



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE GRADOS DE LAS
GRÁFICAS ALEATORIAS DE LOS MODELOS DE
ERDŐS-RÉNYI Y BARABÁSI-ALBERT**

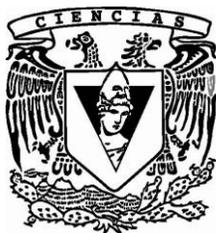
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A:

MIRIAM RODRÍGUEZ GONZÁLEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERÓMINO URIBE
2009**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi mamá Carmen y a mis hermanos Luis y Toño,
con todo mi cariño.*

Agradecimientos

No tengo palabras para agradecer todo el apoyo que he recibido en estos últimos años.

Especialmente doy mi más sincero agradecimiento a mi director de Tesis, Gerónimo, por el apoyo, dedicación y confianza que me ha brindado para la elaboración de la misma.

Agradezco a la Dra. María Emilia, a los doctores Víctor y Ricardo, y a José Luis por la revisión de este trabajo.

A mi mamá y a mi abuelita, por hacer de mí la persona que soy ahora. A mis hermanos por estar siempre a mi lado, por su confianza y apoyo incondicional. También doy las gracias al resto de mi familia, por compartir momentos agradables y difíciles.

Por último, agradezco a todos aquellos que tengo la inmensa fortuna de llamar amigos, por su amistad, confianza y compañía en todo momento.

Índice general

Agradecimientos	ii
Introducción	vi
Capítulo 1. Primeros modelos de gráficas aleatorias	1
1. Conceptos básicos de la teoría de gráficas	1
2. El modelo de Erdős-Renyi	4
3. El modelo Binomial	5
4. Simulación del modelo binomial	9
5. El modelo Watts-Strogatz	19
Capítulo 2. Descripción informal de un modelo de gráficas libres de escala: el modelo de Barabási-Albert	21
1. El modelo de Barabási-Albert	21
2. Un modelo más general	25
Capítulo 3. Formalización de un modelo de gráficas aleatorias libres de escala: el modelo LCD	29
1. El modelo LCD	29
2. Análisis del modelo LCD	35
3. Simulación de la distribución empírica de grados	49
Capítulo 4. Convergencia de la distribución empírica de grados	55
1. Proporción del número de vértices de grado 1	55
2. Simulación del número de vértices de grado 1	62
3. Proporción de vértices de grado $k > 1$	66
Apéndice A. Caminatas Aleatorias y la Ley Fuerte de los Grandes Números	73
Apéndice B. Martingalas y la desigualdad de Azuma-Hoeffding	77
Bibliografía	81

Introducción

Una característica que se ha observado con mucha frecuencia, en décadas anteriores, es la presencia de leyes de potencias en fenómenos que pertenecen a distintas áreas de estudio, como es en física, biología, economía y sociología, por mencionar las más frecuentes. Ver [Mit04] y sus referencias.

Las distribuciones de ley de potencia, son muy distintas a las distribuciones más comunes, como la distribución Normal, Poisson, Binomial, pues las segundas muestran que los eventos están más concentrados dentro de un rango de probabilidad, mientras que las primeras, presentan colas más pesadas y por lo tanto no se aprecia una concentración. Ver por ejemplo la Figura 1 en la que contrasta la densidad gaussiana con la densidad de una distribución de ley de potencia. Asimismo una característica distintiva de los fenómenos que siguen una ley de potencia, es que cuando se realiza un gran número de repeticiones independientes se observa que valores grandes de la variable aleatoria ya no son tan raros.

Las leyes de potencia contienen a las distribuciones de Pareto o de Zipf, y un ejemplo muy clásico que presenta una ley de potencia, y que fue estudiado

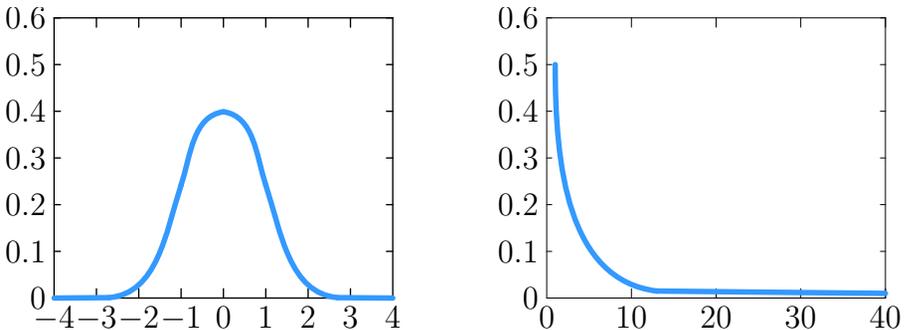


FIGURA 1. Distribuciones de una normal estadar y una ley de potencias

cien años atrás, es la distribución del ingreso, que fue modelada por Wilfrido Pareto, de donde deriva su nombre. Como ya lo hemos mencionado varios investigadores se han dado la tarea de entender cuáles son las propiedades que generan dichas distribuciones, y una rama de las matemáticas de la cual se han apoyado recientemente es la teoría de gráficas, ya que en combinación con la teoría de probabilidad se crearon los modelos de gráficas aleatorias, con el propósito de describir o ejemplificar los fenómenos de vida real, por ejemplo las relaciones sociales que existen entre los individuos de una población, la red de actores de películas, los links entre las páginas de internet y las citas entre las publicaciones matemáticas. Barabási y Albert son los pioneros que proponen dichos modelos en [BA99].

Uno de los primeros modelos de gráficas aleatorias fue el modelo Binomial el cual muestra como resultado que la distribución de grados¹ de una gráfica aleatoria, tiene una distribución Poisson, lo que implica que la mayoría de los vértices tienden a tener un grado pequeño, y que los vértices con grado muy grande son escasos.

En contraste, en la década de los 90's, los físicos Albert-László Barabási y Réka Albert, propusieron en [BA99] un nuevo modelo de gráficas aleatorias que adoptaba características del mundo real. Dicho modelo mostraba que la distribución de grados seguía una ley de potencias. Sin embargo, el modelo tiene algunas imprecisiones a nivel matemático, como se argumenta en [BR03]. Esto dio paso al planteamiento de nuevos modelos de gráficas aleatorias, esta vez absolutamente precisos, como el modelo LCD, y conforme ha pasado el tiempo éstos fueron más complejo. Citamos, por ejemplo, los de Buckley-Osthus, Cooper-Frieze, entre otros, pues contemplan más parámetros; y a pesar de ello, su distribución de grados mantuvo la misma característica, una ley de potencia. Un panorama general de dichos modelos están incluidos en [BR03].

El objetivo de este trabajo es analizar los resultados sobre la distribución empírica de grados de los modelos de gráficas aleatorias de Erdős-Renyi y Barabási-Albert. Para el primer modelo, seguimos a [Bol82], mientras que para el segundo, comenzamos con el análisis heurístico de [Bar99], continuando con el análisis matemático riguroso de [BRST01]. Hay un argumento clave de este último artículo que no pudimos entender y que nos llevó a dar una prueba independiente y mucho más sencilla de que la sucesión de grados empírica de una gráfica aleatoria LCD converge casi seguramente a una distribución (determinista) de tipo ley de potencia. Una característica de este trabajo es

¹En la literatura, la distribución de grados también se denomina distribución de conexión o conectividad, ya que indica la probabilidad de que un elemento de una gráfica esté conectado con otros k elementos distintos de la misma.

que se presentan algoritmos para simular distintos aspectos de los modelos tratados, para así poder ilustrar los resultados teóricos obtenidos. De hecho, la simulación del modelo LCD nos llevó a la prueba de la propiedad antes mencionada.

La estructura de la Tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 Primeros modelos de gráficas aleatoriaschapter.1 se introduce el concepto de gráfica, se presenta el modelo Binomial (o de Erdős-Rényi) y se estudia la distribución empírica de grados en dos rangos de parámetros, aunque el segundo sólo a partir de simulación, lo cual nos lleva a conjeturar un resultado que no hemos podido encontrar en la amplia literatura que lo concierne. En el Capítulo 2El modelo de Barabási-Albertchapter.2, se presenta el modelo de Barabási-Albert, en la versión imprecisa de estos autores. Se discuten además el porqué es matemáticamente impreciso y se presenta un modelo más general inspirado en éste. En el Capítulo 3El modelo LCDchapter.3, se discute una instancia matemáticamente precisa del modelo de Barabási-Albert propuesta por Bollobás y Riordan y se siguen los argumentos de estos últimos para el análisis de la distribución empírica de grados. Se culmina con un comentario acerca del detalle fundamental que no logramos comprender y con la simulación del modelo que nos llevó a una prueba independiente. En el Capítulo 4La distribución empírica de gradoschapter.4, el último de este trabajo, se analiza un proceso estocástico, que llamamos caminata aleatoria autoregulada, y se presenta una ley fuerte de los grandes números para ella. En esto consiste nuestra prueba de la convergencia casi segura de la distribución empírica de grados de modelos que generalizan al LCD.

Primeros modelos de gráficas aleatorias

En este capítulo introduciremos las definiciones básicas de teoría de gráficas necesarias para el desarrollo de este trabajo; describiremos los primeros modelos de gráficas aleatorias, enfocándonos principalmente en el modelo binomial de Gilbert, también llamado de Erdős-Renyi, y citaremos algunos resultados sobre la distribución empírica de sus grados. Además apoyándonos de las herramientas computacionales, realizaremos la simulación del modelo, para obtener la distribución empírica de grados en otro rango de parámetros.

1. Conceptos básicos de la teoría de gráficas

A través de la teoría de gráficas se pueden elaborar modelos matemáticos que se ajusten a determinadas situaciones reales; entonces comencemos por la definición básica de esta teoría.

DEFINICIÓN. Una **gráfica** es una pareja de conjuntos, $G = [V, E]$, donde V es un conjunto finito de objetos llamados *vértices*¹ y E es un conjunto de parejas no ordenadas de la forma $e = (u, v)$, donde $u, v \in V$ y $u \neq v$, a tales elementos se les llama *aristas*, cuando $u = v$ recibe el nombre de *lazo* (o *rizo*).

El conjunto de vértices de una gráfica G , puede denotarse como $V(G)$, para indicar de qué gráfica se trata, al igual que el conjunto de aristas, $E(G)$, y nos es útil para entender otras definiciones.

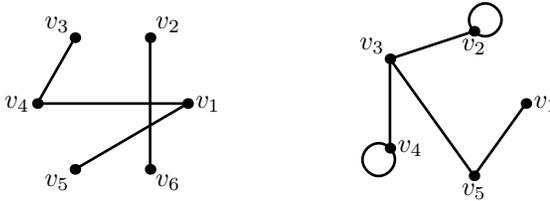
DEFINICIÓN. Una **subgráfica** H de una gráfica G , es una gráfica tal que

$$V(H) \subseteq V(G) \quad \text{y} \quad E(H) \subseteq E(G).$$

Sean u y v vértices de una gráfica $G = [V, E]$, tal que $u \neq v$, y sea $e = (u, v)$ la arista entre ambos, entonces decimos que u y v son extremos de la arista e y con ello u y v son vértices adyacentes. En la siguientes figuras, se muestra el esbozo de una gráfica, donde el conjunto de vértices es $V = \{v_1, \dots, v_6\}$, y el conjunto de aristas $E = \{(v_1, v_4), (v_2, v_6), (v_3, v_4), (v_5, v_1)\}$; mientras que

¹Estos objetos también son llamados nodos

la segunda muestra una gráfica con lazos. Aunque existen gráficas que pueden tener múltiples aristas para un par de vértices, este tipo de gráficas no se contemplarán para los modelos que describiremos más adelante.



Ejemplos de gráficas

DEFINICIÓN. El **grado de un vértice** v es el número de vértices adyacentes a v , denotado por $\delta_G(v)$.

Si consideramos una gráfica G simple de n vértices, es decir que no tiene aristas múltiples y lazos, es claro que $0 \leq \delta(v) \leq n - 1, \forall v \in V$; por otro lado, si G admite lazos, tenemos que $0 \leq \delta(v) \leq n, \forall v \in V$. Un vértice de grado 0, se le llama vértice aislado. Además si $\delta(v) = r \forall v \in V(G)$, se dice que la gráfica G es r -regular.

TEOREMA 1.1. Sea $G = [V, E]$ una gráfica que tiene q aristas, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2q.$$

DEMOSTRACIÓN. El teorema anterior es inmediato, pues en la suma de los grados se cuenta el número de aristas que inciden en cada vértice, y como cada arista tiene dos extremos, éstas se están contando en dos ocasiones. \square

Las gráficas pueden tener distintas propiedades, pero existe una que es importante para aquellos que tratan de modelar fenómenos o situaciones, y es el de *conexidad*, para establecer tal propiedad primero definiremos otros términos.

DEFINICIÓN.

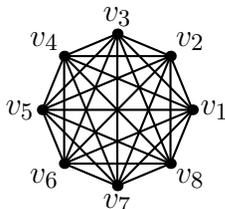
Camino: es una sucesión alternada de vértices y aristas, denotado por

$$C = \{v_{i_1}, e_1, v_{i_2}, \dots, e_{n-1}, v_{i_n}\},$$

donde $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n} \in V$ y $e_j = (v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E$.

Traectoria: es un camino que no repite vértices.

Con lo anterior decimos que una gráfica G es *conexa* si para todo $u, v \in V$ existe una trayectoria que los une; y es completamente conexa cuando todos sus vértices están conectados entre sí (véase la siguiente figura). Por otro lado, la *distancia* entre dos vértices u y v , $d(u, v)$, es el número de aristas del camino más corto entre u y v ; y el *diámetro* de una gráfica conexa G , $diam(G)$, es la distancia máxima que existe entre dos de sus vértices.



Gráfica completamente conexa

A pesar de tener todos los elementos de una gráfica conectados entre sí, hay ocasiones en que se debe especificar una dirección a las aristas. Cuando los elementos del conjunto de aristas, de una gráfica G tienen una dirección definida hablamos de una gráfica dirigida u orientada, o también llamada comúnmente *digráfica*; de una forma más abstracta tenemos las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN.

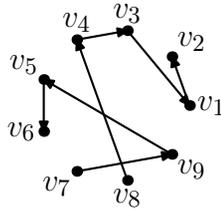
Digráfica: es una pareja de conjuntos, denotada por $D = [V, F]$, donde V es un conjunto finito de objetos llamados vértices y F es un conjunto de parejas ordenadas de la forma $f = (u, v)$, donde $u, v \in V$ y $u \neq v$, a tales elementos se les llama arcos o flechas, cuando $u = v$ se recibe el nombre bucle.

Grado exterior (exgrado): de un vértice v , es el número de arcos que salen del vértice v , y se denota por $\delta_D^+(v)$.

Grado interior (ingrado): de un vértice v , es el número de arcos que entran al vértice v , y se denota por $\delta_D^-(v)$.

Grado total: de un vértice v es la suma del grado interior y exterior, es decir $\delta_D(v) = \delta_D^-(v) + \delta_D^+(v)$.

Notemos que los elementos del conjunto de arcos F no son simétricos, es decir que si $(u, v) \in F$, entonces no implica que $(v, u) \in F$.



Gráfica dirigida

Existe otra forma de representar una gráfica, en lugar de realizar un esbozo de la misma, y ésta es mediante matrices. La matriz de adyacencias de una gráfica $G = [V, E]$ es una matriz M de dimensión $n \times n$, donde n es el número de vértices G , de componentes:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{si } (v_i, v_j) \notin E(G) \end{cases}$$

Sabemos bien que la teoría de gráficas se ha vuelto una rama de las matemáticas muy extensa, pero para el desarrollo de este trabajo, basta con las definiciones anteriores.

2. El modelo de Erdős-Rényi

El inicio de las gráficas aleatorias se dió a finales de la década de los cincuenta, por Paul Erdős y Alfréd Rényi. En *MathSciNet*, que es una herramienta electrónica que ofrece el acceso a una base de datos de resúmenes e información bibliográfica de la literatura de las ciencias matemáticas, realizamos una búsqueda de las publicaciones de Erdős, se observó que él escribió alrededor de 1,800 artículos, de los cuales, 32 los escribió al lado de Rényi; y 8 de estas publicaciones tratan sobre las gráficas aleatorias. Véanse las referencias: [ER59], [ER60], [ER61a], [ER61b], [ER63], [ER64], [ER66] y [ER68].

Erdős y Rényi introdujeron primeramente en [ER59] un modelo de gráficas aleatorias con una cantidad fija de vértices y aristas. Aunque se trata de un modelo probabilístico, su análisis se presta a la utilización de técnicas combinatorias. Posteriormente, Gilbert propone en [Gil59] un modelo con una cantidad de vértices fija y una cantidad de aristas aleatoria. Formalmente, corresponde a una percolación de aristas sobre la gráfica completa de n vértices, pero presentaremos la definición formal más adelante. Erdős y Rényi entonces comienzan a estudiar el modelo de Gilbert, pues su estudio puede utilizar herramientas más probabilísticas y sus resultados se pueden traducir (en ciertos casos) al modelo con cantidad fija de aristas.

Para el modelo de Erdős-Rényi consideremos el espacio (finito) de todas las gráficas con n vértices y m aristas, tal espacio lo denotaremos como $\mathcal{G}_{n,m}$.

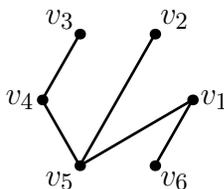
3. El modelo Binomial

Notemos que si la gráfica tiene n vértices entonces tenemos un total de $N = \binom{n}{2}$ aristas posibles en dicha gráfica, y como estamos interesados en las gráficas que contienen m aristas, entonces podemos observar que el espacio $\mathcal{G}_{n,m}$ tiene un total de $\binom{N}{m}$ elementos, pues contamos las posibles gráficas que se pueden crear con n vértices y m aristas. Sea $G_{n,m}$ la variable que representa una gráfica aleatoria; entonces suponemos que bajo la medida uniforme, denotada $\mathbb{G}_{n,m}$, podemos tomar o seleccionar un elemento del espacio $\mathcal{G}_{n,m}$, es decir;

$$\Pr(G = g) = \frac{1}{\binom{N}{m}} \forall g \in \mathcal{G}_{n,m}.$$

Generalmente m es una función de n , $m = m(n)$.

Bajo este modelo, Erdős y Rényi se plantearon muchas preguntas en [ER59] (su primera publicación sobre gráficas aleatorias); todas ellas referían a la conexidad (o conectividad). Por ejemplo: *¿Cuál es la probabilidad de que $G_{n,m}$ sea conexa?*, *¿Cuál es la probabilidad de que la componente (subgráfica) más grande conexa de $G_{n,m}$ tenga $n - k$ puntos?* ($k = 0, 1, \dots$), entre otras. En contraste, nuestro principal objetivo es observar la distribución de un elemento de la secuencia de grados, cuando el número de vértices n tiende a ∞ , o bien trataremos de aproximar la probabilidad de que un vértice sea de grado k . Cabe mencionar que cuando hablamos de la secuencia de grados nos referimos a un vector cuyas entradas son números enteros que indican el número de vértices de grado $1, 2, \dots$ en una gráfica. Por ejemplo la sucesión de grados de la siguiente gráfica es $(3, 2, 1)$, donde la primera entrada indica que hay 3 vértices de grado 1, 2 de grado 2 y 1 de grado 3.



3. El modelo Binomial

El modelo Binomial no fue propuesto por Erdős y Rényi sino por Gilbert en [Gil59] en 1959. En el modelo binomial, se plantea un modo distinto de crear una gráfica, pues desde un punto de vista coloquial comenzamos con una gráfica de n vértices, que pueden o no estar aislados, y consideramos que la probabilidad de colocar una arista en la gráfica, del total de las N aristas posibles, es p , con $p \in (0, 1)$, independientemente de otras aristas.

En términos matemáticos, definimos el espacio \mathcal{G}_n , que representa las gráficas de n vértices y sobre él, definimos a la medida de probabilidad $\mathbb{G}_{n,p}$ en el que cada arista posible tiene probabilidad p de aparecer independientemente de las demás. Casi siempre p es una función de n , $p = p(n)$. Bajo este supuesto podemos representar cada arista como una variable aleatoria x_{ij} , que se distribuye Bernoulli de parámetro p , donde $i < j \in \{1, \dots, n\}$. Cuando $x_{ij} = 1$ implica que la arista se encuentra en la gráfica, mientras si $x_{ij} = 0$ la arista no se encuentra ahí. Denotaremos por $G_{n,p}$ a una gráfica aleatoria con distribución $\mathbb{G}_{n,p}$.

Haciendo un comparativo entre ambos modelos, bien podemos observar que cuando m es asintótico a pn , $m \sim pn$ (n es grande) los modelos $\mathbb{G}_{n,m}$ y $\mathbb{G}_{n,p}$ pues en el segundo, la cantidad de aristas estará concentrada alrededor de np de acuerdo a la ley débil de los grandes números.

Como ya habíamos mencionado, nuestro propósito es analizar la distribución empírica de grados, por lo que enunciaremos un resultado muy conocido para el modelo binomial.

