2 - \mu)\rho \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 S^{*2} \left[\frac{2AB}{S^{*2}} - \frac{3ABK}{S^*} + ABK^2 - \frac{AB}{S^{*2}\sigma^2(t^* - t)} \right] \\
&\quad + (2S^*\sigma^2 - \mu S^*) \left(\frac{-AB}{S^*} + ABK \right) + (\sigma^2 - \mu)AB \\
&= AB \left[\sigma^2 - \frac{3}{2}\sigma^2 S^* K + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{*2} K^2 - \frac{1}{2(t^* - t)} - 2\sigma^2 + \mu + 2S^*\sigma^2 K - \mu S^* K + \sigma^2 - \mu \right] \\
&= AB \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^{*2} K^2 - \frac{1}{2(t^* - t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^* K - \mu S^* K \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función de densidad (H.59) satisface la ecuación de Fokker-Planck (H.60).§

Lema 12 *La función de densidad (H.59) satisface la ecuación de Kolmogorov hacia atrás siguiente*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} - \mu S \frac{\partial \rho}{\partial S} \quad (\text{H.61})$$

Demostración

Análogo a la demostración anterior, se determinan las derivadas parciales de la función de densidad, pero ahora con respecto a S y t . Se consideran A y B con los mismos valores que en la demostración anterior. Entonces las derivadas quedan como

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} = AB \left[\frac{\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t)}{S\sigma^2(t^* - t)} \right] = ABJ, \quad (\text{H.62})$$

con

$$J = \left[\frac{\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t)}{S\sigma^2(t^* - t)} \right].$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} &= ABJ^2 + AB \left[\frac{-(1/S)S\sigma^2(t^* - t) - [\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t)] (\sigma^2(t^* - t))}{(S\sigma^2(t^* - t))^2} \right] \\
 &= ABJ^2 + AB \left[\frac{-1}{S^2\sigma^2(t^* - t)} - \frac{J\sigma^2(t^* - t)}{S\sigma^2(t^* - t)} \right] \\
 &= ABJ^2 + AB \left[\frac{-1}{S^2\sigma^2(t^* - t)} - \frac{J}{S} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\pi B}{\sigma S^*(2\pi(t^* - t))^{3/2}} - AB \left[\frac{2(\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t)) (\mu - (1/2)\sigma^2)}{2\sigma^2(t^* - t)} \right] \\
 &\quad - AB \left[\frac{(\log(S^*/S) - (\mu - (1/2)\sigma^2)(t^* - t))^2}{2\sigma^2(t^* - t)^2} \right] \\
 &= \frac{\pi AB}{2\pi(t^* - t)} - AB \left[SJ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{S^2}{2}\sigma^2 J^2 \right] \\
 &= \frac{AB}{2(t^* - t)} - AB \left[SJ\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 SJ + \frac{S^2}{2}\sigma^2 J^2 \right].
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas en la ecuación (H.61) se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} - \mu S \frac{\partial \rho}{\partial S} \\
 &= -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left[ABJ^2 - \frac{AB}{S^2\sigma^2(t^* - t)} - \frac{JAB}{S} \right] - \mu SABJ \\
 &= -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 ABJ^2 + \frac{AB}{2(t^* - t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 ABJS - \mu SABJ \\
 &= \frac{AB}{2(t^* - t)} - AB \left[SJ\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 SJ + \frac{S^2}{2}\sigma^2 J^2 \right].
 \end{aligned}$$

Así la función de densidad satisface las ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante (Fokker-Planck). §

Apéndice I

Probabilidad del tiempo de salida

I.1. Ecuación del tiempo de salida

Independiente de la densidad de las probabilidades, existe otra función importante para caracterizar el comportamiento de un proceso estocástico, la cual puede verse como una aplicación a la ecuación de Fokker-Planck.

Se inicia el estudio de esta función considerando el caso unidimensional. Suponga que el dominio es la línea recta y que a lo largo de ésta se mueve un punto aleatorio para el cual la correspondiente función de densidad satisface la ecuación de Fokker-Planck (1.9).

Se calcula la probabilidad de que una trayectoria que parte del punto $x \in [a, b]$ al tiempo $t = 0$, salga de dicho intervalo en algún momento entre $[0, t]$ ⁷.

