



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA**

**"DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA GENERAR  
CURVAS DE TRANSICIÓN"**

**T E S I S   Q U E   P A R A  
O B T E N E R   E L   T I T U L O   D E :  
I N G E N I E R O   E N   G E O M Á T I C A  
P R E S E N T A :  
D A V I D   Á N G E L E S   G A R C Í A**

**DIRECTOR:**

**ING. ADOLFO REYES PIZANO**

**SINODALES:**

**ING. CASIANO JIMÉNEZ CRUZ  
ING. JOSÉ BENITO GOMEZ DAZA  
ING. CLAUDIA LEYVA SUAREZ  
ING. JOSE LUIS HIGUERA MORENO**



**MÉXICO, D.F.**

**2009**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

*La presente tesis es un testimonio y regalo  
que puedo dejar a mi familia sobre mi paso por este largo  
y difícil camino que he recorrido y en el que he mostrado lo mejor de mí...*

---

---

---

AGRADEZCO A:

*...quien en una tarde de domingo partió de un pequeño pueblo llamado Chapantonq Hqo., y a bordo de un viejo autobús llegó a la Ciudad de México a comenzar la difícil búsqueda de una mejor vida, estudios, educación y oportunidades para quienes llegarían a su vida... Ella es la mujer a quien simplemente le debo y a la vez agradezco mi existencia, mi madre, la señora Fidelia García González.*

*...mi padre, el señor Julio Ángeles Pérez, quien si tuviera este ejemplar en sus manos, sería el hombre más feliz del mundo, ya que ese era uno de sus más grandes anhelos, pero el 14 de Marzo del 2008 emprendió el viaje hacia la eternidad, dejándome lindos recuerdos que nunca olvidaré.*

*...esos tesoros a los que llamo hermanos, con quienes comparto la vida, a Sonia, Norma, Sandra, Noemí y, especialmente a Julio y Yazmín quienes son parte importante de este logro y quienes me han dado tanto sin esperar nada a cambio.*

---

---

---

*...mi tío, el señor Anastasio García González  
por su ayuda y enseñanzas tan valiosas.*

*...ese gran equipo de trabajo que son mis compañeros  
con quienes compartí triunfos y fracasos semestre a  
semestre. A Gerardo, Jován, Oscar, Cecilia, Andrés,  
Guadalupe, José Luis, Rodrigo, Eduardo, Julio, Mariela,  
Juan Carlos, Fernando, por mencionar solo algunos.  
Por su tiempo y ayuda que jamás podré pagar.*

*...todos mis maestros de la Preparatoria y de la Facultad  
de Ingeniería, por enriquecer mi pensamiento al compartir día  
a día su conocimiento y experiencia en esos recintos llamados  
salones de clase.*

*...a mi querida y grandiosa Universidad Nacional Autónoma de México,  
porque ha significado tanto en mi vida desde el momento en que tuve la suerte de  
ingresar y egresar, pero sobre todo de tener un hogar muy cerca del  
campus de Ciudad Universitaria.*

A Dios y a todos ellos. **MUCHAS GRACIAS.**

---

# DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA GENERAR CURVAS DE TRANSICIÓN

## INDICE

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>8</b>
<b>CAPITULO 1. ANTECEDENTES</b>	
1.1 Movimiento Circular Uniforme.....	10
1.2 Curvas de transición .....	16
1.3 Historia y definición de la clotoide .....	22
1.4 Formas de emplear la clotoide en las diferentes vías de comunicación .....	26
<b>CAPITULO 2. NORMAS DE LA SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES (SCT) PARA CALCULAR LA LONGITUD DE LA CLOTOIDE</b>	
2.1 Clasificación de caminos donde se usa la clotoide .....	29
2.2 Obtención de la longitud de la clotoide de acuerdo con el tipo de camino.....	31
<b>CAPITULO 3. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CLOTOIDE</b>	
3.1 Ubicación de cada elemento de la clotoide y su descripción.....	41
3.2 Deducción de las ecuaciones que corresponden a los elementos geométricos de la clotoide para un punto particular ( P ) .....	44
3.3 Deducción de las ecuaciones que corresponden a los elementos geométricos de la clotoide para una longitud ( Le).....	58

## **CAPITULO 4. EXPRESIONES MATEMÁTICAS NECESARIAS PARA CALCULAR LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CURVA CIRCULAR CON CLOTOIDES SIMÉTRICAS.**

4.1	Deducción de las ecuaciones que corresponden a los elementos geométricos de la curva circular simple.....	60
4.2	Deducción de las ecuaciones que corresponden a los elementos geométricos de la curva circular con clotoides simétricas (como conjunto de curvas) .....	63
4.3	Deducción de las ecuaciones que corresponden a los elementos geométricos de la curva compuesta y que dependen de las coordenadas de sus puntos.....	70
4.4	Cálculo de coordenadas rectangulares de los puntos principales de la curva compuesta.....	80
4.5	Síntesis de elementos geométricos y sus ecuaciones.....	91

## **CAPITULO 5. PLANIFICACIÓN Y DESARROLLO DEL PROGRAMA**

5.1	Análisis del problema y desarrollo de las especificaciones.....	96
5.2	Diseño de una solución .....	98
5.3	Codificación del programa en un lenguaje de programación.....	111
5.4	Pruebas realizadas al programa.....	111
5.5	Validación del programa .....	111

## **CAPITULO 6. INSTRUCCIONES PARA EL USO DEL SOFTWARE**

6.1	Formato de las datos de entrada.....	131
6.2	Interpretación de los resultados entregados por el programa.....	131

**CONCLUSION.....**132

**GLOSARIO DE TÉRMINOS.....**133

**BIBLIOGRAFÍA.....**137

## INTRODUCCIÓN

En una vía de comunicación como lo son las carreteras y los ferrocarriles, tenemos que, esta consta de varios tramos rectos, "tangentes" con diferentes direcciones, las cuales se tienen que unir, esta unión se realiza mediante una curva para evitar que el vehículo pase de una tangente a otra con cambios bruscos de dirección. El presente trabajo muestra las causas y justifica el uso de las curvas de transición en el trazo de carreteras, haciendo especial énfasis en la llamada curva clotoide.

La curva circular es la más sencilla que puede usarse, pero tiene la gran desventaja de que la fuerza centrípeta es aplicada bruscamente cuando los vehículos salen de las tangentes produciendo en el vehículo que circula por estas vías, una sacudida violenta; esto se evita con la introducción entre las tangentes y la curva circular de unas curvas que tienen la particularidad de permitir reducir gradualmente el radio de curvatura entre las tangentes y el arco circular, logrando con esto una aplicación gradual en el cambio de dirección, así como de la sobre-elevación y ampliaciones necesarias. Evitando así los cambios bruscos de curvatura.

Para lograr esto se utilizan las curvas de transición. Son curvas que proveen un cambio gradual en su mayoría entre una tangente y una curva o entre curvas de diferente radio. De lo contrario, de una recta a una circunferencia la curvatura pasaría de un salto de 0 a un cierto valor finito y constante, con el consiguiente riesgo de accidente debido, entre otras cosas, a la fuerza centrífuga. Sin embargo, con las curvas de transición entre esos tramos rectos y curvos de una carretera, se consigue que la curvatura pase gradualmente, de forma continua y sin cambios bruscos, desde cero hasta el valor finito de la curva circular.

Además el vehículo recibe gradualmente otra fuerza aparte de las que van actuando sobre él, que es la que hace que este pueda seguir la curva y no se "salga por la tangente", esta es la fuerza centrípeta.

---

---



Diversos procedimientos se han utilizado para efectuar la transición de la curvatura entre los alineamientos rectos y circulares. Es así que el enlace de dos alineamientos rectos se puede realizar mediante el uso del arco de círculo de radio precedido y seguido por una curva de transición de radio variable, o utilizando las curvas de transición sin arco de círculos intermedios. Cualquiera que sea el procedimiento que se seleccione para realizar la transición de una curva, esta debe satisfacer los requerimientos exigidos por la dinámica del movimiento, la maniobrabilidad del vehículo, la comodidad del conductor y la geometría del trazado.

En México la forma más común de utilizar curvas de transición en caminos y en ferrocarriles es en la curva compuesta. Es decir, enlazar dos alineamientos rectos a través de una curva circular simple con espirales simétricas.

Este trabajo sintetiza los elementos geométricos que conforman dicha curva, mostrando la simbología más comúnmente usada, además de demostrar la validez de las expresiones matemáticas que se usan en su proyección y trazo. Asimismo se incluye el desarrollo de un programa de cómputo para calcular automáticamente dichos elementos a partir de algunos datos iniciales.

---

---

## CAPITULO 1

### ANTECEDENTES

#### 1.1 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En realidad cuando un vehículo circula sobre una curva lo que está realizando es un movimiento circular uniforme, que es el descrito por un móvil cuya trayectoria es una circunferencia y además el cuerpo describe dicha trayectoria con velocidad angular constante, es decir, que a intervalos iguales de tiempo recorre arcos iguales.

Cabe mencionar que este movimiento circular es uniforme en cuanto al valor absoluto de la velocidad más no en cuanto al sentido vectorial de esta, ya que las distancias se recorren a lo largo de una circunferencia y, por lo tanto, la dirección de dichas distancias no es constante sino que varía de punto a punto, esta dirección del vector velocidad es siempre tangente a la circunferencia y, por ello, perpendicular al radio de la misma.

#### LA FUERZA CENTRÍPETA

Consideremos un objeto que se mueve en una circunferencia (Fig. 1) y veamos lo que sucede cuando este se mueve de un punto A de la circunferencia a un punto B de la misma.

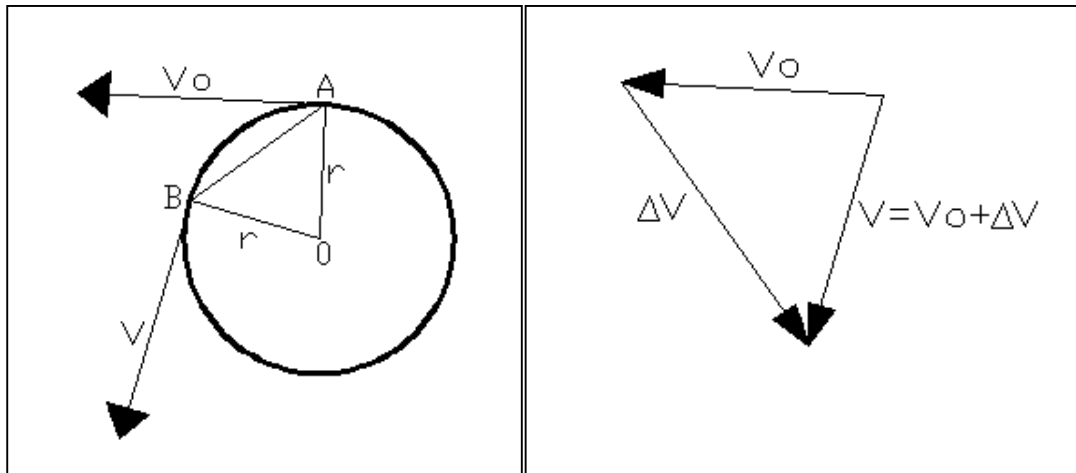


FIGURA 1

FIGURA 2

Puesto que la velocidad del objeto ha cambiado en dirección pero no en magnitud, el cambio de velocidad es como se muestra en la Fig. 2 y la aceleración del objeto será por definición:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \dots\dots\dots(1)$$

Donde  $\Delta t = tiempo$  invertido por el objeto al desplazarse de A hasta B.

Si tomamos el límite cuando  $\Delta t$  se aproxima a cero la letra  $a$  simbolizará la aceleración instantánea.

Si  $V$  es la velocidad del objeto y  $S$  la distancia recorrida (Fig. 1), el tiempo invertido es:

$$\Delta t = \frac{S}{V} \dots\dots\dots(2)$$

Sustituyendo en la ecuación 1:

$$a = \frac{\Delta V}{\frac{S}{V}}$$

$$a = \frac{V\Delta V}{S} \dots\dots\dots(3)$$

De las figuras 1 y 2 se observa que:

El triángulo OAB y el triángulo de la figura 2 son semejantes ya que:

$$BO \perp V \quad \text{y} \quad AB \perp \Delta V$$

Como se aprecia en la Fig. 3.

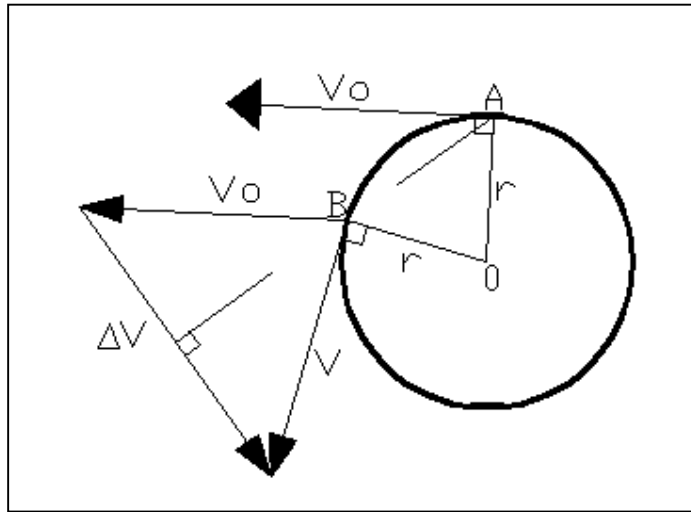


FIGURA 3

y por lo tanto podemos escribir que:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{AB}{BO}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{AB}{r} \dots\dots\dots(4)$$

Pero si  $\Delta t \rightarrow 0$ , es decir, si suponemos que A y B están lo mas cerca posible, entonces el arco AB tiene aproximadamente la misma longitud que la cuerda que une A y B, eso significa que  $s = \text{arco AB} = \text{linea AB}$ , y entonces:

$$\Delta V = \frac{sV}{r}, \text{ si } \Delta t \rightarrow 0.$$

Sustituyendo en la ecuación 3:

$$a = \frac{V\left(\frac{sV}{r}\right)}{s} = \frac{V^2 s}{sr}$$

Finalmente:

$$a = \frac{V^2}{r} \dots\dots\dots(5)$$

Que es la aceleración centrípeta. Finalmente de la segunda ley de Newton:

$$F = ma \ ; \quad F = \frac{mV^2}{r} \dots\dots\dots(6)$$

Que es la fuerza centrípeta, misma que depende de la masa, la velocidad y el radio de curvatura.

Donde:

- F = fuerza centrípeta
- m = masa del vehículo
- V = velocidad del vehículo
- r = radio de la curva

La fuerza centrípeta es toda fuerza dirigida hacia un centro fijo, desde la periferia de una trayectoria circular. Centrípeta quiere decir "en busca del centro" o "hacia el centro". La fuerza ejercida sobre un auto a lo largo de una curva, está dirigida hacia el centro; si de repente cesara de actuar, el auto ya no se mantendría en trayectoria circular.

Cuando un automóvil da vuelta en una curva, la fricción entre los neumáticos y el asfalto proporciona la fuerza centrípeta que lo mantiene dentro de dicha curva. Como se muestra en la Figura 4.

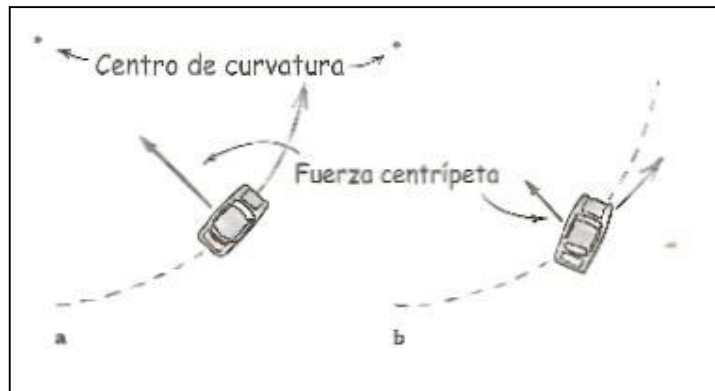


FIGURA 4

Si esta fricción no es suficientemente grande, el auto no puede tomar la curva y los neumáticos patinan hacia un lado, entonces se dice que el auto derrapa, por lo que saldría despedido en dirección rectilínea.

## LA FUERZA CENTRÍFUGA

Si la carretera está inclinada proporciona una fuerza centrípeta adicional que junto con las fuerzas de fricción de las llantas del vehículo con el pavimento nos proporcionan la fuerza que es la que hace que el vehículo siga un movimiento circular uniforme y, por lo tanto esta fuerza es la que se tiene que ir aplicando gradualmente si se quiere evitar que el vehículo sufra una sacudida violenta.

Ahora se sabe que en movimiento circular uniforme la aceleración del móvil siempre va a estar dirigida hacia el centro de la circunferencia y de aquí que sea la aceleración centrípeta y no la aceleración centrífuga la que se tiene que ir aplicando también gradualmente.

Supongamos que en un instante dado el móvil A, cuya velocidad, como se sabe es tangente a la circunferencia, tenga una aceleración dirigida, por ejemplo, según la línea AB. Figura 5.

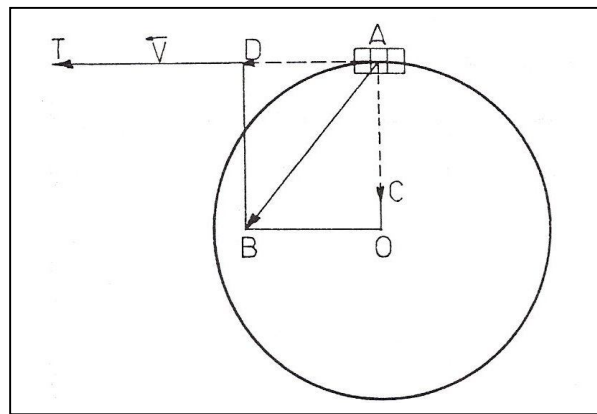


FIGURA 5

Si se descompone dicha aceleración en dos componentes, una AC en la dirección AO del radio de la circunferencia y la otra en la dirección de la tangente AT a la circunferencia en el punto A (componente AD), podemos observar que el vector AD como esta en la misma dirección que el vector velocidad V, no puede hacer otra cosa que sumarse a esta y aumentar en cada segundo la velocidad con que el móvil sigue la curva, pero entonces el valor absoluto de la velocidad no sería constante y por lo tanto el movimiento circular ya no sería uniforme.

En consecuencia para que el movimiento sea de este tipo, dicha aceleración tangencial debe ser nula.

Por lo tanto de las dos componentes del vector aceleración  $AB$ , solo queda la  $AC$ , es decir, la dirigida hacia el centro de la circunferencia.

Además, la fuerza centrífuga más que una fuerza es una "ausencia" de fuerza centrípeta.

En realidad la "fuerza" que sentimos que nos lanza hacia afuera cuando vamos en un automóvil y este toma una curva, no es más que un efecto de la ley de inercia, y es comparable con el que sienten los pasajeros de un autobús al ser lanzados hacia adelante cuando el vehículo frena bruscamente.

En este caso el pasajero cae hacia adelante porque según la primera ley de Newton, continúa en su movimiento uniforme rectilíneo mientras que el autobús es accionado por una fuerza (el frenazo) hacia atrás.

Análogamente, la persona que va en el autobús "cae" hacia afuera de la curva porque no participa del frenazo hacia adentro.

## 1.2 CURVAS DE TRANSICIÓN

### DEFINICIÓN

Una curva de transición es aquella que liga una tangente con una curva circular, teniendo como característica principal que en su longitud se efectúa de manera continua el cambio en el valor del radio de curvatura desde infinito para la tangente hasta el que corresponde para la curva circular.

### MOTIVOS PARA EL USO DE LAS CURVAS DE TRANSICIÓN

#### Aplicación gradual de la fuerza centrípeta.

Como se puede observar la expresión de la fuerza centrípeta esta en función del radio de la curva ( $r$ ) entre otros elementos, lo que implica que si un cuerpo en movimiento cambia instantáneamente de una trayectoria en línea recta a otra en una curva de radio finito, la fuerza centrípeta ( $F$ ) será aplicada instantáneamente y el cuerpo sobre el cual se aplica recibirá una sacudida. Pero si el radio de curvatura se va reduciendo gradualmente desde el infinito en la línea recta hasta el valor ( $r$ ), la magnitud de  $F$  (fuerza centrípeta) que actúa sobre el cuerpo aumentará gradualmente y la sacudida que recibirá será muy ligera.

#### Efectos psicológicos del conductor

Tampoco se debe olvidar el efecto psicológico que afectaría al conductor al pasar de un alineamiento en línea recta a uno en curva, ya que una unión de esta clase, sin arco de transición, aparece como un codo mas o menos marcado, según la magnitud del radio de curvatura, dentro de la perspectiva visual del conductor y un codo detiene la vista en su marcha y le obliga a disminuir la velocidad ante la aparente dificultad.

#### Conservación del ancho efectivo del camino

Si consideramos a un vehículo que se va aproximando a una curva del camino, el conductor, en el momento de entrar a esta, o después intuitivamente, por su propia comodidad o sentido de la seguridad, girara el volante gradualmente desde la posición normal a la máxima desviación, reduciendo así la sacudida producto de la fuerza centrípeta, así como el consiguiente vaivén resultante y tendencia al deslizamiento, reduciendo así la probabilidad de volcarse.



Con esta vuelta gradual del volante el vehículo estará realizando su propia curva de transición y si la curva consiste en un arco de círculo que arranca de una tangente, el vehículo que circula por el encintado interior tenderá a salirse del camino, y el que circula por el encintado exterior tenderá a “cortar” la curva, dando como resultado que el ancho efectivo del camino quede considerablemente reducido, pero si colocamos curvas de transición entre el principio y el final de la curva circular, los conductores conciliarán el cambio de dirección que corresponde al camino con el de la marcha y mantendrán así el ancho efectivo de este, trayendo consigo una mayor seguridad para ellos.

### CONDICIONES GEOMÉTRICAS QUE DEBEN CUMPLIR

Lo más importante en una curva de transición es que el cambio en el radio de curvatura se realice de una manera continua. Es decir, que vaya decreciendo desde el infinito para la tangente hasta el valor mínimo preciso en la curva circular, siendo este valor el radio de dicha curva.

Es decir, si se observa la ecuación:

$$a = \frac{v^2}{r} \dots\dots\dots(5)$$

Que nos permite obtener el valor de la aceleración centrípeta, podemos ver como esta es inversamente proporcional al radio de curvatura para una velocidad determinada, entonces resulta que la transición ha de tener un radio de curvatura inversamente proporcional a su desarrollo desde el punto de partida.

Esto quiere decir que si la aceleración centrípeta de un vehículo que se mueve a velocidad uniforme vale  $a = \frac{v^2}{r}$ , esta variará desde cero para la tangente hasta  $\frac{v^2}{Rc}$  para la curva circular de radio Rc.

La curva de transición debe proyectarse de tal manera que la variación de la curvatura, y, por lo tanto, la variación de la aceleración centrípeta sean constantes a lo largo de ella.

## PERALTE O SOBREELEVACIÓN

Una de las causas para el uso de las curvas de transición es la aplicación gradual de la sobreelevación.

Esta sobreelevación o peralte con que se construyen las curvas es necesaria, ya que si la carretera está completamente horizontal, la única fuerza centrípeta es la fricción.

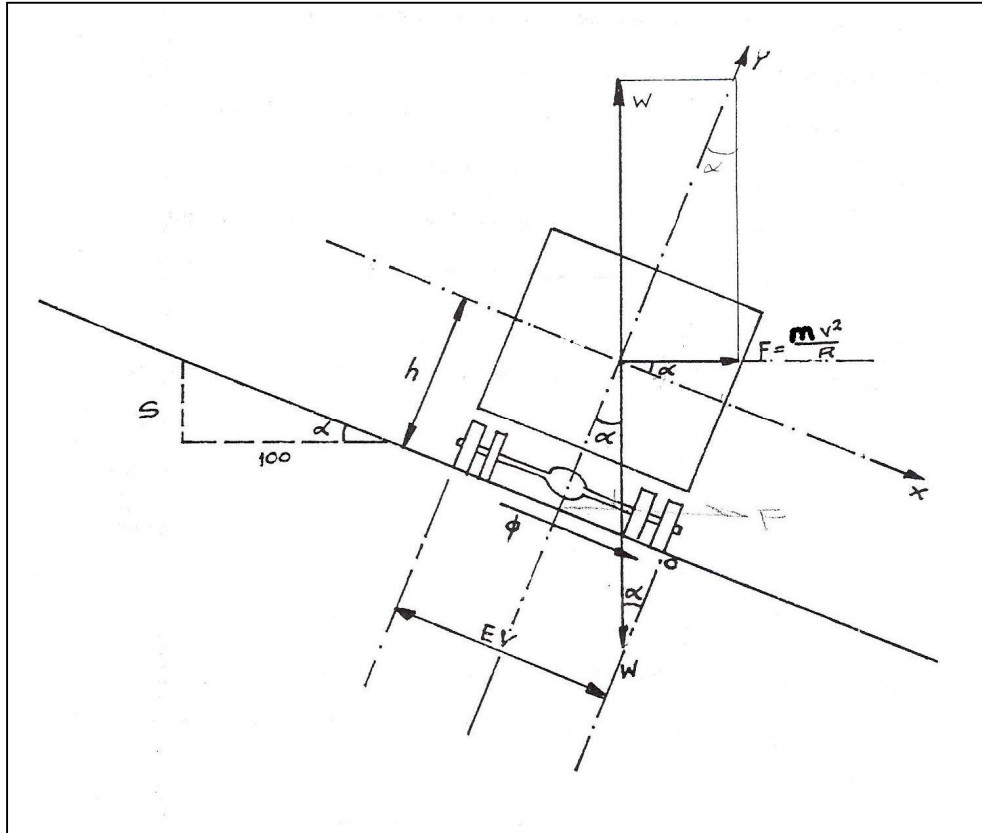


FIGURA 6

Pero si la carretera está inclinada un ángulo determinado ( $\alpha$ ) (ver Fig. 6), la reacción del piso que como se sabe, es siempre perpendicular a él, puede descomponerse en dos componentes: una vertical que equilibra el peso del vehículo y otra horizontal que es la que proporciona la fuerza centrípeta adicional, de tal manera que unida a la producida por la fricción permita tomar la curva con la facilidad y comodidad requeridas.

