UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL TEOREMA DE ISOMORFISMO DE EISENBAUM"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

ANA CAROLINA CRUZ AGUILAR

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE, 2009

Agradecimientos

A la Dra. María Emilia Caballero por la dirección de esta tesis y su constante motivación.

Al Dr. Pedro Miramontes por su orientación académica durante todo el programa de estudios.

A la coordinación del Posgrado en Ciencias Matemáticas por su ayuda y paciencia.

A la Facultad de Ciencias, el Instituto de Matemáticas y el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas por los recursos facilitados.

Al CONACYT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

A la UNAM por ser un espacio para el desarrollo de la ciencia y la tecnología en México.

A mi familia

Índice general

Prefacio

El concepto de tiempo local fue introducido por P. Lévy en el contexto de estudio de las propiedades del movimiento browniano que culminaron con la publicación de su libro "*Processus stochastiques et mouvement brownien*"(1948). En cierta manera, el tiempo local mide el tiempo que un proceso estocástico ha pasado en un nivel y hasta un tiempo t, y su estudio puede realizarse al menos desde tres perspectivas [9]: la del cálculo estocástico, la de funcionales aditivos y la de teoría de excursiones. En este documento trabajaremos los dos primeros enfoques.

Si bien los tiempos locales se han usado para demostrar resultados que establecen condiciones necesarias para obtener unicidad trayectorial de la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas unidimensionales (por ejemplo, el teorema deYamada-Watanabe demostrado por Le Gall en [13] volumen 2, página 265) e incluso para aplicaciones en finanzas ([8], [7]), en las páginas subsecuentes nos enfocamos en el estudio, a través de teoremas de isomorfismo, de la relación entre los tiempos locales de una clase de procesos de Markov, llamados procesos de Borel por la derecha fuertemente simétricos, y una familia especial de procesos gaussianos que se conocen como procesos gaussianos asociados.

Para el movimiento browniano estos teoremas de isomorfismo, obtenidos de manera independiente por Ray y Knight (1963,1969) son clásicos, y es a Dynkin (1983) a quien se debe el primer gran resultado para procesos más generales. Posteriormente, Nathalie Eisenbaum (1995) publica el teorema que aquí presentamos. Este teorema es importante porque es una versión no condicionada del teorema de Dynkin (donde un proceso de Borel fuertemente simétrico y transitorio Y se condiciona a morir la última vez que visita un cierto estado) y ha permitido, junto con el resultado demostrado por Dynkin y el teorema de Ray-Knight generalizado, establecer que los tiempos locales de un proceso de Borel por la derecha fuertemente simétrico, X, y la familia de procesos gaussianos asociados con X, tienen propiedades trayectoriales similares (continuidad, acotamiento, p-variación).

El primer capítulo de esta tesis es una introducción a los tiempos locales para semimartingalas continuas y los principales resultados son la fórmula de Tanaka y la fórmula de densidad de ocupación. El capítulo 2 trata el caso específico del movimiento browniano, ya que es el mejor puente entre lo establecido para semimartingales continuas y lo que se estudia después en el capítulo 3, los procesos de Borel por la derecha. En ése capítulo además introducimos los conceptos de operador de transición y operador potencial (o núcleo potencial si aplicamos la terminología usada por Dellacherie y Meyer en [2] página 223), así como la noción de funcional continuo aditivo. En el capítulo 3 se generaliza el concepto de operador de transición y definimos la medida de referencia. La existencia de esta medida es de vital importancia, ya que nos permitirá hablar de densidades potencial y de procesos simétricos. En el capítulo 4 definimos el tiempo local para procesos de Borel por la derecha, demostramos un teorema de existencia del mismo y establecemos resultados que relacionan los operadores de transición y potencial con los tiempos locales. También definimos los conceptos de recurrencia y transitoriedad para estudiar su relación con la densidad potencial. Finalmente, en el capítulo 5 se definen los procesos gaussianos asociados y se presenta el teorema de isomorfismo de N. Eisenbaum con el llamado primer teorema de Ray-Knight (según [12], capítulo XI sección 2) como ejemplo y caso particular.

Capítulo 1

Tiempos locales de semimartingalas continuas

Con la fórmula de Itô, es posible saber cómo operan las funciones C^2 sobre semimartingalas continuas, mientras que con la noción de tiempo local podemos extender este análisis a las funciones convexas. Denotaremos por $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones habituales:

1. El espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es completo.
2. Las σ-álgebras $\mathcal{G}_t$ contienen todos los conjuntos $\mathbb{P}$-nulos de $\mathcal{G}$.
3. La filtración $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha. Esto es, $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^+} = \cap_{s>t}\mathcal{G}_s$.

Teorema 1 *Si $\{X_t, t \geq 0\}$ es una semimartingala continua sobre Ω con respecto a $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, con valores reales y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces existe un proceso creciente y continuo A_t^f tal que*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^f$$

donde f'_- es la derivada por la izquierda de f.

Demostración. Si f es C^2, entonces el resultado es la fórmula de Itô y

$$A_t^f = \int_0^t f''(X_s)d\left[X, X\right]_s .$$

Sea j una función C^∞ positiva con soporte compacto en $(-\infty, 0]$ tal que $\int_{-\infty}^0 j(y)dy = 1$ y definamos $f_n(x) = n\int_{-\infty}^0 f(x+y)j(ny)dy$. Como la función f es convexa y por lo tanto localmente acotada, se sigue que f_n está bien definida para toda n. Sea $w = ny$, entonces

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^0 f\left(x + \frac{w}{n}\right) j(w)dw \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^0 f(x)\, j(w)dw = f(x)$$

esto es, conforme n tiende a infinito, f_n converge puntualmente a f y f_n' crece a f_-'. Puesto que las funciones f_n son C^∞ (porque son la convolución de j con f y j es C^∞), para cada n se tiene que

$$\begin{aligned} f_n(X_t) &= f_n(X_0) + \int_0^t f_n'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)d\,[X,X]_s \\ &= f_n(X_0) + \int_0^t f_n'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^{f_n} \end{aligned}$$

y $f_n(X_t)$ y $f_n(X_0)$ convergen a $f(X_t)$ y $f(X_0)$, respectivamente. Más aún, si localizamos el proceso con la sucesión de tiempos de paro $(T_n)_{n=0}^\infty$, donde $T_n = \text{ínf}\,\{t : |X_t| \geq n\}$, podemos suponer que X_t es acotada y entonces $f_-'(X_s)$ también es acotada (ya que f_-' existe, es creciente y continua por la izquierda). Por el teorema de la convergencia dominada para integrales estocásticas, $\int_0^t f_n'(X_s)dX_s$ converge a $\int_0^t f_-'(X_s)dX_s$ uniformemente en probabilidad en cada intervalo acotado. En consecuencia, $A_t^{f_n}$ converge a un proceso A_t^f que es creciente al ser límite de procesos crecientes y que puede elegirse continuo c.s. Por lo tanto,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f_-'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^f$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Ahora nos gustaría poder calcular A_t^f de tal manera que sea evidente cómo depende de f. Comenzaremos con los casos especiales $|x|$, $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = -(x \wedge 0)$. Definimos en este caso la función signo como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

y si $f(x) = |x|$, entonces $f_-'(x) = \text{sgn}(x)$.

Definición 2 *El proceso* $L_t^a := \frac{1}{2}A_t^f$ *que se obtiene al tomar la función convexa* $f(x) = |x - a|$ *con* $a \in \mathbb{R}$ *se llama* ***tiempo local de*** $\{X_t, t \geq 0\}$ ***en*** a*.*

Teorema 3 (Fórmula de Tanaka) *Para cualquier* $a \in \mathbb{R}$*,*

$$
\begin{aligned}
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a \\
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{(X_s > a)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{(X_s \leq a)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a
\end{aligned}
$$

Demostración. La derivada por la izquierda de $f(x) = (x - a)^+$ es $f'_-(x) = 1_{(a,\infty)}$. Por el Teorema 1, existe un proceso A^+ tal que

$$
(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{(X_s > a)} dX_s + \frac{1}{2} A_t^+ \tag{1.1}
$$

De manera análoga, la derivada por la izquierda de $f(x) = (x - a)^-$ es $f'_-(x) = -1_{(-\infty,a]}$ y por el mismo teorema, existe A^- tal que

$$
(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{(X_s \leq a)} dX_s + \frac{1}{2} A_t^-. \tag{1.2}
$$

Si restamos la ecuación (1.2) de (1.1) y recordamos que $(X_t - a)^+ - (X_t - a)^- = X_t - a$, obtenemos

$$
X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}\left(A^+ - A^-\right).
$$

Se sigue entonces que $A^+ - A^- = 0$ c.s. Si ahora hacemos la suma de las ecuaciones (1.1) y (1.2),

$$
|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + \frac{1}{2}\left(A^+ + A^-\right)
$$

así que de la definición de tiempo local, $L_t^a = \frac{1}{2}\left(A^+ + A^-\right)$. Por lo tanto, $L_t^a = A^+ = A^-$. ■

La falta de simetría en las dos últimas ecuaciones del enunciado se debe al hecho de que elegimos trabajar con derivadas por la izquierda y es la misma razón la que lleva a la elección de la función signo.

Es claro que con el proceso creciente $\{L_t^a, t \geq 0\}$ podemos asociar una medida aleatoria dL_t^a sobre $\mathbb{R}^+$, esto es, para cada trayectoria de $\{X_t, t \geq 0\}$ la función creciente L_t^a tiene asociada una medida de Lebesgue Stieltjes. En cierta manera, dL_t^a mide el "tiempo"que la semimartingala $\{X_t, t \geq 0\}$ ha pasado en a.

Proposición 4 *La medida dL_t^a tiene soporte contenido en el conjunto $\{t : X_t = a\}$.*

Demostración. Puesto que L_t^a es un proceso de variación finita, el Teorema 3 (fórmula de Tanaka) implica que

$$\begin{aligned}
[|X-a|, |X-a|]_t &= \left[|X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a, |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a\right] \\
&= \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)^2 d\,[X, X]_s \\
&= \int_0^t d\,[X, X]_s = [X, X]_t
\end{aligned}$$

y, por otra parte, también que

$$d\,(|X-a|_t) = \operatorname{sgn}(X_t - a) dX_t + dL_t^a.$$

Si aplicamos la fórmula de Itô a la semimartingala $|X_t - a|$ con $f(x) = x^2$, de lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
(X_t - a)^2 &= (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t |X_s - a|\, d(|X-a|)_s + [|X-a|, |X-a|]_t \\
&= (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + 2\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a + [X, X]_t \\
&= (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\, dX_s + 2\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a + [X, X]_t\,,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de $(X_t - a) = |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a)$. Al comparar la ecuación anterior con la la fórmula de Itô para la semimartingala $(X_t - a)$ y la misma función $f(x) = x^2$,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\, dX_s + [X, X]_t\,,$$

necesariamente se tiene $\int_0^t |X_s - a| \, dL_s^a = 0$. Esto es, $|X_s - a| = 0$ dL_t^a-c.s. (equivalentemente, los intervalos donde $X_t \neq a$ son los de constancia para L_t^a y, por lo tanto, son dL_t^a-nulos). ■

La pregunta natural ahora es si el conjunto $\{t : X_t = a\}$ es exactamente el soporte de dL_t^a. En el caso del movimiento browniano la respuesta es sí ([12] página 241). Sin embargo, el caso general es más complicado.

Puesto que sólo hemos estudiado el proceso de tiempo local L_t^a con la variable espacial a fija, ahora nos interesa analizar cómo depende L_t^a de a. Comenzaremos con el siguiente resultado.

Lema 5 *Existe un proceso $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-medible $\widetilde{L}$ tal que, para cada a, $\widetilde{L}(a, \cdot, \cdot)$ es indistinguible de L_t^a.*

Demostración. Si usamos la fórmula de Tanaka (Teorema 3), observamos que

$$L_t^a = |X_t - a| - |X_0 - a| - \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s.$$

Del teorema de Fubini estocástico (véase el apéndice, Teorema 71) con $A = \mathbb{R}$ y $g(a, \cdot, s) = \operatorname{sgn}(X_s - a)$ se sigue que existe $\widetilde{L}(a, \cdot, \cdot)$ que es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-medible e indistinguible de L_t^a. ■

Como consecuencia de este lema, supondremos que L_t^a es $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-medible. De la medibilidad en la variable espacial a, podremos demostrar más adelante la existencia de una mejor versión.

Teorema 6 (Fórmula de Itô-Tanaka o fórmula generalizada de Itô) *Si f es la diferencia de dos funciones convexas entonces*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da).$$

Demostración. Si se usa una sucesión localizadora de tiempos de paro, podemos suponer que

1. X es acotado, digamos por K.

2. f es lineal en el exterior de $[-K, K]$ y definimos

$$g(x)=\begin{cases} f(-K)+(x+K)f'_-(-K) & \text{si } x<-K \\ f(x) & \text{si } |x|\le K \\ f(K)+(x-K)f'_-(K) & \text{si } x>K \end{cases}$$

de tal manera que f'', en el sentido de distribuciones, tiene soporte en $(-K,K)$, por lo que es una medida con signo de variación finita.

3. Si restamos a f la función

$$h(x)=f(-K)+(x+K)f'_-(-K),$$

podemos suponer que $f(x)=0$ para toda $x\le -K$.

Si recordamos que f'' es una medida positiva tal que $f''([\alpha,\beta))=f'_-(\beta)-f'_-(\alpha)$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-K)+\int_{-K}^{x} f'_-(y)dy \\ &= 0+\int_{-K}^{x}\left\{f'_-(-K)+f''([-K,y))\right\}dy \\ &= \int_{-K}^{x}\left(\int f''(da)1_{[-K,y)}(a)\right)dy \\ &= \int f''(da)\left(\int_{-K}^{x} 1_{(a,\infty)}(y)dy\right) \\ &= \int f''(da)\,(x-a)^+ . \end{aligned}$$

De la segunda igualdad del teorema 3 (Fórmula de Tanaka) y del teorema de Fubini estocástico (Teorema 71),

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \int f''(da)\,(X_0-a)^+ + \int f''(da)\left(\int_0^t 1_{(a,\infty)}(X_s)dX_s+\frac{1}{2}L_t^a(X)\right) \\ &= f(X_0)+\int_0^t\left(\int f''(da)1_{(a,\infty)}(X_s)\right)dX_s+\frac{1}{2}\int f''(da)L_t^a(X) \\ &= f(X_0)+\int_0^t f''((-\infty,X_s))dX_s+\frac{1}{2}\int f''(da)L_t^a(X) \\ &= f(X_0)+\int_0^t f'_-(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int f''(da)L_t^a(X) \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Corolario 7 (Fórmula de densidad de ocupación) *Existe un conjunto $\mathbb{P}$-nulo fuera del cual*

$$\int_0^t \varphi(X_s)d\,[X,X]_s = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(a)L_t^a da$$

para toda $t \geq 0$ y toda función φ Borel medible y acotada.

Demostración. Si φ es continua de soporte compacto, entonces existe $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi = f''$ y se satisfacen las fórmulas de Itô y de Itô-Tanaka

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(X_s)d\,[X,X]_s \\ f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(a)L_t^a da. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t \varphi(X_s)d\,[X,X]_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)L_t^a da \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Es decir, la igualdad se satisface fuera de un conjunto $\mathbb{P}$-nulo que denotaremos Γ_φ. Por otra parte, se sabe que el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto, $C_c(\mathbb{R})$, es denso en $C_0(\mathbb{R})$ (el espacio de las funciones continuas que se anulan en infinito) bajo la topología de convergencia uniforme. Sean $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ y $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_c(\mathbb{R})$ tales que $\varphi_n \xrightarrow{u} \varphi$. Sabemos que para cada φ_n existe Γ_{φ_n}, $\mathbb{P}$-nulo, fuera del cual

$$\int_0^t \varphi_n(X_s)d\,[X,X]_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(a)L_t^a da. \tag{1.3}$$

Definimos $\Gamma = \cup_n \Gamma_{\varphi_n}$. Claramente, Γ es $\mathbb{P}$-nulo y fuera de él se satisface (1.3) para toda n. Como la integral de Riemann $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(a)L_t^a da$ existe (pues φ_n es continua de soporte compacto y L_t^a es creciente y continuo), de la convergencia uniforme de φ_n se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(a)L_t^a da &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(a)L_t^a da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)L_t^a da. \end{aligned}$$

Además, $[X,X]_s$ es de variación finita (por ser creciente y continuo) en el soporte de φ_n, lo que implica que la integral $\int_0^t \varphi_n(X_s)d[X,X]_s$ existe y nuevamente de la convergencia uniforme de φ_n se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^t \varphi_n(X_s)d[X,X]_s &= \int_0^t \lim_{n\to\infty}\varphi_n(X_s)d[X,X]_s \\ &= \int_0^t \varphi(X_s)d[X,X]_s .\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t \varphi(X_s)d[X,X]_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \varphi_n(X_s)d[X,X]_s = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(a)L_t^a da = \int_{\mathbb{R}}\varphi(a)L_t^a da.$$

Si aplicamos el teorema de las clases monótonas (apéndice Teorema 70 con $K = C_0(\mathbb{R})$ y H el espacio vectorial de las funciones que satisfacen la fórmula de densidad de ocupación fuera de un conjunto $\mathbb{P}$-nulo), el resultado se extiende a todas la funciones Borel medibles y acotadas. ■

El nombre de la fórmula en inglés, *occupation times formula* o fórmula de tiempos de ocupación, es particularmente preciso en el caso del movimiento browniano, ya que si $\varphi = 1_A$ para algún conjunto de Borel A, el lado izquierdo es exactamente el tiempo que el proceso ha pasado en A.

Por otra parte, una consecuencia de estas fórmulas es que para funciones dos veces diferenciables, pero no necesariamente C^2, la fórmula de Itô sigue siendo válida en la misma forma siempre y cuando f'' sea localmente integrable.

Ahora volvemos a la construcción de una versión regular del tiempo local con la que trabajaremos en adelante.

Teorema 8 *Para cualquier semimartingala continua $\{X_t, t \geq 0\}$, existe una modificación c.s. continua en t y c.à.d.l.à.g. en a del proceso $\{L_t^a, a \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$. Más aún, si $X = M + V$, donde $\{M_t, t \geq 0\}$ es martingala local continua y $\{V_t, t \geq 0\}$ es proceso continuo adaptado de variación finita, y $L_t^{a-} = \lim_{b\uparrow a} L_t^b$, entonces*

$$L_t^a - L^{a-} = 2\int_0^t 1_{(X_s=a)}dV_s = 2\int_0^t 1_{(X_s=a)}dX_s.$$

En particular, si $\{X_t, t \geq 0\}$ es martingala local, existe una modificación bicontinua de $\{L_t^a, a \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$.

Demostración. De la fórmula de Tanaka (Teorema 3), se deduce que

$$\begin{aligned} L_t^a &= 2\left((X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \int_0^t 1_{(X_s > a)} dX_s\right) \\ &= 2\left((X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \int_0^t 1_{(X_s > a)} dM_s - \int_0^t 1_{(X_s > a)} dV_s\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Como $(X_t - a)^+$ y $(X_0 - a)^+$ son continuas en a y t, es suficiente estudiar el comportamiento de $\int_0^t 1_{(X_s > a)} dX_s$.

Primero demostraremos que la martingala,

$$\widehat{M}_t^a = \int_0^t 1_{(X_s > a)} dM_s$$

tiene una modificación bicontinua. Para hacerlo, usaremos el criterio de Kolmogorov (Teorema 72 del apéndice) en el espacio $C([0,t], \mathbb{R})$.

Si $\sup_t |X_t - X_0|^k$, $\left(\int_0^\infty |dV_s|\right)^k$ y $[M, M]_\infty^{k/2}$ son acotadas, el resultado es cierto. Para probarlo, observamos que la desigualdad

$$\left|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+\right| \leq |X_t - X_0| \tag{1.5}$$

se satisface, ya que:

1. si $X_0 \leq x \leq X_t$, entonces

$$\left|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+\right| = (X_t - x)^+ \leq |X_t - X_0|.$$

2. si $X_t \leq x \leq X_0$,

$$\left|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+\right| = (X_0 - x)^+ \leq |X_t - X_0|.$$

3. $X_t \leq X_0 \leq x$ o $X_0 \leq X_t \leq x$, implican que $(X_t - x)^+ = (X_0 - x)^+ = 0$ y, por lo tanto,

$$\left|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+\right| \leq |X_t - X_0|.$$

4. $x \leq X_t \leq X_0$ o $x \leq X_0 \leq X_t$, implican que $(X_t - x)^+ = X_t - x$ y $(X_0 - x)^+ = X_0 - x$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+\right| &= X_t - x - (X_0 - x) \\ &= X_t - X_0 \leq |X_t - X_0| . \end{aligned}$$

Como $L_t^x = 2\left((X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+ - \int_0^t 1_{(X_s > a)} dM_s - \int_0^t 1_{(X_s > a)} dV_s\right)$, de la desigualdad (1.5) y de las desigualdades

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t 1_{(X_s > x)} dM_s\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t \left(1_{(X_s > x)}\right)^2 d\left[M, M\right]_s\right] \text{ (isometría de Itô)} \\ &\leq E\left[\int_0^\infty d\left[M, M\right]_s\right] \\ &= E\left[\left[M, M\right]_\infty\right] \end{aligned}$$

y

$$\left(\int_0^t 1_{(X_s > x)} dV_s\right)^k \leq \left(\int_0^\infty |dV_s|\right)^k ,$$

se sigue que existe una constante d_k tal que

$$E\left[(L_\infty^x)^k\right] \leq d_k E\left[\sup_t |X_t - X_0|^k + \left(\int_0^\infty |dV_s|\right)^k + [M, M]_\infty^{k/2}\right]. \tag{1.6}$$

Notamos que el lado derecho de esta desigualdad no depende de x y como $\sup_t |X_t - X_0|^k$, $\left(\int_0^\infty |dV_s|\right)^k$ y $[M, M]_\infty^{k/2}$ son acotadas, la bicontinuidad de $\widehat{M_t^a}$ queda demostrada si usamos la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy

$$E\left[\sup_{s \leq t} |Y_t|^k\right] \leq C_k E\left[\left|\sqrt{[Y, Y]_t}\right|^k\right],$$

donde Y es una martingala local continua que se anula en cero y $k > 0$, pues implica que para $a < b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_t \left|\widehat{M}_t^a - \widehat{M}_t^b\right|^{2k}\right] &\leq C_k E\left[\left(\int_0^\infty 1_{(a<X_s\leq b)} d\left[M,M\right]_s\right)^k\right] \\
&= C_k E\left[\left(\int_a^b L_\infty^x dx\right)^k\right] \text{ (fórmula de densidad de ocupación)} \\
&= C_k (b-a)^k E\left[\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b L_\infty^x dx\right)^k\right] \\
&\leq C_k (b-a)^k E\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(L_\infty^x\right)^k dx\right] \text{ (desigualdad debida a Chebyshev)} \\
&\leq C_k (b-a)^k \sup_x E\left[\left(L_\infty^x\right)^k\right] \text{ (Fubini).}
\end{aligned}
$$

(En este caso, usamos una desigualdad debida a Chebyshev, Teorema 73, con $f_1(x) = f_2(x) = ... = f_n(x) = L_\infty^x$).

Si los sumandos del lado derecho de (1.6) no son acotados, podemos localizar $\{X_t, t \geq 0\}$ con la sucesión de tiempos de paro

$$
T_n = \text{ínf}\left\{t : \sup_t \left|X_t - X_0\right|^k + \left(\int_0^t |dV_s|\right)^k + [M,M]_t^{k/2} \geq n\right\}.
$$

Como las martingalas $\left(\widehat{M}^a\right)_t^{T_n} = \widehat{M}_{t\wedge T_n}^a$ tienen versiones bicontinuas, lo mismo se sigue para $\widehat{M}_t^a$, ya que para $a \in \mathbb{R}$ y $s \leq t$

$$
\widehat{M}_{s\wedge T_n}^a \underset{n\to\infty}{\to} \widehat{M}_s^a.
$$

Para probar que

$$
\widehat{V}_t^a = \int_0^t 1_{(X_s>a)} dV_s
$$

es conjuntamente continua en t y c.à.d.l.à.g. en a, basta notar que

$$
\widehat{V}_t^{a-} = \underset{b\uparrow a}{\text{lím}} \int_0^t 1_{(X_s>b)} dV_s = \int_0^t 1_{(X_s\geq a)} dV_s, \tag{1.7}
$$

y

$$
\widehat{V}_t^{a+} = \underset{b\downarrow a}{\text{lím}} \int_0^t 1_{(X_s>b)} dV_s = \int_0^t 1_{(X_s>a)} dV_s = \widehat{V}_t^a. \tag{1.8}
$$

Ahora, como

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_t^{a-} - \widehat{M}_t^{a} &= \lim_{b\uparrow a} \int_0^t 1_{(X_s>b)} dM_s - \int_0^t 1_{(X_s>a)} dM_s \\
&= \int_0^t 1_{(X_s\geq a)} dM_s - \int_0^t 1_{(X_s>a)} dM_s \\
&= \int_0^t 1_{(X_s=a)} dM_s,
\end{aligned}$$

la fórmula de densidad de ocupación (Corolario 7) implica

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^t 1_{(X_s=a)} dM_s\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t 1_{(X_s=a)} d\left[M,M\right]_s\right] \\
&= E\left[\int_0^t 1_{(X_s=a)} d\left[X,X\right]_s\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}} 1_{(x=a)} L_s^x(X) dx\right] = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t 1_{(X_s=a)} dM_s = 0. \tag{1.9}$$

Entonces, de (1.4), (1.7) y (1.9) se sigue que

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2\left(\widehat{V}_t^{a-} - \widehat{V}_t^{a}\right) = 2\int_0^t 1_{(X_s=a)} dV_s.$$

De manera análoga, de (1.4), (1.8) y (1.9) se tiene que $L_t^a = L_t^{a+}$. Por lo tanto, el proceso $\{L_t^a, a\in\mathbb{R}, t\geq 0\}$ es c.s. continuo en t y c.à.d.l.à.g. en a. ■

Para esta versión de tiempo local tenemos el siguiente corolario de aproximación:

Corolario 9 *Si $\{X_t, t\geq 0\}$ es semimartingala continua, entonces $\mathbb{P}$-casi seguramente*

$$L_t^a(X) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon)}(X_s) d\left[X,X\right]_s$$

para toda a y toda t. Si $\{M_t, t\geq 0\}$ es martingala local continua

$$L_t^a(M) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(M_s) d\left[M,M\right]_s$$

Demostración. Si aplicamos la fórmula de densidad de ocupación,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{[a,a+\varepsilon)}(X_s)d\left[X,X\right]_s &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,a+\varepsilon)}(x)L_t^x dx\\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} L_t^x dx\\ &= L_t^a.\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue porque L_t^x es c.à.d.l.à.g. en x. Para la segunda parte del corolario observamos que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(M_s)d\left[M,M\right]_s &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} 1_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(x)L_t^x dx\\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} L_t^x dx\\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\int_{a-\varepsilon}^{a} L_t^x dx+\int_a^{a+\varepsilon} L_t^x dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{a-\varepsilon}^{a} L_t^x dx+\int_a^{a+\varepsilon} L_t^x dx\right)\\ &= L_t^a \text{ (continuidad en } x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tienen ambos resultados. ■

Capítulo 2

Tiempos locales del movimiento browniano

El movimiento browniano es, sin duda, el ejemplo más conocido y estudiado tanto de una martingala, como de un proceso de Markov. El objetivo de este capítulo es definir y demostrar algunas propiedades de sus tiempos locales.