Se denota por $\rho(x, t)$ a la probabilidad requerida y se obtiene la ecuación diferencial parcial del tiempo de salida

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (\text{I.63})$$

Las condiciones inicial y de frontera son:

a) $\rho(x, 0) = 0$ si $x \in (a, b)$

⁷También se puede suponer el problema de la probabilidad de un punto aleatorio pasando sólo a través del lado derecho o izquierdo del intervalo, o finalmente, la probabilidad de no salir del intervalo. La ecuación diferencial parcial no cambiaría, sin embargo las condiciones de frontera serían diferentes para cada problema.

b) $\rho(a, t) = \rho(b, t) = 1$ para toda t .

Se investiga $\rho(x, t + \tau)$. Al tiempo inicial $t = 0$ el punto representativo está fijo en x y al tiempo τ la densidad de la probabilidad es $p(x, \tau, \epsilon)$. Entonces la probabilidad de salir del intervalo $[a, b]$ durante el tiempo pequeño τ es

$$\rho(x, t + \tau) = \int_a^b p(x, \tau, \epsilon) \rho(\epsilon, t) d\epsilon. \quad (\text{I.64})$$

Expandiendo $\rho(\epsilon, t)$ en series de Taylor, se encuentra

$$\begin{aligned} \rho(\epsilon, t) = & \rho(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} (\epsilon - x) + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} (\epsilon - x)^2 \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^3 \rho[x + \theta(\epsilon - x), t]}{\partial x^3} (\epsilon - x)^3. \end{aligned}$$

Ahora substituyendo el desarrollo anterior en la ecuación (I.64), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \tau) = & \rho(x, t) \int_a^b p(x, \tau, \epsilon) d\epsilon + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \int_a^b p(x, \tau, \epsilon) (\epsilon - x) d\epsilon \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \int_a^b p(x, \tau, \epsilon) (\epsilon - x)^2 d\epsilon \\ & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \rho[x + \theta(\epsilon - x), t]}{\partial x^3} \int_a^b p(x, \tau, \epsilon) (\epsilon - x)^3 d\epsilon. \end{aligned} \quad (\text{I.65})$$

Dividiendo por τ y tomando el límite cuando $\tau \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación diferencial parcial del tiempo de salida

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (\text{I.66})$$

Las condiciones inicial y de frontera son:

a) $\rho(x, 0) = 0$ si $x \in (a, b)$

b) $\rho(a, t) = \rho(b, t) = 1$ para toda t .

I.2. Esperanza del tiempo de salida

La pregunta natural que surge es: ¿cuál es la esperanza $M(x)$ del tiempo de salida?, es decir, ¿cuál es, en promedio, el tiempo necesario para que el punto representativo x situado inicialmente dentro de (a, b) , salga de dicho intervalo por los extremos a o b ? Entonces la probabilidad de que el punto aleatorio salga del

intervalo durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$ es $(\partial\rho/\partial t)dt$, entonces la esperanza está dada por

$$M(x) = \int_0^\infty t \frac{\partial\rho}{\partial t} dt. \quad (\text{I.67})$$

Para obtener la ecuación diferencial para M , se deriva la ecuación (I.66) con respecto a t , se multiplican ambos lados por t y se integra de $(0, \infty)$, para llegar a

$$\int_0^\infty t \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} dt = f(x) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty t \frac{\partial\rho}{\partial t} dt + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty t \frac{\partial\rho}{\partial t} dt, \quad (\text{I.68})$$

integrando por partes el lado izquierdo de la ecuación anterior

$$\int_0^\infty t \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} dt = \left[t \frac{\partial\rho}{\partial t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial\rho}{\partial t} dt = -[\rho(x, t)]_0^\infty = -1, \quad (\text{I.69})$$

la ecuación diferencial requerida tiene la forma

$$\frac{1}{2} g^2(x) \frac{d^2M}{dx^2} + f(x) \frac{dM}{dx} = -1. \quad (\text{I.70})$$

Las condiciones de frontera son $M(a) = M(b) = 0$. De la misma formulación del problema se requiere que $M(x) > 0$.