## **ESTABILIDAD DE LAS CURVAS**

Un vehículo es estable cuando no tiene la tendencia a salirse de la trayectoria que le fija el conductor por medio del volante.

La inestabilidad del vehículo procede generalmente de las fuerzas transversales a que está sujeto, ya sea por asimetrías internas tales como carga mal distribuida, neumáticos desinflados y mecanismos de suspensión defectuosos, o bien cuando la fuerza centrípeta es mayor que la necesaria para mantener el vehículo en la trayectoria circular.

La inestabilidad debido a la fuerza centrípeta puede manifestarse de dos maneras: por deslizamiento o por volcamiento. Cuando las fuerzas que tienden a hacer deslizar el vehículo son mayores que las fuerzas que mantienen al vehículo en su trayectoria, el vehículo se desliza; cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre el vehículo sale fuera del polígono formado por los puntos de contacto de las ruedas con el pavimento, el vehículo se vuelca.

## **VENTAJAS AL UTILIZAR CURVAS DE TRANSICIÓN**

Algunas ventajas que se obtienen al utilizar curvas de transición son:

- En una curva de transición en la que la aceleración centrípeta va aumentando gradualmente, la sensación del conductor le informará perfectamente cuando va demasiado aprisa y así puede este reducir la velocidad a medida que disminuye el radio de curvatura.
- La fuerza centrípeta varía gradualmente al entrar y salir de una curva, lo que reduce la invasión del carril próximo, aumentando así la seguridad del camino.
- La longitud de la curva de transición provee un arreglo conveniente para aumentar gradualmente el peralte e ir aplicando así poco a poco la fuerza centrípeta.
- Cuando existe la necesidad de ensanchar la carpeta asfáltica en curva, la curva de transición facilita el ensanchamiento gradual.
- Se mejora la apariencia del camino en lo referente al alineamiento como a la sobreelevación.

## OTRAS CURVAS QUE SE PUEDEN UTILIZAR COMO TRANSICIONES

Existen algunos tipos de curvas que pueden servir para el mismo fin, como la parábola cúbica, cuya curvatura es proporcional a la proyección de la longitud de la tangente en su origen, o la Lemniscata de Bernoulli, cuya curvatura es proporcional a la distancia polar (Figura 7).

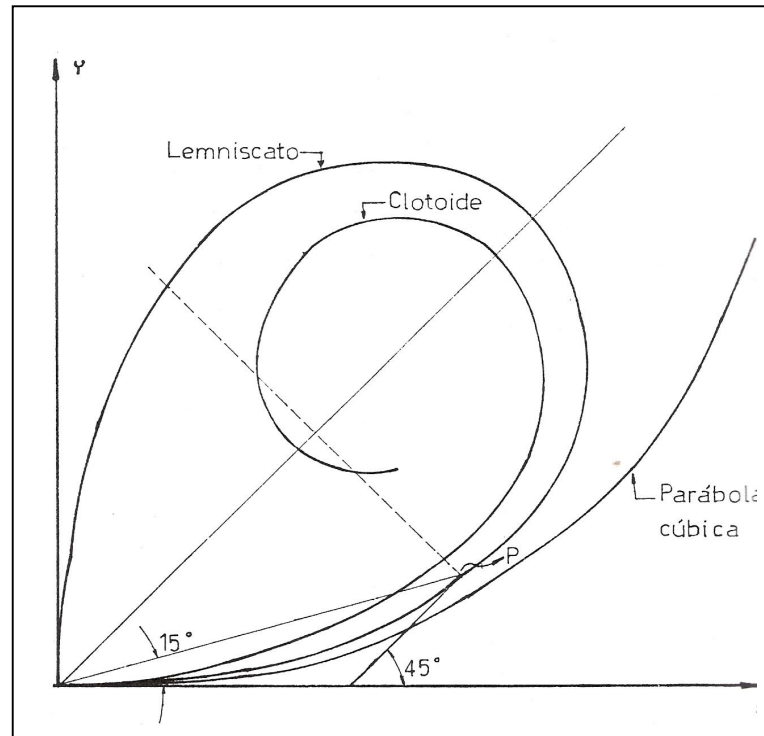


FIGURA 7

## LAS CURVAS ESPIRALES

Existen otras curvas llamadas curvas compuestas de transición o espirales que son las curvas compuestas de arcos circulares de longitudes constantes, cuyos grados van aumentando gradualmente desde la tangente hasta la curva circular simple, de cero grados hasta el valor de la curva circular simple (Figura 8).

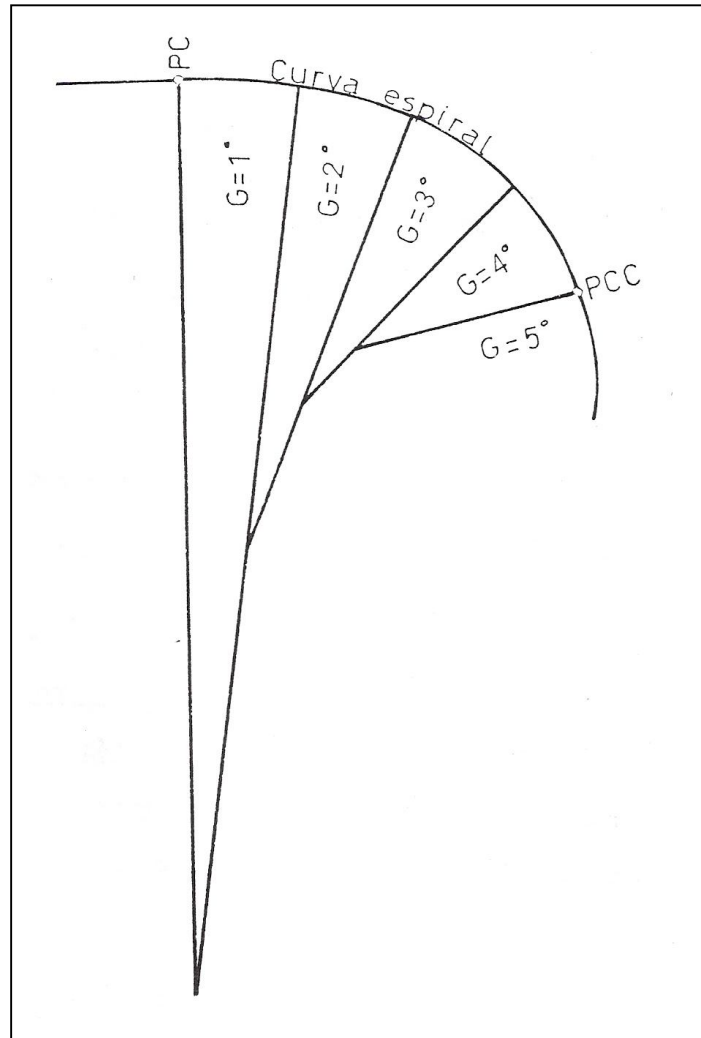


FIGURA 8

Sin embargo, este trabajo está dedicado únicamente a la clotoide por ser la curva más apropiada para efectuar transiciones, ya que para conseguir una marcha regular y cómoda se necesita que el radio de la curva vaya decreciendo en una forma inversamente proporcional al desarrollo de dicha curva; desde su punto de partida. Dicha condición la cumple la clotoide o espiral de Euler.

### 1.3 HISTORIA Y DEFINICIÓN DE LA CLOTOIDE

La espiral es un círculo espiritualizado. En la forma espiral, el círculo desenrollado, devanado, ha dejado de ser vicioso. La espiral es una formación natural frecuente en el reino vegetal: evoca la evolución de una fuerza, de un estado. Es una figura cargada de significaciones simbólicas, presente en todas las culturas. La espiral es y simboliza emanación, extensión, desarrollo, continuidad cíclica pero en progreso y rotación creacional. Ninguna curva ha fascinado tanto al ser humano, desde los tiempos más remotos, como la espiral. Su presencia en los objetos vivos, tanto animales como vegetales, tuvo que llamar la atención de nuestros antepasados desde los albores de la humanidad. No existe ninguna cultura que no la haya utilizado como elemento simbólico, mágico o simplemente ornamental. La espiral ha acompañado al ser humano en todo tiempo y en todo lugar. Ante las innumerables manifestaciones naturales de las espirales, tanto de carácter orgánico como mecánico, estas curvas no podían dejar de llamar la atención de los matemáticos y ser objeto de su investigación. Cuando los fenómenos de rotación y expansión se unen, dan lugar a una espiral, que es una curva que surge a partir de un punto que gira y que al mismo tiempo se aleja del punto de origen.

El primero en estudiar la espiral y a quien le debemos el nombre de *spira marabilis* (espiral maravillosa) es Jacob Bernouilli (matemático suizo del siglo XVII), que la estudió en profundidad quedando cautivado hasta el punto de dejar escrito en su testamento que en su lápida debería figurar una espiral.

La espiral más comúnmente utilizada en carreteras, se conoce con el nombre de Clotoide. Esta curva fue considerada por primera vez por los científicos Johann Bernouilli alrededor de 1696, por Leonhard Euler en 1743 y más ampliamente estudiada por el físico francés Marie Alfred Cornú en 1874, quien hizo aplicaciones a la óptica. Por eso también es conocida como espiral de Euler o espiral de Cornú.

La forma de la clotoide se ajusta a la trayectoria recorrida por un vehículo que viaja a velocidad constante y cuyo volante es accionado en forma uniforme.

Esta curva fue analizada en Alemania en el año de 1860 por Max von Leber, e introducida en la práctica de la ingeniería por L. Oerly en el año 1937.

Por definición, la clotoide o espiral de Euler, es una curva tal que los radios de curvatura de cada uno de sus puntos están en razón inversamente proporcional a los desarrollos de sus respectivos arcos, es decir, a las longitudes de la curva entre el origen de la transición y cada uno de estos puntos, siendo  $K^2$  la constante de proporcionalidad.

La figura 9 nos muestra una vista de conjunto de la clotoide, en ella se observa que está compuesta por dos espirales que se enrollan alrededor de los puntos asintóticos  $J_1$  y  $J_2$ .

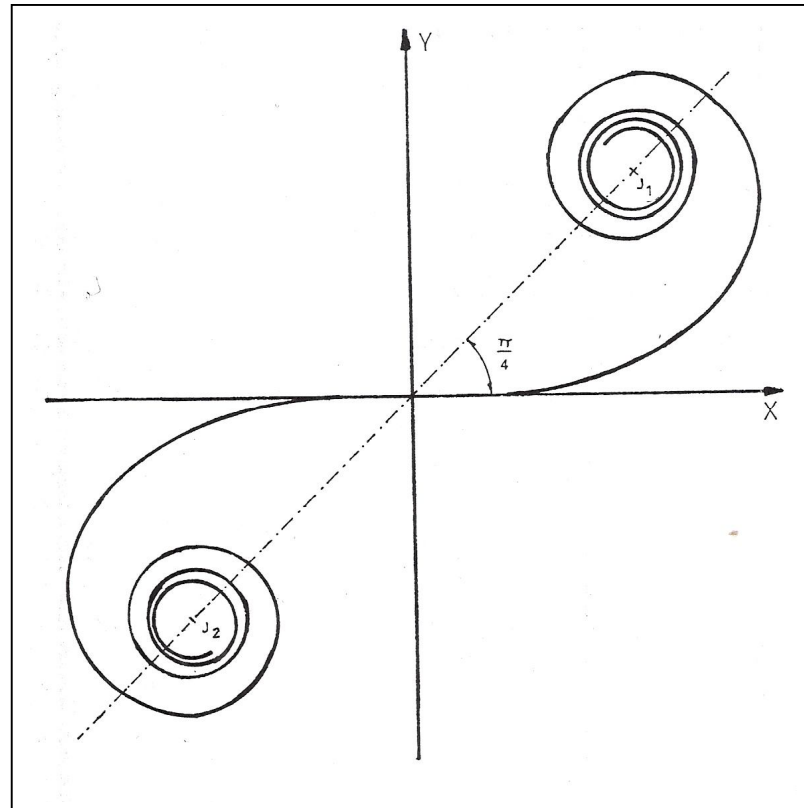


FIGURA 9

La clotoide es una curva de la familia de las espirales que presenta las siguientes ventajas.

- El crecimiento lineal de su curvatura permite una marcha uniforme y cómoda para el usuario, quien solo requiere ejercer una presión creciente sobre el volante, manteniendo inalterada la velocidad, sin abandonar el eje de su carril.

- El desarrollo del peralte se logra en forma también progresiva, consiguiendo que la pendiente transversal de la calzada sea en cada punto exactamente la que corresponde al respectivo radio de curvatura.
- La flexibilidad de la clotoide permite acomodarse al terreno sin romper la continuidad, lo que permite mejorar la armonía y apariencia de la carretera.
- Las múltiples combinaciones de desarrollo en su curvatura facilitan la adaptación del trazado a las características del terreno, lo que en oportunidades permite disminuir el movimiento de tierras logrando trazados más económicos.

### DEDUCCIÓN DE SU EXPRESIÓN

Si la longitud de la curva de transición es ( $L_c$ ), entonces la variación de la aceleración centrípeta por unidad de longitud será  $\frac{V^2}{RcL_c}$ . En un punto cualquiera de la curva situado a una distancia  $L$  del origen de la transición, el valor de la aceleración centrípeta será:

$$a = \frac{V^2 L}{RcL_c} \dots\dots\dots(7)$$

y si la curvatura en el punto considerado es  $\frac{1}{R}$  entonces el valor de la aceleración centrípeta será también  $\frac{V^2}{R}$ , entonces igualando:

$$a = \frac{V^2 L}{RcL_c} = \frac{V^2}{R}$$

$$\frac{RV^2 L}{V^2} = RcL_c$$

y por lo cual:

$$RL = RcL_c$$

y como  $R_c$  y  $L_c$  son de una magnitud constante para una curva determinada, entonces podemos escribir que:

$$RcL_c = K^2 \dots\dots\dots(8)$$



Donde K será una magnitud constante.

Entonces:

$$RL = K^2 \dots\dots\dots(9)$$

La expresión anterior es la ecuación de la curva conocida como clotoide (del griego Cloto, hiladera y de eidos, semejante o parecido a) o Espiral de Euler; que cumple con la condición de que el producto del radio en un punto de la curva determinado y la longitud del origen a ese punto es siempre constante, por otra parte al aumentar o reducir el parámetro K todas las medidas lineales varían en la misma proporción, permaneciendo los elementos que determinan su forma sin cambio alguno; lo que significa que todas las clotoides tienen la misma forma, y únicamente difieren por su longitud, esto quiere decir que todas las clotoides son semejantes entre sí. Fig. 10.

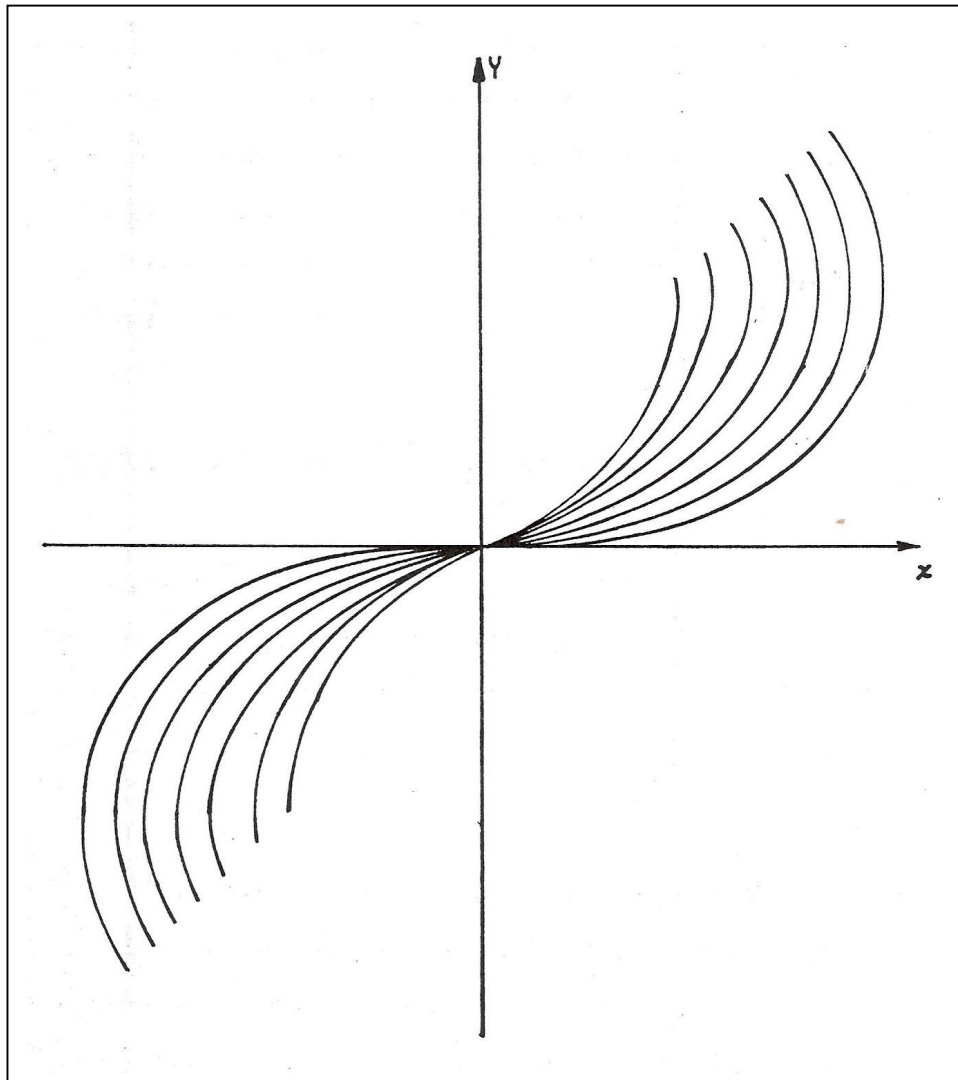


FIGURA 10. CONJUNTO DE CLOTOIDES

## 1.4 FORMAS DE EMPLEAR LA CLOTOIDE EN LAS DIFERENTES VÍAS DE COMUNICACIÓN

Las propiedades de la clotoide hacen que esta sea la curva de transición por excelencia en el trazado de autopistas o vías de tren.

La clotoide puede ser empleada en enlaces muy diversos, tales como:

- **La curva de transición:** es un arco de clotoide desde el radio  $\alpha$  (unión a una recta) hasta el radio del arco circular siguiente.

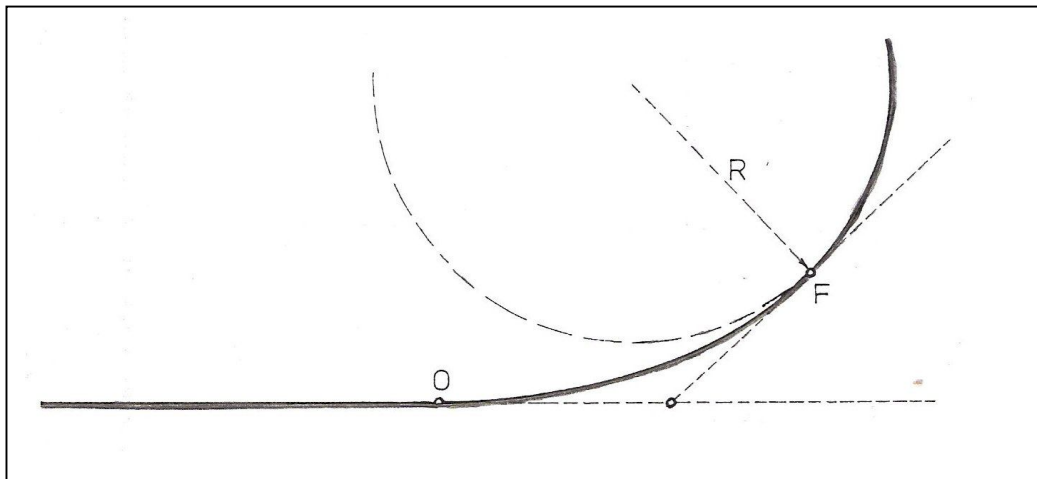


FIGURA 11. CLOTOIDE COMO CURVA DE TRANSICIÓN

- **La clotoide de vértice:** representa la transición entre dos rectas de direcciones distintas. Se compone de dos curvas clotoides con el mismo radio de curvatura y tangente común en su punto de contacto o de enlace.

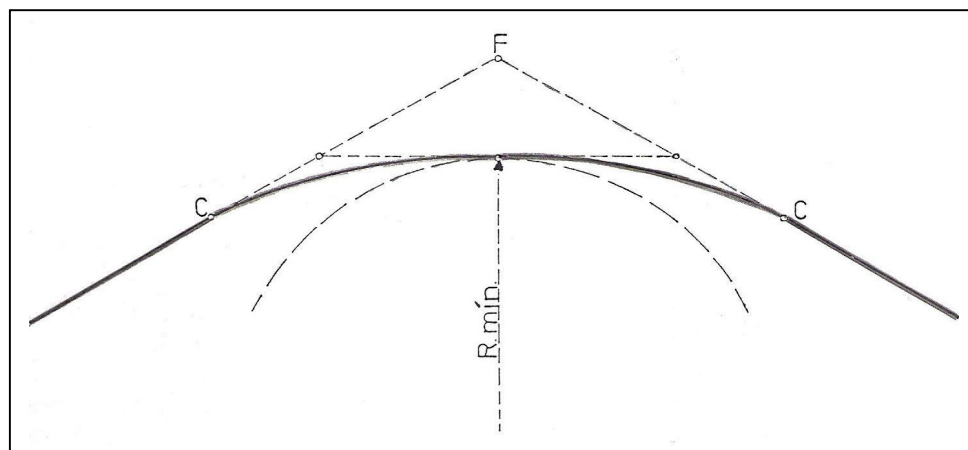


FIGURA 12. CLOTOIDE DE VÉRTICE

- **La curva de inflexión:** es una curva en S, que une a dos círculos de curvaturas opuestas, sin segmento rectilíneo intermedio. Consta de dos ramas de clotoide, cuyo punto de origen es común, siendo en este punto el radio  $\alpha$  y la tangente es común para ambos.

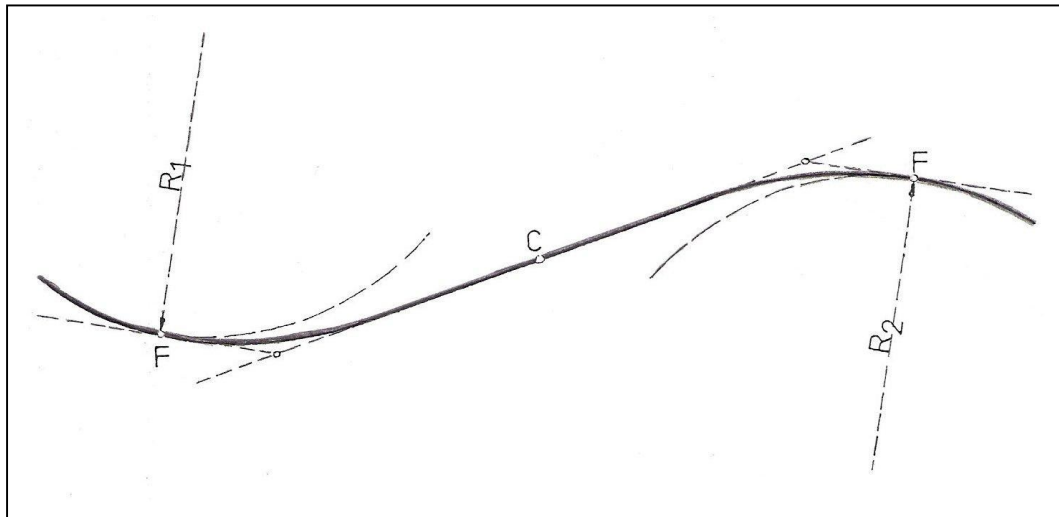


FIGURA 13. CLOTOIDE COMO CURVA DE INFLEXIÓN

- **La ovoide:** es una sucesión círculo-clotoide-círculo, siendo del mismo sentido la curvatura de las tres curvas. El arco de clotoide tiene en los puntos de contacto con los círculos, tangentes comunes y radios iguales respectivamente.

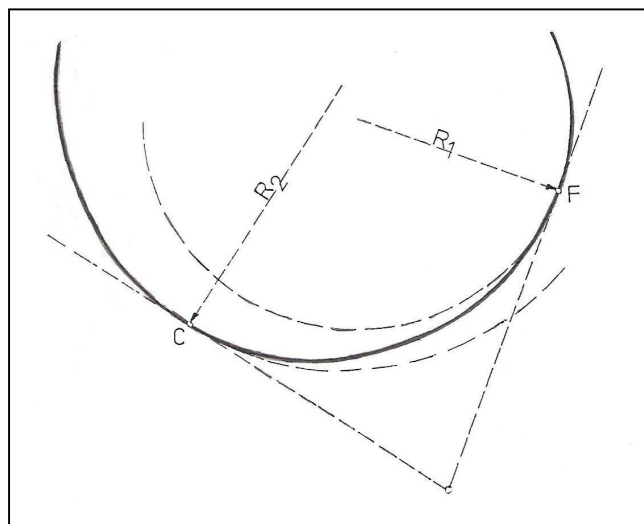


FIGURA 14. CLOTOIDE COMO OVOIDE

- **La serie de clotoides:** es una sucesión de arcos de clotoide en los que siendo distintos los parámetros de cada uno, las curvaturas están dirigidas y son crecientes en el mismo sentido, con tangentes comunes y la misma curvatura, para cada dos arcos sucesivos en su punto de contacto.

