

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INVESTIGACIONES SOBRE UNA TEORIA ESTOCASTICA  
DE LA MECANICA CUANTICA

Tesis que para obtener el grado  
de Doctor en Física presenta:

ANA MARIA CETTO KRAMIS

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA  
JUAN B. DE OYARZABAL



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta tesis ha sido elaborada bajo  
la valiosa dirección del Dr. Luis  
de la Peña A.

## PREFACIO

Prácticamente desde el advenimiento de la mecánica cuántica, han surgido diversos intentos por "explicarla" en términos de conceptos clásicos previamente establecidos. Sin embargo, utilizando las palabras de Blokhintsev (1968), "la  $\psi$  que echamos por la puerta se vuelve a colar por la ventana"; esta tenacidad de la función de onda nos indica que en la mecánica cuántica hay efectivamente una fenomenología específica no reducible a términos no cuánticos. En el presente trabajo se trata de analizar esta peculiaridad desde el punto de vista de la interpretación estocástica, para mostrar que efectivamente la descripción más natural y más simple en el marco de esta teoría se obtiene precisamente en términos de la amplitud de probabilidad.

Un tratamiento estocástico adecuado de la mecánica cuántica debe implicar, sin embargo, un doble proceso: por un lado, la "reducción a términos clásicos" del contenido estocástico encubierto en la descripción usual de los fenómenos cuánticos, y por el otro, de importancia no menor que el anterior, la clara identificación y precisión de las diferencias esenciales



que existen entre los procesos estocásticos clásicos y los cuánticos. La importancia de esta segunda parte del proceso de reinterpretación de la mecánica cuántica difícilmente requiere comentario adicional alguno; sin embargo, este aspecto del problema ha sido gravemente descuidado en la literatura usual sobre el tema, creándose con ello un "clasicismo" artificial que desvirtúa el carácter real de las teorías estocásticas. En este trabajo se hace un intento de aclarar estas cuestiones, siempre dentro del marco de la teoría estocástica cuántica.

Una vez precisadas tales diferencias, es posible demostrar directamente por construcción que la misma teoría estocástica sirve de base para el estudio de procesos clásicos, como el movimiento browniano, y de procesos cuánticos. El interés de la teoría en este último caso se amplía al demostrar mediante su aplicación al problema específico de las correcciones radiativas, que con ella se pueden abordar en forma simple situaciones que en el marco de la mecánica cuántica usual sólo podrían ser tratadas en forma artificiosa.

En resumen, el presente trabajo trata de demostrar, no sólo que es posible proponer una interpretación estocástica coherente de la mecánica cuántica, sino incluso, que ello es conveniente, tanto desde el punto de vista de las ventajas conceptuales que ofrece, como de las nuevas posibilidades que abre.

## CONTENIDO

CAPITULO I	COMENTARIOS GENERALES SOBRE LA INTERPRETACION ESTOCASTICA DE LA MECANICA CUANTICA	1
CAPITULO II	PROCESOS ESTOCASTICOS CLASICOS Y CUANTICOS	
	Introducción	21
	Integración de las ecuaciones fundamenta- les	22
	Superposición e interferencia	27
	El movimiento browniano	31
	Las relaciones de incertidumbre en el mo- vimiento browniano	40
CAPITULO III	CORRECCIONES DE AUTOACCION; EL EFECTO LAMB	
	Introducción	44

	Introducción de la reacción de radiación	47
	Solución de la ecuación subsidiaria	51
CAPITULO IV.	MOMENTO MAGNETICO ANOMALO	
	Introducción	62
	Introducción de los términos de auto- acción	64
	Integración de la ecuación de movimiento	70
	Discusión sobre los parámetros $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$	73
BIBLIOGRAFIA		77

## CAPITULO I

### COMENTARIOS GENERALES SOBRE LA INTERPRETACION ESTOCASTICA DE LA MECANICA CUANTICA.

La consistencia interna de la mecánica cuántica ha sido casi universalmente adoptada como la mejor prueba de su validez e inclusive, de su completez. Es pues, de aceptación general la suposición de que el estado físico de un sistema está especificado completamente por una función de onda que determina sólo las probabilidades de los resultados de un conjunto de experimentos similares.

La primera objeción a la supuesta completez de la mecánica cuántica fue presentada por Einstein (ver, p. ej. Einstein et al, 1935) en base a la necesidad de la existencia de variables dinámicas capaces de determinar el comportamiento real - y no solamente el probable - de cada uno de los sistemas individuales. Esta y otras objeciones tienen su raíz en el hecho de que la mecánica cuántica es una estructura formalmente bien definida, pero físicamente insatisfactoria desde diversos puntos de vista; asociados a esta insatisfacción han surgido, desde el mismo advenimiento de la mecánica cuántica, una serie de intentos de reinterpretación sobre diversas

bases y argumentaciones físicas, caracterizados por el objetivo común de establecer principios causales como base de los procesos cuánticos.

En el curso de estas discusiones, se han ido perfilando dos corrientes de pensamiento: por un lado, existe una escuela, numerosa, que acepta en su contenido esencial la afirmación de Born y Heisenberg en el Congreso Solvay de 1927: "... la mecánica cuántica es una teoría completa, cuyas hipótesis fundamentales, físicas y matemáticas, no son ya susceptibles de modificación" (Jammer, 1966, p. 358). Por otro lado, el hecho mismo de que hayan sido propuestas interpretaciones alternativas de la mecánica cuántica - e, incidentalmente, en número considerable -, muestra que esta actitud no es, ni puede ser universalmente compartida. El fondo de la discrepancia no reside, naturalmente, en el hecho de si se suscribe o no la afirmación de Born y Heisenberg, sino en las implicaciones subyacentes a tal aseveración.

No es el propósito del presente trabajo discutir estas cuestiones\*; sin embargo, parece oportuno precisar el punto de vista que le sirve de apoyo, para lo cual haremos uso de un ejemplo específico de relevancia para el contenido del mismo.

Afirmar que la mecánica cuántica es una teoría estadística es un lugar común, al menos mientras no se define qué es lo estadístico o por

-----  
\*Algunos aspectos históricos relativos pueden verse en el excelente libro de Jammer (1966). Las cuestiones conceptuales son discutidas ampliamente en multitud de artículos y monografías; en particular, véanse Pauli (1955), Bohm (1957) y Bunge (1957).

qué la mecánica cuántica es una teoría estadística. Según una interpretación usual, muy difundida, es nuestra falta de conocimiento la que nos obliga a adoptar una teoría probabilística, es decir, la probabilidad en cuestión mide el grado de conocimiento que el observador tiene del sistema. Llevada a sus últimas consecuencias, esta interpretación subjetivista conduce a considerar la función de onda como un ente que caracteriza, no al sistema físico, sino al estado mental del observador. En el marco de la interpretación estocástica, la función de onda, es decir, la amplitud de la distribución, caracteriza al espacio de probabilidades, y por lo tanto, no es una propiedad física de los elementos del sistema tomados como individuos, sino del sistema en su conjunto. El simple reconocimiento de este hecho elimina lo que Popper (1967) denomina "la gran confusión": la distribución tiene propiedades específicas (p. ej., las usualmente llamadas ondulatorias) que no tienen por qué coincidir con las de los elementos (p.ej., las corpusculares).

Naturalmente, esta diferencia de actitudes conduce a atribuirles a las mismas expresiones matemáticas un contenido físico diferente, como puede ilustrarse, por ejemplo, con las relaciones de incertidumbre. Según la interpretación usual, estas relaciones determinan límites superiores a la precisión de nuestras mediciones o predicciones; dentro de la interpretación estocástica, podemos decir que determinan límites inferiores a la dispersión de una secuencia de experimentos equivalentes (Popper, 1967); en efecto, si se construye un sistema con elementos dispersivos, la dispersión mínima del

ensemble no puede ser menor que la de cada uno de sus elementos ( de la Peña, 1969 c).

Con objeto de brindar una visión general del panorama que enmarca al presente trabajo, convendría mencionar algunos de los esfuerzos realizados en busca de una interpretación causal de la teoría cuántica, en los últimos cuarenta años. En vista de que la vasta literatura sobre el tema abarca aspectos muy diversos, nos permitiremos encauzar su introducción con la ayuda de algunos de los trabajos representativos más estrechamente ligados a la teoría en que se funda el presente trabajo.

Anteriormente al trabajo de Einstein, Podolsky y Rosen (1935), apareció publicado un primer intento de establecer una relación entre un sistema difusivo clásico y la mecánica cuántica (Fürth, 1933). Curiosamente, este intento resulta más fructífero para la teoría del movimiento browniano que para la teoría cuántica, puesto que se logra establecer para el primero una relación de incertidumbre, como una relación entre las dispersiones de la coordenada y el momento conjugado. Sin embargo, el hecho de equiparar la ecuación diferencial para la densidad (ecuación de difusión) en el problema clásico, con la ecuación para la amplitud de probabilidad (ecuación de Schrödinger) en el problema cuántico, elimina toda posibilidad de desarrollo de este estudio, más allá de la analogía formal y, por demás, superficial.

Durante un largo período se sigue trabajando en torno a analogías matemáticas que no contribuyen a esclarecer el problema físico existente

te, sino más bien por el contrario, prácticamente conducen a la conclusión de que, efectivamente, los procesos clásicos y los cuánticos son de naturaleza diferente, y, por lo tanto, irreducibles los unos a los otros.

Bohm (1952, 1953; - y Vigier, 1954) rompe finalmente esta cadena, atacando la raíz del problema con argumentos análogos a los utilizados por Einstein: es necesario construir una nueva formulación de la teoría, que nos permita entender los mecanismos físicos que rigen la evolución de un sistema cuántico. Para ello, será necesario recurrir al uso de elementos adicionales que permitan la descripción causal, detallada, de los procesos. La introducción de lo que desde el punto de vista de la interpretación usual serían "parámetros ocultos", no es nueva: es un procedimiento común y natural en la física clásica. A manera de ejemplo, basta hacer notar que, desde el punto de vista de la física macroscópica, las coordenadas y los impulsos de partículas individuales son variables ocultas, que se manifiestan sólo a través de sus valores medios.

Incidentalmente, cabe señalar que durante muchos años, la aceptación irrestricta del teorema de von Neumann (1932) convertía aparentemente en vano todo esfuerzo por ampliar la mecánica cuántica mediante la introducción de parámetros ocultos. Sin embargo, motivados por la existencia de modelos específicos, violatorios de la interpretación del teorema (p. ej., Bohm, 1952), así como por las limitaciones que el mismo pretende imponer para siempre a nuestra capacidad de adquirir conocimiento, han apare-



cido diversos intentos por aclarar el contenido real del teorema. De entre ellos, recordemos el trabajo de Feyerabend (1956), quien demuestra que el teorema de von Neumann sólo impide la introducción de variables ocultas no dispersivas, conclusión que es confirmada por Aron (1969) y otros autores. Asimismo, Bell (1966) demuestra que los axiomas esenciales de von Neumann son en general inaceptables, por ser demasiado restrictivos, y que por consiguiente, como Ballentine (1970) afirma acertadamente, esta demostración no representa obstáculo alguno para un sinnúmero de teorías que se desvían del formalismo de la mecánica cuántica e incluyen a ésta como un caso límite ; esto ha sido demostrado por construcción en repetidas ocasiones a partir del trabajo de Bohm (de la Peña y García-Colín, 1967 b, 1968 b; Bohm y Bub, 1966).

Con objeto de formalizar sus ideas, Bohm sugiere específicamente un modelo hidrodinámico, que es, en realidad, una extensión del modelo propuesto originalmente por Madelung (1926) y desarrollado por Takabayasi (1952, 1953). Su hipótesis hidrodinámica surge como consecuencia de su interpretación de los términos adicionales que aparecen en la ecuación tipo Hamilton-Jacobi derivada de la ecuación de Schrödinger, como un potencial (potencial de Bohm). El hecho de que este "potencial" queda expresado en términos de la propia función de onda, lo lleva a interpretar a ésta como un campo "tan real como el campo electromagnético". Postula entonces la existencia de un fluido de densidad  $|\psi|^2$ , cuyo movimiento está caracterizado por fluctuaciones azarosas que se manifiestan a través de la naturaleza del movimiento de las partículas cuánticas.

Es también de interés el trabajo de Fényes (1952), publicado paralelamente a los anteriores, en el que se pretende demostrar la total similitud entre el aparato estadístico de la mecánica cuántica y el de la física clásica. En efecto, la ecuación de Schrödinger conduce a una ecuación de Fokker-Planck, y debido a ello, los procesos cuánticos pueden considerarse como una forma especial de procesos de Markov. De esta manera, características que en general se consideran tan específicas de la mecánica cuántica como las relaciones de incertidumbre y de conmutación, así como el lenguaje en términos de operadores, surgen como natural consecuencia de la naturaleza markofiana del proceso cuántico. Sin embargo, el hecho de que a partir de la ecuación (real) de Fokker-Planck, Fényes pueda derivar sólo parcialmente la ecuación de Schrödinger, le indica la necesidad de introducir información adicional en la teoría con objeto de reproducir la mecánica cuántica en su integridad. Este problema es de carácter, ya no probabilístico, sino esencialmente dinámico, puesto que la información adicional debe provenir de las leyes de movimiento. Fényes, en particular, construye la ecuación de movimiento para el problema cuántico a partir de la variación de un lagrangiano hidrodinámico, construído ex profeso, aunque este último paso puede relajarse (de la Peña, 1967 a).

Con el objetivo fundamental de subsanar parcialmente este problema, Weizel (1953, 1954) procede a la construcción de un modelo específico, en el cual las perturbaciones responsables de la naturaleza markofiana

de los procesos cuánticos, se deben a interacciones de las partículas con objetos desconocidos que denomina "cerones". Al igual que sucede con las variables ocultas, la no observabilidad de los "cerones" no es un defecto de la teoría, al menos en el marco actual de la mecánica cuántica; es de esperarse que sólo podrían llegar a observarse estos entes en una situación en que la mecánica cuántica fallara. Haciendo caso omiso de los vicios mecanicistas de la teoría de Weizel, parece plausible relacionar conceptualmente el "campo cerónico" con el "campo  $\psi$ " introducido por Bohm (1952), o quizás aún con el vacío de radiación, si se admite la posibilidad, al menos en principio, de la existencia de un fondo subcuántico de naturaleza estocástica en interacción constante con la materia.

También con el propósito de estudiar la mecánica cuántica desde el punto de vista estocástico, algunos investigadores han intentado extender el tratamiento al espacio fase, dirección que, hasta la fecha, no ha conducido a resultados satisfactorios. Representativos de esta corriente son los trabajos de Moyal (1949) y Bartlett (Bartlett y Moyal, 1949), caracterizados por la introducción de distribuciones en el espacio fase no necesariamente no negativos, cuya justificación física se sale del marco clásico en que se pretenden definir los conceptos básicos. Incidentalmente, cabe señalar que si nos mantenemos en el espacio de configuración, no aparece ninguna dificultad de principio (de la Peña y Cetto, 1967 c). En un desarrollo posterior de estos trabajos, Gilson (1969a) intenta justificar la aparición de estas "distribuciones"

en ocasiones negativas, mediante argumentos relativistas. La incorrecta interpretación de varias propiedades específicas de la mecánica cuántica lo conducen, sin embargo, a concluir que el aspecto estocástico de la teoría cuántica es meramente formal, y que inclusive el determinismo se manifiesta sólo ocasionalmente, dependiendo de la forma específica del potencial aplicado al sistema cuántico (Gilson, 1968).

En tanto que, para rehuir las dificultades en que cae, Gilson (1969 b) prefiere dar un salto cuántico, elaborando una nueva teoría según la cual la mecánica cuántica convencional es consecuencia del equilibrio térmico local entre dos fluidos subcuánticos, otros autores han preferido desarrollar en los últimos años diversas variantes de la hipótesis hidrodinámica de Madelung y Bohm. Aron (1965), por ejemplo, intenta revivir la interpretación hidrodinámica estocástica, aunque lo logra sólo a base de un gran número de suposiciones ad hoc, de justificación tan difícil como los mismos problemas que pretende resolver. Así, por ejemplo, se ve en la necesidad de asignarle un carácter dual-real y probabilístico, en su lenguaje- al fluido estocástico, con objeto de interpretar los diversos resultados de la mecánica cuántica.

Con una fundamentación conceptual más profunda, Jánossy y Ziegler (1963) proponen el uso del modelo hidrodinámico como matemáticamente adecuado para la descripción de los procesos cuánticos, en tanto que Wilhelm (1970) procura atribuirle a tal fluido, una vez más, un sentido físico

definido. En ambos tratamientos, el potencial de Bohm, que aparece como consecuencia de reducir la ecuación de Schrödinger a una ecuación de movimiento clásica, es interpretado como el potencial "interno" que da lugar a las propiedades cuánticas de un sistema microscópico. Jánossy y sus colaboradores analizan el problema de muchos cuerpos (Jánossy, 1969) y el de la partícula no relativista con espín, obteniendo a partir de la ecuación de Pauli una ecuación de movimiento que describe un medio elástico magnetizado inhomogéneamente (Jánossy y Ziegler, 1966).