Recordemos que una variable aleatoria normal ξ con media cero y varianza t, $N(0,t)$, es aquella cuya función de distribución tiene densidad

$$p_t(x) = \frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}$$

con respecto a la medida de Lebesgue. Tenemos entonces:

Lema 10 *La función $p_t(x)$ satisface:*

1. *Su transformada de Fourier es*

$$\widehat{p_t}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} p_t(x) dx = e^{-t\lambda^2/2}.$$

2. *Si ξ es $N(0,t)$, ζ es $N(0,s)$ y ξ y ζ son independientes, entonces $\xi + \zeta$ es $N(0, t+s)$.*

3. La ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_s(x,y)p_t(y,z)dy = p_{s+t}(x,z),$$

donde $p_t(x,y) = p_t(x-y)$.

4. Para $\alpha > 0$,

$$u^{\alpha}(x) := \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} p_t(x)dt = \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|x|}}{\sqrt{2\alpha}}. \tag{2.1}$$

En particular, $u^{\alpha}(x,y) := \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} p_t(x,y)dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} p_t(x-y)dt.$

Diremos que un proceso estocástico $\{W_t, t \geq 0\}$ **es un movimiento browniano** sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, si:

1. $W_0 = 0$.

2. Si $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^0 = \sigma(W_u, 0 \leq u \leq s)$ y se distribuye $N(0, t-s)$.

3. W es continuo casi seguramente.

Sean $\{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento browniano y $\mathcal{F}^0$ la sigma álgebra generada por $W_s, 0 \leq s < \infty$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos una probabilidad $\mathbb{P}^x$ en $\mathcal{F}^0$ como

$$\mathbb{P}^x(F(W.)) = \mathbb{P}(F(x + W.))$$

para toda función $\mathcal{F}^0$ medible F. Entonces se dice que $\{W_t, t \geq 0, \mathbb{P}^x\}$ es un movimiento browniano que comienza en x. Denotaremos por $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones Borel medibles y acotadas sobre $\mathbb{R}$.

Definición 11 *Para cada* $t > 0$ *definimos el* ***operador de transición*** $P_t : \mathcal{B}_b(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ *como*

$$P_t f(x) := E^x[f(W_t)] = \int p_t(x,z)f(z)dz$$

y tomamos $P_o = I$, *donde* I *denota el operador identidad.*

La ecuación de Chapman-Kolmogorov muestra que $\{P_t, t \geq 0\}$ es un semigrupo de operadores, esto es, para toda $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, $P_{t+s}f(\cdot) = P_s(P_t f)(\cdot)$. Para un conjunto $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, definimos $P_t(x, A) = P_t 1_A(x)$. De esta manera,

$$P_t(x, A) = \int_A p_t(x, z)dz \tag{2.2}$$

e interpretamos $P_t(x, A)$ como la probabilidad de que el movimiento browniano, comenzando en x, tome un valor en A al tiempo t. Por esta razón, $p_t(x, z)$ es llamada la **densidad de la probabilidad de transición del movimiento browniano**.

Definición 12 *Para cada $\alpha > 0$ el* ***operador α-potencial o núcleo α-potencial*** *del semigrupo $\{P_t, t \geq 0\}$, $U^\alpha : \mathcal{B}_b(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, está dado por*

$$U^\alpha f(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt = E^x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(W_t) dt \right].$$

(La segunda igualdad utiliza el teorema de Fubini). Como $u^\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x) dt$, si usamos la definición del operador de transición, tenemos

$$\begin{aligned} U^\alpha f(x) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(\int p_t(x, z) f(z) dz \right) dt \\ &= \int \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x, z) dt \right) f(z) dz \\ &= \int u^\alpha(x, z) f(z) dz. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de P_t, para $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ definimos $U^\alpha(x, A) := U^\alpha 1_A(x)$. Ya que en este caso se obtiene una ecuación similar a (2.2), llamamos a u^α la **densidad α-potencial del movimiento browniano**.

Sea $\mathcal{F}_t^0$ la σ-álgebra generada por $\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$, de tal forma que $\mathcal{F}^0 = \sigma\left(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t^0\right)$. Se tiene el siguiente resultado:

Lema 13 *Para toda $x \in \mathbb{R}$, $s,t \geq 0$ y $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$,*

$$E^x \left[f(W_{t+s}) | \mathcal{F}_t^0 \right] = P_s f(W_t).$$

Demostración. Si Z es $\mathcal{A}$ medible y Y es independiente de $\mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} E\left[f(Z+Y)|\mathcal{A}\right] &= E\left[f(z+Y)|z=Z\right] \\ &= \int f\left(Z+y\right)\mathbb{P}\left(dy\right) \end{aligned}$$

Como $Y := W_{t+s} - W_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t^0$ y para cualquier $x \in \mathbb{R}$, bajo la medida $\mathbb{P}^x$ la ley de Y es $N(0,s)$,se sigue que

$$\begin{aligned} E^x \left[f(W_{t+s}) | \mathcal{F}_t^0 \right] &= E^x \left[f(W_t + Y) | \mathcal{F}_t^0 \right] \\ &= E\left[f(z+Y) | z = W_t \right] \\ &= \int p_s(W_t, u) f(u) du \\ &= E^{W_t}\left[f(W_s) \right] \\ &= P_s f(W_t) \end{aligned}$$

y se tiene el resultado. ■

Puesto que $P_s f(W_t)$ es W_t medible, este resultado implica que, para toda $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$,

$$E^x \left[f(W_{t+s}) | \mathcal{F}_t^0 \right] = E^x \left[f(W_{t+s}) | W_t \right]$$

Esto significa que el futuro del proceso $\{W_t, t \geq 0\}$, dados todos sus valores pasados hasta el presente t_0, sólo depende de su valor en el presente, W_{t_0}. Decimos entonces, que **el movimiento browniano satisface la propiedad simple de Markov**. Este resultado puede generalizarse de la siguiente manera:

Definición 14 *Sea $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ una familia creciente de σ-álgebras con $\mathcal{F}_t^0 \subseteq \mathcal{G}_t$ para toda $t \geq 0$. Se dice que **el movimiento browniano es un proceso de Markov simple con respecto a** $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ si, $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$E^x \left[f(W_{t+s}) | \mathcal{G}_t \right] = P_s f(W_t)$$

para toda $s, t \geq 0$ *y* $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$.

Sea $\{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento browniano sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}^0)$. Daremos por sentada la existencia de una familia $\{\theta_t, t \geq 0\}$ de **operadores de desplazamiento o de corrimiento**, $\theta_t : (\Omega, \mathcal{F}^0) \to (\Omega, \mathcal{F}^0)$, tales que $\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}$ y $W_t \circ \theta_s = W_{t+s}$. En general, para cualquier variable aleatoria Y en $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, $Y \circ \theta_t := Y(\theta_t)$.

Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$, donde $\mathcal{G} = \sigma\left(\cup_{t\geq 0}\mathcal{G}_t\right)$ y sea $\mathcal{G}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$. Una variable aleatoria T con valores en $\mathbb{R}^+$ es un **$\mathcal{G}_t$-tiempo opcional** si $\{T < t\} \in \mathcal{G}_t$ para toda $t \geq 0$. T es un **$\mathcal{G}_t$-tiempo de paro** si $\{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ para toda $t \geq 0$. De manera análoga, T es un **$\mathcal{G}_{t^+}$-tiempo de paro** si $\{T \leq t\} \in \mathcal{G}_{t^+}$ para toda $t \geq 0$ (equivalentemente, T es un **$\mathcal{G}_{t^+}$-tiempo de paro** si $\{T \leq t\} \in \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$). Notamos que, para toda t,

$$\begin{aligned}
(\{T \leq t\} \in \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{G}_{t+\varepsilon}) &\iff \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_{t+\varepsilon}, \text{ para toda } \varepsilon > 0 \\
&\iff \{T \leq s - \varepsilon\} \in \mathcal{G}_s, \text{ para toda } \varepsilon > 0, \text{ para toda } s \geq 0 \\
&\iff \{T < s\} \in \mathcal{G}_s, \text{ para toda } s \geq 0.
\end{aligned}$$

Es decir, T es $\mathcal{G}_{t^+}$-tiempo de paro si y sólo si es $\mathcal{G}_t$-tiempo opcional. Por otra parte, si T es $\mathcal{G}_t$ tiempo de paro, definimos **la σ-álgebra detenida al tiempo** T como

$$\mathcal{G}_T = \{A \subseteq \mathcal{G} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t \text{ para toda } t \geq 0\}.$$

Podemos ver que efectivamente es una sigma álgebra:

i. $\Omega \in \mathcal{G}_T$, ya que $\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$.

ii. Si $A \in \mathcal{G}_T$, entonces $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$. Como $\mathcal{G}_t$ es sigma álgebra, $(A \cap \{T \leq t\})^c \in \mathcal{G}_t$ y, por lo tanto,

$$A^c \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \cap (A \cap \{T \leq t\})^c \in \mathcal{G}_t$$

En consecuencia, $A^c \in \mathcal{G}_T$.

iii. Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{G}_T$, $A_n \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ para toda $n = 1, 2, ...$ Pero $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \{T \leq t\} = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{G}_t$. Por lo tanto, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}_T$.

Entonces, si extendemos la propiedad simple de Markov a tiempos de paro, obtenemos la **llamada propiedad fuerte de Markov del movimiento browniano** (se demostrará la generalización de este resultado en la sección 3.3 del siguiente capítulo):

Lema 15 *Si el movimiento browniano $\{W_t, t \geq 0\}$ es un proceso de Markov simple con respecto a $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$, entonces para cualquier $\mathcal{G}_{t+}$-tiempo de paro T,*

$$E^x \left[f(W_{T+s}) 1_{(T<\infty)} | \mathcal{G}_{T^+} \right] = P_s f(W_T) 1_{(T<\infty)}$$

para toda $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ y toda función Borel-medible acotada f.

Denotaremos por $\mathcal{F}_t$ la completación de $\mathcal{F}_t^0$ con respecto a $\mathbb{P}^x$ y como antes $\mathcal{F} = \sigma\left(\cup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$. Sean $\{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento browniano con respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^x)$ y $f(x)$ una función continua, simétrica y positiva con soporte en $[-1, 1]$ tal que $\int f(x)dx = 1$. Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$f_{\varepsilon,a}(x) := f_\varepsilon(x - a)$$

y

$$L_t^{\varepsilon,a} := \int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s) ds.$$

Notamos que si $z = \frac{x}{\varepsilon}$, $\int f_\varepsilon(x)dx = \int \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int f(z)\, dz = 1$. Además, $\text{lím}_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x)$, donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac.

Lema 16 *Para cualesquiera números $0 < T, M < \infty$, $L_t^{\varepsilon,a}$ converge uniformemente en $(t, a) \in [0, T] \times [-M, M]$ conforme $\varepsilon \to 0$ c.s. y en $\mathcal{L}^p(\mathbb{P}^x)$ para toda $p > 0$.*

La demostración de este lema no se hará por ser muy técnica (puede verse en [11]).

Teorema 17 *Existe un conjunto $\Omega' \subset \Omega$ con $\mathbb{P}^x(\Omega') = 1$ tal que,*

$$L_t^a(\omega) = \begin{cases} \text{lím}_{\varepsilon\to 0} L_t^{\varepsilon,a}(\omega) & \omega \in \Omega' \\ 0 & \omega \notin \Omega' \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Decimos que L_t^a es el ***tiempo local del movimiento browniano en a****.*

Demostración. Sea Ω' el conjunto donde $L_t^{\varepsilon,a}$ converge localmente uniformemente en $(t,a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Si tomamos $T = M = n$ $(n = 1, 2, ...)$ en el lema anterior, entonces $L_t^{\varepsilon,a}(\omega)$ converge uniformemente en $(t,a) \in [0,n] \times [-n,n]$ para toda $\omega \in \Omega_n$, con $\mathbb{P}^x(\Omega_n) = 1$. Entonces $\Omega' = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y se sigue que $\mathbb{P}^x(\Omega') = 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Como $f_{\varepsilon,a}$ es una función continua y acotada con soporte compacto para cada $\varepsilon > 0$, el teorema de la convergencia dominada implica que $L_t^{\varepsilon,a}$ es continua para toda $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, L_t^a es continua en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ como consecuencia de la convergencia local uniforme de $L_t^{\varepsilon,a}$. ■

Tenemos también la siguiente definición que caracterizará, en el capítulo siguiente y de una forma más general, a los tiempos locales:

Definición 18 *Una familia $A = \{A_t, t \geq 0\}$ de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ es un* ***funcional continuo aditivo (FCA)*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$t \mapsto A_t$ es c.s. continuo y no decreciente con $A_0 = 0$.*

2. *A es adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ (i.e. A_t es $\mathcal{F}_t$-medible).*

3. *$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$ c.s. para toda $t, s \geq 0$.*

Proposición 19 *$L_t^{\varepsilon,a}$ es un FCA.*

Demostración.

1. Se sigue de la definición de $L_t^{\varepsilon,a}$, por ser $\{W_t, t \geq 0\}$ c.s. continuo y f continua y positiva.

2. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{\omega : L_t^{\varepsilon,a}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$ (pues $f_{\varepsilon,a}$ es Borel medible).

3. De la definición de los operadores de corrimiento,

$$\begin{aligned} L_{t+q}^{\varepsilon,a} &= \int_0^{t+q} f_{\varepsilon,a}(W_s(\omega))ds \\ &= \int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s(\omega))ds + \int_t^{t+q} f_{\varepsilon,a}(W_s(\omega))ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s(\omega))ds + \int_0^q f_{\varepsilon,a}(W_{s+t}(\omega))ds \\
&= \int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s(\omega))ds + \int_0^q f_{\varepsilon,a}(W_s \circ \theta_t(\omega))ds \\
&= L_t^{\varepsilon,a} + L_q^{\varepsilon,a}(\theta_t) \\
&= L_t^{\varepsilon,a} + L_q^{\varepsilon,a} \circ \theta_t.
\end{aligned}
$$

La proposición queda demostrada. ■

Proposición 20 L_t^a *es un FCA.*

Demostración.

1. Como L_t^a es el límite uniforme en compactos en probabilidad de $L_t^{\varepsilon,a}(\omega)$, es el límite de procesos no decrecientes y c. s. continuos. Por lo tanto, L_t^a es él mismo un proceso no decreciente y c.s. continuo.

2. Se sigue de observar que L_t^a es el límite c.s. de procesos $\mathcal{F}_t$-medibles y que $\mathcal{F}_t$ es completa.

3. Como la convergencia de $L_t^{\varepsilon,a}(\omega)$ es uniforme, del inciso 3. de la demostración de la proposición anterior, se sigue que

$$
\begin{aligned}
L_{t+q}^a &= \lim_{\varepsilon\to 0} L_{t+q}^{\varepsilon,a} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{t+q} f_{\varepsilon,a}(W_s(\omega))ds \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s(\omega))ds + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^q f_{\varepsilon,a}(W_s \circ \theta_t(\omega))ds \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} L_t^{\varepsilon,a} + \lim_{\varepsilon\to 0} L_q^{\varepsilon,a}(\theta_t) \\
&= L_t^a + L_q^a(\theta_t),
\end{aligned}
$$

que es lo que se quería probar. ■

Por otra parte, observamos que para cualquier función continua con soporte compacto, h, por el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\int h(a)L_t^a da = \lim_{\varepsilon\to 0} \int h(a) \left(\int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s)ds \right) da$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left(\int h(a)\left(f_{\varepsilon,a}(W_s)\right)da\right)ds \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left(\int h(a)\left(f_{\varepsilon}(W_s-a)\right)da\right)ds \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left(h * f_\varepsilon\right)(W_s)ds \\
&= \int_0^t h(W_s)ds.
\end{aligned}
$$

Es decir, se satisface la fórmula de densidad de ocupación vista anteriormente. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos $T_A := \inf\{t > 0 : W_t \in A\}$, es decir, la primera vez que el movimiento browniano entra en el conjunto A. Entonces T_A es un $\mathcal{F}_t^0$-tiempo de paro si A es cerrado y un $\mathcal{F}_{t^+}^0$-tiempo de paro si A es abierto. La demostración no se hará aquí, pero puede verse en [13] capítulo I, proposiciones 4.5 y 4.6. En particular, si $A = \{a\}$, se escribirá T_a. Tenemos el siguiente resultado:

Lema 21

$$E^x\left[L_t^a\right] = \int_0^t p_s(x,a)ds. \tag{2.3}$$

$$u^\alpha(x,a) = E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}dL_t^a\right]. \tag{2.4}$$

$$u^\alpha(x,a) = E^x\left[e^{-\alpha T_a}\right]u^\alpha(a,a). \tag{2.5}$$

Demostración. Para demostrar (2.3), notamos que $E^x\left[L_t^a\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} E^x\left[L_t^{\varepsilon,a}\right]$, ya que $L_t^{\varepsilon,a}$ converge en $L^1(\mathbb{P}^x)$ (Lema 16). Como $L_t^{\varepsilon,a} = \int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s)ds$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} E^x\left[L_t^{\varepsilon,a}\right] &= \lim_{\varepsilon\to 0} E^x\left[\left(\int_0^t f_{\varepsilon,a}(W_s)ds\right)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t E^x\left[f_{\varepsilon,a}(W_s)\right]ds \text{ (Fubini)} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left(\int f_{\varepsilon,a}(z)p_s(x,z)dz\right)ds \\
&= \int_0^t \left(\int \lim_{\varepsilon\to 0} f_{\varepsilon,a}(z)\,p_s(x,z)dz\right)ds \\
&= \int_0^t p_s(x,a)ds.
\end{aligned}
$$

La última igualdad se sigue de $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(z-a) = \delta(z-a)$, donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}dL_t^a\right] &= \lim_{T\to\infty} E^x\left[\int_0^T e^{-\alpha t}dL_t^a\right] \\
&= \lim_{T\to\infty} E^x\left[e^{-\alpha T}L_T^a + \alpha\int_0^T e^{-\alpha t}L_t^a dt\right] \text{ (integración por partes, ipp)} \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(e^{-\alpha T}E^x\left[L_T^a\right] + \alpha\int_0^T e^{-\alpha t}E^x\left[L_t^a\right]dt\right) \text{ (Fubini)} \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(e^{-\alpha T}\int_0^T p_s(x,a)ds + \alpha\int_0^T e^{-\alpha t}\left(\int_0^t p_s(x,a)ds\right)dt\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(e^{-\alpha T}\int_0^T p_s(x,a)ds - e^{-\alpha T}\int_0^T p_s(x,a)ds + \int_0^T e^{-\alpha s}p_s(x,a)ds\right) \text{ (ipp)} \\
&= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-\alpha s}p_s(x,a)ds \\
&= u^\alpha(x,a),
\end{aligned}$$

que es (2.4). Finalmente, el hecho de que dL_t^a tenga soporte en $\{t : W_t = a\}$ c.s. implica que $L_t^a = 0$ para $t \in [0, T_a)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}dL_t^a\right] &= E^x\left[\int_{T_a}^\infty e^{-\alpha t}dL_t^a\right] \\
&= E^x\left[E^x\left[\int_{T_a}^\infty e^{-\alpha t}dL_t^a|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right].
\end{aligned}$$

De la propiedad de recurrencia del movimiento browniano se sigue que $T_a < \infty$ c.s. Si se define $t = T_a + s$ y se aplican la propiedad aditiva del tiempo local, $L_{T_a+s}^a = L_{T_a}^a + L_s^a \circ \theta_{T_a}$, y la propiedad fuerte de Markov, obtenemos que

$$\begin{aligned}
E^x\left[E^x\left[\int_{T_a}^\infty e^{-\alpha t}dL_t^a|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right] &= E^x\left[E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha(T_a+s)}dL_s^a\circ\theta_{T_a}|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_a}E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s}dL_s^a\circ\theta_{T_a}|\mathcal{F}_{T_a}\right]\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_a}\right]E^{W_{T_a}}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s}dL_s^a\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_a}\right]E^a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s}dL_s^a\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_a}\right]u^\alpha(a,a)
\end{aligned}$$

y quedan demostrados los tres resultados. ∎

Sea W_t un movimiento browniano estándar (i.e. W tiene incrementos independientes y W_t es v.a. gaussiana centrada con varianza t) en $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^0\right)$. Estudiaremos algunas propiedades para los tiempos locales de W_t en $a = 0$, esto es, L_t^0. Nos gustaría conocer la ley del proceso L_t^0. Por la fórmula de Tanaka (Teorema 3),

$$|W_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s) dW_s + L_t^0.$$

Claramente, $|W_t|$ es una semimartingala. Al proceso con la misma ley que $|W_t|$ se le conoce como "**movimiento browniano reflejado"**. Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 22 (Skorokhod) *Sea y una función continua real definida en $[0, \infty)$ tal que $y(0) \geq 0$. Entonces existe una única pareja de funciones z, a definidas en $[0, \infty)$ tal que*

1. *$z = y + a$*

2. *z es positiva*

3. *a es creciente, continua, cero en cero y la correspondiente medida $da\,(s)$ tiene soporte en $\{s : z(s) = 0\}$.*

   Más aún, la función a está dada por

$$a(t) = \sup_{s \leq t}(-y(s) \vee 0)$$

Demostración. Si definimos la pareja (z, a) como

$$a(t) = \sup_{s \leq t}(-y(s) \vee 0), \;\; z = y + a$$

entonces se satisfacen las tres condiciones:

1. Se sigue de la definición de z.

2. Observamos que de la definición de a,

$$z(t)=\begin{cases} y(t)+\sup_{s\leq t}(-y(s)) & \text{si } -y(s)>0 \\ y(t) & \text{si } -y(s)\leq 0 \end{cases}$$

3. Como y es continua con $y(0)\geq 0$, esto es, $-y(0)\leq 0$, se tiene que $a(t)$ es continua con $a(0)=0$. De la definición de a, $da\,(t)$ es distinta de cero en los intervalos donde a es estrictamente creciente, esto es, en los intervalos donde $y(t)$ es estrictamente negativa y estrictamente decreciente. En este caso, $\sup_{s\leq t}(-y(s))=-y(t)$ y esto implica que $a(t)=-y(t)$ y $z(t)=0$. Por lo tanto, el soporte de $da\,(t)$ está contenido en el conjunto $\{s:z(s)=0\}$.

Para demostrar la unicidad, suponemos que $\widetilde{z},\widetilde{a}$ es otra pareja de funciones que satisface los incisos 1 a 3. Se sigue entonces que $z-\widetilde{z}=a-\widetilde{a}$ es un proceso de variación acotada y podemos usar integración por partes para obtener

$$0\leq(z-\widetilde{z})^2(t)=2\int_0^t(z(s)-\widetilde{z}(s))d(a(s)-\widetilde{a}(s)).$$

Como las medidas $da\,(t)$ y $d\widetilde{a}\,(s)$ tienen soporte en los conjuntos $\{s:z(s)=0\}$ y $\{s:\widetilde{z}(s)=0\}$, respectivamente, se sigue que

$$\begin{aligned} 2\int_0^t(z(s)-\widetilde{z}(s))d(a(s)-\widetilde{a}(s)) &= 2\left(\int_0^t z(s)da(s)-\int_0^t\widetilde{z}(s)da(s)-\int_0^t z(s)d\widetilde{a}(s)+\int_0^t\widetilde{z}d\widetilde{a}(s)\right) \\ &= -2\int_0^t\widetilde{z}(s)da(s)-2\int_0^t z(s)d\widetilde{a}(s)\leq 0, \end{aligned}$$

por los incisos 2 y 3. Por lo tanto, $0\leq(z-\widetilde{z})^2\leq 0$ o, equivalentemente, $z=\widetilde{z}$. ■

Ahora, si X es un proceso en $(\Omega,\mathcal{F})$ denotamos por $\mathcal{F}_t^X$ la filtración más pequeña que satisface las condiciones usuales (completa y continua por la derecha) con respecto a la cual X es adaptado. Se tiene el siguiente resultado:

Corolario 23 *El proceso* $\beta_t=\int_0^t\operatorname{sgn}(W_s)dW_s$ *es un movimiento browniano estándar y* $\mathcal{F}_t^\beta=\mathcal{F}_t^{|W|}$. *Más aún,* $L_t^0=\sup_{s\leq t}(-\beta_s)$.