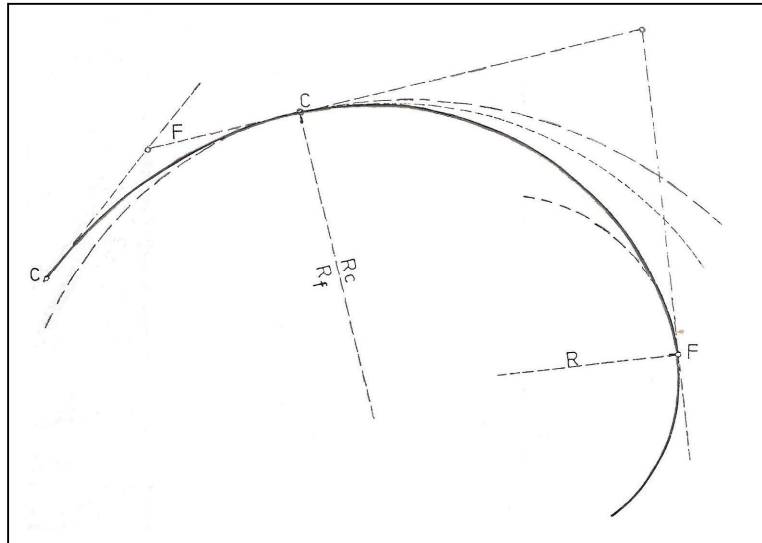


FIGURA 15. SERIE DE CLOTOIDES

Igualmente la curva clotoide es usada comúnmente en las llamadas montañas rusas de parques de atracciones...

Y para muestra...



FIGURA 16. MONTAÑA RUSA

## CAPITULO 2

### NORMAS DE LA SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES (SCT) PARA EL TRAZO DE CURVAS DE TRANSICIÓN

#### 2.1 CLASIFICACIÓN DE CAMINOS DONDE SE USA LA CLOTOIDE

Para entender mejor los casos en los que la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) considera necesaria la clotoide, y los criterios para hacer uso de ella, haremos una breve descripción de los tipos de carreteras y sus características. Estas se clasifican de acuerdo con su tránsito diario promedio anual (TDPA), en la forma siguiente:

- a) Tipo "A" :
  - 01) Tipo "A2" para un TDPA de tres mil (3 000) a cinco mil (5 000) vehículos.
  - 02) Tipo "A4" para un TDPA de cinco mil (5 000) a veinte mil (20 000) vehículos.
- b) Tipo "B", para un TDPA de mil quinientos (1 500) a tres mil (3 000) vehículos.
- c) Tipo "C", para un TDPA de quinientos (500) a mil quinientos (1 500) vehículos.
- d) Tipo "D", para un TDPA de cien (100) a quinientos (500) vehículos.
- e) Tipo "E", para un TDPA de hasta cien vehículos.

Las normas de servicios técnicos de la SCT, en su sección de proyecto geométrico de carreteras, indica que para efectuar las transiciones:

Se empleará la clotoide o Espiral de Euler, cuya expresión es:

$$RcLe = K^2 \dots\dots\dots(8)$$

En donde:

Rc = Radio de la curva circular, en metros

Le = Longitud de la espiral de transición en metros

K<sup>2</sup> = Parámetro de la espiral, en m<sup>2</sup>

Las curvas clotoides se utilizarán para unir las tangentes con las curvas circulares formando una curva compuesta por una clotoide de entrada, una curva circular central y una clotoide de salida de longitud igual a la de entrada.

## 2.2 OBTENCIÓN DE LA LONGITUD DE LA CLOTOIDE DE ACUERDO CON EL TIPO DE CAMINO

Muchas veces no es posible aplicar la longitud teórica de la clotoide obtenida con la ecuaciones correspondientes, por lo que a continuación se describirán algunas fórmulas empíricas que nos permitirán obtener dicha longitud.

Como se dijo antes, las curvas de transición tienen como objeto permitir la aplicación gradual de la aceleración y de la fuerza centrípeta así como de la sobreelevación y ampliación necesarias, esta aplicación es más repentina conforme la longitud de la clotoide es más corta.

La longitud mínima de la clotoide será aquella que nos permita aplicar gradualmente la fuerza o la aceleración centrípeta, o en su caso la sobreelevación y ampliación, de tal manera que no excedan de un cierto valor límite, marcado este por el método que se esté usando.

En 1909, W. H. Shortt dedujo la primera fórmula para calcular la longitud mínima de la clotoide para curvas de ferrocarril, basándose en que la variación de la aceleración centrípeta debe ser constante cuando se recorre la curva a una velocidad uniforme.

Tenemos que la aceleración centrípeta en un punto cualquiera de la curva vale:

$$a = \frac{V^2 L}{RcLe} \dots\dots\dots(7)$$

Si  $t$  es el tiempo que necesita el vehículo para recorrer la clotoide a velocidad uniforme  $V$ ; en un punto cualquiera de la curva se tendrá que  $L = Vt$ , sustituyendo en (7):

$$a = \frac{V^2 Vt}{RcLe} = \frac{V^3 t}{RcLe}$$

Y como la variación de la aceleración centrípeta (con respecto al tiempo) es una constante, entonces:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V^3 t}{RcLe} \right) = C$$

$$\frac{V^3}{RcLe} = C$$

$$\therefore Le = \frac{1}{C} \frac{V^3}{Rc} \dots\dots\dots(10)$$

Donde:

Le = Longitud mínima de la clotoide (m).

V = Velocidad del vehículo  $\left(\frac{m}{seg}\right)$

Rc = Radio de la curva circular (m).

C = Coeficiente de variación de la aceleración centrípeta, coeficiente de comodidad  $\left(\frac{m}{seg^3}\right)$ .

Si expresamos el valor de la velocidad en  $\frac{km}{hr}$ , entonces:

$$Le = \frac{1}{C} \frac{\left(V\left(\frac{m}{seg}\right)\right)^3}{Rc} = \frac{1}{C} \frac{V^3}{Rc} \left(\frac{m}{seg}\right)^3 \left(\frac{1km}{1000m}\right)^3 \left(\frac{3600seg}{1hr}\right)^3$$

$$Le = 46.656 \frac{V^3}{CRc} \dots\dots\dots(11)$$

El coeficiente C es un valor empírico que indica el grado de comodidad que se desea proporcionar. Para ferrocarriles, se aceptó el valor de  $0.305 \frac{m}{seg^3}$ , en caminos se emplea un valor que va de 0.305 hasta  $0.915 \frac{m}{seg^3}$ . En 1938, J. Barnett propuso un valor de  $0.61 \frac{m}{seg^3}$ , valor que ha sido usado ampliamente.

En 1949, M.V.Smirnoff propuso una fórmula semejante a la de Shortt, pero corrigiendola para tener en cuenta la sobreelevación. Tal fórmula es:

$$Le = \frac{46.656}{C} V \left( \frac{V^2}{Rc} - 127S \right) \dots\dots\dots(12)$$



Donde:

Le : Longitud mínima de la clotoide (m)

V : Velocidad del vehículo  $\left(\frac{km}{hr}\right)$

Rc : Radio de la curva circular (m)

S : Sobreelevación de la curva circular, en valor absoluto.

C : Coeficiente de comodidad, fijado empíricamente entre 0.305 y 0.610  $\frac{m}{seg^3}$ .

Por su parte, la AASHO (American Association of State Highway Officials) recomienda otra manera de calcular la longitud mínima de la espiral que con base en el aspecto estético del camino consiste en igualar la longitud de la clotoide a la longitud necesaria para dar la sobreelevación correspondiente a la curva circular. Se establece que la espiral debe tener suficiente longitud para permitir que la pendiente longitudinal de la orilla de la calzada con respecto al eje del camino tenga un valor máximo P. La AASHO, basada en consideraciones empíricas y tomando en cuenta la apariencia de las transiciones, establece que para caminos de dos carriles y velocidades entre 48 y 112  $\frac{km}{hr}$ , el valor de esa pendiente será de  $\frac{1}{150}$  y  $\frac{1}{250}$ , respectivamente, de lo anterior:

$$P = \frac{1}{m}$$

y:

$$m = 1.5625V + 75$$

Donde:

P = Pendiente longitudinal de la orilla de la calzada con respecto al eje del camino, en valor absoluto.

m = Talud de la orilla de la calzada respecto al eje del camino. Es igual al recíproco de la pendiente.

V = Velocidad de proyecto  $\left(\frac{km}{hr}\right)$

Según lo anterior, la longitud mínima de la clotoide para caminos de dos carriles será:

$$L_e = \frac{aS}{P} = maS \dots\dots\dots(13)$$

Donde:

$L_e$  = Longitud mínima de la clotoide, en metros.

$a$  = Semiancho de la calzada en tangente para caminos de dos carriles, en metros.

$S$  = Sobreelevación de la curva circular, en valor absoluto.

También empíricamente, la AASHO establece que para caminos de más de dos carriles, la longitud mínima de espiral debe ser como sigue:

Caminos de tres carriles: 1.2 veces la longitud calculada para 2 carriles.

Caminos de cuatro carriles: 1.5 veces la longitud calculada para 2 carriles.

Caminos de seis carriles: 2.0 veces la longitud calculada para 2 carriles.

Estos valores no consideran la división entre carriles.

Un criterio desarrollado en México por la Secretaría de Obras Públicas, para calcular la longitud mínima de la clotoide, fija un valor constante a la velocidad con que el vehículo asciende o desciende por la espiral de transición, cuando circula por ella a la velocidad del proyecto. Si el conductor mantiene su vehículo en el centro de su carril, el desnivel que sube o baja el vehículo al circular por la transición es:

$$d = \frac{aS}{2}$$

Donde:

$d$  = Desnivel, en metros.

$a$  = Semiancho de carpeta o ancho de carril, en metros.

$S$  = Sobreelevación (m)

Si el vehículo recorre la clotoide de longitud  $Le$  a la velocidad de proyecto  $V$ , empleará un tiempo  $t$  de:

$$t = \frac{Le}{0.277V}$$

$t$ : tiempo (seg.)

$Le$ : en m

$V$ : en (km/hr)

La velocidad en el ascenso o descenso de la transición  $Ve$ , expresada en m/seg., será entonces:

$$Ve = \frac{d}{t} = \frac{aS/2}{Le/0.277V} = \frac{0.138VaS}{Le}$$

Esta velocidad debe ser de una magnitud tal, que permita circular al conductor de una manera cómoda y segura. Para fijarla se analizan los valores de la pendiente longitudinal entre la orilla de la calzada y el eje del camino, recomendados por la AASHO en el criterio anterior. Para una velocidad 48 km/h (13.33 m/seg) la AASHO recomienda una pendiente de 1/150; es decir, que el desnivel de la orilla de la calzada respecto al eje del camino será en 150 m. de 1 m. y, por lo tanto, el desnivel del eje será de la mitad, o sea de 0.50 m. Por otra parte, un vehículo que circule a la velocidad de 48 km/h recorre 150 m. en 11.25 segundos, con lo que su velocidad de ascenso o descenso en la espiral de transición será:

$$Ve = \frac{0.50}{11.25} = 0.044 \frac{m}{seg}$$

En la misma forma, para velocidad de proyecto de 112 km/h la AASHO recomienda una pendiente de 1/250; un vehículo circulando a 112 km/h recorrerá 250 m. en 8.04 segundos, con lo que su velocidad de ascenso o descenso será en la espiral de transición será:

$$Ve = \frac{0.50}{8.04} = 0.062 \frac{m}{seg}$$

Lo anterior parece indicar que para bajas velocidades de proyecto la AASHO recomienda longitudes de espiral relativamente mayores que las requeridas, admitiendo como segura y cómoda una velocidad en el ascenso de 0.062 m/seg para altas velocidades de proyecto; si se acepta el valor de 0.062 m/seg en la velocidad de ascenso y o descenso como una constante para cualquier velocidad de proyecto, se tendrá:

$$V_e = 0.062 = \frac{0.138VaS}{Le}$$

$$Le = \frac{0.138VaS}{0.062}$$

$$\therefore Le = 2.22VaS$$

En la expresión anterior la longitud de la clotoide es directamente proporcional al semiancho de la calzada, lo cual, aunque no influye en la comodidad y seguridad del usuario, proporciona una apariencia desagradable. En vista de esto último, se recomienda que la expresión que se obtiene para una velocidad de proyecto de 112 km/h y un semiancho de calzada de 3.65 m., se aplique para cualquier semiancho de calzada, es decir:

$$Le = 2.22 \times 3.65VSc$$

$$Le = 8VSc \dots\dots\dots(14)$$

Así, basándose en relaciones matemáticas y en procedimientos empíricos, la SCT en su manual de Normas de Servicios Técnicos, ha establecido que la longitud mínima de la espiral para carreteras tipos "A" de dos y de cuatro carriles en cuerpos separados y para carreras tipos "B" y "C" estará dada por la expresión (14).

En donde:

Le = Longitud mínima (m)

V = Velocidad de proyecto  $\left(\frac{km}{hr}\right)$

Sc = Sobreelevación en la curva circular, en valor absoluto

Para carreteras tipo "A" de cuatro carriles en un solo cuerpo "A4", la longitud mínima de la espiral calculada con esta fórmula deberá multiplicarse por (1.7).

Asimismo, las curvas espirales de transición se utilizarán exclusivamente en carreteras tipo "A", "B" y "C" y solo cuando la sobreelevación de las curvas circulares sea de siete por ciento (7%) o mayor.

Los valores de la longitud de la espiral (Le), las podemos obtener directamente de las tablas elaboradas por la SCT, que se presentan a continuación:

VELOCIDAD		70						80						90						100						110							
Gc	Rc	Ac			Le			Ac			Le			Ac			Le			Ac			Le			Ac			Le				
		A4S	A4	Sc	A4S	A4	A4S	A4	Sc	A4S	A4	A4S	A4	Sc	A4S	A4	A4S	A4	Sc	A4S	A4	A4S	A4	Sc	A4S	A4	A4S	A4	Sc	A4S	A4		
0° 15'	4583.68	0	20	2.0	39	67	0	20	2.0	45	76	0	30	2.0	50	86	0	30	2.0	56	95	0	30	2.0	62	105							
0° 30'	2291.84	20	30	2.0	39	67	20	30	2.0	45	76	20	40	2.0	50	86	20	40	2.3	56	95	20	50	2.7	62	105							
0° 45'	1527.89	20	40	2.0	39	67	20	40	2.3	45	76	30	50	2.8	50	86	30	60	3.4	56	95	30	60	4.0	62	105							
1° 0'	1145.92	20	50	2.5	39	67	30	50	3.0	45	76	30	60	3.6	50	86	30	70	4.5	56	95	30	70	5.2	62	105							
1° 15'	916.74	30	50	3.0	39	67	30	60	3.7	45	76	40	60	4.5	50	86	40	70	5.5	56	95	40	80	6.3	62	105							
1° 30'	763.95	30	60	3.5	39	67	30	60	4.4	45	76	40	70	5.3	50	86	40	80	5.4	56	95	40	90	7.3	64	109							
1° 45'	654.81	30	60	4.1	39	67	40	70	5.0	45	76	40	80	6.1	50	86	40	90	7.3	58	99	50	100	8.1	64	121							
2° 0'	572.96	30	70	4.6	39	67	40	80	5.7	45	76	40	90	6.7	50	86	50	90	8.1	65	110	50	100	8.9	78	133							
2° 15'	509.30	40	80	5.1	39	67	40	90	6.2	45	76	50	100	7.3	53	89	50	100	8.7	70	118	60	110	9.4	83	141							
2° 30'	458.37	40	80	5.5	39	67	50	90	6.8	45	76	50	100	7.9	57	97	60	110	9.2	74	125	60	120	9.8	86	147							
2° 45'	416.70	40	80	6.0	39	67	50	90	7.3	47	79	50	110	8.4	60	103	60	110	9.6	77	131	60	120	10.0	86	150							
3° 0'	381.97	50	90	6.4	39	67	50	100	7.7	49	84	60	110	8.8	63	108	60	120	9.9	79	135												
3° 15'	352.59	50	90	6.7	39	67	50	110	8.1	52	88	60	120	9.2	66	113	60	130	10.0	80	136												
3° 30'	327.41	50	100	7.1	40	68	60	110	8.5	54	92	60	120	9.6	69	118																	
3° 45'	305.58	50	110	7.5	42	71	60	120	8.8	56	96	60	130	9.8	71	120																	
4° 0'	286.48	50	110	7.8	44	74	60	120	9.1	58	99	70	130	9.9	71	121																	
4° 15'	269.63	60	110	8.1	45	77	60	130	9.4	60	102	70	140	10.0	72	122																	
4° 30'	254.65	60	120	8.4	47	80	70	130	9.6	61	104																						
4° 45'	241.25	60	120	8.7	49	83	70	140	9.7	62	106																						
5° 0'	229.18	60	130	8.9	50	85	70	140	9.9	63	108																						
5° 15'	218.27	60	130	9.1	51	87	80	140	10.0	63	108																						
5° 30'	208.35	70	140	9.3	52	89	80	150	10.0	64	109																						
5° 45'	199.29	70	140	9.5	53	90																											
6° 0'	190.99	70	150	9.6	54	91																											
6° 15'	183.35	70	150	9.7	54	92																											
6° 30'	176.30	80	160	9.8	55	93																											
6° 45'	169.77	80	160	9.9	55	94																											
7° 0'	163.70	80	160	9.9	55	94																											
7° 15'	158.06	80	160	10.0	56	95																											
7° 30'	152.79	80	170	10.0	56	95																											

Ac Ampliación de la calzada y la corona en cm.

Sc. Sobreelevación en porcentaje

Le Longitud de la clotoide en metros

Nota.- Para grados de curvatura no previstos en la tabla, Ac Sc y Le se obtienen por interpolación lineal.

A4S - Dos carriles en cada cuerpo (cuerpos separados) con el eje de proyecto en el centro de cada calzada.

A4 - Cuatro carriles en un solo cuerpo, con el eje de proyecto coincidiendo con el eje geométrico

TABLA (1). AMPLIACIONES, SOBREELEVACIONES Y TRANSICIONES PARA CARRETERAS TIPO A (A4S Y A4)

VELOCIDAD		50			60			70			80			90			100			110		
Gc	Rc	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le
0° 15'	4583.68	0	2.0	28	0	2.0	34	0	2.0	39	0	2.0	45	0	2.0	50	0	2.0	56	0	2.0	62
0° 30'	2291.84	0	2.0	28	0	2.0	34	20	2.0	39	20	2.0	45	20	2.0	50	20	2.3	56	20	2.7	62
0° 45'	1527.89	20	2.0	28	20	2.0	34	20	2.0	39	20	2.3	45	30	2.8	50	30	3.4	56	30	4.0	62
1° 0'	1145.92	20	2.0	28	20	2.0	34	20	2.5	39	30	3.0	45	30	3.6	50	30	4.5	56	30	5.2	62
1° 15'	916.74	20	2.0	28	20	2.3	34	30	3.0	39	30	3.7	45	40	4.5	50	40	5.5	56	40	6.3	62
1° 30'	763.95	20	2.0	28	30	2.8	34	30	3.5	39	30	4.4	45	40	5.3	50	40	6.4	56	40	7.3	64
1° 45'	654.81	30	2.2	28	30	3.2	34	30	4.1	39	40	5.0	45	40	6.1	50	40	7.3	58	50	8.1	71
2° 0'	572.96	30	2.5	28	30	3.6	34	30	4.6	39	40	5.7	45	40	6.7	50	50	8.1	65	50	8.9	78
2° 15'	509.30	30	2.8	28	40	4.0	34	40	5.1	39	40	6.2	45	50	7.3	53	50	8.7	70	60	9.4	83
2° 30'	458.37	30	3.1	28	40	4.4	34	40	5.5	39	50	6.8	45	50	7.9	57	60	9.2	74	60	9.8	86
2° 45'	416.70	30	3.4	28	40	4.7	34	40	6.0	39	50	7.3	47	50	8.4	60	60	9.6	77	60	10.0	88
3° 0'	381.97	40	3.7	28	40	5.1	34	50	6.4	39	50	7.7	49	60	8.8	63	60	9.9	79			
3° 15'	352.59	40	3.9	28	40	5.4	34	50	6.7	39	50	8.1	52	60	9.2	66	60	10.0	80			
3° 30'	327.41	40	4.2	28	50	5.7	34	50	7.1	40	60	8.5	54	60	9.6	69						
3° 45'	305.58	40	4.4	28	50	6.0	34	50	7.5	42	60	8.8	56	60	9.8	71						
4° 0'	286.48	40	4.7	28	50	6.3	34	50	7.8	44	60	9.1	58	70	9.9	71						
4° 15'	269.63	50	4.9	28	50	6.6	34	60	8.1	45	60	9.4	60	70	10.0	72						
4° 30'	254.65	50	5.1	28	50	6.9	34	60	8.4	47	70	9.6	61									
4° 45'	241.25	50	5.4	28	60	7.1	34	60	8.7	49	70	9.7	62									
5° 0'	229.18	50	5.6	28	60	7.4	36	60	8.9	50	70	9.9	63									
5° 30'	208.35	60	6.0	28	60	7.8	37	70	9.3	52	80	10.0	64									
6° 0'	190.99	60	6.3	28	70	8.2	39	70	9.6	54												
6° 30'	176.30	60	6.7	28	70	8.6	41	80	9.8	55												
7° 0'	163.70	60	7.0	28	70	8.9	43	80	9.9	55												
7° 30'	152.79	70	7.3	29	80	9.1	44	80	10.0	56												
8° 0'	143.24	70	7.6	30	80	9.4	45															
8° 30'	134.81	70	7.9	32	80	9.6	46															
9° 0'	127.32	80	8.2	33	90	9.7	47															
9° 30'	120.62	80	8.4	34	90	9.8	47															
10° 0'	114.59	80	8.6	34	90	9.9	48															
10° 30'	109.14	90	8.8	35	100	10.0	48															
11° 0'	104.17	90	9.0	36	100	10.0	48															
11° 30'	99.65	90	9.2	37																		
12° 0'	95.49	100	9.3	37																		
12° 30'	91.67	100	9.5	38																		
13° 0'	88.15	100	9.6	38																		
13° 30'	84.88	110	9.7	39																		
14° 0'	81.85	110	9.8	39																		
14° 30'	79.03	110	9.8	39																		
15° 0'	76.39	110	9.9	40																		
15° 30'	73.93	120	9.9	40																		
16° 0'	71.62	120	10.0	40																		
16° 30'	69.45	120	10.0	40																		
17° 0'	67.41	130	10.0	40																		

Ac Ampliación de la calzada y la corona en cm.

Sc. Sobreelevación en porcentaje

Le Longitud de la clotoide en metros

Nota.- Para grados de curvatura no previstos en la tabla, Ac Sc y Le se obtienen por interpolación lineal.

TABLA (2). AMPLIACIONES, SOBREELEVACIONES Y TRANSICIONES PARA CARRETERAS TIPO B Y A (A2)

VELOCIDAD		40			50			60			70			80			90			100			
Gc	Rc	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	
0° 15'	4583.68	20	2.0	22	20	2.0	28	20	2.0	34	20	2.0	39	20	2.0	45	20	2.0	50	30	2.0	56	
0° 30'	2291.84	20	2.0	22	20	2.0	28	20	2.0	34	20	2.0	39	20	2.0	45	20	2.0	50	30	2.0	56	
0° 45'	1527.89	20	2.0	22	20	2.0	28	20	2.0	34	20	2.0	39	20	2.4	45	20	2.8	50	40	3.5	56	
1° 0'	1145.92	20	2.0	22	30	2.0	28	30	2.0	34	30	2.5	39	30	3.0	45	40	3.6	50	40	4.6	56	
1° 15'	916.74	30	2.0	22	30	2.0	28	30	2.5	34	40	3.0	39	40	3.7	45	40	4.5	50	50	5.6	56	
1° 30'	763.95	30	2.0	22	30	2.0	28	40	2.8	34	40	3.6	39	40	4.4	45	50	5.3	50	50	6.5	56	
1° 45'	654.81	30	2.0	22	30	2.2	28	40	3.2	34	40	4.1	39	50	5.0	45	50	6.0	50	60	7.3	58	
2° 0'	572.96	30	2.0	22	40	2.5	28	40	3.6	34	50	4.6	39	50	5.7	45	50	6.8	50	60	8.1	65	
2° 15'	509.30	30	2.0	22	40	2.8	28	40	4.0	34	50	5.1	39	50	6.2	45	60	7.4	53	60	8.7	70	
2° 30'	458.37	40	2.1	22	40	3.1	28	50	4.4	34	50	5.5	39	60	6.7	45	60	7.9	57	70	9.3	74	
2° 45'	416.70	40	2.3	22	40	3.4	28	50	4.7	34	50	6.0	39	60	7.2	46	60	8.4	60	70	9.6	77	
3° 0'	381.97	40	2.5	22	50	3.7	28	50	5.1	34	60	6.4	39	60	7.7	49	70	8.8	63	70	9.9	79	
3° 15'	352.59	40	2.7	22	50	3.9	28	50	5.4	34	60	6.8	39	60	8.1	52	70	9.2	66	80	10.0	80	
3° 30'	327.41	40	2.9	22	50	4.2	28	50	5.7	34	60	7.1	40	70	8.5	54	70	9.6	69				
3° 45'	305.58	50	3.1	22	50	4.4	28	60	6.0	34	60	7.5	42	70	8.8	56	70	9.8	71				
4° 0'	286.48	50	3.3	22	50	4.7	28	60	6.3	34	60	7.8	44	70	9.1	58	80	9.9	71				
4° 15'	269.63	50	3.4	22	60	4.9	28	60	6.6	34	70	8.1	45	70	9.4	60	80	10.0	72				
4° 30'	254.65	50	3.6	22	60	5.1	28	60	6.9	34	70	8.4	47	80	9.6	61							
4° 45'	241.25	50	3.8	22	60	5.4	28	60	7.1	34	70	8.7	49	80	9.8	63							
5° 0'	229.18	50	3.9	22	60	5.6	28	70	7.4	36	70	8.9	50	80	9.9	63							
5° 30'	208.35	60	4.2	22	60	6.0	28	70	7.8	37	80	9.3	52	90	10.0	64							
6° 0'	190.99	60	4.5	22	70	6.3	28	70	8.2	39	80	9.6	54										
6° 30'	176.30	60	4.8	22	70	6.7	28	80	8.6	41	90	9.8	55										
7° 0'	163.70	70	5.1	22	70	7.0	28	80	8.9	43	90	9.9	55										
7° 30'	152.79	70	5.3	22	80	7.3	29	90	9.1	44	90	10.0	56										
8° 0'	143.24	70	5.6	22	80	7.6	30	90	9.4	45													
8° 30'	134.81	80	5.8	22	80	7.9	32	90	9.6	46													
9° 0'	127.32	80	6.1	22	90	8.2	33	100	9.7	47													
9° 30'	120.62	80	6.3	22	90	8.4	34	100	9.8	47													
10° 0'	114.59	90	6.5	22	100	8.6	35	100	9.9	48													
11° 0'	104.17	90	6.9	22	100	9.0	36	110	10.0	48													
12° 0'	95.49	100	7.3	23	110	9.3	37																
13° 0'	88.15	100	7.6	24	110	9.6	38																
14° 0'	81.85	110	7.9	25	120	9.8	39																
15° 0'	76.39	110	8.2	26	120	9.9	40																
16° 0'	71.62	120	8.5	27	130	10.0	40																
17° 0'	67.41	120	8.7	28	140	10.0	40																
18° 0'	63.66	130	8.9	28																			
19° 0'	60.31	130	9.1	29																			
20° 0'	57.30	140	9.2	29																			
21° 0'	54.57	140	9.4	30																			
22° 0'	52.09	150	9.5	30																			
23° 0'	49.82	150	9.6	31																			
24° 0'	47.75	160	9.7	31																			
25° 0'	45.84	160	9.8	31																			
26° 0'	44.07	170	9.9	32																			
27° 0'	42.44	170	9.9	32																			
28° 0'	40.93	180	10.0	32																			
29° 0'	39.51	190	10.0	32																			
30° 0'	38.20	190	10.0	32																			

Ac Ampliación de la calzada y la corona en cm.