Más atrevido aún es el modelo de Harvey (1966), basado en una analogía formal de la ecuación de Schrödinger con la ecuación de Navier-Stokes. Como consecuencia de esta analogía obtiene un tensor de viscosidad que físicamente no puede ser interpretado como tal, por el hecho de no estar relacionado con la velocidad de flujo ni poseer las propiedades debidas (de la Peña et al, 1970c). La comparación del sistema cuántico con un fluido real encierra en sí una contradicción, puesto que, por una parte, se postula la disipación de energía debido a la viscosidad, y por la otra, se trata de aplicar la teoría a sistemas que se encuentran en estados estacionarios, y que, por lo tanto, son no disipativos.

En este sentido, el trabajo de Harvey pone de manifiesto, más claramente aún que los anteriores, uno de los aspectos más débiles de la interpretación hidrodinámica. Aunque con este modelo han sido obtenidos resultados básicos que formalmente son análogos a los de la mecánica cuántica

usual, su contribución más notable ha sido quizás estimular el escepticismo de aquéllos que en principio dudan sobre la posibilidad o necesidad de una reinterpretación causal de la mecánica cuántica. La razón fundamental de este problema reside en el carácter fenomenológico - y, podríamos añadir, a nivel macroscópico - de las teorías hidrodinámicas, lo que, por un lado, obliga a recurrir a postulados específicos y de difícil justificación para explicar los diversos fenómenos cuánticos, y por el otro, tiende a reducir a términos meramente clásicos aspectos más profundos de la naturaleza, que corresponden a una fenomenología considerablemente más rica que la clásica. En esto mismo radica su carácter limitativo, en el sentido de que tales modelos no permiten la predicción de resultados esencialmente nuevos, ni cuánticos, ni clásicos.

En la última década se ha venido desarrollando una teoría estocástica libre de los principales problemas que aquejan a las teorías hidrodinámicas, y cuyo punto de partida se puede localizar en las analogías existentes entre el movimiento browniano y la mecánica cuántica, esbozadas ya por Fürth en 1933. En un planteamiento nuevo del problema, Kershaw (1964) propone considerar la trayectoria de la partícula cuántica como la superposición de una trayectoria clásica y un movimiento fluctuante en torno a ésta. Partiendo de la teoría del movimiento browniano, deriva la ecuación de Schrödinger para el caso estacionario, con velocidad de corriente nula; sin

embargo, no logra extender el tratamiento al caso dependiente del tiempo. Las limitaciones inherentes a la teoría de Kershaw se deben al empleo de un postulado dinámico erróneo, según el cual la fuerza total que actúa sobre la partícula cuántica coincide con la fuerza clásica (de la Peña y Velasco, 1969e).

A este respecto, parece oportuno recordar que en todas las interpretaciones causales, como lo son las hidrodinámicas, y, más en general, las estocásticas, se considera aplicable el concepto de trayectoria. El carácter estadístico del proceso implica la necesaria existencia de fluctuaciones en el valor de las variables dinámicas, lo que, sin embargo, no significa que la trayectoria no exista, sino sólo que no la podemos ni seguir ni predecir, salvo en el sentido estadístico. Por otra parte, al afirmar la existencia de una trayectoria no se pretende implicar la posibilidad de extrapolar indefinidamente al dominio de lo microscópico los conceptos clásicos de velocidad, posición, etc, por el contrario, el hecho mismo de que las teorías estocásticas físicamente válidas construídas hasta la fecha, traten al fenómeno cuántico sólo en el espacio de configuración, implica la existencia de limitaciones específicas en la aplicación de tales conceptos. En efecto, en estas teorías la noción de derivada temporal es sustituida por otra que implica un promedio sobre intervalos de tiempo sólo macroscópicamente infinitesimales (Nelson, 1967; de la Peña, 1969c), lo cual señala hacia la existencia de un límite de utilidad de conceptos como velocidad instantánea clásica, etc, en común con otras teorías estocásticas (ver, p. ej., Chandrasekhar, 1943). Sin embargo,

es evidente la profunda diferencia conceptual que existe entre el reconocimiento de estas limitaciones inherentes a la naturaleza estocástica y microscópica del proceso cuántico y afirmaciones como la de Heisenberg (1927) en el sentido de que "la trayectoria (de un electrón) se realiza sólo cuando se le observa".

Partiendo de un estudio detallado del movimiento browniano, Nelson (1966, 1967) ofrece un método alternativo para derivar la ecuación de Schrödinger, ampliado posteriormente por Dankel (1969) con objeto de incluir el espín en la teoría empleando para ello métodos puramente formales. De la teoría de Uhlenbeck y Ornstein (1930), que describe un proceso estocástico en el espacio fase, Nelson obtiene una relación dinámica que, en combinación con la segunda ley de Newton adecuadamente interpretada, le permite establecer la ecuación de movimiento. Sin embargo, la ausencia de una fuerza de fricción - dependiente de la velocidad - en el caso de la partícula cuántica, "impide la definición de las velocidades" (Nelson, 1966), de lo que concluye, de acuerdo al uso, que el estado de la partícula no puede ser descrito en el espacio fase. Como, por otra parte, el tratamiento de Einstein y Smoluchowski de la partícula browniana en el espacio de configuración (ver, p.ej., Prabhu, 1965) implica una aproximación vinculada a la existencia de fricción, Nelson recurre al artificio de aplicar la cinemática de Einstein-Smoluchowski al problema dinámico planteado en el espacio fase. Esta formulación conduce a Nelson a la conclusión de que la partícula cuántica es la partícula browniana en el espacio de configuración en ausencia de fricción. En el Capítulo II de este trabajo se



ve que, aunque los dos problemas tienen propiedades en común, existen diferencias esenciales entre la partícula browniana-aún sin fricción- y la partí-cula cuántica. En efecto, si se construye una teoría estocástica clásica en el espacio de configuración, ésta debe incluir en alguna forma al problema clásico respectivo, es decir, al movimiento browniano. Sin embargo, las teorías de Kershaw y Nelson, así como la de Santos, que se mencionará a conti-nuación, no poseen esta propiedad, mostrando con ello la existencia de una inconsecuencia de principio: en una u otra forma, las teorías han sido polarizadas veladamente para describir el fenómeno cuántico con argumentos clásicos, pero excluyendo, a la vez, el caso clásico correspondiente.

Santos (1969) desarrolla una formulación lograngiana de sistemas estocásticos, que le permite derivar la ecuación de Schrödinger para el caso en que el hamiltoniano es, a lo sumo, cuadrático en el impulso. Sin embargo, la teoría está fuertemente limitada por un conjunto de postulados cuya validez es dudosa o, al menos, poco evidente; en particular, se exige absoluta independencia entre el movimiento clásico y el estocástico, lo cual equivale a anular a priori algunos de los efectos que comúnmente se conocen como "cuánticos sin análogo clásico".

Los trabajos antes mencionados han estimulado, sin embargo, el desarrollo de la interpretación estocástica en diversas direcciones de interés fundamental. Boyer (1968), por ejemplo, aplica la formulación de Kershaw al problema de un campo electromagnético clásico sujeto a fluctuaciones estocásticas, con el objetivo concreto de calcular las fuerzas de dispersión entre

dos placas metálicas neutras, las cuales han sido medidas experimentalmente (van Silfhout, 1966), estableciendo con ello un puente entre los cálculos de Casimir (1948) y Lifshitz (1955). Posteriormente, demuestra que la misma hipótesis de la estocasticidad del campo electromagnético es suficiente para derivar la ley de radiación de Planck si, a la vez, se toman en cuenta explícitamente los efectos de radiación debidos a las colisiones de las partículas con las paredes del recipiente, así como condiciones de invariancia relativista (1969a, 1970a); también logra explicar la existencia de la energía del punto cero desde este nuevo punto de vista (1969b).

En relación con este problema, cabe mencionar que ya Heisenberg (1939, Cap. III) deriva explícitamente la existencia de las fluctuaciones del campo electromagnético - y en consecuencia, las relaciones de incertidumbre correspondientes, implícitas en el trabajo previo de Dirac (1927) sobre la electrodinámica cuántica - como un aspecto complementario y necesario de la cuantización de la materia. Más tarde, Sokolov y Tumanov (1956), Marshall (1963) y otros autores, consideran explícitamente al electrón como una partícula en agitación estocástica, debida a la acción de las fluctuaciones del vacío electromagnético, y demuestran con el ejemplo del oscilador armónico que el sistema se cuantiza, puesto que logran derivar las relaciones de incertidumbre para este caso. En particular, Marshall (loc. cit.) y Surdin (1970) obtienen la distribución de radiación (la ley de Planck, en la aproximación no relativista) necesaria para mantener un electrón oscilante en estado estacionario. No obstante, debemos insistir en que la validez de algunos

de los resultados de estos trabajos es circunstancial, puesto que adolecen de la limitación de tratar al electrón como una partícula clásica browniana.

Se perfila así, y más aún con los éxitos de la electrodinámica cuántica, un cuadro teórico básico: la materia y el campo de radiación se encuentran en equilibrio estocástico; la estocasticidad de uno es causa y consecuencia, a la vez, de la estocasticidad del otro. Este cuadro puede no ser completo, pero sí lo suficientemente sugestivo para estimular el desarrollo de las teorías estocásticas. En particular, Santos (1968) aduce explícitamente estos argumentos para la construcción de su teoría estocástica de la materia. Se hace así posible inferir que la cuantización, tanto del campo de radiación como de la materia, es un reflejo de la estocasticidad de los mismos, afirmación que se encuentra explícita en la literatura sobre el tema (Marshall, 1963; Santos, 1969), y que es relativamente usual en la electrodinámica cuántica (ver, p.ej., Henley y Thirring, 1962). Esta posición permite entender fácilmente el contenido físico de la demostración matemática de Bohr y Rosenfeld, de que la mecánica cuántica elemental no es una teoría consecuente si se emplea junto con ella la teoría clásica de campos. En efecto, si el campo electromagnético no se cuantiza, se pueden violar en principio las relaciones de conmutación para las partículas (Rosenfeld, 1955). Considerandola cuantización simultánea de campo y materia como equivalente a su "estocastización", este argumento nos conduce a la proposición de Heisenberg arriba mencionada.

Por otro lado, esta imagen está estrechamente vinculada a la interpretación del vacío propuesta por de Broglie (1970) como un "termostato oculto", cuyas fluctuaciones estocásticas imprimen a la partícula un movimiento de tipo browniano, lo que el autor trata de describir mediante su Teoría de la Doble Solución. Con el advenimiento de la "electrodinámica aleatoria" surgen tratamientos más formales, como el de Garczyński (1969, 1970), que se basan en la posibilidad de considerar la mecánica cuántica como un proceso estocástico y hacen ver que la teoría de procesos markofianos, en especial, brinda un lenguaje natural para la descripción de los fenómenos cuánticos. Incidentalmente, es claro que las teorías estocásticas constituyen una base física diferente para la justificación del procedimiento de integrales de trayectoria, introducido por Feynman (1948). De esta discusión se desprende que, aunque las teorías estocásticas representan un avance en el proceso de descubrir los mecanismos que rigen el comportamiento de un sistema cuántico, subsisten aún algunos problemas fundamentales que las formulaciones hasta aquí mencionadas no han logrado resolver, y que podemos precisar en la siguiente forma:

a) Pese a que se trata de teorías estocásticas de sistemas considerados como clásicos ( en contraposición a cuántico), no incluyen precisamente al sistema estocástico clásico más característico, representado por el movimiento browniano. El origen de esta falla está en que no se han logrado establecer con claridad a la vez las diferencias y las coincidencias que existen entre los procesos estocásticos usualmente denominados clásicos y cuánticos.

b) Puesto que estas teorías son corpusculares, no incluyen como parte integrante de ellas ningún concepto "ondulatorio". Aunque esto implica el manejo consistente de conceptos a la vez claros y simples, cuyo contenido físico es evidente, es un hecho que la mecánica cuántica trata con sistemas en los que se presenta la llamada "interferencia entre estados", base del dualismo onda-corpúsculo. Es evidente que tal dualidad no puede hacerse a un lado, sino que, por el contrario, la teoría debe dar una justa explicación de ella y precisar el contenido físico que le corresponde. Cabe, pues, la pregunta: ¿por qué el sistema cuántico presenta interferencia, a diferencia de otros sistemas estocásticos?.

c) Finalmente, es indudable que para que una teoría pueda pretender sustituir a otras ya existentes, no sólo debe explicar los resultados de éstas, sino que, además, su campo de validez debe ser mayor y debe contribuir a la formación de un cuadro teórico más amplio y rico. Las teorías estocásticas hasta ahora mencionadas ofrecen, efectivamente, una explicación más clara, directa e incluso más física, del fenómeno cuántico, lo que las hace indiscutiblemente meritorias; sin embargo, no han tenido éxito en lo que se refiere a permitir abordar una gama más amplia de cuestiones, y quizás, inclusive, dar nuevas respuestas a algunas de ellas, lo cual, en última instancia, permitiría probarlas frente a las otras teorías.

El objetivo de este trabajo es, precisamente, investigar las respuestas a los tres problemas antes señalados, que proporciona una formulación más general de la teoría estocástica (de la Peña, 1968c, 1969c; de la

Peña y Cetto, 1969a, b, d). Esta formulación, además de contener a la mecánica cuántica de Schrödinger, ha podido ser extendida para incluir en ella el espín del electrón, ya no como una característica formal, sino como una propiedad física adicional de la partícula extendida (de la Peña, 1970a, 1971b). Por otra parte, su generalización relativista, sujeta a las limitaciones inherentes a la teoría de procesos estocásticos en su etapa actual, conduce en forma sencilla y directa a la ecuación de Klein-Gordon (de la Peña, 1970b).

El mismo carácter general de la teoría permite distinguir, desde un principio, entre los procesos estocásticos clásicos y los cuánticos, como se muestra en el Capítulo II. Sucede así que la misma teoría estocástica permite tratar ambos problemas, dando con ello solución satisfactoria a la cuestión planteada en el inciso (a) anterior. Intimamente relacionado con este aspecto, surge el que se refiere a la superposición e interferencia de estados: la teoría estocástica muestra la existencia de dos tipos generales y mutuamente excluyentes de procesos, que corresponden precisamente a los clásicos (de tipo browniano) y a los cuánticos (de tipo ondulatorio), lo que permite responder en forma sencilla a la cuestión planteada en el inciso (b) anterior, como se ve en el Capítulo II: se realiza o no interferencia entre estados, dependiendo de la naturaleza intrínseca de la interacción estocástica de las partículas con su medio, lo cual queda descrito mediante un parámetro que toma valores diferentes en ambos casos (de la Peña, 1969c).

Haciendo uso de las posibilidades que brinda la teoría, se estudia el problema de la partícula browniana con y sin fricción, siendo este

último un caso de especial interés, por no estar contenido en el tratamiento usual de Einstein-Smoluchowski.

Una vez discutidos estos aspectos fundamentales de la interpretación estocástica, se aborda en los Capítulos III y IV un problema que no tiene cabida en la mecánica cuántica convencional: el hecho de que las ecuaciones fundamentales de la teoría sean ecuaciones de movimiento - a diferencia de la ecuación de Schrödinger -, permite introducir fuerzas adicionales, no derivables de un potencial, y en particular, la autoacción del electrón. Así, por ejemplo, la reacción de radiación, debida a la aceleración de un electrón ligado, es introducida en el Capítulo III con objeto de calcular el correspondiente corrimiento de los niveles de energía, obteniéndose, como es de esperarse, la contribución no relativista al efecto Lamb, sin la aparición de divergencias (de la Peña y Cetto, 1971a). Análogamente, en el Capítulo IV se introducen los términos de autoacción de primer orden, a las ecuaciones fundamentales generalizadas al problema de la partícula con estructura y espín, con objeto de obtener la corrección relativista a la masa y el momento magnético anómalo. Este último cálculo nos permite hacer algunas consideraciones de carácter general sobre la estructura eléctrica del electrón.