TEOREMA 1.2. *Sea X_k el número de vértices de grado k en $G_{n,p}$ donde $p = c/n$, con $0 < c < n$ constante. Entonces para $k = 0, 1, \dots$*

$$(1) \quad \Pr \left((1 - \epsilon) \frac{c^k e^{-c}}{k!} \leq \frac{X_k}{n} \leq (1 + \epsilon) \frac{c^k e^{-c}}{k!} \right) \rightarrow 1,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

En concreto el resultado implica que la distribución de grados converge, en probabilidad, a una distribución Poisson de parámetro c . La prueba que presentamos a continuación se basa en [Bol82].

DEMOSTRACIÓN. Notemos que la probabilidad de que el grado de un vértice v , de la gráfica $G_{n,p}$, sea k es

$$\Pr(\delta(v) = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k},$$

entonces $\mathbb{E}(X_k) = n \Pr(\delta(v) = k)$.

Sea

$$b(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

es decir la función de densidad binomial de parámetros n y p valuada en k . Así, $\mathbb{E}(X_k) = nb(k, n-1, p)$. Por otro lado sabemos que una variable aleatoria binomial de parámetros n y p se puede aproximar por una variable de distribución

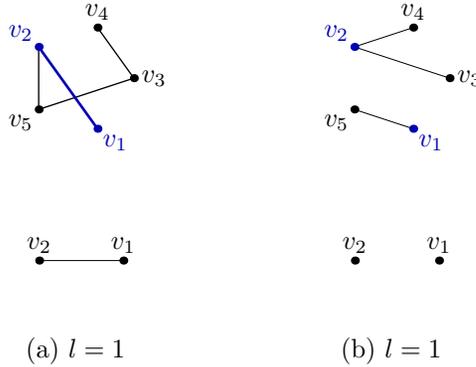


FIGURA 1. Posibles subgráficas inducidas por dos vértices: cuando hay arista entre ellos (a) y cuando no existe unión (b)

Poisson de parámetro $\lambda = np$, para n suficientemente grande, entonces aproximadamente $\mathbb{E}(X_k) \approx nPoi(k, (n-1)p)$, donde $Poi(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$. Además recordemos que $p = \frac{c}{n}$, por lo que

$$(n-1)p = (n-1)\frac{c}{n} = c - \frac{c}{n},$$

y cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que $(n-1)p \sim c$, y con ello $\mathbb{E}(X_k) \sim nPoi(k, c)$, y para simplificar la notación, sea $\lambda_k = Poi(k, c)$, por lo tanto

$$(2) \quad \mathbb{E}(X_k) \sim n\lambda_k.$$

Ahora estimemos el segundo momento factorial, que se define por $\mathbb{E}_2(X_k) = \mathbb{E}(X_k(X_k - 1))$ y representa el número esperado de parejas de vértices (v_1, v_2) , $v_1 \neq v_2$, tales que $\delta(v_1) = \delta(v_2) = k$. Para hacer tal cálculo consideremos la subgráfica de $G_{n,p}$ inducida por dos vértices v_1 y v_2 de grado k , que denotaremos por $G_{n,p}(v_1, v_2)$, y sea d_i el grado del vértice i en la subgráfica $G_{n,p}(v_1, v_2)$, $i = \{1, 2\}$. Es claro que cada vértice está ligado a $k - d_i$ vértices fuera de la subgráfica $G_{n,p}(v_1, v_2)$, y además que $d_1 = d_2 = l$, donde $l = \{0, 1\}$ (véase Figura 1).

Notemos que la probabilidad de poner $k - d_i$ aristas de v_i al conjunto de vértices $\{v_3, \dots, v_n\}$ es $b(k - d_i, n - 2, p)$, con $i = \{1, 2\}$, entonces

$$(3) \quad \Pr((v_1, v_2) \text{ tengan grado } k \mid G_{n,p}(v_1, v_2)) = \prod_{j=1}^2 b(k - d_j, n - 2, p) \\ = b(k - l, n - 2, p)^2.$$

Y como l indica si hay o no arista entre v_1 y v_2 , tenemos que $\Pr(l = 0) = 1 - p$ y $\Pr(l = 1) = p$. Por otro lado

$$\mathbb{E}_2(X_k) = \binom{n}{2} \Pr((v_1, v_2) \text{ sean de grado } k),$$

y al utilizar la regla de Bayes se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2(X_k) &= \binom{n}{2} [(1-p)b(k, n-2, p)^2 + pb(k-1, n-2, p)^2] \\ &= \binom{n}{2} [b(k, n-2, p)^2 + p(b(k-1, n-2, p)^2 - b(k, n-2, p)^2)], \end{aligned}$$

pero observemos que para n suficientemente grande $b(k-1, n-2, p)^2 - b(k, n-2, p)^2 \approx 0$. Por lo tanto

$$\mathbb{E}_2(X_k) = \binom{n}{2} b(k, n-2, p)^2 \approx \binom{n}{2} Poi(k, (n-2)p)^2;$$

y como $\binom{n}{2} \sim n^2$ y $(n-2)p \sim c$, resulta que

$$(4) \quad \mathbb{E}_2(X_k) \sim n^2 \lambda_k^2.$$

Lo que deseamos demostrar es equivalente a probar que

$$\Pr\left(\left|\frac{X_k}{\lambda_k} - 1\right| \geq \epsilon\right) \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, además

$$\Pr\left(\left|\frac{X_k}{\lambda_k} - 1\right| \geq \epsilon\right) = \Pr\left(\left|\frac{X_k}{n} - \lambda_k\right|^2 \geq \epsilon^2 \lambda_k^2\right),$$

y por la desigualdad de Chebyshev, obtenemos que

$$\Pr\left(\left|\frac{X_k}{\lambda_k} - 1\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{X_k}{n}\right)}{\epsilon^2 \lambda_k^2}$$

y por propiedades de la varianza, $\text{Var}\left(\frac{X_k}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_k)$. Sin embargo del segundo momento factorial de X_k tenemos que

$$\mathbb{E}_2(X_k) = \mathbb{E}(X_k(X_k - 1)) = \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k),$$

4. Simulación

y despejando el segundo momento obtenemos que $\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}_2(X_k) + \mathbb{E}(X_k)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_k) &= \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 \\ &= \mathbb{E}_2(X_k) + \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_k)^2 \\ &= \mathbb{E}_2(X_k) + \mathbb{E}(X_k)(1 - \mathbb{E}(X_k)), \end{aligned}$$

y de los cálculos (2) y (4), resulta que $\text{Var}(X_k) \sim n^2\lambda_k^2 + n\lambda_k(1 - n\lambda_k) = n\lambda_k$, entonces

$$\text{Var}\left(\frac{X_k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}n\lambda_k \rightarrow 0,$$

como $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto $\Pr\left(\left|\frac{X_k}{n} - 1\right| \geq \epsilon\right) \rightarrow 0$, y con ello concluimos el Teorema 1.2. \square

4. Simulación del modelo binomial

Simulación es la imitación de la operación (o desarrollo) de un proceso o sistema de la vida real sobre el tiempo. Desde otro punto de vista, la simulación involucra la generación de una historia artificial del sistema; por ejemplo, consideremos la operación de un banco, donde los clientes llegan por un servicio entre uno y 10 minutos, entonces para imitar esta situación y responder a cuestiones como en promedio cuántos clientes llegan en el tiempo, el tiempo que tiene que esperar cada cliente para recibir un servicio, entre otras; necesitamos de un software que genere números aleatorios, para representar o imitar los tiempos de los individuos en el intervalo $(0, a)$, con $a > 0$.

Generalmente un número aleatorio quiere decir una variable aleatoria uniforme, denotada por $U(0, a)$, $a > 0$ la cuál tiene como función de distribución

$$(5) \quad F_U(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ u & 0 < u < a \\ a & u \geq a. \end{cases}$$

Hoy en día, todos los lenguajes de computación tienen generadores de números aleatorios. Dado que tenemos acceso a variables uniformes, podemos generar a partir de ellas, variables que no son uniformes; y para ello existen varios métodos. Pero el más utilizado es el de inversión.

4.1. Método de inversión. Sea F la función de distribución para una variable aleatoria real; y consideremos $u \in (0, 1)$, entonces definimos $F^{-1}(u) =$

$\inf \{x : F(x) \geq u\}$. Podemos afirmar que si U es una variable uniforme en $(0, 1)$, entonces $F^{-1}(U)$ tiene función distribución F , ya que $\forall x \in R$,

$$\Pr(F^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F(x)),$$

y de (5) tenemos que $\Pr(F^{-1}(U) \leq x) = F(x)$. En la Figura 2 podemos observar gráficamente este método. Además lo más rápido que podemos hacer para calcular variables aleatorias no uniformes, es calcular la función inversa de la distribución, cuando sea posible.

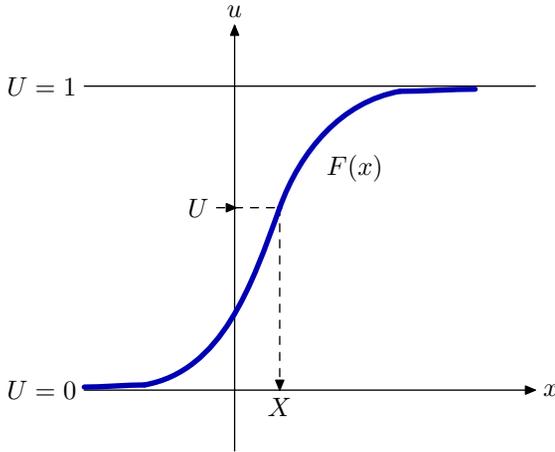


FIGURA 2. Método de inversión

EJEMPLO 1.3. Supongamos que deseamos simular una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ , sabemos que su función de densidad es $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x > 0$, y su función de distribución es $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, entonces es fácil obtener $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - u)$. Aunque para simplificar los cálculos, notemos que $1 - U$ tiene la misma distribución que U , por lo tanto para generar una variable exponencial sólo necesitamos calcular

$$X = -\frac{1}{\lambda} \log(U).$$

En general el método de inversión genera un número aleatorio U uniforme entre 0 y 1, y regresa el valor de la función inversa valuada en U , $X = F^{-1}(U)$.

Por otro lado podemos cuestionarnos sobre *¿cómo generamos variables discretas?* Para generar variables discretas también podemos hacerlo mediante el método de inversión, y a su vez tenemos que hacer uso de un método de

4. Simulación

búsqueda, lo cuál puede ser ineficiente cuando las variables aleatorias discretas toman una cantidad grande de valores, observemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.4. Si deseamos generar una variable aleatoria X de distribución binomial de parámetros n y p , X puede tomar los valores $\{0, 1, \dots, n\}$, con probabilidades que dependen de n y p , es decir, $\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Supongamos que $n = 4$ y $p = 0,25$, y sea $u = 0,58$ un número aleatorio, los valores de la Tabla 1 corresponden a la función de densidad y distribución de una variable aleatoria binomial con los parámetros anteriores; entonces, observando los valores de $F(x)$, podemos ver que $F(0) = 0,316 < u = 0,58 \leq F(1) = 0,738$. Por lo tanto, la variable generada es $X = 1$, y la Figura 3, muestra la gráfica de la función de distribución para este ejemplo.

CUADRO 1. Distribución Binomial(4,0.25)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.316	0.422	0.211	0.047	0.004
$F(x)$	0.316	0.738	0.949	0.996	1.000

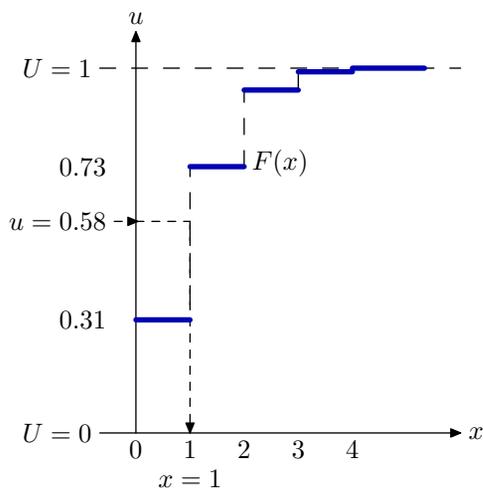


FIGURA 3. Método de inversión de una distribución Binomial(4,0.25)

Por otro lado, para otras variables aleatorias discretas, como aquellas que tienen distribución Poisson o Geométrica, existen métodos más sencillos para

generarlas. Además, en algunos programas, como *Matlab*, ya no es necesario crear estos algoritmos para generar ciertas variables aleatorias que no son uniformes, pues ya tienen sus propios comandos para ello.

Sin embargo, para la simulación de los modelos de gráficas aleatorias que estudiaremos, sólo necesitamos generar variables aleatorias de distribución Bernoulli de parámetro p ; pues como ya habíamos explicado antes, para colocar una arista en una gráfica que sigue el modelo binomial, ésta la representamos por una variable Bernoulli. Entonces generamos un número aleatorio u entre 0 y 1, y si $u \leq p$ entonces la variable toma el valor de 1, o de lo contrario es 0.

4.2. Simulación de la distribución empírica de grados del modelo binomial. En ocasiones es fácil elaborar los algoritmos, sobre los cuales se crea la sintaxis de un programa, pero a veces estos algoritmos pueden tener cálculos redundantes que hacen muy grande el tiempo de ejecución del programa, y como estamos interesados en gráficas con un número ‘grande’ de vértices y en el primer programa que se elaboró notamos que tardaba mucho en ejecutarse, entonces uno de nuestros propósitos será tratar de optimizar este tiempo mediante otro programa.

El primer programa que presentamos genera la matriz de adyacencias y después cuenta el número de vértices de grado k , el segundo programa no crea la matriz de adyacencias como tal, sino en cada paso actualiza los vectores que almacenan el grado de cada uno de los vértices y el número de vértices de grado k , es decir que se basa en la evolución de la sucesión de los grados. Ambos programas tienen el propósito de obtener la distribución empírica. Enseguida explicaremos cada uno de ellos, primero la descripción del algoritmo seguida del programa escrito en *Matlab*.

Algoritmo 1

Este algoritmo simula la distribución empírica de grados del modelo Binomial, creando la matriz de adyacencias

1. Se requieren dos parámetros: n (número de vértices) y p (probabilidad de colocar una arista en la gráfica).
2. Al inicio el número de aristas es igual a cero, $a=0$.
3. El vector que almacena el número de vértices de grado k , con $k = 0, \dots, n - 1$ se inicializa en cero, es decir $c=\mathbf{zeros}(1,n)$.
4. Para el vértice $j = 2, \dots, n$
 - a) Se verifica si el vértice j se une con los vértices anteriores, es decir, para el vértice $i = 1, \dots, j - 1$

4. Simulación

- 1) Se crea un número aleatorio entre cero y uno, `rand`, y si es mayor que $(1 - p)$ se da el valor de 1 a las entradas (i, j) y (j, i) de la matriz de adyacencias (`mat`). Y el número de aristas aumenta en una unidad, $a=a+1$.
5. Se calcula el grado de cada vértice, sumando las columnas de la matriz de adyacencias.
6. Y para cada vértice $i = 1, \dots, n$, dependiendo de su grado, se almacena en un vector, es decir se cuenta el número de vértices de grado k , por medio de $c(d(i)+1)=c(d(i)+1)+1$.
7. Se suma el grado de todos los vértices para comparar con el número total de aristas multiplicado por dos.

Programa 1

```
function [d,c,t]=programa1(n,p)
    tic;
    t=[0];
    a=0;
    c=zeros(1,n)
    for j=2:n
        for i=1:j-1
            if(rand>1-p)
                a=a+1;
                mat(i,j)=1;
                mat(j,i)=1;
            end
        end
        t=[t;toc];
    end
    d=sum(mat);
    for i=1:n
        c(d(i)+1)=c(d(i)+1)+1;
    end
    sum(d)
    2*a
    t=[t;toc];
```

Algoritmo 2

Este algoritmo simula la distribución empírica de grados del modelo Binomial, a través de la evolución de la sucesión de grados

1. Se requiere de dos parámetros: n (número de vértices) y p (probabilidad de colocar una arista en la gráfica).
2. Se inicia el número de aristas y el vector que almacena el grado de cada vértice en cero, $\mathbf{a}=0$ y $\mathbf{d}=\mathbf{zeros}(1,n)$.
3. El vector que guarda el número de vértices de grado k , con $k = \{0, \dots, n-1\}$, tiene en su primera entrada el valor de 1, y el resto de las entradas son cero², $\mathbf{c}=\mathbf{zeros}(1,n)$ y $\mathbf{c}(1)=1$, donde $c(k)=$ Número de vértices de grado $k-1$, por efectos de la sintaxis.
4. Para el vértice $j = 2, \dots, n$
 - a) Se inicializa el grado del vértice j en cero, $\mathbf{d}(j)=0$.
 - b) Aumentamos una unidad en el número de vértices de grado cero, $\mathbf{c}(1)=\mathbf{c}(1)+1$.
 - c) Se compara con los vértices anteriores, es decir, para el vértice $i = 1, \dots, j-1$
 - 1) Se crea un número aleatorio entre cero y uno, \mathbf{rand} , y si es mayor que $(1-p)$:
 - Disminuimos una unidad el número de vértices del grado del vértice i , y aumentamos una unidad el número de vértices del grado siguiente, $\mathbf{c}(\mathbf{d}(i)+1)=\mathbf{c}(\mathbf{d}(i)+1)-1$ y $\mathbf{c}(\mathbf{d}(i)+2)=\mathbf{c}(\mathbf{d}(i)+2)+1$.
 - Disminuimos una unidad el número de vértices del grado del vértice j , y aumentamos una unidad el número de vértices del grado siguiente, $\mathbf{c}(\mathbf{d}(j)+1)=\mathbf{c}(\mathbf{d}(j)+1)-1$ y $\mathbf{c}(\mathbf{d}(j)+2)=\mathbf{c}(\mathbf{d}(j)+2)+1$.
 - Actualizamos el grado de los vértices i y j , aumentando una unidad a cada uno de ellos, $\mathbf{d}(i)=\mathbf{d}(i)+1$ y $\mathbf{d}(j)=\mathbf{d}(j)+1$.
 - Aumenta el número de aristas una unidad.
5. Se suma el grado de todos los vértices para comparar con el número total de aristas multiplicado por dos.

Programa 2

```
function [d,c,t]=programa2(n,p)
tic;
t=[0];
a=0;
```

²Dado que el algoritmo lo iniciamos con un vértice aislado

4. Simulación

```
d=zeros(1,n);
c=zeros(1,n);
c(1)=1;
for j=2:n
    d(j)=0;
    c(1)=c(1)+1;
    for i=1:j-1
        if(rand>1-p)
            c(d(i)+1)=c(d(i)+1)-1;
            c(d(i)+2)=c(d(i)+2)+1;
            c(d(j)+1)=c(d(j)+1)-1;
            c(d(j)+2)=c(d(j)+2)+1;
            d(j)=d(j)+1;
            d(i)=d(i)+1;
            a=a+1;
        end%if
    end%for
    t=[t;toc];
end%for
sum(d)
sum((0:n).*c)
2*a
```

Comparando los tiempos de ejecución de cada uno de los programas, con $n=1000$ y variando el parámetro p , observamos los siguientes datos aproximados:

CUADRO 2. Tiempos de ejecución $n=1000$ (segundos)

p	0.25	0.5	0.75
Programa1	55.449	56.452	55.610
Programa2	0.100	0.181	0.190

El segundo programa es más eficiente para hacer la simulación de la distribución empírica de grados, sin importar el parámetro p , y este mismo programa será la base para simular otros modelos de gráficas aleatorias más adelante. Sin embargo, nos queda hacernos una pregunta: *¿cómo estamos seguros de que el segundo programa está generando la distribución empírica de grados de una variable aleatoria?* Para responder a esta pregunta aplicaremos ambos algoritmos a las mismas variables aleatorias, primero consideremos $n = 5$ y $p = 0,6$, y notemos que necesitamos de $(n)(n - 1)/2$ variables aleatorias, entonces para

los ejemplos que deseamos reproducir, sea v el vector de 10 variables aleatorias (o números aleatorios):

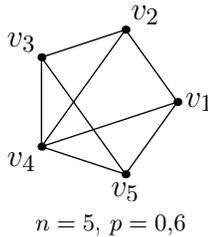
$$v = (0,95, 0,23, 0,61, 0,48, 0,89, 0,76, 0,45, 0,01, 0,82, 0,44)$$

<i>Algoritmo 1</i>	<i>Algoritmo 2</i>
a=0	a=0
c=(0,0,0,0,0)	d=(0,0,0,0,0)
j=2	c=(1,0,0,0,0)
	j=2
	d(0,0,0,0,0)
	c(2,0,0,0,0)
i=1	i=1
como $v(1)>0.4$	como $v(1)>0.4$
mat(1,2)=mat(2,1)=1;	c(1,1,0,0,0)
	c(0,2,0,0,0)
	d(1,1,0,0,0)
a=1;	a=1;
j=3	j=3
	d(1,1,0,0,0)
	c(1,2,0,0,0)
i=1	i=1
como $v(2)<0.4$,	como $v(2)<0.4$,
no se coloca arista,	no se coloca arista
i=2	i=2
como $v(3)>0.4$	como $v(3)>0.4$
mat(2,3)=mat(3,2)=1;	c(1,1,1,0,0)
	c(0,2,1,0,0)
	d(1,2,1,0,0)
a=2;	a=2;
j=4	j=4
	d(1,2,1,0,0)
	c(1,2,1,0,0)
i=1	i=1
como $v(4)>0.4$	como $v(4)>0.4$
mat(1,4)=mat(4,1)=1;	c(1,1,2,0,0)
	c(0,2,2,0,0)
	d(2,2,1,1,0)
a=3;	a=3;

4. Simulación

<pre>i=2 como v(5)>0.4 mat(2,4)=mat(4,2)=1; a=4; i=3 como v(6)>0.4 mat(3,4)=mat(4,3)=1; a=5; j=5 i=1 como v(7)>0.4 mat(1,5)=mat(5,1)=1; a=6; i=2 como v(8)<0.4, no se coloca arista, i=3 como v(9)>0.4 mat(3,5)=mat(5,3)=1; a=7; i=4 como v(10)>0.4 mat(4,5)=mat(5,4)=1; a=8; d=(3,3,3,4,3) c=(0,0,0,4,1)</pre>	<pre>i=2 como v(5)>0.4 c(0,2,1,1,0) c(0,1,2,1,0) d(2,3,1,2,0) a=4; i=3 como v(6)>0.4 c(0,0,3,1,0) c(0,0,2,2,0) d(2,3,2,3,0) a=5; j=5 d(2,3,2,3,0) c(1,0,2,2,0) i=1 como v(7)>0.4 c(1,0,1,3,0) c(0,1,1,3,0) d(3,3,2,3,1) a=6; i=2 como v(8)<0.4, no se coloca arista i=3 como v(9)>0.4 c(0,1,0,4,0) c(0,0,1,4,0) d(3,3,3,3,2) a=7; i=4 como v(10)>0.4 c(0,0,1,3,1) c(0,0,0,4,1) d(3,3,3,4,3) a=8;</pre>
---	--

La siguiente gráfica ilustra el resultado de la simulación realizada. Es claro que en ambos algoritmos obtuvimos el mismo vector 'c', por lo que obtendremos la misma distribución empírica de grados.