Sc. Sobreelevación en porcentaje

Le Longitud de la clotoide en metros

TABLA (3). AMPLIACIONES, SOBREELEVACIONES Y TRANSICIONES PARA CARRETERAS TIPO C

VELOCIDAD		30			40			50			60			70		
Ge	Rc	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le	Ac	Sc	Le
0° 30'	2291.84	20	3.0	10	20	3.0	13	20	3.0	16	30	3.0	19	30	3.0	22
1° 0'	1145.92	20	3.0	10	20	3.0	13	30	3.0	16	30	3.0	19	30	3.0	22
1° 30'	763.95	20	3.0	10	30	3.0	13	30	3.0	16	30	3.0	19	40	3.0	22
2° 0'	572.96	20	3.0	10	30	3.0	13	30	3.0	16	40	3.0	19	40	3.0	22
2° 30'	458.37	30	3.0	10	30	3.0	13	40	3.0	16	40	3.0	19	50	3.0	22
3° 0'	381.97	30	3.0	10	40	3.0	13	40	3.0	16	50	3.0	19	50	4.0	22
3° 30'	327.41	30	3.0	10	40	3.0	13	40	3.0	16	50	3.2	19	60	4.7	26
4° 0'	286.48	30	3.0	10	40	3.0	13	50	3.0	16	50	3.6	19	60	5.3	30
4° 30'	254.65	40	3.0	10	40	3.0	13	50	3.0	16	60	4.1	20	60	6.0	34
5° 0'	229.18	40	3.0	10	50	3.0	13	50	3.0	16	60	4.5	22	70	6.7	37
5° 30'	208.35	40	3.0	10	50	3.0	13	50	3.2	16	60	5.0	24	70	7.3	41
6° 0'	190.99	40	3.0	10	50	3.0	13	60	3.5	16	60	5.5	26	70	8.0	45
6° 30'	176.30	50	3.0	10	50	3.0	13	60	3.8	16	70	5.9	28	80	8.7	49
7° 0'	163.70	50	3.0	10	50	3.0	13	60	4.1	16	70	6.4	31	80	9.3	52
7° 30'	152.79	50	3.0	10	60	3.0	13	70	4.4	18	70	6.8	33	80	10.0	56
8° 0'	143.24	50	3.0	10	60	3.0	13	70	4.7	19	80	7.3	35			
8° 30'	134.81	50	3.0	10	60	3.0	13	70	5.0	20	80	7.7	37			
9° 0'	127.32	50	3.0	10	60	3.0	13	70	5.3	21	80	8.2	39			
9° 30'	120.62	60	3.0	10	70	3.2	13	70	5.5	22	80	8.6	41			
10° 0'	114.59	60	3.0	10	70	3.3	13	80	5.9	24	90	9.1	44			
11° 0'	104.17	60	3.0	10	70	3.7	13	80	6.5	26	90	10.0	48			
12° 0'	95.49	60	3.0	10	80	4.0	13	90	7.1	28						
13° 0'	88.15	70	3.0	10	80	4.3	14	90	7.6	31						
14° 0'	81.95	70	3.0	10	80	4.7	15	90	8.2	33						
15° 0'	76.39	70	3.0	10	90	5.0	16	100	8.8	35						
16° 0'	71.62	80	3.0	10	90	5.3	17	100	9.4	38						
17° 0'	67.41	80	3.0	10	90	5.7	18	110	10.0	40						
18° 0'	63.66	80	3.0	10	100	6.0	19									
19° 0'	60.31	90	3.2	10	100	6.3	20									
20° 0'	57.30	90	3.3	10	100	6.7	21									
22° 0'	52.09	100	3.7	10	110	7.3	23									
24° 0'	47.75	100	4.0	10	120	8.0	26									
25° 0'	45.84	110	4.3	10	130	8.7	28									
28° 0'	40.93	110	4.7	11	130	9.3	30									
30° 0'	38.20	120	5.0	12	140	10.0	32									
32° 0'	35.81	130	5.3	13												
34° 0'	33.70	130	5.7	14												
36° 0'	31.83	140	6.0	14												
38° 0'	30.16	150	6.3	15												
40° 0'	28.65	150	6.7	16												
42° 0'	27.28	160	7.0	17												
44° 0'	26.04	160	7.3	18												
46° 0'	24.91	170	7.7	18												
48° 0'	23.87	180	8.0	19												
50° 0'	22.92	180	8.3	20												
52° 0'	22.04	190	8.7	21												
54° 0'	21.22	190	9.0	22												
56° 0'	20.46	200	9.3	22												
58° 0'	19.76	200	9.7	23												
60° 0'	19.10	210	10.0	24												

Ac Ampliación de la calzada y la corona en cm.

Sc. Sobreelevación en porcentaje

Le Longitud de la clotoide en metros

TABLA (4). AMPLIACIONES, SOBREELEVACIONES Y TRANSICIONES PARA CARRETERAS TIPO E y D.



---



---

## CAPITULO 3

### ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CLOTOIDE

#### 3.1 UBICACIÓN DE CADA ELEMENTO DE LA CLOTOIDE Y SU DESCRIPCIÓN

Ubicación de cada elemento en la clotoide.

Los elementos de la clotoide o espiral de Euler son los siguientes (Ver figura 17 ), haciendo la aclaración que se utiliza la simbología generalmente usada en caminos, aunque aquí se coloca una columna con los símbolos usados generalmente en ferrocarriles para los mismos elementos.

#### SIMBOLOGÍA

CAMINOS	FERROCARRILES	
P ó PSE	P	Punto cualquiera sobre la clotoide ó (punto sobre la espiral)
O	O	Punto donde se inicia la clotoide
10	10	Punto donde termina la clotoide
$\theta_e$	$\tau$	Deflexión total de la clotoide
$\theta$	$\tau_p$	Deflexión de la clotoide en un punto P.
$\phi'_c$	$\omega$	Angulo de la cuerda larga de la clotoide
$\phi'$	$\omega_p$	Angulo de la cuerda a un punto PSE.

---

$\phi'AT$	$\omega AT$	Angulo respecto a la tangente en P, de una cuerda anterior que subtiende un arco de espiral de Euler ó clotoide JP, de longitud $L_{JP}$ .
$\phi'AD$	$\omega AD$	Angulo respecto a la tangente en P, de una cuerda posterior que subtiende un arco de espiral de Euler o clotoide JP de longitud $L_{JP}$ .
L	L	Longitud de la clotoide del origen al punto P
C	S	Cuerda de la clotoide desde el origen al punto P.
R <sub>p</sub>	R <sub>p</sub>	Radio de curvatura de la clotoide en el punto P.
X,Y	X,Y	Coordenadas del punto P
T <sub>1</sub>	T <sub>1</sub>	Tangente larga al punto P
T <sub>2</sub>	T <sub>2</sub>	Tangente corta al punto P

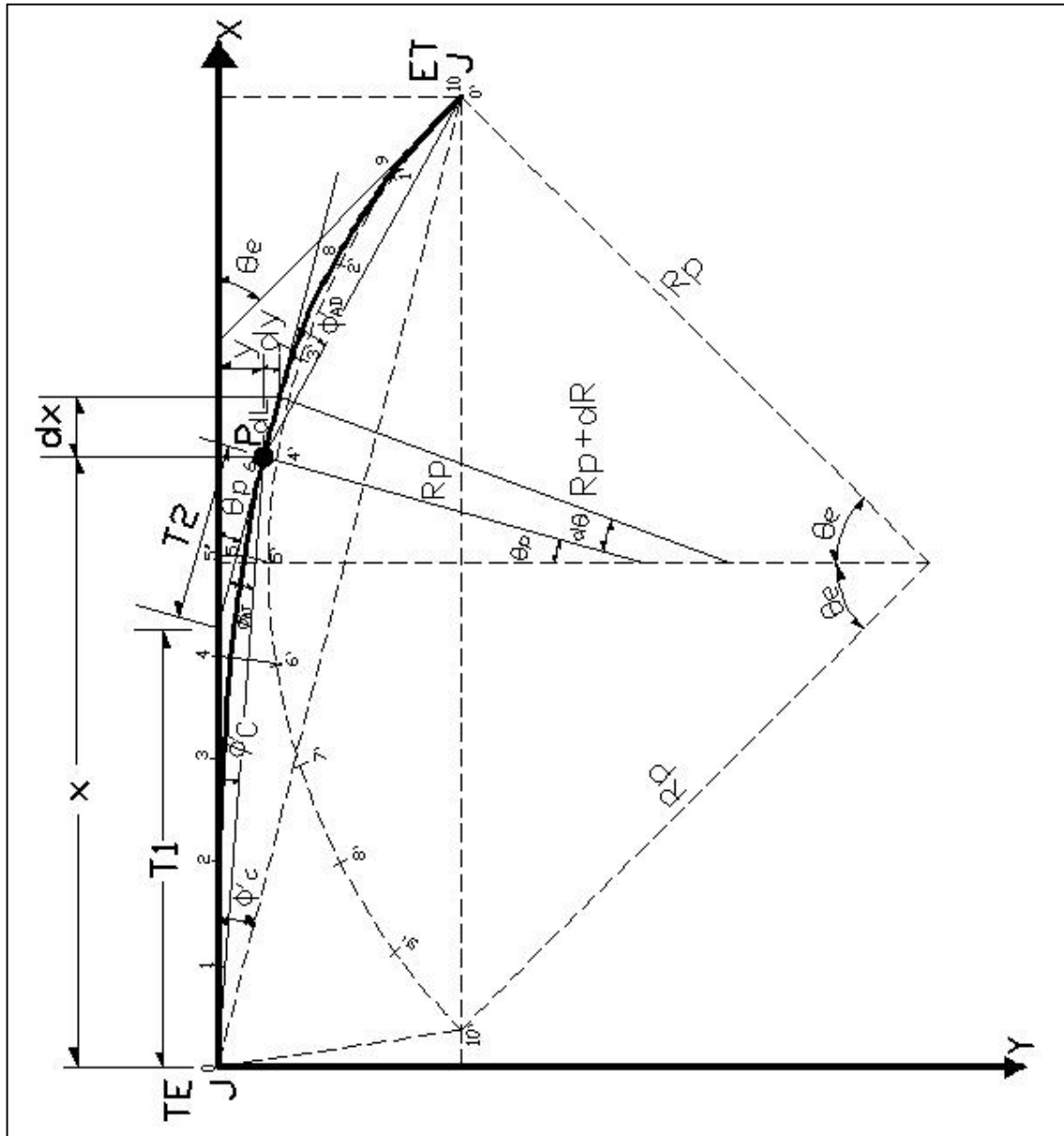


FIG. 17 ELEMENTOS DE LA CLOTOIDE

### 3.2 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE CORRESPONDEN A LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CLOTOIDE PARA UN PUNTO PARTICULAR (P).

Deducción del ángulo de deflexión ( $\theta$ ) de la clotoide en cualquier punto de la misma.

De la ecuación de la clotoide:

$$RL = K^2$$

Despejamos R y nos queda:

$$R = \frac{K^2}{L} \quad \dots\dots\dots(15)$$

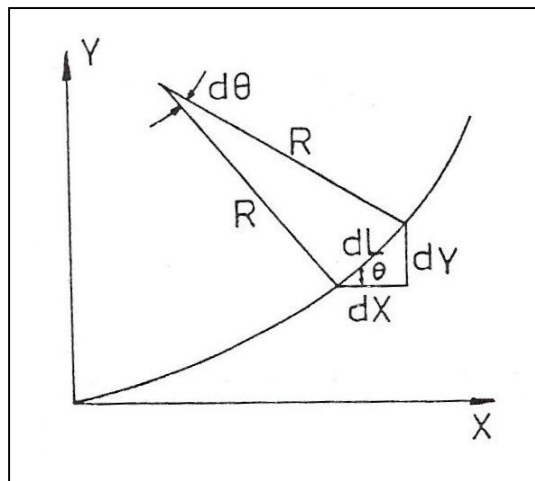


Fig. 18

De la figura 18, si consideramos un  $d\theta$  se tiene que:

$$Rd\theta = dL \quad \text{y} \quad \therefore \quad d\theta = \frac{dL}{R} \quad \dots\dots\dots(16)$$

Si sustituimos en la ecuación anterior la ecuación (15) tenemos que:

$$d\theta = \frac{LdL}{K^2} \quad \dots\dots\dots(17)$$

Integrando en ambos miembros de la expresión:

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^L \frac{LdL}{K^2}$$

$$\therefore \theta = \frac{L^2}{2K^2} \dots\dots\dots(18)$$

Si tomamos en cuenta la ecuación:

$$K^2 = RcLe \dots\dots\dots(8)$$

Y sustituimos en (18). Nos queda:

$$\theta = \frac{L^2}{2RcLe} \dots\dots\dots(18')$$

Donde:

$\theta$ : Ángulo de deflexión de la clotoide en cualquier punto de la misma.

L: Longitud de la clotoide desde su inicio hasta el punto correspondiente.

Rc: Radio de la curva circular

Le: Longitud de la clotoide

En la expresión (18') el valor de  $\theta$  está expresado en radianes; para expresarlo en grados multipliquemos por  $\frac{180}{\pi}$ :

$$\theta = \frac{L^2}{2RcLe} \frac{180}{\pi} = \frac{90L^2}{\pi RcLe} \dots\dots\dots(19)$$

Ahora, si los cadenamientos con que se va a trazar la curva circular son de 20 m. como normalmente se acostumbra en caminos, tenemos que:

Si  $G_c =$  Grado de la curva circular

Y  $P = 2\pi Rc =$  Perímetro

Podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{G_c}{20} = \frac{360^\circ}{P} = \frac{360^\circ}{2\pi Rc}$$

$$G_c = \frac{360^\circ(20)}{2\pi R_c} = \frac{3600^\circ}{\pi R_c}$$

Simplificando:

$$G_c = \frac{1145.9156}{R_c} \dots\dots\dots(20)$$

Y análogamente:

$$R_c = \frac{1145.9156}{G_c} \dots\dots\dots(21)$$

Donde:

$R_c$  es el radio de curvatura de la curva circular

Estas dos últimas expresiones nos permiten calcular el grado de curvatura ( $G_c$ ), de una curva circular así como su radio ( $R_c$ ), cuando los cadenamientos son a cada 20 m.

Ahora, sustituyendo en la expresión (19) la ecuación anterior:

$$\theta = \frac{90^\circ L^2}{\pi \left( \frac{1145.9156}{G_c} \right) L_e} = \frac{90^\circ L^2 G_c}{1145.9156(\pi) L_e} = \frac{L^2 G_c}{40 L_e}$$

$$\theta = \frac{L^2 G_c}{40 L_e} \dots\dots\dots(22)$$

Donde:

$\theta$ : Ángulo de deflexión de la clotoide en cualquier punto de la misma.

$L$  = Longitud de la clotoide desde su inicio al punto correspondiente.

$G_c$  = Grado de la curva circular, para cadenamientos a cada 20 m.

$L_e$  = Longitud de la clotoide.

**DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA OBTENER LAS COORDENADAS RECTANGULARES (X,Y) DE UN PUNTO CUALQUIERA EN LA CLOTOIDE.**

En función de L y  $\theta$ .

De la figura 18 :

$$\begin{aligned} dX &= dL \cos \theta \\ dY &= dL \sin \theta \end{aligned} \dots\dots\dots(23)$$

Integrando en ambos miembros de las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} \int dX &= \int dL \cos \theta \\ \int dY &= \int dL \sin \theta \end{aligned} \dots\dots\dots(23')$$

Las cuales no tienen solución directa; para poder integrar desarrollemos en serie de Mc claren el  $\sin \theta$  y el  $\cos \theta$ .

Para esto se tiene que:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!} f^{IV}(0)x^4 + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!} f^n(0)x^n \dots \dots\dots(24)$$

Para  $x = \theta$  y  $f(x) = \sin \theta$

$f(\theta) = \sin(\theta) = 0$	$f(0) = \sin(0) = 0$
$f'(x) = \cos \theta$	$f'(0) = \cos(0) = 1$
$f''(x) = -\sin \theta$	$f''(0) = -\sin(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos \theta$	$f'''(0) = -\cos(0) = -1$
$f^{IV}(x) = \sin \theta$	$f^{IV}(0) = \sin(0) = 0$
$f^V(x) = \cos \theta$	$f^V(0) = \cos(0) = 1$
$f^{VI}(x) = -\sin \theta$	$f^{VI}(0) = -\sin(0) = 0$
$f^{VII}(x) = -\cos \theta$	$f^{VII}(0) = -\cos(0) = -1$
.....	.....
.....	.....

Ahora para  $f(x) = \cos \theta$  ;  $x = \theta$

$$\begin{array}{ll}
 f(0) = \cos(0) = 1 & f'(0) = -\sin(0) = 0 \\
 f'(x) = -\sin(\theta) & f''(0) = -\cos(0) = -1 \\
 f''(x) = -\cos(\theta) & f'''(0) = \sin(0) = 0 \\
 f'''(x) = \sin(\theta) & f^{IV}(0) = \cos(0) = 1 \\
 f^{IV}(x) = \cos(\theta) & f^V(0) = -\sin(0) = 0 \\
 f^V(x) = -\sin(\theta) & f^{VI}(0) = -\cos(0) = -1 \\
 f^{VI}(x) = -\cos(\theta) &
 \end{array}$$

Y entonces de la expresión (24)

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \\
 \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las expresiones (23)

$$\begin{aligned}
 dX &= dL \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) \\
 &\dots\dots\dots(25) \\
 dY &= dL \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Ahora de la expresión (18) si hacemos a  $2K^2 = \text{constante} = C$  para una curva determinada entonces:

$$\theta = \frac{L^2}{C}$$

Integrando y sustituyendo en las expresiones (25)

$$\begin{aligned}
 X &= \int_0^L \left( 1 - \frac{L^4}{C^2 2!} + \frac{L^8}{C^4 4!} - \frac{L^{12}}{C^6 6!} + \dots \right) dL = \\
 &= \left[ L - \frac{L^5}{5C^2 2!} + \frac{L^9}{9C^4 4!} - \frac{L^{13}}{13C^6 6!} + \dots \right]_0^L = \\
 X &= L \left( 1 - \frac{L^4}{5C^2 2!} + \frac{L^8}{9C^4 4!} - \frac{L^{12}}{13C^6 6!} + \dots \right)
 \end{aligned}$$



Y análogamente para Y:

$$\begin{aligned}
 Y &= \int_0^L \left( \frac{L^2}{C} - \frac{L^6}{C^3 3!} + \frac{L^{10}}{C^5 5!} - \frac{L^{14}}{C^7 7!} + \dots \right) dL = \\
 &= \left[ \frac{L^3}{3C} - \frac{L^7}{7C^3 3!} + \frac{L^{11}}{11C^5 5!} - \frac{L^{15}}{15C^7 7!} + \dots \right]_0^L = \\
 Y &= L \left( \frac{L^2}{3C} - \frac{L^6}{7X 3! C^3} + \frac{L^{10}}{11X 5! C^5} - \frac{L^{14}}{15X 7! C^7} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Y finalmente expresando los resultados anteriores en función de  $\theta$ , mediante la expresión:

$$\theta = \frac{L^2}{C}$$

$$\begin{aligned}
 X &= L \left( 1 - \frac{\theta^2}{5X 2!} + \frac{\theta^4}{9X 4!} - \frac{\theta^6}{13X 6!} + \dots \right) \\
 &\dots\dots\dots(26) \\
 Y &= L \left( \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{7X 3!} + \frac{\theta^5}{11X 5!} - \frac{\theta^7}{15X 7!} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Donde  $\theta$  está en radianes.

Si queremos expresar  $\theta$  en grados multipliquemos en las expresiones anteriores el valor de  $\theta$  por  $\frac{\pi}{180}$  y multipliquemos y dividamos por 100 con el fin de obtener el mayor número de dígitos posible:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{L}{100} \left( 100 - \frac{100 \left( \theta \frac{\pi}{180} \right)^2}{5X 2!} + \frac{100 \left( \theta \frac{\pi}{180} \right)^4}{9X 4!} - \frac{100 \left( \theta \frac{\pi}{180} \right)^6}{13X 6!} + \dots \right) \\
 Y &= \frac{L}{100} \left( \frac{100 \left( \theta \frac{\pi}{180} \right)}{3} - \frac{100 \left( \theta \frac{\pi}{180} \right)^3}{7X 3!} + \frac{100 \left( \theta \frac{\pi}{180} \right)^5}{11X 5!} - \frac{100 \left( \theta \frac{\pi}{180} \right)^7}{15X 7!} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Haciendo operaciones y simplificando:

$$X = \frac{L}{100} \left( 100 - 0.304617\theta^2 (10)^{-2} + 0.429591\theta^4 (10)^{-7} - 0.301987\theta^6 (10)^{-12} + \dots \right) \dots\dots\dots(27)$$

$$Y = \frac{L}{100} \left( 0.581776\theta - 0.126585\theta^3 (10)^{-4} + 0.122691\theta^5 (10)^{-9} - 0.652558\theta^7 (10)^{-15} + \dots \right)$$

Estas ecuaciones son las generalmente usadas en la práctica.

En las expresiones anteriores, según la aproximación deseada podremos elegir trabajar con el número de términos que mejor nos convengan, bastando para fines prácticos de trazo la elección hasta el segundo término en cada una de las ecuaciones.

## BREVE DESCRIPCIÓN DE LOS ELEMENTOS QUE LAS CONFORMAN

También de las ecuaciones anteriores tenemos:

X, Y: Coordenadas rectangulares (abscisa y ordenada, respectivamente) de un punto cualquiera sobre la clotoide.

Estas coordenadas se miden considerando como el eje de las X's a la línea tangente a la clotoide en el inicio de esta (esto es en el punto TE o ET. Fig.17), es decir a la prolongación de la tangente que se une al arco de círculo mediante esta curva en el sentido del cadenamamiento. El origen de este sistema cartesiano es precisamente el punto TE o ET.

El eje de las Y's será una perpendicular a dicha tangente, midiendo hacia la izquierda o hacia la derecha de la tangente, según el sentido de la curva y del cadenamamiento. Ver Fig. (17).

L: Longitud de un arco de clotoide desde un punto determinado a otro cualquiera, siendo en este caso uno de los puntos TE o ET.

Generalmente en Ferrocarriles y Caminos se acostumbra dividir las curvas en 10 partes, a excepción de cuando son muy grandes o muy pequeñas.

Cuando son muy grandes se pueden dividir en más partes con el objeto de lograr un mejor trazado al tener más puntos de la curva, en caso contrario, cuando son muy pequeñas, si las necesidades lo requieren también se pueden dividir en 10 partes, si no a cada 5 m. es suficiente.

$\theta$ : Deflexión de la clotoide en un punto cualquiera (P). Esta deflexión es el ángulo comprendido entre la línea tangente a la clotoide en el punto P y la línea tangente en el inicio de esta, es decir, en el punto TE o ET.

Su valor se puede calcular mediante las expresiones (18) y (19) y si usamos cuerdas de 20 m. para el trazo de la curva circular, podemos utilizar la expresión (22).

### EN FUNCIÓN DE K Y $\theta$ .

De la definición de curva clotoide que nos indica que es una curva tal que el arco de curvatura recorrido es proporcional a la curvatura, se puede decir que:

$$L = \text{constante} * C \quad \dots\dots\dots(28)$$

Donde:

L: Longitud del arco

C: Curvatura

Esta constante es una constante de proporcionalidad.

Pero sabemos que la curvatura es igual a:

$$C = \frac{1}{R} \quad \dots\dots\dots(29)$$

Donde:

R = Radio de curvatura

De la figura (18) podemos ver que:

$$d\theta R = dL$$

$$R = \frac{dL}{d\theta}$$

Y entonces:

$$C = \frac{d\theta}{dL} \dots\dots\dots(30)$$

Donde:

$\theta$  : **Deflexión de la clotoide en un punto cualquiera (P)**. Si designamos por  $K^2$  a la constante de la expresión (28) y si sustituimos la ecuación (30) en ella, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{L}{K^2} &= \frac{d\theta}{dL} \\ L &= K^2 \frac{d\theta}{dL} \\ dLL &= K^2 d\theta \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

Que es la ecuación diferencial de la clotoide.