Nuestra conclusión general es, pues, que la teoría estocástica estudiada permite dar respuesta satisfactoria a las dos cuestiones de principio anteriormente expuestas, y que, a la vez, es potencialmente útil para abordar problemas más amplios, ofreciendo, en particular, soluciones novedosas y simples a problemas conocidos

## CAPITULO II

### PROCESOS ESTOCASTICOS CLASICOS Y CUANTICOS.

#### Introducción.

Las ecuaciones básicas de la teoría estocástica a estudiar (de la Peña 1968c, 1969c), representan una generalización de la mecánica newtoniana al caso en que existen fuerzas adicionales de origen estocástico. Una primera integral de estas ecuaciones, que describen al sistema en el espacio de configuración, conduce bajo ciertas suposiciones a la ecuación de Schrödinger. Las suposiciones introducidas implican la reducción del proceso estocástico descrito, a un proceso markofiano, situación que parece describir adecuadamente a la mecánica cuántica convencional. Efectivamente, es posible demostrar en forma relativamente directa, mediante la construcción de una probabilidad de transición, que si se considera la mecánica cuántica como un proceso estocástico, este proceso es necesariamente markofiano (de la Peña y Cetto, 1967 c). Por otra parte, es sencillo demostrar por construcción que la retención de términos con memoria lleva a una ecuación de Schrödinger no lineal, que contiene un potencial dependiente de la misma



función de onda (de la Peña y Cetto, 1968d).

Sin embargo, los métodos de integración de las ecuaciones estocásticas publicados hasta la fecha, han sido diseñados todos para el caso de interés específico, es decir, la mecánica cuántica. Esto ha conducido a que la ecuación tipo Schrödinger obtenida sea no lineal para casos diferentes, como por ejemplo, el movimiento browniano (de la Peña 1959c). Dado nuestro interés simultáneo, en el presente trabajo, por los procesos clásicos y cuánticos, se presenta a continuación un método de integración más general, que conduce a una ecuación lineal en todos los casos.

#### Integración de las ecuaciones fundamentales.

Las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula estocástica de masa  $m$  sujeta a la acción de una fuerza externa  $\underline{f}$ , son (de la Peña, 1969 c; de la Peña y Cetto, 1968d):

$$m (\mathcal{D}_c \underline{v} - \lambda \mathcal{D}_s \underline{u}) = \underline{f}^{(+)} \quad (2.1a)$$

$$m (\mathcal{D}_s \underline{v} + \mathcal{D}_c \underline{u}) = \underline{f}^{(-)} \quad (2.1b)$$

$\underline{v}$  y  $\underline{u}$  son las componentes sistemática y estocástica, respectivamente, de la velocidad total de la partícula  $\underline{c} = \underline{v} + \underline{u}$  y por consiguiente, poseen distinta propiedad de transformación frente a la inversión del tiempo, al igual que las componentes  $\underline{f}^{(+)}$  y  $\underline{f}^{(-)}$  de la fuerza externa.  $\mathcal{D}_c$  y  $\mathcal{D}_s$  representan a los operadores de derivada sistemática y estocástica,

respectivamente, que pueden expresarse como:

$$\mathcal{D}_c = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla + \dots \quad (2.2a)$$

$$\mathcal{D}_s = \underline{u} \cdot \nabla + D \nabla^2 + \dots \quad (2.2b)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión y no se han escrito explícitamente los términos no markofianos;  $\lambda$  es un parámetro real, cuyo valor depende de la naturaleza de la interacción de la partícula con el medio, y que, al igual que  $D$ , debe ser considerado como empírico mientras no se posea una teoría subcuántica que lo determine.

Definiendo  $\epsilon = \pm \sqrt{-\lambda}$ , el sistema (2.1) puede escribirse en la forma:

$$m \mathcal{D}_q \underline{v}_q = \underline{f}_q \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q &= \mathcal{D}_c + \epsilon \mathcal{D}_s \\ \underline{v}_q &= \underline{v} + \epsilon \underline{u} \end{aligned} \quad (2.4)$$

y

$$\underline{f}_q = \underline{f}^{(+)} + \epsilon \underline{f}^{(-)}$$

Nótese que (2.3) puede considerarse como una generalización de la segunda ley de Newton, obtenida mediante la sustitución  $d/dt \rightarrow \mathcal{D}_q$  y

$$\underline{v} \rightarrow \underline{v}_q, \quad \underline{f} \rightarrow \underline{f}_q.$$

Cuando la fuerza externa es derivable de un potencial  $V$ , es fácil demostrar, utilizando la regla de conmutación

$$[\partial_i, \mathcal{D}_q] = \sum_j (\partial_i v_{qj}) \partial_j.$$

que  $\underline{v}_q$  también puede escribirse como el gradiente de una función (Jáuregui, 1971, p.18). Escribiendo este resultado en la forma

$$\underline{v}_q = 2eD \nabla w, \quad (2.5)$$

se obtiene como una primera integral de (2.3):

$$2m\epsilon^2 D^2 [\nabla^2 w + (\nabla w)^2] + V = -2m\epsilon D \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (2.6)$$

donde la constante de integración se ha igualado a cero. La ec. (2.6) se linealiza mediante el cambio de función  $\psi = e^w$ :

$$2m\epsilon^2 D^2 \nabla^2 \psi + V \psi = -2m\epsilon D \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Al escribir (2.6) no se ha tomado en cuenta la contribución no markofiana, que daría lugar a términos no lineales en (2.7).

Nótese que, por la forma como se definió  $\mathcal{E}$ , esta primera integral contiene en realidad dos ecuaciones, una de las cuales puede obtenerse a partir de la otra mediante la inversión del tiempo. Nuevamente en términos del parámetro  $\lambda$ , (2.7) toma la forma

$$-2mD^2 \lambda \nabla^2 \psi_{\pm} + V \psi_{\pm} = \mp 2mD\sqrt{\lambda} \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

donde  $\psi_{\pm} = e^{w_{\pm}}$ .

A partir de (2.4) y (2.5) podemos escribir las componentes de la velocidad en términos de  $\psi$ :

$$\underline{v} = D \sqrt{\lambda} \nabla \ln(\psi_+ / \psi_-) \quad (2.9a)$$

$$\underline{u} = D \nabla \ln(\psi_+ \psi_-) . \quad (2.9b)$$

Por otra parte, del sistema (2.8) y utilizando el resultado (2.9a), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_+ \psi_-) + \nabla \cdot (\underline{v} \psi_+ \psi_-) = 0 , \quad (2.10)$$

expresión que coincide con la ecuación de continuidad si se define  $\psi_+ \psi_- = \rho$ . Esta definición es consistente con la teoría general; en particular, (2.9b) toma la forma:

$$\underline{u} = D \frac{\nabla \rho}{\rho} , \quad (2.9c)$$

que es precisamente la velocidad osmótica introducida por Einstein (1905) en su teoría del movimiento browniano. Puede demostrarse también en forma inmediata, que la ecuación de continuidad (2.10) es equivalente a la ecuación de Fokker-Planck en el espacio de configuración:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\underline{u} \rho) + D \nabla^2 \rho , \quad (2.11)$$

con lo cual se pone de manifiesto, una vez más, el carácter markofiano de los procesos descritos por (2.8).

La ecuación (2.8) muestra que el carácter de sus soluciones depende esencialmente del signo de  $\lambda$ . Si este parámetro es negativo, la ecuación es de tipo parabólico y tiene, por consiguiente, soluciones que po-

demostramos llamar "causales", caracterizadas por el hecho de que la inversión del tiempo cambia esencialmente su naturaleza. Con  $\lambda$  positiva, (2.8) equivale a una ecuación de tipo hiperbólico, cuyas soluciones están caracterizadas por el hecho de que la dirección del tiempo deja de estar definida por las condiciones iniciales. Puesto que, de acuerdo con la teoría general,  $\lambda$  es real, estos dos casos son los únicos de interés. En particular, puede escogerse  $|\lambda| = 1$  sin pérdida de generalidad, con lo cual se obtienen a partir de (2.8), por un lado, una ecuación que corresponde a los procesos de tipo clásico

$$2mD^2 \nabla^2 \psi_{\pm} + V \psi_{\pm} = \mp 2mD \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} \quad (2.12)$$

con  $\lambda = -1$ , y por el otro, la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_{\pm} + V \psi_{\pm} = \mp i\hbar \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} \quad (2.13)$$

con  $D = \hbar/2m$  y  $\lambda = 1$ . Procurando utilizar una notación que refleje en forma clara y concisa la distinta naturaleza de los procesos descritos por (2.8), denominaremos procesos de Einstein a los que corresponden a  $\lambda = -1$ , descritos por (2.12), y procesos de Broglie a los obtenidos con  $\lambda = 1$  y descritos por (2.13).

Así pues, el uso de un parámetro adicional, natural al nivel de descripción de la teoría, permite tratar y diferenciar simultáneamente ambos tipos de problemas estocásticos, sin la necesidad de recurrir a conceptos artificiales, como el de coeficiente de difusión imaginario usado por ejemplo

plo por Fürth (1933) y Garczyński (1969), y el de masa o tiempo imaginario propuesto por Guth (1969) y otros autores.

### Superposición e interferencia.

El carácter lineal de las Ecs. (2.12) y (2.13) permite construir a partir de una pareja de soluciones  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , una nueva solución como combinación lineal de ellas:

$$\psi_{\pm} = a\psi_{1\pm} + b\psi_{2\pm}. \quad (2.14)$$

Introduciendo las funciones reales  $R_i$  y  $S_i$ , tales que

$$\psi_{i\pm} = e^{w_{i\pm}} = e^{R_i \mp \sqrt{\lambda} S_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2.15)$$

podemos escribir la densidad asociada a (2.14) en la forma

$$\rho = \psi_+ \psi_- = a^2 \rho_1 + b^2 \rho_2 + 2ab \sqrt{\rho_1 \rho_2} \cosh \Omega, \quad (2.16a)$$

donde

$$\Omega = \sqrt{-\lambda} (S_2 - S_1) \quad (2.16b)$$

y  $a$ ,  $b$  deben ser tales que  $\rho$  pueda ser considerada efectivamente una densidad, es decir, que sea positiva para todo valor de  $\Omega$ .

Cuando  $\lambda = -1$ ,  $\Omega = S_2 - S_1$  y las constantes  $a$ ,  $b$  son positivas. De (2.16a) se ve entonces que  $\rho$  es una suma de tres contribuciones positivas, es decir, en los procesos de Einstein la superposición de estados es necesariamente aditiva; en el lenguaje usual, podemos decir que

el comportamiento del sistema es estrictamente "corpúscular".

En cambio, cuando  $\lambda = 1$ ,  $\Omega = i(S_2 - S_1)$ , y el último término de (2.16a) oscila entre  $\pm 2ab\sqrt{\rho_1\rho_2}$ ; en otras palabras, en los procesos de de Broglie la superposición de estados produce interferencia; regresando al lenguaje usual, podemos decir que en estos procesos se manifiestan propiedades "ondulatorias".

Vemos así que una misma teoría estocástica puede caracterizar a los dos tipos de procesos que corresponden a la situación clásica y a la cuántica. Según (2.15), las amplitudes  $\psi_{\pm} = \sqrt{\rho} e^{\mp i\sqrt{\lambda} S}$  son funciones reales para los procesos de Einstein, en tanto que para los procesos de de Broglie son, en general, complejas, y  $\psi_+ = \psi_-^*$ .

En relación con estos resultados, cabe preguntarse qué sentido tiene superponer "amplitudes"  $\psi$ . En primer lugar, se ha visto que en el marco de la teoría, es natural y legítimo superponer amplitudes, por ser soluciones de ecuaciones lineales. En segundo lugar, existen condiciones bajo las cuales  $\sqrt{\rho}$  es el factor de peso de la velocidad en una superposición de estados. En efecto, consideremos el caso  $\underline{v}_i = 0$ , que es estacionario, y analicemos las condiciones bajo las cuales existe un estado caracterizado por

$$\underline{u} = \varphi_1 \underline{u}_1 + \varphi_2 \underline{u}_2 \quad (2.17a)$$

con

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1, \quad (2.17b)$$

siendo  $\varphi_i$  funciones por determinar.

Integrando (2.1a) obtenemos

$$\frac{1}{2} \underline{u}^2 + D \nabla \cdot \underline{u} = - \frac{E-V}{m\lambda} , \quad (2.18)$$

siendo  $E$  la constante de integración. Tomando en cuenta que esta ecuación debe ser satisfecha tanto por  $\underline{u}_i$  ( $i = 1, 2$ ) , como por la  $\underline{u}$  dada por (2.17a), obtenemos para  $\varphi_1$  la ecuación

$$2D \frac{\nabla \varphi_1}{\varphi_1(1-\varphi_1)} = \underline{u}_1 - \underline{u}_2 ,$$

cuya solución es

$$\varphi_1 = a \frac{\psi_1}{\psi} ; \quad \varphi_2 = b \frac{\psi_2}{\psi} . \quad (2.19)$$

Por consiguiente, de acuerdo con (2.17b), podemos escribir

$$\psi = a \psi_1 + b \psi_2 .$$

Como en el caso estudiado,  $\psi_i = \sqrt{\rho_i}$  , obtenemos de sustituir (2.19) en (2.17a):

$$\sqrt{\rho} \underline{u} = a \sqrt{\rho_1} \underline{u}_1 + b \sqrt{\rho_2} \underline{u}_2 ,$$

resultado que también puede ser derivado a partir del gradiente de (2.16a), con  $\Omega = 0$  , condición que puede incluir, no solamente al caso  $\underline{v}_i = 0$ , sino más en general,  $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$  . Sin embargo, este resultado es muy particular y tiene un valor enteramente formal en el caso  $\lambda = -1$  , aun que puede ser de alguna utilidad específica en la mecánica cuántica; se pre-



senta esencialmente con objeto de insistir en que las amplitudes deben usarse como elementos naturales de la teoría.

Como corolario de los resultados anteriores, surge la pregunta: ¿ por qué el principio de superposición de amplitudes, siendo usual en los procesos de de Broglie, no es conocido en relación con los procesos de Einstein? En primer lugar, puede esgrimirse un argumento de tipo histórico: ante la inexistencia de fenómenos de interferencia, la discusión en torno a esta cuestión era innecesaria, más aún cuando los métodos usuales se manifestaban suficientes para resolver con éxito los problemas relativos. En segundo lugar, existe un caso importante en que tal superposición es aplicable; en efecto, si consideramos el problema de la partícula browniana libre con potencial nulo, vemos que la ecuación (2.12) para  $\psi_-$  se reduce a la ecuación de difusión y, consecuentemente, las soluciones son  $\psi_- = A\rho$ ,  $\psi_+ = 1/A$ ; en este caso, la superposición de amplitudes es equivalente a la superposición de las propias densidades. Sin embargo, éste es, también, un problema muy particular. En la práctica, el problema difusivo es definido a través de las velocidades, o más concretamente, de los momentos que se introducen en la ecuación de Fokker-Planck y que son obtenidos, a su vez, de una ecuación dinámica adicional, como la ecuación de Langevin en el caso del movimiento browniano. Puesto que lo que se conoce a priori son las velocidades, lo natural es partir de la propia ecuación de Fokker-Planck.

Lo anterior puede ser reforzado con un argumento definitivo:

como se muestra en la siguiente sección, la ecuación tipo Schrödinger deja de ser lineal en el caso del movimiento browniano usual, debido a la existencia de fuerzas de fricción; por lo tanto, deben superponerse las densidades y no las amplitudes. Exactamente lo contrario sucede con los procesos usuales de de Broglie, para los cuales la ecuación de Schrödinger es lineal, pero la ecuación de continuidad no lo es, puesto que la velocidad  $\underline{v}$  no es un dato inicial, sino una propiedad derivada a partir de las amplitudes, de acuerdo con (2.9a).

#### El movimiento browniano.

A continuación se aplican los resultados obtenidos en las secciones anteriores, al proceso de Einstein más conocido: el movimiento browniano. Con ello se intenta demostrar por construcción que la ecuación dinámica de la teoría, (2.12), ofrece efectivamente un método alternativo - aunque no necesariamente más simple - de resolver el problema de la partícula browniana, esencialmente diferente de los métodos que brinda la literatura sobre el tema.

El hecho de considerar al movimiento browniano como un proceso estocástico en el espacio de configuración, implica la suposición de equilibrio local, puesto que se ha independizado el problema del espacio de velocidades. Por consiguiente, no se pretende obtener la solución exacta de Uhlenbeck y Ornstein (1930). Sin embargo, el que no se imponga condición alguna en la ecuación dinámica, permite suponer que el intervalo de validez de

las soluciones a construir será mayor que el de las soluciones de Einstein y Smoluchowski, que se pueden obtener a partir de la ecuación de Langevin en la aproximación estática, es decir, para tiempos grandes comparados con el tiempo de relajamiento  $\beta^{-1}$ . El procedimiento que aquí se ofrece posee la ventaja adicional de no estar condicionado a la existencia de una fuerza de fricción.