Demostración. Como β_t es una martingala con $[\beta_t,\beta_t]=t$, el teorema de caracterización de Lévy implica que β_t es un movimiento browniano. Por la fórmula de Tanaka (Teorema 3),

$$|W|_t = \beta_t + L_t^0.$$

Y del lema anterior se obtiene que

$$|W|_t = \beta_t + \sup_{s \leq t}(-\beta_s).$$

De esto se deduce que $L_t^0 = \sup_{s \leq t}(-\beta_s)$ y se tiene $\mathcal{F}_t^{|W|} \subset \mathcal{F}_t^{\beta}$. La fórmula de aproximación (Corolario 7) para L_t^0,

$$L_t^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(|W_s| < \varepsilon)} ds,$$

demuestra que L_t^0 es adaptado a la completación de la sigma álgebra generada por $\{|W_t|, 0 \leq s \leq t\}$ y se sigue que $\mathcal{F}_t^L \subset \mathcal{F}_t^{|W|}$. En consecuencia, $\mathcal{F}_t^{\beta} \subset \mathcal{F}_t^{|W|}$ y, por lo tanto, $\mathcal{F}_t^{\beta} = \mathcal{F}_t^{|W|}$. ■

Capítulo 3

Procesos de Borel por la derecha

Los resultados que se presentan en este capítulo se refieren a una clase de procesos de Markov llamados procesos de Borel por la derecha. Dentro de esta clase podemos encontrar a los procesos de Feller. Se consideran S, un espacio topológico localmente compacto con una base numerable, y $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$ la σ-álgebra de Borel de S.

3.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 24 *Un **núcleo** $P = P(x, A)$ **en** S es un mapeo $S \times \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $x \in S$, el mapeo $A \to P(x, A)$ es una medida positiva en $\mathcal{B}$.*

2. *Para cada $A \in \mathcal{B}$, el mapeo $x \to P(x, A)$ es $\mathcal{B}$-medible.*

Para un núcleo P y $f : S \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{B}_b(S)$ (funciones Borel medibles y acotadas en S), definimos

$$P(x, f) = Pf(x) := \int_S P(x, dy)f(y)$$

Nótese que P mapea funciones Borel medibles y acotadas en funciones Borel medibles y acotadas (por la propiedad 2) y si M y N son dos núcleos, definimos

$$MN\,(x, A) := \int_S M(x, dy)N(y, A).$$

Diremos también que una familia de núcleos $\{P_t, t \geq 0\}$ en $(S, \mathcal{B})$ es un **semigrupo** si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x)$$

para toda $s, t \geq 0$, $x \in S$ y $f \in \mathcal{B}_b(S)$. Tomaremos siempre $P_0 = I$, el mapeo identidad. Entonces:

Definición 25 *Se dice que una función $P(x, A)$ es un **núcleo submarkoviano** en $(S, \mathcal{B})$ si*

1. *P es un núcleo de masa total menor o igual que 1, es decir, $P(x, S) \leq 1$.*

2. *P tiene la propiedad de semigrupo.*

Si imaginamos una partícula en x en el tiempo $t = 0$, $P_t(x, A)$ puede pensarse como la probabilidad de que la partícula esté en el conjunto A al tiempo t y llamamos a P_t una probabilidad de transición. El hecho de que podamos tener $P_t(x, S) < 1$ significa que existe la posibilidad de que la partícula haya muerto o desaparecido para el tiempo t. Para trabajar bajo esta circunstancia introducimos un nuevo estado Δ, el estado çementerio", y definimos $S_\Delta = S \cup \Delta$.

Una familia $\{P_t, t \geq 0\}$ de núcleos submarkovianos puede extenderse de manera única para ser una familia de núcleos markovianos (subnúcleo markoviano de masa total igual a 1) en S_Δ si $\forall x \in S$ definimos

$$P_t(x, \Delta) = 1 - P_t(x, S)$$

y

$$P_t(\Delta, \Delta) = 1.$$

Además, cualquier función f definida en S, pero no en Δ, será extendida a S_Δ definiendo $f(\Delta) = 0$.

Definición 26 *Sean $\{X_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en $(S_\Delta, \mathcal{B}(S_\Delta))$, $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ una filtración de $\mathcal{G}$ y $\{P_t, t \geq 0\}$ un semigrupo de Markov en S_Δ. Entonces se dice que X_t **es un proceso de Markov simple homogéneo con respecto a** $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ **y con semigrupo de transición** $\{P_t, t \geq 0\}$ si X_t es $\mathcal{G}_t$-medible y*

$$E\left[f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right] = P_s f(X_t)$$

para todo $s,t \geq 0$ y $f \in \mathcal{B}(S_\Delta)$.

La medida de probabilidad $\mathbb{P}_{X_0}(A) = \mathbb{P}(X_0 \in A)$ (esto es, la ley de la variable aleatoria X_0), es la distribución inicial del proceso. Queremos recalcar que si en la definición anterior cambiamos $\mathbb{P}$, entonces X no necesariamente seguirá siendo un proceso de Markov. Aunque X_t toma valores en S_Δ, diremos que S **es el espacio de estados de** $\{X_t, t \geq 0\}$. Al igual que en el caso del movimiento browniano, observamos que $P_s f(X_t)$ sólo depende de X_t y no de $\mathcal{F}_t^0 = \{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ (la historia del proceso hasta t). Si f es una función simple, i.e. $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x)$, con $a_i \geq 0$ y $A_i \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} P_s f(X_t) &= \int P(X_t, dy) \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(y) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int P(X_t, dy) 1_{A_i}(y) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i P(X_t, A_i). \end{aligned}$$

De la propiedad 2 de núcleo se sigue que $X_t \to P(X_t, A_i)$ es $\mathcal{B}$-medible. Por lo tanto, $P_s f(X_t)$ es "X_t-medible". Si f no es simple, podemos aproximarla por funciones simples y se obtiene el mismo resultado. Esto implica que

$$\begin{aligned} P_s f(X_t) &= E\left[f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right] \\ &= E\left[E\left[f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right] | X_t\right] \\ &= E\left[f(X_{t+s}) | X_t\right], \end{aligned}$$

donde la segunda y tercera igualdad son consecuencia inmediata de las propiedades de esperanza condicional. Es decir, los valores futuros del proceso $\{X_t, t \geq 0\}$, dado su pasado, dependen únicamente de sus valores en el presente. Notamos que la propiedad de semigrupo es necesaria para que la definición anterior sea consistente, ya que para $s, t, u \geq 0$,

$$P_{u+s} f(X_t) = E\left[f(X_{t+s+u}) | \mathcal{G}_t\right]$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned}
P_u P_s f(X_t) &= P_u E\left[f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\right] \\
&= P_u h(X_r) \text{ donde } r = t+s \text{ y } h(X_r) = E\left[f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\right] \\
&= E\left[h(X_{r+u})|\mathcal{G}_r\right] \\
&= E\left[E\left[f(X_{t+s+u})|\mathcal{G}_t\right]|\mathcal{G}_{t+s}\right] \\
&= E\left[f(X_{t+s+u})|\mathcal{G}_t\right].
\end{aligned}$$

Si definimos $h_{j-1,j}(x) = f_{j-1}(x) P_{t_j - t_{j-1}} h_{j,j+1}(x)$ para $j = 2, 3, ..., n$ y aplicamos repetidamente la propiedad de Markov, entonces para cualesquiera $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ y $f_i \in \mathcal{B}_b(S_\Delta)$ con $i = 1, 2, ..., n$, se tiene

$$\begin{aligned}
E\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})\right] &= E\left[E\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})|\mathcal{G}_{t_{n-1}}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i}) E\left[f_n(X_{t_n})|\mathcal{G}_{t_{n-1}}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i}) P_{t_n - t_{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}})\right] \\
&= E\left[E\left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_{t_i}) P_{t_n - t_{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}})|\mathcal{G}_{t_{n-2}}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n-2} f_i(X_{t_i}) E\left[f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) P_{t_n - t_{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}})|\mathcal{G}_{t_{n-2}}\right]\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n-2} f_i(X_{t_i}) P_{t_{n-1} - t_{n-2}} \left(h_{n-1,n}\left(X_{t_{n-2}}\right)\right)\right] \\
&\quad \vdots \\
&= E\left[P_{t_1 - t_0} h_{1,2}(X_{t_0})\right] \\
&= E\left[\int_S P_{t_1}(X_0, dz_1)\, h_{1,2}(z_1)\right] \\
&= E\left[\int_S P_{t_1}(X_0, dz_1)\, f_1(z_1) P_{t_2 - t_1} h_{2,3}(z_1)\right]
\end{aligned}$$

$$= \quad E\left[\int_S P_{t_1}\left(X_0, dz_1\right) f_1(z_1) \int_S P_{t_2-t_1}\left(z_1, dz_2\right) h_{2,3}(z_2)\right]$$

$$\vdots$$

$$= \quad E\left[\int_S P_{t_1}(X_0, dz_1) f_1(z_1) \int_S P_{t_2-t_1}(z_1, dz_2) f_n(dz_2) ... \int_S P_{t_n-t_{n-1}}(z_{n-1}, dz_n) f_n(dz_n)\right].$$

Esto muestra que las distribuciones finito-dimensionales de $\{X_t, t \geq 0\}$ están determinadas por su semigrupo de transición y su distribución inicial μ. La existencia del proceso de Markov se sigue del teorema de extensión de Kolmogorov si se prueba que las distribuciones finito-dimensionales son consistentes. No lo demostraremos aquí, aunque se utiliza el procedimiento anterior para hacerlo.

Hemos denotado un espacio medible por $(G, \mathcal{G})$, donde G es un conjunto y $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de G. Cuando escribamos $f : (G, \mathcal{G}) \rightarrow (H, \mathcal{H})$ significará que $f : G \rightarrow H$ es medible con respecto a las σ-álgebras $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ (esto es, para todo $B \in \mathcal{H}$, $f^{-1}(B) = \{x \in G : f(x) \in B\} \in \mathcal{G}$).

Definición 27 *Sea* $\{P_t, t \geq 0\}$ *un semigrupo de Markov en* S_Δ*. Llamaremos a la colección* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ ***un proceso de Markov simple, continuo por la derecha y con semigrupo de transición*** $\{P_t, t \geq 0\}$ *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio medible filtrado con* $X_t : (\Omega, \mathcal{G}_t) \rightarrow (S_\Delta, \mathcal{B}(S_\Delta))$ *y* $\{X_t, t \geq 0\}$ *continuo por la derecha.*

(2) $\{\theta_t, t \geq 0\}$ *es una colección de operadores de corrimiento para* X*, i.e.* $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$ *con*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad y\ X_t \circ \theta_s = X_{t+s}$$

para todo $s, t \geq 0$*.*

(3) Para cada $x \in S_\Delta$*,* $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$ *y* $\{X_t, t \geq 0\}$ *en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^x)$ *es un proceso de Markov simple con respecto a* $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ *y con semigrupo de transición* $\{P_t, t \geq 0\}$*.*

En particular, si X es un proceso de Markov simple, continuo por la derecha y con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$,

$$\begin{aligned} E^x\left[f(X_t)\right] &= E^x\left[E^x\left[f(X_t)|\mathcal{G}_0\right]\right] \\ &= E^x\left[P_t f(X_0)\right] \\ &= P_t f(x) \text{ ya que } P^x(X_0 = x) = 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E^x\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\right] &= E^x\left[\int_S P_{t_1}(X_0, dz_1) f_1(z_1) \prod_{i=2}^n \int_S P_{t_i - t_{i-1}}(z_{i-1}, dz_i) f_i(dz_i)\right] \qquad (3.1) \\ &= \int \left(\int_S P_{t_1}(X_0, dz_1) f_1(z_1) \prod_{i=2}^n \int_S P_{t_i - t_{i-1}}(z_{i-1}, dz_i) f_i(dz_i)\right) \mathbb{P}^x(X_0 = y) dy \\ &= \int_S P_{t_1}(x, dz_1) f_1(z_1) \int_S P_{t_2 - t_1}(z_1, dz_2) f_2(dz_2) ... \int_S P_{t_n - t_{n-1}}(z_{n-1}, dz_n) f_n(dz_n). \end{aligned}$$

Cuando $f = 1_A$, donde $A \in \mathcal{B}(S_\Delta)$, la expresión

$$E^x\left[f(X_t)\right] = P_t f(x) = \int P_t(x, dz) f(z) \qquad (3.2)$$

queda como

$$E^x\left[1_A(X_t)\right] = \mathbb{P}^x(X_t \in A) = P_t 1_A(x) = \int P_t(x, dz) 1_A(z) = P_t(x, A).$$

Para ver que el proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{G}$ medible, notamos que la continuidad por la derecha de X_t implica

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} 1_{[(j-1)/2^n, j/2^n)}(t) X_{j/2^n}(\omega).$$

En consecuencia, para cualquier $f \in \mathcal{B}(S_\Delta)$, $f(X_t)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{G}$ medible.

Si $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ es un proceso de Markov simple continuo por la derecha, es posible demostrar que la propiedad simple de Markov no se pierde si se toma la completación de $\mathcal{G}_t$. Denotamos por $\mathcal{M}$ el conjunto de las medidas finitas y positivas en $(S_\Delta, \mathcal{B}(S_\Delta))$. Para cada $\mu \in \mathcal{M}$ y $A \in \mathcal{G}$, definimos

$$\mathbb{P}^{\mu}(A) = \int \mathbb{P}^{x}(A) d\mu(x).$$

Sean $\mathcal{G}^{\mu}$ la $\mathbb{P}^{\mu}$ completación de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{N}_{\mu}$ la colección de conjuntos nulos para $(\Omega, \mathcal{G}^{\mu}, \mathbb{P}^{\mu})$. Defínimos también $\mathcal{G}_t^{\mu} = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{N}_{\mu}$ (es decir, $\sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}_{\mu})$),

$$\overline{\mathcal{G}} = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{G}^{\mu} \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{G}}_t = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{G}_t^{\mu}.$$

Es claro que $\overline{\mathcal{G}}_t$ es la completación de $\mathcal{G}_t$. Se tiene, para cada $\mu \in \mathcal{M}$,

$$E^{\mu}\left[f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t^{\mu}\right] = P_s f(X_t), \tag{3.3}$$

para todo $s, t \geq 0$ y $f \in \mathcal{B}_b(S_{\Delta})$, ya que las dos medidas $A \longmapsto E^{\mu}\left[1_A f(X_{t+s})\right]$ y $A \longmapsto E^{\mu}\left[1_A P_s f(X_t)\right]$ coinciden en $\mathcal{G}_t$ por la propiedad simple de Markov, y también coinciden en $\mathcal{N}_{\mu}$, donde ambas son igual a cero. Por lo tanto, coinciden en $\mathcal{G}_t^{\mu}$. Es decir, se satisface (3.3).

En el argumento anterior podemos reemplazar $\mathcal{G}_t^{\mu}$ por $\overline{\mathcal{G}}_t$ y, en consecuencia, suponer siempre que para un proceso de Markov simple continuo por la derecha, la filtración $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ es completa.

3.2. Operador potencial, densidad potencial y medida de referencia

Si f es una función acotada y Borel medible, entonces la función $(P.f)(x)$ es μ-medible para cualquier medida acotada en $\mathbb{R}^{+}$. En consecuencia, es posible definir otro núcleo como

$$P_{\mu} f(x) := \int_0^{\infty} P_t f(x) \, \mu(dx). \tag{3.4}$$

En particular, si e^{α} denota la medida cuya densidad con respecto a la medida de Lebesgue (dt) es $e^{-\alpha t}$, entonces el correspondiente núcleo en (3.4) queda como

$$U^{\alpha} := \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P_t dt$$

y tenemos lo siguiente:

Definición 28 *Para $f \in \mathcal{B}_b(S_\Delta)$ se define* ***el operador α-potencial o núcleo α-potencial*** *del semigrupo $\{P_t, t \geq 0\}$ como*

$$U^\alpha f(x) := E^x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt.$$

Si hacemos $f = 1_A$, con $A \in \mathcal{B}(S_\Delta)$, obtenemos otra medida en $\mathcal{B}(S_\Delta)$. Esto es, $P : S \times \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}^+$, donde

$$U^\alpha(x, A) := U^\alpha 1_A(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(x, A) dt.$$

Es decir, podemos pensar que $\alpha e^{-\alpha t} P_t(x, dy)$ es una medida producto de probabilidad sobre $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{G})$ e interpretar a $\alpha U^\alpha(x, A)$ como la probabilidad de que una partícula que comienza en x en el tiempo cero, esté en el conjunto A al final de un tiempo exponencial, independiente de X, con media $1/\alpha$.

Lema 29 *Para cualquier $\alpha > 0$ y $f \in C_b(S_\Delta)$,*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha U^\alpha f(x) = f(x)$$

para todo $x \in S_\Delta$.

Demostración. De (3.2) y del hecho de que X_t es continuo por la derecha, observamos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} P_t f(x) &= \lim_{t \to 0} E^x \left[f(X_t) \right] \\
&= E^x \left[\lim_{t \to 0} f(X_t) \right] \\
&= E^x \left[f(X_0) \right] \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

para cualquier $f \in C_b(S_\Delta)$. Como $e^{-\alpha t} \leq 1$ (ya que $\alpha > 0$) y f es acotada, el teorema de la convergencia dominada implica

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\infty} \alpha U^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} P_s f(x) ds \\
&= \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\infty e^{-t} P_{t/\alpha} f(x) dt \quad \text{donde } \alpha s = t \\
&= \int_0^\infty e^{-t} f(x) dt \\
&= f(x) \int_0^\infty e^{-t} dt \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. ■

Tenemos ahora el siguiente lema:

Lema 30 (Ecuación resolvente) *Para cualesquiera $\alpha, \beta > 0$ y $f \in C_b(S_\Delta)$,*

$$\begin{aligned}
U^\alpha f(x) - U^\beta f(x) &= (\beta - \alpha) U^\alpha U^\beta f(x) \\
&= (\beta - \alpha) U^\beta U^\alpha f(x).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Lo anterior también se satisface para $\alpha = 0$ siempre que $U^0 f(x)$ esté definida.

Demostración. De la ecuación

$$e^{-\alpha s} - e^{-\beta s} = \left(e^{-(\alpha-\beta)s} - 1\right) e^{-\beta s} = \left((\beta - \alpha) \int_0^s e^{-(\alpha-\beta)t} dt\right) e^{-\beta s} \tag{3.6}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
U^\alpha f(x) - U^\beta f(x) &= \int_0^\infty (e^{-\alpha s} - e^{-\beta s}) P_s f(x) ds \\
&= (\beta - \alpha) \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-(\alpha-\beta)t} dt\right) e^{-\beta s} P_s f(x) ds \\
&= (\beta - \alpha) \int_0^\infty e^{-(\alpha-\beta)t} \left(\int_t^\infty e^{-\beta s} P_s f(x) ds\right) dt \text{ (Fubini)} \\
&= (\beta - \alpha) \int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} P_s f(x) ds\right) dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\beta-\alpha)\int_0^\infty e^{-\alpha t}\left(\int_0^\infty e^{-\beta r}P_{r+t}f(x)dr\right)dt\ ,\ r=s-t\\
&= (\beta-\alpha)\int_0^\infty e^{-\alpha t}\left(\int_0^\infty e^{-\beta r}P_tP_rf(x)dr\right)dt\\
&= (\beta-\alpha)\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_t\left(\int_0^\infty e^{-\beta u}P_uf(x)du\right)dt\ \text{(Fubini)}\\
&= (\beta-\alpha)U^\alpha U^\beta f(x).
\end{aligned}
$$

Observamos que también

$$
e^{-\alpha s}-e^{-\beta s}=\left(-e^{-(\beta-\alpha)s}+1\right)e^{-\alpha s}=\left((\beta-\alpha)\int_0^s e^{-(\beta-\alpha)t}dt\right)e^{-\alpha s}. \tag{3.7}
$$

Nótese que el lado derecho de (3.7) es el lado derecho de la ecuación (3.6) con α y β intercambiados. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
U^\alpha f(x)-U^\beta f(x) &= \int_0^\infty (e^{-\alpha s}-e^{-\beta s})P_sf(x)ds\\
&= (\beta-\alpha)\int_0^\infty\left(\int_0^s e^{-(\beta-\alpha)t}dt\right)e^{-\alpha s}P_sf(x)ds
\end{aligned}
$$

y con el mismo procedimiento que anteriormente, se obtiene que

$$
U^\alpha f(x)-U^\beta f(x)=(\beta-\alpha)U^\beta U^\alpha f(x).
$$

Ahora suponemos que $U^0f(x)$ existe. Como $f=f^+-f^-$ y f es acotada, se sigue que f^+ y f^- también lo son. Si aplicamos el resultado anterior a f^+ y observamos que si $h_\alpha=\int_0^\infty e^{-\alpha t}f^+(X_t)\,dt$, entonces $\alpha_1>\alpha_2>0\Longrightarrow h_{\alpha_1}\le h_{\alpha_2}\le\int_0^\infty f^+(X_t)\,dt$, podemos aplicar el teorema de la convergencia monótona. Esto es,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}U^\alpha f^+(x) &= \lim_{\alpha\to 0}E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f^+(X_t)\,dt\right]\\
&= E^x\left[\lim_{\alpha\to 0}\int_0^\infty e^{-\alpha t}f^+(X_t)\,dt\right]\\
&= E^x\left[\int_0^\infty f^+(X_t)\,dt\right]\\
&= U^0f^+(x).
\end{aligned}
$$

Si hacemos lo mismo con f^- y notamos que

$$\begin{aligned} U^0 f(x) &= E^x \left[\int_0^\infty \left(f^+(X_t) - f^-(X_t) \right) dt \right] \\ &= E^x \left[\int_0^\infty f^+(X_t)\, dt \right] - E^x \left[\int_0^\infty f^-(X_t)\, dt \right] \\ &= U^0 f^+(x) - U^0 f^-(x) \end{aligned}$$

el resultado se obtiene para $\alpha = 0$. ■

La siguiente definición es crucial en el desarrollo de este trabajo, ya que la existencia una medida de referencia para X implica la existencia de una densidad potencial y más adelante podremos usar esta densidad como función de covarianza de un proceso gaussiano centrado.

Definición 31 *Sea $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proceso de Markov simple continuo por la derecha con espacio de estados $(S_\Delta, \mathcal{B}(S_\Delta))$. Sea $\mathbf{m}$ una medida σ-finita en $(S, \mathcal{B}(S))$. Se dice que X **tiene densidad α-potencial con respecto a** $\mathbf{m}$ si, restringido a S, $U^\alpha(x,\cdot)$ es absolutamente continuo con respecto a $\mathbf{m}$. En este caso, diremos que $\mathbf{m}$ **es una medida de referencia para** X.*

Denotaremos por $u^\alpha(x,y)$, $x, y \in S$, a una densidad para $U^\alpha(x,\cdot)$ con respecto a $\mathbf{m}$. En particular, $u(x,y) := u^0(x,y)$.

Lema 32 *Sea X un proceso de Markov simple continuo por la derecha. Si X tiene densidad α-potencial con respecto a $\mathbf{m}$ para alguna $\alpha \geq 0$, entonces X tiene densidad β-potencial con respecto a $\mathbf{m}$ para toda $\beta > 0$; y para cualesquiera $x \in S$ y $\alpha, \beta > 0$*

$$u^\alpha(x,y) - u^\beta(x,y) = (\beta - \alpha) \int u^\beta(x,z) u^\alpha(z,y) d\mathbf{m}(z)$$

para casi toda $y \in S$. El resultado también es válido para $\beta = 0$ si $U^0(x,\cdot)$ es una medida σ-finita. Más aún,

$$U^\alpha f(x) = \int u^\alpha(x,z) f(z) d\mathbf{m}(z)$$

para toda $f \in \mathcal{B}(S)$, cuando alguno de los lados exista.

Demostración. Supongamos que, para alguna $\alpha \geq 0$, $U^\alpha(x,\cdot)$ es absolutamente continuo con respecto a $\mathbf{m}$ para todo $x \in S$ y sea $A_0 \in \mathcal{B}(S)$ tal que $\mathbf{m}(A_0) = 0$. Entonces, $U^\alpha 1_{A_0} \equiv 0$ y, por lo tanto, $U^\beta U^\alpha 1_{A_0} \equiv 0$. Del Lema 30 (ecuación resolvente), $U^\beta 1_{A_0} \equiv 0$, es decir, $U^\beta(x,\cdot)$ es absolutamente continuo con respecto a $\mathbf{m}$ para toda $x \in S$.