La integración de la ecuación anterior nos proporciona la longitud del arco de la clotoide en función de su ángulo de deflexión, entonces:

$$\begin{aligned} \int LdL &= \int K^2 d\theta \\ \therefore \frac{L^2}{2} &= K^2 \theta \quad ; \quad L^2 = 2K^2 \theta \end{aligned}$$

Y entonces:

$$L = K\sqrt{2\theta} \dots\dots\dots(32)$$

Si sabemos que:

$$\begin{aligned} dX &= \cos\theta dL \\ dY &= \text{sen}\theta dL \end{aligned}$$

Despejando en la expresión (31) a  $dL$  y sustituyendo en las expresiones anteriores:

$$dX = \cos\theta \frac{K^2 d\theta}{L}$$

$$dY = \operatorname{sen}\theta \frac{K^2 d\theta}{L}$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores la expresión (32) y haciendo operaciones:

$$dX = \frac{K}{\sqrt{2\theta}} \cos\theta d\theta$$

$$dY = \frac{K}{\sqrt{2\theta}} \operatorname{sen}\theta d\theta$$

Aplicando integrales en ambos miembros de las expresiones anteriores:

$$X = \frac{K}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}} d\theta$$

$$Y = \frac{K}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\theta}} d\theta$$

.....(33)

A las ecuaciones (33) se les conoce con el nombre de "Integrales de Fresnel" y para resolverlas aplicamos el mismo método utilizado para resolver las expresiones (23'), es decir, por medio de la serie de Mc claren, podemos obtener los valores para X e Y, con la aproximación deseada, dependiendo del número de términos usados:

Estos valores son:

$$X = K\sqrt{2\theta} \left( 1 - \frac{\theta^2}{5X2!} + \frac{\theta^4}{9X4!} - \frac{\theta^6}{13X6!} + \dots \right)$$

$$Y = K\sqrt{2\theta} \left( \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{7X3!} + \frac{\theta^5}{11X5!} - \frac{\theta^7}{15X7!} + \dots \right)$$

.....(34)

Donde:

$\theta$  : Está en radianes y si se requiere introducir su valor en grados se aplica el mismo procedimiento descrito en hojas anteriores. Ver ecuaciones (27).

Ahora podemos ver de la expresión (32) que:

$$L^2 = K^2 2\theta \dots\dots\dots(35)$$

$$\theta = \frac{L^2}{2K^2} \dots\dots\dots(35')$$

Expresión análoga a la ecuación (18).

Si  $L=Le$  ;  $\theta=\theta e$

Sustituyendo en (35) y despejando  $2K^2$ , nos queda :

$$2K^2 = \frac{Le^2}{\theta e}$$

Sustituyendo en la ecuación (35').

$$\theta = \frac{L^2}{\frac{Le^2}{\theta e}}$$

Nos queda finalmente:

$$\theta = \left( \frac{L}{Le} \right)^2 \theta e \dots\dots\dots(36)$$

Que es la expresión que nos permite calcular  $\theta$  en función de  $L$ ,  $\theta e$  y  $Le$ , lo cual es muy conveniente para realizar los cálculos en forma tabulada, ya que el único valor que va variando es  $L$ , permaneciendo  $Le$  y  $\theta e$  constantes para una curva determinada.

---



---

**DEDUCCIÓN DE LAS EXPRESIONES PARA OBTENER LOS ÁNGULOS EN GRADOS ENTRE LA TANGENTE EN UN PUNTO P DE LA CLOTOIDE Y UNA CUERDA CUALQUIERA PJ, ADELANTE O ATRÁS.**

De la figura (17) también puede deducirse que:

$$C = \sqrt{X^2 + Y^2} = Y \operatorname{csc} \phi' = X \operatorname{sec} \phi' \dots\dots\dots(37)$$

$$T_1 = X - Y \cot \theta_p \dots\dots\dots(38)$$

$$T_2 = Y \operatorname{csc} \theta_p \dots\dots\dots(39)$$

También de la figura 17 se pueden deducir las ecuaciones de las coordenadas polares (  $d$  ,  $\Delta$  ) de un punto sobre la clotoide a una distancia L sobre la misma. Así tenemos que:

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} \dots\dots\dots( 40 )$$

En tanto que  $\Delta$  al igual que  $\phi'$  , puede definirse como el ángulo que forman la cuerda a un PSE y la línea tangente al punto donde inicia la clotoide. Así podemos escribir que:

$$\Delta = \phi' = \operatorname{ang} \tan \frac{Y}{X} \dots\dots\dots( 41 )$$

En la práctica se ha llegado a que colocando el valor de  $\phi'$  en función de  $\theta$  se tiene que:

$$\phi' = \frac{\theta}{3} - Z \dots\dots\dots(42)$$

Donde  $\phi'$  y  $\theta$  están expresados en grados y Z es una corrección dada para la expresión anterior:

$$Z = 3.1 \times 10^{-3} \theta^3 + 2.3 \times 10^{-8} \theta^5 \dots\dots\dots(43)$$

Donde  $\theta$  está expresado en grados y Z en segundos.

Para valores menores de  $\theta = 16^\circ$  el valor de Z es tan pequeño que suele despreciarse.

Por lo tanto:

$$\Delta = \frac{\theta}{3} \dots\dots\dots(44)$$

Por lo anterior, las ecuaciones (40) y (44) las utilizaremos para calcular las coordenadas polares necesarias para trazar la clotoide directamente en campo.

Para fines de trazo es útil contar con expresiones que nos permitan obtener el valor del ángulo que forma una cuerda cualquiera de la clotoide respecto a la tangente en un punto cualquiera P de la misma, tanto para cuerdas apoyadas en ese punto y otro punto atrás (ángulo  $\phi' AT$ ), lo cual se puede observar en la figura (17).

Para poder deducir las expresiones de  $\phi' AT$  y de  $\phi' AD$  se considera la siguiente propiedad de la clotoide:

**Definición:**

La clotoide diverge de un arco de círculo tangente a ella, en la misma proporción que lo hace con respecto a una recta tangente a ella en el origen, puesto que la recta y el círculo tienen curvatura constante y la clotoide varía su curvatura desde 0 en la tangente al origen, hasta  $\frac{1}{Rc}$  en el punto en donde es tangente al círculo. Según esta propiedad, si  $5'$  y  $5''$  son los puntos medios del círculo y la clotoide, respectivamente, la distancia normal a la tangente  $5'5''$  es igual a la distancia normal a la clotoide  $5'5''$ ; asimismo, para el arco de longitud  $L_c$  del círculo y la clotoide, la distancia normal a la tangente en el punto TE entre tangente y clotoide es nula e igual a la distancia normal a la clotoide entre ésta y el círculo, en el punto ET.

De la figura (17) puede verse también que para un arco de longitud  $L_{jp}$ :

$$\phi' AT = \phi - \phi' \dots\dots\dots(45)$$

Y sabemos que:

$$\phi' = \frac{\theta}{3} - Z$$

Análogamente:

$$\phi' AD = \phi + \phi' \dots\dots\dots(46)$$



Donde:

$\phi$  es el ángulo de la cuerda que subtiende un arco de círculo de radio  $R_p$  y longitud  $L_{JP}$ . Para obtener la ecuación con la que obtendremos este elemento, observemos la figura (19):

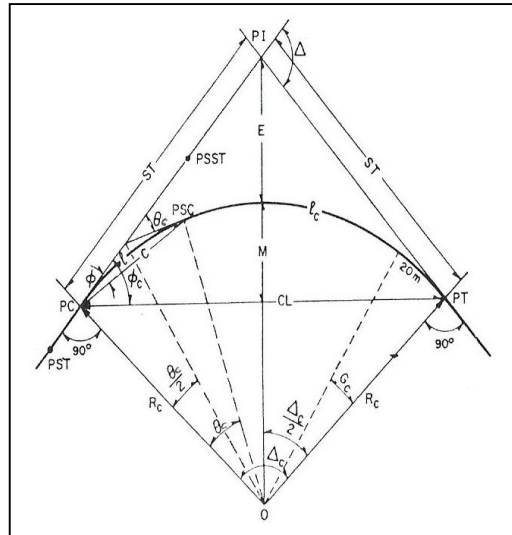


Figura (19)

Donde podemos notar la siguiente relación:

$$\frac{\theta_c}{L} = \frac{G_c}{20}$$

En la cual, si despejamos  $\theta_c$ , nos queda:

$$\theta_c = \frac{G_c L}{20} \dots\dots\dots(47)$$

Y en el triángulo PC-O-PSC que se observa en la misma figura, se puede observar que:

$$\phi = \frac{\theta_c}{2}$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (47), nos queda:

$$\phi = \frac{G_c L}{40} \dots\dots\dots( 48 )$$

Y para la cuerda larga:

$$\phi_c = \frac{G_c L_e}{40} \dots\dots\dots( 49 )$$

### 3.3 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE CORRESPONDEN A LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CLOTOIDE PARA UNA LONGITUD ( $L_e$ ).

**PARÁMETRO DE LA CLOTOIDE (K).** Es la magnitud que define las dimensiones de la clotoide.

De la expresión (8):

$$K = \sqrt{RcLe} \dots\dots\dots(50)$$

**DEFLEXIÓN DE LA CLOTOIDE ( $\theta_e$ ).** Es el ángulo comprendido entre las tangentes a la clotoide en sus puntos extremos.

De la expresión (18'), si:

$$L = L_e \quad ; \quad \theta = \theta_e$$

$$\theta_e = \frac{Le^2}{2RcLe} = \frac{Le}{2Rc} \dots\dots\dots(51)$$

Con la expresión anterior se obtiene  $\theta_e$  en radianes, si la expresamos en grados, tomando en cuenta que:

$$Rc = \frac{1145.9156}{Gc} \quad (\text{expresión (21) )}$$

Entonces:

$$\theta_e = \frac{Le}{2x \frac{1145.9156}{Gc}} \frac{180}{\pi}$$

$$\theta_e = \frac{GcLe}{40} \dots\dots\dots(52)$$

**ÁNGULO DE LA CUERDA LARGA ( $\phi'c$ ).**

Es el ángulo comprendido entre la tangente en TE y la cuerda larga.

De las ecuaciones (41) y (42) sustituimos  $\theta$  por  $\theta e$  y tenemos:

$$\phi'c = \frac{\theta e}{3} - Z \dots\dots\dots(53)$$

Donde:

$$Z = 3.1 \times 10^{-3} \theta e^3 + 2.3 \times 10^{-8} \theta e^5$$

Cabe recordar que si  $\theta e \leq 16^\circ$  la corrección Z suele despreciarse.

**COORDENADAS DEL EC Y DEL CE DE LA CURVA ( $X_c, Y_c$ ).**

De las ecuaciones (26) tomando hasta el segundo término para fines prácticos y sustituyendo  $\theta$  por  $\theta e$  y L por Le.

$$X_c = Le \left( 1 - \frac{\theta e^2}{10} \right)$$

$$Y_c = Le \left( \frac{\theta e}{3} - \frac{\theta e^3}{42} \right)$$

En donde  $\theta e$  está en radianes. Si queremos expresar a  $\theta e$  en grados, de la ecuación (25), se tendrá:

$$X_c = \frac{Le}{100} \left( 100 - 0.304617 \theta e^2 (10)^{-2} \right) \dots\dots\dots(54)$$

$$Y_c = \frac{Le}{100} \left( 0.581776 \theta e - 0.126585 \theta e^3 (10)^{-4} \right)$$

## CAPITULO 4

## EXPRESIONES MATEMÁTICAS NECESARIAS PARA CALCULAR LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CURVA CIRCULAR CON CLOTOIDES SIMÉTRICAS.

## 4.1 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE CORRESPONDEN A LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CURVA CIRCULAR SIMPLE

Como ya hemos descrito, nuestra curva se divide en tres partes, clotoide de entrada, curva circular y clotoide de salida. Ahora describiremos brevemente los elementos más importantes de la curva circular.

Esta curva es un arco de circunferencia como se ve en la figura 20, los elementos que deben determinarse para poder trazarla son:

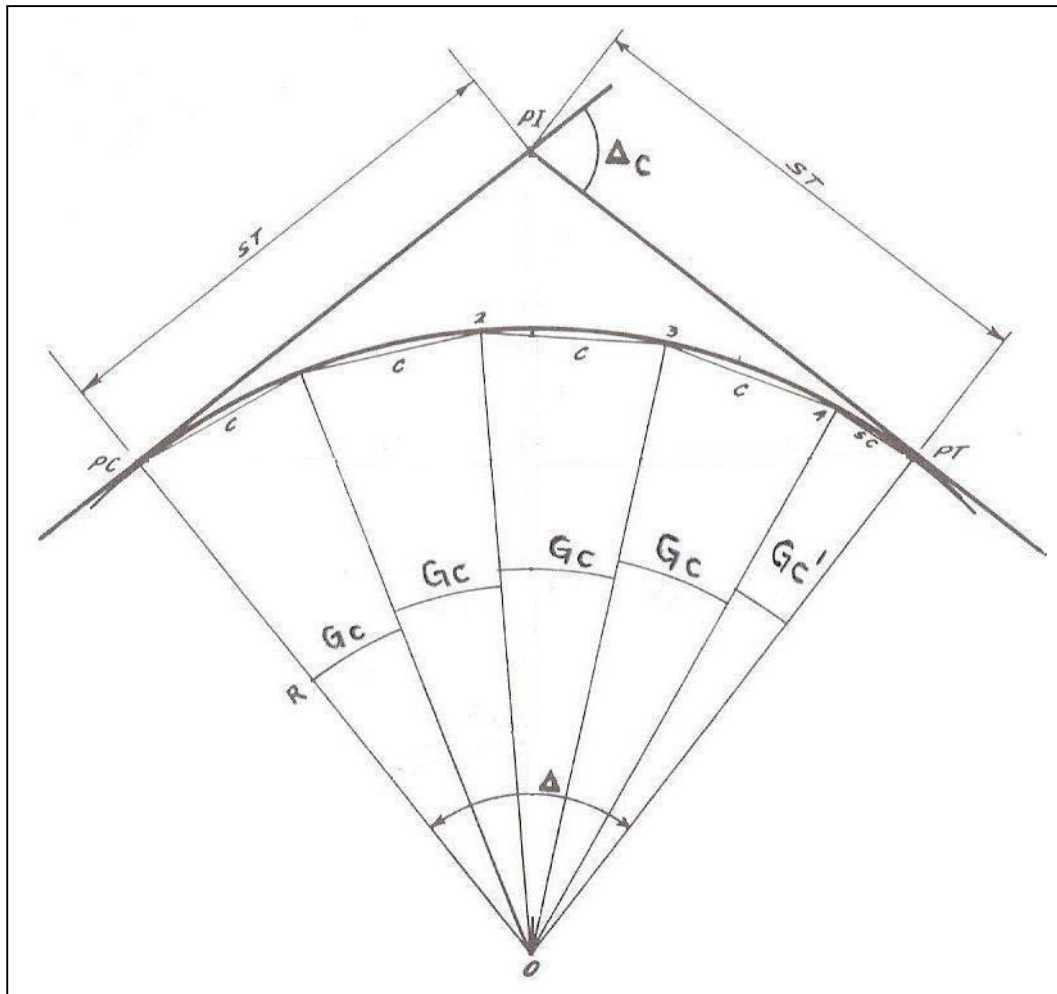


Fig. 20

$\Delta_c$  = Deflexión circular

PI = Punto de intersección

PC = Punto de comienzo

PT = Punto de término

Rc = Radio de la curva

ST = Subtangentes

C = Cuerda

Gc = Grado de curvatura: Es el ángulo bajo el cual se ve la cuerda unitaria desde el centro de la curva (la cuerda unitaria que normalmente se emplea es de 20 metros).

Gc' = Subgrado de curvatura

Lc = Longitud de la curva (PC a PT)

Los datos de que se parte para calcular los demás elementos de la curva circular son:

**DEFLEXIÓN CIRCULAR ( $\Delta_c$ ).** Este elemento se obtiene de la ecuación (58) realizando el despeje correspondiente. La validez de dicha ecuación se explica en el tema 4.2, de esta manera tenemos que:

$$\Delta_c = \Delta_T - 2\theta_e \dots\dots\dots(55)$$

**RADIO DE CURVATURA (Rc).** Como se vio en el tema 3.2, está directamente relacionado con el grado de curvatura y el valor lo determinará el proyectista, quien deberá tratar de que el radio sea lo mayor posible para no tener curvas forzadas, pero adaptándose lo mejor que se pueda a la configuración del terreno para no producir terracerías costosas. Como ya quedo demostrado, la ecuación es:

$$Rc = \frac{1145.9156}{Gc} \dots\dots\dots(21)$$

**LONGITUD DE LA CURVA (Lc).** Es la longitud del arco entre el PC y el PT. De la figura (20) se puede determinar la siguiente relación:

$$\frac{Lc}{2\pi Rc} = \frac{\Delta c}{360^\circ}$$

Despejando Lc y tomando en cuenta la ecuación ( 21 ), nos queda:

$$Lc = \frac{\Delta c 2\pi \left( \frac{1145.92}{Gc} \right)}{360}$$

$$Lc = \frac{\Delta c (7200.027)}{360 Gc}$$

$$Lc = \frac{20\Delta c}{Gc} \dots\dots\dots ( 56 )$$

**SUBTANGENTE (ST).** Es la distancia entre el PI y el PC o PT, medida sobre la prolongación de las tangentes. Del triángulo rectángulo PI-O-PT de la figura 20, se tiene:

$$\tan \frac{\Delta c}{2} = \frac{ST}{Rc}$$

Despejando ST, nos queda:

$$ST = Rc \tan \frac{\Delta c}{2} \dots\dots\dots ( 57 )$$

## 4.2 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE CORRESPONDEN A LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CURVA CIRCULAR CON CLOTOIDES SIMÉTRICAS (COMO CONJUNTO DE CURVAS).

En la figura (21) podemos observar los elementos de la curva circular simple con clotoides simétricas; las literales que se usan son las correspondientes a la simbología generalmente usada en caminos, colocándose también otra columna con los símbolos utilizados generalmente en ferrocarriles para los mismos elementos.

### SIMBOLOGÍA

CAMINOS	FERROCARRILES	
PI	PI	Punto de intersección de las tangentes
TE	CT	Punto donde termina la tangente y empieza la clotoide.
EC	CC	Punto donde termina la clotoide y empieza la curva circular.
ET	TC	Punto donde termina la clotoide y empieza la tangente.
PSC	PSC	Punto sobre la curva circular
PSE	PSE	Punto sobre la clotoide
PSTe	PTc	Punto sobre la subtangente
$\Delta$	$\Delta$	Ángulo de deflexión de las tangentes

$\Delta c$	$\Delta c$	Ángulo central de la curva circular
$\theta e$	$\tau$	Deflexión de la clotoide
$\phi' c$	$\omega$	Ángulo de la cuerda larga de la clotoide
Ste	Tc	Subtangente
Xc, Yc	Xc, Yc	Coordenadas del EC o del CE.
k, p	Xm=t, E	Coordenadas del PC o del PT (Desplazamiento)
TL	TL	Tangente larga
TC	TC=H	Tangente corta
CLe	S	Cuerda larga de la clotoide
Ec	Ec	Externa
Rc	Rc	Radio de la curva circular
Le	LcL	Longitud de la clotoide de entrada o salida
Lc	Lc	Longitud de la curva circular



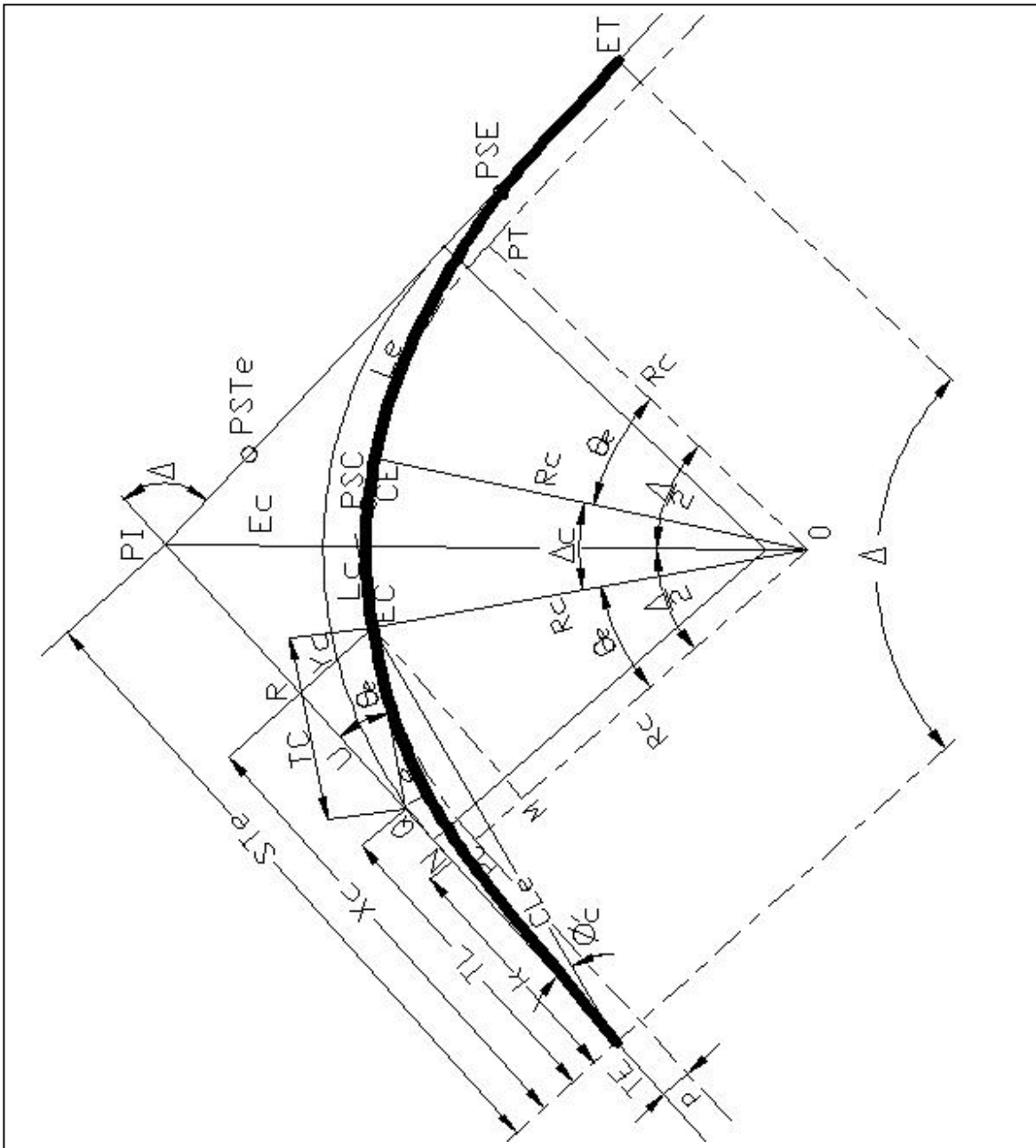


Fig. 21 Elementos de la curva circular con clotoides simétricas

**DEFLEXIÓN TOTAL DE LA CURVA ( $\Delta_T$ ).** Es el ángulo comprendido entre las normales en TE y ET. Su valor es igual a la deflexión de las tangentes, se mide directamente del eje de la vía en la planta del proyecto y se relaciona con  $\theta_e$  y  $\Delta_c$ , como lo indica la siguiente ecuación:

$$\Delta_T = 2\theta_e + \Delta_c \dots \dots \dots (58)$$

**LONGITUD TOTAL DE LA CURVA ( $L_T$ ).** Es la suma de las longitudes de las dos clotoides de transición y la longitud de la curva circular. Para curvas circulares con espirales simétricas, se tiene que:

$$L_T = 2Le + Lc \dots \dots \dots (59)$$

**COORDENADAS DEL PC DE LA CURVA CIRCULAR (p,k)**

De la figura (21) se tiene que:

$$p = Yc - (PC - M)$$

Para obtener  $(PC - M)$  consideremos el triángulo  $(EC - M - O)$ :

$$MO = \cos \theta_e R_c$$

$$\begin{aligned} PC - M &= R_c - MO = R_c - R_c \cos \theta_e \\ &= R_c(1 - \cos \theta_e) \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$p = Yc - R_c(1 - \cos \theta_e) \dots \dots \dots (60)$$

Si:

$$\cos \theta_e = 1 - \frac{\theta_e^2}{2} + \frac{\theta_e^4}{24} + \dots \dots \dots$$

$$\theta_e = \frac{Le^2}{2K^2} = \frac{Le^2}{2R_c Le} = \frac{Le}{2R_c}$$

Tomando hasta el segundo término de la serie de Mc claren que nos define a  $\cos \theta_e$ , y sustituyendo la expresión anterior:

$$\cos \theta_e = 1 - \frac{\left(\frac{Le}{2Rc}\right)^2}{2} = 1 - \frac{\frac{Le^2}{4Rc^2}}{2} = 1 - \frac{Le^2}{8Rc^2}$$

Es decir que:

$$Rc - Rc \cos \theta_e = Rc - Rc \left(1 - \frac{Le^2}{8Rc^2}\right) = \frac{Le^2}{8Rc^2}$$

Si además  $Y_c = \frac{Le^2}{6Rc}$  (de la expresión (26), tomando hasta el primer término) y sustituyendo a  $\theta_e = \frac{Le}{2Rc}$

Nos queda:

$$p = \frac{Le^2}{6Rc} - \frac{Le^2}{8Rc} = \frac{8Le^2 - 6Le^2}{48Rc} = \frac{2Le^2}{48Rc}$$

$$\therefore p = \frac{Le^2}{24Rc} \dots\dots\dots(61)$$

Ahora para la coordenada  $k$  del PC, tenemos:

$$k = Xc - (M - EC)$$

Nuevamente del triángulo  $(EC - M - O)$ :

$$(M - EC) = Rc \operatorname{sen} \theta_e$$

Y por tanto:

$$k = Xc - Rc \operatorname{sen} \theta_e \dots\dots\dots(62)$$

**SUBTANGENTE (Ste).** Es la distancia entre el PI y el TE o ET de la curva, medida sobre la prolongación de la tangente.