I.2.1. Solución a la ecuación de la esperanza del tiempo de salida

Considérese el caso unidimensional de la esperanza $M_q(x)$ del tiempo de salida del punto representativo, desde el punto x a la posición q ($q < x$). Se sabe que $M(x)$ satisface la ecuación

$$\frac{1}{2} g^2(x) \frac{d^2M}{dx^2} + f(x) \frac{dM}{dx} + 1 = 0.$$

Hay que considerar la condición $M(q) = 0$, la solución se incrementa cuando $x \rightarrow \infty$. La derivada de la ecuación anterior tiene la forma

$$\frac{dM}{dx} = \left[C + \int_x^\infty \frac{2}{g^2(\epsilon)} e^{\rho(\epsilon)} d\epsilon \right] e^{\rho(x)}, \quad \rho(x) = 2 \int_0^x \frac{f(\epsilon)}{g^2(\epsilon)}. \quad (\text{I.71})$$

Para el caso en que $C = 0$, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{dM}{dx} = \left[\int_x^\infty \frac{2}{g^2(\epsilon)} e^{\rho(\epsilon)} d\epsilon \right] e^{\rho(x)}, \quad (\text{I.72})$$

integrando y recordando que $M(q) = 0$ cuando $x = q$, se encuentra

$$M_q(x) = \int_q^x \left[\int_\epsilon^\infty \frac{2}{g^2(y)} e^{\rho(y)} dy \right] e^{\rho(\epsilon)} d\epsilon. \quad (\text{I.73})$$

con

$$\psi(x) = \left[\int_x^\infty \frac{2}{g^2(y)} e^{\rho(y)} dy \right] e^{-\rho(x)}, \quad (\text{I.74})$$

es el recíproco de la velocidad media con la cual el punto representativo se mueve de la posición x a la posición q de derecha a izquierda. Similarmente, se encuentra que la esperanza de $M_p(x)$ del tiempo de transición del punto de la posición x a la posición p ($p > x$) es representado por la integral

$$M_p(x) = \int_x^p \left[\int_{-\infty}^\epsilon \frac{2}{g^2(y)} e^{\rho(y)} dy \right] e^{-\rho(\epsilon)} d\epsilon, \quad (\text{I.75})$$

donde

$$\bar{\psi}(x) = \left[\int_{-\infty}^x \frac{2}{g^2(y)} e^{\rho(y)} dy \right] e^{-\rho(x)}, \quad (\text{I.76})$$

es el recíproco de la velocidad media en el cual el punto representativo se mueve de la posición x a la posición p de derecha a izquierda.

Ejemplo 3. En este ejemplo se calcula la esperanza del tiempo de salida, correspondiente al ejemplo 1 (en donde se tiene un estado de equilibrio).

$$\begin{aligned} \rho(x) &= -\frac{kx^3}{4D} \\ \psi(x) &= \frac{1}{D} \left[\int_x^\infty e^{-\frac{ky^2}{2D}} dy \right] e^{+\frac{kx^2}{2D}}, \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{D} \left[\int_{-\infty}^x e^{-\frac{ky^2}{2D}} dy \right] e^{+\frac{kx^2}{2D}}. \end{aligned}$$

La esperanza del tiempo de salida de la posición $x = 0$ a la posición $x = p$ ($0 \leq p$) es

$$M_p(0) = \frac{1}{D} \int_0^p \left[\int_{-\infty}^\epsilon e^{-\frac{ky^2}{2D}} dy \right] e^{+\frac{k\epsilon^2}{2D}} d\epsilon.$$

Ejemplo 4. Se calcula la esperanza del tiempo de transición, para el sistema bi-estable (ejemplo 2).

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \frac{k}{4D} [2a^2x^2 - x^4] \\ \psi(x) &= \frac{1}{D} \left[\int_x^\infty e^{\frac{k}{4D}(2a^2y^2 - y^4)} dy \right] e^{+\frac{k}{4D}(2a^2x^2 - x^4)}, \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{D} \left[\int_{-\infty}^x e^{\frac{k}{4D}(2a^2y^2 - y^4)} dy \right] e^{+\frac{k}{4D}(2a^2x^2 - x^4)}.\end{aligned}$$