Puesto que $U^\alpha(\cdot, A)$ es medible con respecto a $\mathcal{B}(S)$, es posible elegir $u^\alpha(x,y)$ medible con respecto a $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(S)$ (véase teorema en [2] página 279). Entonces, para cualquier $A \in \mathcal{B}(S)$, la ecuación resolvente implica

$$\begin{aligned} U^\alpha(x,A) - U^\beta(x,A) &= (\beta-\alpha) U^\beta U^\alpha 1_A \\ &= (\beta-\alpha)\int u^\beta(x,z)\int_A u^\alpha(z,y) d\mathbf{m}(y) d\mathbf{m}(z) \\ &= (\beta-\alpha)\int_A \int u^\beta(x,z) u^\alpha(z,y) d\mathbf{m}(z) d\mathbf{m}(y). \end{aligned}$$

Como $U^\alpha(x,A) - U^\beta(x,A) = \int_A \left(u^\alpha(x,y) - u^\beta(x,y)\right) d\mathbf{m}(y)$, se tiene

$$\int_A \left(u^\alpha(x,y) - u^\beta(x,y)\right) d\mathbf{m}(y) = (\beta-\alpha)\int_A \int u^\beta(x,z) u^\alpha(z,y) d\mathbf{m}(z) d\mathbf{m}(y).$$

Por lo tanto, excepto para un conjunto $\mathbf{m}\,(y)$-nulo, se tiene

$$u^\alpha(x,y) - u^\beta(x,y) = (\beta-\alpha)\int u^\beta(x,z) u^\alpha(z,y) d\mathbf{m}(z).$$

Si $S = \cup_{n=1}^\infty S_n$ y $U^0(x,\cdot)$ es sigma finita, entonces $U^0(x,A) = \int_A u^0(x,y) d\mathbf{m}(y) < \infty$ para todo $A \subseteq S_n$ y se demuestra como el caso anterior. ■

El siguiente teorema nos será de gran utilidad en el estudio de los tiempos locales.

Teorema 33 (Fórmula de Kac) *Sea X un proceso de Markov simple y continuo por la derecha con densidades 0-potencial, $u\,(x,y)$, con respecto a alguna medida de referencia $\mathbf{m}$. Entonces, para cualquier $f_i \in \mathcal{B}_b^+\,(S)$, $i = 1,2,...,n$,*

$$E^x\left[\prod_{i=1}^n \left(\int_0^\infty f_i\,(X_s)\,ds\right)\right] = \sum_\pi \int u\,(x,z_1)\,...u\,(z_{n-1},z_n) \prod_{i=1}^n f_{\pi_i}\,(z_i)\,d\mathbf{m}\,(z_i)\,,$$

donde se suma sobre todas las permutaciones π de $\{1,2,...,n\}$. En particular,

$$E^x\left[\left(\int_0^\infty f\,(X_s)\,ds\right)^n\right] = n! \int u\,(x,z_1)\,...u\,(z_{n-1},z_n) \prod_{i=1}^n f\,(z_i)\,d\mathbf{m}\,(z_i)\,.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E^x\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty f_i\left(X_s\right)ds\right)\right] &= E^x\left[\int_0^\infty f_1\left(X_s\right)ds\int_0^\infty f_2\left(X_s\right)ds...\int_0^\infty f_n\left(X_s\right)ds\right]\\
&= E^x\left[\int_{\mathbb{R}^+} f_1\left(X_{s_1}\right)ds_1\int_{\mathbb{R}^+} f_2\left(X_{s_2}\right)ds_2...\int_{\mathbb{R}^+} f_n\left(X_{s_n}\right)ds_n\right]\\
&= E^x\left[\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+}...\int_{\mathbb{R}^+} f_1\left(X_{s_1}\right)f_2\left(X_{s_2}\right)...f_n\left(X_{s_n}\right)ds_1ds_2...ds_n\right]\\
&= \int_{(\mathbb{R}^n)^+} E^x\left[\prod_{i=1}^{n} f_i\left(X_{s_i}\right)\right]\prod_{i=1}^{n} ds_i \text{ (Fubini)},
\end{aligned}$$

donde $\int_{(\mathbb{R}^n)^+}\prod_{i=1}^n ds_i := \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+}...\int_{\mathbb{R}^+} ds_1ds_2...ds_n$.

Si también definimos $\int_{\{0\le s_1\le s_2\le...\le s_n<\infty\}}\prod_{i=1}^n ds_i := \int_0^\infty\int_{s_1}^\infty...\int_{s_{n-1}}^\infty ds_nds_{n-1}...ds_1$, entonces

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^+} E^x\left[\prod_{i=1}^{n} f_i\left(X_{s_i}\right)\right]\prod_{i=1}^{n} ds_i = \sum_\pi\int_{\{0\le s_1\le s_2\le...\le s_n<\infty\}} E^x\left[\prod_{i=1}^{n} f_{\pi_i}\left(X_{s_i}\right)\right]\prod_{i=1}^{n} ds_i.$$

De la ecuación (3.1) obtenemos que esto es igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_\pi\int_{\{0\le s_1\le s_2\le...\le s_n<\infty\}}\int_S P_{s_1}(x,dz_1)f_{\pi_1}(z_1)...\int_S P_{s_n-s_{n-1}}(z_{n-1},dz_n)f_{\pi_n}(dz_n)\prod_{i=1}^{n} ds_i\\
=\;&\sum_\pi\int_{\{0\le s_1\le...\le s_{n-1}<\infty\}}\int_S P_{s_1}(x,dz_1)f_{\pi_1}(z_1)...\int_S P_{s_{n-1}-s_{n-2}}(z_{n-2},dz_{n-1})f_{\pi_{n-1}}(dz_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1} ds_i\\
&\int_0^\infty P_{s_n}(z_{n-1},dz_n)f_{\pi_n}(dz_n)ds_n.
\end{aligned}$$

De la definición del operador 0-potencial,

$$Uf(z_{n-1}) = \int_0^\infty P_{s_n}(z_{n-1},dz_n)f_{\pi_n}(dz_n)ds_n = \int u(z_{n-1},z_n)f_{\pi_n}(z_n)d\mathbf{m}\left(z_n\right).$$

Repitiendo este proceso, se tiene que $E^x\left[\prod_{i=1}^n\left(\int_0^\infty f_i\left(X_s\right)ds\right)\right]$ es igual a

$$\sum_\pi\int u(x,z_1)f_{\pi_1}(z_1)d\mathbf{m}\left(z_1\right)\int u(z_1,z_2)f_{\pi_2}(z_2)d\mathbf{m}\left(z_2\right)...\int u(z_{n-1},z_n)f_{\pi_n}(z_n)d\mathbf{m}\left(z_n\right),$$

que es lo que se quería demostrar. ■

3.3. Procesos de Borel por la derecha y propiedad fuerte de Markov

Definición 34 *Una colección $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$* ***es llamada un proceso de Borel por la derecha con semigrupo de transición*** *$\{P_t, t \geq 0\}$ si satisface las siguientes condiciones:*

1. *X es un proceso de Markov simple, continuo por la derecha y con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$.*

2. *$U^{\alpha} f(X_t)$ es continuo por la derecha en t para toda $\alpha > 0$ y toda $f \in C_b(S_\Delta)$.*

3. *$\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ satisface las condiciones habituales (completa y continua por la derecha).*

Como ejemplo de esta clase de procesos podemos mencionar los procesos de Lévy y, más generalmente, los procesos de Feller. Un proceso de Feller es un proceso de Borel por la derecha con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$ tal que $P_t : C_0(S) \to C_0(S)$ para cada $t \geq 0$. Es decir, $\{P_t, t \geq 0\}$ es una familia de operadores lineales. En este caso, consideramos $C_0(S)$ como un espacio de Banach bajo la norma uniforme $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$.

Definición 35 *Una familia de operadores lineales acotados $\{P_t, t \geq 0\}$ en $C_0(S)$ es un* ***semigrupo de contracciones fuertemente continuo*** *si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$P_{t+s} = P_t P_s$, para todo $s, t \geq 0$.*

2. *$\|P_t f\| \leq \|f\|$, para toda $f \in C_0(S)$ y toda $t \geq 0$.*

3. *$\lim_{t \to 0} \|P_t f - f\| = 0$, para toda $f \in C_0(S)$.*

Si, además de lo anterior, para cada $t \geq 0$, P_t es un operador positivo (i.e. $P_t f \geq 0$ para $f \geq 0$), entonces el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en la sección 4.1 de [11], nos permite asociar P_t con un subnúcleo de Markov en S.

Teorema 36 *Sean S un espacio localmente compacto con una base numerable y $\{P_t, t \geq 0\}$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo de operadores lineales positivos en $C_0(S)$. Entonces es posible construir un proceso de Feller X con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$.*

Recordemos que una variable aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{R}^+$ **es un tiempo de paro con respecto a la filtración** $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ si $\{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ para toda $t \geq 0$, y T **es un tiempo opcional** si $\{T < t\} \in \mathcal{G}_t$. Como antes, sea $\mathcal{G}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_{t+\varepsilon}$. Una propiedad particularmente útil en nuestro caso es la siguiente:

$$\{T < t\} \in \mathcal{G}_t \Leftrightarrow \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_{t^+}$$

(T es $\mathcal{G}_t$ tiempo opcional si y sólo si es $\mathcal{G}_{t^+}$ tiempo de paro). Recordemos también que, si T es $\mathcal{G}_t$ tiempo de paro, **la σ-álgebra detenida al tiempo** T es

$$\mathcal{G}_T = \{A \subseteq \mathcal{G} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_t \text{ para toda } t \geq 0\}.$$

En este caso, $\mathcal{G}_{T^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_{T+\varepsilon}$.

Diremos que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$, un proceso de Markov simple, continuo por la derecha y con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$, **satisface la propiedad fuerte de Markov** si para cada $\mathcal{G}_{t^+}$ tiempo de paro T,

$$E^x \left[f(X_{T+s}) 1_{(T<\infty)} | \mathcal{G}_{T^+} \right] = P_s f(X_T) 1_{(T<\infty)},$$

para todo $s \geq 0$, $x \in S_\Delta$ y $f \in \mathcal{B}_b(S_\Delta)$.

Queremos demostrar que todo proceso de Borel por la derecha satisface la propiedad fuerte de Markov. El siguiente teorema nos será útil para hacerlo.

Teorema 37 *Si X es progresivamente medible (con respecto a $\mathcal{G}_t$) y T es un $\mathcal{G}_t$ tiempo opcional, entonces X_T es $\mathcal{G}_{T^+}$ medible.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(S_\Delta)$. Como, $\mathcal{G}_{T^+} = \{A \subseteq \mathcal{G} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_{t^+}\} = \{A \subseteq \mathcal{G} : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{G}_t\}$, debemos probar que, para toda $t \geq 0$, $\{X_T \in B\} \cap \{T < t\} \in \mathcal{G}_t$. Definimos

$\psi_t : \{T < t\} \to [0,t] \times \Omega$ como

$$\omega \to (T(\omega), \omega)$$

y $\varphi_t : [0,t] \times \Omega \to S_\Delta$ como

$$(s, \omega) \to X_s(\omega).$$

Si ϕ es la restricción de X_T a $\{T < t\}$, entonces $\phi = \varphi_t \circ \psi_t$. Además, por hipótesis φ_t es $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{G}_t$-medible. Puesto que $0 \leq s_1 < s_2 < t$ y $H \in \mathcal{G}_t$ implican

$$\psi_t^{-1}((s_1, s_2), H) = \{s_1 < T < s_2\} \cap H \in \mathcal{G}_t,$$

se sigue que ψ_t es $\mathcal{G}_t$-medible. Por lo tanto, ϕ es $\mathcal{G}_t$-medible. Como $\{X_T \in B\} \cap \{T < t\} = \phi^{-1}(B)$, se tiene el resultado. ■

Teorema 38 *Sea $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proceso de Markov simple, continuo por la derecha y con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$. Si $U^\alpha f(X_t)$ es casi seguramente continuo por la derecha en t para toda $f \in C_b(S_\Delta)$, para toda $\alpha > 0$, entonces se satisface la propiedad fuerte de Markov. En particular, un proceso de Borel por la derecha satisface dicha propiedad.*

Demostración. Se demostrará que $P_s f(X_T) 1_{(T<\infty)}$ es $\mathcal{G}_{T+}$-medible para toda $f \in \mathcal{B}_b(S_\Delta)$ y que

$$E^x\left[1_A 1_{(T<\infty)} f(X_{T+s})\right] = E^x\left[1_A 1_{(T<\infty)} P_s f(X_T)\right]$$

para todo $A \in \mathcal{G}_{T+}$ y f Borel medible y acotada. Sea f continua. Se define $T_n = \frac{[2^n T]+1}{2^n}$, es decir, $T_n = j/2^n$ si y sólo si $(j-1)/2^n \leq T < j/2^n$, $j = 1, 2, ...$ Notamos entonces que $T < T_n$ y

$$\{T_n \leq t\} = \cup_{k=1}^{\frac{k}{2^n} \leq t} \left\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\right\} \in \mathcal{G}_t.$$

Por lo tanto, T_n es $\mathcal{G}_t$ tiempo de paro. Además, $T_n < \infty$ si y sólo si $T < \infty$. Como X es progresivamente medible (por ser $\mathcal{G}_t$ adaptado y continuo por la derecha), el Teorema 37 implica que X_T es $\mathcal{G}_{T+}$ medible. Esto es válido también para $1_{(T<\infty)} X_T$, pues $1_{(T<\infty)}$ es $\mathcal{G}_{T+}$-medible y, en consecuencia, para $1_{(T<\infty)} P_s f(X_T)$. Notamos que como $\{X_t, t \geq 0\}$ es continuo por la derecha en t, lo mismo sucede con $P_t f(x) = E^x[f(X_t)]$ para $f \in C_b(S_\Delta)$.

Podemos demostrar que $E^x\left[1_A 1_{(T<\infty)} f(X_{T+s})\right] = E^x\left[1_A P_s f(X_T) 1_{(T<\infty)}\right]$ si probamos que las transformadas de Laplace de $f(X_{T+s})$ y $P_s f(X_T)$ son iguales para $\alpha > 0$. Esto es, si probamos que:

$$\begin{aligned} E^x\left[1_A 1_{(T<\infty)}\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_{T+s})ds\right] &= E^x\left[1_A 1_{(T<\infty)}\int_0^\infty e^{-\alpha s} P_s f(X_T)ds\right] \\ &= E^x\left[1_A 1_{(T<\infty)} U^\alpha f(X_T)\right]. \end{aligned}$$

Si reemplazamos T por T_n en el lado izquierdo de esta ecuación y notamos que si $A \in \mathcal{G}_{T+}$ (esto es, $A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{G}_{t+}$ o, equivalentemente, $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{G}_t$), entonces $A \cap \{T_n = j/2^n\} \in \mathcal{G}_{j/2^n}$, la propiedad simple de Markov implica

$$\begin{aligned} E^x\left[1_A 1_{(T_n<\infty)}\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_{T_n+s})ds\right] &= \sum_{j=1}^\infty E^x\left[1_A 1_{(T_n=j/2^n)}\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_{T_n+s})ds\right] \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha s} E^x\left[1_{A\cap(T_n=j/2^n)} f\left(X_{j/2^n+s}\right)\right] ds \text{ (Fubini)} \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha s} E^x\left[E^x\left[1_{A\cap(T_n=j/2^n)} f\left(X_{j/2^n+s}\right) |\mathcal{G}_{j/2^n}\right]\right] ds \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha s} E^x\left[1_{A\cap(T_n=j/2^n)} P_s f(X_{j/2^n})\right] ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha s} E^x\left[1_A 1_{(T_n<\infty)} P_s f(X_{T_n})\right] ds. \end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos el resultado. ■

Sea $\zeta = \inf\{t > 0 : X_t = \Delta\}$. Nos referimos a ζ **como el tiempo de muerte o extinción de** X, pues el siguiente resultado nos dice que Δ es un estado absorbente.

Lema 39 *Sea $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proceso de Borel por la derecha. Entonces, condicionado a $\zeta < \infty$,*

$$X_t = \Delta$$

para toda $t \ge \zeta$, P^x c.s.

Demostración. La continuidad por la derecha de X_t implica que

$$\mathbb{P}^x\left(X_{\zeta+t} = \Delta,\ \text{para toda } t \ge 0; \zeta < \infty\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^x\left(X_{\zeta+i/2^n} = \Delta, i = 0, 1, ..., n2^n; \zeta < \infty\right).$$

Como ζ es tiempo de paro, de la propiedad fuerte de Markov se sigue que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^x\left(X_{\zeta+i/2^n}=\Delta, i=0,1,...,n2^n;\zeta<\infty\right) \\
&\qquad = E^x\left[E^x\left[1_{(\Delta)}\left(X_{\zeta+i/2^n}\right), i=0,1,...,n2^n;1_{(\zeta<\infty)}|\mathcal{G}_\zeta\right]\right] \\
&\qquad = E^x\left[1_{(\zeta<\infty)}E^x\left[1_{(\Delta)}\left(X_{\zeta+i/2^n}\right), i=0,1,...,n2^n;|\mathcal{G}_\zeta\right]\right] \\
&\qquad = E^x\left[1_{(\zeta<\infty)}E^\Delta\left[1_{(\Delta)}\left(X_{i/2^n}\right), i=0,1,...,n2^n\right]\right] \\
&\qquad = E^x\left[1_{(\zeta<\infty)}\mathbb{P}^\Delta\left(X_{i/2^n}=\Delta, i=0,1,...,n2^n\right)\right] \\
&\qquad = \mathbb{P}^x\left(\zeta<\infty\right),
\end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que

$$\mathbb{P}^\Delta\left(X_{i/2^n}=\Delta,\ i=0,1,...,n2^n\right)=1.$$

Por lo tanto, el resultado queda demostrado. ■

3.4. Procesos fuertemente simétricos

Un proceso de Borel por la derecha, X, **es simétrico con respecto a m** cuando su semigrupo asociado, $\{P_t, t\geq 0\}$, es simétrico con respecto a $\mathbf{m}$. Es decir, si

$$\int g(x)P_tf(x)d\mathbf{m}(x)=\int P_tg(x)f(x)d\mathbf{m}(x),$$

para toda f, $g\in\mathcal{B}(S)$ no negativas.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$|P_tf(x)|^2=|E^xf(X_t)|^2\leq E^x\left[|f(X_t)|^2\right]=P_t|f|^2(x).$$

De esto y de la definición de simetría, se sigue que

$$\begin{aligned}\int |P_t f(x)|^2 \, d\mathbf{m}(x) &\leq \int P_t |f|^2 (x) d\mathbf{m}(x) \\ &= \int |f(x)|^2 \, P_t 1(x) d\mathbf{m}(x) \\ &\leq \int |f(x)|^2 \, d\mathbf{m}(x),\end{aligned}$$

donde $1(x)$ es la función constante igual a 1. Esto es, P_t es una contracción en $L^2(\mathbf{m})$ para $f \in \mathcal{B}(S)$. De la definición de simetría también se sigue que

$$\int g(x) U^\alpha f(x) d\mathbf{m}(x) = \int U^\alpha g(x) f(x) d\mathbf{m}(x) \tag{3.8}$$

para toda $\alpha > 0$.

Definición 40 *Diremos que X* ***es fuertemente simétrico con respecto a m*** *si X es simétrico con respecto a $\mathbf{m}$ y tiene densidad α-potencial con respecto a $\mathbf{m}$ para alguna $\alpha > 0$.*

En este caso, por (3.8),

$$u^\alpha(x, y) = u^\alpha(y, x)$$

para casi toda x, $y \in S$ con respecto a $\mathbf{m}$ y $\alpha > 0$. Si $u^\alpha(x, y)$ es continua en $S \times S$, la igualdad anterior se satisface para toda x, $y \in S$.

Cuando hablemos de una aproximación de la identidad o de una función δ en y, con respecto a $\mathbf{m}$, nos referiremos a una familia de funciones $\{f_{\varepsilon,y}, \varepsilon > 0\}$ continuas y positivas en S, tales que cada $f_{\varepsilon,y}$ tiene soporte contenido en una vecindad compacta de y, K_ε con $K_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \{y\}$, y $\int f_{\varepsilon,y}(x) \, d\mathbf{m}(x) = 1$. Podemos observar que esta es simplemente una generalización de la función $f_{\varepsilon,a}$ para el movimiento browniano.

Definición 41 *Una matriz A de $n \times n$ con entradas reales es* ***positiva semi-definida si*** *$\sum_{k,l=1}^n b_k b_l A_{kl} \geq 0$, para cualesquiera números reales $b_1, b_2, ..., b_n$. A* ***es positiva definida si*** *$\sum_{k,l=1}^n b_k b_l A_{kl} > 0$, para cualesquiera números reales $b_1, b_2, ..., b_n$.*

Recordemos que una función $h(x, y)$ en $S \times S$ es positiva (semi) definida si, para $n \geq 1$ y $x_1, x_2, ..., x_n$ en S, la matriz A definida por $A_{ij} = h(x_i, x_j)$ es positiva (semi) definida. Una función $g(x)$ en S es positiva (semi) definida si la función $h(x,y) := g(x-y)$ es positiva (semi) definida.

Cuando la densidad α-potencial, $u^\alpha(x,y)$, es continua, el siguiente lema permitie asociar al proceso de Borel por la derecha y fuertemente simétrico X, un proceso gaussiano de media cero y covarianza $u^\alpha(x,y)$.

Lema 42 *Sea $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proceso de Markov simple, continuo por la derecha, con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$, fuertemente simétrico con respecto a alguna medida de referencia $\mathbf{m}$ y con densidades α-potencial continuas para $\alpha > 0$. Entonces $u^\alpha(x,y)$ es positiva semi-definida. Si $u(x,y)$ es continua en S, también se satisface para $\alpha = 0$.*

Demostración. De las propiedades de semigrupo y simetría,

$$\begin{aligned}
\int\int u^\alpha(x,y) f(y) f(x) d\mathbf{m}(y) d\mathbf{m}(x) &= \int f(x) U^\alpha f(x) d\mathbf{m}(x) \\
&= \int_0^\infty \int f(x) e^{-\alpha t} P_t f(x) d\mathbf{m}(x) dt \\
&= \int_0^\infty \int f(x) e^{-\alpha t} P_{t/2} P_{t/2} f(x) d\mathbf{m}(x) dt \\
&= \int_0^\infty \int e^{-\alpha t} \left| P_{t/2} f(x) \right|^2 d\mathbf{m}(x) dt \geq 0.
\end{aligned}$$

Sea $f_{\varepsilon,z}(x)$ una aproximación de una función δ en z. Para cualesquiera $a_i \in \mathbb{R}$ y $z_i \in S$ $(i = 1, 2, ..., n)$ definimos $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_{\varepsilon, z_i}(x)$, entonces de la ecuación anterior,

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int\int u^\alpha(x,y) f_{\varepsilon,z_i}(x) f_{\varepsilon,z_j}(y) d\mathbf{m}(x) d\mathbf{m}(y) \geq 0.$$

Si tomamos el límite cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j u^\alpha(z_i, z_j) \geq 0.$$

Por lo tanto, $u^\alpha(x,y)$ es positiva semi-definida. ■

Definición 43 *El semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$* ***tiene densidades de transición regulares con respecto a*** $\mathbf{m}$ *si existe $\{p_t(x,y) : (t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times S \times S\}$, una familia de fun-*

ciones no negativas, medible con respecto a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(S)$ *y tal que*

$$P_t f(x) = \int p_t(x,z) f(z) d\mathbf{m}(z)$$

para toda $t > 0$ *y* f *acotada y* $\mathcal{B}_b(S)$ *medible, y*

$$p_{t+s}(x,y) = \int p_s(x,z) p_t(z,y) d\mathbf{m}(z)$$

para toda $s,\ t > 0$.

La última ecuación, de Chapman-Kolmogorov, es el caso general de la presentada para el movimiento browniano. Inversamente, un conjunto de funciones $\{p_t(x,y) : (t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times S \times S\}$ medible con respecto a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(S)$ y que satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov, determina un semigrupo.

Observamos que si las densidades de transición existen,

$$\begin{aligned} U^\alpha f(x) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(\int p_t(x,z) f(z) d\mathbf{m}(z) \right) dt \\ &= \int \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x,z) dt \right) f(z) d\mathbf{m}(z), \end{aligned}$$

y las densidades α-potencial existen y están dadas por

$$u^\alpha(x,z) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_t(x,z) dt. \tag{3.9}$$

De manera análoga, se dice que **la familia** $\{p_t(x,y) : (t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times S \times S\}$ **de densidades de transición regulares es simétrica** si $p_t(x,y) = p_t(y,x)$ para toda $(t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times S \times S$. En consecuencia, la simetría de las densidades de transición implica la de las densidades α-potencial. Por lo tanto, un proceso de Markov simple con semigrupo $\{P_t, t \geq 0\}$ cuyas densidades de transición son regulares y simétricas, es fuertemente simétrico. En particular, esto se satisface para un proceso de Borel por la derecha.

Por otra parte, **puede demostrarse que todo proceso de Borel por la derecha**

fuertemente simétrico tiene densidades de transición regulares y simétricas ([14], 1986). Usaremos este resultado de aquí en adelante, ya que nos permite definir las densidades α-potencial usando 3.9 y la densidad 0-potencial $u(x,y)$, queda bien definida como $\lim_{\alpha\to 0} u^{\alpha}(x,y)$ (aunque pueda ser infinita). En este caso, si $\alpha_1 < \alpha_2$, se tiene $u^{\alpha_2}(x,y) < u^{\alpha_1}(x,y)$, esto es, $u^{\alpha}(x,y)$ es creciente conforme $\alpha \downarrow 0$.