De la figura (20):

$$Ste = k + (N - PI)$$

Pero del triángulo (PI - N - O) se tiene que:

$$(N - PI) = (Rc + p) \tan \frac{\Delta}{2}$$

Y por lo tanto:

$$Ste = k + (Rc + p) \tan \frac{\Delta_T}{2} \dots\dots\dots(63)$$

**EXTERNA (Ec):** Es la distancia entre el PI y la curva. De la figura (21) se tiene que:

Del triángulo (PI - N - O):

$$Ec = (PI - O) - Rc$$

y

$$(PI - O) = (Rc + p) \sec \frac{\Delta}{2}$$

Entonces:

$$Ec = (Rc + p) \sec \frac{\Delta_T}{2} - Rc \dots\dots\dots(64)$$

**TANGENTE LARGA (TL).** Es el tramo de subtangente comprendido entre el TE o ET y la integración con la tangente a EC o CE.

De la figura (21).

$$TL = Xc - (QR)$$

Del triángulo (R - Q - EC)

$$RQ = Yc \cot \theta_e$$

Y entonces:

$$TL = Xc - Yc \cot \theta_e \dots\dots\dots(65)$$

**TANGENTE CORTA (TC).** Es el tramo de la tangente a CE o EC, comprendida entre uno de estos puntos y la intersección con la subtangente correspondiente.

En la figura (20), del triángulo (R - Q - EC):

$$\frac{Yc}{TC} = \text{sen} \theta_e \quad ; \quad \text{csc} \theta_e = \frac{TC}{Yc}$$

y entonces:

$$TC = Yc \text{csc} \theta_e \dots\dots\dots(66)$$

**CUERDA LARGA (CLe).** Es la recta que une el TE con el EC o el ET con el CE. De la expresión (37).

$$CLe = \sqrt{Xc^2 + Yc^2} \dots\dots\dots(67)$$

**RADIO NOMINAL (Rn).** Es la suma obvia del radio de la curva circular y la ordenada del PC de la curva circular (p).

$$Rn = Rc + p \dots\dots\dots(68)$$

### 4.3 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE CORRESPONDEN A LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CURVA COMPUESTA QUE DEPENDEN DE LAS COORDENADAS DE SUS PUNTOS.

A continuación y con la finalidad de demostrar la validez y el significado de todas las ecuaciones que se usarán en el programa de cómputo, se estudiarán algunos elementos geométricos con los que comenzaremos a resolver nuestro problema y su relación con otros, desde el punto de vista computacional, esto quiere decir que dichos elementos no siempre se van a calcular con una determinada ecuación, sino que esta dependerá de las posibles combinaciones y relación entre puntos, líneas o ángulos y así la computadora entienda la secuencia y utilice la ecuación correcta.

Algunos de los primeros datos con los que se comenzará a analizar y desarrollar los elementos de una curva, son:

$(X,Y)_E$       Coordenadas del punto donde comienza la tangente de entrada.

$(X,Y)_{PI}$       Coordenadas del punto de intersección de las tangentes.

$(X,Y)_S$       Coordenadas del punto donde termina la tangente de salida.

En la figura 22 se muestra un diagrama de estos puntos.

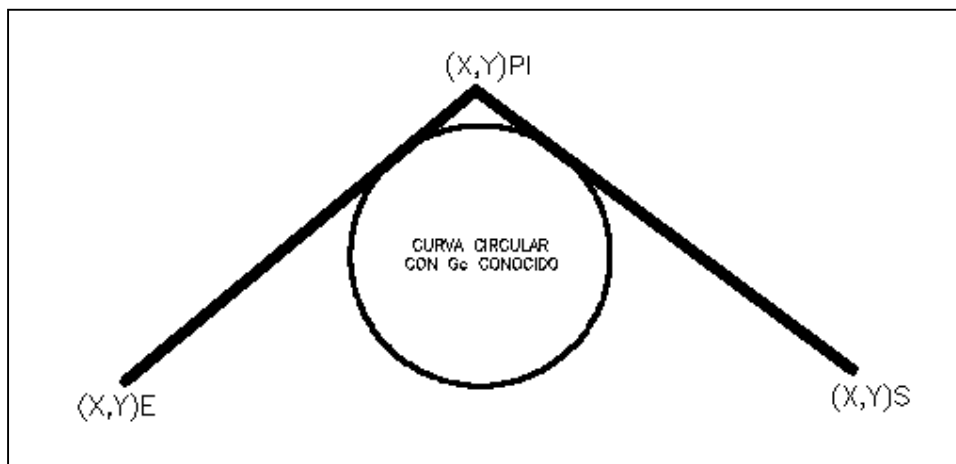


Fig. 22

**LONGITUD DE LAS TANGENTES.**

A partir de las coordenadas de los puntos anteriores, se puede calcular la longitud de la tangente de entrada ( $TAN_E$ ) y la longitud de la tangente de salida ( $TAN_S$ ).

De acuerdo con nuestros conocimientos de geometría analítica, podemos afirmar que las ecuaciones correspondientes son:

$$TAN_E = \sqrt{(X_{PI} - X_E)^2 + (Y_{PI} - Y_E)^2} \dots\dots\dots(69)$$

$$TAN_S = \sqrt{(X_S - X_{PI})^2 + (Y_S - Y_{PI})^2} \dots\dots\dots(70)$$

La figura 23 muestra estos elementos.

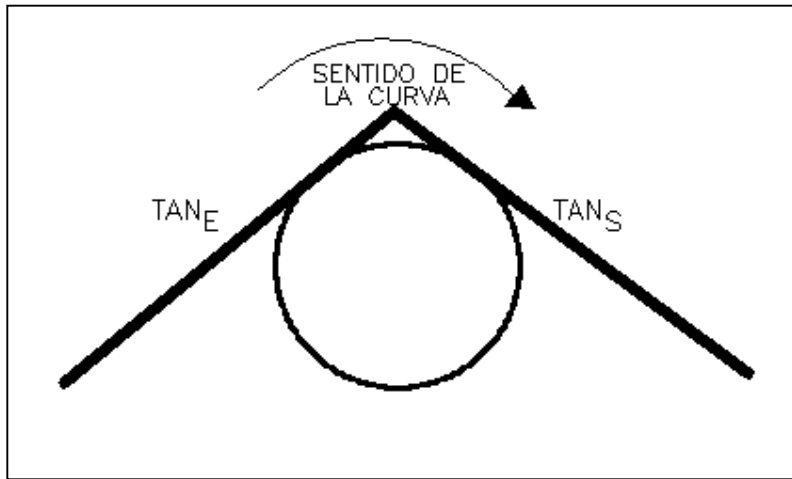


Fig. 23

**AZIMUT DE LA TANGENTE DE ENTRADA Y TANGENTE DE SALIDA.**

Ahora se explicará como obtener el azimut de las tangentes anteriores. Recordemos que un azimut es el ángulo que forma una línea con la dirección Norte-Sur, medido de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  a partir del norte, en el sentido de las manecillas del reloj.

Para calcular el azimut de la tangente de entrada ( $Az_{TAN E}$ ) consideremos el punto  $(X,Y)_E$  como origen de los ejes de referencia Norte-Sur, Este-Oeste. Dependiendo de la posición de  $(X,Y)_{PI}$  respecto del primer punto, pueden presentarse dos casos:

**Caso 1:** Si el valor de  $X_{PI}$  es mayor o igual que  $X_E$ , el  $Az_{TAN E}$  quedará ya sea dentro del primer o segundo cuadrantes, como se muestra en la figura 24.

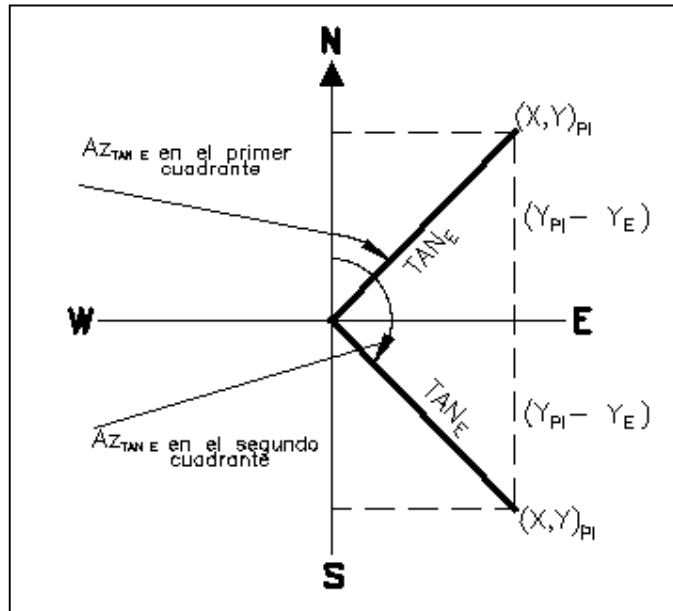


Fig. 24

Conviene recordar que ya contamos con la distancia de la tangente de entrada y si el azimut está en el primer cuadrante, por nuestros conocimientos básicos de trigonometría, podemos obtener la ecuación:

$$Az_{TAN E} = \text{ang} \cos \frac{Y_{PI} - Y_E}{TAN E} \dots\dots\dots(71)$$

De la misma manera, sabemos que si el azimut está en el segundo cuadrante, la ecuación 71 sigue siendo válida.



**Caso 2:** Si el valor de  $X_{PI}$  es menor que  $X_E$ , el  $AZ_{TAN E}$  quedará ya sea dentro del tercer o cuarto cuadrantes, como se muestra en la figura 25.

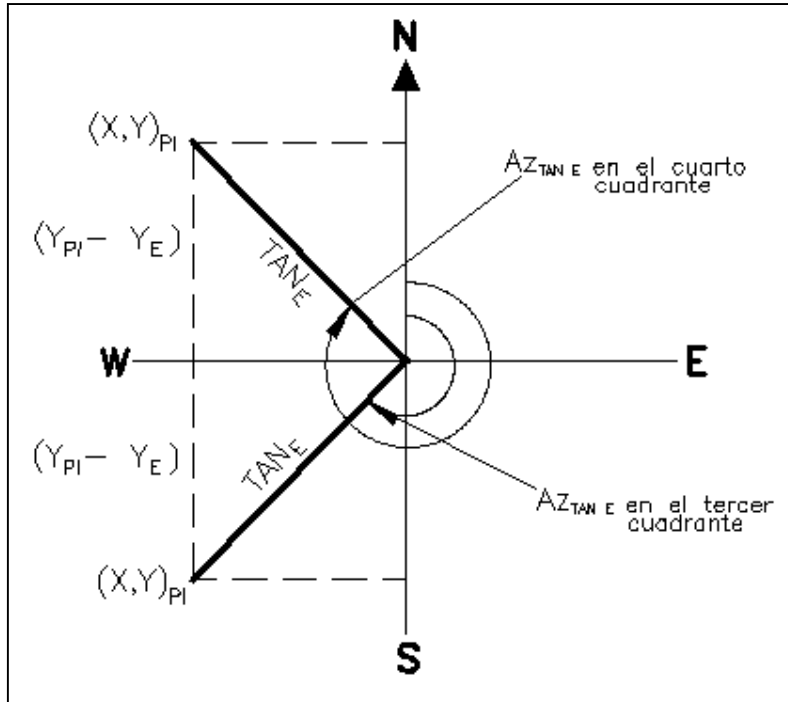


Fig. 25

De igual manera, por nuestros conocimientos básicos de trigonometría, si el  $AZ_{TAN E}$  está en el tercer cuadrante, entonces podemos afirmar que:

$$Az_{TAN E} = 360^\circ - \text{ang} \cos \frac{Y_{PI} - Y_E}{TAN E} \dots\dots\dots(72)$$

Esta ecuación también es válida si el azimut está en el cuarto cuadrante.

De forma análoga se calculará  $AZ_{TAN S}$ , pero ahora usaremos los puntos  $(X, Y)_{PI}$  y  $(X, Y)_S$ , de la siguiente forma:

Cuando  $X_S$  es mayor o igual a  $X_{PI}$  se usará la ecuación:

$$Az_{TAN S} = \text{ang} \cos \frac{Y_S - Y_{PI}}{TAN S} \dots\dots\dots(73)$$

Cuando  $X_s$  es menor a  $X_{PI}$  se usará la ecuación:

$$Az_{TAN_s} = 360^\circ - \text{ang} \cos \frac{Y_s - Y_{PI}}{TAN_s} \dots\dots\dots(74)$$

**CALCULO DE LA DEFLEXIÓN ENTRE LAS TANGENTES ( $\Delta_T$ )**

El uso de la ecuación para calcular la deflexión total depende del valor de los azimuts de las tangentes y del sentido de la curva, considerando también que si la vuelta es a la derecha, el ángulo ( $\Delta_T$ ) será positivo, y si la vuelta es a la izquierda, el ángulo ( $\Delta_T$ ) será negativo. Los casos posibles son:

**Caso 1:** Cuando el sentido de la curva es a la derecha, el azimut de la tangente de salida es mayor al de la tangente de entrada, a excepción de una deflexión (caso 2). La figura 26 muestra las posiciones de las tangentes.

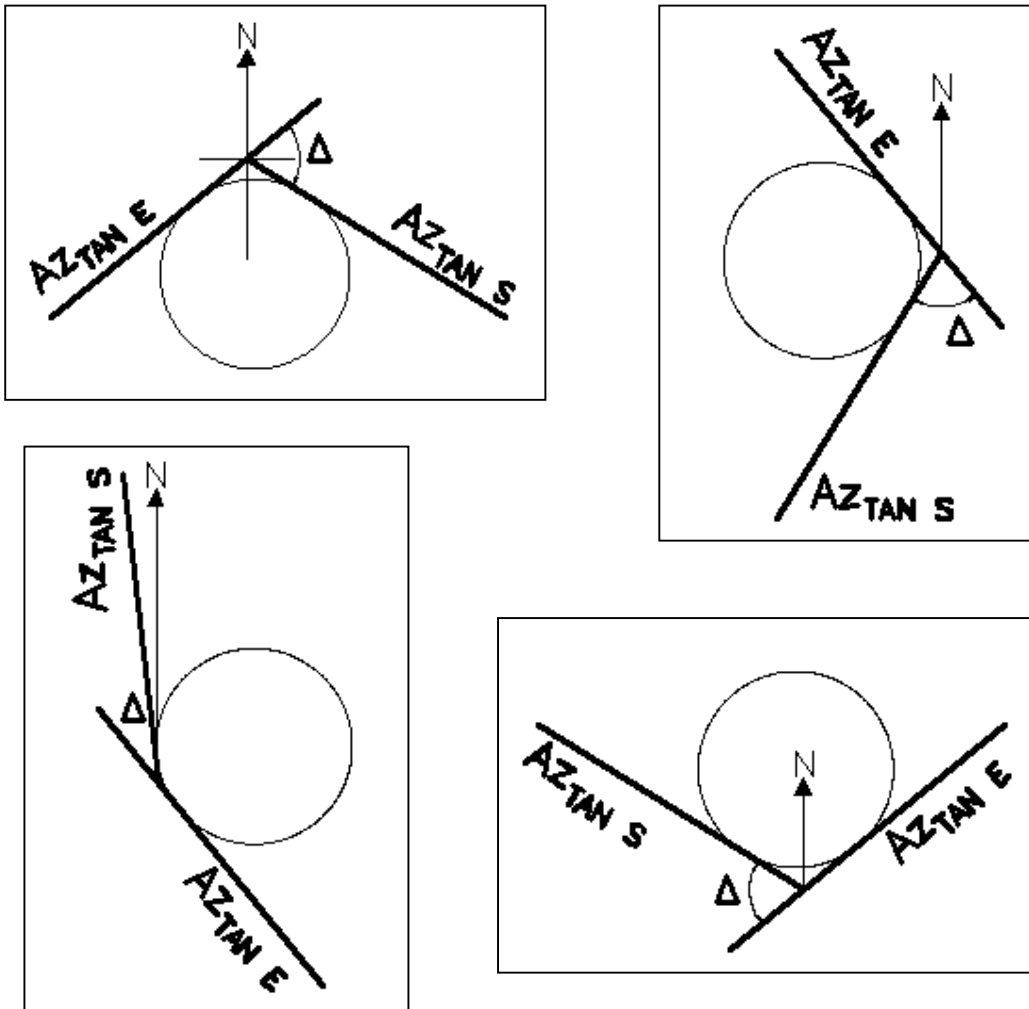


Fig. 26

Como se dijo antes,  $Az_{TAN_S}$  es mayor a  $Az_{TAN_E}$ , por ello, la diferencia es positiva y esta será el valor de la deflexión total  $\Delta_T$ . Así, tenemos la ecuación:

$$\Delta_T = Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E} \dots\dots\dots(75)$$

Y se puede observar que:

$$\text{Valor absoluto } (Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E}) < 180^\circ$$

**Caso 2:** Cuando el sentido de la curva es a la derecha pero  $Az_{TAN_E}$  está en el cuarto cuadrante y  $Az_{TAN_S}$  está en el primer cuadrante, la ecuación 75, no es válida, la figura 27, muestra este caso.

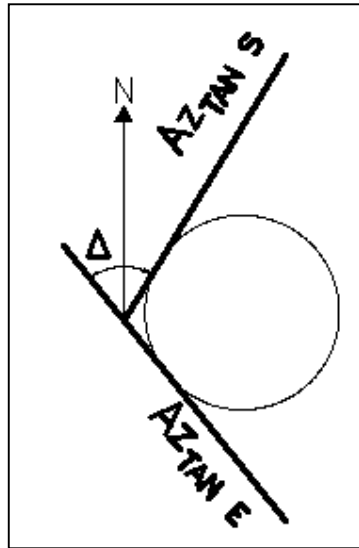


Fig. 27

Como puede observarse,  $Az_{TAN_S}$  es menor a  $Az_{TAN_E}$  y la diferencia da un número negativo, por ello, debemos sumar  $360^\circ$  y esto será el valor de la deflexión total  $\Delta_T$ . Así, tenemos la ecuación:

$$\Delta_T = 360^\circ + Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E} \dots\dots\dots(76)$$

Además se cumple que:

$$AZ_{TAN S} - AZ_{TAN E} < -180^\circ$$

**Caso 3:** Cuando el sentido de la curva es a la izquierda, el azimut de la tangente de salida es menor al de la tangente de entrada, a excepción de una deflexión (caso 4). La figura 28 muestra las posiciones de las tangentes.

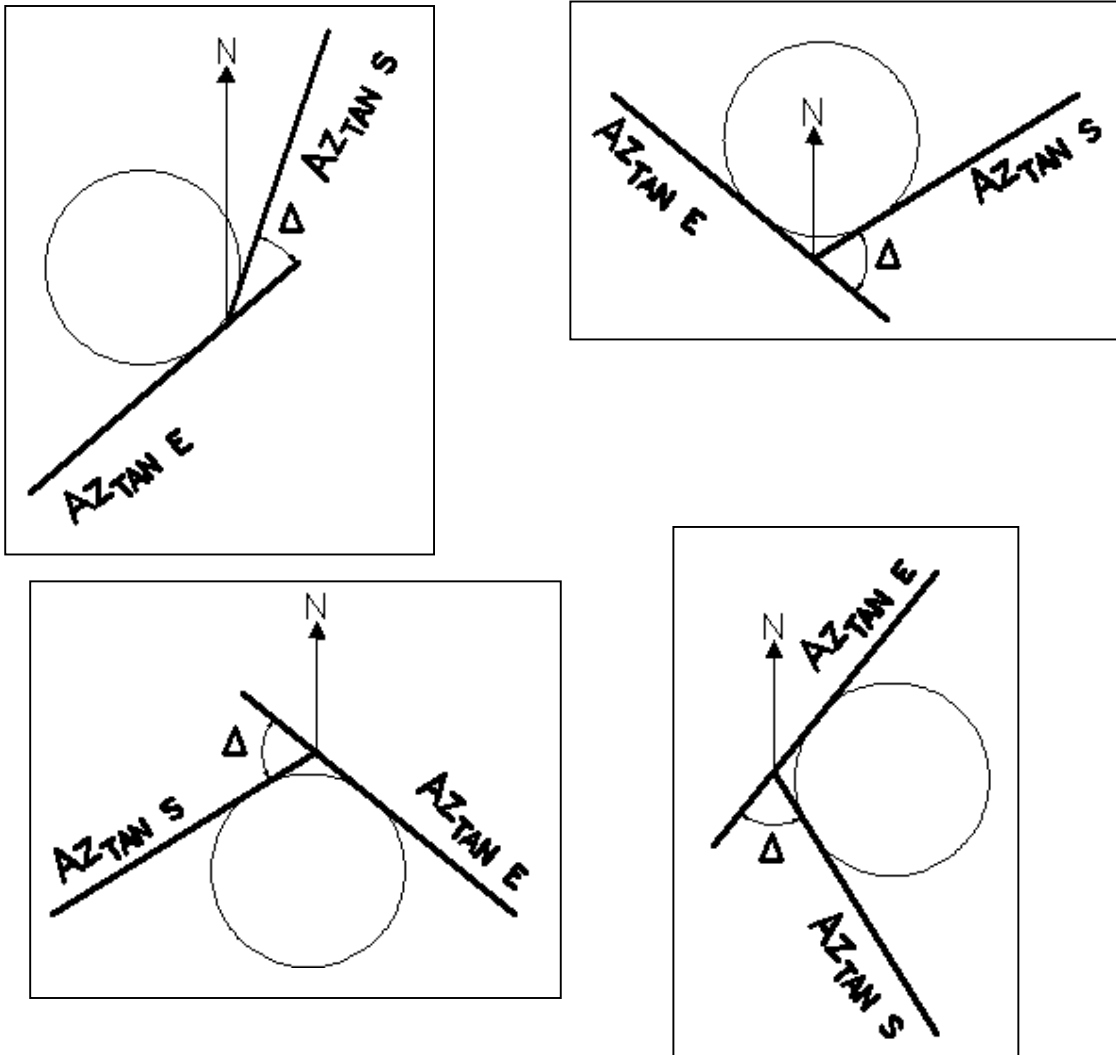


Fig. 28

Como se dijo antes,  $Az_{TAN S}$  es menor a  $Az_{TAN E}$ , por ello, la diferencia es negativa y esta será el valor de la deflexión total  $\Delta_T$ . Por lo que sigue siendo válida la ecuación:

$$\Delta_T = Az_{TAN S} - Az_{TAN E} \dots\dots\dots(75)$$

Y se puede observar que también se cumple que:

$$\text{Valor absoluto } (Az_{TAN S} - Az_{TAN E}) < 180^\circ$$

**Caso 4:** Cuando el sentido de la curva es a la izquierda pero  $Az_{TAN E}$  está en el primer cuadrante y  $Az_{TAN S}$  está en el cuarto cuadrante, la ecuación 75 no es válida, la figura 29 muestra este caso.

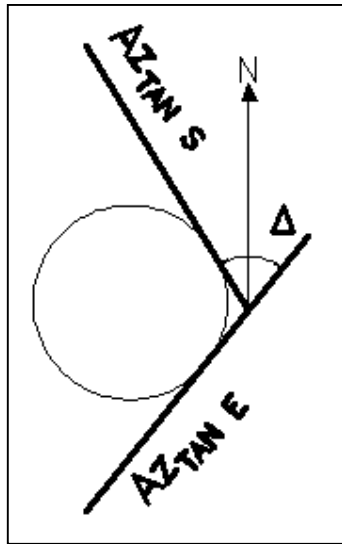


Fig. 29

Como puede observarse,  $Az_{TAN S}$  es mayor a  $Az_{TAN E}$  y la diferencia da un número positivo, por ello, debemos restar  $360^\circ$  y el resultado será el valor de la deflexión total  $\Delta_T$ . Así, tenemos la ecuación:

$$\Delta_T = Az_{TAN S} - Az_{TAN E} - 360^\circ \dots\dots\dots(77)$$

Además se cumple que:

$$Az_{TAN S} - Az_{TAN E} > 180^\circ$$

Con el análisis anterior, podemos afirmar que si el valor absoluto de  $(Az_{TAN S} - Az_{TAN E}) < 180^\circ$ , se puede utilizar la ecuación 75, si  $Az_{TAN S} - Az_{TAN E} < -180^\circ$  se usará la ecuación 76 y si  $Az_{TAN S} - Az_{TAN E} > 180^\circ$  será válida la ecuación 77.

## CÁLCULO DE LAS ESTACIONES O CADENAMIENTOS DE LOS PUNTOS PRINCIPALES DEL EJE DE PROYECTO

Ya conocidas las longitudes de las partes de la curva compuesta, se calculan las estaciones en las que comienza y termina cada componente de esta.