El propósito de realizar la simulación de gráficas aleatorias es observar, desde un punto computacional, el esbozo de la distribución empírica de grados. Esto se presenta en la Figura 4. En contraste con el Teorema 1.2, no obtenemos aproximadamente una distribución Poisson (pues p no es pequeño) sino una normal estándar, como se ve al agregar los siguientes comandos en el programa 5:

```
aux=cumsum(c)/n;
x=linspace(1,n+1,n+1)-ones(n+1);
z=(x-(n*p))/sqrt(n*p*(1-p));
plot(z,aux,'r')
hold on plot(z,normcdf(z,0,1),'g')
```

En resumen se calcula la distribución acumulativa de la distribución de grados, se crea un vector, x , de longitud n , que indica los grados posibles de una gráfica de n vértices, y para hacer la comparación deseada se centran los datos restando al vector x el número esperado de aristas y dividiendo entre la desviación del mismo, np y $\sqrt{np(1-p)}$ respectivamente, y por último se grafica la distribución normal. Dicha comparación nos muestra que la distribución empírica de grados converge a una distribución normal estándar. Cabe mencionar que para obtener una figura semejante se modificaron los ejes en menú de herramientas en *Matlab*. Este resultado computacional nos hace pensar que la distribución de grados se debería aproximar por una normal estándar. No hemos encontrado en la literatura del modelo binomial el equivalente al Teorema 1.2 cuando el parámetro permanece constante en vez de ser inversamente proporcional a la cantidad de vértices. Tampoco hemos podido probarlo.

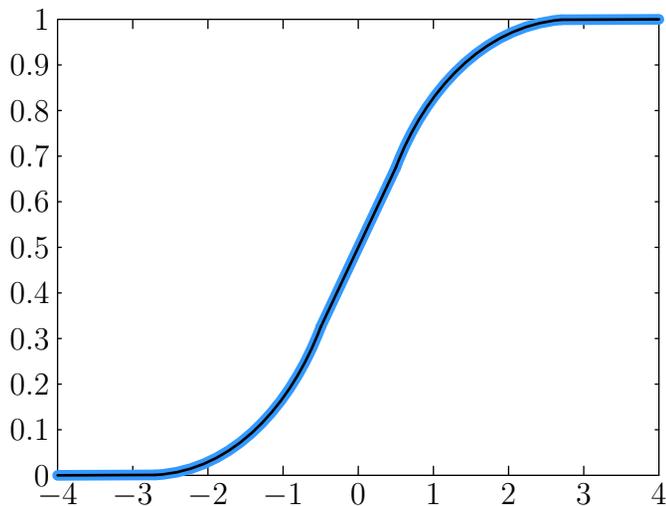


FIGURA 4. Distribución empírica de grados del modelo binomial en comparación con una distribución normal estándar

5. El modelo Watts-Strogatz

A pesar de que los primeros modelos de gráficas aleatorias se dieron al final de la década de los 50's y a principios de los 60's, no fue hasta el año de 1998 que se planteó un nuevo modelo por Duncan Watts y Steven Strogatz, con la finalidad de que el nuevo modelo adoptaría propiedades de las redes del mundo real. Entre sus ejemplos más representativos están las redes neuronales, redes sociales, y el extenso mundo de las páginas de internet, entre otros.

Watts y Strogatz notaron que el diámetro de estas redes eran considerablemente más pequeños que los de otras gráficas construidas con el mismo número de vértices y aristas. Este dato ya había sido observado en redes sociales, en 1967, por Milgram. El objetivo, en ese momento, fue encontrar la “distancia” entre dos individuos cualesquiera de Estados Unidos, y para ello se dió a la tarea de realizar un experimento convocando a mucha gente, y al final concluyó que entre dos individuos hay a lo más 6 personas que los unen, a lo que llamó seis grados de separación. Esto se debe a que nuestra sociedad es muy densa, lo que implicó, en cierto sentido, es que vivimos en un mundo pequeño. Este hecho se volvió muy popular en aquellos años.

El modelo de Watts-Strogatz, también es conocido como modelo *small-world*, ya que las gráficas que siguen este modelo tienen como propiedades

diámetros pequeños y son altamente agrupadas. En este caso el término de agrupamiento se refiere a que cada vértice de la gráfica pertenece a un subconjunto de vértices, los cuales forman una subgráfica completamente conexa.

Desde un enfoque matemático, el modelo inicia con una gráfica $2r$ -regular, $G_{n,2r-reg}$, $n > 2r$, y con probabilidad p cambiamos uno de los extremos de cada una las aristas a cualquier otro vértice elegido aleatoriamente, con la condición de que dos vértices no pueden tener más de una arista entre ellos y no se permiten lazos. Sin embargo, este modelo no es de interés en este trabajo.

Los modelos mencionados en este primer capítulo tienen una característica entre sí, en cierto sentido, son ‘estáticos’, pues el número de vértices se mantiene fijo, a diferencia del que trataremos en el siguiente capítulo, pues es más ‘dinámico’, por una propiedad en la que se basa, que es el *crecimiento*.

Descripción informal de un modelo de gráficas libres de escala: el modelo de Barabási-Albert

En este capítulo trataremos uno de los modelos de gráficas aleatorias que más se cita en la actualidad y que dió paso al planteamiento de nuevos modelos. Contempla las dos características siguientes: crecimiento y ligas preferenciales. Después de dar la descripción de este modelo, se comentará por qué no está bien planteado. Sin embargo, es sin duda la base heurística para elaborar nuevos modelos con bases matemáticas mejor establecidas. También analizaremos un modelo más general, introducido por Dorogovtsev, Mendes y Samukhin en [DMS00].

1. El modelo de Barabási-Albert

Albert-László Barabási y Réka Albert, ambos físicos, consideraban que la ciencia contemporánea hasta el momento era incapaz de describir sistemas complejos, que están constituidos de elementos no idénticos y de distintas interacciones entre sí. También observaron, en varias publicaciones, que existían sistemas o fenómenos que presentaban una *distribución de conectividad* (distribución de grados) que sigue una *ley de potencia*; es decir que la probabilidad de que un elemento esté unido a k elementos es de la forma $\Pr(k) = Ak^{-\alpha}$, con $\alpha > 1$.

Entre los ejemplos más conocidos que presentan una distribución de conectividad que sigue una ley de potencia, está la red de actores de películas, donde cada actor se puede representar por un vértice, y si dos actores intervinieron en la misma película, entonces decimos que están conectados, es decir, podemos colocar una arista que una a los vértices que los representan. De esta red se observó que la probabilidad de que un actor esté relacionado (o conectado) con k actores es $P(k) = k^{-\alpha_a}$, donde $\alpha_a = 2,3 \pm 0,1$. Otro ejemplo muy conocido es la red de internet (WWW), donde cada documento HTML es un vértice y los links entre los documentos se representan por una arista; observemos

que al tratar de encontrar la distribución de conectividad de esta red, también estimamos la efectividad para encontrar información en ella. Y para este ejemplo tenemos que la distribución de conectividad es $P(k) = k^{\alpha_{www}}$, con $\alpha_{www} = 2,1 \pm 0,1$.

La referencias o citas entre publicaciones, matemáticas especialmente, también las podemos representar por una una red. Ya que cada publicación se ve como un vértice y las aristas representan las citas entre ellas. Para este sistema se observó una distribución de grados $P(k) = k^{\alpha_c}$, donde $\alpha_c = 3$.

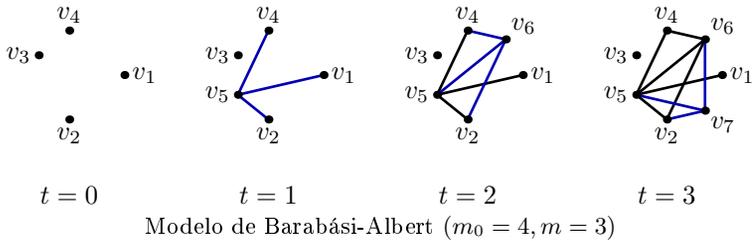
Barabási y Albert también se cuestionaron el por qué muchos de estos sistemas eran representados por los modelos de Erdős-Renyi y Watts-Strogatz, de hecho hemos observado en el capítulo anterior que la distribución de grados converge a una distribución normal y no a una ley de potencia. Es por ello que Barabási y Albert se dieron a la tarea de crear un modelo de gráficas aleatorias que explicara la ley de potencias y que se ajustara a los sistemas que ya se habían estudiado. Entonces en octubre de 1999 publicaron su artículo [BA99], y al mismo tiempo hicieron una publicación en la revista *Physica A* (véase referencia [Bar99]), en donde explican con mayor detalle sus resultados y supuestos.

En el resto de esta sección explicaremos el modelo en cuestión, utilizando la teoría que Barabási y Albert propusieron. Ellos argumentan que los modelos de redes descritos anteriormente deben tener dos características: el crecimiento continuo de las mismas, que se da por la aparición de nuevos vértices, y la propiedad las ligas preferenciales, es decir, que los nuevos vértices se unen con mayor preferencia a vértices que poseen un grado muy grande. Por ejemplo la red de actores de películas crece por la aparición de nuevos actores, y estos nuevos actores prefieren actuar al lado de actores con mayor popularidad. Así mismo, la red de internet (WWW) crece con el surgimiento de nuevas páginas, y éstas mismas hacen links con páginas que son muy conocidas.

Para definir el modelo, debemos considerar una gráfica inicial G_0 con un número ‘pequeño’ de vértices, m_0 , entonces en cada unidad de tiempo se agrega un vértice de grado m , con $m \leq m_0$, y cada arista del vértice nuevo se conecta con un vértice distinto, y asumimos que la probabilidad de que el vértice nuevo se conecte al vértice i está dada por:

$$(6) \quad \Pi(\delta(v_i)) = \frac{\delta(v_i)}{\sum_j \delta(v_j)},$$

donde $\delta(v_i)$ representa el grado del vértice i . Después de t unidades de tiempo tenemos una gráfica aleatoria con $m_0 + t$ vértices y mt aristas. De manera gráfica, el procedimiento lo podemos observar en la siguiente figura:



Sea G_{m_0} una gráfica de m_0 vértices, y siguiendo el modelo intuitivo de Barabási-Albert, en cada unidad de tiempo agreguemos un vértice de grado m , y representemos por $\delta_{G_m}(v_i)$ el grado del vértice v_i en la gráfica G_m . Siguiendo su método, supongamos que el grado de los vértices es una variable continua, entonces el grado del vértice v_i , con $i = \{1, \dots, m(t-1)\}$, cambia con respecto del tiempo si el nuevo vértice v_{mt} se conecta con el vértice v_i . Y consecuentemente Barabási y Albert dedujeron que para un vértice v_i :

$$\frac{d(\delta_{G_t}(v_i))}{dt} = m \frac{\delta_{G_{mt}}(v_i)}{\sum_{j=1}^{m_0+t} \delta_{G_t}(v_j)},$$

sustituyendo $\delta_{G_{mt}}(v_i) = \delta_i$, y del Teorema 1.1 tenemos que $\sum_{j=1}^{m_0+t} \delta_j = 2mt$, por lo tanto

$$(7) \quad \frac{d(\delta_{G_{mt}}(v_i))}{dt} = \frac{\delta_i}{2t},$$

observemos que la expresión anterior es una ecuación diferencial, donde δ_i está en función de t . Sea t_i el tiempo en el cual fue agregado el vértice i , y es claro que $\delta_i(t_i) = m$. Entonces considerando como condición inicial t_i para obtener la solución a la ecuación (7) obtenemos que

$$(8) \quad \delta_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{0,5}.$$

Usando la solución anterior calculemos la función de distribución de $\delta_i(t)$,

$$\Pr(\delta_i(t) < k) = \Pr \left(m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{0,5} < k \right) = \Pr \left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2} \right);$$

y bajo el supuesto de que agregamos los vértices en intervalos de tiempo iguales, implica que t_i se distribuye uniforme en el intervalo $[0, m_0 + t]$, por lo que obtenemos que

$$\Pr \left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2} \right) = 1 - \Pr \left(t_i \leq \frac{m^2 t}{k^2} \right) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(m_0 + t)},$$

y calculando la función de densidad

$$(9) \quad \Pr(\delta_i(t) = k) = \frac{d\Pr(\delta_i(t) < k)}{dk} = \frac{m^2 t}{(m_0 + t)} \frac{1}{k^3}$$

y por lo tanto tenemos que $\alpha = 3$ independientemente de m .

Entonces, Barabási y Albert mostraron que usando la combinación de ambas características se obtiene que la distribución de grados sigue una ley de potencia. Sin embargo, este resultado sólo es heurístico, pues desde un punto de vista matemático la descripción del modelo no tiene sentido, observemos las siguientes cuestiones:

- Supongamos que tenemos una gráfica inicial con un número m_0 de vértices aislados, entonces $\delta(v_i) = 0 \forall i \in \{1, \dots, m_0\}$, y de la expresión (6) tenemos que la probabilidad de unir el nuevo vértice con los primeros vértices es cero, por lo que nos cuestionamos ¿cómo es que debemos tomar tales probabilidades cuando se suceden tales casos?, por un lado podemos considerar que la gráfica inicial no tiene vértices aislados. Sin embargo, son importantes las propiedades de la gráfica inicial, por ejemplo, para el caso cuando $m = 1$ resulta que el modelo de gráfica describe el crecimiento de un árbol¹, por otro lado, cuando la gráfica inicial no es conexa entonces la gráfica en cada unidad de tiempo no es conexa.
- El segundo problema se debe a las ligas preferenciales, y en los casos en que $m \geq 2$, ya que cuando agregamos un vértice de grado m , por ejemplo v_{m_0+1} , nunca se especifica de qué forma elegimos los vértices con los que se unirá. Este conjunto de vértices lo denotaremos por N_{m_0+1} . Entonces analizando las ideas de Barabási-Albert, para $1 \leq i \leq m_0$ tenemos que

$$\Pi(v_i \in N_{m_0+1}) = m \frac{\delta(v_i)}{\sum_j^{m_0} \delta(v_j)};$$

sin embargo de (6), que es lo único que especifican Barabási y Albert, no podemos obtener la distribución del conjunto aleatorio N_{m_0+1} . O sea que el modelo de Barabási-Albert sólo está bien planteado cuando $m = 1$. Esto es, cuando se trata con árboles. Entonces se sugiere que para describir completamente el modelo debemos especificar la distribución de N_{m_0+1} . Un ejemplo de esto es el modelo LCD de Bollobás y Riordan que se estudia en el siguiente capítulo.

¹Un árbol es una gráfica conexa que no permite ciclos

Estas observaciones llevaron a Béla Bollobás y Oliver Riordán a proponer un nuevo modelo que integrara las mismas características del modelo de Barabási-Albert, es decir, el crecimiento y las ligas preferenciales, pero estableciendo argumentos matemáticos para formalizar dicho modelo.

Por otro lado, este modelo también llamó la atención de otros físicos y matemáticos, entre ellos Rick Durrett, que es profesor de matemáticas en la Universidad de Cornell; sus investigaciones se enfocan principalmente en aplicaciones de probabilidad a la ecología y genética. En una de sus más recientes publicaciones, [Dur07], hace referencia al modelo de Erdős-Rényi y de Barabási-Albert. Siguiendo las ideas del segundo modelo, solo que con una pequeña variante.

Si deseamos obtener una gráfica aleatoria de n vértices tal que en cada unidad de tiempo se agrega un vértice de grado m , con $m > 1$, primero se generará una gráfica aleatoria de nm vértices, que agrega un vértice de grado 1 en cada unidad de tiempo, y como segundo paso se colapsan los vértices $km - (m - 1), km - (m - 2), \dots, km - 1, km$ para formar el vértice k , para $k = 1, \dots, n$. Entonces utilizando este hecho Durrett reprodujo el cálculo de la distribución, y con ello fue que la fracción de vértices de grado k converge en probabilidad, es decir:

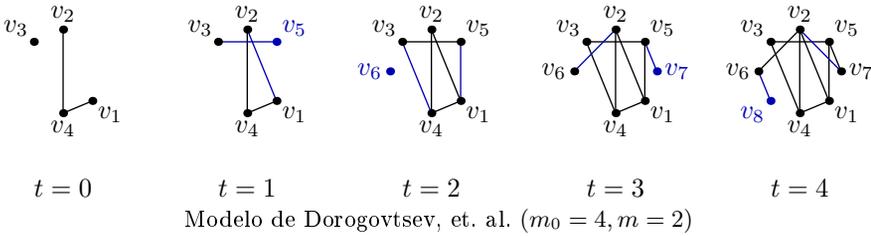
$$\Pr \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_k^n}{n} \rightarrow \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \right),$$

donde X_k^n representa el número de vértices de grado k en el instante n . Resultados semejantes ya habían sido probados por otros científicos, utilizando otros cálculos interesantes. Además, a partir de tal resultado, es claro que la distribución de grados es asintótica a $Ck^{-\alpha}$, con $C > 0$ y $\alpha = 3$.

2. Un modelo más general

Después de la publicación de Barabási y Albert, S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes y A. N. Samukhin presentaron un modelo que generaliza el modelo de Barabási-Albert en [DMS00], cabe mencionar que en la descripción del modelo solamente se utilizaron ideas intuitivas, y que desde un punto de vista matemático comete errores similares que el modelo antes visto.

El modelo de Dorogovtsev, Mendes y Samukhin adopta las características de ligas preferenciales y crecimiento, de la siguiente manera: en cada unidad de tiempo t se agrega un nuevo vértice y de forma simultánea se añaden m links (o aristas) para unir dos vértices cualesquiera de la gráfica, véase la siguiente figura.



Bajo dichas características el modelo admite aristas múltiples, sin embargo, para cantidades muy grandes de tiempo, el número de aristas múltiples es muy pequeño; inclusive para t muy grande la gráfica resultante presenta características que no dependen de la condición inicial.

Por otro lado, el colocar una arista entre dos vértices cualesquiera de la gráfica es más congruente con la realidad; por ejemplo, en la red de internet, cuando se crean nuevas páginas nunca se establece que éstas deban crear links con un número fijo de páginas distintas, y además en todo instante se están creando nuevas ligas entre páginas que ya habían sido creadas anteriormente.

En la sección anterior llamamos conectividad al grado de un vértice, pero en este modelo se le denomina *atractivo*, ya que entre mayor sea la conectividad de un vértice implica que es más ‘popular’ que otros vértices por lo que tiene más posibilidades de obtener una arista. Un ejemplo muy citado es el que se presenta en las páginas de internet, y es el caso de los buscadores como Google o Yahoo, que son páginas con un inmenso número de links.

Para definir el atractivo de un vértice, sea q_s el número de aristas nuevas del vértice (o sitio) s , y consideremos $A \geq 0$ como el atractivo inicial, entonces el atractivo total del vértice es:

$$(10) \quad A_s = A + q_s,$$

entonces la probabilidad de que un nuevo link tome como uno de sus extremos al vértice s es proporcional a la expresión (10), o bien a su atractivo. Es claro que el atractivo total al instante t es $A_\Sigma = (m + A)t$, por lo que la probabilidad de que un nuevo link esté conectado con el sitio s es A_s/A_Σ .

Si consideramos que las m aristas que se agregan en cada instante son del vértice nuevo ($A = m$), de esta manera tendríamos como caso particular el modelo de Barabási-Albert, por lo que la ecuación (10), queda como $A_s = m + q_s$.