La esperanza matemática del tiempo de transición de la posición $x = -a$ al punto $x = p$ ($-a \leq p \leq +a$) es

$$M_p(-a) = \frac{1}{D} \int_{-a}^p \left[\int_{-\infty}^\epsilon e^{\frac{k}{4D}(2a^2y^2 - y^4)} dy \right] e^{-\frac{k}{4D}(2a^2\epsilon^2 - \epsilon^4)} d\epsilon.$$

Bibliografía

- [1] Ammann, M. (1999). *Pricing Derivative Credit Risk*, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Avellaneda, M. (2001). *Finance Theory and Asset-Allocation Arbitrage Pricing and Derivatives Term-Structure for Pricing and Hedging*, Quantitative Analysis in Financial Markets, Collected Papers of N.Y.U., Mathematical Finance Seminar, Vol. III., pp. 159-171.
- [3] Avellaneda, M. (1998). *Minimum-Entropy Calibration of Asset-Pricing Models*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Documenta Mathematica.
- [4] Avellaneda, M., Boyer-Olson, D., Busca, J. y P. Friz. (2003). *Reconstruction of Volatility: Pricing Index Options Using the Steepest-Descent Approximation*, RISK.
- [5] Bank, P. y H. Föllmer. (2003). *American Options, Multi-Armed Bandits, and Optimal Consumption Plans: A Unifying View*, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2002, Vol.1814, pp. 1-47.
- [6] Berestycki, H. y L. Nirenberg. (1991). *On the Method of Moving Planes and the Sliding Method*, Bol. Sociedad Brasileira de Matemáticas, Vol. 22, pp. 1-37.
- [7] Bessler, W. y H. Opfer. (2005). *Macroeconomic Factors and Stock Returns in Germany*, Center for Finance and Banking, Justus-Liebig-University Giessen, Germany.
- [8] Björk, T. (1998). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.
- [9] Bladt, M. y T. H. Rydberg. (1998). *An Actuarial Approach to Option Pricing under the Physical Measure and without Market Assumptions*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 22, pp. 65-73.
- [10] Boadie, M. y J. Detemple. (1996). *American Option Valuation: New Bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods*, The Review of Financial Studies, Vol.9, Núm. 4, pp. 1211-1250.

- [11] Bribiesca, J. C. (2006). *Risk Management: Impact of The Macroeconomic Variables in the Stock Market Sector*, EABR and ETLC, Florence Italy.
- [12] Brigo, D., Mercurio, F. y F. Rapisarda. (2001). *Lognormal-Mixture Dynamics and Calibrations to Market Volatility Smiles*, Product and Business Development Group, Banca IMI, San Paolo-IMI Group, pp. 1-25. (<http://www.damianobrigo.it/lognsmile.pdf>).
- [13] Brigo, D., Mercurio, F. y G. Sartorelli. *Alternative Asset-Price Dynamics and Volatility smile*, pp. 1-22. (<http://www.fabiomercurio.it/qfsmile.pdf>).
- [14] Cabré, X. (1995). *On the Alexandroff-Bakelman-Pucci Estimate and Reversed Hölder Inequality for Solutions or Elliptic and Parabolic Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLVIII, pp. 539-570.
- [15] Carr, P. y A. Hirsa. (2002). *Why Be Backward? Forward Equations for American Options*, Morgan Stanley/ Courant Institute, NYU., pp. 1-25.
- [16] Carr P., Jarrow R. y R. Myneni. (2006). *Alternative Characterizations of American Put Options*, Mathematical Finance, Vol. 2, Núm. 2, pp. 87-106.
- [17] Chesney, M. y M. Jeanblanc. (2003). *Pricing American Currency Options in a Jump Diffusion Model*, France, pp. 1-19.
- [18] Christ Church College. (2004). *Nonlinear Black Scholes Modelling: FDM vs FEM*, A thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for The MSc in Mathematical Finance, Oxford University.
- [19] Courant, R. y J. Fritz. (1974). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Traducción México, Limusa, Vol. I y II.
- [20] Dornbusch, R. y S. Fischer. (1981). *Macroeconomics*, Mc Graw-Hill, U.S.A.
- [21] Dupire, B. *Pricing and Hedging with Smiles*, Paribas Capital Markets, Swaps and Options Research Team, United Kingdom, pp. 1-9. (<http://www.baudlescuier.ovh.org/documents/Dupire.pdf>).
- [22] Elizondo R. y P. Padilla. (2008). *An Analytical Approach to Merton's Rational Option Pricing Theory*, Analysis and Application, World Scientific Pub. Co. Inc., Vol.6, Núm.2, pp. 169-182.
- [23] Evans L.C. (1998). *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, U.S.A.
- [24] Gage, M. y R. S. Hamilton. *The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves*, Journal Differential Geometry, Vol.23, Núm. 1, pp. 69-96.
- [25] Geske, R. y H. E. Johnson. (1984). *The American Put Option Valued Analytically*, The Journal of Finance, Vol. 39, Núm.5, pp. 1511-1524.