El punto donde comienza la tangente de entrada tendrá un cadenamiento inicial (dato de entrada), a partir del cual se colocan estaciones a cada 20 metros y en los puntos principales, que son:

- PI Punto de intersección de las tangentes
- TE Punto donde termina la tangente y comienza la espiral de entrada
- PSE<sub>1</sub> Punto cualquiera sobre la clotoide de entrada.
- EC Punto donde termina la espiral de entrada y comienza la curva circular
- CE Punto donde termina la curva circular y comienza la espiral de salida
- PSE<sub>2</sub> Punto cualquiera sobre la clotoide de salida.
- ET Punto donde termina la espiral de salida y comienza la tangente

Ahora consideremos la figura 30:

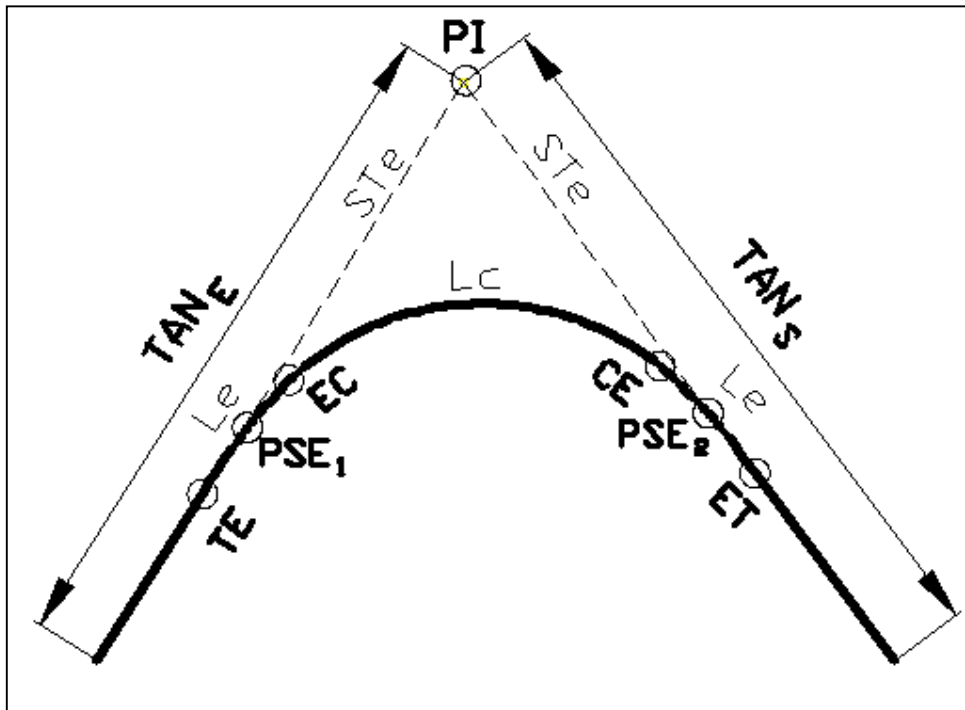


Fig. 30

Aquí puede observarse que las ecuaciones son:

$$EST.PI = EST.INICIAL + TAN_E \dots\dots\dots(78)$$

$$EST.TE = EST.PI - STe \dots\dots\dots(79)$$

$$EST.PSE_1 = EST.TE + L \dots\dots\dots(80)$$

$$EST.EC = EST.TE + Le \dots\dots\dots(81)$$

$$EST.CE = EST.EC + Lc \dots\dots\dots(82)$$

$$EST.PSE_2 = EST.CE + Le - L \dots\dots\dots(83)$$

$$EST.ET = EST.CE + Le \dots\dots\dots(84)$$

#### 4.4 CALCULO DE COORDENADAS RECTANGULARES DE LOS PUNTOS PRINCIPALES DE LA CURVA COMPUESTA

Gracias a nuestros conocimientos de geometría analítica y de topografía, sabemos que para calcular las coordenadas de un punto, necesitamos las coordenadas de otro punto, la distancia y la dirección (azimut) de la línea que pasa por ambos. Así, para conocer las proyecciones, utilizaremos las siguientes ecuaciones:

$$\text{Pr oy}X = D \text{sen}Az \dots\dots\dots(85)$$

$$\text{Pr oy}Y = D \text{cos}Az \dots\dots\dots(86)$$

Donde:

$\text{Pr oy}X$  es la proyección de la línea al eje X.

$\text{Pr oy}Y$  es la proyección de la línea al eje Y.

$D$  es la distancia que hay entre ambos puntos

$Az$  es el azimut de la línea

Las coordenadas las obtendremos con las ecuaciones:

$$X_{\text{CALCULADA}} = X_{\text{CONOCIDA}} + \text{Pr oy}X \dots\dots\dots(87)$$

$$Y_{\text{CALCULADA}} = Y_{\text{CONOCIDA}} + \text{Pr oy}Y \dots\dots\dots(88)$$

Recordemos que los datos iniciales de nuestro problema son  $(X,Y)_E$ ,  $(X,Y)_{PI}$   $(X,Y)_S$ , con ellos se calcula el azimut de la tangente de entrada ( $Az_{\text{TAN E}}$ ) y de salida ( $Az_{\text{TAN S}}$ ), como se vio anteriormente, para después calcular las coordenadas de los puntos principales, que son: TE, PSE<sub>1</sub>, EC, CE, PSE<sub>2</sub> y ET, llevando un orden en los puntos, azimuts, distancias y proyecciones, para con ello facilitar el proceso de programación.

Para comprender el cálculo de los puntos principales de la clotoide de entrada, nos auxiliaremos de la figura 31.



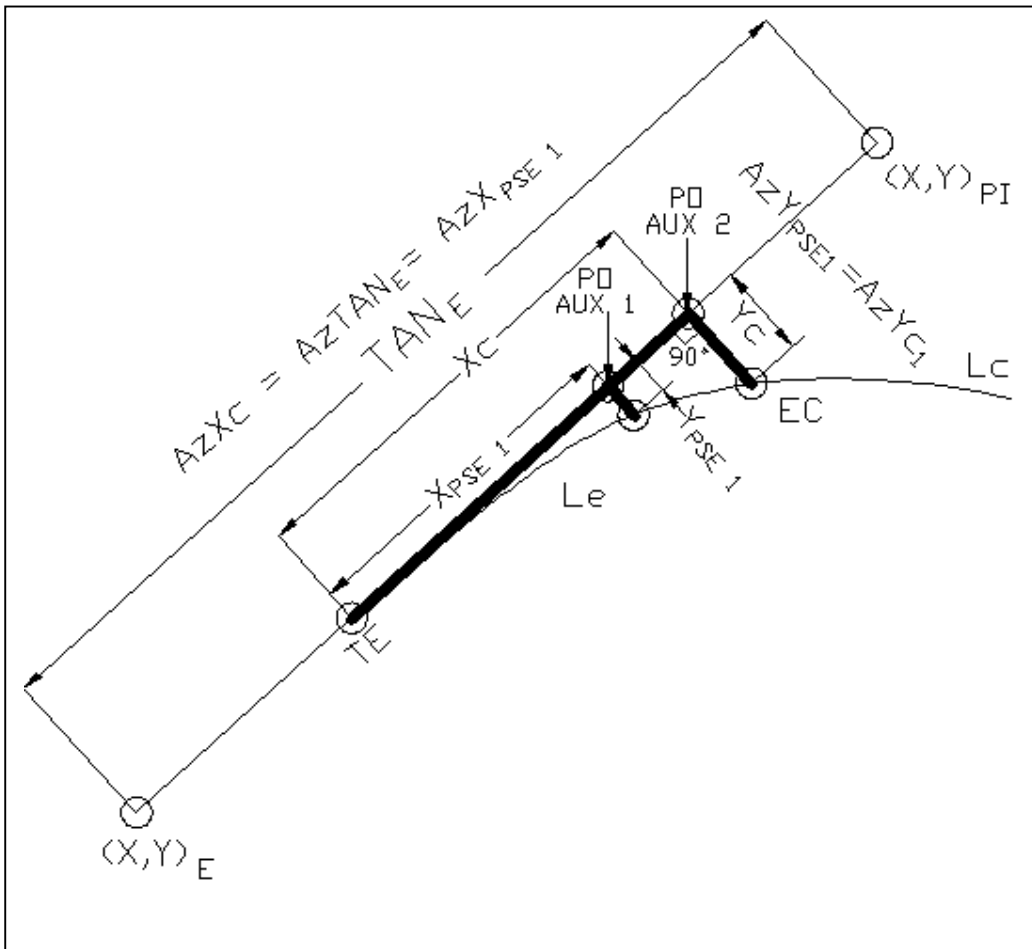


Fig. 31

### CALCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO TE

#### Punto 1

El punto conocido es  $(X,Y)_E$  y el azimut y la distancia al punto  $(X,Y)_{TE}$  son:

$$Az_1 = Az_{TANE}$$

$$D_1 = \text{ESTACIÓN TE} - \text{ESTACIÓN INICIAL}$$

Las proyecciones quedan de la siguiente forma:

$$Pr_{oy_1} X = D_1 \text{sen} Az_1$$

$$Pr_{oy_1} Y = D_1 \text{cos} Az_1$$

Las coordenadas del punto  $(X,Y)_{TE}$  son:

$$X_{TE} = X_E + \text{Pr oy}_1 X$$

$$Y_{TE} = Y_E + \text{Pr oy}_1 Y$$

### CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO PSE<sub>1</sub>.

Para este cálculo será necesario conocer los azimuts de las líneas  $X_c$  y  $Y_c$  (que son los mismos que  $X_{PSE\ 1}$  y  $Y_{PSE\ 1}$ ), como se ve en la figura 33. Estos forman un ángulo de  $90^\circ$ , el azimut de  $X_c$  coincide con el de  $TAN_E$  y el azimut de  $Y_c$  depende del sentido de la deflexión de la curva y de la posición del primero y por tratarse de la clotoide de entrada, le llamaremos  $Az\ Y_{c1}$ .

Dicho azimut se calculara de la siguiente manera:

#### Caso 1:

Si el sentido de la curva es positivo, existen dos opciones, como se ve en la figura 32.

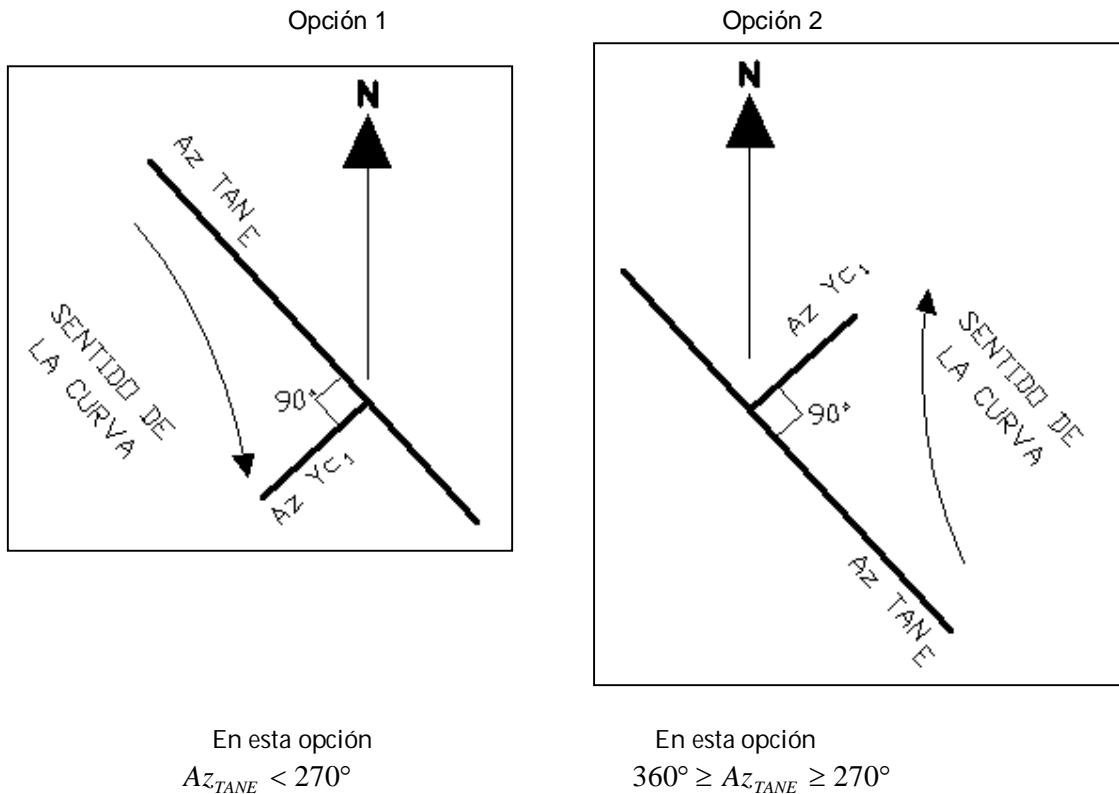


Fig. 32

En la primera opción, la ecuación es:

$$AzYc_1 = Az_{TANE} + 90^\circ$$

Mientras que en la segunda opción:

$$AzYc_1 = Az_{TANE} - 270^\circ$$

**Caso 2:**

Si el sentido de la curva es negativo, también existen dos opciones, como se ve en la figura 33.

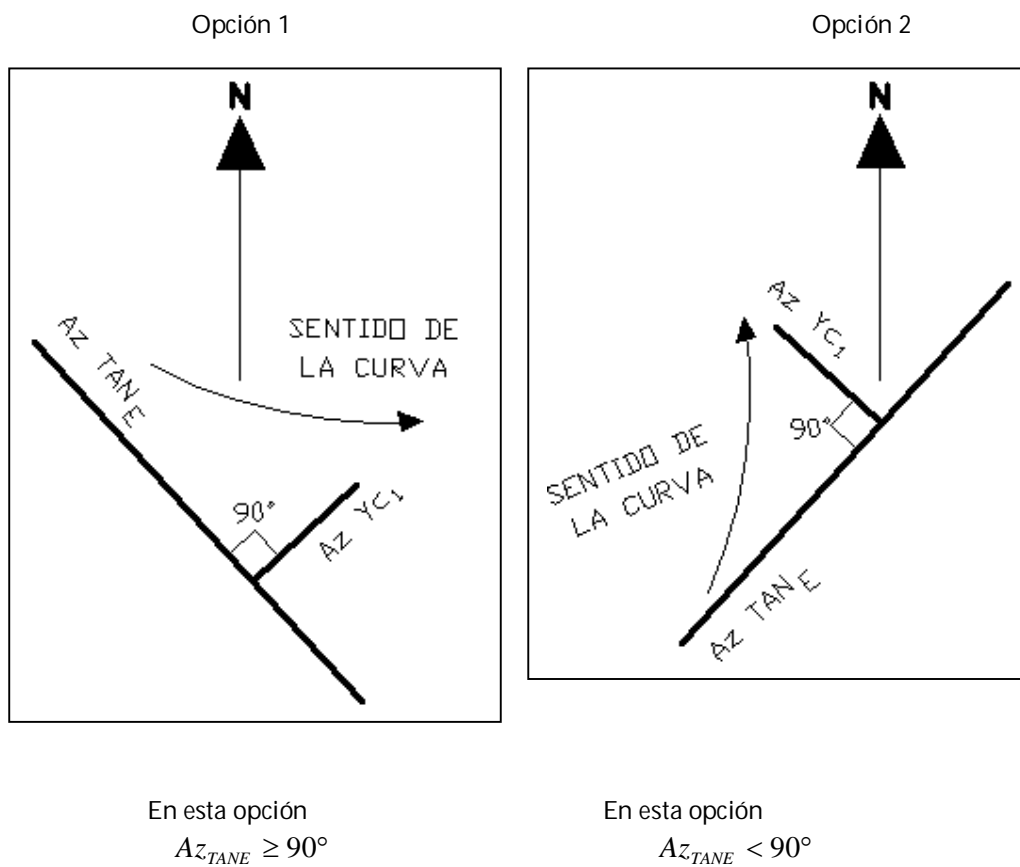


Fig. 33

En la primera opción la ecuación es:

$$AzYc_1 = Az_{TANE} - 90^\circ$$

Mientras que en la segunda opción:

$$AzYc_1 = Az_{TANE} + 270^\circ$$

**Punto 2:**

El cálculo de las siguientes coordenadas corresponden al primer punto auxiliar (PO AUX 1), Fig. 31. El punto conocido es  $(X,Y)_{TE}$  y el azimut y la distancia a  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 1}$  son:

$$Az_2 = Az_{TANE}$$

$$D_2 = X_{PSE}$$

Las proyecciones quedan de la siguiente forma:

$$Pr\ oy_2 X = D_2 \text{sen} Az_2$$

$$Pr\ oy_2 Y = D_2 \cos Az_2$$

Las coordenadas del punto  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 1}$  son:

$$X_{POAUX1} = X_{TE} + Pr\ oy_2 X$$

$$Y_{POAUX1} = Y_{TE} + Pr\ oy_2 Y$$

**PUNTO 3:**

Después  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 1}$  es el punto conocido y el azimut y la distancia a  $(X,Y)_{PSE\ 1}$  son:

$$Az_3 = Az_{YC_1}$$

$$D_3 = Y_{PSE}$$

Las proyecciones son:

$$Pr\ oy_3 X = D_3 \text{sen} Az_3$$

$$Pr\ oy_3 Y = D_3 \cos Az_3$$

Las coordenadas del punto  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 1}$  son:

$$X_{PSE1} = X_{POAUX1} + Pr\ oy_3 X$$

$$Y_{PSE1} = Y_{POAUX1} + Pr\ oy_3 Y$$

## CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO EC

### PUNTO 4:

Como puede verse en la figura 32, el punto EC se calcula igual que el PSE<sub>1</sub>, solo cambiará la distancia  $X_{PSE}$  por  $X_C$  así como  $Y_{PSE}$  por  $Y_C$ . El punto conocido es  $(X, Y)_{TE}$  y el azimut y la distancia a  $(X, Y)_{POAUX2}$  son:

$$Az_4 = Az_{TANE}$$

$$D_2 = X_C$$

Las proyecciones quedan de la siguiente forma:

$$\text{Pr oy}_4 X = D_4 \text{sen} Az_4$$

$$\text{Pr oy}_4 Y = D_4 \text{cos} Az_4$$

Las coordenadas del punto  $(X, Y)_{POAUX1}$  son:

$$X_{POAUX2} = X_{TE} + \text{Pr oy}_4 X$$

$$Y_{POAUX2} = Y_{TE} + \text{Pr oy}_4 Y$$

### PUNTO 5:

Después  $(X, Y)_{POAUX2}$  es el punto conocido y el azimut y la distancia a  $(X, Y)_{EC}$  son:

$$Az_5 = Az_{YC_1}$$

$$D_3 = Y_C$$

Las proyecciones son:

$$\text{Pr oy}_5 X = D_5 \text{sen} Az_5$$

$$\text{Pr oy}_5 Y = D_5 \text{cos} Az_5$$

Las coordenadas del punto  $(X, Y)_{EC}$  son:

$$X_{EC} = X_{POAUX2} + \text{Pr oy}_5 X$$

$$Y_{EC} = Y_{POAUX2} + \text{Pr oy}_5 Y$$

De manera similar a la clotoide de entrada, para comprender los cálculos de los puntos de la clotoide de salida, nos auxiliaremos de la figura 34.

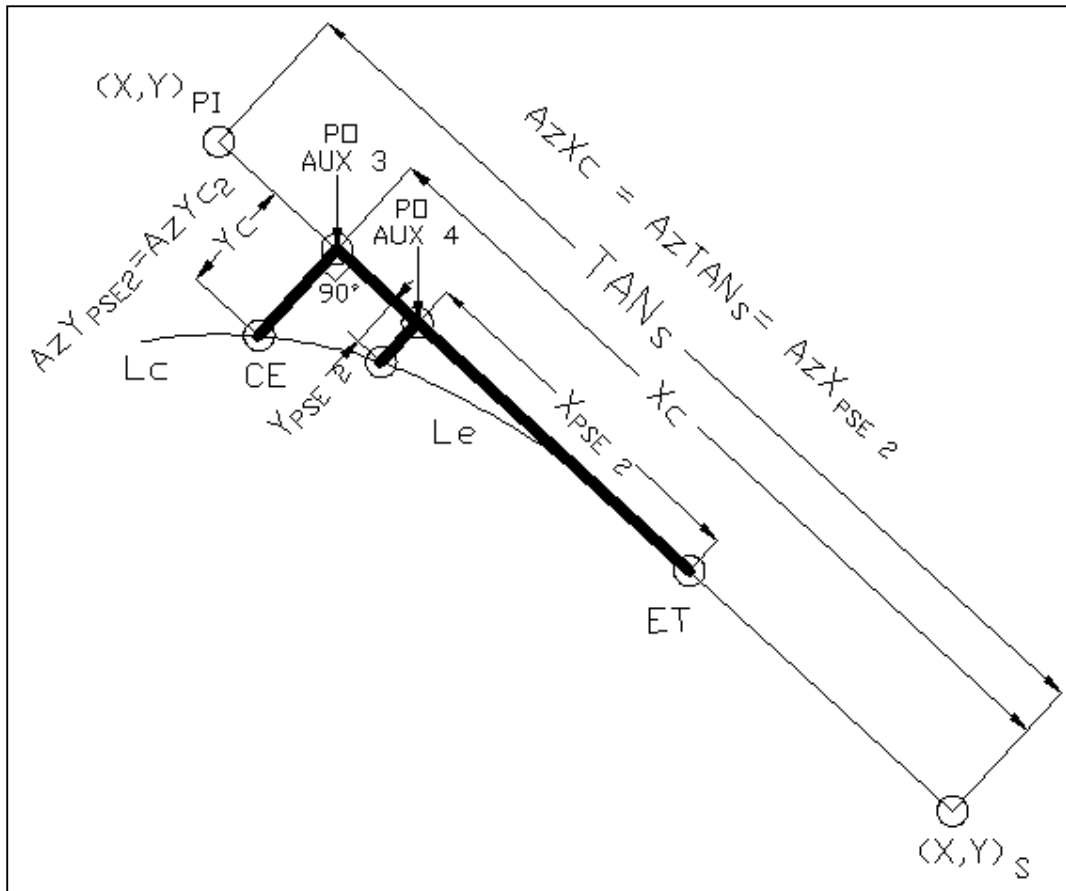


Fig. 34

### CALCULO DE LAS COORDENADAS DEL PTO CE

Ahora será necesario conocer los azimuts de las líneas Xc, Yc (que son los mismos que X<sub>PSE2</sub>, Y<sub>PSE2</sub>). Estos también forman un ángulo de 90° como se ve en la figura 34. El primero coincide con Az TAN<sub>s</sub> y el segundo depende del sentido de la deflexión de la curva y de la posición del primero y que por tratarse de la clotoide de salida le llamaremos Az Yc<sub>2</sub>. Dicho azimut se calculará según lo siguiente:

#### Caso 1:

Si el sentido de la curva es positivo, existen dos opciones, como se ve en la figura 35.

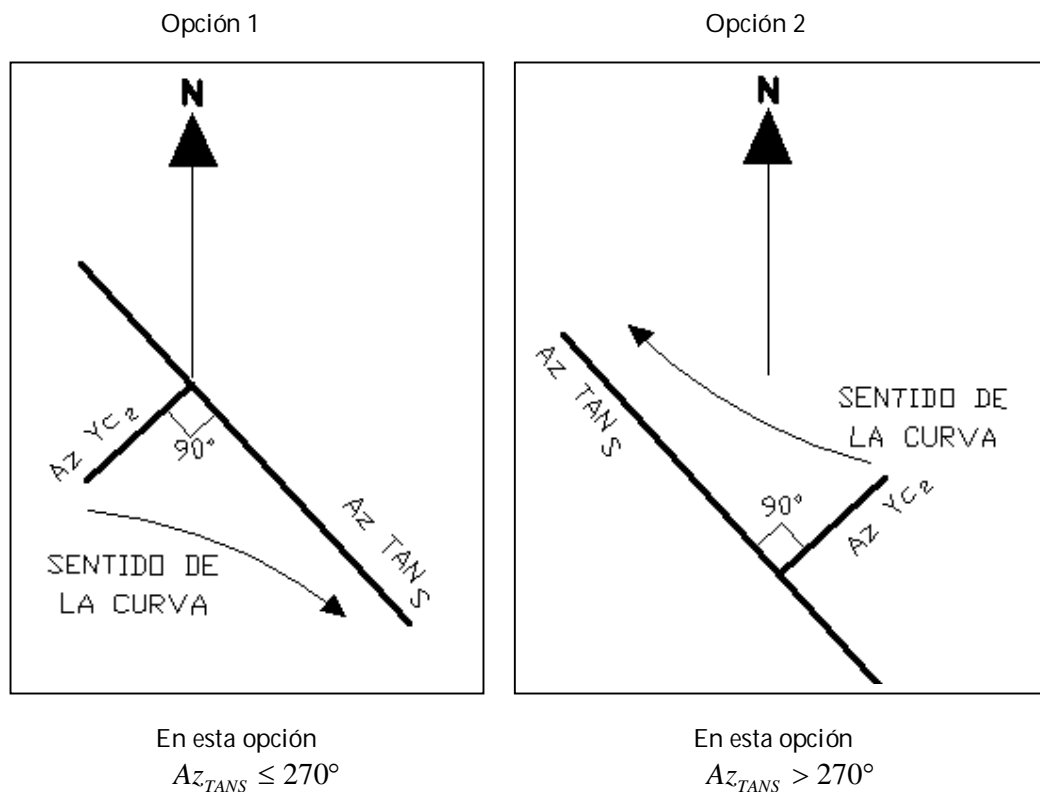


Fig. 35

En la primera opción, la ecuación es:

$$Az_{Yc_2} = Az_{TANS} + 90^\circ$$

Mientras que en la segunda opción:

$$Az_{Yc_2} = Az_{TANE} - 270^\circ$$

**Caso 2:**

Si el sentido de la curva es negativo, también existen dos opciones, como se ve en la figura 36.