Dorogovtsev, Mendes y Samukhin, a grandes rasgos en [DMS00], dieron una expresión para la probabilidad de que un vértice s sea de grado k en el instante n . A partir de ello derivaron heurísticamente una ecuación diferencial que muestra la evolución de la media de la distribución empírica de grados, de la cual obtienen el límite a tiempos grandes que resuelven mediante la

utilización de funciones generadoras. Llegaron a la siguiente expresión de la distribución de conectividad cuando el atractivo inicial es igual a la cantidad de aristas que se agregan:

$$P(q) = \frac{2m(m+1)}{(q+m)(q+m+1)(q+m+2)}.$$

Esta expresión coincide con el resultado de [BRST01] cuando $m = 1$ y recupera las colas de ley de potencia con exponente 3 que obtienen Barabasi y Albert en [BA99] y [Bar99]. Se puede obtener una ley de potencia de distinto exponente al utilizar un atractivo inicial arbitrario A :

$$P(q) = (1+a) \frac{\Gamma((m+1)a-1)}{\Gamma(ma)} (q+ma)^{-(2+a)},$$

donde $a = A/m$, y el exponente de la distribución de grados es $\gamma = 2 + a$. Entre otros cálculos está la media de la distribución de conectividad, la cual mostraron que es asintótica a $s^{-\beta}$, donde $\beta = 1/(\gamma-1)$. De hecho sus resultados fueron más allá de obtener resultados parecidos, pues se cuestionaron por el exponente γ , ya que en la mayoría de los estudios éste varía entre 2 y 3, sin embargo, ellos observaron que puede tomar valores mayores a 2. Es por ello que dejan al final de su artículo una pregunta abierta, apor qué γ varía entre 2 y 3 en las redes reales? Hasta el momento no hemos visto solución.

Formalización de un modelo de gráficas aleatorias libres de escala: el modelo LCD

Ahora presentaremos un modelo de gráficas aleatorias, introducido en [BRST01]. Dicho modelo formaliza las ideas o características que implementaron Barabási y Albert, y se puede construir mediante un diagrama cordal linealizado¹. Recibe el nombre de modelo LCD por sus siglas en inglés. Por último simularemos la distribución empírica de grados.

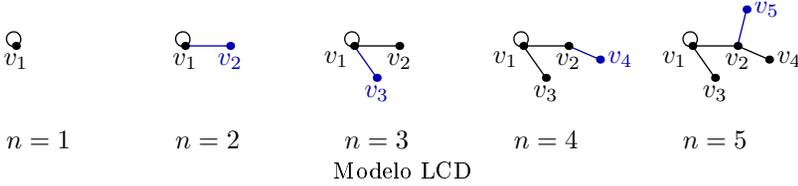
1. El modelo LCD

Sea v_1, v_2, \dots, v_n una secuencia de vértices y definamos un proceso de gráficas aleatorias, que denotaremos por $\{G_1^n\}_{n \geq 1}$, donde G_1^n representa una gráfica aleatoria de n vértices. Para formar G_1^n a partir de G_1^{n-1} se añade un vértice de grado 1 que es ligado a un vértice i con probabilidad definida como sigue:

$$(11) \quad \Pr(v = v_i) = \begin{cases} \frac{\delta_{G_1^{n-1}}(v_i)}{2E_{G_1^{n-1}} + L_{G_1^{n-1}} + 1} & 1 \leq i \leq n-1, \\ \frac{1}{2E_{G_1^{n-1}} + L_{G_1^{n-1}} + 1} & i = n, \end{cases}$$

donde $\delta_G(v_i)$ denota el grado del vértice v_i en la gráfica G ; E_G y L_G son el número de aristas y el número de lazos en la gráfica G correspondientes. La expresión del denominador se debe a que la gráfica admite lazos y aristas múltiples; ya que las gráficas que tienen lazos cumplen que la suma de grados de sus vértices es igual a dos veces el número de aristas más el número de lazos; y sumamos una unidad por que en el momento en que agregamos el nuevo vértice contamos su arista correspondiente. Para iniciar el proceso de gráficas se puede a partir de G_1^1 que representa la gráfica con un vértice y un lazo, véase la siguiente figura.

¹En inglés *Linearized Chord Diagrams*



El contéu del denominador siempre se puede realizar al contar los lazos como aristas y (11) admite la expresión equivalente:

$$\Pr(v = v_i) = \begin{cases} \frac{\delta_{G_1^{n-1}(v_i)}}{2(n-1)+1} & 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{1}{2(n-1)+1} & i = n, \end{cases} .$$

Al simplificar se llega a

$$(12) \quad \Pr(v = v_i) = \begin{cases} \frac{\delta_{G_1^{n-1}(v_i)}}{2^{n-1}} & 1 \leq i \leq n-1 \\ \frac{1}{2^{n-1}} & i = n \end{cases} .$$

En el caso en que $m > 1$, definimos el proceso $\{G_m^n\}_{n \geq 1}$ por el siguiente procedimiento: G_m^n se obtiene a partir del proceso $\{G_1^n\}_{n \geq 1}$, al agrupar los vértices de G_1^{mn} , denotados por v_1, v_2, \dots, v_{mn} , de la siguiente manera: los primeros m vértices, v_1, v_2, \dots, v_m , los agrupamos para representar el vértice 1 de la gráfica G_m^n ; los siguientes m vértices, $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{2m}$ representaran el vértice 2, y así sucesivamente se van identificando, hasta obtener los n vértices.

Una propiedad importante del proceso G_1^n es que para cada n fija, $n = k$, se le puede asociar un diagrama LCD. Este diagrama está constituido por un conjunto de puntos, $\{1, 2, \dots, 2k\}$, que de forma gráfica los podemos ubicar sobre el eje de las abscisas, y son unidos de dos en dos por medio de semicírculos trazados en la parte superior del plano, a los cuales llamaremos cuerdas. Un ejemplo del digrama LCD lo observamos en la Figura 1.

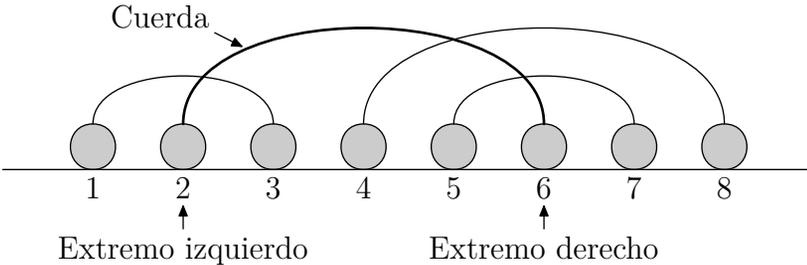


FIGURA 1. Diagrama LCD

DEFINICIÓN. Un ***n*-apareamiento**² \mathcal{P} es una partición del conjunto de puntos $\{1, 2, \dots, 2n\} = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$, donde cada P_k es una pareja de puntos, $P_k = \{i, j\}$.

El número total de posibles *n*-apareamientos es

$$(2n - 1)!! = 1 \times 3 \times \dots \times 2n - 1,$$

ya que el primer punto puede unirse a los $2n - 1$ puntos que quedan mediante una cuerda, el siguiente punto libre puede unirse a los $2n - 3$ puntos restantes, el siguiente punto libre puede unirse a los $2n - 5$ puntos restantes, y así sucesivamente. Es fácil ver que

$$(13) \quad (2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{n! 2^n}.$$

Por otro lado, para formar una gráfica a partir de un *n*-apareamiento \mathcal{P} , denotada por $\phi(\mathcal{P})$, debemos distinguir los extremos izquierdo y derecho de cada cuerda como lo observamos en la Figura 1, y consideremos el siguiente proceso recursivo:

1. Identificamos el primer extremo derecho del *n*-apareamiento, que denotaremos por d_1 .
2. Agrupamos desde el primer punto hasta d_1 , para formar el primer vértice, es decir $V_1 = \{1, \dots, d_1\}$.
3. Para cada $i = 2, \dots, n$,
 - Asignamos d_i al *i*-ésimo extremo derecho, y agrupamos desde el punto $(d_{i-1} + 1)$ hasta d_i para formar el *i*-ésimo vértice, $V_i = \{d_{i-1} + 1, \dots, d_i\}$.
4. Y para concluir dibujamos los *n* vértices con sus respectivas aristas, que se trazan a partir de las cuerdas del *n*-apareamiento (véase Figura 2).

También es posible crear un diagrama LCD a partir de la gráfica G_1^n , de la siguiente manera:

1. Representamos $2n$ puntos sobre el eje de las abscisas.
2. Consideremos el grado del vértice 1, $e_1 = \delta(v_1)$, y trazamos del punto 1 al punto e_1 una cuerda, para representar el lazo de tal vértice.
3. Para $i = 2, \dots, n$
 - a) Identificamos el punto $e_i = e_{i-1} + \delta(v_i)$,
 - b) Para $j = 1, \dots, i$:
 - Si el vértice v_j esta ligado al vértice v_i

²En inglés *n*-pairing

- 1) Si el punto e_i no está ligado a otro punto, entonces trazamos una cuerda de e_i al primer punto libre del que se encuentren entre $[e_{j-1} + 1, e_j - 1]$ ³.
- 2) En caso de que e_i ya esté ligado a otro punto, entonces trazamos una cuerda de los primeros puntos libres de los intervalos $[e_{i-1} + 1, e_i - 1]$ y $[e_{j-1} + 1, e_j - 1]$ respectivamente.

(Véase Figura 3).

Para calcular el grado del i -ésimo vértice, $i \geq 2$, a través del diagrama LCD, sólo debemos contar el número de puntos que existen entre los extremos derechos $(i - 1)$ e i , o visto de otra forma $\delta(v_i) = d_i - d_{i-1}$, y cuando $i = 1$, $\delta(v_1) = d_1$.

Hasta el momento conocemos el proceso para pasar del diagrama LCD a una gráfica y viceversa, sin embargo es posible crear un proceso para los diagramas LCD similar al de gráficas aleatorias, a través del siguiente procedimiento:

1. Iniciamos el proceso con dos puntos y una cuerda entre ellos.
2. Para $i = 2, \dots, n$
 - a) Agregamos el punto $2i - 1$.
 - b) Intercalamos otro punto de manera uniforme en cualquiera de las $2i - 1$ posiciones antes del último punto colocado, y unimos con una cuerda los dos puntos agregados.
 - c) Volvemos a enumerar los puntos para incluir los que se han agregado.

Visto desde otro punto de vista, a partir de un $(n - 1)$ -apareamiento podemos obtener un n -apareamiento (Véase Figura 4)

³ $e_0 = 1$

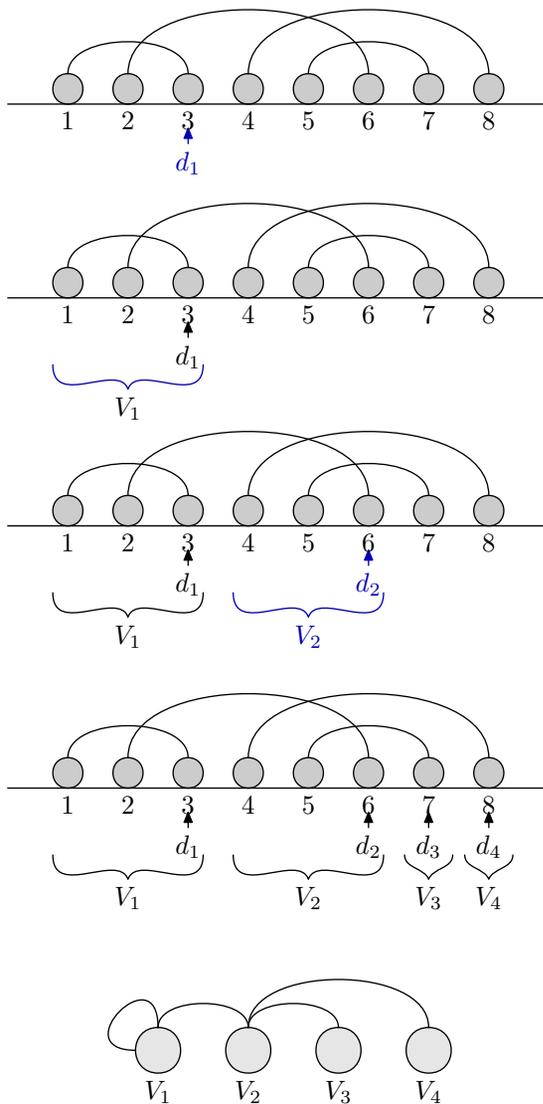


FIGURA 2. Proceso para pasar de \mathcal{P} (4-apareamiento) a G_1^4

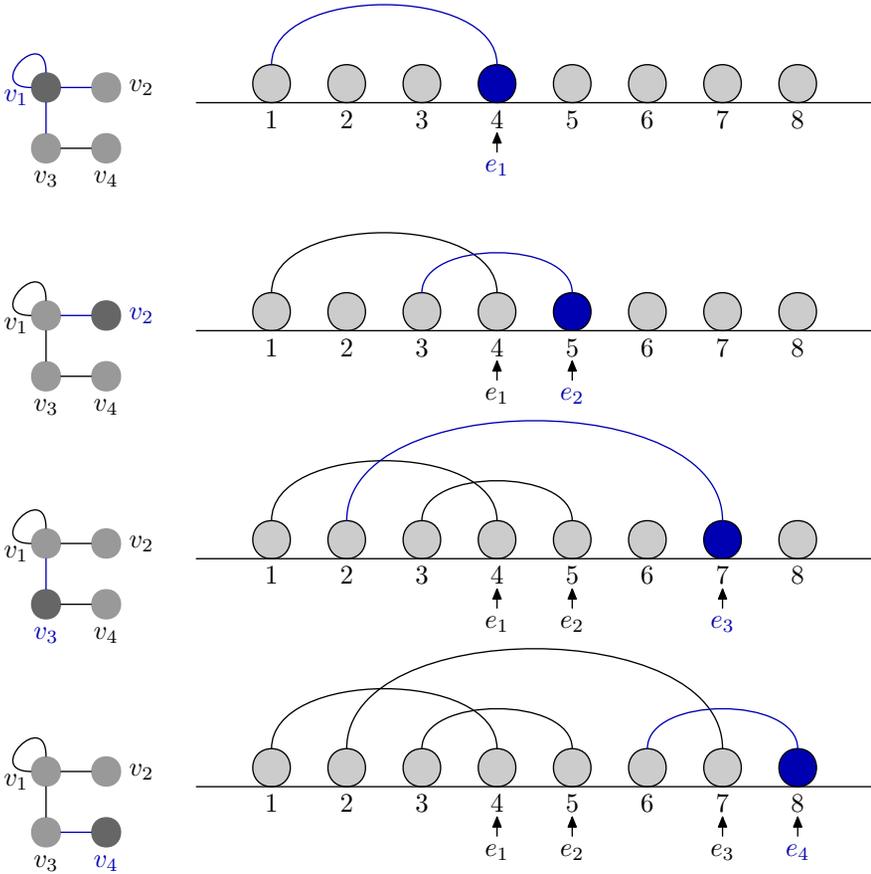


FIGURA 3. Proceso para pasar de G_1^n a \mathcal{P}

Notemos que en el momento en que estamos agregando el par de puntos al n -apareamiento, es equivalente a agregar un v\u00e9rtice de grado 1 en G_1^n , siguiendo la expresi\u00f3n (12).

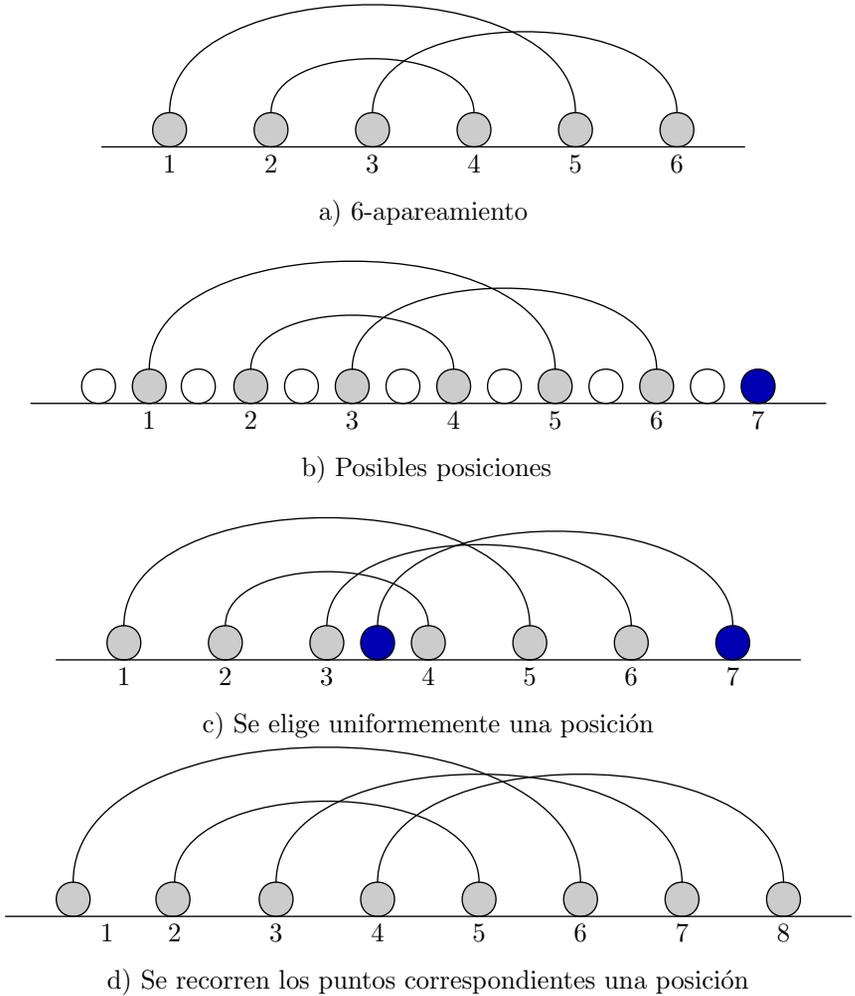


FIGURA 4. Proceso para obtener un n -apareamiento a partir de un $(n - 1)$ -apareamiento

2. Análisis del modelo LCD

Uno de los objetivos de esta sección es reproducir y explicar el método que Bollobás, Riordan y Spencer utilizaron en la demostración del Teorema

3.1 (véase referencia [BRST01]). Después de haber observado el mapeo o equivalencia que existe entre el proceso de gráficas aleatorias y los diagramas LCD, es posible calcular ciertas distribuciones explícitamente.

Para el teorema siguiente se consideró que las gráficas aleatorias G_m^n son dirigidas, ya que se trató de aproximar la distribución empírica de grados, calculando la proporción del número de vértices con grado interior igual a d , denotado por $\#_m^n(d)$, que es igual al número de vértices de grado (total) $m+d$.

TEOREMA 3.1. *Sea $(G_m^n)_{n \geq 1}$ el proceso de gráficas aleatorias definido en la sección anterior, con $m \geq 1$, definimos*

$$\eta_{m,d} = \frac{2m(m+1)}{(d+m)(d+m+1)(d+m+2)},$$

y sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$\Pr \left((1 - \epsilon)\eta_{m,d} \leq \frac{\#_m^n(d)}{n} \leq (1 + \epsilon)\eta_{m,d}, \text{ para } 0 \leq d \leq n^{1/15} \right) \rightarrow 1$$

como $n \rightarrow \infty$.

La demostración del Teorema 3.1 se basó en un cálculo preliminar, el comportamiento asintótico de $\mathbb{E}(\#_m^n(d))$, partiendo del caso $m = 1$ y después generalizando. Primero se calculó la distribución explícita de la suma de los grados de los primeros k vértices, denotado por D_k , para obtener la distribución de $\delta_{G_1^n}(v_{k+1})$ condicionado a D_k , y a partir de ello se obtuvo una expresión para la distribución de $\delta_{G_1^n}(v_{k+1})$. Y por último se argumentó que la diferencia entre $\#_m^n(d)$ y su esperanza tiende a cero, a lo que llamamos un resultado de concentración.