El siguiente lema nos muestra que cuando las densidades de transición regulares existen, no es necesaria la continuidad de la densidad α-potencial $u^{\alpha}(x,y)$, para garantizar que $u^{\alpha}(x,y)$ sea positiva semi-definida.

Lema 44 *Sea $\{p_t(x,y) : (t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times S \times S\}$ una familia simétrica de densidades de transición regulares con respecto a alguna medida de referencia $\mathbf{m}$. Entonces, para cada $t > 0$, $p_t(x,y)$ es positiva semi-definida. Por lo tanto, cuando $u^{\alpha}(x,y)$ existe, para alguna $\alpha \geq 0$, es positiva semi-definida.*

Demostración. La ecuación de Chapman-Kolmogorov y la simetría implican

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j p_t(x_i,x_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \int p_{t/2}(x_i,z) p_{t/2}(z,x_j) d\mathbf{m}(z) \\
&= \int \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j p_{t/2}(x_i,z) p_{t/2}(z,x_j) \right) d\mathbf{m}(z) \\
&= \int \left| \sum_{i=1}^{n} a_i p_{t/2}(x_i,z) \right|^2 d\mathbf{m}(z) \geq 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $p_t(x,y)$ es positiva semi-definida. Ahora, de este resultado se sigue que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j u^{\alpha}(x_i,x_j) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j p_t(x_i,x_j) \right) dt \geq 0.$$

Por lo tanto, $u^{\alpha}(x,y)$ es positiva semi-definida. ■

Sea $A \subseteq S$. Al igual que en el caso del movimiento browniano definimos $T_A := \inf\{t > 0 : X_t \in A\}$, es decir, la primera vez que el proceso entra en el conjunto A. En [12], página 96, se demuestra que si X es un proceso continuo por la derecha, entonces T_A es $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro para todo $A \in \mathcal{B}(S_{\Delta})$. Si usamos este resultado y suponemos que las densidades α-potencial son continuas, se tiene lo siguiente:

Lema 45 *Sea* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ *un proceso de Borel por la derecha con* $u^\alpha(x,y)$ *continua en* $S \times S$ *para alguna* $\alpha \geq 0$. *Entonces, para toda* $x, y \in S$,

$$u^\alpha(x,y) \leq u^\alpha(y,y) \tag{3.10}$$

y $u^\alpha(x,y)$ *es continua en* y, *uniformemente continua en* x. *Además, para cualquier compacto* $K \subseteq S$,

$$\sup_{x \in S; y, y' \in K} \left| u^\alpha(x,y) - u^\alpha(x,y') \right| \leq \sup_{x, y, y' \in K} \left| u^\alpha(x,y) - u^\alpha(x,y') \right|.$$

Demostración. Sean $z \in S$ fija y N una vecindad de z con cerradura compacta en S. Si f es una función medible y acotada, con soporte contenido en N,

$$\begin{aligned}
\int u^\alpha(x,y) f(y) d\mathbf{m}(y) &= E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds\right] \text{ (definición de } U^\alpha f(x)) \\
&= E^x\left[\int_{T_N}^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds 1_{(T_N<\infty)}\right] \text{ (} f \text{ tiene soporte en } N) \\
&= E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha(T_N+s)} f(X_{T_N+s}) ds 1_{(T_N<\infty)}\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_N}\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_{T_N+s}) ds 1_{(T_N<\infty)}\right] \\
&= E^x\left[E^x\left[e^{-\alpha T_N}\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_{T_N+s}) 1_{(T_N<\infty)} ds | \mathcal{G}_{T_N^+}\right]\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} E^{X_{T_N}}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds\right]\right].
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la propiedad fuerte de Markov y de la ecuación 3.2. Como

$$\begin{aligned}
E^{X_{T_N}}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds\right] &= U^\alpha f(X_{T_N}) \\
&= \int u^\alpha(X_{T_N}, y) f(y) d\mathbf{m}(y),
\end{aligned}$$

entonces

$$\int u^\alpha(x,y) f(y) d\mathbf{m}(y) = E^x\left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} \int u^\alpha(X_{T_N}, y) f(y) d\mathbf{m}(y)\right].$$

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de aproximaciones de la identidad que convergen a δ_z y usamos la ecuación anterior con $f = f_n$, como $u^\alpha(x,y)$ es uniformemente continua en $\overline{N} \times \overline{N}$ (pues $\overline{N}$ es compacta) y f_n también lo es en $\overline{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int u^\alpha(x,y) f_n(y)\, d\mathbf{m}(y) &= \int \lim_{n\to\infty} u^\alpha(x,y) f_n(y)\, d\mathbf{m}(y) \\ &= u^\alpha(x,z) \end{aligned}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} \int u^\alpha(X_{T_N}, y) f_n(y)\, d\mathbf{m}(y) \right]$$

$$\begin{aligned} &= E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} \int \lim_{n\to\infty} u^\alpha(X_{T_N}, y) f_n(y)\, d\mathbf{m}(y) \right] \\ &= E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} u^\alpha(X_{T_N}, z) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u^\alpha(x,z) = E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} u^\alpha(X_{T_N}, z) \right].$$

Como $\alpha \geq 0$, $e^{-\alpha T_N} \leq 1$. Además, si $x \in N$, entonces $T_N = 0$ bajo $\mathbb{P}^x$. Esto implica que para toda $x \in N$, $y \notin N$,

$$\begin{aligned} u^\alpha(x,z) &= E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} u^\alpha(X_{T_N}, z) \right] \\ &= E^x \left[1_{(T_N<\infty)} u^\alpha(X_{T_N}, z) \right] \\ &\geq E^y \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} u^\alpha(X_{T_N}, z) \right] \\ &= u^\alpha(y,z). \end{aligned}$$

Puesto que lo anterior es válido para cualquiera de tales vecindades N de z, se tiene el primer resultado.

Ahora, si $x \in S$ y $y, y' \in N$, entonces

$$\begin{aligned} \left| u^\alpha(x,y) - u^\alpha(x,y') \right| &= \left| E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} u^\alpha(X_{T_N}, y) \right] - E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} u^\alpha(X_{T_N}, y') \right] \right| \\ &= \left| E^x \left[e^{-\alpha T_N} 1_{(T_N<\infty)} \left(u^\alpha(X_{T_N}, y) - u^\alpha(X_{T_N}, y') \right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; E^{x}\left[e^{-\alpha T_N}1_{(T_N<\infty)}\left|u^{\alpha}\left(X_{T_N},y\right)-u^{\alpha}\left(X_{T_N},y'\right)\right|\right] \\
&\leq \; \sup_{x\in\overline{N}}\left|u^{\alpha}\left(x,y\right)-u^{\alpha}\left(x,y'\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Esto implica

$$
\sup_{x\in S}\left|u^{\alpha}\left(x,y\right)-u^{\alpha}\left(x,y'\right)\right|\leq\sup_{x\in\overline{N}}\left|u^{\alpha}\left(x,y\right)-u^{\alpha}\left(x,y'\right)\right|
$$

y se sigue el segundo resultado, ya que es posible encontrar una sucesión $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ de abiertos con cerradura compacta tales que $K=\cap_{j=1}^{\infty}\overline{N}_j$. ■

Por otra parte, se tiene también el siguiente resultado.

Lema 46 *Sea X un proceso de Borel por la derecha, fuertemente simétrico con densidad α-potencial $u^{\alpha}(x,y)$ continua en $S\times S$ para alguna $\alpha\geq 0$. Entonces, para toda $y\in S$,*

$$
u^{\alpha}\left(y,y\right)>0.
$$

Demostración. Por el lema 45, si $u^{\alpha}(z,z)=0$ para alguna $z\in S$ fija, se tendría que $u^{\alpha}(z,x)=u^{\alpha}(x,z)=0$. Esto implica que $U^{\alpha}(z,S)=\int_S u^{\alpha}(z,x)\,d\mathbf{m}(x)=0$. Por lo tanto, $P_t(z,S)=P^{z}(X_t\in S)=0$ para casi toda t. Pero esto contradice que $P^{z}(X_0=z)=1$ y que X_t es continuo por la derecha. ■

3.5. Procesos matados

Si consideramos un proceso de Borel por la derecha X con semigrupo de transición $\{P_t,t\geq 0\}$, entonces para cada $\alpha>0$ es posible construir otro proceso de Borel por la derecha, $\widehat{X}$, en $(S,\mathcal{B}(S))$ con semigrupo de transición $\left\{e^{-\alpha t}P_t,t\geq 0\right\}$. Se dice, en este caso, que $\widehat{X}$ **se obtiene de matar a** X en un tiempo exponencial independiente (de X) con media $1/\alpha$, ya que se obtiene de la siguiente manera:

Sean $\widehat{\Omega}=\Omega\times\mathbb{R}^{+}$, $\widehat{\mathcal{G}}=\mathcal{G}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{+})$ y $\widehat{\omega}=(\omega,s)$. También definimos $\widehat{\mathbb{P}}^{x}=\mathbb{P}^{x}\times\alpha e^{-\alpha s}ds$, $x\in S_{\Delta}$, una familia de medidas en $\left(\widehat{\Omega},\widehat{\mathcal{G}}\right)$ y $\lambda(\omega,s)=s$ (es decir, λ es una variable aleatoria exponencial con media $1/\alpha$ bajo cada $\widehat{\mathbb{P}}^{x}$). Las σ-álgebras $\widehat{\mathcal{G}}_t$ consisten de aquellos conjuntos

$\widehat{A} \in \widehat{\mathcal{G}}$ tales que $\widehat{A} \cap (\Omega \times (t, \infty)) = A \times (t, \infty)$ para alguna $A \in \mathcal{G}_t$. Si definimos el proceso

$$\widehat{X}_t(\widehat{\omega}) = \widehat{X}_t(\omega, s) := \begin{cases} X_t(\omega) & t < s \\ \Delta & t \geq s \end{cases}$$

y los operadores de corrimiento

$$\widehat{\theta}_t(\omega) := (\theta_t \omega, (s-t) \vee 0),$$

entonces del hecho de que $t \geq 0$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t \circ \widehat{\theta}_r &= \widehat{X}_t(\theta_r \omega, (s-r) \vee 0) \\ &= \begin{cases} X_t(\theta_r \omega) & t < (s-r) \vee 0 \\ \Delta & t \geq (s-r) \vee 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} X_{t+r}(\omega) & t+r < s \\ \Delta & t+r \geq s \end{cases} \\ &= \widehat{X}_{t+r}. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea $\widehat{P}_t f(x) := \widehat{E}^x \left[f(\widehat{X}_t) \right]$. Entonces, si $f \in \mathcal{B}_b(S)$,

$$\begin{aligned} \widehat{P}_t f(x) &= \widehat{E}^x \left[f(\widehat{X}_t) \right] \\ &= \widehat{E}^x \left[f(X_t) 1_{(t<\lambda)} \right] \\ &= \int_0^\infty \left(\int f(X_t) 1_{(t<\lambda)} d\mathbb{P}^x \right) \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \int_0^\infty E^x(f(X_t)) 1_{(t<\lambda)} \alpha e^{-\alpha s} ds \\ &= \left(\int_0^\infty 1_{(t<\lambda)} \alpha e^{-\alpha s} ds \right) E^x(f(X_t)) \\ &= \left(\int_t^\infty \alpha e^{-\alpha s} ds \right) E^x(f(X_t)) \\ &= e^{-\alpha t} E^x(f(X_t)) \\ &= e^{-\alpha t} P_t f(x). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora, si $\widehat{A} \in \widehat{\mathcal{G}}_t$ y usamos la propiedad simple de Markov de X se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^x \left[f(\widehat{X}_{t+s}) 1_{\widehat{A}} \right] &= \widehat{E}^x \left[f(X_{t+s}) 1_{(t+s<\lambda)} 1_A \right] \\
&= e^{-\alpha(t+s)} E^x \left[f(X_{t+s}) 1_A \right] \\
&= e^{-\alpha(t+s)} E^x \left[E^x \left[f(X_{t+s}) 1_A | \mathcal{G}_t \right] \right] \\
&= e^{-\alpha(t+s)} E^x \left[P_s f\left(X_t\right) 1_A \right] \\
&= e^{-\alpha t} E^x \left[e^{-\alpha s} P_s f\left(X_t\right) 1_A \right] \\
&= e^{-\alpha t} E^x \left[\widehat{P}_s f\left(X_t\right) 1_A \right] \\
&= \widehat{E}^x \left[\widehat{P}_s f\left(X_t\right) 1_{(t<\lambda)} 1_A \right] \\
&= \widehat{E}^x \left[\widehat{P}_s f\left(\widehat{X}_t\right) 1_{\widehat{A}} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\widehat{E}^x \left[f(\widehat{X}_{t+s}) | \widehat{\mathcal{G}}_t \right] = \widehat{P}_s f\left(\widehat{X}_t\right).$$

Si aplicamos este procedimiento con $\widehat{A} = \widehat{\Omega}$, podemos ver que $\left\{\widehat{P}_t, t \geq 0\right\}$ es un semigrupo. Por lo tanto, $\widehat{X}$ es un proceso de Markov simple. Además, el mapeo $t \longmapsto \widehat{X}_t$ es continuo por la derecha y la ecuación (3.11) implica que

$$\widehat{U}^\beta f\left(x\right) := \int_0^\infty e^{-\beta t} \widehat{P}_t dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)t} P_t dt = U^{\alpha+\beta} f\left(x\right).$$

Sabemos que si X es fuertemente simétrico con densidad α-potencial continua $u^\alpha\left(x, y\right)$ para alguna $\alpha > 0$, de la ecuación resolvente para densidades α-potencial (Lema 32) y del Lema 45 se sigue que la densidad de potencial también es continua para cualquier otra α. Entonces, $\widehat{U}^\beta f\left(x\right)$ es continuo en S para cualquier $f \in C_b\left(S_\Delta\right)$ y $\beta > 0$. Por lo tanto, $\widehat{U}^\beta f\left(\widehat{X}_t\right)$ es continuo por la derecha en $t < \zeta$ para cualquier $f \in C_b\left(S_\Delta\right)$ y $\beta > 0$. Pero $\widehat{X}_t = \Delta$ para toda $t \geq \zeta$. En consecuencia, $\widehat{U}^\beta f\left(\widehat{X}_t\right)$ es continuo por la derecha en t. Como vimos anteriormente, es posible completar la filtración $\widehat{\mathcal{G}}_t$ y obtener un proceso de Borel por la derecha.

Capítulo 4

Tiempos locales de procesos de Borel por la derecha

Los tiempos locales para procesos de Borel por la derecha son una generalización del tiempo local definido para el movimiento browniano. Una vez definidos, estudiaremos su relación tanto con los operadores de transición y potencial, como con la propiedad de recurrencia o transitoriedad del proceso.

Definición 47 *Sea X un proceso de Borel por la derecha. Una familia de variables aleatorias $A = \{A_t, t \geq 0\}$ en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un **funcional continuo aditivo (FCA)** de X si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$t \longmapsto A_t$ es c.s. continuo y no decreciente con $A_0 = 0$ y $A_t = A_\zeta$ para toda $t \geq \zeta$.*
2. *A_t es $\mathcal{F}_t$ medible.*
3. *$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t$ para toda $s, t \geq 0$ c. s.*

Esta definición de FCA es similar a la que se estableció para el movimiento browniano. La única diferencia es que en el caso de un proceso de Borel por la derecha X se impone la condición $A_t = A_\zeta$ para toda $t \geq \zeta$ (esto es, cualquier FCA A_t de X debe permanecer constante para $t \geq \zeta$), ya que Δ es un estado absorbente.

Definición 48 *Si $y \in S$, $\{A_t, t \geq 0\}$ es un FCA de X y*

$$R_A(\omega) = \text{ínf}\{t : A_t(\omega) > 0\},$$

*entonces $\{A_t, t \geq 0\}$ **es un tiempo local de X en y** si*

$$\mathbb{P}^y(R_A = 0) = 1 \tag{4.1}$$

y para toda $x \neq y$ se tiene $\mathbb{P}^x(R_A = 0) = 0$.

Cuando tratamos el caso del movimiento browniano, primero se definió el tiempo local como un límite de integrales de aproximaciones de la identidad y después se probó que ese límite satisfacía las propiedades de un FCA. En contraste, para un proceso de Borel por la derecha X un tiempo local es cualquier FCA que satisfaga (4.1). Es decir, el tiempo local no necesariamente es único.

Sin embargo, cuando queremos construir de forma explícita un tiempo local para X, la forma de hacerlo es análoga a la que se emplea en la definición de tiempo local del movimiento browniano y se tiene el siguiente teorema de existencia.

Teorema 49 *Sea $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proceso de Borel por la derecha, fuertemente simétrico y con una densidad α-potencial $u^\alpha(x,y)$. Entonces, para cada $y \in S$ es posible construir un tiempo local $\{L_t^y, t \geq 0\}$ de X en y, tal que, para cada $x \in S$,*

$$E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right] = u^\alpha(x,y). \tag{4.2}$$

*Si $f_{\varepsilon,y}$ es una aproximación de una función δ en y con respecto a la medida de referencia **m**, entonces existe una sucesión $\{\varepsilon_n\} \to 0$ tal que c. s.*

$$L_t^y = \lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^t f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\, ds \tag{4.3}$$

uniformemente para $t \in [0,T]$, donde T es un tiempo finito que puede ser aleatorio.

Demostración. Sean $\alpha > 0$ y λ una variable exponencial con media $1/\alpha$ e independiente de X. Denotaremos por $\widehat{X} = \left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{G}}, \widehat{\mathcal{G}}_t, \widehat{X}_t, \widehat{\theta}_t, \widehat{\mathbb{P}}^x\right)$ al proceso obtenido de matar a X en un tiempo λ. Podemos ver que la densidad 0-potencial de $\widehat{X}$ está dada por $u^\alpha(x,y)$. Si aplicamos la fórmula de Kac a

$$I_{\varepsilon,\varepsilon'}(x) := \widehat{E}^x\left[\left(\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds\right)\left(\int_0^\infty f_{\varepsilon',y}\left(\widehat{X}_s\right)ds\right)\right] \tag{4.4}$$

donde $f_{\varepsilon,y}$ y $f_{\varepsilon',y}$ son dos aproximaciones de la identidad, obtenemos

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,\varepsilon'}(x) &= \int u^\alpha(x,z_1)\,u^\alpha(z_1,z_2)\,f_{\varepsilon,y}(z_1)\,f_{\varepsilon',y}(z_2)\,d\mathbf{m}(z_1)\,d\mathbf{m}(z_2) \\ &\quad + \int u^\alpha(x,z_1)\,u^\alpha(z_1,z_2)\,f_{\varepsilon',y}(z_1)\,f_{\varepsilon,y}(z_2)\,d\mathbf{m}(z_1)\,d\mathbf{m}(z_2). \end{aligned}$$

Como $\int f_{\varepsilon,y}(x)\,d\mathbf{m}(x) = 1$ y $\int f_{\varepsilon',y}(x)\,d\mathbf{m}(x) = 1$, se tiene que

$$2\inf_{z,z'\in K_{\varepsilon\vee\varepsilon'}} u^\alpha(x,z)\,u^\alpha\left(z,z'\right) \le I_{\varepsilon,\varepsilon'}(x) \le 2\sup_{z,z'\in K_{\varepsilon\vee\varepsilon'}} u^\alpha(x,z)\,u^\alpha\left(z,z'\right). \tag{4.5}$$

De la continuidad de $u^\alpha(x,y)$ y de (4.5) se sigue que $\widehat{E}^x\left[\left(\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds\right)^2\right] = I_{\varepsilon,\varepsilon}(x)$ satisface

$$2\inf_{z,z'\in K_\varepsilon} u^\alpha(x,z)\,u^\alpha\left(z,z'\right) \le \widehat{E}^x\left[\left(\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds\right)^2\right] \le 2\sup_{z,z'\in K_\varepsilon} u^\alpha(x,z)\,u^\alpha\left(z,z'\right).$$

Esto es, $\left(\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds\right)$ converge en $L^2\left(\widehat{\mathbb{P}}^x\right)$ si $\varepsilon \to 0$. Además, de la continuidad uniforme de $u^\alpha(x,y)$ en x (lema 45) tenemos que esta convergencia es uniforme en $x \in S$.

Definimos

$$M_t^\varepsilon = \widehat{E}^x\left[\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds|\widehat{\mathcal{G}}_t\right]$$

y observamos que M_t^ε es una martingala (continua por la derecha). Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} M_t^\varepsilon &= \int_0^t f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds + \widehat{E}^x\left[\int_t^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds|\widehat{\mathcal{G}}_t\right] \\ &= \int_0^t f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds + \widehat{E}^x\left[\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_{t+s}\right)ds|\widehat{\mathcal{G}}_t\right] \\ &= \int_0^t f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds + \widehat{E}^{\widehat{X}_t}\left[\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds\right] \text{ (propiedad simple de Markov)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$= \int_0^t f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right) ds + \int u^\alpha\left(\widehat{X}_t, z\right) f_{\varepsilon,y}(z)\, d\mathbf{m}(z) \text{ (fórmula de Kac, Teorema 33).}$$

Como $M_\infty^\varepsilon = \int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right) ds$, si usamos la desigualdad de Doob aplicada a la martingala $\left(M_t^\varepsilon - M_t^{\varepsilon'}\right)_{t\geq 0}$,

$$\widehat{E}^x\left[\sup_{t\geq 0}\left|M_t^\varepsilon - M_t^{\varepsilon'}\right|^2\right] \leq 4\widehat{E}^x\left[\left|M_\infty^\varepsilon - M_\infty^{\varepsilon'}\right|^2\right],$$

se sigue que

$$\widehat{E}^x\left[\sup_{t\geq 0}\left|M_t^\varepsilon - M_t^{\varepsilon'}\right|^2\right] \leq 4\widehat{E}^x\left[\left|\int_0^\infty f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right) ds - \int_0^\infty f_{\varepsilon',y}\left(\widehat{X}_s\right) ds\right|^2\right].$$

Es decir, M_t^ε converge en $L^2\left(\widehat{\mathbb{P}}^x\right)$ uniformemente en t y en x si $\varepsilon, \varepsilon' \to 0$, ya que

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\left(f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right) - f_{\varepsilon',y}\left(\widehat{X}_s\right)\right) = 0.$$

Por otra parte, de la continuidad uniforme de $u^\alpha(x,z)$ en x y como sabemos que

$$u^\alpha(x,z) \leq u^\alpha(z,z) \qquad x, z \in S$$

y

$$\sup_{x\in S; z,z'\in K}\left|u^\alpha(x,z) - u^\alpha\left(x,z'\right)\right| \leq \sup_{x,z,z'\in K}\left|u^\alpha(x,z) - u^\alpha\left(x,z'\right)\right|$$

para cualquier compacto $K \subseteq S$ (lema 45), se sigue que $\int u^\alpha\left(\widehat{X}_t, z\right) f_{\varepsilon,y}(z)\, d\mathbf{m}(z)$ converge en $L^2\left(\widehat{\mathbb{P}}^x\right)$ uniformemente en t y en x si $\varepsilon \to 0$. Para observar esto, notamos que

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^x\left[\left|\int u^\alpha\left(\widehat{X}_t, z\right) f_{\varepsilon,y}(z)\, d\mathbf{m}(z) - u^\alpha\left(\widehat{X}_t, y\right)\right|^2\right] &\leq \widehat{E}^x\left[\left|\sup_{z'\in K} u^\alpha\left(\widehat{X}_t, z\right) - u^\alpha\left(\widehat{X}_t, y\right)\right|^2\right] \\
&\leq \widehat{E}^x\left[\sup_{z'\in K}\left|u^\alpha\left(\widehat{X}_t, z\right) - u^\alpha\left(\widehat{X}_t, y\right)\right|^2\right].
\end{aligned}$$

En consecuencia, como

$$\int_0^t f_{\varepsilon,y}\left(\widehat{X}_s\right) ds = M_t^\varepsilon - \int u^\alpha\left(\widehat{X}_t, z\right) f_{\varepsilon,y}(z)\, d\mathbf{m}(z)$$

es posible encontrar una subsucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que si $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\int_0^{t\wedge\lambda} f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds = \int_0^t f_{\varepsilon_n,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds$$

converge uniformemente en t y $\widehat{\mathbb{P}}^x$-casi seguramente en $x \in S$. Como $f_{\varepsilon_n,y}(X_r) = f_{\varepsilon_n,y}(\Delta) = 0$ si $r \geq \lambda$,

$$\begin{aligned}\int_0^t f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds &= \begin{cases} \int_0^t f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds \text{ si } t<\lambda \\ \int_0^\lambda f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds \text{ si } t\geq\lambda \end{cases} \\ &= \int_0^{t\wedge\lambda} f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds\end{aligned}$$

y $P(\lambda > u) = e^{-\alpha u} > 0$ si $u > 0$, se sigue que para esta sucesión $\{\varepsilon_n\}$, $\int_0^t f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds$ converge uniformemente para $t \in [0,u]$, $\mathbb{P}^x$-casi seguramente para $x \in S$. Sea

$$\overline{\Omega} = \left\{\omega : \int_0^t f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds \text{ converge localmente uniformemente en } t\right\}.$$

Los argumentos anteriores prueban que $\mathbb{P}^x\left(\overline{\Omega}\right) = 1$, para $x \in S$. Entonces, definimos

$$L_t^y := \begin{cases} \lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_0^t f_{\varepsilon_n,y}(X_s)\,ds & \omega\in\overline{\Omega} \\ 0 & \omega\notin\overline{\Omega} \end{cases}$$

y puede demostrarse, como se hizo en el caso del movimiento browniano, que L_t^y es un funcional continuo aditivo.