Con objeto de estudiar el movimiento browniano en general, es necesario introducir la fuerza de fricción  $\underline{K} = -m\beta\dot{c}$  en (2.12). Recordando la definición de la velocidad total y haciendo uso de las Ecs.(2.9), se obtiene

$$\underline{K} = -2Dm\beta\nabla\ln\psi_+. \quad (2.21)$$

Por consiguiente, la ecuación de movimiento para una partícula browniana es

$$D\nabla^2\psi_{\pm} + \left(\frac{V}{2mD} + \beta\ln\psi_{\pm}\right)\psi_{\pm} = \mp \frac{\partial\psi_{\pm}}{\partial t}, \quad (2.22)$$

resultado que muestra que, efectivamente, la ecuación deja de ser lineal debido a la presencia de la fuerza de fricción. Si se aplica en concreto a los problemas del oscilador armónico y de la partícula libre en una dimensión, las soluciones de (2.22) que nos interesan son de la forma

$$\psi_+ = \varphi_+ e^{a_1x^2 + b_1x}; \quad \psi_- = \varphi_- e^{a_2x^2 + b_2x}, \quad (2.23)$$

donde  $\varphi_i$ ,  $a_i$  y  $b_i$  son funciones del tiempo, a ser determinadas en

cada caso particular.

Para el problema de la partícula libre, escribimos de acuerdo con (2.22):

$$\begin{aligned} D \psi_+'' + (\beta \ln \psi_+) \psi_+ &= -\dot{\psi}_+ \\ D \psi_-'' + (\beta \ln \psi_+) \psi_- &= \dot{\psi}_-, \end{aligned} \quad (2.24)$$

cuyas soluciones son de la forma dada por (2.23), con

$$a_1 = \frac{1}{4D} \frac{\dot{u}_1}{u_1}; \quad a_2 = -\frac{1}{4D} \frac{\dot{u}_2}{u_2}; \quad (2.25a)$$

$$b_1 = -\frac{B_1 e^{-\beta t}}{u_1}; \quad b_2 = \frac{B_1 - B_2 u_1}{u_1 u_2} - b_1; \quad (2.25b)$$

donde

$$u_1 = 1 - e^{-\beta t}; \quad u_2 = u_1 (A + \beta t + \ln u_1) - e^{-\beta t} \quad (2.25c)$$

y  $A, B_1, B_2$  son constantes de integración.

De (2.23) tenemos que

$$\rho = \sqrt{\frac{-a}{\pi}} e^{a(x + \frac{b}{2a})^2}$$

donde  $a = a_1 + a_2$  y  $b = b_1 + b_2$ . Esta expresión nos permite hacer las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -\frac{b}{2a} \\ (\Delta x)^2 &= -\frac{1}{2a} \end{aligned} \quad (2.26a)$$

y haciendo uso de las fórmulas (2.9):

$$\begin{aligned}\bar{c} &= 2D(b_1 + 2\alpha_1\bar{x}) \\ \overline{(\Delta c)^2} &= (4D\alpha_1)^2 \overline{(\Delta x)^2} \\ \overline{\Delta(xc)} &= 4D\alpha_1 \overline{(\Delta x)^2}.\end{aligned}\tag{2.26b}$$

Las constantes de integración que aparecen en (2.25) se determinan a partir de las expresiones para  $\bar{x}$  y  $\bar{c}$ , y de la condición

$\rho \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta(x - x_0)$ . Los resultados finales son entonces:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_0 + \frac{c_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \\ \bar{c} &= c_0 e^{-\beta t} \\ \overline{(\Delta x)^2} &= \frac{2D}{\beta} u_1 u_2 \\ \overline{(\Delta c)^2} &= 2D\beta e^{-2\beta t} \frac{u_2}{u_1} \\ \overline{\Delta(xc)} &= 2De^{-\beta t} u_2\end{aligned}\tag{2.27}$$

con  $u_1 = 1 - e^{-\beta t}$ ;  $u_2 = u_1(\beta t - \frac{3}{2} + \ln u_1) - e^{-\beta t}$ .

Los límites de estas expresiones para tiempos grandes coinciden con los que se obtienen por el método de Einstein; en particular,  $\overline{(\Delta x)^2} \rightarrow 2Dt$ . Sin embargo, los resultados (2.27) no son válidos para tiempos arbitrariamente cortos, en los que no prevalece un equilibrio local. En la solución exacta del problema en el espacio-fase, se obtiene en el límite  $t \rightarrow 0$  (Uhlenbeck y Ornstein, 1930):

$$\overline{(\Delta x)^2} \rightarrow \frac{2}{3} D\beta^2 t^3.$$

En cambio, al derivar las ecuaciones fundamentales de la teoría estocástica aquí presentada, se ha impuesto la condición  $\overline{(\Delta x)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2Dt$ , propia de una partícula libre en equilibrio local, lo cual implica que los resultados de la teoría dan valores para la desviación cuadrática media de  $x$  excesivamente grandes para tiempos pequeños; esta limitación es característica de todos los resultados aquí presentados.

En el caso del oscilador armónico browniano, la forma explícita de las ecuaciones es, de acuerdo con (2.22),

$$D\psi_+'' + \left(\frac{\omega^2}{4D}x^2 + \beta \ln \psi_+\right)\psi_+ = -\dot{\psi}_+ \quad (2.28)$$

$$D\psi_-'' + \left(\frac{\omega^2}{4D}x^2 + \beta \ln \psi_-\right)\psi_- = \dot{\psi}_-$$

Escribiendo las soluciones en la forma dada por (2.23), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{u}_1 + \beta \dot{u}_1 + \omega^2 u_1 = 0 \quad (2.29a)$$

$$\frac{\dot{u}_1}{u_1} + \frac{b_1}{b_1} = -\beta \quad (2.29b)$$

$$\ddot{u}_2 + \beta \frac{\dot{u}_1}{u_1} u_2 + \omega^2 u_2 = 0 \quad (2.29c)$$

$$\frac{\dot{u}_2}{u_2} + \frac{b_2}{b_2} = \beta \frac{b_1}{b_2} \quad (2.29d)$$

donde 
$$a_1 = \frac{1}{4D} \frac{\dot{u}_1}{u_1}; \quad a_2 = -\frac{1}{4D} \frac{\dot{u}_2}{u_2} \quad (2.29e)$$

Al resolver este sistema, es conveniente distinguir entre el caso subamortiguado ( $\beta < 2\omega$ ) y el caso sobreamortiguado ( $\beta > 2\omega$ ); por el mo-

mento, prestaremos atención a este último, cuya solución está dada por:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= e^{-\gamma t} \cosh \beta_1 t \\
 u_2 &= A u_1 + \frac{1}{u_1} F(1, 2; 2-q; z) \\
 b_1 &= \frac{B_1 e^{-2\gamma t}}{u_1} \\
 b_1 + b_2 &= \frac{e^{-\gamma t}}{u_1 u_2} \left\{ [B_2 - 2B_1(q-1)] \cosh \beta_1 t + 2B_1(q-1) \sinh \beta_1 t \right\} \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1}{2} (1 - \operatorname{tgh} \beta_1 t) \\
 q &= \frac{\gamma}{\beta_1}; \quad \beta_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}; \quad \gamma = \frac{1}{2} \beta
 \end{aligned}$$

$A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  son constantes de integración y  $F$  representa una función hipergeométrica. De (2.30) sigue que:

$$a = - \frac{\beta_1 (q-1)}{2D u_1 u_2}$$

y de acuerdo con (2.9):

$$c = 2DB_1 e^{-\gamma t} \operatorname{sech} \beta_1 t - (\gamma - \beta_1 \operatorname{tgh} \beta_1 t) x .$$

Seleccionando las constantes de integración con el mismo método empleado en el caso anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= e^{-\gamma t} \left( x_0 \cosh \beta_1 t + \frac{\gamma x_0 + c_0}{\beta_1} \sinh \beta_1 t \right) \\
 \bar{c} &= e^{-\gamma t} \left( c_0 \cosh \beta_1 t - \frac{\gamma c_0 + \omega x_0}{\beta_1} \sinh \beta_1 t \right) \quad (2.31a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{(\Delta x)^2} &= \frac{D}{\beta_1(q-1)} \left[ F(1, 2; 2-q; z) - F(1, 2; 2-q; \frac{1}{2}) e^{-2\gamma t} \cosh^2 \beta_1 t \right] \\
 \overline{(\Delta c)^2} &= (\gamma - \beta_1 \operatorname{tgh} \beta_1 t) \overline{(\Delta x)^2} \\
 \overline{\Delta(xc)} &= (\beta_1 \operatorname{tgh} \beta_1 t - \gamma) \overline{(\Delta x)^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.31b}$$

Para tiempos grandes, los límites de las expresiones anteriores son:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &\rightarrow \frac{1}{2} e^{-\beta_1(q-1)t} \left[ x_0(q+1) + \frac{c_0}{\beta_1} \right] \\
 \bar{c} &\rightarrow -\frac{1}{2} e^{-\beta_1(q-1)t} \left[ c_0(q-1) + \frac{\omega^2 x_0}{\beta_1} \right] \\
 \overline{(\Delta x)^2} &\rightarrow \frac{D}{\beta_1(q-1)} \left[ 1 - \frac{1}{4} F(1, 2; 2-q; \frac{1}{2}) e^{-2\beta_1(q-1)t} \right] \\
 \overline{(\Delta c)^2} &\rightarrow \beta_1^2 (q-1)^2 \overline{(\Delta x)^2} \\
 \overline{\Delta(xc)} &\rightarrow -\beta_1 (q-1) \overline{(\Delta x)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

En la teoría usual del movimiento browniano en el espacio de configuración, se puede resolver el oscilador armónico sólo en el caso fuertemente amortiguado, es decir, cuando  $\omega \ll \gamma$  (Uhlenbeck y Ornstein, 1930). Por consiguiente, es conveniente hacer esta suposición, con objeto de poder comparar resultados. Haciendo  $q \approx 1 + \omega^2/2\gamma^2$  en (2.32), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &\rightarrow e^{-\frac{\omega^2}{\beta} t} \left( x_0 + \frac{c_0}{\beta} \right) \\
 \bar{c} &\rightarrow -e^{-\frac{\omega^2}{\beta} t} \frac{\omega^2}{\beta} \left( x_0 + \frac{c_0}{\beta} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.33a}$$



$$\begin{aligned}
 \overline{(\Delta x)^2} &\rightarrow \frac{\beta D}{\omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2\omega^2}{\beta} t}\right) \\
 \overline{(\Delta c)^2} &\rightarrow \frac{\omega^2 D}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{2\omega^2}{\beta} t}\right) \\
 \overline{\Delta(xc)} &\rightarrow -D \left(1 - e^{-\frac{2\omega^2}{\beta} t}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.33b}$$

de donde se ve que las cantidades que permite determinar el método de Einstein-Smoluchowski,  $\bar{x}$  y  $\overline{(\Delta x)^2}$ , coinciden con las aquí obtenidas. Asimismo, es evidente que las expresiones (2.33) contienen como caso particular al movimiento browniano libre ( $\omega = 0$ ), cuyos resultados para tiempos grandes se obtienen a partir de (2.27).

De los resultados anteriores vemos que la energía de equipartición, en el estado final de equilibrio, es

$$\frac{1}{2} m \omega^2 \overline{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} m \beta D .$$

Identificando ésta con la energía térmica por grado de libertad de acuerdo con el principio de equipartición,  $\frac{1}{2} k T$ , obtenemos la fórmula de Einstein (1905) para el coeficiente de difusión:

$$D = \frac{kT}{m\beta} .$$

Un problema de especial interés, por no admitir solución mediante el método de Einstein-Smoluchowski, es el movimiento browniano sin fricción. Para el oscilador armónico, en particular, los resultados obtenidos a partir de (2.29) con  $\beta = 0$  son:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \cos \omega(t-t_1); & u_2 &= \text{sen} \omega(t-t_2) \\
 b_1 &= \frac{B_1}{u_1}; & b_2 &= \frac{B_2}{u_2}
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Substituyendo estas expresiones en (2.26) y determinando las constantes de integración a través de las condiciones iniciales, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x_0 \cos \omega t + \frac{c_0}{\omega} \text{sen} \omega t \\
 \bar{c} &= c_0 \cos \omega t - \omega x_0 \text{sen} \omega t \\
 \overline{(\Delta x)^2} &= \frac{2D}{\omega} \text{tg} \omega t_1 \left[ 1 + \frac{\cos \omega t \cdot \text{sen} \omega(t-t_1)}{\text{sen} \omega t_1} \right] \\
 \overline{(\Delta c)^2} &= \omega^2 \text{tg}^2 \omega(t-t_1) \overline{(\Delta x)^2} \\
 \overline{\Delta(xc)} &= -\omega \text{tg} \omega(t-t_1) \overline{(\Delta x)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Nótese que en este caso, a diferencia de los anteriores, los valores medios oscilan aún para tiempos grandes, lo cual es una manifestación de la falta de amortiguamiento; éste es precisamente el motivo por el cual no es aplicable la aproximación estática de Einstein-Smoluchowski. Si en (2.35) hacemos tender a cero la frecuencia de oscilación, obtenemos correctamente los límites de partícula browniana libre sin fricción, que pueden ser deducidos también de (2.27) con  $\beta = 0$ .

En forma análoga puede ser resuelto explícitamente el caso subamortiguado; sin embargo, debido a que los resultados, también de validez limitada por las aproximaciones inherentes al método, implican un manejo laborioso de cantidades en general complejas, nos abstenemos de incluir

los en el presente trabajo.

Es conveniente hacer notar que los valores medios dados por (2.27), (2.31) y (2.35) satisfacen la ecuación de movimiento clásica

$$\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \bar{x} = -\beta \dot{\bar{x}},$$

donde  $\dot{\bar{x}} = \bar{v} = \bar{v}$ , puesto que el valor medio de la componente estocástica de la velocidad es cero.

Los resultados de esta sección han sido obtenidos con el propósito fundamental de mostrar explícitamente que la teoría estocástica que se está discutiendo permite efectivamente hacer una descripción satisfactoria de los procesos de Einstein en el espacio de configuración, válida una vez que se ha establecido el equilibrio local en el sistema.

#### Las relaciones de incertidumbre en el movimiento browniano.

Para cualquier potencial cuadrático a lo sumo en  $x$ , la solución fundamental de (2.22) puede expresarse en la forma dada por (2.23).

En este caso, en que la distribución es gaussiana, se pueden derivar simplemente algunas relaciones de incertidumbre, como mostramos a continuación.

De acuerdo con (2.9), las componentes de la velocidad de una partícula browniana pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v &= D(b_1 - b_2) + 2D(a_1 - a_2)x \\ u &= Db + 2Dax = 2Da(x - \bar{x}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

en donde la segunda igualdad se obtiene utilizando (2.26). De (2.26) y (2.36) es evidente que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 0 \\ \bar{v} &= \bar{c} = 2Db_1 + 4Da_1\bar{x} \\ \overline{(\Delta u)^2} &= (2Da)^2 \overline{(\Delta x)^2} \\ \overline{(\Delta v)^2} &= 4D^2(a_1 - a_2)^2 \overline{(\Delta x)^2} \\ \overline{(\Delta c)^2} &= (4Da_1)^2 \overline{(\Delta x)^2} \\ \overline{\Delta(uv)} &= 4D^2(a_1^2 - a_2^2) \overline{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por otra parte, haciendo uso de las Ecs. (2.29), obtenemos las siguientes relaciones, válidas para todos los casos discutidos aquí:

$$\alpha = -\frac{1}{4DQ}; \quad a_1 - a_2 = \frac{1}{4D} \frac{\dot{Q}}{Q} \quad (2.38)$$

donde  $Q = u_1 u_2 / 2\gamma$  ; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta x)^2} &= 2DQ \\ \overline{(\Delta u)^2} &= \frac{D}{2Q} \\ \overline{(\Delta v)^2} &= \frac{D\dot{Q}^2}{2Q} \\ \overline{(\Delta c)^2} &= \frac{D(\dot{Q}-1)^2}{2Q} \\ \overline{\Delta(uv)} &= -\frac{D\dot{Q}}{2Q} \end{aligned} \quad (2.39)$$

de donde obtenemos, por eliminación de la función  $Q$  ,

$$\begin{aligned}
 \overline{(\Delta x)^2} \overline{(\Delta u)^2} &= D^2 \\
 \overline{(\Delta x)^2} \overline{(\Delta v)^2} &= D^2 \dot{Q}^2 \\
 \overline{(\Delta x)^2} \overline{(\Delta c)^2} &= D^2 (\dot{Q}-1)^2 \\
 \overline{(\Delta x)^2} \overline{\Delta(uv)} &= -D^2 \dot{Q}
 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nótese que la primera de estas expresiones impone un mínimo al producto de las dispersiones en  $x$  y  $u$ , independiente del tiempo, y que, por lo demás, dicho valor mínimo coincide con el obtenido mediante otros métodos un tanto más artificiales (ver, p.ej., Fürth, 1933 ; Guth, 1969).

La función  $Q$  puede ser determinada en general mediante el siguiente procedimiento. Como puede verse por ejemplo de (2.29a),  $u_1$  es solución de la ecuación de movimiento clásica; por otra parte, de la relación  $u_1 \ddot{u}_2 - u_2 \ddot{u}_1 = 0$  que surge de (2.29a) y (2.29c), obtenemos que

$$u_2 = 2\gamma u_1 \int \frac{dt}{u_1^2},$$

lo cual nos permite escribir una fórmula general para  $Q$  :

$$Q = \frac{u_1 u_2}{2\gamma} = u_1^2 \int \frac{dt}{u_1^2}$$

en términos de la solución de (2.29a).