Primero calculemos la esperanza de los grados, utilizando (12):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_{G_1^n}(v_n)) &= (1) \Pr(v = v_i, i \neq n) + (2) \Pr(v = v_n) \\ &= (1 - \Pr(v = v_n)) + 2 \Pr(v = v_n) \\ &= 1 + \Pr(v = v_n) \\ &= 1 + \frac{1}{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Si $l < n$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_{G_1^n}(v_l) \mid \delta_{G_1^{n-1}}(v_l)) &= \\ \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) \Pr \left(\delta_{G_1^n}(v_l) = \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) \mid \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) \right) &+ \\ \left(\delta_{G_1^{n-1}}(v_l) + 1 \right) \Pr \left(\delta_{G_1^n}(v_l) = \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) + 1 \mid \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) \right), & \end{aligned}$$

y dado que $\Pr(\delta_{G_1^n}(v_l) = \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) \mid \delta_{G_1^{n-1}}(v_l))$ es igual a

$$1 - \Pr(\delta_{G_1^n}(v_l) = \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) + 1 \mid \delta_{G_1^{n-1}}(v_l)),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_{G_1^n}(v_l) \mid \delta_{G_1^{n-1}}(v_l)) &= \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) + \Pr(\delta_{G_1^n}(v_l)) \\ &= \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) + 1 \mid \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) \\ &= \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) + \Pr(v = v_l) \\ &= \delta_{G_1^{n-1}}(v_l) + \frac{\delta_{G_1^{n-1}}(v_l)}{2n - 1}, \end{aligned}$$

y calculando la esperanza de ambos lados resulta que

$$\mathbb{E}(\delta_{G_1^n}(v_l)) = \frac{2n}{2n - 1} \mathbb{E}(\delta_{G_1^{n-1}}(v_l)),$$

entonces utilizando la fórmula recursiva y la expresión (13)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_{G_1^n}(v_l)) &= \prod_{i=l}^n \frac{2i}{2i - 1} \\ &= \frac{2^{n-(l-1)} n!}{(l-1)!} \frac{(2l-3)!!}{(2n-1)!!} \\ &= \frac{2^{n-(l-1)} n!}{(l-1)!} \frac{(2l-2)! n! 2^n}{(l-1)! 2^{l-1} (2n)!} \\ &= \frac{2^{2n-2l+2} n!^2 (2l-2)!}{(l-1)!^2 (2n)!} \\ &= \frac{4^{n-l+1} n!^2 (2l-2)!}{(l-1)!^2 (2n)!}. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Stirling, podemos obtener la aproximación

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\delta_{G_1^n}(v_l)) &= \left(\frac{4^{n-l+1} n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi (1 + O(1/n))}{(2n)^{2n+1/2} e^{-2n} \sqrt{2\pi} (1 + O(1/n))} \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{(2l-2)^{2l-2+1/2} e^{-2l+2} \sqrt{2\pi} (1 + O(1/l))}{(l-1)^{2l-2+1/2} e^{-2l+2} 2\pi (1 + O(1/l))} \right) \\
 &= \frac{4^{n-l+1} n^{1/2} 2^{2l-2+1/2} (l-1)^{2l-2+1/2} (1 + O(1/n))(1 + O(1/l))}{2^{2n+1/2} (l-1)^{2l-1}} \\
 &= \frac{n^{1/2} (1 + O(1/n))(1 + O(1/l))}{(l-1)^{1/2}} \\
 &\approx \sqrt{\frac{n}{l}} (1 + O(1/l)).
 \end{aligned}$$

Para concluir la última expresión de $\mathbb{E}(\delta_{G_1^n}(v_l))$, consideramos que el número de vértices, n , es suficientemente grande, lo implica que $1/n \rightarrow 0$, por lo que resulta un error en función de l , por lo que dicho error está controlado. Así mismo, observemos que el valor esperado calculado está en función de n , por lo que éste puede crecer tanto como n , y por lo tanto no existe una concentración de los grados en una gráfica aleatoria del modelo LCD que no dependa del número de vértices. Por ello es que se calculó el valor esperado del número de vértices de grado $d + m$.

Caso $m = 1$

Sea $\delta_i = \delta_{G_1^n}(v_i)$, y dado que $m = 1$, entonces $\sum_{i=1}^n \delta_i = 2n$, y consideremos el evento en el que los últimos $n - k$ vértices de G_1^n están unidos con exactamente s aristas a los primeros k vértices, tal evento está representado por $\{D_k - 2k = s\}$, donde $0 \leq s \leq n - k$. Este evento corresponde a un n -apareamiento donde el punto $2k + s$ es el k -ésimo extremo derecho, sea \mathcal{P} el n -apareamiento con dicha propiedad. Dividiremos a \mathcal{P} en dos partes, sea \mathcal{L} los primeros $2k + s$ puntos, es decir $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, 2k + s\}$, y sea $\mathcal{R} = \{2k + s + 1, \dots, 2n\}$.

Calculemos la distribución del evento $\{D_k - 2k = s\}$, mediante \mathcal{P} , y para ello observemos todas las posibilidades de \mathcal{L} y \mathcal{R} . Para \mathcal{L} debemos unir el punto $2k + s$ al conjunto de puntos $\{1, \dots, 2k + s - 1\}$; de los $2k + s - 2$ puntos restantes debemos escoger s para ligarlos a s puntos de \mathcal{R} ; y los otros $2(k - 1)$ puntos deben formar un $(k - 1)$ -apareamiento. Por lo tanto tenemos

$$(14) \quad (2k + s - 1) \binom{2k + s - 2}{s} (2(k - 1) - 1)!!$$

2. Análisis del modelo LCD

de posibilidades para \mathcal{L} . De forma similar para \mathcal{R} , debemos tomar s puntos de los $2n - 2k - s$ puntos de \mathcal{R} , para unirlos a \mathcal{L} , y con los $2n - 2k - 2s$ puntos restantes formamos un $n - k - s$ -apareamiento, entonces obtenemos

$$(15) \quad \binom{2n - 2k - s}{s} (2(n - k - s) - 1)!!$$

de posibilidades para \mathcal{R} . Y por último contamos todas las formas en las que se unen los s puntos de \mathcal{L} y \mathcal{R} , cuyo total es $s!$. Por lo tanto multiplicando $s!$ por (14) y (15), y dividiendo entre el número total de n -apareamientos $(2n)!/(2^n n!)!$, tenemos que

$$(16) \quad \Pr(D_k - 2k = s) = \frac{2^{s+1} n! (2k + s - 1)! (2n - 2k - s)!}{(2n)! (k - 1)! s! (n - k - s)!}.$$

Sea $p_s = \Pr(D_k - 2k = s)$, y calculemos p_{s+1}/p_s .

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{p_{s+1}}{p_s} \\ &= 2 \frac{(2k + s)(n - k - s)}{(2n - 2k - s)(s + 1)}. \end{aligned}$$

Para deducir un resultado de concentración sobre D_k , y suponiendo que s es un número real, encontremos la única solución positiva para $r_s = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 2(2k + s)(n - k - s) &= (s + 1)(2n - 2k - s) \\ 4kn - 4k^2 - 4ks + (2n - 2k)s - 2s^2 &= (2n - 2k)s - s^2 + 2n - 2k - s \\ -s^2 + (1 - 4k)s - 2n + 4kn - 4k^2 + 2k &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos la siguiente ecuación de segundo grado

$$s^2 + (4k - 1)s + 2n - 2k - 4kn + 4k^2 = 0,$$

y calculando la solución positiva, tenemos

$$s = -2k + \frac{1}{2} + \sqrt{4kn - 2n + \frac{1}{4}}$$

Por lo tanto $s_0 = \left\lceil -2k + \frac{1}{2} + \sqrt{4kn - 2n + \frac{1}{4}} \right\rceil$ es uno de los valores más probables de $D_k - 2k$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{r_{s+1}}{r_s} &= \frac{(2k + s + 1)(n - k - (s + 1))}{(s + 2)(2n - 2k - (s + 1))} \cdot \frac{(2k + s)(n - k - s)}{(s + 1)(2n - 2k - s)} \\ &= \left(1 - \frac{2k - 1}{(s + 2)(2k + s)}\right) \left(1 - \frac{n - k}{(n - k - s)(2n - 2k - s - 1)}\right). \end{aligned}$$

Es claro que $\frac{2k-1}{(s+2)(2k+s)}$ y $\frac{n-k}{(n-k-s)(2n-2k-s)}$ son menores o iguales que 1, también que $(s+2)(2k+s) \leq 2n^2$ y $(2n-2k-s-1)(n-k-s) \leq 2n^2$, además sabemos que para $x \geq 0$, $1-x \leq e^{-x}$; por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{r_{s+1}}{r_s} &= \exp\left(-\frac{2k-1}{2n^2}\right) \exp\left(-\frac{n-k}{2n^2}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{n-(k+1)}{2n}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad anterior

$$\frac{r_{s_0+x}}{r_{s_0}} = \frac{r_{s_0+1}}{r_{s_0}} \frac{r_{s_0+2}}{r_{s_0+1}} \dots \frac{r_{s_0+x}}{r_{s_0+x-1}} \leq \exp\left(-\frac{x}{2n^2}\right),$$

y como $r_{s_0} \leq 1$, implica que $r_{s_0+x} \leq \exp(-x/2n)$. Asimismo

$$\begin{aligned} p_{s_0+x} &= r_{s_0+x-1} p_{s_0+x-1} \\ &= r_{s_0+x-1} r_{s_0+x-2} \dots r_{s_0} p_{s_0} \\ &\leq \exp\left(-\frac{x-1}{2n}\right) \exp\left(-\frac{x-2}{2n}\right) \dots \exp\left(-\frac{1}{2n}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x(x-1)}{2(2n)}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x(x-1)}{4n}\right). \end{aligned}$$

De manera similar para p_{s_0-x} , pero considerando que x debe ser menor o igual a s_0 ;

$$p_{s_0-x} \leq \exp\left(-\frac{y(y-1)}{4n}\right),$$

donde $y = s_0 - x - 1$. Las cotas estimadas nos sirven para aproximar $\Pr(|D_k - (2k + s_0)| \geq \epsilon)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \Pr(|D_k - (2k + s_0)| \geq \epsilon) \\
 &= \Pr(D_k - (2k + s_0) \leq -\epsilon) - \Pr(D_k - (2k + s_0) \geq \epsilon) \\
 &= \sum_{x=-\infty}^{-\epsilon} p_{s_0+x} + \sum_{x=\epsilon}^{\infty} p_{s_0+x} \\
 &= 2 \sum_{x=\epsilon}^{\infty} p_{s_0+x} \\
 &\leq 2 \sum_{x=\epsilon}^{\infty} \exp\left(-\frac{x(x-1)}{4n}\right) \\
 &\approx 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \exp\left(-\frac{x(x-1)}{4n}\right) dx,
 \end{aligned}$$

si consideramos la siguiente desigualdad $-x(x-1) \leq -\frac{2}{3}x^2 + 1$ para todo $x \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \exp\left(-\frac{x(x-1)}{4n}\right) dx &\leq 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \exp\left(-\frac{\frac{2}{3}x^2 + 1}{4n}\right) dx \\
 &= \int_{\epsilon}^{\infty} 2c \exp\left(-\frac{2x^2}{12n}\right) dx \\
 &\leq \int_{\epsilon}^{\infty} 2c \exp\left(-\frac{x^2}{6n}\right) \frac{x}{\epsilon} dx,
 \end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $y = \frac{x^2}{6n}$

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \exp\left(-\frac{x(x-1)}{4n}\right) dx &\leq \int_{\frac{\epsilon^2}{6n}}^{\infty} \frac{6nc}{\epsilon} \exp(-y) dy \\
 &= \left[-\frac{6nc}{\epsilon} \exp(-y) \right]_{y=\frac{\epsilon^2}{6n}}^{\infty} \\
 &= \frac{6nc}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{6n}\right)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Pr(|D_k - (2k + s_0)| \geq \epsilon) \leq \frac{6nc}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{6n}\right)$; y si suponemos que $\epsilon = \sqrt{an \log(n)}$, implica que

$$\begin{aligned} \frac{6nc}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{6n}\right) &= \frac{6nc}{\sqrt{an \log(n)}} \exp\left(-\frac{an \log(n)}{6n}\right) \\ &= \frac{6nc}{\sqrt{an \log(n)}} \frac{1}{n^{a/6}} \\ &= \frac{4c}{\sqrt{a \log(n)}} \frac{1}{n^{a/6-1/2}}, \end{aligned}$$

y $\frac{a}{6} - \frac{1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 9$, entonces concluimos que

$$\Pr\left(|D_k - (2k + s_0)| \geq \sqrt{9n \log(n)}\right) = o(n^{-1}).$$

Por otro lado notemos que

$$|D_k - 2\sqrt{kn}| - |2k + s_0 - 2\sqrt{kn}| \leq |D_k - 2\sqrt{kn} - (2k + s_0 - 2\sqrt{kn})|,$$

entonces

$$|D_k - 2\sqrt{kn}| \leq 3\sqrt{n \log(n)} + |2k + s_0 - 2\sqrt{kn}|,$$

y notemos que $|s_0 + 2k - 2\sqrt{kn}| \leq 2\sqrt{n}$, y ya que consideramos que n es suficientemente grande, tenemos que $2\sqrt{n} \leq \sqrt{n \log(n)}$, por lo tanto

$$(17) \quad \Pr\left(|D_k - 2\sqrt{kn}| \geq 4\sqrt{n \log(n)}\right) = o(n^{-1}).$$

Enseguida calcularemos la probabilidad de que el ingrado del vértice v_{k+1} sea igual a d , dado D_k , o lo que es equivalente, $\Pr(d_{k+1} = d + 1 \mid D_k)$. Suponiendo que $1 \leq k \leq n-1$ y $0 \leq s \leq n-k$, consideremos un n -apareamiento con la característica anterior, lo que corresponde a que el punto $2k+s+d+1$, del n -apareamiento, sea un extremo derecho, y los puntos $2k+s+1, \dots, 2k+s+d$ extremos izquierdos. Además, dicho n -apareamiento debe cumplir con el evento $\{D_k - 2k = s\}$. Entonces en este caso definimos $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, 2k+s+d+1\}$, y contaremos el número de extensiones de \mathcal{L} para formar un n -apareamiento. Notemos que el punto $2k+s+d+1$ debe estar ligado a uno de los s puntos que no están apareados antes del punto $2k+s$, o con alguno de los puntos $2k+s+1, \dots, 2k+s+d$, o bien, puede estar ligado al primer punto, por lo que tiene $s+d$ posibles parejas. También en \mathcal{L} hay $s+d-1$ puntos no apareados que pueden ser unidos a los puntos de \mathcal{R} de $(s+d-1)!$ formas distintas, y seleccionamos de los $2n-2k-s-d-1$ puntos de \mathcal{R} los $s+d-1$ puntos

2. Análisis del modelo LCD

correspondientes. Y por último, los puntos restantes forman un $(n - k - s - d)$ -apareamiento, por lo tanto el total de extensiones de \mathcal{L} es

$$(s + d)(s + d - 1)! \binom{2n - 2k - s - d - 1}{s + d - 1} (2(n - k - s - d) - 1)!!$$

para $0 \leq d \leq n - k - s$.

Recordemos que para el evento $\{D_k - 2k = s\}$ el número de extensiones de la parte izquierda de un n -apareamiento es igual a

$$s! \binom{2n - 2k - s}{s} (2n - 2k - 2s - 1)!!,$$

entonces

$$\begin{aligned} \Pr(d_{k+1} = d + 1 \mid D_k - 2k = s) &= \frac{(s + d)(s + d - 1)! \binom{2n - 2k - s - d - 1}{s + d - 1} (2(n - k - s - d) - 1)!!}{s! \binom{2n - 2k - s}{s} (2n - 2k - 2s - 1)!!} \\ &= 2^d (s + d) \frac{(2n - 2k - s - d - 1)!}{(2n - 2k - s)!} \frac{(n - k - s)!}{(n - k - s - d)!}, \end{aligned}$$

y denotando $(a)_b = a!/(a - b)!$, tenemos que

$$(18) \quad \Pr(d_{k+1} = d + 1 \mid D_k - 2k = s) = 2^d (s + d) \frac{(n - k - s)_d}{(2n - 2k - s)_{d+1}}$$

Consideremos a k y d como funciones de n , $k = k(n)$ y $d = d(n)$, que satisfacen $M \leq k \leq n - M$ y $0 \leq d \leq n^{1/15}$, donde $M = \lfloor n^{4/5} / \log n \rfloor$. Y como hemos visto que con alta probabilidad $\left| D_k - 2\sqrt{kn} \right| \leq O(\sqrt{n \log n})$, implica que

$$\begin{aligned} s &= D_k - 2k \\ &= D_k - 2\sqrt{kn} + 2\sqrt{kn} - 2k \\ &\leq O(\sqrt{n \log n}) + 2\sqrt{kn} - 2k, \end{aligned}$$

y notemos que $(a)_b$ es asintótico a $(a)^b$ cuando $a \rightarrow \infty$, y $d \leq \sqrt{n \log n}$, para $n \geq 2$, entonces sustituyendo en (18), tenemos la siguiente expresión para $\Pr(d_{k+1} = d + 1 \mid D_k - 2k = s)$

$$\left(2\sqrt{kn} - 2k + O(\sqrt{n \log n}) \right) 2^d \frac{(n + k - 2\sqrt{kn} + O(\sqrt{n \log n}))^d}{(2n - 2\sqrt{kn} + O(\sqrt{n \log n}))^{d+1}}.$$

Multiplicando y dividiendo por $(d\sqrt{n \log n})^{d+1}$, y utilizando las cotas correspondientes de k y d tenemos que el cociente de $n + k - 2\sqrt{kn} = (\sqrt{n} - \sqrt{k})^2$

sobre $d\sqrt{n \log n}$ crece tanto como n ; y lo mismo sucede para $2n - 2\sqrt{kn}$ y $\sqrt{kn} - 2k$ ambos sobre $d\sqrt{n \log n}$, por lo que la probabilidad anterior se expresa como sigue

$$(1 + o(1)) \frac{2\sqrt{kn} - 2k}{2n - 2\sqrt{kn}} \left(\frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{k})^2}{2(n - \sqrt{kn})} \right)^d$$

donde $o(\cdot)$ indica el error, y observemos que

$$1 - \frac{2\sqrt{kn} - 2k}{2n - \sqrt{kn}} = \frac{2(\sqrt{n} - \sqrt{k})^2}{2(n - \sqrt{kn})} \quad \text{y} \quad \frac{\frac{2\sqrt{kn} - 2k}{2n - \sqrt{kn}}}{\sqrt{k/n}} = 1,$$

por lo tanto

$$(19) \quad \Pr \left(d_{k+1} = d + 1 \mid |D_k - 2\sqrt{kn}| \leq 4\sqrt{n \log(n)} \right) \sim (1 + o(1)) \sqrt{k/n} (1 - \sqrt{k/n})^d$$

utilizando la fórmula de Bayes y la ecuación (18), tenemos que

$$\Pr(d_{k+1} = d + 1) = o(n^{-1}) + (1 + o(1)) \sqrt{k/n} (1 - \sqrt{k/n})^d.$$

Variando k en el rango definido, y fijando n y d , podemos estimar que el número esperado de vértices con grado igual a $d + 1$ se calcula mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\#_1^n(d)) &= \sum_{k=1}^n \Pr(d_{k+1} = d) \\ &= 2 \sum_{k=1}^M \Pr(d_{k+1} = d) + \sum_{k=M}^{n-M} o(n^{-1}) + (1 + o(1)) \sqrt{k/n} (1 - \sqrt{k/n})^d \\ &= O(M) + o(1) + (1 + o(1)) \sum_{k=M}^{n-M} \sqrt{k/n} (1 - \sqrt{k/n})^d. \end{aligned}$$

Sabemos que $\sum_{k=M}^{n-M} \sqrt{k/n} (1 - \sqrt{k/n})^d \approx \int_{k=M}^{n-M} \sqrt{k/n} (1 - \sqrt{k/n})^d dk$, y calculando la integral mediante el cambio de variable $x = k/n$, tenemos que

$$\int_{k=M}^{n-M} \sqrt{k/n} (1 - \sqrt{k/n})^d dk = n \int_{k=M/n}^{1-M/n} \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^d dx,$$

2. Análisis del modelo LCD

y como $\frac{M}{n}$ tiende a 0, cuando $n \rightarrow \infty$, por lo que todo se reduce a calcular la siguiente integral, realizando el cambio de variable $x = (1 - u)^2$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^d dx &= - \int_1^0 2(1 - u)^2 u^d du \\
 &= 2 \int_0^1 u^d - 2u^{d+1} + u^{d+2} du \\
 &= 2 \left(\frac{1}{d+1} - \frac{2}{d+2} + \frac{1}{d+3} \right) \\
 &= \frac{4}{(d+1)(d+2)(d+3)},
 \end{aligned}$$

y por lo tanto el valor esperado del número de vértices de ingrado d es asintótico a

$$(20) \quad \mathbb{E}(\#_1^n(d)) \sim \frac{4n}{(d+1)(d+2)(d+3)}.$$

Caso general ($m \geq 1$)

Recordemos que a partir de G_1^{nm} podemos obtener G_m^n , ésto nos servirá de base para calcular el número esperado de vértices de ingrado d en G_m^n , denotado por $\#_m^n(d)$. Sea d'_k el grado del vértice k en G_m^n , dicho vértice es está conformado por los vértices v_{K+1}, \dots, v_{K+m} que pertenecen a G_1^N , donde $K = km$ y $N = nm$; y sean d_{K+1}, \dots, d_{K+m} sus respectivos grados, entonces $d'_K = d_{K+1} + \dots + d_{K+m}$.