Ahora, de (4.4) se sigue que la sucesión $\int_0^\infty f_{\varepsilon_n,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds$ para $n = 1,2,...$ es uniformemente integrable. Por lo tanto, si usamos la fórmula de Kac,

$$\begin{aligned}\widehat{E}^x\left[L_\lambda^y\right] &= \lim_{n\to\infty}\widehat{E}^x\left[\int_0^\infty f_{\varepsilon_n,y}\left(\widehat{X}_s\right)ds\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\int u(x,z)\,f_{\varepsilon_n,y}(z)\,d\mathbf{m}(z) = u^\alpha(x,y).\end{aligned}$$

Por otra parte, también se tiene

$$\widehat{E}^x\left[L_\lambda^y\right] = \alpha E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}L_t^y\,dt\right].$$

Si el lado derecho de esta ecuación es finito, entonces

$$\limsup_{t\to\infty} e^{-\alpha t} L_t^y = 0.$$

Si, en contraste, suponemos que existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que $e^{-\alpha t_n} L_{t_n}^y \geq \delta$ para alguna $\delta > 0$, entonces $e^{-\alpha t} L_t^y \geq \delta/2$ para $t \in [t_n, t_n + (1/\alpha)\log 2]$. Pero esto contradice el hecho de que $u^\alpha(x, y)$ sea finita. Si aplicamos esta observación y notamos que usando integración por partes

$$\begin{aligned} \alpha E^x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} L_t^y dt \right] &= E^x \left[-e^{-\alpha t} L_t^y |_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y \right] \\ &= E^x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y \right], \end{aligned}$$

obtenemos (4.2).

Para demostrar que $\{L_t^y, t \geq 0\}$ es un tiempo local para X en y, es suficiente probar que $R = R_{L^y} = \inf\{t : L_t^y(\omega) > 0\}$ satisface las condiciones de dicha definición. Pero de (4.3) y de la continuidad por la derecha de X, se sigue que $\mathbb{P}^x(R = 0) = 0$ para toda $x \neq y$.

Supóngase que $\mathbb{P}^y(R = 0) = 0$. Esto implica que $\mathbb{P}^x(R = 0) = 0$ para toda $x \in S$. Puesto que para cualquier $z \in S$,

$$\mathbb{P}^z(L_t^y > 0) \leq \mathbb{P}^z(R < t),$$

se tiene

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{P}^z(L_t^y > 0) = 0 \tag{4.7}$$

para toda $z \in S$. Para ver que esto no es posible, notamos que de la definición de R, para cualesquiera x y $t > 0$,

$$\mathbb{P}^x(R < \infty) = \mathbb{P}^x\left(L_{R+t}^y > 0, R < \infty\right). \tag{4.8}$$

Como R es un tiempo de paro (ya que $L_t^y(\omega)$ es $\mathcal{F}_t$ medible), podemos usar la aditividad del tiempo local y la propiedad fuerte de Markov, para concluir de (4.8) que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(R < \infty) &= E^x\left[E^x\left[1_{\left(L_{R+t}^y > 0, R < \infty\right)} | \mathcal{G}_R\right]\right] \\ &= E^x\left[\mathbb{P}^{X_R}(L_t^y > 0)\, 1_{(R<\infty)}\right]. \end{aligned}$$

La ecuación (4.7) implica entonces que $\mathbb{P}^x(R<\infty)=0$ para toda x. Es decir, $L^y\equiv 0$ casi seguramente. Pero esto contradice (4.2). En consecuencia, $\mathbb{P}^y(R=0)>0$ y por la Ley cero-uno de Blumenthal (véase apéndice Lema 74) $\mathbb{P}^y(R=0)=1$. El caso $\alpha=0$ se demuestra de manera análoga. ■

Al igual que en los casos de semimartingalas continuas y movimiento browniano, es posible demostrar que si $\{A_t, t\geq 0\}$ es un tiempo local en y de un proceso de Borel por la derecha, X, la medida dA_t tiene soporte en $\{t : X_t = y\}$, aunque no lo haremos aquí. Por otra parte, una consecuencia de la existencia del tiempo local en y es que si X comienza en y, entonces X visita y una infinidad de veces al tiempo t, para todo $t>0$ (es decir, y es un estado recurrente):

Lema 50 *Sea X un proceso de Borel por la derecha con un tiempo local en y. Entonces*

$$\mathbb{P}^y(T_y=0)=1. \tag{4.9}$$

Demostración. Si $\{A_t, t\geq 0\}$ es un tiempo local de X en y, como $\mathbb{P}^y(R_A=0)=1$, se sigue que

$$\mathbb{P}^y(T_y>0)=\mathbb{P}^y(R_A=0, T_y>0). \tag{4.10}$$

Si $T_y>0$, entonces existe $0<t_0$ tal que $X_t\neq y$ para t en $(0,t_0]$. Sea $R_{A,r}=r+R_A\circ\theta_r$. Como $t\longmapsto A_t$ es c.s. continua y no decreciente, con $A_0=0$ y $A_t>0$ para $t>0$,

$$\{R_A=0, T_y>0\}\subseteq \cup_{r\in\mathbb{Q},r>0}\left\{X_{R_{A,r}}\neq y\right\}$$

excepto por un conjunto de medida cero. También se tiene $R_A\circ\theta_{R_{A,r}}=0$, pues $\mathbb{P}^y(R_A=0)=1$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}^y(R_A=0, T_y>0)\leq \mathbb{P}^y\left(\cup_{r\in\mathbb{Q},r>0}\left\{R_A\circ\theta_{R_{A,r}}=0, X_{R_{A,r}}\neq y\right\}\right). \tag{4.11}$$

Además, para $r>0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^y\left(R_A\circ\theta_{R_{A,r}}=0, X_{R_{A,r}}\neq y\right) &= E^y\left[E^y\left[1_{\left(R_A\circ\theta_{R_{A,r}}=0\right)}1_{\left(X_{R_{A,r}}\neq y\right)}|\mathcal{G}_{R_{A,r}}\right]\right]\\
&= E^y\left[\mathbb{P}^{X_{R_{A,r}}}(R_A=0)\,1_{\left(X_{R_{A,r}}\neq y\right)}\right]=0,
\end{aligned}$$

ya que $\mathbb{P}^x(R_A = 0) = 0$ para $x \neq y$. En consecuencia, de esta ecuación, de (4.10) y de (4.11) se sigue el resultado. $\blacksquare$

Ahora presentamos algunas propiedades que relacionan los tiempos locales de X con las densidades potencial y las densidades de transición regulares.

Teorema 51 *Sea X un proceso de Borel por la derecha fuertemente simétrico y supongamos que su densidad α-potencial, $u^\alpha(x,y)$, es finita para todo $x, y \in S$. Sea L_t^y un tiempo local de X en y tal que*

$$E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right] = u^\alpha(x,y). \tag{4.12}$$

Entonces,

$$E^x\left[e^{-\alpha T_y}\right] = \frac{u^\alpha(x,y)}{u^\alpha(y,y)} \tag{4.13}$$

y, para toda t,

$$E^x\left[L_t^y\right] = \int_0^t p_s(x,y)\, ds. \tag{4.14}$$

Más aún, si $u(x,x)$ y $u(y,y)$ son finitas,

$$\mathbb{P}^x(T_y < \infty) = \frac{u(x,y)}{u(y,y)}. \tag{4.15}$$

Demostración. Cuando $x = y$, la ecuación (4.13) es el resultado del lema anterior (ecuación 4.9). Si $x \neq y$, de (4.12) obtenemos que

$$\begin{aligned}
u^\alpha(x,y) &= E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right] \\
&= E^x\left[1_{(T_y<\infty)} \int_{T_y}^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_y} 1_{(T_y<\infty)} \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right) \circ \theta_{T_y}\right] \\
&= E^x\left[E^x\left[e^{-\alpha T_y} 1_{(T_y<\infty)} \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right) \circ \theta_{T_y} | \mathcal{G}_{T_y^+}\right]\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_y} 1_{(T_y<\infty)} E^{X_{T_y}}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right]\right] \quad \text{(propiedad fuerte de Markov)} \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_y}\right] u^\alpha(y,y),
\end{aligned}$$

pues $X_{T_y} = y$ en $\{T_y < \infty\}$.

Este resultado también puede demostrarse sin usar el tiempo local observando que si $B_\varepsilon(y)$ es la bola de radio $\varepsilon > 0$ con centro en y ($\overline{B_\varepsilon(y)}$ compacta) , entonces de la propiedad fuerte de Markov se tiene

$$\begin{aligned}
\int u^\alpha(x,z)\,1_{B_\varepsilon(y)}(z)\,d\mathbf{m}(z) &= U^\alpha(x,B_\varepsilon(y)) \\
&= E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}1_{B_\varepsilon(y)}(X_t)\,dt\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_{B_\varepsilon(y)}}1_{\left(T_{B_\varepsilon(y)}<\infty\right)}E^{X_{T_{B_\varepsilon(y)}}}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}1_{B_\varepsilon(y)}(X_t)\,dt\right]\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_{B_\varepsilon(y)}}1_{\left(T_{B_\varepsilon(y)}<\infty\right)}U^\alpha\left(X_{T_{B_\varepsilon(y)}},B_\varepsilon(y)\right)\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_{B_\varepsilon(y)}}1_{\left(T_{B_\varepsilon(y)}<\infty\right)}\int u^\alpha\left(X_{T_{B_\varepsilon(y)}},z\right)1_{B_\varepsilon(y)}(z)\,d\mathbf{m}(z)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\mathbf{m}$ es σ-finita y u^α finita, obtenemos

$$\begin{aligned}
u^\alpha(x,y) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int u^\alpha(x,z)\,1_{B_\varepsilon(y)}(z)\,d\mathbf{m}(z) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}E^x\left[e^{-\alpha T_{B_\varepsilon(y)}}1_{\left(T_{B_\varepsilon(y)}<\infty\right)}\int u^\alpha\left(X_{T_{B_\varepsilon(y)}},z\right)1_{B_\varepsilon(y)}(z)\,d\mathbf{m}(z)\right] \\
&= E^x\left[e^{-\alpha T_y}u^\alpha(y,y)\right].
\end{aligned}$$

Para obtener (4.15), tomamos el límite cuando $\alpha\to 0$ en (4.13). Por otra parte, si λ es una variable aleatoria exponencial con media igual a $1/\alpha$ e independiente de X, denotaremos $\mathbb{P}^x_\lambda := \mathbb{P}^x\times\mathbb{P}_\lambda$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t}E^x\left[L_t^y\right]dt &= E^x\left[\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t}L_t^y dt\right] \\
&= E^x_\lambda\left[L_\lambda^y\right] \\
&= E^x_\lambda\left[\int_0^\infty 1_{(\lambda>t)}dL_t^y\right] \\
&= E^x\left[\int_0^\infty \mathbb{P}_\lambda(\lambda>t)\,dL_t^y\right] \\
&= E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}dL_t^y\right] = u^\alpha(x,y).
\end{aligned}$$

La tercera igualdad se sigue de observar que si $X\geq 0$ es una v.a. y f una función positiva continua, entonces

$$
\begin{aligned}
E[f(X)] &= \int_0^\infty f(x) dF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^x df(y) \right) dF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty dF_X(x) \right) df(y) \\
&= \int_0^\infty \left(P(X \geq y) \right) df(y) \\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{(X \geq y)} df(y) \right].
\end{aligned}
$$

Si notamos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} \left(\int_0^t p_s(x,y)\, ds \right) &\leq \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t/2} \left(\int_0^t e^{-\alpha s/2} p_s(x,y)\, ds \right) \\
&\leq \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t/2} u^{\alpha/2}(x,y) = 0,
\end{aligned}
$$

podemos usar Fubini y obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} E^x\left[L_t^y\right] dt &= \int_0^\infty e^{-\alpha s} p_s(x,y)\, ds \\
&= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \alpha e^{-\alpha t} dt \right) p_s(x,y)\, ds \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} \left(\int_0^t p_s(x,y)\, ds \right) dt.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

La ecuación (4.16) se satisface siempre y cuando $u^\alpha(x,y)$ sea finita. Como $u^\lambda(x,y)$ es decreciente en λ, en particular (4.16) se cumple para $\lambda \geq \alpha$. Por la unicidad de la transformada de Laplace, se tiene que la ecuación (4.14) se satisface para casi toda t. De la continuidad de ambos lados de (4.14), se sigue que se satisface para toda t. ■

Sea X un proceso de Borel por la derecha, fuertemente simétrico y con $L^y = \{L_t^y, t \geq 0\}$ un tiempo local en y que satisface (4.12). Puede demostrarse que $\overline{L}^y = \{f(y) L_t^y, t \geq 0\}$ es también un tiempo local en y siempre y cuando $f(y) > 0$ ([11]). En este caso,

$$
E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\overline{L}_t^y \right] = f(y)\, u^\alpha(x,y).
$$

Cuando se hable de un tiempo local para X, tendremos que identificar el lado izquierdo de esta ecuación y nos referiremos a esto como la **normalización del tiempo local**.

Por otra parte, un tiempo de paro T es un **tiempo terminal** si, para toda t,

$$T > t \Longrightarrow T = t + T \circ \theta_t \quad c.s.$$

En este caso definimos

$$u_T(x,y) := E^x \left[L_T^y \right]$$

y tenemos el siguiente corolario (de la fórmula de Kac).

Corolario 52 *Sea* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ *un proceso de Borel por la derecha fuertemente simétrico y supongamos que su densidad* α*-potencial,* $u^\alpha(x,y)$*, es finita para toda* $x, y \in S$*. Sea* $\{L_t^y, (t,y) \in \mathbb{R}^+ \times S\}$ *un tiempo local de* X *tal que* $E^x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y \right] = u^\alpha(x,y)$*. Entonces, si* T *es un tiempo terminal de* X*,*

$$E^x \left[\prod_{i=1}^n L_T^{y_i} \right] = \sum_\pi u_T(x, y_{\pi_1}) \ldots u_T\left(y_{\pi_{n-1}}, y_{\pi_n}\right),$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones π *de* $\{1, 2, ..., n\}$*. En particular,*

$$E^x \left[\left(L_T^y \right)^n \right] = n! u_T(x,y) \left(u_T(y,y) \right)^{n-1}.$$

Definición 53 *Sea* X *un proceso de Borel por la derecha fuertemente simétrico y con densidad* α*-potencial* $u^\alpha(x,y)$ *continua. Sean* $y \in S$ *fijo y* $\{L_t^y, t \geq 0\}$ *un tiempo local de* X *en* y*. Decimos que*

$$\tau_y(s) = \text{ínf}\{t > 0 : L_t^y > s\},$$

donde $\text{ínf}\,\emptyset = \infty$*, es* ***el tiempo local inverso (continuo por la derecha) de*** X ***en*** y*.*

Podemos ver que para cada s, $\tau_y(s)$ es un tiempo de paro: $\{\tau_y(s) \leq u\} \Leftrightarrow \{L_u^y > s\} \in \mathcal{F}_u$, ya que L_u^y es $\mathcal{F}_u$-medible. Y $\tau_y(s+t) = \tau_y(s) + \tau_y(t) \circ \theta_{\tau_y(s)}$.

Definición 54 *Sea* $\mathcal{L} := \sup\{s : X_s = 0\}$*, donde* $\sup \emptyset = 0$*. Si* $\mathcal{L} = \infty$*,* $\mathbb{P}^0$ *casi seguramente, se dice que* 0 ***es recurrente*** *para* X*. Si* $\mathcal{L} < \infty$*,* $\mathbb{P}^0$ *c.s., se dice que* 0 ***es transitorio*** *para*

X. Diremos que ***el proceso estocástico X es recurrente*** *(transitorio) si todo $x \in S$ es recurrente (transitorio).*

El siguiente lema nos será de gran utilidad en el siguiente capítulo, ya que es posible determinar la recurrencia de un estado para X a partir de la densidad 0-potencial.

Lema 55 *Sea $L_{\infty}^{0} := \lim_{t\to\infty} L_t^0$. Entonces:*

1. *Si $u(0,0) = \infty$, entonces 0 es recurrente para X (i.e. $\mathcal{L} = \infty$) y $L_{\infty}^{0} = \infty$, $\mathbb{P}^0$-casi seguramente.*

2. *Si $u(0,0) < \infty$, entonces 0 es transitorio para X (i.e. $\mathcal{L} < \infty$) y $L_{\infty}^{0} < \infty$, $\mathbb{P}^x$-casi seguramente para cada $x \in S$.*

Demostración. Denotaremos $\tau(s) = \tau_0(s)$. Observamos que para $\alpha > 0$, $E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}\right] = E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}1_{(\tau(s)<\infty)}\right]$. Si definimos $f(s) = E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}\right]$ y usamos la propiedad fuerte de Markov y el hecho de que $X_{\tau(s)} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
E^0\left[e^{-\alpha\tau(s+t)}\right] &= E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}e^{-\alpha\tau(t)\circ\theta_{\tau(s)}}\right] \\
&= E^0\left[E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}e^{-\alpha\tau(t)\circ\theta_{\tau(s)}}1_{(\tau(s)<\infty)}|\mathcal{G}_{\tau(s)^+}\right]\right] \\
&= E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}E^0\left[e^{-\alpha\tau(t)\circ\theta_{\tau(s)}}1_{(\tau(s)<\infty)}|\mathcal{G}_{\tau(s)^+}\right]\right] \\
&= E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}1_{(\tau(s)<\infty)}E^{X_{\tau(s)}}\left[e^{-\alpha\tau(t)}\right]\right] \\
&= E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}\right]E^0\left[e^{-\alpha\tau(t)}\right].
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $f(s+t) = f(s)f(t)$. Puesto que $f(s)$ es continua por la derecha, debe ser de la forma $f(s) = e^{-h(\alpha)s}$ para alguna $h(\alpha) > 0$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(s)\,ds &= \int_0^{\infty} e^{-h(\alpha)s}ds \\
&= \frac{1}{h(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Si probamos que para cualesquiera función medible positiva $f(t)$, $T \in [0,\infty]$ y $z \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_0^T f(t)\,dL_t^z = \int_0^{\infty} f(\tau_z(s))\,1_{(\tau_z(s)<T)}ds \tag{4.17}$$

y usamos la ecuación (4.12), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h(\alpha)} &= \int_0^\infty E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}\right]ds \\
&= E^0\left[\int_0^\infty e^{-\alpha\tau(s)}ds\right] \text{ Fubini} \\
&= E^0\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}dL_t^0\right] \text{ ecuación (4.17)} \\
&= u^\alpha(0,0).
\end{aligned}$$

Y, por lo tanto,

$$E^0\left[e^{-\alpha\tau(s)}\right] = f(s) = e^{-s/u^\alpha(0,0)}. \tag{4.18}$$

Para demostrar (4.17) notamos que para funciones de la forma $f(t) = 1_{[0,r]}(t)$, $r \in \mathbb{R}$, la ecuación es

$$\begin{aligned}
L_{r\wedge T}^z &= \int_0^\infty 1_{[0,r]}(\tau_z(s))\, 1_{(\tau_z(s)<T)}ds \\
&= \int_0^\infty 1_{(0\le\tau_z(s)\le r)}1_{(\tau_z(s)<T)}ds \\
&= \mu\{s : \tau_z(s) \le r, \tau_z(s) < T\},
\end{aligned}$$

donde μ es la medida de Lebesgue. Por otra parte, de la definición del tiempo local inverso $\tau_y(s)$, $L_t^z = \mu\{s : \tau_z(s) \le t\} = \mu\{s : \tau_z(s) < t\}$.

1. Como $u(0,0) = \lim_{\alpha\downarrow 0} u^\alpha(0,0)$ (pues el proceso tiene densidades de transición regulares y simétricas, y podemos usar 3.9), si suponemos que $u(0,0) = \infty$, de la ecuación (4.18) se sigue que $\tau(s) < \infty$ para cada $s < \infty$, $\mathbb{P}^0$-casi seguramente. Supongamos también que $\mathcal{L}(\omega) < \infty$. Ya que L_t^0 es continuo y crece sólo cuando $X_t = 0$, se tendría que $L_{\mathcal{L}}^0(\omega) < \infty$. Pero de la definición de tiempo local inverso, $\tau\left(L_{\mathcal{L}}^0 + 1\right)(\omega) = \infty$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{L}(\omega) = \infty$, $\mathbb{P}^0$-casi seguramente. Para demostrar que $L_\infty^0 = \infty$, se probará que

$$L_\infty^0 := \lim_{t\to\infty} L_t^0 = \infty \ \text{ c.s.}$$

Definamos la sucesión de tiempos de paro $\mathcal{T}_0 = 0$ y $\mathcal{T}_{n+1} = \inf\{t > \mathcal{T}_n + 1 : X_t = 0\}$, $n \ge 0$. Como $\mathcal{L}(\omega) = \infty$, $\mathcal{T}_n < \infty$ casi seguramente. De la monotonicidad y aditividad del tiempo local, se sigue que

$$
\begin{aligned}
L^0_\infty &\geq \sum_{n=0}^{\infty}\left(L^0_{\mathcal{T}_n+1}-L^0_{\mathcal{T}_n}\right) \qquad (4.19)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(L^0_1\circ\theta_{\mathcal{T}_n}\right).
\end{aligned}
$$

Pero $\left\{L^0_1\circ\theta_{\mathcal{T}_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. La definición de tiempo local implica que $L^0_1>0$, $\mathbb{P}^0$-casi seguramente y, en consecuencia, $E^0\left[L^0_1\right]>0$. De esto y de la propiedad fuerte de Markov se sigue que $E^0\left[L^0_1\circ\theta_{\mathcal{T}_n}\right]=E^0\left[L^0_1\right]>0$. Por lo tanto, el lado derecho de la ecuación (4.19) es la suma de variables aleatorias i.i.d. no negativas con probabilidad positiva de ser mayores que una $\epsilon>0$. Si aplicamos el lema de Borel-Cantelli, se obtiene el resultado.

2. Supóngase que $u(0,0)<\infty$ y defínase la sucesión de tiempos de paro como en el inciso anterior. Entonces,

$$
\begin{aligned}
L^0_\infty &\geq \sum_{n=0}^{\infty}\left(L^0_{\mathcal{T}_n+1}-L^0_{\mathcal{T}_n}\right)1_{(\mathcal{T}_n<\infty)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(L^0_1\circ\theta_{\mathcal{T}_n}\right)1_{(\mathcal{T}_n<\infty)}.
\end{aligned}
$$

De la propiedad fuerte de Markov y de la ecuación (4.2),

$$
\begin{aligned}
u(0,0) &= E^0\left[L^0_\infty\right]\\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty}E^0\left[1_{(\mathcal{T}_n<\infty)}E^0\left[L^0_1\right]\right]\\
&= E^0\left[L^0_1\right]\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}^0\left(\mathcal{T}_n<\infty\right).
\end{aligned}
$$

La definición de tiempo local implica que $E^0\left[L^0_1\right]>0$ y se tiene

$$
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}^0\left(\mathcal{T}_n<\infty\right)=0.
$$

Como los $\mathcal{T}_n$ son no decrecientes, este límite implica que $\mathbb{P}^0\left(\cap_{n=0}^{\infty}\left\{\mathcal{T}_n<\infty\right\}\right)=0$ y esto, a su vez, que $\mathcal{L} < \infty$, $\mathbb{P}^0$-casi seguramente. Puesto que $E^0\left[L_\infty^0\right] = u(0,0) < \infty$, se tiene que $L_\infty^0 < \infty$, $\mathbb{P}^0$-casi seguramente. Para demostrar que $\mathcal{L} < \infty$, $\mathbb{P}^x$-casi seguramente con $x \in S$ general, observamos que $\{\mathcal{L} > 0\} = \{T_0 < \infty\}$ y aplicamos la propiedad fuerte de Markov en T_0 para obtener el caso ya demostrado. Para probar que $L_\infty^0 < \infty$, $\mathbb{P}^x$-casi seguramente, basta notar que la ecuación (3.10) implica $E^x\left[L_\infty^0\right] = u(x,0) \le u(0,0) < \infty$.

■

Lema 56 *Si* $\mathbb{P}^x(T_y < \infty) = 1$ *y* $\mathbb{P}^y(T_x < \infty) = 1$, *entonces* x, y *son recurrentes.*

Ya vimos cómo construir, para un proceso de Borel por la derecha fuertemente simétrico X, un tiempo local L_t^y para cada $y \in S$. Aunque no lo estudiaremos aquí, resulta natural considerar el proceso $L = \{L_t^y, (t,y) \in \mathbb{R}^+ \times S\}$ y preguntar si es posible obtener una versión conjuntamente continua. Con esto nos referimos a que esa versión sea también un tiempo local de X. La respuesta es afirmativa bajo ciertas condiciones [11]. De aquí en adelante, cuando hablemos de un tiempo local $\{L_t^y, (t,y) \in \mathbb{R}^+ \times S\}$ de X, supondremos que tenemos la versión conjuntamente continua.

Capítulo 5

Procesos gaussianos asociados

En este capítulo definiremos los procesos asociados con un proceso de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico, estudiaremos algunas de sus propiedades y demostraremos el teorema de isomorfismo de N. Eisenbaum.