Los resultados anteriores ayudan a entender las relaciones de incertidumbre como una consecuencia y una medida de la estocasticidad del sistema; su existencia en sistemas clásicos muestra que no es legítimo - o al menos, no es necesario - concluir que a partir de las relaciones de

Heisenberg se obtienen propiedades específicas y exclusivas de los sistemas cuánticos. Podrían deducirse, inclusive, "relaciones de incertidumbre" para los procesos de Einstein, siguiendo los procedimientos usuales en la mecánica cuántica, mediante la introducción de los operadores dinámicos adecuados (como se muestra, p. ej., en de la Peña et al., 1968a). Sin embargo, los resultados obtenidos aquí son suficientes para nuestros propósitos.

Parece oportuno finalizar este capítulo deslizado una conjetura. Hemos visto que la teoría estocástica estudiada describe al sistema clásico con mayor precisión que la que proporciona el método de Einstein-Smoluchowski debido a que no se imponen restricciones dinámicas al sistema; a la vez, la descripción es más pobre que la de Uhlenbeck-Ornstein en el espacio fase, puesto que, como se ha dicho anteriormente, está condicionada por las restricciones de equilibrio local y  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{t} = \text{constante}$ , ambas de carácter limitativo. Considerando que los procesos de de Broglie se obtienen de la misma teoría mediante el simple cambio del valor de un parámetro, cabe preguntarse si no existen restricciones similares en la mecánica cuántica. De ser válida esta conjetura, implicaría la existencia de un límite de aplicabilidad de la mecánica cuántica usual para tiempos pequeños o comparables con el tiempo de relajamiento característico del sistema, de donde se concluiría que debe existir una descripción más precisa del fenómeno cuántico que la que proporciona la ecuación de Schrödinger. Un punto de vista similar ha sido presentado por de la Peña y García-Colín (1967b, 1968b).

## CAPITULO III.

### CORRECCIONES DE AUTOACCION: EL EFECTO LAMB.

#### Introducción.

Los resultados obtenidos en el Capítulo anterior dan respuesta satisfactoria a las dos cuestiones de principio planteadas en el Capítulo I. Por lo tanto, parece conveniente intentar ahora explotar las posibilidades específicas que ofrece la teoría para abordar problemas cuánticos desde un nuevo punto de vista, y obtener con ello una idea más clara de sus potencialidades. No siendo la teoría estocástica una nueva mecánica cuántica, sino sólo una reformulación de la misma sobre nuevas bases, no es de esperarse la aparición de efectos novedosos o desconcertantes predichos por la primera y olvidados por la segunda. Sin embargo, la diferencia esencial en la formulación permite adoptar puntos de vista distintos, que en principio abren nuevas posibilidades. En particular, la mecánica de Schrödinger se escribe en términos del potencial externo, en tanto que en las ecuaciones estocásticas intervienen las fuerzas, sean o no derivables de un potencial. Precisamente esto nos permite introducir en forma natural en la teoría esto-

cástica los términos que representan la autoacción del electrón, para usar la terminología de Feynman (1962). Este problema es resuelto usualmente en el marco de la electrodinámica cuántica: es bien sabido que las correcciones radiativas provenientes de la autoacción de la partícula dan lugar a efectos observables, tales como el corrimiento (de) Lamb y el momento magnético anómalo. Lo esencial de estos cálculos es la introducción de los efectos de autoacción, que son términos electromagnéticos de origen clásico; por lo tanto, podemos esperar que la introducción de las fuerzas electromagnéticas correspondientes como términos adicionales a las fuerzas externas en la teoría estocástica - proceso que es de realización simple - conduzca a la obtención de los efectos asociados. Es evidente, sin embargo, que un cálculo de esta naturaleza no puede pretender reproducir exactamente los resultados de la electrodinámica cuántica, debido al menos a dos razones. En primer lugar, el hecho de describir el comportamiento del electrón con una teoría no relativista, excluye la posibilidad de obtener las contribuciones relativistas a los diversos efectos; en segundo lugar, puesto que no se considera al campo electromagnético consistentemente cuantizado, no podemos obtener términos tales como la contribución de la polarización del vacío al efecto Lamb. Sin embargo, aunque falto de precisión, el cálculo tiene la ventaja de ser sencillo y directo, y consecuentemente dotado de una notable claridad física; además, se puede llegar al efecto Lamb mediante un cálculo libre de divergencias.



Con el objeto de mantener la claridad en la exposición, dividimos ésta en dos partes. En este capítulo consideramos al electrón ligado en el campo coulombiano, para calcular el efecto Lamb a partir de la fuerza comúnmente llamada reacción de radiación (Landau y Lifshitz, 1951). En el Capítulo IV estudiamos el problema más complejo del electrón con estructura, sujeto a un campo magnético externo: los términos dominantes de autoacción nos llevan en este caso a obtener el momento magnético anómalo y la corrección a la masa del electrón.

La idea de introducir la reacción de radiación en las teorías estocásticas ha sido formulada anteriormente en, al menos, dos contextos diferentes. Por un lado, una serie de autores (ver, p.ej., Sokolov y Tumanov, 1956; Marshall, 1963; Surdin, 1970) postula que de la reacción de radiación surge, en primera aproximación, el término de fricción que permite considerar a la mecánica cuántica como una especie de movimiento browniano clásico como se vio en el Capítulo I. Por otra parte, con argumentos similares a los aquí presentados, Krizan (1968) trata precisamente de obtener el efecto Lamb, partiendo de la teoría estocástica de Nelson (1966). La idea básica de Krizan es, desde luego, correcta; sin embargo, debido a su inapropiada realización, el resultado del cálculo es cero. El origen de esta dificultad puede ser explicado de la siguiente manera. Como se ha dicho anteriormente (Capítulo I), Nelson construye su formulación estocástica basado en los principios dinámicos de la teoría del movimiento brownian

no. Las fuerzas que actúan sobre la partícula estocástica coinciden entonces con las expresiones clásicas, y en particular, la fuerza electromagnética está dada por la formula de Lorentz:

$$\underline{f} = e \left( \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{H} \right). \quad (3.1)$$

Sin embargo, es fácil demostrar que esta expresión es incompleta (de la Peña y Cetto, 1969a, 1969b), puesto que representa sólo a la componente  $f^{(+)}$  de la fuerza,  $f^{(-)}$  siendo en general distinta de cero. Como se verá más adelante, es precisamente un término de  $f^{(-)}$  el responsable fundamental del efecto Lamb no relativista; Krizan no obtiene esta contribución, debido a que realiza sus cálculos en el marco de la teoría de Nelson, omitiendo por ello automáticamente a  $f^{(-)}$ . A esta situación debe sumarse el uso de una serie de aproximaciones, que terminan por cancelar la parte remanente del efecto Lamb buscado.

#### Introducción de la reacción de radiación.

Se ha demostrado en el Capítulo II que una primera integración de las ecuaciones fundamentales de la teoría conduce en la aproximación markofiana a la ecuación de Schrödinger, (2.13), con  $\lambda=1$  y  $D=\hbar/2m$ . Para obtener la ecuación de Schrödinger con acoplamiento electromagnético es necesario introducir las fuerzas correspondientes en las ecuaciones (2.1). Es posible demostrar a partir de primeros principios, que la fuerza electromagnética estocástica a segundo orden, es decir, en la aproximación markofiana está dada por (de la Peña y Cetto, 1969a, 1969b):

$$\underline{f}_q = e \left( \underline{E}_q + \frac{1}{c} \underline{v}_q \times \underline{H}_q + \frac{iD}{c} \nabla^2 \underline{A}_q \right) \quad (3.2)$$

en términos de las cantidades definidas en (2.4), resultado que difiere de la fórmula de Lorentz (3.1) por la presencia de términos de origen estocástico. La Ec. (3.2) puede ser obtenida en forma directa a partir de la fórmula de Lorentz, efectuando en ésta las sustituciones sugeridas por la Ec.

$$(2.3), \text{ a saber, } d/dt \rightarrow \mathcal{D}_q ; \underline{v} \rightarrow \underline{v}_q ; \underline{f} \rightarrow \underline{f}_q \quad (\text{Jáuregui, 1971}).$$

Nuestro presente propósito es estudiar al movimiento de un electrón sujeto simultáneamente a la fuerza coulombiana proveniente del núcleo y a la reacción de radiación. De acuerdo con la electrodinámica clásica, esta última se deriva de los términos de segundo orden en el desarrollo de los potenciales de Liénard-Wiechert (Ivanenko y Sokolov, 1951):

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \frac{2}{3} \frac{e}{c^3} \dot{\underline{w}} \\ \underline{A} &= -\frac{e}{c^2} \underline{w} , \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $\underline{w}$  es la aceleración de la partícula. En vista de que nuestra intención es hacer sólo un tratamiento perturbativo a primer orden, podemos considerar que la aceleración en (3.3) está determinada por la fuerza externa, es decir,  $\underline{w} = -(e/m) \nabla \phi$ . Manteniendo la consistencia con las fórmulas (2.3) y (3.2), debemos escribir las expresiones estocásticas correspondientes en la forma:

$$\begin{aligned}\underline{E}_q &= -\tau \underline{D}_q \nabla \phi \\ \underline{A} &= \frac{e^2}{mc^2} \nabla \phi ,\end{aligned}\quad (3.4)$$

donde  $\tau = 2e^2/3mc^3$ . Introduciendo estas expresiones en (3.2), obtenemos la fuerza total que actúa sobre el electrón:

$$\underline{f}_q = \underline{f}_o + \tau \underline{D}_q \underline{f}_o + \frac{De^2}{mc^3} \nabla^2 \underline{f}_o , \quad (3.5a)$$

con 
$$\underline{f}_o = -\nabla V = -e\nabla\phi . \quad (3.5b)$$

Como se puede ver de (2.13), si definimos la función de onda como  $\psi_- = \psi$ , tenemos que  $\psi_+ = \psi^*$ ; por lo tanto, la ecuación de Schrödinger se obtiene utilizando el signo inferior, y su compleja conjugada se obtiene con el superior. En este caso obtenemos de (2.4):

$$\begin{aligned}\underline{D}_q &= \underline{D}_c - i\underline{D}_s \\ \underline{V}_q &= \underline{V} - i\underline{U} \\ \underline{f}_q &= \underline{f}^{(+)}, - i\underline{f}^{(-)}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

En vista de que el problema en cuestión es independiente del tiempo y además, según la Ec. (2.9a), podemos suponer sin pérdida de generalidad que el valor no perturbado de  $\underline{V}$  es cero, de acuerdo con (2.2a) podemos hacer  $\underline{D}_c = 0$  en (3.5a), es decir,

$$\underline{f}_q = \underline{f}_o - i\tau \underline{D}_s \underline{f}_o + \frac{De^2}{mc^3} \nabla^2 \underline{f}_o .$$

Introduciendo este resultado en la ecuación de movimiento (2.3), obtenemos finalmente

$$m \partial_q \underline{v}_q = \underline{f}_o - i\tau \partial_s \underline{f}_o + \frac{De^2}{mc^3} \nabla^2 \underline{f}_o . \quad (3.7)$$

Por analogía con el problema potencial ( ver la ecuación 2.5). proponemos integrar (3.7) mediante el cambio de variable

$$\underline{v}_q = -2iD \nabla w - \frac{i\tau}{m} \underline{B} . \quad (3.8)$$

En términos de las nuevas variables  $w$  y  $\underline{B}$  obtenemos a primer orden en  $\tau$  :

$$\begin{aligned} \partial_k \left[ -i\hbar \partial_q w + \hbar D (\nabla w)^2 + V + \tau \partial_s V + \frac{De^2}{mc^3} \nabla^2 V \right] = \\ = \tau \left[ \partial_s B_k + \sum_j (f_{ij} \partial_k u_j - u_j \partial_k B_j) \right] , \end{aligned} \quad (3.9)$$

ecuación que puede ser integrada de inmediato si se escoge la función  $\underline{B}$  para anular el miembro derecho, es decir,

$$\partial_s B_k = \sum_j (u_j \partial_k B_j - f_{ij} \partial_k u_j) . \quad (3.10)$$

Integrando el miembro izquierdo y efectuando el cambio de función  $w = \ln \psi$ , obtenemos la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \left( V + \tau \partial_s V + \frac{De^2}{mc^3} \nabla^2 V - 2D\tau \underline{B} \cdot \nabla \right) \psi , \quad (3.11)$$

con tres correcciones al potencial, cuyas contribuciones al corrimiento de

la energía son:

$$\delta E_{nl} = \tau \langle \mathcal{D}_s V \rangle + \frac{3}{2} D\tau \langle \nabla^2 V \rangle - 2D\tau \langle \underline{B} \cdot \nabla \rangle \quad (3.12)$$

Haciendo uso de la fórmula (2.2b) para  $\mathcal{D}_s$ , es fácil demostrar que el primer término en (3.12) es nulo; nos quedan, por lo tanto, dos correcciones que dependen en general de los números cuánticos  $n, l$  y que podemos escribir en la siguiente forma:

$$\delta E_{nl}^{(1)} = \frac{3}{2} D\tau \langle \nabla^2 V \rangle = \epsilon_n K_1(n, l) \quad (3.13a)$$

$$\delta E_{nl}^{(2)} = -2D\tau \langle \underline{B} \cdot \nabla \rangle = \epsilon_n K_2(n, l) \quad (3.13b)$$

donde 
$$\epsilon_n = \frac{8}{3\pi} \frac{\alpha^3 Z^4 R \hbar}{n^3} = \hbar L, \quad (3.13c)$$

siendo  $R$  la constante de Rydberg,  $L$  la constante de Lamb (ver, p.ej., Bethe y Salpeter, 1957) y  $K_1, K_2$  parámetros adimensionales. El valor de  $K_1$  puede calcularse fácilmente; el resultado es

$$K_1(n, l) = \frac{3\pi}{2} \delta_{l0}. \quad (3.14)$$

El cálculo de  $K_2$ , en cambio, implica la solución de la ecuación subsidiaria (3.10), a la cual dedicamos la siguiente sección.

#### Solución de la ecuación subsidiaria.

Utilizando la fórmula (2.2b) para  $\mathcal{D}_s$ , podemos escribir (3.10) en la siguiente forma:

$$D \nabla^2 \underline{B} = (\underline{f}_0 \cdot \nabla) \underline{u} + \underline{u} \times (\nabla \times \underline{B}) \quad (3.15)$$

Para los estados  $S$ , en los que, de acuerdo con la Ec. (2.9b), la velocidad  $\underline{u}$  es radial y depende sólo de la coordenada esférica  $r$ , podemos escoger  $\nabla \times \underline{B} = 0$ , con lo cual (3.15) se reduce a la ecuación

$$D \nabla^2 \underline{B} = - \frac{Ze^2 du}{r^2 dr} \quad (3.16)$$

De (3.8) se ve que  $\underline{B}$ , siendo una corrección a primer orden a la velocidad, debe satisfacer las mismas condiciones a la frontera que  $\underline{u}$  (ver la Ec. 3.26a); la solución que cumple este requisito es

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \frac{Ze^2}{4\pi D} \int \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{d\underline{u}(r')}{dr'} dr' d\Omega' = \\ &= \frac{Ze^2 \hat{a}_r}{3D} \left[ -\frac{1}{r^2} \int_0^r u dr' + 2r \int_r^\infty \frac{u}{r'^3} dr' \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde la segunda igualdad se obtiene de integrar por partes sobre  $r'$ . Introduciendo la forma específica de  $\underline{u}$ , derivada a partir de (2.9b) con

$$\psi \sim e^{-\frac{1}{2}\rho} L_{n-1}^i(\rho)$$

donde  $\rho = \beta r$ ,  $\beta = 2Z/na_0$  y  $a_0$  es el radio de la primera órbita de Bohr, obtenemos

$$\underline{B} = \frac{2}{3} Ze^2 \beta^2 \hat{a}_r \left[ -\frac{1}{\rho^2} \ln \frac{L_{n-1}^i(\rho)}{L_{n-1}^i(0)} + 2\rho I_{n_0}(\rho) \right]. \quad (3.18a)$$

$L_{n-1}^i$  es un polinomio asociado de Laguerre, y

$$I_{no} = \int_{\rho}^{\infty} \frac{dL_{n-1}^{\perp}(x)}{dx} \frac{dx}{x^3 L_{n-1}^{\perp}(x)} \quad (3.19b)$$

Es fácil demostrar mediante integración por partes, que  $-2\langle \underline{B} \cdot \nabla \rangle = \langle \nabla \cdot \underline{B} \rangle$ ; por consiguiente, la corrección (3.13b) puede ser calculada a partir de la divergencia de (3.18a), lo que da como resultado

$$K_2(n,0) = 4\pi \left\langle -\frac{1}{\rho^2 L_{n-1}^{\perp}} \frac{dL_{n-1}^{\perp}}{d\rho} + 2I_{no}(\rho) \right\rangle \quad (3.20)$$

Para el estado base, en particular,  $K_2 = 0$  ; para  $n \neq 1$  , el valor de  $K_2$  es pequeño en comparación con el valor de  $K_4$  para estados  $S$ , dado por (3.14). Para  $n = 2$  , por ejemplo, obtenemos de (3.20):

$$\begin{aligned} K_2(2,0) &= -\pi \left\langle \frac{1}{2-\rho} + \frac{3}{\rho} + \frac{4}{\rho^2} + \ln \frac{|2-\rho|}{\rho} \right\rangle = \\ &= -\pi \left( \frac{7}{2} + \gamma + \ln 2 - 7e^{-2} \text{Ei}(2) \right) \approx -0.08 \pi \quad (3.21) \end{aligned}$$

donde  $\gamma = 0.577\dots$  es la constante de Euler y  $\text{Ei}(x)$  es la integral exponencial de  $x$  . Los resultados numéricos (3.14) y (3.21) nos permiten concluir que la contribución fundamental al corrimiento del nivel  $2s$  - y en general, de todos los niveles  $S$  - proviene del último término en la Ec. (3.7), el cual, a su vez, se origina en el término estocástico  $-(eD/c)\nabla^2 \underline{A}$ .