Bajo las condiciones de que $M \leq k \leq n - M$ y $0 \leq d \leq n^{1/15}$, y observando que el resultado obtenido en (19) se puede aplicar, considerando que $|D_{K+j} - 2\sqrt{(K+j)N}| \leq 4\sqrt{N \log(N)}$ para cada $j = \{1, 2, \dots, m\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \Pr(d_{K+j+1} = d+1 \mid d_1, d_2, \dots, d_{K+j}) &\sim c\sqrt{(K+j)/N} \left(1 - \sqrt{(K+j)/N}\right)^d \\
 &\sim c(1 + o(1))\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^d,
 \end{aligned}$$

donde $c = 1 + o(1)$ y $x = k/n = K/N$. Observemos que

$$\begin{aligned}
 &\Pr(d'_K = d + m \mid d'_1, \dots, d'_{K-1}) \\
 &= \Pr \left(\bigcup_{a_1 + \dots + a_m = d} \{d_{K+1} = a_1 + 1, \dots, d_{K+m} = a_m + 1\} \mid d_1, \dots, d_K \right),
 \end{aligned}$$

y sabemos que los eventos de la probabilidad anterior son independientes, por lo que es igual a

$$\sum_{a_1+\dots+a_m=d} \prod_{i=1}^m \Pr(d_{K+i} = a_i + 1 \mid d_1, \dots, d_{K+i-1}) \sim \sum_{a_1+\dots+a_m=d} x^{m/2}(1-x)^d,$$

dado que los sumandos no dependen de las a_i 's, deseamos calcular el número de combinaciones posibles de que exactamente m números no negativos sumen d .

En combinatoria, existe un concepto llamado *composición de n* , que se define de la siguiente manera:

DEFINICIÓN. Sean n y k dos números enteros positivos, $k \leq n$, entonces una **composición** de n en k partes es una representación ordenada de n como una suma de exactamente k números enteros no negativos

$$n = r_1 + r_2 + \dots + r_k (\forall i \ r_i \leq 0),$$

y se denomina como *k -composición de n* .

Consideremos una composición de n con k elementos, observemos que en cierto sentido, tenemos libertad de elegir los primeros $k - 1$ sumandos, ya que el último depende de todos los anteriores. Entonces podemos establecer una biyección entre un k -composición de n y un subconjunto de $k - 1$ elementos, A , que pertenece a un conjunto de cardinalidad $n - 1$, y definimos a dicho conjunto de la siguiente manera

$$A = \{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}\},$$

entonces es claro que existen $\binom{n-1}{k-1}$ k -composiciones de n . Sin embargo, en nuestro caso tenemos que cada uno de los grados es igual $a_i + 1$, entonces la suma de los grados debe ser igual a $d + m$, y así tenemos un m -composición de $d + m$, y existe un total $\binom{d+m-1}{m-1}$ composiciones, entonces

$$\Pr(d'_K = d + m \mid d'_1, \dots, d'_{K-1}) \sim (1 + o(1)) \binom{d+m-1}{m-1} x^{m/2}(1-x)^d,$$

y concluimos que

$$\Pr(d'_K = d + m) = o(n^{-1}) + (1 + o(1)) \binom{d+m-1}{m-1} x^{m/2}(1-x)^d.$$

Ahora, podemos obtener una expresión para el número esperado de vértices de grado $d + m$, utilizando los mismos rangos para k y d ,

$$\mathbb{E}(\#_1^n(d)) = O(M) + o(1) + (1 + o(1)) \sum_{k=M}^{n-M} \binom{d+m-1}{m-1} (k/n)^{m/2} (1 - \sqrt{k/n})^d,$$

de manera similar, para obtener una expresión más explícita de la esperanza, basta resolver la siguiente integral, utilizando los mismos cambios de variable del caso $m = 1$, $x = (1 - u)^2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{m/2} (1 - \sqrt{x})^d dx &= -2 \int_1^0 (1 - u)^{m+1} u^d du \\ &= 2 \int_0^1 (1 - u)^{m+1} u^d du, \end{aligned}$$

es claro que la última equivalencia presenta la forma de una función beta, por lo tanto

$$\int_0^1 (1 - u)^{m+1} u^d du = \frac{(m + 1)! d!}{(m + d + 2)!},$$

y sustituyendo en la expresión de la esperanza del número de vértices de grado d obtenemos

$$(21) \quad \mathbb{E}(\#_1^n(d)) \sim \frac{2m(m + 1)n}{(d + m)(d + m + 1)(d + m + 2)}.$$

Después de haber corroborado todos los cálculos para obtener explícitamente el comportamiento asintótico de la esperanza del número de vértices de grado d en la gráfica G_n^m , analizaremos los argumentos de la demostración del Teorema 3.1.

2.1. Discusión sobre la demostración del Teorema 3.1. Hay varios autores que han citado, en sus artículos y libros, el artículo de Bollobás [BRST01], con el fin de dar la demostración al Teorema 3.1, pero no han profundizado en tal demostración. En un principio éste fue uno de los objetivos del capítulo, sin embargo han surgido puntos de la demostración que hasta el momento no hemos comprendido del todo, lo que nos lleva pensar que pudiese ser errónea o que faltaron argumentos en su desarrollo.

En un primer punto se nos pide que consideremos la gráfica G_m^n , donde n y m son números fijos, y definimos una martingala de la siguiente manera

$$X_i = \mathbb{E}(\#_m^n(d) | G_m^i), \text{ para } 0 \leq i \leq n,$$

donde $X_n = \#_m^n(d)$ y $X_0 = \mathbb{E}(\#_m^n(d))$. El siguiente punto es ver que los incrementos de la martingala son acotados por 2, $|X_{i+1} - X_i| \leq 2$. Suponiendo que $|X_{i+1} - X_i| \leq 2$, el siguiente paso fue aplicar la desigualdad de Azuma-Hoeffding (véase apéndice BMartingalas y la desigualdad de Azuma-Hoeffding)

y se obtiene

$$\begin{aligned} \Pr\left(|X_n - X_0| \geq \sqrt{n \log n}\right) &= \Pr\left(|\mathbb{E}(\#_m^n(d)) - \#_m^n(d)| \geq \sqrt{n \log n}\right) \\ &\leq e^{-\log n/8} \\ &= o(n^{-1/15}). \end{aligned}$$

Por lo tanto la probabilidad de que

$$1 - \varepsilon \leq \#_1^n(d) \frac{(d+m)(d+m+1)(d+m+2)}{2m(m+1)n} \leq 1 + \varepsilon \text{ para } 0 \leq d \leq n^{1/15}$$

tiende a 1 conforme n tiende a infinito para toda $\varepsilon > 0$, y por lo tanto se concluye la demostración del Teorema 3.1.

El argumento (a nuestro parecer incompleto) para justificar la cota

$$|X_{i+1} - X_i| \leq 2$$

es: considérese que en el paso i podemos unir el vértice v_i a v_k o v_l , y como estamos interesados en el número de vértices de un grado en particular, d , los grados de v_k y v_l en G_m^n no pueden afectar $\#_m^n(d)$, y por lo tanto el cambio en $\#_m^n(d)$ a lo más es dos. Visto de otro modo, se entiende que se tienen dos gráficas G_m^n y H_m^n tales que la única diferencia entre ellas es la arista que se agrega al instante i , ésto implica que antes y después del instante i todas las variables (o aristas) están controladas y son exactamente las mismas en ambas gráficas. Entoces, suponiendo que $m = 1$, $|\delta_d(G_m^n) - \delta_d(H_m^n)| \leq 2$, donde $\delta_d(G)$ es el número de vértices de grado d en la gráfica G . Esto se debe a que a lo más $\delta_d(G_m^n)$ puede disminuir y $\delta_d(H_m^n)$ aumentar una unidad, o viceversa, todo depende de a qué vértice se una v_i , si es un vértice de grado d o $d - 1$, o un grado distinto. Cuando $m \geq 2$, la cota correspondiente es $2m$.

Bajo este análisis, se debe tener como implicación que los incrementos de la martingala son acotados, sin embargo, no es claro, por un lado porque al tratar de calcular la esperanza condicional directamente, dada una gráfica G_m^i , no se tienen las variables subsecuentes “controladas o fijas”; por lo que $\delta_d(G_m^n)$ y $\delta_d(H_m^n)$, intuitivamente, pueden diferir en más de dos unidades si las variables agregadas después del instante i son distintas para ambas gráficas, y por lo tanto no es claro que partiendo de tal supuesto $|X_{i+1} - X_i| \leq 2$.

Se trató de buscar el camino o análisis que nos mostrará que los incrementos de la martingala, antes definida, fuesen acotados, pero no se logró; sin embargo, esto nos llevó a elaborar una nueva construcción, para mostrar que la distribución de grados converge a una ley de potencias, es por ello que se desarrolla el siguiente capítulo.

No cabe duda que el método es interesante, pues requería aplicar conceptos básicos y resultados ya conocidos, quizá un camino largo pero muy ilustrativo.

3. Simulación de la distribución empírica de grados

Después de observar los resultados de la distribución de grados, ahora veamos el mismo resultado computacionalmente. Para tal objetivo se elaboraron dos algoritmos para simular la distribución empírica de grados del modelo LCD, siguiendo ideas del Algoritmo 2, (véase capítulo 1 sección 4.2).

En el primer algoritmo distinguimos el número aristas del de lazos, para observar que el segundo número es casi nulo, ya que las simulaciones que realizamos son para un número grande de vértices. En el segundo algoritmo los lazos son contados como aristas y la distribución de grados no se calcula en un solo paso, sino conforme se van agregando los vértices.

Algoritmo 3

Este algoritmo simula la distribución empírica de grados del modelo LCD.

1. Se requiere de un parámetro: n (número de vértices).
2. Se inicia el número de aristas en cero y el número de lazos en uno, $a=0$ y $b=1$, ya que el proceso de gráficas comienza con un vértice que tiene un lazo.
3. El vector que almacena el grado de cada vértice, tiene en su primera entrada el valor de 1, por el grado del primer vértice, y el resto de las entradas son cero, $d=\mathbf{zeros}(1,n)$ y $d(1)=1$.
4. El vector que guarda el número de vértices de grado k , con $k = \{1, \dots, n\}$, se inicializa con todos sus valores en cero, excepto en la primera entrada que se le asigna el valor de 1, $c=\mathbf{zeros}(1,n)$ y $c(1)=1$.
5. Para el vértice $j = 2, \dots, n$
 - a) Se inicializa el grado del vértice j en uno, $d(j)=1$.
 - b) Aumentamos una unidad el número de vértices de grado uno, $c(1)=c(1)+1$.
 - c) Se actualiza la distribución empírica de grados para la gráfica G_1^j , por medio del comando `cumsum` y se almacena en un vector, $p=[0, \text{cumsum}(d./(2*(a+b+1)))]$.
 - d) Se crea un número aleatorio entre cero y uno, `rand`.
 - e) Para unir el nuevo vértice con alguno de los vértices $i = 1, \dots, j$, se busca el cuantil de la distribución empírica de grados de la gráfica G_1^j , que corresponde al número generado anteriormente.

1) Si el número se encuentra en el intervalo

$$\left(\sum_{l=1}^{i-1} \frac{\delta_{G_1^j}(v_l)}{2j-1}, \sum_{l=1}^i \frac{\delta_{G_1^j}(v_l)}{2j-1} \right],$$

o de forma equivalente si está en el intervalo $(p(i), p(i+1)]$:

- En caso de que $i \neq j^4$:
 - Aumenta el número de aristas una unidad, $a=a+1$.
 - Disminuimos una unidad el número de vértices del grado del vértice i , y aumentamos una unidad el número de vértices del grado siguiente, $c(d(i))=c(d(i))-1$ y $c(d(i)+1)=c(d(i)+1)+1$.
 - Actualizamos el grado del vértice i , que aumenta una unidad, $d(i)=d(i)+1$.
 - Se termina el proceso de búsqueda.
 - En caso de que $i = j$:
 - Aumenta el número de lazos, $b=b+1$.
6. Se suma el grado de todos los vértices para comparar con el número total de aristas multiplicado por dos más el número de lazos.
7. Se grafica el logaritmo de la proporción del número de vértices de grado k y una línea con pendiente -3 , para observar que la distribución de grados sigue una ley de potencias.

Programa 3

```
function Programa3(n)
tic;
t=[0];
a=0;
b=1;
d=zeros(1,n);
d(1)=1;
c=zeros(1,n);
c(1)=1;
for j=2:n
    d(j)=1;
    c(1)=c(1)+1;
    p=[0,cumsum(d./(2*a+b+1))];
    aux=rand;
    for i=1:j
```

⁴El vértice j se une con un vértice distinto a él

3. Simulación de la distribución empírica de grados

```
if(p(i)<aux) & (aux<=p(i+1))
    if i+1~=j+1
        a=a+1;
        c(d(i))=c(d(i))-1;
        c(d(i)+1)=c(d(i)+1)+1;
        d(i)=d(i)+1;
        break;
    else
        b=b+1;
    end
end%if
end
t=[t;toc];
end
sum(d)
2*a+b
sum((1:n).*c)
plot((1:n),log(c/n),'r')
hold on
plot((1:50),(-3)*(1:50))
```

Apartir del algoritmo anterior, obtuvimos para el número de lazos los siguientes resultados:

CUADRO 1. Número de lazos

Núm. de vértices	Núm. de aristas	Núm. de lazos	Tiempo de ejecución
1000	996	4	0.65 seg.
10000	9995	5	59.60 seg.
50000	99994	6	25.22 min.
100000	199993	7	1 hr. 8 min.

En el siguiente algoritmo que observaremos, en lugar de dividir entre $2n+1$ para calcular la distribución de grados, se multiplica este factor por el número aleatorio, y así obtenemos el mismo resultado.

Algoritmo 4

Este algoritmo simula la distribución empírica de grados del modelo LCD.

1. Se requiere de un parámetro: n (número de vértices).

2. El vector que almacena el grado de cada vértice, tiene en su primera entrada el valor de 2, por el grado del primer vértice, y el resto de las entradas son cero, $\mathbf{d}=\mathbf{zeros}(1,n)$ y $\mathbf{d}(1)=2$.
3. El vector que guarda el número de vértices de grado k , con $k = \{1, \dots, n\}$, se inicializa con todos sus valores en cero, excepto en la segunda entrada que se le asigna el valor de 1, $\mathbf{c}=\mathbf{zeros}(1,n)$ y $\mathbf{c}(2)=1$.
4. Para el vértice $j = 2, \dots, n$
 - a) Se inicializa el grado del vértice j en uno, $\mathbf{d}(j)=1$.
 - b) Aumentamos una unidad el número de vértices de grado uno, $\mathbf{c}(1)=\mathbf{c}(1)+1$.
 - c) Se crea una variable que almacenará la suma acumulativa de los grados de cada uno de los vértices, empezando por el vértice de grado 1, $\mathbf{p1}=\mathbf{d}(1)$; para ir calculando la distribución empírica de grados para la gráfica G_1^j .
 - d) Se crea un número aleatorio entre cero y uno, y se multiplica por el número de aristas, $(2*j-1)*\mathbf{rand}$, para verificar a qué vértice se va a unir el vértice j .
 - e) Para unir el nuevo vértice con alguno de los vértices $i = 1, \dots, j$, se localiza el número anterior en la distribución empírica de grados de la gráfica G_1^j .
 - 1) Entonces si el número es menor o igual que $\mathbf{p1} = \sum_{l=1}^j \delta_{G_1^j}(v_l)$:
 - Disminuimos una unidad el número de vértices del grado del vértice i , y aumentamos una unidad el número de vértices del grado siguiente, $\mathbf{c}(\mathbf{d}(i))=\mathbf{c}(\mathbf{d}(i))-1$ y $\mathbf{c}(\mathbf{d}(i)+1)=\mathbf{c}(\mathbf{d}(i)+1)+1$.
 - Actualizamos el grado del vértice i , que aumenta una unidad, $\mathbf{d}(i)=\mathbf{d}(i)+1$.
 - Se termina el proceso de búsqueda.
 - f) Se actualiza la suma acumulativa de los grados de los vértices, $\mathbf{p1}=\mathbf{d}(i+1)+\mathbf{p1}$.
5. Se suma el grado de todos los vértices para comparar con el número total de aristas que es $2n$.
6. Se grafica el logaritmo de la proporción del número de vértices de grado k y una línea con pendiente -3 , para observar que la distribución de grados sigue una ley de potencias.

Programa 4

```
function Programa4(n)
tic;
```

3. Simulación de la distribución empírica de grados

```
t=[0];
d=zeros(1,n);
d(1)=2;
c=zeros(1,n);
c(2)=1;
for j=2:n
    d(j)=1;
    c(1)=c(1)+1;
    p1=d(1);
    aux=(2*j-1)*rand;
    for i=1:j
        if(aux<=p1)
            c(d(i))=c(d(i))-1;
            c(d(i)+1)=c(d(i)+1)+1;
            d(i)=d(i)+1;
            break
        end%if
        p1=d(i+1)+p1;
    end%for
    t=[t,toc];
end%for
sum(d)
sum((1:n).*c)
2*n
t=[t,toc];
plot(log10(1:n),log10(c/n),'r')
hold on
plot((0:2),-3*(0:2)+0.5)
```

Cabe mencionar que el tiempo de ejecución para ambos programas es muy similar. Utilizamos el segundo programa para simular la distribución empírica de grados con $n = 500,000$ y se grafico $(\log k, \log P(k))$, donde $P(k)$ es la probabilidad de que un vértice sea de grado k , dicho resultado lo podemos observar en la Figura⁵ 5. La línea punteada es una recta de pendiente igual a -3 , y la línea en color azul es el logaritmo de la distribución. Por lo tanto, computacionalmente hemos obtenido que $P(k) \sim Ak^{-3}$, lo cual coincide con lo enunciado en el Teorema 3.1.

⁵Para obtener dicha gráfica, se modificó el rango del gráfico en el menú de *Matlab*, para dar un mejor acercamiento

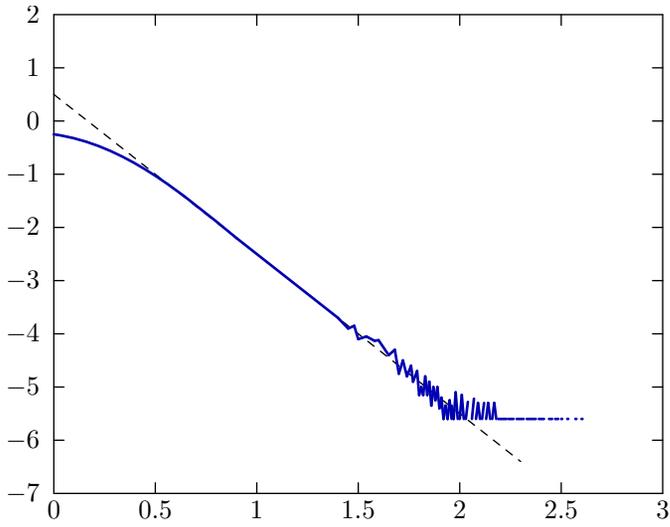


FIGURA 5. Simulación de la distribución empírica de grados del modelo LCD

Convergencia de la distribución empírica de grados

En este capítulo ajustaremos una sucesión de variables aleatorias para detallar la evolución del número de vértices de grado k , a la cuál denominaremos caminata aleatoria auto-regulada, debido a su construcción. Dicha caminata nos permitirá obtener una ley fuerte de los grandes números para cada grado k . Así mismo, como hemos proseguido en los capítulos anteriores, realizaremos la simulación de la caminata aleatoria auto-regulada para observar la distribución del número de vértices de cierto grado. El desarrollo de este capítulo inicia con el análisis del número de vértices de grado 1, y después se hará una generalización.

1. Proporción del número de vértices de grado 1

Sea C_n el número de vértices de grado 1 de la gráfica G_1^n y consideremos $C_1 = 0$, pues en el modelo LCD, iniciamos el proceso con un vértice de grado 2; sin embargo, de manera general podemos dar cualquier condición inicial para el proceso de gráficas. Además consideremos a la σ -álgebra generada por las gráficas G_1^1, \dots, G_1^n , que denotaremos por \mathcal{F}_n , y sea $G_1^n = G^n$.

Notemos que C_n no disminuye, ya que cuando agregamos un nuevo vértice, v_{n+1} , a la gráfica G^n , éste se puede unir a un vértice de grado 1, lo que implica que $C_{n+1} = C_n$, ya que v_{n+1} será de grado 1 y el vértice con el que se unió tendrá grado 2. O también se puede unir a el mismo, formando un lazo, así

$$\Pr(C_{n+1} = C_n \mid \mathcal{F}_n) = \frac{C_n + 1}{2n + 1}.$$

Por otro lado, observemos que C_n aumenta una unidad, si el vértice v_{n+1} no se une con el mismo o con un vértice que no es de grado 1, por lo que

$$\Pr(C_{n+1} = C_n + 1 \mid \mathcal{F}_n) = 1 - \frac{C_n + 1}{2n + 1}.$$

Consideremos una sucesión de variables aleatorias tal que la ley condicional de sus incrementos dada \mathcal{F}_n , es decir $\mathcal{L}(\Delta C_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \text{Bernoulli}(1 - \frac{C_n + 1}{2n + 1})$,

donde $\Delta C_{n+1} = C_{n+1} - C_n$; a dicha sucesión le llamaremos **caminata aleatoria auto-regulada**, ya que la evolución de la sucesión depende de sí misma. El objetivo de describir tal sucesión es el de dar otra construcción que nos permita ver que la proporción de vértices de grado 1 tiende a $2/3$, pues en el capítulo anterior tratamos de concluir dicho resultado basándonos en el procedimiento de Bollobás, sin embargo, no obtuvimos el argumento completo, como ya se discutió.