Denotaremos por $X \sim N\left(m, \sigma^2\right)$ que la variable aleatoria real X tiene una distribución gaussiana con media m y varianza σ^2, es decir, X tiene función característica

$$\phi(\lambda) := E\left[e^{i\lambda X}\right] = \exp\left(im\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right)$$

y función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

para m, $\sigma \in \mathbb{R}$. Recordemos que un vector $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es gaussiano si cualquier combinación lineal de sus componentes es una variable aleatoria gaussiana. Dicho de otra forma, X es gaussiano si para cualquier funcional lineal g en $\mathbb{R}^n$, $g(X)$ es una v.a. gaussiana. Si $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$, $m_k = E[X_k]$ y $\Sigma_{kl} = E[(X_k - m_k)(X_l - m_l)]$, entonces

$$\phi_X(a) := E\left[e^{i(a,m)}\right] = \exp\left(ima^t - \frac{a\Sigma a^t}{2}\right)$$

y

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}}\exp\left(-\frac{(x-m)\,\Sigma^{-1}\,(x-m)^{t}}{2}\right)$$

para $a\in\mathbb{R}^n$. En este caso, $\Sigma=\{\Sigma_{kl}\}_{k,l=1}^{n}$ es una matriz simétrica con entradas reales y decimos que es la matriz de varianzas y covarianzas de X.

Definición 57 *Un proceso estocástico con valores reales $\{G_t,t\in T\}$, donde T es un conjunto de índices, es un* ***proceso gaussiano*** *si para cualquier $(t_1,t_2,...,t_n)\subset T$, el vector aleatorio $(G_{t_1},G_{t_2},...,G_{t_n})$ es gaussiano (equivalentemente, si las distribuciones finito dimensionales del proceso son gaussianas). Decimos que* ***el proceso es centrado*** *si $E\left[G_s\right]=0$ para toda $s\in T$.*

Si $\{G_t,t\in T\}$ es gaussiano, entonces lo caracterizan su función media $m(t)=E\left[G_t\right]$ y su covarianza Γ, esto es, la función definida en $T\times T$ por

$$\Gamma(s,t)=cov\left(G_s,G_t\right)=E\left[\left(G_s-m(s)\right)\left(G_t-m(t)\right)\right].$$

Proposición 58 *La covarianza de un proceso gaussiano es una función positiva semi-definida. Recíprocamente, cualquier función simétrica positiva semi-definida es la covarianza de un proceso gaussiano centrado.*

Demostración. Basta ver que

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n}a_ka_l\Gamma_{kl} &= \sum_{k,l=1}^{n}a_ka_l\Gamma\left(t_k,t_l\right)\\
&= \sum_{k,l=1}^{n}a_ka_lE\left[\left(G_{t_k}-m\left(t_k\right)\right)\left(G_{t_l}-m\left(t_l\right)\right)\right]\\
&= E\left[\sum_{k,l=1}^{n}a_ka_l\left(G_{t_k}-m\left(t_k\right)\right)\left(G_{t_l}-m\left(t_l\right)\right)\right]\\
&= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\left(G_{t_k}-m\left(t_k\right)\right)\right)^2\right]\geq 0.
\end{aligned}$$

Dada una función positiva semi-definida Γ, para todo subconjunto finito $\{t_1,t_2,...,t_n\}$ de T, sea $P_{t_1t_2...t_n}$ la medida de probabilidad gaussiana centrada con matriz de covarianza $\Gamma\left(t_k,t_l\right)$. Esto define una familia proyectiva (esto es, si $\{s_1,s_2,...,s_k\}$ es un subconjunto de $\{t_1,t_2,...,t_n\}$

y si π es la proyección canónica de T^n en T^k, entonces $P_{s_1 s_2 \ldots s_k} = \pi\left(P_{t_1 t_2 \ldots t_n}\right))$ y bajo la medida de probabilidad dada por el teorema de extensión de Kolmogorov, el proceso coordenado es un proceso gaussiano con covarianza Γ. ■

Como vimos en el Lema 44, la densidad α-potencial de un proceso de Borel por la derecha y fuertemente simétrico (esto es, con densidades de transición $p_t(x, y)$ regulares y simétricas), es positiva semi-definida. En consecuencia, a todo proceso de este tipo podemos asociarle un proceso gaussiano centrado con covarianza igual a su función α-potencial. Llamamos a estos procesos gaussianos, procesos asociados. Si $\{G_t, t \in T\}$ es un proceso asociado, del Lema 45 ($u^\alpha(x, y) \leq u^\alpha(y, y)$ para toda $x, y \in S$) se sigue que $\Gamma(s, t) = E[G_s]\, E[G_t] \leq E\left[G_s^2\right] \wedge E\left[G_t^2\right]$ para toda $s, t \in T$.

Para poder estudiar con precisión los procesos asociados, necesitamos el concepto de proceso local de Borel por la derecha.

Definición 59 *Se dice que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ es un* ***proceso local de Borel por la derecha****, con espacio de estados S y semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$, si satisface las siguientes condiciones:*

1. *X es un proceso de Markov simple, continuo por la derecha y con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$.*
2. *$U^\alpha f(X_t)$ es continuo por la derecha en toda t tal que $X_t \in S$, para toda $\alpha > 0$ y toda $f \in C_b(S_\Delta)$.*
3. *$\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ satisface las condiciones habituales (completa y continua por la derecha).*

Lema 60 *Si S es compacto, entonces cualquier proceso local de Borel por la derecha con espacio de estados S es un proceso de Borel por la derecha.*

Demostración. Sabemos que Δ es un punto aislado (esto es, $\{\Delta\}$ es abierto) cuando S es compacto. Sea $X_t = \Delta$. Como X_s es continuo por la derecha, debe tenerse $X_s = \Delta$ para toda $t \leq s \leq s + \delta$, para alguna $\delta > 0$. ■

En general, los procesos locales de Borel por la derecha no satisfacen la propiedad fuerte de Markov. Sin embargo, con la hipótesis adicional de que T sea un $\mathcal{G}_{t^+}$-tiempo de paro tal que $X_T \in S$ en $T < \infty$ c.s. se tiene un resultado similar ([11], sección 4.8). Ahora presentamos (sin demostración) un teorema que nos permite simplificar el estudio de algunas propiedades de procesos locales de Borel por la derecha fuertemente simétricos, a procesos con espacio de estados finito. En este caso la medida de referencia que se usa es la medida del conteo.

Teorema 61 *Sean S un espacio localmente compacto con una base numerable y $\Gamma(x,y)$ una función continua en $S \times S$. Supongamos que para todo subconjunto finito $S' \subseteq S$, $\Gamma(x,y)$ es la densidad 0-potencial de un proceso de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico X' en S'. Entonces $\Gamma(x,y)$ es la densidad 0-potencial de un proceso local de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico X en S.*

En particular, por el Lema 75, si S es compacto, entonces $\Gamma(x,y)$ es la densidad 0-potencial de un proceso de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico X en S. Si somos estrictos, en realidad existe una familia infinita de procesos asociados con X, ya que cada densidad α-potencial define una covarianza. Sin embargo, trabajaremos específicamente con el caso $\alpha = 0$. Aún cuando X no tenga una densidad 0-potencial, sí posee densidades α-potencial para $\alpha > 0$. Como se explicó en el capítulo anterior, $u^\alpha(x,y)$ es la densidad 0-potencial de $\widehat{X}$, el proceso obtenido de matar a X en un tiempo exponencial independiente con media $1/\alpha$. Por lo tanto, el proceso gaussiano centrado con covarianza $u^\alpha(x,y)$ es el proceso asociado de $\widehat{X}$, como se ve de la siguiente definición:

Definición 62 *Sea S un espacio localmente compacto con una base numerable. Diremos que* ***un proceso gaussiano centrado $\{G_x, x \in S\}$ está asociado con un proceso local de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico*** *X, con medida de referencia* $\mathbf{m}$*, si la covarainza $\Gamma = \Gamma(x,y) = E[G_x G_y]$ es la densidad 0-potencial de X para todo $x, y \in S$.*

Una matriz $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$ de $n \times n$ es positiva ($A \geq 0$) si $A_{ij} \geq 0$ para toda i, j. Si $A_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$, decimos que A tiene elementos negativos fuera de la diagonal. Si $\sum_{j=1}^n A_{ij} \geq 0$, para toda $i = 1, 2, ..., n$, diremos que A tiene suma de renglones positiva.

No todos los procesos gaussianos son procesos asociados. A partir de las propiedades estudiadas para procesos de Borel por la derecha, transitorios y fuertemente simétricos es posible bosquejar algunas de las condiciones que estos procesos asociados deben satisfacer, por ejemplo:

1. Como la densidad 0-potencial de un proceso de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico es positiva semi-definida, debe tenerse $\Gamma(x,y) \geq 0$ para toda $x, y \in S$.

2. Del Teorema 51, debe tenerse que

$$\Gamma(x,y) = \mathbb{P}^x (T_y < \infty) \Gamma(y,y)$$

y

$$\Gamma(x,y) = \mathbb{P}^y (T_x < \infty) \Gamma(x,x).$$

Por lo tanto, $\Gamma(x,y) \leq \Gamma(x,x) \wedge \Gamma(y,y)$.

3. Como el proceso es transitorio, del Lema 56 se sigue que no es posible tener $\mathbb{P}^x (T_y < \infty) = 1$ y $\mathbb{P}^y (T_x < \infty) = 1$ simultáneamente. En consecuencia, $\Gamma(x,y) < \Gamma(x,x) \vee \Gamma(y,y)$. Entonces, la matriz de covarianza

$$\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma(x,x) & \Gamma(x,y) \\ \Gamma(x,y) & \Gamma(y,y) \end{pmatrix}$$

es invertible y

$$\overline{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{\det \overline{\Gamma}} \begin{pmatrix} \Gamma(y,y) & -\Gamma(x,y) \\ -\Gamma(x,y) & \Gamma(x,x) \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que los términos fuera de la diagonal de $\overline{\Gamma}^{-1}$ son negativos y la suma de sus renglones, positiva. Más aún, al menos una de estas sumas debe ser estrictamente positiva. Los resultados subsecuentes presentan condiciones necesarias y suficientes para asociar un proceso gaussiano con un proceso de Borel por la derecha.

Teorema 63 *Sean S un espacio localmente compacto con base numerable y $\Gamma(x,y)$ una función simétrica y continua en $S \times S$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\Gamma(x,y)$ es la densidad 0-potencial de un proceso local de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico X en S.

2. *Para todo subconjunto finito $S' \subseteq S$, $\Gamma(x,y)$ restringida a $S' \times S'$, es la densidad 0-potencial de un proceso de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico X en S'.*

3. *Para toda colección finita $x_1, x_2, ..., x_n \in S$, la matriz $\Gamma = \{\Gamma(x_i, x_j)\}_{i,j=1}^n$ de $n \times n$ es invertible y Γ^{-1} tiene elementos negativos fuera de la diagonal y suma de renglones positiva.*

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(3). Sean $\sigma = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : X_t \in \{x_1, x_2, ..., x_p\} \cap \{X_0\}^c\right\}$ un tiempo de paro y $\{L_t^x, (x,t) \in S \times \mathbb{R}^+\}$ tiempos locales de X. Como $\Gamma(x_i, x_j)$ es la densidad 0-potencial de X, es posible normalizar el tiempo local tal que

$$\Gamma(x_i, x_j) = E^{x_i}\left[L_\infty^{x_j}\right].$$

Si usamos la ecuación anterior y la propiedad local fuerte de Markov, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\Gamma(x_i, x_j) &= E^{x_i}\left[E^{x_i}\left[L_\infty^{x_j} | \mathcal{G}_\sigma\right]\right] \\
&= E^{x_i}\left[E^{x_i}\left[L_\sigma^{x_j} + \left(L_\infty^{x_j} \circ \theta_\sigma\right) 1_{(\sigma<\infty)} | \mathcal{G}_\sigma\right]\right] \\
&= E^{x_i}\left[L_\sigma^{x_j} + E^{x_i}\left[\left(L_\infty^{x_j} \circ \theta_\sigma\right) 1_{(\sigma<\infty)} | \mathcal{G}_{\sigma^+}\right]\right] \\
&= E^{x_i}\left[L_\sigma^{x_j}\right] + E^{x_i}\left[E^{X_\sigma}\left[L_\infty^{x_j}\right] 1_{(\sigma<\infty)}\right].
\end{aligned}$$

Si definimos $b_{ij} = E^{x_i}\left[L_\sigma^{x_j}\right]$ y $h_{ik} = P^{x_i}(X_\sigma = x_k)$, obtenemos

$$\Gamma(x_i, x_j) = b_{ij} + \sum_{k=1}^{p} h_{ik} \Gamma(x_k, x_j).$$

Sean $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^p$ y $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^p$. Entonces podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\Gamma = B + H\Gamma$$

o bien,

$$B = (I - H)\Gamma.$$

Al tener $X_0 = x_i$, necesariamente ocurre $\sigma > 0$. Esto implica que $b_{ii} = E^{x_i}\left[L_\sigma^{x_i}\right] > 0$ y

$b_{ij} = E^{x_i}\left[L_\sigma^{x_j}\right] = 0$, pues $X_t \neq x_j$ para $j \neq i$ y $0 \leq t < \sigma$. Por lo tanto, la matriz B es diagonal con elementos en ella estrictamente positivos. Como B es invertible, tanto Γ como $(I - H)$ lo son y

$$\Gamma^{-1} = B^{-1}\left(I - H\right).$$

Del hecho de que $H \geq 0$, se sigue que Γ^{-1} tiene elementos negativos fuera de la diagonal. Además, $\sum_{j=1}^{p} h_{ij} = P^{x_i}\left(\sigma < \infty\right) \leq 1$ para toda $i = 1, 2, ..., p$. Por lo tanto, Γ^{-1} tiene suma de renglones positiva.

(3)$\Longrightarrow$(2). Sea $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ una matriz de $n \times n$ con elementos negativos fuera de la diagonal y suma de renglones positiva. La idea de la prueba es mostrar que A puede usarse para construir un proceso de Borel por la derecha fuertemente simétrico en $S = \{1, 2, ..., n\}$. Definamos $A^0 := I$, y

$$P_t\left(i, j\right) := \left\{e^{-tA}\right\}_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-t\right)^k A_{ij}^k}{k!}.$$

Queremos demostrar que $\{P_t, t \geq 0\}$ es un semigrupo de Markov en $(S, \mathcal{B})$. La propiedad de semigrupo se obtiene fácilmente, pues

$$\begin{aligned} P_{t+s} &= e^{-(t+s)A} \\ &= e^{-tA}e^{-sA} \\ &= P_t P_s. \end{aligned}$$

Sea c el mayor elemento de la diagonal de A. Entonces $B = cI - A \geq 0$, ya que A tiene elementos negativos fuera de la diagonal. Como e^{-tcI} es la matriz diagonal con entradas igual a $e^{-tc} \geq 0$,

$$P_t = e^{-tA} = e^{tB}e^{-tc} \geq 0.$$

Finalmente, debemos probar que $P_t\left(x, S\right) \leq 1$, para toda $x \in S$. Esto es,

$$h_i\left(t\right) := \sum_{j=1}^{n} \left\{e^{-tA}\right\}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} P_t\left(i, j\right) \leq 1.$$

Pero,

$$\begin{aligned} h_i'(t) &= -\sum_{j=1}^{n}\left\{e^{-tA}A\right\}_{ij} \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{e^{-tA}\right\}_{il}A_{lj} \\ &= -\sum_{l=1}^{n}\left\{e^{-tA}\right\}_{il}\sum_{j=1}^{n}A_{lj} \le 0, \end{aligned}$$

ya que $e^{-tA} \ge 0$ y $\sum_{j=1}^{n} A_{lj} \ge 0$ (pues A tiene suma de renglones positiva). Esto es, $h_i(t)$ es una función decreciente en t. Como $h_i(0) = 1$, se sigue el resultado.

Además, podemos ver que $\{P_t, t \ge 0\}$ es un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en $C(S)$ (en este caso identificamos $C(S)$ con $\mathbb{R}^n$):

1. Como $P_t f(x) = \int P_t(x,dz) f(z)$ y P_t es un operador positivo con $P_t(x,S) \le 1$, $\int P_t(x,dz) f(z) \le \sup_{z\in S}|f(z)| \int P_t(x,dz)$ y

$$\begin{aligned} \sup_{x\in S}\left|\int P_t(x,dz) f(z)\right| &= \sup_{x\in S}\left|\sum_{j=1}^{n} P_t(x,j) f(j)\right| \\ &\le \sup_{x\in S}\sum_{j=1}^{n}\left|P_t(x,j) f(j)\right| \\ &\le \sup_{j\in S}|f(j)| \sup_{x\in S}\sum_{j=1}^{n}\left|P_t(x,j)\right| \le \sup_{j\in S}|f(j)|. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\|P_t f\| = \sup_{x\in S}|P_t f(x)| \le \sup_{j\in S}|f(j)| = \|f\|$.

2. Observamos que

$$\begin{aligned} P_t &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k A^k}{k!} \\ &= I + (-t)A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-t)^{k-1}A^{k-1}}{k!}. \end{aligned}$$

   Como $\lim_{t\downarrow 0} P_t = \lim_{t\downarrow 0} e^{-tA} = I$, la matriz identidad, entonces

$$\lim_{t\downarrow 0} P_t f(x) = \lim_{t\downarrow 0} \sum_{j=1}^{n} P_t(x,j) f(j) = P_t(x,x) f(x) = f(x).$$

Esto es, $P_t f(x)$ converge a f uniformemente en x. En consecuencia, $\lim_{t\to 0} \|P_t f - f\| = 0$.

En consecuencia, podemos usar el Teorema 36 (capítulo anterior) para construir un proceso de Feller X en S con semigrupo de transición $\{P_t, t \geq 0\}$. Si A es simétrica, entonces claramente $\{P_t, t \geq 0\}$ es simétrico y X es un proceso de Borel por la derecha fuertemente simétrico.

Falta probar que si A es invertible, entonces X es transitorio y A^{-1} es la densidad 0-potencial de X. Por definición, para $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} U^{\alpha} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P_t dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-tA} dt. \end{aligned}$$

La integral converge, ya que $\{P_t, t \geq 0\}$ es un semigrupo de contracciones. Además,

$$\begin{aligned} (\alpha + A) \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-tA} dt &= (\alpha + A) \int_0^{\infty} e^{-t(\alpha + A)} dt \\ &= -\int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{-t(\alpha + A)} \right) dt = I. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $U^{\alpha} = (\alpha + A)^{-1}$. Si tomamos el límite cuando $\alpha \to 0$, obtenemos que $U^0 = A^{-1}$. Como estamos trabajando en un espacio de estados finito y la medida de referencia es la medida de conteo, el operador 0-potencial, $U^0(i,i)$, y la densidad 0-potencial, $u(i,i)$, coinciden, ya que:

$$\begin{aligned} U^{\alpha}(i,B) &= U^{\alpha} 1_B(i) \\ &= \int u^{\alpha}(i,j) 1_B(j)\, d\mathbf{m}(j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} u^{\alpha}(i,j) 1_B(j). \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos aplicar el Lema 55 para concluir que X es transitorio. El resultado ahora se sigue de identificar $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ con $\{1, 2, ..., n\}$ y Γ^{-1} con A.

(2)$\Longrightarrow$(1) Es el Teorema 61. $\blacksquare$

Sea $G = (G_1, G_2, ...G_p)$ un vector aleatorio gaussiano. G **tiene cuadrados infinitamente divisibles si** $G^2 = \left(G_1^2, G_2^2, ...G_p^2\right)$ es infinitamente divisible. Esto es, si para cualquier n, podemos encontrar un vector aleatorio Z (en $\mathbb{R}^p$), tal que G^2 tiene la misma ley que

$$Z_1 + Z_2 + ... + Z_n,$$

donde Z_j, $j = 1, 2, ..., n$ son copias independientes e idénticamente distribuidas de Z.

Diremos que un proceso gaussiano $\{G_x, x \in S\}$ tiene cuadrados infinitamente divisibles si, para cualquier colección finita $(x_1, x_2, ..., x_n) \subset S$, el vector aleatorio $\left(G_{x_1}, G_{x_2}, ...G_{x_p}\right)$ tiene cuadrados infinitamente divisibles.

Definición 64 *Una matriz A de $n \times n$* ***es una M-matriz*** *si*

1. *$a_{ij} \leq 0$, para toda $i \neq j$.*
2. *A es no singular y $A^{-1} \geq 0$.*

Puede demostrarse que si $G = \{G_x, x \in S\}$ un proceso gaussiano con función de covarianza continua y asociado con un proceso de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico X, entonces G tiene cuadrados infinitamente divisibles. De manera recíproca, si G tiene función de covarianza continua $\Gamma = \{\Gamma(x, y) : x, y \in S\}$ con la propiedad de que para cualesquiera $x_1, x_2, ..., x_p$, la matriz de covarianza $\overline{\Gamma} = \left\{\overline{\Gamma}_{ij}\right\} = \Gamma(x_i, x_j)$ es positiva definida y si G tiene cuadrados infinitamente divisibles, entonces $\overline{\Gamma}^{-1}$ es una M-matriz. Sin embargo, no todas las M-matrices tienen suma de renglones positiva, como puede verse en el siguiente ejemplo [11]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{36}{5} \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{5}{6} & \frac{25}{48} \\ \frac{5}{6} & \frac{8}{9} & \frac{1}{2} \\ \frac{25}{48} & \frac{1}{2} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, necesitamos más que la condición de cuadrados infinitamente divisibles para que un proceso gaussiano sea asociado. El siguiente teorema, que no demostraremaos aquí, caracteriza los procesos gaussianos asociados.

Teorema 65 *Sean S un espacio localmente compacto con base numerable y $G = \{G_x, x \in S\}$ un proceso gaussiano con covarianza $\Gamma(x,y)$ continua y positiva definida. Entonces las siguiente condiciones son equivalentes:*

1. *G es un proceso asociado con un proceso de Borel por la derecha, transitorio y fuertemente simétrico X.*

2. *$\left\{(G_x + c)^2, x \in S\right\}$ es infinitamente divisible para toda $c \in \mathbb{R}$.*

3. *$\left\{(G_x + b\xi)^2, x \in S \cup \{\delta\}\right\}$ con $G_\delta = 0$, donde $\delta \notin S$, es infinitamente divisible para alguna $b \neq 0$. Aquí $\xi \sim N(0,1)$ independiente de G. Más aún, si esta condición se satisface para alguna $b \neq 0$, entonces se cumple para toda $b \in \mathbb{R}$.*

Ahora nos enfocamos en la relación que hay entre procesos de Borel por la derecha, fuertemente simétricos y sus procesos gaussianos asociados. Aunque existen diversos teoremas que relacionan los cuadrados de G con los tiempos locales de X, sólo estudiaremos el de N. Eisenbaum [4]. Por ser un poco más corta que la demostración original, presentamos la prueba de [11].

Teorema 66 (Eisenbaum) *Sean $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proceso de Borel por la derecha, fuertemente simétrico con densidad 0-potencial $u(x,y)$ continua y espacio de estados S, y $L = \{L_t^y, (y,t) \in S \times \mathbb{R}^+\}$ un tiempo local para X normalizado tal que $E^x[L_\infty^y] = u(x,y)$. Denotemos por $G = \{G_y, y \in S\}$ el proceso gaussiano centrado con covarianza $u(x,y)$. Entonces, para cualquier subconjunto numerable $D \subseteq S$, $x \in S$, y $s \neq 0$,*

$$\left\{L_\infty^y + \frac{1}{2}(G_y + s)^2 : y \in D, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}_G\right\} \overset{ley}{=} \left\{\frac{1}{2}(G_y + s)^2 : y \in D, \left(1 + \frac{G_x}{s}\right)\mathbb{P}_G\right\}. \tag{5.1}$$

Equivalentemente, para todo $x_1, x_2, ...x_n \in S$ y función medible y acotada F en $(\mathbb{R}^n)^+$, para toda n y $s \neq 0$,

$$E^x E_G\left[F\left(L_\infty^{x_i} + \frac{1}{2}(G_{x_i} + s)^2\right)\right] = E_G\left[\left(1 + \frac{G_x}{s}\right)F\left(\frac{1}{2}(G_{x_i} + s)^2\right)\right],$$

donde $F(f(x_i)) := F(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$.