- [26] Gilbarg, D. y N. Trudinger. (1983). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag.
- [27] Houde, H. y W. Xiaonan. *A Fast Numerical Method for the Black-Scholes Equation of American Options*, SIAM. J. NUMER. ANAL., Vol. 41, Núm.6, pp. 2081-2095.
- [28] Hull, J. C. (2000). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall.
- [29] Humpe, A. y P. D. Macmillan. *Can Macroeconomic Variables Explain Long Term Stock Market Movement?*, pp. 1-22. (<http://www.st-andrews.ac.uk/crueff/papers/dp0511old.pdf>).
- [30] Hyungsok, A. y P. Wilmott. *On Trading American Options*, OCIAM, Oxford University.
- [31] James, M. y T. M. Koller. (2000). *Valuation in Emerging Markets*, Corporate Finance, The MCKINSEY Quarterly, Núm. 4: Asia Revalued, pp. 78-85.
- [32] Jarrow, R. A. (1998). *Preferences, Continuity and the Arbitrage Pricing Theory*, The Review of Financial Studies, Vol. 1, Núm. 2, pp. 159-172.
- [33] Jiménez, F. (2000). *Macroeconomía: Breve Historia y Conceptos Básicos*, pp. 1-55. (<http://www.pucp.edu.pe/economia/pdf/DDD171.pdf>).
- [34] Junt, P. J. y J. E. Kennedy. (2000). *Financial Derivatives in Theory and Practice*, John Wiley & Sons, England.
- [35] Lamberton, D. y S. Villeneuve. (2003). *Critical Price Near Maturity for an American Option on a Dividend-Paying Stock*, The Annals of Applied Probability, Vol. 13, Núm.2, pp. 800-815.
- [36] Laurence, P. y T-H. Wang. (2004). *What's a Basket Worth ?*, Risk Basket Options/ Cutting Edge, pp. 73-77.
- [37] Laurence, P. y T-H. Wang. *Sharp Upper and Lower Bounds for Basket Options*, Italy and Taiwan, pp. 1-59.
- [38] Lee, R. W. (2002). *Implied Volatility: Statics, Dynamics and Probabilistic Interpretation*, Forthcoming in Recent Advances in Applied Probability, pp. 1-7.
- [39] Leung, L. T. y W. S. Po-shing. (2002). *Valuation of American Options Via Basis Functions*, Technical Report No.2002-28, Department of Statistics, Stanford University, pp. 1-29.
- [40] Leung, L. T. y W. S. Po-Shing. (2004). *Valuation of American Options Via Basis Functions*, Automatic Control, IEEE Transactions on, Vol. 49, Núm. 3, pp. 374-385.