Para los estados con  $l \neq 0$  , la solución de la Ec. (3.15) es en general más complicada, debido a que  $\nabla \times \underline{B} \neq 0$  . En vista del resultado obtenido para  $K_2(2,0)$  , es de esperarse que el cálculo de



$K_2(n, l)$  arroje valores pequeños comparados con la contribución principal  $K_1(n, l)$  para  $l = 0$ . Sin embargo, estimamos conveniente presentar un método general de solución, con el principal objetivo de demostrar que los resultados finales se obtienen sin la aparición de divergencias.

Durante el desarrollo del cálculo, debe tenerse en cuenta que, como se ha dicho anteriormente,  $\underline{B}$  debe satisfacer las mismas condiciones de frontera que  $\underline{u}$ , debido a que representa una corrección a primer orden de esta última. El comportamiento correcto de  $\underline{B}$  se puede garantizar siempre agregando a la solución particular de la ecuación subsidiaria (3.15), una solución adecuada de la ecuación homogénea correspondiente, a la cual llamaremos  $\underline{B}_0$ .

Debido a la simetría esférica del problema, es evidente que los resultados no pueden depender del número cuántico magnético  $m$ , por lo que podemos escoger desde un principio  $m = 0$ , sin pérdida de generalidad. Proponemos entonces escribir la solución de (3.15) en la forma

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1 + \underline{B}_2 \quad (3.22)$$

donde  $\underline{B}_0$  es solución de la ecuación

$$D\nabla^2 \underline{B}_0 - \underline{u} \times (\nabla \times \underline{B}_0) = 0 ; \quad (3.23)$$

$\underline{B}_1$  es una función irrotacional que satisface la ecuación

$$D\nabla^2 \underline{B}_1 = (\underline{f}_0 \cdot \nabla) \underline{u}_r \hat{\alpha}_r \quad (3.24)$$

y consecuentemente,  $\underline{B}_2$  es la solución de

$$D \nabla^2 \underline{B}_2 - \underline{u} \times (\nabla \times \underline{B}_2) = (\underline{f}_e \cdot \nabla) u_\theta \hat{a}_\theta \quad (3.25)$$

Sustituyendo la función de onda para el átomo hidrogenoide con  $m = 0$

$$\psi \sim e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho) P_\ell(x); \quad x = \cos \theta$$

en la fórmula (2.9b), obtenemos para las componentes de la velocidad:

$$u_r = 2D\beta \left[ -\frac{1}{2} + \frac{\ell}{\rho} + \frac{1}{L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}} \frac{dL_{n-\ell-1}^{2\ell+1}}{d\rho} \right] \equiv 2D\beta \Lambda_{n\ell}(\rho) \quad (3.26a)$$

$$u_\theta = -\frac{2D\beta}{\rho} \operatorname{sen} \theta \frac{P_\ell'(x)}{P_\ell(x)}. \quad (3.26b)$$

Si siguiendo un procedimiento análogo al utilizado en el caso

$\ell = 0$ , obtenemos como solución particular de la ecuación (3.24):

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 &= -\frac{1}{4\pi D} \int \frac{(\underline{f}_e \cdot \nabla) u_r(r') \hat{a}_r r'^2 dr' d\Omega'}{|r-r'|} = \\ &= \frac{ze^2 \beta \hat{a}_r}{3D} \left[ -\frac{1}{\rho^2} \int_0^r u_r dx + 2\rho \int_\rho^\infty \frac{u_r dx}{x^3} \right]. \end{aligned}$$

Al realizar la integración, aparece el término  $2D\beta \ell \rho^{-2} \hat{a}_r \ln z$  calculado en  $z = 0$ ; por consiguiente, para asegurar el comportamiento correcto de  $\underline{B}$ , escogemos una solución de (3.23) que cancele este término infinito, obteniendo de esta manera

$$\underline{B}_0 + \underline{B}_1 = \frac{2}{3} z e^2 \beta^2 \hat{a}_r \left[ \frac{\ell}{\rho^2} \left( \frac{2}{3} - \ln \rho \right) - \frac{1}{\rho^2} \ln \frac{L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho)}{L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(0)} + 2\rho I_{n\ell}(\rho) \right], \quad (3.27a)$$

donde

$$I_{n\ell}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{dL_{n,\ell}(x)}{dx} \frac{dx}{x^3 L_{n-1,\ell}(x)} . \quad (3.27b)$$

En unidades de  $\epsilon_n$ , la corrección asociada a esta parte de  $\underline{B}$  queda expresada como:

$$K'_2(n, \ell) = 4\pi \left\langle 2I_{n\ell}(\rho) - \frac{1}{\rho^2 L_{n-1,\ell}^{2\ell+1}} \frac{dL_{n,\ell}^{2\ell+1}}{d\rho} - \frac{\ell}{3\rho^3} \right\rangle \quad (3.28)$$

Para los estados  $s$ , en particular, esta expresión se reduce a (3.20), como es de esperarse. Para los estados con  $n = \ell + 1$ , (3.28) se reduce a

$$K'_2(\ell+1, \ell) = -\frac{4\pi}{3} \ell \left\langle \frac{1}{\rho^3} \right\rangle = -\frac{\pi}{3(\ell+1)(2\ell+1)} , \quad (3.29a)$$

de donde obtenemos para el nivel  $2\rho$  el siguiente resultado:

$$K'_2(2, 1) = -\frac{\pi}{18} . \quad (3.29b)$$

Con objeto de resolver la Ec. (3.25), proponemos, tomando en cuenta su estructura, que las componentes de  $\underline{B}_2$  pueden escribirse como series infinitas de polinomios de Legendre

$$B_{2r} = \sum_{t \text{ par} \geq 0} f_t(\rho) P_t(x) \quad (3.30a)$$

$$B_{2\theta} = \text{sen } \theta \sum_{s \text{ impar} \geq 1} g_s(\rho) P_s(x) \quad (3.30b)$$

con coeficientes  $f_t(\rho)$  y  $g_s(\rho)$  por determinar. Haciendo uso de  $\underline{pro}$

propiedades conocidas de los polinomios de Legendre, obtenemos de (3.30):

$$\nabla \cdot \underline{B}_2 = \frac{1}{\rho^2} \sum_t \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 f_t \right) P_t + \frac{1}{\rho} \sum_s q_s \left[ \frac{(s+1)(s+2)}{2s+1} P_{s+1} - \frac{s(s-1)}{2s+1} P_{s-1} \right] \quad (3.31)$$

El valor de expectación sobre el estado  $(n, l)$  de los términos de (3.31) con  $t > 2l$  y  $s > 2l+1$  es nulo; por consiguiente, tomando en cuenta que la contribución a  $K_2(n, l)$  proveniente de  $\underline{B}_2$  es proporcional a  $\langle \nabla \cdot \underline{B}_2 \rangle$ , vemos que sólo es necesario determinar los coeficientes  $f_t$  y  $q_s$  con  $t \leq 2l$  y  $s \leq 2l+1$ .

Sustituyendo (3.30) en (3.25) y haciendo uso de (3.26), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_t F_t P_t(x) - 2 \sum_s q_s [2x P_s(x) - (1-x^2) P_s'(x)] = \\ = -2(1-x^2) \frac{P_2'(x)}{P_2(x)} \left[ \sum_s (\rho q_s' + q_s) P_s(x) + \sum_t f_t P_t'(x) \right] \end{aligned} \quad (3.32a)$$

$$\begin{aligned} \sum_s [G_s P_s(x) - 2q_s x P_s'(x)] - 2 \sum_t f_t P_t'(x) = \\ = -2\rho \Delta \left[ \sum_s (\rho q_s' + q_s) P_s(x) + \sum_t f_t P_t'(x) \right] - \frac{2Z e^2 \beta^4}{\rho^2} \frac{P_2'(x)}{P_2(x)} \end{aligned} \quad (3.32b)$$

donde 
$$F_t = \rho^2 f_t'' + 2\rho f_t' - t(t+1)f_t - 2f_t \quad (3.32c)$$

y 
$$G_s = \rho^2 q_s'' + 2\rho q_s' - s(s+1)q_s - 2q_s. \quad (3.32d)$$

Este sistema puede ser resuelto anulando el coeficiente de cada uno de los polinomios de Legendre. Aunque este procedimiento es práctico para valo-

res pequeños de  $\ell$ , en general resulta más conveniente multiplicar (3.32a) y (3.32b) por un polinomio de Legendre arbitrario  $P_q(x)$  e integrar sobre  $x$ , eliminando de esta manera la variable angular. Se obtiene así el siguiente sistema infinito de ecuaciones:

$$\sum_t [J_{t\ell}^q F_t + B_{t\ell}^q f_t] = \sum_s [K_{s\ell}^q (\rho q'_s + q_s) + D_{s\ell}^q q_s] \quad (3.33a)$$

$$\sum_s [A_{s\ell}^q \Gamma_s - M_{s\ell}^q q_s] = -\frac{2Z e^2 \beta^2}{\rho^2} K_\ell^q + \sum_t N_{t\ell}^q (1 - \rho \Lambda) f_t \quad (3.33b)$$

donde se han introducido las siguientes definiciones:

$$J_{t\ell}^q = \int_{-1}^1 P_t(x) P_\ell(x) P_q(x) dx$$

$$B_{t\ell}^q = \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \sum_{k=0}^{\frac{t-1}{2}} (2t-4k-1) (J_{\ell-2k-1, \ell-1}^q - J_{\ell-2k-1, \ell+1}^q)$$

$$K_{s\ell}^q = \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} (J_{s, \ell+1}^q - J_{s, \ell-1}^q)$$

$$D_{s\ell}^q = 2 \left[ \frac{(s+1)(s+2)}{2s+1} J_{s+1, \ell}^q - \frac{s(s-1)}{2s+1} J_{s-1, \ell}^q \right]$$

$$A_{s\ell}^q = \frac{(s+1)(s+2)}{(2s+1)(2s+3)} [J_{s, \ell}^q - J_{s+2, \ell}^q] + \frac{s(s-1)}{(2s-1)(2s+1)} [J_{s, \ell}^q - J_{s-2, \ell}^q]$$

$$M_{s\ell}^q = \frac{2s(s+1)}{2s+1} \left[ \frac{\ell+1}{2\ell+1} (J_{s-1, \ell+1}^q - J_{s+1, \ell+1}^q) + \frac{\ell}{2\ell+1} (J_{s-1, \ell-1}^q - J_{s+1, \ell-1}^q) \right]$$

$$K_\ell^q = \frac{2\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \left( \frac{\delta_{\ell-1, q}}{2\ell-1} - \frac{\delta_{\ell+1, q}}{2\ell+3} \right)$$

$$N_{t\ell}^q = \frac{2t(t+1)}{2t+1} (J_{\ell, t-1}^q - J_{\ell, t+1}^q)$$

y 
$$\Gamma_s = G_s + 2\Lambda(\rho q'_s + q_s).$$

Este sistema de ecuaciones permite resolver en principio la Ec. (3.25) para  $l$  arbitraria. En cada caso particular, las expresiones se simplifican considerablemente gracias a las propiedades de la integral  $J_{t,l}^q$ . A manera de ejemplo, estudiemos el caso más sencillo,  $l = 1$ . De acuerdo con lo dicho anteriormente, las únicas ecuaciones del sistema (3.33) a resolver son aquellas que contienen a  $f_t$  con  $t = 0, 2$ , y a  $q_s$  con  $s = 1, 3$ . De (3.33a) obtenemos, haciendo  $q = 1$ ,

$$\rho^2 f_2'' + 2\rho f_2' - 2f_2 + \frac{5}{2}(\rho^2 f_0'' + 2\rho f_0' - 2f_0) = -6(\rho h_1' - h_1) \quad (3.34a)$$

y de (3.33b), con  $q = 0$ ,

$$\rho^2 h_1'' + 2\rho(1 + \rho\Lambda_w)h_1' - 2(3 - \rho\Lambda_w)h_1 = -\frac{10Ze^2\beta^2}{3\rho^2} + 2(1 - \rho\Lambda_w)f_2 \quad (3.34b)$$

donde

$$h_i = \frac{1}{2j+1} q_i - \frac{1}{2j+5} q_{i+2}.$$

El sistema (3.34) se satisface con

$$f_0 = (a_0 - \frac{4}{3}Ze^2\beta^2 \ln \rho) \rho^{-2}$$

$$f_2 = h_1 = \frac{5}{9}Ze^2\beta^2 \rho^{-2},$$

siendo  $a_0$  arbitraria. Sustituyendo este resultado en (3.31) y calculando el promedio de la expresión sobre el estado  $(n, 1)$ , obtenemos finalmen

te

$$\langle \nabla \cdot \underline{B}_2 \rangle = -\frac{4}{3} Z e^2 \beta^2 \langle \frac{1}{\rho^3} \rangle \langle P_0 - \frac{5}{2} P_2 \rangle = 0, \quad (3.35)$$

puesto que, para estados  $p$ ,  $\langle P_2 \rangle = 2/5 \langle P_0 \rangle$ . Por consiguiente, de acuerdo con (3.28), la corrección total a la energía de los niveles  $n, p$  está dada por

$$K_2(n, 1) = 4\pi \langle 2I_{n1}(\rho) - \frac{1}{\rho^2} \frac{dL_{n-2}^3}{d\rho} - \frac{1}{3\rho^3} \rangle$$

y para el nivel  $2, p$ , en particular,  $K_2$  queda totalmente determinada por la expresión (3.29b).

De acuerdo con los resultados (3.14), (3.21) y (3.29b), se obtiene una separación total entre los niveles  $2s$  y  $2p$  dada en unidades de  $E_n$  por

$$K(2,0) - K(2,1) \approx 1.475 \pi \approx \frac{3}{2} \pi$$

Comparando con el valor conocido del efecto Lamb, que corresponde a (Bethe y Salpeter, 1957)

$$K(2,0) - K(2,1) \approx \frac{5}{2} \pi,$$

vemos que hemos obtenido aproximadamente un 60% del efecto total. Este resultado parece razonable, si se considera que ha sido obtenido mediante un tratamiento no relativista del electrón, sin tomar en cuenta el espín.

Cabe hacer notar que la dependencia paramétrica de la corrección (ver 3.13) coincide con la que se obtiene de la electrodinámica cuántica. En el Capítulo IV se obtiene una contribución adicional al efecto Lamb debido a la estructura de la partícula, que acerca más el resultado dado por la teoría al valor experimental.



## CAPITULO IV

### MOMENTO MAGNETICO ANOMALO

#### Introducción.

En este Capítulo se introducen los términos de autoacción del electrón en la teoría estocástica formulada para partículas con espín (de la Peña, 1970a, 1971b). Esta formulación está construída a partir del modelo de un cuerpo rígido girando, el cual ha sido utilizado por diversos autores desde el mismo descubrimiento del espín. Uhlenbeck y Goudsmit (1925) proponen la "rotación intrínseca" del electrón, con objeto de eliminar la hipótesis del "esfuerzo no mecánico" en base a la cual Bohr intenta explicar la aparición de dobletes. Posteriormente, Bopp y Haag (1950) retornan al modelo de cuerpo rígido y demuestran que su rotación puede ser descrita por eigenfunciones regulares cuyos eigenvalores pueden ser enteros o semienteros, y que los operadores asociados pueden ser expresados como operadores diferenciales en términos de los ángulos de Euler; el mismo punto de vista es utilizado repetidamente por diversos autores, como por ejemplo, Rosen (1951), Bohm et al. (1955), Sparzani (1966), etc. Incluso, basándose en los trabajos de Bopp y Haag, Dankel (1969) introduce nuevos grados de libertad aso-

ciados a la rotación de un cuerpo rígido, para incorporar el espín del electrón en la teoría estocástica de Nelson (1966, 1967).