Para otro modo de ver la construcción de C_n , consideremos una sucesión de variables aleatorias independientes $(U_i)_{i=1}^\infty$, donde cada U_i tiene distribución Uniforme(0, 1) $\forall i$, entonces sea

$$(22) \quad C_{n+1} = C_n + 1_{\{U_{n+1} \leq 1 - \frac{C_n+1}{2n+1}\}},$$

con $C_1 = 0$.

Es claro que los incrementos de C_n no son independientes ni idénticamente distribuidos, pues

$$\Delta C_{n+1} = 1_{\{U_{n+1} \leq 1 - \frac{C_n+1}{2n+1}\}},$$

y así para cada n , ΔC_{n+1} tiene distribución condicional Bernoulli $\left(1 - \frac{C_n+1}{2n+1}\right)$. Bajo esta descripción la caminata aleatoria auto-regulada es fácil de simular, para observar una estimación de la distribución empírica del número de vértices de grado 1, lo cual realizaremos más adelante.

Cuando los incrementos de una caminata aleatoria S_n , tienen distribución Bernoulli de parámetro p , sabemos que $\mathbb{E}(S_n) = np$, debido a que S_n puede verse como una suma de variables Bernoulli. Sin embargo, deseamos calcular $\frac{C_n}{n}$, para obtener la proporción de vértices de grado 1. Enseguida afirmaremos que casi seguramente C_n/n tiene límite y es igual a $2/3$, cuya demostración se basa en un método de Freedman de su artículo [Fre65], el cual implementa un argumento de acoplamiento.

TEOREMA 4.1. *Sea C_n la sucesión definida en (22), entonces*

$$\Pr \left(\frac{C_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \frac{2}{3} \right) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente conjunto

$$C_{x,y} = \left\{ x \wedge 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} \leq y \wedge 1 \right\}.$$

Veamos ahora que si

$$\Pr(C_{x,y}) = 1$$

(lo cual es cierto cuando $x = 0$ y $y = 1$) y se define $f(x) = 1 - x/2$ entonces

$$(23) \quad \Pr(C_{f^n(0), f^{n+1}(0)}) = 1$$

donde f^n es la n -ésima iteración de f .

Veamos la utilidad de dicha implicación y después su demostración por el argumento de acoplamiento. Notemos que f en el intervalo $[0, 1]$ es una contracción, ya que para $x, y \in [0, 1]$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x - y|,$$

y por el Teorema del Punto Fijo, en el límite $f^n(x)$ tiende al único punto fijo de f , el cual es $2/3$, y notemos que

$$\bigcap_n C_{f^n(0), f^{n+1}(0)} = \left\{ \frac{C_n}{n} \rightarrow \frac{2}{3} \right\}$$

y por la continuidad de la medida de probabilidad resulta que el conjunto donde $C_n/n \rightarrow 2/3$ tiene probabilidad 1, por lo tanto concluimos el Teorema 4.1. \square

Ahora demostraremos (23). Sea ω un elemento que pertenece a $C_{x,y}$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(\omega)$ tal que para toda $n \geq N$

$$(x - \epsilon) \wedge 0 \leq \frac{C_n}{n} \leq (y + \epsilon) \wedge 1,$$

lo que implica que

$$1 - \frac{(y + \epsilon) \wedge 1}{2} \leq 1 - \frac{C_n + 1}{2n + 1} \leq 1 - \frac{(x - \epsilon) \wedge 0}{2},$$

así mismo

$$(24) \quad \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq 1 - \frac{(y+\epsilon) \wedge 1}{2}} \leq \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq 1 - \frac{C_n+1}{2n+1}} \leq \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq 1 - \frac{(x-\epsilon) \wedge 0}{2}},$$

donde U_{n+1} es la sucesión de variables aleatorias uniformes en $(0, 1)$. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números sabemos que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{U_{k+1} \leq p}}{n} \xrightarrow{c.s.} p,$$

y dado que C_n se puede expresar como la suma anterior de indicadoras,

$$C_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{U_{i+1} \leq 1 - \frac{C_i+1}{2i+1}}$$

entonces aplicando dicha suma a 24 tenemos que para cada $\epsilon > 0$ existe N' tal que $\forall n \geq N'$

$$1 - \frac{(y + \epsilon) \wedge 1}{2} \leq \frac{C_n}{n} \leq 1 - \frac{(x - \epsilon) \wedge 0}{2}.$$

y la expresión anterior es $C_{f(x),f(y)}$, y por consecuencia dicho conjunto tiene probabilidad 1. Realizando n veces este análisis partiendo de $C_{f(x),f(y)}$ tenemos que $\Pr(C_{f^n(x),f^n(y)})$ y considerando $x = 0$ y $y = 1 = f(0)$ concluimos (23).

En el teorema anterior mostramos que $\frac{C_n}{n}$ converge casi seguramente a $2/3$, sin embargo, siempre hemos sabido que existen distintos caminos para llegar al mismo resultado. Basándonos en una de las demostraciones de la ley fuerte de los grandes números (véase apéndice ACaminatas Aleatorias y la LFGNappendix.A), logramos obtener el mismo resultado que el Teorema 4.1, está de más decir, que este teorema muestra una ley fuerte de los grandes números para la caminata aleatoria auto-regulada.

Antes de iniciar con la demostración calculemos los primeros cuatro momentos centrales de C_n , y para ello necesitamos calcular $\mathbb{E}(C_n/n)$, y comprobemos que converge a $2/3$. Sabemos que $\mathbb{E}(C_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(C_n|\mathcal{F}_n))$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_n|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(C_{n-1} + 1_{\{U_n \leq 1 - \frac{C_{n-1}+1}{2(n-1)+1}\}} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= C_{n-1} + 1 - \frac{C_{n-1} + 1}{2(n-1) + 1}, \end{aligned}$$

por lo que $\mathbb{E}(C_n) = \mathbb{E}(C_{n-1}) + 1 - \frac{\mathbb{E}(C_{n-1})+1}{2(n-1)+1}$, y como $\mathbb{E}(C_1) = 0$, resolviendo la fórmula recursiva se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_2) &= \frac{2}{3} \\ \mathbb{E}(C_3) &= \frac{2}{3} \cdot 2 \\ \mathbb{E}(C_4) &= \frac{2}{3} \cdot 3 \\ &\vdots \\ \mathbb{E}(C_n) &= \frac{2}{3} \cdot n. \end{aligned}$$

Denotemos por μ_n^k el k -ésimo momento central de C_n , es decir $\mathbb{E}[(C_n - \frac{2}{3}n)^k]$. Para simplificar la notación sea $B_{n+1} = 1_{\{U_{n+1} \leq 1 - \frac{C_n+1}{2n+1}\}}$, entonces

$$\begin{aligned}
 (25) \quad \mu_{n+1}^2 &= \mathbb{E} \left(\left(C_{n+1} - \frac{2}{3}n \right)^2 \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\left(C_n + B_{n+1} - \frac{2}{3}n \right)^2 \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\left(C_n - \frac{2}{3}(n-1) \right)^2 \right) + 2\mathbb{E} \left(\left(C_n - \frac{2}{3}(n-1) \right) \left(B_{n+1} - \frac{2}{3} \right) \right) \\
 &\quad + \mathbb{E} \left(\left(B_{n+1} - \frac{2}{3} \right)^2 \right),
 \end{aligned}$$

y calculando por separado los últimos sumandos tenemos utilizando propiedades de esperanza condicional obtenemos, por una parte

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left(\left(C_n - \frac{2}{3}(n-1) \right) \left(B_{n+1} - \frac{2}{3} \right) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\left(C_n - \frac{2}{3}(n-1) \right) \mathbb{E} \left(B_{n+1} - \frac{2}{3} \mid \mathcal{F}_n \right) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\left(C_n - \frac{2}{3}(n-1) \right) \left(1 - \frac{C_n + 1}{2n + 1} - \frac{2}{3} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2n + 1} \mathbb{E} \left(- \left(C_n - \frac{2}{3}(n-1) \right) \left(\frac{C_n + 1}{2n + 1} \right) \right) \\
 &= - \frac{1}{2n + 1} \mathbb{E} \left(\left(C_n - \frac{2}{3}(n-1) \right)^2 \right) \\
 &= - \frac{1}{2n + 1} \text{Var}(C_n)
 \end{aligned}$$

y por otra

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\left(B_{n+1} - \frac{2}{3} \right)^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\left(B_{n+1} - \frac{2}{3} \right)^2 \mid \mathcal{F}_n \right) \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^2 \frac{C_n + 1}{2n + 1} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(1 - \frac{C_n + 1}{2n + 1} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{3} \mathbb{E} \left(\frac{C_n + 1}{2n + 1} \right) + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{1}{3} \frac{\frac{2}{3}(n-1) + 1}{2n + 1} + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{2}{9}.
 \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo ambos resultados en (25), obtenemos la siguiente fórmula recursiva

$$(26) \quad \begin{aligned} \mu_{n+1}^2 &= \mu_n^2 - \frac{2}{2n+1} \text{Var}(C_n) + \frac{2}{9} \\ &= \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \mu_n^2 + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

en lugar de resolverla directamente encontremos una cota para el segundo momento central, sabemos que $C_1 = 0$, por lo que $\text{Var}(C_1) = \mu_1^2 = 0$, y como $1 - 2/2n + 1 \leq 1$, entonces

$$\mu_{n+1}^2 \leq \mu_n^2 + \frac{2}{9}$$

y por inducción se llega a $\mu_n^2 \leq 2/9n$.

Calculando de manera similar el tercer y cuarto momentos centrales resulta que

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}^3 &= \left(1 - \frac{3}{2n+1}\right) \mu_n^3 + \frac{\mu_n^2}{2n+1} + \frac{2}{3^3} \\ \mu_{n+1}^4 &= \left(1 - \frac{4}{2n+1}\right) \mu_n^4 + \frac{2\mu_n^3}{2n+1} + \frac{4\mu_n^2}{3} - \frac{4\mu_n^2}{3(2n+1)} + \frac{2}{3^3}, \end{aligned}$$

y de nuevo obtenemos expresiones recursivas para μ_n^3 y μ_n^4 , y a su vez éstas son más complejas. Por lo que definiremos una cota para cada expresión de manera semejante al segundo momento central, dado que $1 - \frac{3}{2n+1}$ está acotada por 1 y $\mu_n^2 \leq O(n)$

$$\mu_{n+1}^3 \leq \mu_n^3 + \nu$$

donde ν es una constante y como $\mu_1^3 = 0$, lo que implica $\mu_{n+1}^3 \leq n\nu$ y por lo tanto $\mu_{n+1}^3 \leq O(n)$. Para μ_n^4 , utilizamos las cotas de los momentos centrales anteriores y tenemos que

$$\mu_{n+1}^4 \leq \mu_n^4 + O(n) + \lambda$$

donde λ es una constante, por lo que

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}^4 &\leq \mu_n^4 + O(n) + \lambda \\ &= \kappa \sum_{i=1}^n i + n\lambda \\ &= \kappa \frac{n(n+1)}{2} + n\lambda \\ &\leq O(n^2). \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1. El resultado que deseamos demostrar es equivalente a

$$\Pr\left(\frac{C_n}{n} \rightarrow \frac{2}{3}\right) = 1,$$

lo que sucede si y solo si

$$\Pr\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} \leq \frac{2}{3} - \epsilon, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} \geq \frac{2}{3} + \epsilon\right) = 0$$

para toda $\epsilon > 0$. Si mostramos que

$$(27) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(\left|\frac{C_n}{n} - \frac{2}{3}\right| > \epsilon\right) < \infty,$$

por el lema de Borel-Cantelli, se obtiene que

$$\Pr\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{C_n}{n} - \frac{2}{3}\right| > \epsilon\right) = 0,$$

y por lo tanto la proporción de vértices de grado 1 converge a $\frac{2}{3}$ c.s. Para demostrar (27), veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \Pr\left(\left|\frac{C_n}{n} - \frac{2}{3}\right| > \epsilon\right) &= \Pr\left(\left|\frac{C_n - 2/3n}{n}\right| > \epsilon\right) \\ &= \Pr\left(|C_n - 2/3n|^4 > \epsilon^4 n^4\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left((C_n - 2/3n)^4\right)}{\epsilon^4 n^4} \\ &= \frac{\mu_n^4}{\epsilon^4 n^4}, \end{aligned}$$

en la tercera expresión aplicamos la desigualdad de Chebyshev, y utilizando la cota de μ_n^4 resulta que

$$\Pr\left(\left|\frac{C_n}{n} - \frac{2}{3}\right| > \epsilon\right) \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

y por Borel-Cantelli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(\left|\frac{C_n}{n} - \frac{2}{3}\right| > \epsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty.$$

□

2. Simulación del número de vértices de grado 1

En esta sección realizaremos la simulación de dos procesos; uno de ellos es una caminata aleatoria donde sus incrementos tienen distribución Bernoulli de parámetro $2/3$, el segundo se basa en la sucesión definida en (22), es decir la caminata aleatoria auto-regulada, para mostrar el número de vértices de grado 1 de una gráfica aleatoria. Primero realizaremos una descripción del algoritmo, y después mostraremos el código del programa. Cabe mencionar que en dichas simulaciones obtendremos que la distribución objetivo, puede aproximarse a una distribución normal, es por ello que el programa da como resultado el esbozo de la comparación de ambas distribuciones.

Algoritmo 5

Este algoritmo simula la evolución del número de vértices de grado 1 a través de una caminata aleatoria, con incrementos de distribución Bernoulli de parámetro $2/3$.

1. Se requiere de dos parámetros: n (número de caminatas aleatorias a reproducir) y m (longitud de la caminata).
2. Se crea un vector, para almacenar el número de vértices de grado 1, que resultan en cada caminata, $\mathbf{num}=\mathbf{zeros}(1,m)$, donde $num(k)$ es el número de caminatas que obtuvieron un total de k vértices de grado 1.
3. Se crean las n caminatas aleatorias, para $i = 1, \dots, n$
 - a) Se inicializa la caminata en cero, $\mathbf{c}=0$.
 - b) Para $j = 2, \dots, m$
 - 1) Se crea un número aleatorio entre cero y uno, y si dicho número es menor o igual que $2/3$:
 - Agregamos una unidad a la caminata aleatoria, $\mathbf{c}=\mathbf{c}+1$, notemos que en otro caso el valor de la caminata es el mismo.
 - c) Se almacena el número de vértices de grado 1 obtenidos $\mathbf{num}(\mathbf{c})=\mathbf{num}(\mathbf{c})+1$.
4. Se calcula la proporción de vértices de grado 1, es decir la distribución empírica de vértices de grado 1, $\mathbf{d}=\mathbf{cumsum}(\mathbf{num}) ./n$.
5. Se crea un vector auxiliar de m entradas, se resta la esperanza de la caminata, y se divide entre la raíz de m , para graficar la distribución empírica obtenida.
6. Por último se grafica la distribución de una variable aleatoria normal de media cero y varianza igual a $\sqrt{2/9}$.

Programa 5

```
function funcion5(n,m)
    tic;
    num=zeros(1,m);
    t=0;
    for i=1:n
        c=0;
        for i=2:m
            aux=rand;
            if (aux<=2/3)
                c=c+1;
            end
        end
        num(c)=num(c)+1;
        t=[t,toc];
    end
    d=cumsum(num)./n;
    y=linspace(1,m,m);
    z=(y-((m-1)*2/3))/sqrt(m);
    plot(z,d,'r')
    hold on
    plot(z,normcdf(z,0,sqrt(2/9)))
    toc
```

Considerando $n = 50,000$ y $m = 1,000,000$ obtuvimos la Figura 1, donde la distribución empírica de vértices de grado 1, y la distribución normal de media cero y varianza $\sqrt{2/9}$, son casi indistinguibles. Esto es claro por consecuencia del Teorema Límite Central.

Ahora podemos cuestionarnos si existe un Teorema Límite Central para las caminatas aleatorias auto-reguladas. Primero, recordemos que en la sección anterior obtuvimos una fórmula recursiva para la varianza de C_n , resolvamos dicha fórmula para comparar la distribución empírica que nos resulte de la simulación con una distribución normal estándar. Sabemos que $Var(C_1) =$

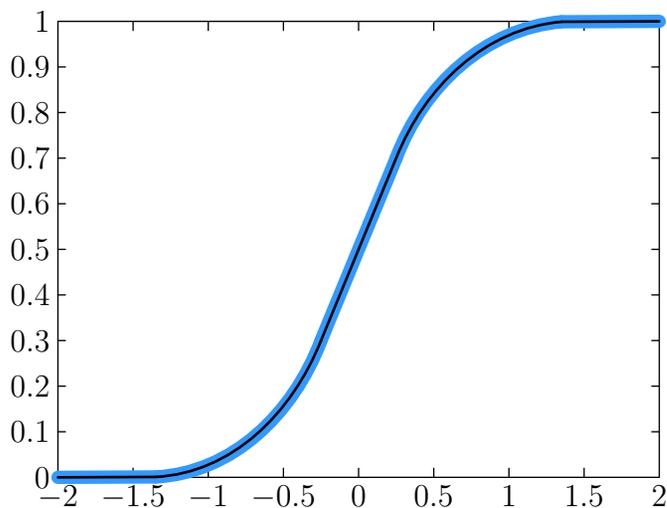


FIGURA 1. Distribución empírica de vértices de grado 1, resultado del programa 5

$\mu_1^2 = 0$, y denotemos por $c = \frac{2}{9}$

$$\mu_2^2 = c$$

$$\mu_3^2 = \frac{3}{5}c + c$$

$$\mu_4^2 = \frac{3}{7} \left(\frac{3}{5}c + c \right) + c = \frac{3}{7}c + \frac{5}{7}c + c$$

$$\mu_5^2 = \frac{7}{9} \left(\frac{3}{7}c + \frac{5}{7}c + c \right) + c = \frac{3}{9}c + \frac{5}{9}c + \frac{7}{9}c + c$$

\vdots

$$\mu_{n+1}^2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n (2i+1)c,$$

recordando que la suma de los primeros n números impares es igual a n^2 , entonces $\sum_{i=1}^n (2i+1) = n^2 - 1$, por lo tanto

$$\mu_{n+1}^2 = \frac{2}{9} \frac{n^2 - 1}{2n+1} \sim \frac{1}{9}n.$$

2. Simulación del número de vértices de grado 1

El siguiente algoritmo sigue la misma estructura que el algoritmo 5, con la única diferencia de que el número aleatorio generado entre cero y uno, se compara con $1 - \frac{C_n+1}{2n+1}$, que es la probabilidad de que el número de vértices de grado aumente una unidad.

Algoritmo 6

Este algoritmo tiene como objetivo simular la distribución empírica del número de vértices de grado 1 a través del proceso definido en (22).

Programa 6

```
function funcion6(n,m)
    tic;
    num=zeros(1,m+1);
    t=0;
    for i=1:n
        c=0;
        for j=2:m
            aux=rand;
            prob=(c+1)/(2*(j-1)+1);
            if (aux<=(1-prob))
                c=c+1;
            end
        end
        num(c)=num(c)+1;
        t=[t,toc];
    end
    d=cumsum(num./n);
    y=linspace(0,m,m+1);
    z=(y-((m-1)*2/3))/sqrt(m);
    plot(z,d,'r')
    hold on
    plot(z,normcdf(z,0,sqrt(1/9)))
    t(n+1)
```

El resultado que se obtiene del programa 6, se muestra en la Figura 2. De igual manera, la distribución empírica de vértices de grado 1 es casi indistinguible de la distribución normal de media 0 y varianza $\sqrt{1/9}$

Cabe mencionar que de los programas 5 y 6, en pasos previos se puede ajustar una normal estándar, escribiendo $\sqrt{2/9} \times m$ o $\sqrt{1/9} \times m$, en lugar \sqrt{m} , respectivamente, sin embargo se realizaron de esa manera para notar la

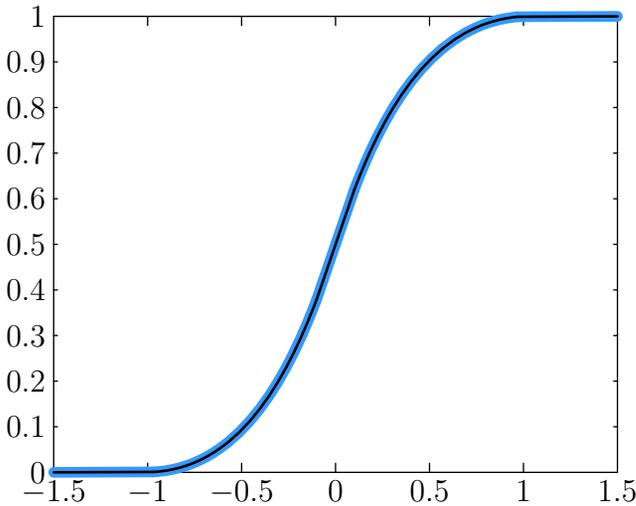


FIGURA 2. Distribución empírica de vértices de grado 1, resultado del programa 6.

diferencia. Por las características de la evolución del número de vértices de grado 1 no podemos aproximar su distribución como una caminata aleatoria simple, pues los resultados serían erróneos, y una construcción más completa, como lo es la caminata aleatoria auto-regulada nos da datos más precisos de dicha evolución. Hasta el momento hemos observado que con la construcción de la caminata aleatoria auto-regulada, los resultados vistos en el capítulo anterior se han obtenido de una forma más eficiente para los vértices de grado 1, pues los cálculos fueron más sencillos.