Demostración. Se demostrará que

$$E^x E_G\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\left(L_\infty^{x_i}+\frac{(G_{x_i}+s)^2}{2}\right)\right)\right]=E_G\left[\left(1+\frac{G_x}{s}\right)\exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i\,(G_{x_i}+s)^2}{2}\right)\right] \tag{5.2}$$

para $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ suficientemente pequeñas y donde $x = x_1$. Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$E^x E_G\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i L_\infty^{x_i}\right)\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\frac{(G_{x_i}+s)^2}{2}\right)\right]=$$

$$E_G\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i\,(G_{x_i}+s)^2}{2}\right)\right]+E_G\left[\frac{G_x}{s}\exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i\,(G_{x_i}+s)^2}{2}\right)\right].$$

Es decir,

$$E^x\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i L_\infty^{x_i}\right)\right]=1+\frac{E\left(G_x\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\,(G_{x_i}+s)^2/2\right)\right)}{sE\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\,(G_{x_i}+s)^2/2\right)\right]}.$$

Sea Σ la matriz de covarianza $\{u(x_i,x_j)\}_{i,j=1}^n$. Se sigue de (5.10) (véase el Corolario 76 del apéndice) que

$$\frac{E\left(G_x\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\,(G_{x_i}+s)^2/2\right)\right)}{sE\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\,(G_{x_i}+s)^2/2\right)\right]}=\left\{\widetilde{\Sigma}\Lambda\mathbf{1}^t\right\}_1$$

donde $\widetilde{\Sigma}=(I-\Sigma\Lambda)^{-1}\Sigma$, Λ es la matriz diagonal con $\Lambda_{jj}=\lambda_j$ y $\mathbf{1}^t=(1,1,...,1)^t$. Por lo tanto, para obtener la ecuación (5.2) es suficiente probar que

$$E^x\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i L_\infty^{x_i}\right)\right]=1+\left\{\widetilde{\Sigma}\Lambda\mathbf{1}^t\right\}_1$$

Pero de la Fórmula de Kac II (véase Corolario 52), si T es un tiempo terminal, para toda k se tiene

$$\begin{aligned} E^{x_l}\left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i L_T^{x_i}\right)^k\right] &= k!\sum_{j_1,j_2,\dots,j_x=1}^n u_T(x_l,x_{j_1})\,\lambda_{j_1},...,u_T\left(x_{j_{k-1}},x_{j_k}\right)\lambda_{j_k} \\ &= k!\sum_{j_k=1}^n\left\{(\Sigma\Lambda)^k\right\}_{l,j_k}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$E^{x_l}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_T^{x_i}\right)\right] = \sum_{j=1}^{n}\{(I-\Sigma\Lambda)\}_{lj}$$
$$= \left\{(I-\Sigma\Lambda)^{-1}\mathbf{1}^t\right\}_l .$$

De esta identidad, con $x = x_1$, se sigue que

$$\begin{aligned} E^{x}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_\infty^{x_i}\right)\right] &= \left\{(I-\Sigma\Lambda)^{-1}\mathbf{1}^t\right\}_1 \\ &= \left\{I\mathbf{1}^t + (I-\Sigma\Lambda)^{-1}\Sigma\Lambda\mathbf{1}^t\right\}_1 \\ &= 1+\left\{(I-\Sigma\Lambda)^{-1}\Sigma\Lambda\mathbf{1}^t\right\}_1 \\ &= 1+\left\{\widetilde{\Sigma}\Lambda\mathbf{1}^t\right\}_1 . \end{aligned}$$

Sean μ_1 y μ_2 las medidas en $(\mathbb{R}^n)^+$ definidas por

$$\int F(\cdot)\, d\mu_1 = E^x E_G\left[F\left(L_\infty^{x_i} + \frac{(G_{x_i}+s)^2}{2}\right)\right]$$

y

$$\int F(\cdot)\, d\mu_2 = E_G\left[\left(1+\frac{G_x}{s}\right)F\left(\frac{1}{2}(G_{x_i}+s)^2\right)\right]$$

para toda F función medible y no negativa en $(\mathbb{R}^n)^+$. La medida μ_1 está determinada por el lado izquierdo de (5.2), su función generadora de momentos. Más aún, esta ecuación muestra que μ_1 y μ_2 son iguales.

Los dos lados de la ecuación (5.1) determinan medidas en $(\mathbb{R}^\infty)^+$ equipadas con la σ-álgebra de los cilindros. Lo anterior muestra que estas medidas tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales y, por lo tanto, son iguales. ∎

Nótese que este resultado está dado para los tiempos locales totales de procesos de Borel por la derecha, fuertemente simétricos y con densidad potencial continua. Al usar una demostración análoga es posible probar el resultado para procesos cuyos tiempos locales se consideran hasta tiempos terminales y tiempos locales inversos ([11]). En particular, si aplicamos el teorema de Eisenbaum a los tiempos locales de procesos matados en T_0, donde 0 es un elemento fijo de S, obtenemos una generalización del primer teorema de Ray-Knight.

Teorema 67 (de Ray-Knight generalizado) *Sean* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ *un proceso de Borel por la derecha, fuertemente simétrico con densidad* α*-potencial* $u^\alpha(x,y)$ *continua y espacio de estados* S*, y* $L = \{L_t^y, (y,t) \in S \times \mathbb{R}^+\}$ *los tiempos locales para* X *normalizados tal que* $E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right] = u^\alpha(x,y)$*. Supongamos además que* $P^x(T_0 < \infty) > 0$ *para toda* $x \in S$ *y denotemos por* $G = \{G_y, y \in S\}$ *el proceso gaussiano centrado con covarianza* $u_{T_0}(x,y)$*. Entonces, para cualquier subconjunto numerable* $D \subseteq S$*,* $x \in S$*, y* $s \neq 0$*,*

$$\left\{L_{T_0}^y + \frac{1}{2}(G_y + s)^2 : y \in D, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}_G\right\} \stackrel{ley}{=} \left\{\frac{1}{2}(G_y + s)^2 : y \in D, \left(1 + \frac{G_x}{s}\right)\mathbb{P}_G\right\}. \quad (5.3)$$

Ahora, recordamos que

$$u_{T_0}(x,y) = E^x\left[L_{T_0}^y\right]$$

y en el siguiente lema evaluamos $u_{T_0}(x,y)$ para el movimiento browniano. Obsérvese que de la continuidad del mismo se sigue que $u_{T_0}(x,y) = 0$ excepto si x, y tienen el mismo signo.

Lema 68 *Sean* $\{L_t^x, (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ *los tiempos locales del movimiento browniano. Entonces*

$$u_{T_0}(x,y) = \begin{cases} 2|x| \wedge |y| & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}. \quad (5.4)$$

Demostración. De las ecuaciones (4.12) y (4.13), y de la propiedad fuerte de Markov se tiene

$$\begin{aligned} u^\alpha(x,y) &= E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right] \\ &= E^x\left[\int_0^{T_0} e^{-\alpha t} dL_t^y\right] + E^x\left[\int_{T_0}^\infty e^{-\alpha t} dL_t^y\right] \\ &= E^x\left[\int_0^{T_0} e^{-\alpha t} dL_t^y\right] + E^x\left[e^{-\alpha T_0} E^0\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} dL_t^y\right]\right] \\ &= E^x\left[\int_0^{T_0} e^{-\alpha t} dL_t^y\right] + E^x\left[e^{-\alpha T_0}\right] u^\alpha(0,y) \\ &= E^x\left[\int_0^{T_0} e^{-\alpha t} dL_t^y\right] + \frac{u^\alpha(x,0)\, u^\alpha(0,y)}{u^\alpha(0,0)}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} E^x\left[\int_0^{T_0} e^{-\alpha t} dL_t^y\right] &= u^\alpha(x,y) - \frac{u^\alpha(x,0)\,u^\alpha(0,y)}{u^\alpha(0,0)} \\ &= \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|x-y|}}{\sqrt{2\alpha}} - \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|x|}e^{-\sqrt{2\alpha}|y|}}{\sqrt{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando $\alpha \to 0$ y $xy > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} E^x\left[L_{T_0}^y\right] &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{-\sqrt{2\alpha}|x-y|} - e^{-\sqrt{2\alpha}(|x|+|y|)}}{\sqrt{2\alpha}} \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{-\frac{|x-y|}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}|x-y|} + \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\sqrt{2\alpha}(|x|+|y|)}}{1/\sqrt{2\alpha}} \\ &= |x| + |y| - |x-y| \\ &= 2\,|x| \wedge |y|, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Enseguida enunciamos el primer teorema de Ray-Knight, donde $\{L_t^x, (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\}$ denota los tiempos locales del movimiento browniano y W_t, $\overline{W}_t$ son dos movimientos brownianos independientes que comienzan en cero. Recordemos que $\left\{W_t^2 + \overline{W}_t^2, t \in \mathbb{R}^+\right\}$ es llamado el cuadrado de un proceso de Bessel de segundo orden.

Teorema 69 (de Ray-Knight) *Sea $x > 0$. Entonces, bajo la medida $\mathbb{P}^x \times P_{W,\overline{W}}$,*

$$\left\{L_{T_0}^r + \left(W_{t-x}^2 + \overline{W}_{t-x}^2\right)1_{(t\geq x)}, t \in \mathbb{R}^+\right\} \overset{ley}{=} \left\{W_t^2 + \overline{W}_t^2, t \in \mathbb{R}^+\right\}$$

en $C(\mathbb{R}^+)$. Equivalentemente, bajo $\mathbb{P}^x$ y en $[0,x]$, $L_{T_0}^r$ tiene la ley del cuadrado de un proceso de Bessel de segundo orden $\{Y_r, 0 \leq r \leq x\}$ con $Y_0 = 0$ y a partir de x continúa como un proceso cuadrado de Bessel de orden cero $\{Z_r, x \leq r < \infty\}$ con $Z_x = Y_x$.

Nos gustaría hacer evidente la equivalencia de los teoremas de Ray-Knight y de Ray-Knight generalizado. Para lograr esto, notamos que si $u_{T_0}(x,y)$ está dada por la ecuación (5.4), entonces $\{G_y, y \in \mathbb{R}^+\}$ es $\{\sqrt{2}W_y, y \in \mathbb{R}^+\}$, donde $\{W_y, y \in \mathbb{R}^+\}$ es un movimiento browniano estándar. Definimos $s = s/\sqrt{2}$ y usamos la continuidad del browniano para reescribir (5.3) con $x > 0$ y

$s > 0$:

$$\left\{L_{T_0}^y + (W_y + s)^2 : y \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}_W\right\} \overset{ley}{=} \left\{(W_y + s)^2 : y \in \mathbb{R}^+, \left(1 + \frac{W_x}{s}\right)\mathbb{P}_W\right\}.$$

Si denotamos por $\mathbb{P}_W^s$ la medida de probabilidad del movimiento browniano que comienza en $s > 0$, la ecuación anterior queda como

$$\left\{L_{T_0}^y + W_y^2 : y \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}_W^s\right\} \overset{ley}{=} \left\{W_y^2 : y \in \mathbb{R}^+, \left(\frac{W_x}{s}\right)\mathbb{P}_W^s\right\}. \tag{5.5}$$

Consideramos primero el caso restringido donde $y \in [0, x]$, de tal forma que obtenemos

$$\left\{L_{T_0}^y + W_y^2 : y \in [0, x], \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}_W^s\right\} \overset{ley}{=} \left\{W_y^2 : y \in [0, x], \left(\frac{W_x}{s}\right)\mathbb{P}_W^s\right\}. \tag{5.6}$$

De hecho,

$$\left\{L_{T_0}^y + W_y^2 : y \in [0, x], \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}_W^s\right\} \overset{ley}{=} \left\{W_y^2 : y \in [0, x], 1_{(T_0 > x)}\left(\frac{W_x}{s}\right)\mathbb{P}_W^s\right\},$$

ya que para cualesquiera $0 \leq y_1 < y_2 < ... < y_n \leq x$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ suficientemente pequeñas ([11], página 369),

$$E^s\left[1_{(T_0 < x)} W_x \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i W_{y_i}^2\right)\right] = 0\ . \tag{5.7}$$

Sean $\widehat{B}_t$ el movimiento browniano matado en T_0 y $\widehat{P}^s$ la medida de probabilidad con respecto a este proceso. Si $\{Y_t, t \geq 0\}$ denota un proceso de Bessel de orden 3, entonces $\{Y_t, t \geq 0\}$ es proceso de Borel por la derecha y satisface la ecuación

$$E^s\left[\prod_{i=1}^n f_i\left(Y_{t_i}\right)\right] = \widehat{E}^s\left[\frac{\widehat{B}_t}{s}\prod_{i=1}^n f_i\left(\widehat{B}_{t_i}\right)\right] \tag{5.8}$$

para $f_i \in \mathcal{B}_b\left((0, \infty)\right)$ con $i = 1, 2, ..., n$ y $0 < t_1 < ... < t_n = t$ ([11] sección 4.5.1). Reescribimos (5.6) para $\widehat{B}_t$

$$\begin{aligned}\left\{L_{T_0}^y + W_y^2 : y \in [0, x], \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}_W^s\right\} &\overset{ley}{=} \left\{\widehat{B}_y^2 : y \in [0, x], \left(\frac{\widehat{B}_x}{s}\right)\widehat{\mathbb{P}}^s\right\} \\ &\overset{ley}{=} \left\{Y_y^2 : y \in [0, x], \mathbb{P}_Y^s\right\},\end{aligned}$$

donde Y_t es el proceso de Bessel de orden 3 que satisface (5.8). Sabemos que bajo $\mathbb{P}^s_W$, W^2_y es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden 1 que comienza en s^2 y observamos que bajo $\mathbb{P}^s_Y$, Y^2_y es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden 3 que comienza en s^2. Se sigue del Teorema 77 que bajo $\mathbb{P}^x$, $L^y_{T_0}$ es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden 2 que comienza en cero.

Para estudiar el comportamiento de $L^y_{T_0}$ cuando $y > x$, observamos que de (5.5) se tiene

$$\left\{L^{x+y}_{T_0} + W^2_{x+y} : y \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}^s_W\right\} \overset{ley}{=} \left\{W^2_{x+y} : y \in \mathbb{R}^+, \left(\frac{W_x}{s}\right)\mathbb{P}^s_W\right\}. \tag{5.9}$$

Si escribimos $W_{x+y} = W_x + \overline{W}_y$, donde $\overline{W}_y$ es un movimiento browniano independiente que comienza en cero, la ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned}
&\left\{L^{x+y}_{T_0} + \left(W_x + \overline{W}_y\right)^2 : y \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}^s_W \times \mathbb{P}^0_{\overline{W}}\right\} \\
&\qquad\overset{ley}{=} \left\{\left(W_x + \overline{W}_y\right)^2 : y \in \mathbb{R}^+, \left(\frac{W_x}{s}\right)\mathbb{P}^s_W \times \mathbb{P}^0_{\overline{W}}\right\} \\
&\qquad\overset{ley}{=} \left\{\left(\sqrt{L^x_{T_0} + W^2_x} + \overline{W}_y\right)^2 : y \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}^x \times \mathbb{P}^s_W \times \mathbb{P}^0_{\overline{W}}\right\}.
\end{aligned}$$

Notamos que dado W_x, $\left(W_x + \overline{W}_y\right)^2$ es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden 1 que comienza en W^2_x bajo $\mathbb{P}^0_{\overline{W}}$. De igual manera, dados W_x y $L^x_{T_0}$, $\left(\sqrt{L^x_{T_0} + W^2_x} + \overline{W}_y\right)^2$ es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden 1 que comienza en $L^x_{T_0} + W^2_x$ bajo $\mathbb{P}^0_{\overline{W}}$. Del Teorema 77 se sigue que, condicionado en $L^x_{T_0}$, $L^{x+y}_{T_0}$ tiene la ley del cuadrado de un proceso de Bessel de orden cero que comienza en $L^x_{T_0}$, bajo $\mathbb{P}^x$. Por lo tanto, tenemos la equivalencia de ambos teoremas.

Comentarios finales

Los resultados aquí presentados son válidos para procesos de Markov simétricos y parece natural preguntarse si es posible obtener algo similar para procesos de Markov más generales (esto es, no simétricos). En años recientes, se ha estudiado una clase de procesos llamados procesos permanentales. Estos procesos pueden verse como una generalización de los cuadrados de procesos gaussianos centrados. N. Eisenbaum y H. Kaspi [5] estudian la relación entre estos procesos permanentales y el proceso de tiempo local de procesos de Markov generales, y demuestran que un proceso permanental es infinitamente divisible si y sólo si está asociado con un proceso de Markov. Es decir, en el caso no simétrico la divisibilidad infinita caracteriza al proceso asociado.

Apéndice

Algunos de los resultados auxiliares de esta sección se presentan sin demostración, pues se consideran estándar de los cursos de Análisis, Probabilidad o Procesos Estocásticos.

Teorema 70 (de las clases monótonas) *Sean X un conjunto y K una colección de funciones reales acotadas ($X \to \mathbb{R}$) cerrada bajo multiplicación ($fg \in K$ para toda $f, g \in K$). Sea $\mathcal{A}$ la sigma álgebra en X generada por K. Supongamos además, que H es un espacio vectorial (i.e. cerrado bajo combinaciones lineales) de funciones acotadas $\mathbb{R}$-valudas en X que contiene a K y a las funciones constantes, y que satisface lo siguiente: si $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada y existe una sucesión de funciones no negativas $f_n \in H$ que crecen puntualmente a f, entonces $f \in H$. Entonces H contiene toda función $\mathcal{A}$-medible acotada y $\mathbb{R}-$valuada en X.*

Teorema 71 (de Fubini estocástico) *Sean $(A, \mathcal{A})$ un espacio medible, $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad que satisface las condiciones usuales y $\{X_t, t \geq 0\}$ una semimartingala continua con respecto a $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$. Sean también $\mathcal{P}$ la sigma álgebra de los conjuntos previsibles en $\Omega \times \mathbb{R}^+$ y g una función $\mathcal{A} \otimes \mathcal{P}$-medible y acotada. Entonces:*

1. *Existe una función $h(a, \omega, t)$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-medible tal que $\{h(a, \cdot, t), t \geq 0\}$ es indistinguible de $\left\{\int_0^t g(a, \cdot, s)\, dX_s, t \geq 0\right\}$, para todo $a \in A$.*

2. *Si μ es una medida positiva y finita sobre $\mathcal{A}$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$,*

$$\int_A |h(a, \cdot, s)|\, \mu(da) < \infty \text{ c.s.}$$

y $\left\{\int_A h(a, \cdot, s)\, \mu(da), t \geq 0\right\}$ es indistinguible de $\left\{\int_0^t \left(\int_A g(a, \cdot, s)\, \mu(da)\right) dX_s, t \geq 0\right\}$.

Teorema 72 (Criterio de Kolmogorov) *Si $x \in \mathbb{R}^d$ y $Y_{x,t}$ es continuo en t, para la existencia de una modificación bicontinua es suficiente que se satisfaga*

$$E\left[\sup_{s\leq t}|Y_{z,s}-Y_{x,s}|^p\right]\leq C_t\,|z-x|^{1+\varepsilon}$$

para ε, p, C_t constantes positivas.

Teorema 73 (Desigualdad de integrales de Chebyshev) *Si $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones no negativas, integrables y monótonas o monótonas crecientes, definidas en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \int_a^b f_2(x)\,dx ... \int_a^b f_n(x)\,dx \leq (b-a)^{n-1}\int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,...f_n(x)\,dx.$$

Lema 74 (Ley cero-uno de Blumenthal) *Sea $A \in \mathcal{F}_0$. Entonces, para cualquier $x \in S_\Delta$, $\mathbb{P}^x(A)$ es igual a cero o uno.*

Lema 75 *Sea (ζ_1, ζ_2) una variable aleatoria gaussiana con media cero en $\mathbb{R}^2$. Entonces, para toda $s \neq 0$,*

$$\frac{E[\zeta_1\exp(s\zeta_2)]}{sE[\exp(s\zeta_2)]}=E[\zeta_1\zeta_2]\,.$$

Demostración. Sabemos que si ξ es una variable aleatoria gaussiana centrada en $\mathbb{R}^n$ con matriz de covarianza Σ y $a \in \mathbb{R}^n$, entonces la varianza de $u = (a,\xi)$ está dada por $\sigma^2 = E\left[(a,\xi)^2\right] = a\Sigma a^t$ y

$$P((a,\xi)\leq x)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2\sigma^2}du.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
E[\exp((a,\xi))] &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{u}e^{-u^2/2\sigma^2}du\\
&= \exp\left(\sigma^2/2\right)\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-u^2+2u\sigma^2-\sigma^4}{2\sigma^2}\right)du\\
&= \exp\left(\sigma^2/2\right)\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(u+\sigma^2\right)^2/2\sigma^2}du\\
&= \exp\left(\frac{a\Sigma a^t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $t \in \mathbb{R}$, entonces $t\zeta_1 + s\zeta_2$ es una variable aleatoria normal con varianza

$$E\left[(t\zeta_1 + s\zeta_2)^2\right] = t^2 E\left[\zeta_1^2\right] + 2tsE\left[\zeta_1\zeta_2\right] + s^2 E\left[\zeta_2^2\right]$$

y

$$E\left[\exp\left(t\zeta_1 + s\zeta_2\right)\right] = \exp\left(t^2 E\left[\zeta_1^2\right]/2 + tsE\left[\zeta_1\zeta_2\right] + s^2 E\left[\zeta_2^2\right]/2\right).$$

Si derivamos esta expresión con respecto a t y hacemos $t = 0$, obtenemos

$$E\left[\zeta_1 \exp\left(s\zeta_2\right)\right] = \exp\left(s^2 E\left[\zeta_2^2\right]/2\right) sE\left[\zeta_1\zeta_2\right]$$

o equivalentemente,

$$\frac{E\left[\zeta_1 \exp\left(s\zeta_2\right)\right]}{s\exp\left(s^2 E\left[\zeta_2^2\right]/2\right)} = E\left[\zeta_1\zeta_2\right].$$

Pero $\exp\left(\frac{s^2 E\left[\zeta_2^2\right]}{2}\right) = E\left[\exp\left(s\zeta_2\right)\right]$. Por lo tanto, se tiene el resultado. ■

Corolario 76 *Sea $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ una variable aleatoria gaussiana. Se tiene que, para toda $s \neq 0$,*

$$\frac{E\left[\zeta_1 \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\left(\zeta_i + s\right)^2/2\right)\right]}{sE\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\left(\zeta_i + s\right)^2/2\right)\right]} = \left\{\widetilde{\Sigma}\Lambda\mathbf{1}^t\right\}_1, \tag{5.10}$$

donde usamos $\mathbf{1}$ para denotar el vector cuyas componentes son todas igual a 1, $\widetilde{\Sigma} = \left(\Sigma^{-1} - \Lambda\right)^{-1} = (I - \Sigma\Lambda)^{-1}\Sigma$ y Λ es la matriz diagonal con $\Lambda_{jj} = \lambda_j$.

Demostración. Si expandimos $(\zeta_i + s)^2$ y cancelamos los términos con s^2, podemos ver que el lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a

$$\frac{E\left[\zeta_1 \exp\left(s\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i\right)\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i^2/2\right)\right]}{sE\left[\exp\left(s\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i\right)\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i^2/2\right)\right]} = \frac{\widetilde{E}\left[\zeta_1 \exp\left(s\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i\right)\right]}{s\widetilde{E}\left[\exp\left(s\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i\right)\right]},$$

donde

$$\widetilde{E}\left[g\left(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\right)\right] = \frac{E\left[g\left(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n\right)\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i^2/2\right)\right]}{E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i^2/2\right)\right]}$$

para toda función medible g en $\mathbb{R}^n$. Esto es, bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$, ζ es una variable aleatoria gaussiana con media cero y covarianza $\widetilde{\Sigma}$. Del lema anterior, notamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{E}\left[\zeta_1 \exp\left(s \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i\right)\right]}{s\widetilde{E}\left[\exp\left(s \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i\right)\right]} &= \widetilde{E}\left[\zeta_1 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\{\widetilde{\Sigma}\right\}_{1i} \\
&= \left\{\widetilde{\Sigma}\Lambda \mathbf{1}^t\right\}_1 .
\end{aligned}$$

■

Teorema 77 *Sean Z y Z' procesos estocásticos independientes tales que Z es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden δ que comienza en x y Z' es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden δ' que comienza en x' con $\delta, \delta' \geq 0$. Entonces $Z + Z'$ es el cuadrado de un proceso de Bessel de orden $\delta + \delta'$ que comienza en $x + x'$.*

Bibliografía

[1] Blumenthal, Robert y Getoor, Ronald. *Markov Processes and Potential Theory.* Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1968.

[2] Dellacherie, Claude y Meyer, Paul-André. *Probabilities and Potential, volumen C.* North-Holland Mathematics Studies 151, Elsevier Science Publishers B. V., 1988.

[3] Dynkin, E. B. *Theory of Markov Processes.* Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2006.

[4] Eisenbaum, Nathalie. *Une version sans conditionnement du théorème d'isomorphisme de Dynkin.* Séminaire de probabilités tomo 29, páginas 266-289. Springer-Verlag, 1995.

[5] Eisenbaum, Nathalie y Kaspi, Haya. *On Permanental Processes.* Stochastic Processes and their Applications, volumen 119, páginas 1401-1415. Elsevier, 2009.

[6] García Corte, Julio César y Ruiz de Chávez Somoza, Juan. *Tiempos locales y excursiones del movimiento browniano.* Universidad Autónoma Metropolitana, 2002.

[7] Guasoni, Paolo. *Excursions in the Martingale Hypothesis.* Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance, páginas 73-95. World Scientific Publishing, 2004

[8] Hu, Yaozhong, ∅ksendal, Bernt y Salopek, Donna Mary. *Weighted Local Time for Fractional Brownian Motion and Applications to Finance.* Stochastic Analysis and Applications, volumen 23, páginas 15-30. Taylor & Francis, 2005.

[9] Kallenberg, Olav. *Foundations of modern probability.* Probability and its applications, Springer-Verlag, 2002.

[10] Karatzas, Ioannis y Shreve, Steven. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.

[11] Marcus, Michael y Rosen, Jay. *Markov Processes, Gaussian Processes and Local Times.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2006.

[12] Revuz, Daniel y Yor, Marc. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1999.

[13] Rogers, L. C. G. y Williams, David. *Difussions, Markov Processes and Martingales, volúmenes 1 y 2.* Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2000.

[14] Wittmann, Reiner. *Natural Densities of of Markov Transition Probabilities.* Probabilty Theory and Related Fields, volumen 73. Springer-Verlag, 1986.