Ciertamente, la adopción de un modelo de este tipo presenta una serie de problemas debido al orden de magnitud de algunos de los parámetros que intervienen en su descripción; basta observar, junto con Uhlenbeck y Goudsmit, que la velocidad tangencial máxima en la superficie de un electrón que gira tendría que ser comparable con o mayor que la velocidad de la luz, si se adoptara el radio clásico como radio de distribución de la masa. Esta clase de objeciones ha estimulado la construcción de teorías formales y abstractas, basadas en la supuesta imposibilidad de establecer un análogo clásico del espín. Con las teorías de cuerpos rígido es posible, sin embargo, obtener conclusiones satisfactorias, al menos en la aproximación no relativista, siempre y cuando se le permita al electrón adquirir dimensiones apropiadas, que, en general, serían del orden de la longitud de onda de Compton. De hecho, el radio efectivo que se le asigna al electrón debido a la *Zitterbewegung* (ver, p.ej., Sakurai, 1967) es de este orden de magnitud. Está claro que el aceptar esta posibilidad implica a la vez que el modelo es una representación más o menos burda de la situación real, pues una descripción correcta tendría que ser relativista. Esto mismo ha inducido a multitud de autores a extender el modelo al caso relativista, estimulados por problemas como el que aquí se discute (ver, p. ej., Schulman, 1970), o incluso en situaciones más generales, para utilizarlo

como un modelo de partículas elementales con estructura (ver, p. ej., Hara y Gotō, 1968). Desgraciadamente, "la" generalización relativista del concepto clásico de cuerpo rígido no es ni trivial, ni única, por lo que este complejo terreno pertenece aún al campo de investigación, y las conclusiones finales están pendientes de ser obtenidas. Una bibliografía amplia sobre este tipo de problemas puede encontrarse en el libro de Corben (1968). Afortunadamente, lo que tiene relevancia en nuestro problema específico es esencialmente la existencia de estructura, es decir, de distribuciones de carga y masa no puntuales; esto nos permite considerar al modelo no relativista como una aproximación satisfactoria, de acuerdo con resultados previos, como los ya mencionados (Bopp y Haag, 1950; Rosen, 1951; Dankel, 1969; de la Peña, 1970a, 1971b).

#### Introducción de los términos de autoacción.

En la electrodinámica clásica, los términos de autoacción dominantes para una partícula con estructura se obtienen a partir de los primeros términos en el desarrollo de Liénard-Wiechert (Ivanenko y Sokolov, 1950):

$$\phi = -\frac{e}{2c^2} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{w}}{R} \quad (4.1a)$$

$$\underline{A} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v}}{R} \quad (4.1b)$$

En estas expresiones,  $\mathbf{v}$  es la velocidad y  $\mathbf{w}$  la aceleración de la carga, y  $|\underline{R}| = |\underline{\rho} - \underline{\rho}'|$  es la distancia entre la carga, situada en  $\underline{\rho}'$ , y el

punto del campo,  $\underline{\rho}$ . El campo total producido en  $\underline{\rho}$  por la distribución de carga se obtiene entonces de

$$\phi(\underline{\rho}) = -\frac{1}{2c^2} \int \frac{\underline{R} \cdot \underline{w}(\underline{\rho}')}{R} \sigma' d\tau' \quad (4.2a)$$

$$\underline{A}(\underline{\rho}) = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{v}(\underline{\rho}')}{R} \sigma' d\tau' \quad (4.2b)$$

donde  $\sigma' = \sigma(\underline{\rho}')$  es la densidad volumétrica de carga.

De acuerdo con la fórmula (3.2), la fuerza total que ejerce el electrón sobre sí mismo en esta aproximación, se obtiene de integrar la expresión

$$\underline{E}_q + \frac{1}{c} \underline{v}_q^t \times \underline{H}_q + \frac{iD}{c} \nabla^2 \underline{A}_q \quad (4.3)$$

sobre la distribución de carga  $\sigma(\underline{\rho})$ , siendo  $\underline{E}_q$ ,  $\underline{H}_q$  los campos estocásticos obtenidos a partir de (4.2), y  $\underline{v}_q^t$  la velocidad total del punto  $\underline{\rho}$ , que puede ser escrita como

$$\underline{v}_q^t(\underline{\rho}) = \underline{v}_q + \underline{\Omega}_q \times \underline{\rho}$$

donde  $\underline{v}_q$  es la velocidad del centro de masa de la partícula, y  $\underline{\Omega}_q = \underline{\omega} - i\eta$  su velocidad de rotación, siendo  $\underline{\omega}$  y  $\eta$  sus componentes sistemática y estocástica, respectivamente (de la Peña, 1970a, 1971b). La acción del electrón sobre sí mismo está dada entonces por

$$\begin{aligned} \underline{f}_q = & \quad (4.4) \\ = & \int \left[ \underline{E}_q(\underline{\rho}) + \frac{1}{c} (\underline{v}_q + \underline{\Omega}_q \times \underline{\rho}) \times \underline{H}_q(\underline{\rho}) + \frac{iD}{c} \nabla^2 \underline{A}_q(\underline{\rho}) \right] \sigma d\tau, \end{aligned}$$

donde, de acuerdo con (4.2) y utilizando el procedimiento previamente descrito para generalizar las expresiones al problema estocástico, se tiene:

$$\underline{E}_q(\rho) = -\nabla\phi_q - \frac{1}{c} \mathcal{D}_q \underline{A}_q \quad (4.5a)$$

$$\underline{H}_q(\rho) = \nabla \times \underline{A}_q \quad (4.5b)$$

$$\phi_q(\rho) = -\frac{1}{2c^2} \int \frac{\underline{R} \cdot \underline{w}_q(\rho')}{R} \sigma' d\tau' \quad (4.5c)$$

$$\underline{A}_q(\rho) = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{v}_q(\rho')}{R} \sigma' d\tau' . \quad (4.5d)$$

En (4.5a) y (4.5b), la derivación debe efectuarse respecto de  $\underline{\rho}$ ; por consiguiente, es necesario escribir las funciones a derivar en términos de esta coordenada. Omitiendo todos los términos que contengan potencias de  $\underline{\Omega}_q$  mayores que la primera, podemos escribir

$$\underline{v}_q(\rho') = \underline{v}_q(\rho) - \underline{\Omega}_q \times \underline{R} ,$$

$$\underline{w}_q(\rho') = \underline{w}_q(\rho) .$$

Derivando respecto de  $\underline{\rho}$  y desarrollando posteriormente en serie de Taylor en torno al centro de masa, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\nabla \times \frac{\underline{v}_q(\rho')}{R} = \frac{\nabla \times \underline{v}_q}{R} + \frac{\underline{\rho} \cdot \nabla (\nabla \times \underline{v}_q)}{R} - \frac{\underline{R} \times \underline{v}_q}{R^3} - \frac{\underline{R} \times (\underline{\rho} \cdot \nabla \underline{v}_q)}{R^3} -$$

$$- \frac{\nabla \times (\underline{\Omega}_q \times \underline{R})}{R} + \frac{\underline{R} \times (\underline{\Omega}_q \times \underline{R})}{R^3} ;$$

$$\nabla^2 \frac{V_q(\rho)}{R} = \frac{\nabla^2 V_q}{R} + \frac{\rho \cdot \nabla(\nabla^2 V_q)}{R} - \frac{2R \cdot \nabla V_q}{R^3} - \frac{2R_i \rho_j \partial_i \partial_j V_q}{R^3} - \frac{\nabla^2(\Omega_q \times R)}{R^3} + \frac{2R \cdot \nabla(\Omega_q \times R)}{R^3};$$

$$\nabla \frac{R \cdot w_q(\rho)}{R} = \frac{w_q}{R} + \frac{\rho \cdot \nabla w_q}{R} + \frac{R \cdot \nabla w_q}{R} + \frac{R_i \rho_j \partial_i \partial_j w_q}{R} + \frac{R \times (\nabla \times w_q)}{R} + \frac{R \times [\rho \cdot \nabla(\nabla \times w_q)]}{R} - \frac{(R \cdot w_q)R}{R^3} - \frac{R \cdot (\rho \cdot \nabla w_q)R}{R^3}.$$

Substituyendo estos resultados en (4.5), obtenemos las distintas contribuciones a (4.4), todas expresadas como integrales dobles sobre la distribución de carga; por consiguiente, el cálculo de las integrales requiere el conocimiento previo de la función  $\sigma(\rho)$ . Las expresiones se simplifican considerablemente si se supone que la distribución de carga tiene simetría esférica, puesto que en este caso,

$$\begin{aligned} \iint f(R_i) \sigma \sigma' d\tau d\tau' &= \iint f(\rho_i) \sigma \sigma' d\tau d\tau' = 0 \\ \iint R_i R_j f(R^2) \sigma \sigma' d\tau d\tau' &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \iint R^2 f(R^2) \sigma \sigma' d\tau d\tau' \quad (4.6) \\ \iint R_i \rho_j f(R^2) \sigma \sigma' d\tau d\tau' &= \frac{1}{6} \delta_{ij} \iint R^2 f(R^2) \sigma \sigma' d\tau d\tau' \end{aligned}$$

en donde  $f(x)$  representa una función arbitraria de  $x$ .

Escribiendo (4.4) como

$$\underline{f}_q = \underline{f}_e + \underline{f}_m + \underline{f}_s \quad (4.7)$$

y haciendo uso de las expresiones (4.6), obtenemos para las componentes de la fuerza:

$$\begin{aligned} \underline{f}_e &= \int \underline{E}_q(\rho) \sigma(\rho) d\tau = \\ &= -\frac{2}{3c^2} \underline{w}_q \iint \frac{1}{R} \sigma \sigma' d\tau d\tau' + \frac{1}{12c^2} \nabla \nabla \cdot \underline{w}_q \iint R \sigma \sigma' d\tau d\tau' \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_m &= \frac{1}{c} \int (\underline{v}_q + \underline{\Omega}_q \times \underline{\rho}) \times \underline{H}_q(\rho) \sigma(\rho) d\tau = \\ &= \left( \frac{5}{6c^2} \underline{v}_q \times \nabla \times \underline{v}_q + \frac{1}{2c^2} \underline{v}_q \times \underline{\Omega}_q \right) \iint \frac{1}{R} \sigma \sigma' d\tau d\tau' + \frac{1}{3c^2} \nabla (\underline{\Omega}_q \cdot \nabla \times \underline{v}_q) \iint \frac{\rho^2}{R} \sigma \sigma' d\tau d\tau' \end{aligned} \quad (4.8b)$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_s &= \frac{iD}{c} \int \nabla^2 \underline{A}_q(\rho) \sigma(\rho) d\tau = \\ &= \frac{2}{3} \frac{iD}{c^2} \nabla^2 \underline{v}_q \iint \frac{1}{R} \sigma \sigma' d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (4.8c)$$

Proponemos definir tres parámetros  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  mediante las integrales que aparecen en (4.8), en la siguiente forma:

$$\frac{e^2}{\alpha_0} \equiv \iint \frac{1}{R} \sigma \sigma' d\tau d\tau' \quad (4.9a)$$

$$e^2 \alpha_1 \equiv \iint R \sigma \sigma' d\tau d\tau' \quad (4.9b)$$

$$\frac{3}{2} \frac{q e^2 I}{m a_2} \equiv \iint \frac{\rho^2}{R} \sigma \sigma' d\tau d\tau'. \quad (4.9c)$$

La última de estas expresiones ha sido escrita tomando en cuenta la definición de la relación giromagnética  $q$  (de la Peña, 1971b):

$$\frac{3}{2} \frac{qe^2 I}{m} = \iint \rho^2 \epsilon \epsilon' d\tau d\tau'$$

donde  $I$  es el momento de inercia del electrón,

Introduciendo (4.9) en (4.8), obtenemos la siguiente forma explícita para (4.7), válida a primer orden en las correcciones de estructura:

$$\begin{aligned} \underline{f}_q = \alpha \lambda \left\{ \frac{3}{2a_0} \underline{f}_q^{\circ} + \frac{1}{6a_0} \left[ \frac{5}{2} \nabla(mv_q^2) - iD \nabla^2(mv_q) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a_0} m v_q \times \underline{\Omega}_q - \frac{q}{2a_2} \nabla [\underline{s}_q \cdot (\nabla \times v_q)] + \frac{a_1}{12} \nabla \nabla \cdot \underline{f}_q^{\circ} \right\}, \quad (4.10) \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  es la constante de estructura fina,  $\lambda = \hbar/mc$ ,  $\underline{s}_q = I \underline{\Omega}_q$  y  $\underline{f}_q^{\circ}$  es la fuerza externa. Conviene aquí introducir un conjunto de nuevas definiciones, en términos de parámetros adimensionales:

$$\epsilon_0 = \frac{\lambda}{a_0}; \quad \epsilon_1 = \frac{a_1}{\lambda}; \quad \epsilon_2 = \frac{\lambda}{a_2}. \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.10) en la ecuación de movimiento (2.3), y utilizando (4.11), obtenemos la ecuación que permite calcular las correcciones al movimiento del electrón con estructura debidas a la autoacción a primer orden:

$$\begin{aligned} m \underline{D}_q v_q = \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \epsilon_0\right) \underline{f}_q^{\circ} + \alpha \left\{ \frac{\epsilon_0}{2} m v_q \times \underline{\Omega}_q + \frac{\epsilon_1}{12} \lambda^2 \nabla \nabla \cdot \underline{f}_q^{\circ} + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_2}{6} \left[ \frac{5}{2} \nabla(mv_q^2) - iD \nabla^2(mv_q) \right] - \frac{\epsilon_2 q}{2} \nabla (\underline{s}_q \cdot \nabla \times v_q) \right\}. \quad (4.12) \end{aligned}$$



El factor que multiplica a la fuerza externa puede ser absorbido mediante una redefinición de la masa. En efecto, definiendo la masa a primer orden como:

$$m_r = \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \epsilon_0\right) m = m + \delta m, \quad (4.13)$$

obtenemos de (4.12) una ecuación de movimiento en términos de la nueva masa  $m_r$ , que incluye todos los términos de autoacción a primer orden, salvo el que da lugar a la corrección de la masa. Puesto que en los desarrollos subsecuentes interviene exclusivamente el parámetro  $m_r$ , podemos omitir el subíndice y entender por  $m$  la masa renormalizada.

#### Integración de la ecuación de movimiento.

Con objeto de derivar los efectos de los términos adicionales de autoacción, conviene estudiar el problema del electrón en un átomo hidrogenoide sujeto a un campo magnético externo  $\underline{H}$ . La fuerza externa está dada en este caso por (de la Peña, 1971b):

$$\underline{f}_q^{\circ} = e \left( \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v}_q \times \underline{H} + \frac{iD}{c} \nabla^2 \underline{A} \right) + \frac{qe}{2mc} \nabla (\underline{s}_q \cdot \underline{H}) \quad (4.14)$$

donde se han omitido las correcciones de orden superior que dependen de la estructura de la partícula y pueden ser consideradas como el análogo no relativista del término de Darwin.

La ecuación de Schrödinger con acoplamiento electromagnético se obtiene integrando la correspondiente ecuación de movimiento, median

te el cambio de función:

$$\underline{v}_q = -2iD\nabla w - \frac{e}{mc} \underline{A} ; \quad \nabla \cdot \underline{A} = 0$$

en analogía con el problema potencial (de la Peña y Cetto, 1969a, 1969b). En forma similar, proponemos integrar la Ec. (4.12) con ayuda del cambio de función

$$\underline{v}_q = -2iD\nabla w - \frac{e}{mc} (\underline{A} + \alpha \epsilon_0 \underline{B}_q) \quad (4.15a)$$

siendo  $\underline{B}_q$  tal que

$$\frac{2e}{mc} \nabla \times \underline{B}_q = \underline{\Omega}_q ; \quad \nabla \cdot \underline{B}_q = 0. \quad (4.15b)$$

Ya desde la derivación de las fórmulas (4.8) hemos supuesto por simplicidad, que  $\underline{\Omega}_q$  es independiente de las coordenadas del centro de masa de la partícula, lo cual equivale a suponer que el movimiento de rotación de la partícula en torno a su eje es esencialmente independiente de su movimiento de traslación. En este caso,  $\underline{\Omega}_q$  puede ser expresada como un rotacional, tal como se propone en (4.15b), lo cual nos permite tratar a  $\underline{B}_q$  en forma paralela a  $\underline{A}$  durante la integración.