3. Proporción de vértices de grado $k > 1$

En esta sección estudiaremos el desempeño del número de vértices de grado k , con $k > 1$, a partir de la descripción de una sucesión de variables aleatorias, a la cual ya hemos denominado caminata aleatoria auto-regulada. Mostraremos, mediante inducción, que la esperanza de la proporción de vértices de grado k converge, donde el límite tiene la misma expresión que (20) del capítulo anterior, y utilizando dicho resultado mostraremos la convergencia casi segura de la caminata aleatoria auto-regulada sobre n .

Sea $C_n(k)$ el número de vértices de grado k en la gráfica G^n , donde sin pérdida de generalidad $C_1(2) = 1$ y $C_1(k) = 0$ para $k > 2$, y consideremos \mathcal{F}_n la σ -álgebra antes definida.

3. Proporción de vértices de grado $k > 1$

Para cada n el incremento de $C_n(k)$ tiene tres posibles valores, $\{-1, 0, 1\}$. Entonces $C_n(k)$ aumenta una unidad si v_{n+1} se une a un vértice de grado $k-1$, por lo que

$$\Pr(C_{n+1}(k) = C_n(k) + 1 \mid \mathcal{F}_n) = C_n(k-1) \frac{k-1}{2n+1}.$$

Cuando v_{n+1} se conecta con un vértice de grado k , $C_n(k)$ disminuye una unidad y tenemos que

$$\Pr(C_{n+1}(k) = C_n(k) - 1 \mid \mathcal{F}_n) = C_n(k) \frac{k}{2n+1},$$

y $C_n(k)$ se mantiene igual si v_{n+1} se une a un vértice con grado distinto de k y $k-1$ lo que implica que

$$\Pr(C_{n+1}(k) = C_n(k) \mid \mathcal{F}_n) = 1 - C_n(k) \frac{k}{2n+1} - C_n(k-1) \frac{k-1}{2n+1}.$$

Consideremos una sucesión de variables aleatorias, tal que la ley condicional de sus incrementos siguen la distribución antes descrita, la cual denotaremos por $C_n(k)$. La sucesión $C_n(k)$ es no negativa igual que C_n , sin embargo, la diferencia es que C_n^k puede disminuir unidades, por lo que no es monótona. Como en el caso anterior, deseamos conocer la proporción de vértices de grado k en la gráfica G_n , para n suficientemente grande, es decir, ¿qué sucede con $\frac{C_n(k)}{n}$ cuando n tiende a infinito? Para demostrar que $C_n(k)/n$ converge casi seguramente, no se puede utilizar el primer método descrito para $k=1$ debido a que $C_n(k)$ no es monótona creciente y por lo tanto no se puede realizar el acoplamiento de forma tan sencilla. Obtengamos primero la convergencia de $\mathbb{E}(C_n(k)/n)$.

Intuitivamente $\frac{C_n(k)}{n}$ converge a la probabilidad de que un vértice sea de grado k ; por otro lado la esperanza de dicha proporción debe tener el mismo límite que la esperanza de los incrementos de $C_n(k)$, la cual se calcula utilizando propiedades de la esperanza condicional

$$\begin{aligned} (28) \quad \mathbb{E}(\Delta C_{n+1}(k)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta C_{n+1}(k) \mid \mathcal{F}_n)) \\ &= \mathbb{E}\left(C_n(k-1) \frac{k-1}{2n+1} - C_n(k) \frac{k}{2n+1}\right) \\ &= \frac{k-1}{2n+1} \mathbb{E}(C_n(k-1)) - \frac{k}{2n+1} \mathbb{E}(C_n(k)). \end{aligned}$$

Sea $M^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(C_n(k)/n)$; mostraremos que el límite existe al verificar la igualdad entre los límites superiores e inferiores denotados por \overline{M}^k y \underline{M}^k .

De (28) se obtienen inductivamente las siguientes desigualdades:

$$(29) \quad \overline{M}^k = \overline{M}^{k-1} \frac{k-1}{2} - \underline{M}^k \frac{k}{2}$$

$$\underline{M}^k = \underline{M}^{k-1} \frac{k-1}{2} - \overline{M}^k \frac{k}{2}.$$

Ahora se realiza por inducción sobre k , ya que la convergencia de $\mathbb{E}(C_n(k)/n)$ depende de que $\mathbb{E}(C_n(k-1)/n)$ también lo haga, consideremos como hipótesis de inducción

$$\text{HI:} \quad M_n^1 = \frac{2}{3}$$

y mostremos que

$$M_n^{k-1} \rightarrow \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Supongamos que $x \leq \underline{M}^k \leq y$, lo cual ciertamente sucede si $x = 0$ y $y = 1$. Al aplicar las relaciones de recurrencia definidas en (29) resulta que

$$\overline{M}_n^k \leq M^{k-1} \frac{k-1}{2} - x \frac{k}{2}$$

y

$$\underline{M}_n^k \geq M^{k-1} \frac{k-1}{2} - y \frac{k}{2}.$$

Sea $g(x) = M^{k-1} \frac{k-1}{2} - \frac{k}{2}x$, por lo que $\overline{M}_n^k \leq g(x)$ y $\underline{M}_n^k \geq g(y)$, y repitiendo varias veces el análisis resulta que

$$g^m(y) \leq \underline{M}_n^k \leq \overline{M}_n^k \leq g^m(x),$$

dado que g es una contracción en $[0, 1]$, pues $|g(x) - g(y)| = \frac{k}{2}|x - y|$ para $x, y \in [0, 1]$, aplicamos de nuevo el Teorema del Punto Fijo y así $g^m(x)$ tiende al único punto fijo de g , el cual es $M^{k-1} \frac{k-1}{k+2}$. Por lo tanto $M^k = M^{k-1} \frac{k-1}{k+2}$, es decir que la esperanza de la proporción de vértices de grado k converge, y lo que resta es resolver la recurrencia:

$$\begin{aligned} M^k &= M^{k-1} \frac{k-1}{k+2} \\ &= M^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdots \frac{k-1}{k+2} \\ &= \frac{4}{k(k-1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Lo que hemos obtenido, ya lo habíamos observado en el capítulo anterior, sin embargo, a partir de la construcción de la caminata aleatoria el resultado fue

3. Proporción de vértices de grado $k > 1$

más sencillo probar. Así mismo bajo tal construcción obtuvimos un resultado de concentración para $C_n(k)/n$ para toda k , el cual se enuncia a continuación

TEOREMA 4.2. *Sea $C_n(k)$ la sucesión antes descrita, entonces*

$$\Pr\left(\frac{C_n(k)}{n} \xrightarrow{c.s.} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}\right) = 1.$$

La demostración del resultado anterior es igual a la segunda demostración del Teorema 4.1, inclusive las cotas para el segundo, tercer y cuarto momentos centrales de $C_n(k)$ son iguales a los de C_n

$$\mathbb{E}\left((C_n(k) - x_k n)^2\right) \leq O(n)$$

$$\mathbb{E}\left((C_n(k) - x_k n)^3\right) \leq O(n)$$

$$\mathbb{E}\left((C_n(k) - x_k n)^4\right) \leq O(n^2),$$

donde $x_k = 4/(k(k+1)(k+2))$.

Si deseamos simular la distribución empírica del número de vértices de grado $k > 1$, mientras mayor sea k , el algoritmo correspondiente va a ser más laborioso, pues se deben incluir más pasos, esto se debe a que la evolución del número de vértices de grado k depende del número de vértices de grado $k-1$, y éste a su vez de los de grado $k-2$, y así sucesivamente. Por ejemplo para simular la distribución del número de vértices de grado 2, debemos ir desarrollando a la par el número de vértices de grado 1, entonces si al algoritmo 6 le agregamos la siguientes líneas

```
function funcion6(n,m)
.
.
.
for i=1:n
    c=0;
    g=1;
    for j=2:m
        aux=rand;
        prob=(c+1)/(2*(j-1)+1);
        if (aux<=(1-prob))
            c=c+1;
        end
        aux=rand;
```

```
prob_2=g*2/(2*(j-1)+1);
prob_2a=1-prob;
if (aux<=prob_2)
    g=g-1;
elseif (aux<=prob_2a)
    g=g;
else
    g=g+1;
end
end%for
num(g)=num(g)+1;
t=[t,toc];
end
d=cumsum(num./n);
...
```

Así mismo, para comparar dicha distribución con una normal, se cálculo la varianza de $C_n(2)$ la que resulto en la siguiente fórmula

$$\mu_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{4}{2n+1}\right) \mu_n^2 + \frac{17}{6^2},$$

Para no resolver directamente esta fórmula, se realizó una aproximación numérica la cuál mostraba que para n muy grande $\mu_n^2 \approx 0,1574$, entonces la distribución empírica del número de vértices de grado 2 se ajusto completamente a una distribución normal de media cero y varianza $\sqrt{0,1574}$, como se puede observar en la Figura 3.

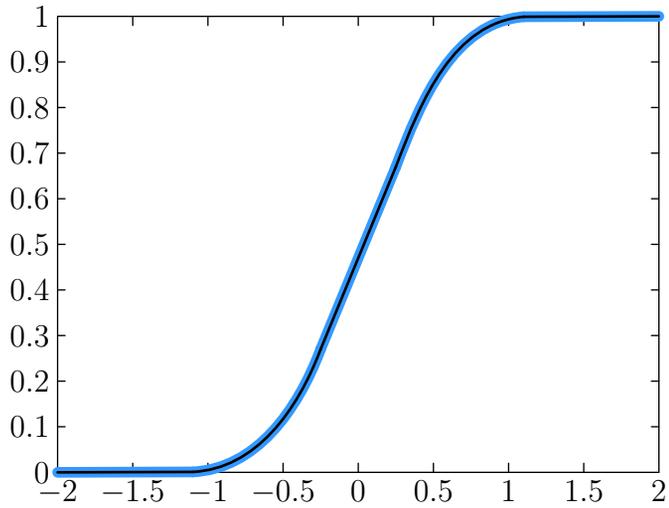


FIGURA 3. Distribución empírica de vértices de grado 2, comparado con una distribución normal

Caminatas Aleatorias y la Ley Fuerte de los Grandes Números

En este capítulo enunciaremos uno de los teoremas básicos en la teoría de probabilidad, la Ley Fuerte de los Grandes Números. Al pasar de los años se han conocido varias demostraciones de este teorema, sin embargo en este trabajo, presentaremos una de las sencillas, que servirá de base en el capítulo 3.

En la literatura matemática se ha encontrado que una de las primeras versiones de la ley fuerte de los grandes números fue enunciada por Jacques Bernoulli, en 1713. Por otro lado también se ha mencionado que quien descubrió dicha ley fue el matemático ruso Pafnuti Lvóvich Chevyshev en la mitad del siglo XIX. A pesar de ello, en términos generales la ley dice que una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas se concentran alrededor de su valor esperado. En esta sección veremos la ley fuerte de los grandes números aplicada a caminatas aleatorias.

DEFINICIÓN. *Una **caminata aleatoria** es una sucesión de variables aleatorias reales $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $S_1 = 0$, donde las variables $(S_i - S_{i-1})_{i=2}^{\infty}$ son independiente e idénticamente distribuidas (i. i. d.).*

Antes de enunciar la ley fuerte de los grandes números, veamos el lema de Borel-Cantelli, el cual ya utilizamos en capítulos anteriores y lo necesitaremos más adelante.

LEMA A.1 (Borel-Cantelli). *Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una secuencia de eventos tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i) < \infty$$

entonces $\Pr(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición de límite superior tenemos que

$$\{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m,$$

y a su vez $\{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\} \subset \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i \quad \forall \quad m \geq 1$, lo que implica que

$$\Pr \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \Pr \left(\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i \right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^{\infty} \Pr(A_i),$$

y dado que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \Pr(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i) - \sum_{i=1}^{m-1} \Pr(A_i) \rightarrow 0,$$

como $m \rightarrow \infty$, por lo tanto $\Pr(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$. □

Sea $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias en el espacio de probabilidad $(Y, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, recordemos que Y_n converge casi seguramente (c.s) a Y si existe un conjunto $N \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(N) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega) \quad \forall \omega \notin N$.

TEOREMA A.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números). *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución Bernoulli de parámetro p , es decir $\Pr(X_n = 1) = p$ y $\Pr(X_n = 0) = 1 - p$. Y definimos $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ con $S_0 = 0$. Entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} p$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de convergencia casi segura, lo que deseamos mostrar es equivalente a

$$(1) \quad \Pr \left(\frac{S_n}{n} \rightarrow p, \text{ conforme } n \rightarrow \infty \right) = 1,$$

y ésto sucede si y solo si

$$\Pr \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq p + \epsilon \right) = 0$$

para toda $\epsilon > 0$. Basta ver que $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \epsilon \right) < \infty$, ya que aplicando el lema de Borel-Cantelli, tenemos que

$$\Pr \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \epsilon \right) = 0,$$

y así concluimos (30). Es claro que $\Pr(|\frac{S_n}{n} - p| > \epsilon) = \Pr(|S_n - np| > n\epsilon)$, entonces sea $k \geq 2$, y utilizando la desigualdad general de Chevyshev tenemos que

$$(2) \quad \Pr(|S_n - np| > n\epsilon) \leq \frac{1}{n^k \epsilon^k} \mathbb{E}(|S_n - p|^k),$$

si $\mathbb{E}(|S_n - p|^k) < \infty$. Consideremos $k = 4$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|S_n - p|^4) &= \mathbb{E}\left(\left[\sum_{i=1}^n (X_i - p)\right]^4\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_4}^n \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^4 (X_{i_j} - p)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - p)^4) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}((X_i - p)^2) \mathbb{E}((X_j - p)^2) \\ &= n\mathbb{E}((X_1 - p)^4) + \binom{n}{2} \mathbb{E}^2((X_1 - p)^2) \\ &= O(n^2). \end{aligned}$$

El cálculo anterior implica que $\Pr(|\frac{S_n}{n} - p| > \epsilon) = o(\frac{1}{n^2})$, y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \epsilon\right) < \infty$$

□

Martingalas y la desigualdad de Azuma-Hoeffding

El desarrollo de las martingalas y la mayoría de sus resultados fueron presentados por Joseph Leo Doob, sin embargo Paul Pierre Levy fue quien introdujo dicho concepto. Las martingalas son usualmente aplicadas a los modelos de juegos de azar, de ahí que se desprenda su aplicación a las finanzas. Generalmente, en otras ciencias las martingalas han sido útiles para encontrar aproximaciones o cotas.

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y sea $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, una *filtración*, es decir una familia creciente de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}.$$

Usualmente \mathcal{F}_n es la filtración natural, es decir $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, donde X_n es un proceso estocástico. Por otro lado, un proceso X_n se dice que es *adaptado* (a la filtración \mathcal{F}_n) si para cada n , X_n es \mathcal{F}_n -medible. De manera intuitiva si X es adaptado, quiere decir que $X_n(\omega)$ es conocido al instante n , con $\omega \in \Omega$.

DEFINICIÓN (Martingala, supermartingala, submartingala). *Un proceso X es llamado **martingala** (respecto a $(\mathcal{F}_n, \mathbb{P})$) si*

- (i) X es adaptado,
- (ii) $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$,
- (iii) $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}, n \geq 1$.

*Una **supermartingala** es definida de manera similar, excepto que (iii) es reemplazado por $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}$; y una **submartingala** se define en (iii) con $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$.*

Algunos ejemplos de martingalas son los siguientes:

(a) Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes con $\mathbb{E}(|X_k|) < \infty$, y $\mathbb{E}(X_k) = 0, \forall k$. Definimos $S_0 = 0$, y $S_n = X_1 + \dots + X_n$, y

sea $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Entonces para $n \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= S_{n-1} + \mathbb{E}(X_n) = S_{n-1}\end{aligned}$$

Notemos que si $\mathbb{E}(X_k) > 0$, $\forall k$, resulta que S_n es una supermartingala.

(b) Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes no negativas con $\mathbb{E}(X_k) = 1$, $\forall k$, y definimos $M_0 = 1$, y $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$, y sea $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Por lo que para $n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(M_{n-1} X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= M_{n-1} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= M_{n-1} \mathbb{E}(X_n) = M_{n-1},\end{aligned}$$

entonces M_n es un martingala.

Para este trabajo, solo es de interés el teorema de Azuma-Hoeffding, para los propósitos del capítulo 3.

TEOREMA B.1 (Teorema Azuma-Hoeffding). *Sea $(X_t)_{t=0}^n$ una martingala con $|X_{t+1} - X_t| \leq c$ para $t = 0, 1, \dots, n-1$. Entonces*

$$\Pr(|X_n - X_0| \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2c^2 n}\right)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y_i = X_i - X_{i-1}$, notemos que $\mathbb{E}(Y_i | X_{i-1}) = 0$, por ser X_i martingala. Por otro lado consideremos $f(x) = e^x$ y

$$Y_i = -c \frac{1 - Y_i/c}{2} + c \frac{1 + Y_i/c}{2},$$

y dado que la función exponencial es convexa, sabemos que cumple con lo siguiente

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

para $\lambda \in [0, 1]$, y como $\frac{1 - Y_i/c}{2} = 1 - \frac{1 + Y_i/c}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}e^{\alpha Y_i} &\leq \frac{1 - Y_i/c}{2} e^{-\alpha c} + \frac{1 + Y_i/c}{2} e^{\alpha c} \\ &= \frac{1}{2}(e^{\alpha c} + e^{-\alpha c}) + \frac{Y_i}{2c}(e^{\alpha c} + e^{-\alpha c}),\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\alpha Y_i} | X_{i-1}) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(e^{\alpha c} + e^{-\alpha c}) + \frac{Y_i}{2c}(e^{\alpha c} + e^{-\alpha c}) \mid X_{i-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\alpha c} + e^{-\alpha c}).\end{aligned}$$

Y además $\alpha c \leq \alpha^2 c^2 / 2$, por lo tanto $\mathbb{E}(e^{\alpha Y_i} | X_{i-1}) \leq e^{\alpha^2 c^2 / 2}$. Aplicando la cota anterior, resulta que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\exp(\alpha(X_n - X_0))) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\alpha Y_i}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\alpha Y_i} \mid X_{n-1}\right)\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{\alpha Y_i} \mathbb{E}(e^{\alpha Y_n} \mid X_{n-1})\right) \\
 &\leq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{\alpha Y_i} e^{\alpha^2 c^2 / 2}\right) \\
 &\quad \vdots \\
 &\leq e^{\alpha^2 c^2 n / 2}.
 \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Markov, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \Pr(|X_n - X_0| \geq x) &= \Pr(\exp(\alpha|X_n - X_0|) \geq \exp(\alpha x)) \\
 &\leq \frac{\mathbb{E}(\exp(\alpha|X_n - X_0|))}{\exp(\alpha x)} \\
 &\leq \exp(\alpha^2 c^2 n / 2 - \alpha x),
 \end{aligned}$$

considerando $\alpha = x/(c^2 n)$, se concluye que

$$\Pr(|X_n - X_0| \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2c^2 n}\right)$$

□

Bibliografia

- [BA99] A. Barabási and R. Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science **286** (1999), 509–512.
- [Bar99] et. al. Barabási, A., *Mean-field theory for scale-free random networks*, Physica A **272** (1999), 173–187.
- [Bol82] B. Bollobás, *Vertices of given degree in a random graph*, Journal of graph theory **6** (1982), 147–155.
- [BR03] B. Bollobás and O. Riordan, *Mathematical results on scale-free random graphs. In Hand book of graphs and networks*, Editado por S. Bornholdt and H.G. Schuster, Wiley-VCH, Weinheim, 2003.
- [BRST01] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer, and G. Tusnády, *The degree sequence of a scale-free random graph process*, Random structures and algorithms **18**, No. **3** (2001), 279–290.
- [DMS00] S. Dorogovtsev, J. Mendes, and A. Samukhin, *Structure of growing networks with preferential linking*, Physical Review Letters **85** (2000), 4633–4636.
- [Dur07] R. Durrett, *Random graph dynamics*, Statistical and probabilistic mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [ER59] P. Erdős and A. Rényi, *On random graphs. I*, Publ. Math. Debrecen **6** (1959), 290–297.
- [ER60] ———, *On the evolution of random graphs*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci **5** (1960), 17–61.
- [ER61a] ———, *On the evolution of random graphs*, Bull. Inst. Internat. Statist. **38** (1961), 343–347.
- [ER61b] ———, *On the strength of connectedness of a random graph*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961), 261–267.
- [ER63] ———, *Asymmetric graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **14** (1963), 295–315.
- [ER64] ———, *On random matrices*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. **8** (1964), 455–461.
- [ER66] ———, *On the existence of a factor of degree one of a connected random graph*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **17** (1966), 359–368.
- [ER68] ———, *On random matrices II*, Studia Sci. Math. Hung. **13** (1968), 459–464.
- [Fre65] D. Freedman, *Bernard friedman’s urn*, Ann. Math. Statist. **3** (1965), 956–970.
- [Gil59] Edgar Gilbert, *Random graphs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 1141–1144.
- [Mit04] Michael Mitzenmacher, *A brief history of generative models for power law and lognormal distributions*, Internet Math. **1** (2004), no. 2, 226–251. MR MR2077227 (2005c:68282)