- [41] Levendorskii, S. (2004). *The American Put and European Options Near Expiry, Under Lévy Processes*, University of Leicester, Department of Mathematics, pp. 1-30.
- [42] Llenera-Garcés, F. (2000). *Una Nota Sobre Valoración de Opciones Americanas y Arbitraje*, Investigaciones Económicas, Vol. XXIV(I), pp. 207-218.
- [43] Longstaff, F. y E. Schwartz. (2001). *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, this paper is posted at the scholarship repository, University of California, <http://repositories.edlib.org/anderson/fin/1-01>.
- [44] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*, Oxford University Press.
- [45] Lyuu, Y. (2000). *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics and Algorithms*, Cambridge University Press, U.S.A.
- [46] *Macroeconomic Factors and the Correlation of Stock and Bond Returns*, pp. 1-51.
- [47] Matache A. M., Nitsche, P. A. y C. Schwab. (2003). *Wavelet Galerkin Pricing of American Options on Lévy Driven Assets*, Research Report Núm. 2003-06, Switzerland, pp. 1-26.
- [48] Méndez, R. E. (2007). *Correlación Temporal en la Valuación de Derivados*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas en proceso, UNAM.
- [49] Merton, R. C. foreword by P. A. Samuelson. (1995). *Continuous-Time Finance*, Blackwell, Massachusetts.
- [50] Meyer, G.H. (2001). *On Pricing American and Asian Options with PDE Methods*, Acta Math. Univ. Comeninae, Proceedings of Algorithmy 2000, Vol. LXX, Núm. 1, pp.153-165.
- [51] Mikosch, T. (1999). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing, Singapore.
- [52] Mordecki, E. *Modelos Matemáticos en Finanzas: Valuación de Opciones*, Centro de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Montevideo, Uruguay.
- [53] Mordecki, E. (2003). *Distribución del Máximo de un Proceso de Lévy y Aplicaciones en Finanzas y Matemática Actuarial*, Facultad de Ciencias, Centro de Matemáticas, Montevideo Uruguay, pp. 1-46.
- [54] Musiela, M. y M. Rutkowski. (1998). *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, Berlin.
- [55] Øksendal, B. (1985). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, Berlin.

- [56] Odegaard, B. A. homepage <http://finance.bi.no/bernt/>. Norwegian School of Management (BI), in Oslo, Norway. Department of Financial Economics.
- [57] Padilla, P. y M. Bladt. (2001). *Nonlinear Financial Models: Finite Markov Modulation and its Limits*, Quantitative Analysis in Financial Markets, Collected Papers of the New York University Mathematical Finance Seminar, Volume III, pp. 159-171.
- [58] Pontryagin, L., Andronov, A. y A. Vitt. *Appendix on the Statistical Treatment of Dynamical Systems*, pp. 329-349.
- [59] Protter, M. H. (1984). *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [60] Rebonato, R. (1996). *Interest-Rate Option Models*, John Wiley and Sons.
- [61] Risken, H. (1989). *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- [62] Samperi, D. (2002). *Calibrating a Diffusion Pricing Model with Uncertain Volatility: Regulation and Stability*, Mathematical Finance, Vol.12, Núm. 1, pp. 71-87.
- [63] Schnatz, B. (2000). *Speculative Attacks in Emerging Markets: The Role of Macroeconomic Fundamentals*, Intereconomics, Financial Markets, pp. 81-89.
- [64] Segoviano, M. A. y P. Padilla. *Portfolio Credit Risk and Macroeconomic Shocks: Applications to Stress Testing under Data-Restricted Environments*, IMF Working Paper, WP/06/283.
- [65] Sîrbu, M. y S. E. Shreve. (2006). *A Two Person Game for Pricing Convertible Bonds*, SIAM J. CONTROL OPTIM., Vol.45, Núm.4, pp. 1508-1539.
- [66] Steele, J. M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York.
- [67] Takeaki, K., Fumiaki, U. y P. Stanley. (2002). *A 3-factor Valuation Model for Mortgage-Backed Securities (MBS)*, pp. 1-22.
- [68] Tijonov, A. y A. Samarsky. (1983). *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR, Moscu.
- [69] Torres, S., (2004). *Monte Carlo Pricing of American Options*, IX. CLAPEM Congreso Latinoamericano de Probabilidad y Estadística Matemática, pp. 1-83.
- [70] Uys, N. (2005). *Optimal Stopping Problems and American Option*, A dissertation submitted to the Faculty of Science, University of the Witwatersrand, in fulfilment of requirements for the degree of Master of Science.

- [71] Wei-Bin, Z. (1991). *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*, Springer-Verlag, Berlin.
- [72] Werner, H. y R. Lefever. (1984). *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*, Springer-Verlag, Berlin.
- [73] Wilmott, P., Dewynne, J. y S. Howison. (1993). *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press.
- [74] Xie, Y. A. (2004). *Do Macroeconomic Variables Matter for the Pricing of Default Risk? Evidence from the Residual Analysis of the Reduced-Form Model Pricing Errors*, pp. 1-29.