Substituyendo (4.14) en la ecuación (4.12) modificada por la redefinición de la masa, y efectuando el cambio de variable propuesto en (4.15a), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \left\{ -i\hbar \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \nabla w - \frac{e}{c} (\underline{A} + \alpha \epsilon_0 \underline{B}_q) \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{\hbar^2}{2m} \left( 1 - \frac{\alpha \epsilon_0}{6} \right) \nabla^2 w + V + \frac{\alpha \epsilon_1}{12} \chi^2 \nabla^2 V - \right. \\ \left. - \frac{5}{12} \alpha \epsilon_0 m v_q^2 - \frac{g e}{2mc} (1 + \alpha \epsilon_2) \underline{S}_q \cdot \underline{H} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En términos de la nueva función  $\psi = e^w$ , la integral de (4.16) toma la forma

$$- \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} (\underline{A} + \alpha \epsilon_0 \underline{B}_q) \right]^2 \psi + (V + \delta V - \underline{\mu} \cdot \underline{H}) \psi \quad (4.17a)$$

con

$$\delta V = \frac{\alpha \epsilon_1}{12} \chi^2 \nabla^2 V + \alpha \epsilon_0 \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 w - \frac{5}{12} \alpha \epsilon_0 m v_q^2, \quad (4.17b)$$

y

$$\underline{\mu} = (1 + \alpha \epsilon_2) \underline{\mu}_0; \quad \underline{\mu}_0 = \frac{g e}{2mc} \underline{S}_q. \quad (4.17c)$$

De acuerdo con (4.13) y (4.17), los efectos de la autoacción del electrón con estructura a primer orden que hemos obtenido, son:

- a) La aparición de una corrección a la masa, cuyo valor está dado por (4.13), es decir, de orden  $\alpha \epsilon_0$ .
- b) La aparición del momento magnético anómalo, cuyo valor está determinado según (4.17c) por  $\mu_a / \mu_0 = \alpha \epsilon_2$ .

c) Una corrección al potencial, que de acuerdo con (4.17b) produce un corrimiento de los niveles de energía dado por

$$\delta E = \frac{\alpha \epsilon_1}{12} \chi^2 \langle \nabla^2 V \rangle \quad (4.18)$$

d) Correcciones adicionales a la energía cinética, obtenidas de los términos restantes de (4.17b), y una corrección de orden  $\alpha \epsilon_0$  al potencial vectorial

A (véase 4.17a), que surge como consecuencia del espín del electrón.

#### Discusión sobre los parámetros $\epsilon_0$ , $\epsilon_1$ , $\epsilon_2$ .

Como puede verse de (4.9) y (4.11), los valores de los parámetros  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  dependen fuertemente de la forma de la distribución de carga del electrón, por lo que no pueden hacerse más que algunas afirmaciones de carácter general sobre su valor, mientras no se tenga un conocimiento mayor de las propiedades de la estructura electromagnética del electrón.

De la definición de la relación giromagnética  $g$ , utilizada en (4.9c), y definiendo un radio medio mecánico  $a$  en términos del momento de inercia de una esfera con distribución uniforme de masa,  $I = (2/5) m a^2$ , obtenemos la siguiente relación:

$$\iint \rho^2 \sigma \sigma' d\tau d\tau' = \frac{3}{5} g e^2 a^2. \quad (4.19)$$

Por consiguiente, si utilizamos la expresión

$$\iint \rho^2 \sigma \sigma' d\tau d\tau' = e^2 b^2 \quad (4.20)$$

para definir el radio medio eléctrico, vemos que éste es del mismo orden de magnitud como el radio medio mecánico, si  $q$  es del orden de la unidad. Para cualquier función  $\sigma(\rho)$  matemáticamente deciente, es de esperarse entonces que los parámetros  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  definidos en (4.9) sean de un orden de magnitud similar, aunque el valor numérico e incluso el signo dependen de la forma específica de  $\sigma(\rho)$ . Si, de acuerdo con los argumentos presentados al inicio de este capítulo y aducidos por varios autores,  $\alpha$  debe ser considerada de orden  $\lambda$ , y por lo demás  $q = 2$ , es de esperarse que los parámetros  $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$  introducidos en (4.11) sean del orden de la unidad, o, mejor aún, que no se aparten excesivamente de este valor.

Cabe mencionar aquí que las  $\epsilon_i$  tienen distinto comportamiento en el límite puntual. Cuando las dimensiones de la partícula tienden a cero,  $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ , y por consiguiente, la corrección a la masa se vuelve infinita, al igual que las correcciones a la energía cinética y al potencial vectorial, si se supone  $\underline{\Omega}_q \neq 0$  aún en el límite puntual - lo cual, por cierto, no dejaría de presentar dificultades conceptuales. Por otra parte,  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  en este límite, desapareciendo así la corrección al potencial dada por (4.18). Por último, también  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ , dando lugar a un momento magnético anómalo infinito si se supone que  $\underline{\Omega}_q \neq 0$  aún en el límite puntual.

En la electrodinámica cuántica infinitos similares a estos, obtenidos en el límite de partícula puntual, son eliminados mediante el procedi

miento de renormalización de las constantes de acoplamiento y de las masas; en nuestro tratamiento, podemos considerar que renormalizar implica asignarle un valor finito a  $\delta m$ , o de acuerdo con (4.13), a  $\epsilon_0$ , lo cual equivale a dotar a la partícula de estructura. De acuerdo con las consideraciones anteriores sobre la extensión de la partícula, parece sensato estimar el valor de los resultados proponiendo que  $\epsilon_0 \sim 1$ , por consiguiente,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2 \sim 1$ . Dicho en otras palabras, si la corrección a la masa dada por (4.13) es de orden  $\alpha$ , la corrección al momento magnético es también de orden  $\alpha$ , y la corrección al potencial dada por (4.18) es

$$\delta E \sim \frac{\alpha \chi^2}{12} \langle \nabla^2 V \rangle = \frac{1}{4} D\tau \langle \nabla^2 V \rangle. \quad (4.21)$$

Nótese que, en tanto que el momento magnético anómalo está vinculado a la existencia de espín, los demás términos aquí mencionados se deben exclusivamente a la extensión finita del electrón,

La corrección dada por (4.21) tiene la misma estructura como el término fundamental del efecto Lamb obtenido en el Capítulo III (ver 3.13a); si el parámetro  $\epsilon_1$  es efectivamente del orden de la unidad, esto significa que hemos obtenido una contribución adicional al efecto Lamb debida a la estructura eléctrica del electrón, cuyo valor es de orden  $\sim 1/6$  del valor dado por (3.13a), con lo cual el resultado predicho por la teoría se acerca más al valor experimental, como se señalara previamente.

Vemos en esta forma que, aunque la teoría no relativista no

puede proporcionarnos resultados numéricos finales, arroja, sin embargo, valores consistentes para las tres correcciones que predice: renormalización de la masa, momento magnético anómalo y componente estructural del efecto Lamb, todas ellas de orden  $\alpha$ ; muestra además, en forma simple, la dependencia de estos efectos de la estructura eléctrica del electrón, el cual necesariamente deja de ser puntual.

Deseamos finalizar con algunas observaciones generales sobre  $\epsilon_2$ . Se ha visto que los valores numéricos de  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  dependen fuertemente de la distribución de carga  $\sigma(\rho)$ . Planteando el problema en el sentido inverso, podemos decir que condiciones sobre las  $\epsilon_i$  imponen, a su vez, ciertas restricciones sobre  $\sigma(\rho)$ . En particular, como se puede observar de (4.9c) y (4.11), la condición  $\epsilon_2 > 0$ , que se ha impuesto para obtener correctamente el momento magnético anómalo, implica que  $\sigma(\rho)$  debe tener al menos un cambio de signo. Por otra parte, existen restricciones adicionales, tales como la que impone el hecho de que la integral que se ha utilizado para definir el radio medio de carga, (4.20), debe ser positiva. Un estudio detallado de las funciones  $\sigma(\rho)$  que satisfacen los requisitos mencionados podría arrojar cierta información general sobre la distribución de carga en el electrón. Por ejemplo, de un análisis de las funciones más simples que cumplen con estas condiciones, se deduce que una fracción importante de la carga debe estar concentrada alrededor del origen; sin embargo, parece prematuro tratar de obtener conclusiones más definitivas al respecto en base a los datos obtenidos hasta ahora.

## BIBLIOGRAFIA

- Aron, J. (1935). *Progr. Theoret. Phys.* 33, 726
- (1969). *Progr. Theoret. Phys.* 42, 715
- Ballentine, L. (1970). *Rev. Mod. Phys.* 42, 358
- Bartlett, M. y Moyal, J. (1949). *Proc. Camb.Phil. Soc.* 45, 545
- Bell, J. (1966). *Rev. Mod. Phys.* 38, 447
- Bethe, H. y Salpeter, E. (1957). *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Systems*. *Handbuch der Physik Tomo XXXV*, Springer Verlag, Berlin
- Blokhintsev, D. (1968). *Principes Essentiels de la Mécanique Quantique*. Dunod, Paris
- Bohm, D. (1952). *Phys. Rev.* 85, 166, 180
- (1953). *Phys. Rev.* 89, 458
- y Vigier, J.P. (1954). *Phys. Rev.* 96, 208
- Schiller, R. y Tiomno, J. (1955). *Suppl. Nuovo Cimento* 1, 48, 67
- (1957). *Causality and Chance in Modern Physics*. Van Nostrand Co., N.Y.
- y Bub, J. (1966). *Rev. Mod. Phys.* 38, 453



Bopp, F. y Haag, R. (1950). Z. Naturforsch, 5a, 644

Boyer, T. (1968). Phys. Rev. 174, 1631

-- (1969a). Phys. Rev. 182, 1374

-- (1969b). Phys. Rev. 186, 1304

-- (1970a). Phys. Rev. D1, 1525

-- (1970b). Univ. of Maryland report no. 70-070

Bunge, M. (1967). Quantum Theory and Reality, vol.II (editor).

Springer Verlag, Berlin

Casimir, H. (1948). Proc.Nederl.Akad.Wetensch.51, 793. Un resumen de este artículo puede encontrarse en Boyer (1968)

Chandrasekhar, S. (1943). Rev. Mod. Phys.15, 1. Reimpreso en Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, ed. N. Wax.

Dover Publ. Inc., N.Y., 1954

Corben, H. (1968). Classical and Quantum Theories of Spinning Particles. Holden-Day Inc., San Francisco, Cal.

Dankel, T. (1969). Tesis doctoral, Princeton University, N.J.

Dirac, P.A.M. (1927). Proc. Roy. Soc. London A114, 243. Reimpreso en Quantum Electrodynamics, ed. J. Schwinger, Dover Publ. Inc., N.Y., 1968.

Einstein, A. (1905). On the Movements of Small Particles, en Investigations on the Theory of Brownian Movement, ed. R. Fürth. Dover Publ. Inc., N.Y., 1956. Original en alemán en Ann. Phys. 17, 549

- Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N. (1935). *Phys. Rev.* 47, 777
- Fényes, I. (1952). *Zeit.f.Phys.* 132, 81
- Feyerabend, P. (1956). *Zeit.f.Phys.* 145, 421
- Feynman, R. (1948). *Rev.Mod.Phys.* 20, 267
- (1962). *Quantum Electrodynamics*. Benjamin Inc., N.Y.
- Fürth, R. (1933). *Zeit.f.Phys.* 81, 143
- Garczyński, W. (1959). *Acta Phys. Austr.*, Suppl. VI, 501; *Acta Phys. Pol.* 35A, 479
- (1970). *Acta Phys. Pol.* 38A, 61
- Gilson, J. (1958). *Proc. Camb.Phil. Soc.* 64, 1061
- (1969a). *Ann. Inst. Henri Poincaré* 11, 239
- (1969b). *Zeit.f. Naturforsch.* 24a, 198
- Guth, E. (1959). *Brownian Motion and Indeterminacy Relations*, en *Stochastic Processes in Chemical Physics*, ed. K. Shuler. John Wiley Interscience, N.Y.
- Hara, O. y Gotō, T. (1968). *Suppl.Progr.Theoret.Phys.* 41, 56
- Harvey, R.(1966). *Phys. Rev.* 152, 1115
- Heisenberg, W. (1927). *Zeit.f.Phys.* 43, 172
- (1930). *The Physical Principles of the Quantum Theory*. Dover Publ. Inc. N.Y.
- Henley, E. y Thirring, W. (1962). *Elementary Quantum Field Theory*. McGraw-Hill Co., N.Y.

- Ivanenko, D. y Sokolov, A. (1950). *Klassicheskaya Teoriya Polya*.  
GITTL, Moscú
- Jammer, M. (1966). *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*.  
McGraw-Hill Co., N.Y.
- Jánosy, L. y Ziegler, M. (1963). *Acta Phys. Hung.* 16, 37
- y Ziegler, M. (1966). *Acta Phys. Hung.* 20, 233
- (1969). *Acta Phys. Hung.* 27, 35
- Jáuregui, A. (1971). Tesis profesional, UNAM
- Kershaw, D. (1964). *Phys. Rev.* 136, B1850
- Krizan, J. (1968). *Phys. Rev.* 165, 1725
- Landau, L. y Lifshitz, E. (1951). *The Classical Theory of Fields*.  
Addison-Wesley Inc., Cambridge, Mass
- Lifshitz, E. (1955). *JETP (URSS)* 29, 94
- Madelung, F. (1926). *Zeit. f. Phys.* 40, 332
- Marshall, T. (1963). *Proc. Roy. Soc. London* A276, 475
- Moyal, J. (1949). *Proc. Camb. Phil. Soc.* 45, 99
- Nelson, E. (1966). *Phys. Rev.* 150, 1079
- (1967). *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University  
Press, N.J.
- von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*.  
Springer Verlag, Berlin
- Pauli, W. (1955). *Niels Bohr and the Development of Physics* (editor).  
McGraw-Hill Co., N.Y.

- de la Peña, L. (1967a). Phys. Letters 24A, 603
- , y García-Colín, L. (1967b). Rev. Mex. Fís. 16, 221
- y Cetto, A.M. (1967c). Preprint UNAM, no publicado
- , Braun, E. y García-Colín, L. (1968a). Jour. Math. Phys. 9, 668
- y García-Colín, L. (1968b). Jour. Math. Phys. 9, 916, 922
- (1968c). Phys. Letters 27A, 594
- y Cetto, A.M. (1968d). Rev. Mex. Fís. 17, 327
- y Cetto, A.M. (1969a). Rev. Mex. Fís. 18, 253
- y Cetto, A.M. (1969b). Phys. Letters 29A, 562
- (1969c). Jour. Math. Phys. 10, 1620
- y Cetto, A.M. (1969d). Rev. Mex. Fís. 18, 323
- y Velasco, R.M. (1969e). Rev. Mex. Fís. 18, 397
- (1970a). Phys. Letters 31A, 403
- (1970b). Rev. Mex. Fís. 19, 133
- , Velasco, R.M. y Cetto, A.M. (1970c). Rev. Mex. Fís. 19, 193
- y Cetto, A.M. (1971a). Phys. Rev. D15, 3, 795 (1971)
- (1971b). Jour. Math. Phys. 11,
- Popper, K. (1967). Quantum Mechanics Without "the Observer", en  
Quantum Theory and Reality, vol. II, ed. M. Bunge. Springer Verlag, Berlin
- Prabhu, N. (1965). Stochastic Processes, Basic Theory and its Applications.  
Macmillan Co., N.Y.
- Rosen, N. (1951). Phys. Rev. 82, 621
- Rosenfeld, L. (1955). On Quantum Electrodynamics, en Niels Bohr and the

- Development of Physics, ed. W. Pauli. McGraw-Hill Co., N.Y.
- Sakurai, J. (1967). Advanced Quantum Mechanics. Addison-Wesley Inc.,  
Reading, Mass
- Santos, E. (1968). An. Real Soc. Esp. Fís. Quím. 64, 317
- (1969). Nuovo Cimento 59B, 65
- Schulman, L. (1970). Nuclear Phys. B18, 595
- van Silfhout, A. (1966). Dispersion Forces Between Macroscopic Objects.  
Drukkerij Holland N.V., Amsterdam
- Sokolov, A. y Tumanov, V. (1956). JETP (URSS) 30, 802
- Sparzani, A. (1966). Suppl. Nuovo Cimento 4, 231
- Surdin, M. (1970). C.R. Acad. Sci. Paris 270, 193
- Takabayasi, T. (1952). Progr. Theoret. Phys. 8, 143
- (1953). Progr. Theoret. Phys. 9, 187
- Uhlenbeck, G. y Goudsmit, S. (1925). Naturwiss. 13, 953
- y Ornstein, L. (1930). Phys. Rev. 36, 823. Reimpreso en Selected  
Papers on Noise and Stochastic Processes, ed. N. Wax. Dover Publ.  
Inc., N.Y., 1954
- Weizel W. (1953). Zeit.f. Phys. 134, 264; 135, 270
- (1954). Zeit.f. Phys. 136, 582
- Wilhelm, H. (1970). Phys. Rev. D1, 2278