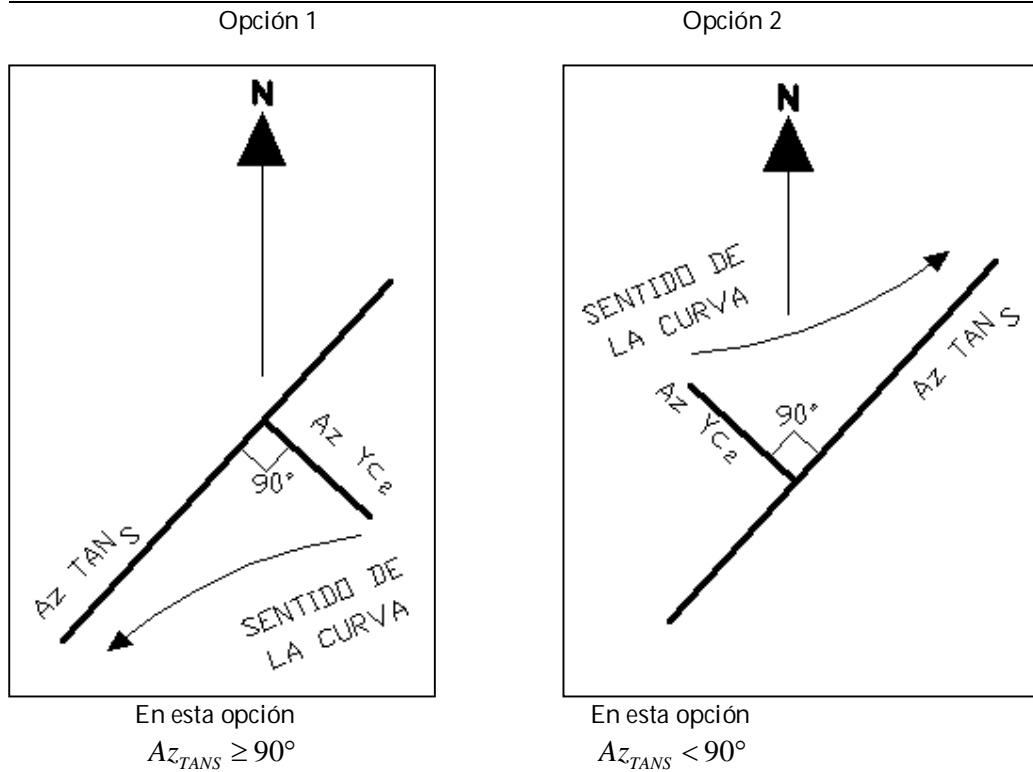


Fig. 36

En la primera opción, la ecuación es:

$$Az_{YC_2} = Az_{TANS} - 90^\circ$$

Mientras que en la segunda opción:

$$Az_{YC_2} = Az_{TANS} + 270^\circ$$

## CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO CE

### PUNTO 6:

El cálculo de las siguientes coordenadas corresponden al tercer punto auxiliar (PO AUX 3). Ahora el punto conocido es  $(X,Y)_{PI}$  y el azimut y la distancia a  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 3}$  son:

$$Az_6 = Az_{TANS}$$

$$D_6 = STe - Xc$$

Las proyecciones quedan de la siguiente forma:

$$Pr\ oy_6 X = D_6 \text{sen} Az_6$$

$$Pr\ oy_6 Y = D_6 \text{cos} Az_6$$



Las coordenadas del punto  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 3}$  son:

$$X_{POAUX3} = X_{PI} + \text{Pr oy}_6 X$$

$$Y_{POAUX3} = Y_{PI} + \text{Pr oy}_6 Y$$

### PUNTO 7:

Después  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 3}$  es el punto conocido y el azimut y la distancia al punto  $(X,Y)_{CE}$  son:

$$Az_7 = Az_{Yc_2}$$

$$D_7 = Yc$$

Las proyecciones son:

$$\text{Pr oy}_7 X = D_7 \text{sen} Az_7$$

$$\text{Pr oy}_7 Y = D_7 \cos Az_7$$

Las coordenadas del punto  $(X,Y)_{CE}$  son:

$$X_{CE} = X_{POAUX3} + \text{Pr oy}_7 X$$

$$Y_{CE} = Y_{POAUX3} + \text{Pr oy}_7 Y$$

## CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO PSE 2

### PUNTO 8:

Como puede verse en la figura 35, el punto  $PSE_2$  se calcula igual que el CE, solo cambiará la distancia  $Xc$  por  $X_{PSE2}$  así como  $Yc$  por  $Y_{PSE2}$ . Ahora  $(X, Y)_{PI}$  es el punto conocido y el azimut y la distancia al cuarto punto auxiliar (PO AUX 4) son:

$$Az_8 = Az_{TANS}$$

$$D_8 = STe - X_{PSE}$$

Las proyecciones quedan de la siguiente forma:

$$\text{Pr oy}_8 X = D_8 \text{sen} Az_8$$

$$\text{Pr oy}_8 Y = D_8 \cos Az_8$$

Las coordenadas del punto  $(X, Y)_{PO\ AUX\ 3}$  son:

$$X_{POAUX4} = X_{PI} + \text{Pr oy}_8 X$$

$$Y_{POAUX4} = Y_{PI} + \text{Pr oy}_8 Y$$

**PUNTO 9:**

Después  $(X, Y)_{PO\ AUX\ 4}$  es el punto conocido y el azimut y la distancia al punto  $(X, Y)_{PSE\ 2}$  son:

$$Az_9 = Az_{YC_2}$$

$$D_9 = Y_{PSE}$$

Las proyecciones son:

$$\text{Pr oy}_9 X = D_9 \text{sen} Az_9$$

$$\text{Pr oy}_9 Y = D_9 \cos Az_9$$

Las coordenadas del punto  $(X, Y)_{PSE\ 2}$  son:

$$X_{PSE2} = X_{POAUX4} + \text{Pr oy}_9 X$$

$$Y_{PSE2} = Y_{POAUX4} + \text{Pr oy}_9 Y$$

**CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL PUNTO ET**

**PUNTO 10:**

El punto conocido es  $(X, Y)_{PI}$ , el azimut y la distancia al punto  $(X, Y)_{ET}$  son:

$$Az_{10} = Az_{TANS}$$

$$D_{10} = STe$$

Las proyecciones son:

$$\text{Pr oy}_{10} X = D_{10} \text{sen} Az_{10}$$

$$\text{Pr oy}_{10} Y = D_{10} \cos Az_{10}$$

Las coordenadas del punto  $(X, Y)_{ET}$  son:

$$X_{ET} = X_{PI} + \text{Pr oy}_{10} X$$

$$Y_{ET} = Y_{PI} + \text{Pr oy}_{10} Y$$

#### 4.5 SÍNTESIS DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS Y SUS ECUACIONES

A continuación se presentan las tablas que resumen los elementos geométricos que se utilizan en la construcción de la curva circular con clotoides simétricas con sus respectivas ecuaciones, estas han sido ordenadas de tal forma que se facilite el proceso de programación.

#### ELEMENTOS GEOMÉTRICOS CONOCIDOS (DATOS DE ENTRADA).

Símbolo	Elemento Geométrico	Descripción
$(X,Y)_E$	Coordenadas del punto donde comienza la tangente de entrada	DATO DE ENTRADA
$(X,Y)_{PI}$	Coordenadas del punto de intersección de las tangentes	DATO DE ENTRADA
$(X,Y)_S$	Coordenadas del punto donde termina la tangente de salida	DATO DE ENTRADA
$L_e$	Longitud de la espiral	DATO DE ENTRADA
$G_c$	Grado de curvatura de la curva circular	DATO DE ENTRADA
EST. INICIAL	Estación que corresponde al punto de la tangente de entrada	DATO DE ENTRADA
$L$	Longitud de las clotoide del origen a un PSE	DATO DE ENTRADA
$N$	Número de cuerdas en que se divide $L_e$	DATO DE ENTRADA

Tabla 5

**ELEMENTOS DE LA CLOTOIDE PARA UN PUNTO PARTICULAR (P)**

Ecuación	Elemento Geométrico	Descripción
22	Deflexión de la clotoide en un punto P	$\theta = \frac{L^2 Gc}{40Le}$
27	Coordenadas de un punto (P) sobre la espiral	$X = \frac{L}{100} (100 - 0.304617\theta^2 (10)^{-2})$ $Y = \frac{L}{100} (0.581776\theta - 0.126585\theta^3 (10)^{-4})$
42	Ángulo de la cuerda a un punto (P)	$\phi' = \frac{\theta}{3}$
45	Ángulo entre la tangente a un punto P y una cuerda atrás	$\phi' AT = \phi - \phi'$
46	Ángulo entre la tangente a un punto P y una cuerda adelante	$\phi' AD = \phi + \phi'$
48	Ángulo de la cuerda que subtiende un arco de círculo	$\phi = \frac{G_c L}{40}$

Tabla 6

**ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CLOTOIDE PARA UNA LONGITUD (Le).**

Ecuación	Elemento Geométrico	Descripción
50	Parámetro de la clotoide	$K = \sqrt{RcLe}$
52	Deflexión de la espiral	$\theta_e = \frac{GcLe}{40}$
53	Ángulo de la cuerda larga de la clotoide	$\phi' c = \frac{\theta_e}{3}$
54	Coordenadas del EC o del CE	$X_c = \frac{Le}{100} (100 - 0.304617\theta_e^2 (10)^{-2})$ $Y_c = \frac{Le}{100} (0.581776\theta_e - 0.126585\theta_e^3 (10)^{-4})$

Tabla 7

**ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA CURVA CIRCULAR SIMPLE**

Ecuación	Elemento Geométrico	Descripción
21	Radio de la curva circular	$Rc = \frac{1145.9156}{Gc}$
55	Deflexión de la curva circular	$\Delta c = \Delta_T - 2\theta_e$
56	Longitud de la curva circular	$Lc = \frac{20\Delta c}{Gc}$
57	Sutangente (curva circular)	$ST = Rc \tan \frac{\Delta c}{2}$

Tabla 8

**ELEMENTOS GEOMÉTRICOS QUE CORRESPONDEN A LA CURVA CIRCULAR CON CLOTOIDES SIMÉTRICAS (COMO CONJUNTO DE CURVAS)**

Ecuación	Elemento Geométrico	Descripción
69	Distancia del punto donde comienza la tangente de entrada al PI	$TAN_E = \sqrt{(X_{PI} - X_E)^2 + (Y_{PI} - Y_E)^2}$
70	Distancia del PI al punto donde termina la tangente de salida	$TAN_S = \sqrt{(X_S - X_{PI})^2 + (Y_S - Y_{PI})^2}$
71 72	Azimut de la tangente de entrada	La fórmula dependerá de la posición de sus puntos extremos.
73 74	Azimut de la tangente de salida	La fórmula dependerá de la posición de sus puntos extremos
75 76 77	Angulo de deflexión entre las tangentes	La fórmula dependerá de la posición de las tangentes
	Deflexión Total	$\Delta_T$
59	Longitud total de la curva circular con espirales simétricas	$L_T = 2Le + Lc$
62 61	Coordenadas del PC ó PT (desplazamiento)	$k = Xc - Rcsen\theta_e$ $p = \frac{Le^2}{24Rc}$
63	Subtangente	$Ste = k + (Rc + p)\tan\frac{\Delta_T}{2}$
64	Externa	$Ec = (Rc + p)\sec\frac{\Delta_T}{2} - Rc$
65	Tangente larga	$TL = Xc - Yc \cot\theta_e$
66	Tangente Corta	$TC = Yc \csc\theta_e$
67	Cuerda larga de la clotoide	$CLe = \sqrt{Xc^2 + Yc^2}$
68	Radio Nominal	$Rn = Rc + p$

Tabla 9

**COORDENADAS POLARES DE LA CLOTOIDE DE ENTRADA Y CLOTOIDE DE SALIDA**

Ecuación	Elemento Geométrico	Descripción
40	Deflexión	$d = \sqrt{X^2 + Y^2}$
44	Distancia	$\Delta = \frac{\theta}{3}$

Tabla 10

**COORDENADAS RECTANGULARES DE LOS PUNTOS PRINCIPALES DE LA CURVA COMPUESTA**

Símbolo	Descripción
$(X, Y)_{TE}$	Punto donde termina la tangente y empieza la espiral de entrada.
$(X, Y)_{PSE 1}$	Punto cualquiera sobre la espiral de entrada.
$(X, Y)_{EC}$	Punto donde termina la espiral de entrada y empieza la curva circular.
$(X, Y)_{CE}$	Punto donde termina la curva circular y empieza la espiral de salida.
$(X, Y)_{PSE 2}$	Punto cualquiera sobre la espiral de salida.
$(X, Y)_{ET}$	Punto donde termina la espiral de salida y comienza la tangente.

Tabla 11

**LAS ECUACIONES PARA CALCULAR LOS PUNTOS ANTERIORES SON:**

Ecuación	Elemento Geométrico	Descripción
85	Proyección en X	$Pr\ oyX = DsenAz$
86	Proyección en Y	$Pr\ oyY = D\cos Az$
87	Coordenada X	$X_{CALCULADA} = X_{CONOCIDA} + Pr\ oyX$
88	Coordenada Y	$Y_{CALCULADA} = Y_{CONOCIDA} + Pr\ oyY$

Tabla 12

**CÁLCULO DE ESTACIONES DE LOS PUNTOS PRINCIPALES DE LA CURVA COMPUESTA**

No.	Símbolo	Elemento Geométrico	Ecuación
78	EST. PI	Punto de intersección de las tangentes	$EST.PI = EST.INICIAL + TAN_E$
79	EST. TE	Punto donde termina la tangente y comienza la espiral	$EST.TE = EST.PI - Ste$
80	EST. PSE <sub>1</sub>	Punto cualquiera sobre la clotoide de entrada	$EST.PSE_1 = EST.TE + L$
81	EST. EC	Punto donde termina la espiral y comienza la curva circular	$EST.EC = EST.TE + Le$
82	EST. CE	Punto donde termina la curva circular y comienza la espiral	$EST.CE = EST.EC + Lc$
83	EST. PSE <sub>2</sub>	Punto cualquiera sobre la clotoide de salida	$EST.PSE_2 = EST.CE + Le - L$
84	EST. ET	Punto donde termina la espiral y comienza la tangente	$EST.ET = EST.CE + Le$

Tabla 13

## CAPITULO 5

### PLANIFICACIÓN Y DESARROLLO DEL PROGRAMA

El arte de programar implica escribir instrucciones para decirle a la computadora como procesar información específica. En este caso se diseñará un programa en el que se introduzcan datos, se procesen y luego salgan.

El flujo de procesamiento es el siguiente:

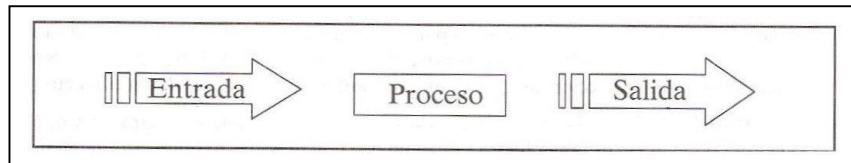


Figura 37. Flujo de procesamiento.

Los pasos para llevar a cabo nuestro programa, son los siguientes:

**Paso 1. Análisis del problema y desarrollo de las especificaciones**

**Paso 2. Diseño de una solución**

**Paso 3. Codificación del programa en un lenguaje de programación**

**Paso 4. Pruebas realizadas al programa**

**Paso 5. Validación del programa**

#### 5.1 ANALISIS DEL PROBLEMA Y DESARROLLO DE LAS ESPECIFICACIONES.

El programa se entenderá a fondo. Existen varias preguntas que se deben responder con el fin de desarrollar las especificaciones exactas.

¿Cuáles son los datos del problema?

Sabemos que nuestra curva consistirá en una clotoide de entrada, una curva circular y una clotoide de salida. Dicha curva será la que mejor se adapte a la configuración topográfica del terreno, tomando en cuenta el grado de curvatura, el tipo de camino y la velocidad de proyecto, por lo que una vez seleccionada la mejor ruta posible, conoceremos las coordenadas del punto de intersección de las tangentes  $(X,Y)_{PI}$ , las coordenadas del punto donde comienza la tangente de entrada  $(X,Y)_E$ , las coordenadas del punto donde termina la tangente de salida  $(X,Y)_S$  así como el grado de curvatura de la curva circular



(Gc) (que es inversamente proporcional al radio de la curva (Rc)), con este último valor obtendremos la longitud de la espiral (Le) en las tablas proporcionadas en el tema 2.2. También asignaremos un valor a la longitud de la curva del origen a un PSE, que por simplicidad será de 10 metros, pero puede ser cualquier otro valor, siempre que sea menor que Le. De esta forma, los datos conocidos del problema se enlistan a continuación:

- $(X, Y)_E$     Coordenadas del punto donde comienza la tangente de entrada
- $(X, Y)_{PI}$     Coordenadas del punto de intersección de las tangentes
- $(X, Y)_S$     Coordenadas del punto donde termina la tangente de salida
- (Gc)        Grado de curvatura de la curva circular
- (Le)        Longitud de la espiral
- L         Longitud de la clotoide del origen a un PSE

¿Qué se conoce?

Conocemos las ecuaciones y las relaciones entre los elementos geométricos, así es posible calcularlos todos a partir de los datos conocidos del problema.

¿Qué se dará?

El programa que desarrollaremos nos proporcionará el valor de los elementos geométricos que definen la curva, para con ello poder dibujarla en planos o trazarla en campo.

¿En qué forma se darán los resultados?

Se darán como valores numéricos que representan coordenadas rectangulares, ángulos y longitudes, ya que con ellos es posible definir magnitudes de los elementos geométricos.

## 5.2 DISEÑO DE UNA SOLUCIÓN

Se debe desarrollar una serie de pasos precisos que al aplicarse al problema conduzcan a la mejor solución. Este es el esquema con base en el cual se escribirá el código. La serie de pasos no deberá ser ambigua, sino detallada y finita. La solución debe ser completa y eficaz.

Lo anterior significa que se habrá de diseñar un algoritmo, es decir, un conjunto de pasos para resolver el problema, por ello este paso es fundamental. Todos los días se utilizan algoritmos siempre que se realiza una tarea como la preparación de una receta de cocina o el ensamble de un librero, el algoritmo indica cada paso en el orden apropiado.

Para ser correcto, un algoritmo debe reunir algunas características específicas.

Un algoritmo:

- Cuenta con datos de entrada, realiza un proceso y produce un resultado
- Debe ser claro y no ambiguo
- Debe resolver el problema correctamente
- Debe ejecutarse en número finito de pasos

Cuando se escriben algoritmos para problemas numéricos complejos, en general todos los datos de entrada se obtienen en los primeros pasos y los de salida en los últimos.

El siguiente es un algoritmo para conocer los elementos de una curva circular con clotoides de entrada y salida y que resuelve nuestro problema, se escribe con un método de español estructural llamado **pseudocódigo**.

Los pasos son:

1.- Obtener las coordenadas de  $(X,Y)_E$ ,  $(X,Y)_{PI}$ ,  $(X,Y)_S$ , así como el valor de  $G_c$ ,  $L_e$ ,  $L$  y  $N$ .

2.- Calcular  $\theta$  utilizando la ecuación:  $\theta = \frac{L^2 G_c}{40 L_e}$

3.- Calcular  $(x,y)_{PSE}$  utilizando las ecuaciones:

$$x = \left( \frac{L}{100} \right) \left( 100 - 0.305\theta^2(10)^{-2} + 0.430\theta^4(10)^{-7} - 0.302\theta^6(10)^{-12} \right)$$

$$y = \left( \frac{L}{100} \right) \left( 0.582\theta - 0.127\theta^3(10)^{-4} + 0.123\theta^5(10)^{-9} - 0.653\theta^7(10)^{-15} \right)$$

4.- Calcular  $\phi'$  utilizando la ecuación:  $\phi' = \frac{\theta}{3}$

5.- Calcular  $\phi'AT$  utilizando la ecuación:  $\phi'AT = \phi - \phi'$

6.- Calcular  $\phi'AD$  utilizando la ecuación:  $\phi'AD = \phi + \phi'$

7.- Calcular  $\phi$  utilizando la ecuación:  $\phi = \frac{GcL}{40}$

8.- Calcular K utilizando la ecuación:  $K = \sqrt{RcLe}$ .

9.- Calcular  $\theta e$  utilizando la ecuación:  $\theta e = \frac{GcLe}{40}$ .

10.- Calcular  $\phi'c$  utilizando la ecuación:  $\phi'c = \frac{\theta e}{3}$

11.- Calcular (Xc, Yc) utilizando las ecuaciones:

$$Xc = \left( \frac{Le}{100} \right) (100 - 0.305\theta e^2 (10^{-2}))$$

$$Yc = \left( \frac{Le}{100} \right) (0.582\theta e - 0.126\theta^3 (10^{-4})).$$

12.- Calcular Rc utilizando la ecuación:  $Rc = \frac{1145.92}{Gc}$ .

13.- Calcular  $\Delta c$  utilizando la ecuación:  $\Delta c = \Delta_T - 2\theta e$

14.- Calcular  $Lc$  utilizando la ecuación:  $Lc = \frac{20\Delta c}{Gc}$

15.- Calcular  $ST$  utilizando la ecuación:  $ST = Rc \tan\left(\frac{\Delta c}{2}\right)$

16.- Calcular  $TAN_E$  y  $TAN_S$  con las ecuaciones:

$$TAN_E = \sqrt{(X_{PI} - X_E)^2 + (Y_{PI} - Y_E)^2}$$

$$TAN_S = \sqrt{(X_S - X_{PI})^2 + (Y_S - Y_{PI})^2}$$

17.- Calcular  $Az_{TAN_E}$ .

17.1.- Si  $X_{PI}$  es mayor o igual a  $X_E$  la ecuación es:  $Az_{TAN_E} = \text{ang} \cos \frac{Y_{PI} - Y_E}{TAN_E}$ .

17.2.- En caso contrario la ecuación es:  $Az_{TAN_E} = 360^\circ - \text{ang} \cos \frac{Y_{PI} - Y_E}{TAN_E}$ .

18.- Calcular  $Az_{TAN_S}$ .

18.1.- Si  $X_S$  es mayor o igual a  $X_{PI}$  la ecuación es:  $Az_{TAN_S} = \text{ang} \cos \frac{Y_S - Y_{PI}}{TAN_S}$ .

18.2.- En caso contrario la ecuación es:  $Az_{TAN_S} = 360^\circ - \text{ang} \cos \frac{Y_S - Y_{PI}}{TAN_S}$ .

19.- Calcular  $\Delta_T$ .

19.1.- Si el valor absoluto de  $Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E} < 180^\circ$  la ecuación es:

$$\Delta_T = Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E}$$

19.2.- En caso contrario existen dos posibilidades:

19.2.1.- Si  $Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E} < 0^\circ$  la ecuación es:

$$\Delta_T = 360^\circ + Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E}$$

19.2.2.- En caso contrario, la ecuación es:  $\Delta_T = Az_{TAN_S} - Az_{TAN_E} - 360$ .

20.- Calcular  $L_T$  utilizando la ecuación:  $L_T = 2Le + Lc$ .

21.- Calcular  $p$  y  $k$  utilizando las ecuaciones:

$$p = Yc - Rc(1 - \cos \theta e)$$

$$k = Xc - Rc \text{sen} \theta e$$

22.- Calcular  $STe$  utilizando la ecuación:  $STe = k + (Rc + p) \tan \left( \frac{\Delta}{2} \right)$

23.- Calcular  $Ec$  utilizando la ecuación:  $Ec = (Rc + p) \sec \frac{\Delta}{2} - Rc$

24.- Calcular  $TL$  utilizando la ecuación:  $TL = Xc - Yc \cot \theta e$

25.- Calcular  $TC$  utilizando la ecuación:  $TC = Yc \csc \theta e$

26.- Calcular Cle utilizando la ecuación  $CLe = \sqrt{Xc^2 + Yc^2}$ .

27.- Calcular Rn utilizando la ecuación:  $Rn = Rc + p$

28.- Calcular las N coordenadas polares sobre la clotoide utilizando las ecuaciones:

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\Delta = \frac{\theta}{3}$$

29.- Calcular estaciones de los puntos principales, utilizando las ecuaciones:

$$EST.PI = EST.INICIAL + TAN E$$

$$EST.TE = EST.PI - Ste$$

$$EST.PSE_1 = EST.TE + L$$

$$EST.EC = EST.TE + Le$$

$$EST.CE = EST.EC + Lc$$

$$EST.PSE_2 = EST.CE + Le - L$$

$$EST.ET = EST.CE + Le$$

30.- Asignar distancias auxiliares utilizando las equivalencias respectivas para poder calcular con facilidad las coordenadas rectangulares de los puntos principales de la curva.

31.- Calcular Az Y<sub>1</sub> para la clotoide de entrada

31.1 Si  $\Delta_T > 0^\circ$ , existen dos posibilidades:

31.1.1 Si  $Az_{TANE} \leq 270^\circ$  la ecuación es:  $Az Y_1 = Az_{TANE} + 90^\circ$

31.1.2 En caso contrario, la ecuación es:  $Az Y_1 = Az_{TANE} - 270^\circ$

31.2 Si  $\Delta_T < 0^\circ$ , existen dos posibilidades:

31.2.1 Si  $Az_{TANE} \geq 90^\circ$  la ecuación es:  $Az Y_1 = Az_{TANE} - 90^\circ$

31.2.2 En caso contrario, la ecuación es:  $Az Y_1 = Az_{TANE} + 270^\circ$

32.- Calcular Az Y<sub>2</sub> para la clotoide de salida.

32.1 Si  $\Delta_T > 0^\circ$ , existen dos posibilidades:

32.1.1 Si  $Az_{TANS} \leq 270^\circ$  la ecuación es:  $Az Y_2 = Az_{TANS} + 90^\circ$

32.1.2 En caso contrario, la ecuación es:  $Az Y_2 = Az_{TANS} - 270^\circ$

32.2 Si  $\Delta_T < 0^\circ$ , existen dos posibilidades:

32.2.1 Si  $Az_{TANS} \geq 90^\circ$  la ecuación es:  $Az Y_2 = Az_{TANS} - 90^\circ$

32.2.2 En caso contrario, la ecuación es:  $Az Y_2 = Az_{TANS} + 270^\circ$

33.- Asignar Azimuts auxiliares utilizando las equivalencias respectivas.

34.- Calcular el valor de las coordenadas  $(X,Y)_{TE}$  utilizando las ecuaciones respectivas.

35.- Calcular el valor de las coordenadas  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 1}$  y posteriormente  $(X,Y)_{PSE\ 1}$  utilizando las ecuaciones respectivas.

36.- Calcular el valor de las coordenadas  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 2}$  y posteriormente  $(X,Y)_{EC}$  utilizando las ecuaciones respectivas.

37.- Calcular el valor de las coordenadas  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 3}$  y posteriormente  $(X,Y)_{CE}$  utilizando las ecuaciones respectivas.

38.- Calcular el valor de las coordenadas  $(X,Y)_{PO\ AUX\ 4}$  y posteriormente  $(X,Y)_{PSE\ 2}$  utilizando las ecuaciones respectivas.

39.- Calcular el valor de las coordenadas  $(X,Y)_{ET}$  utilizando las ecuaciones respectivas.

40.- Imprimir  $\theta, (X,Y)_P, \phi', \phi'_{AT}, \phi'_{AD}, \phi$ .

41.- Imprimir  $K, \theta_e, \phi'c, (Xc, Yc)$ .

42.- Imprimir  $Rc, \Delta c, Lc, ST$ .

43.- Imprimir  $TAN_E, TAN_S, Az_{TAN_E}, Az_{TAN_S}, \Delta_T, L_T,$   
 $p, k, Ste, Ec, TL, TC, Cle, Rn$ .

44.- Imprimir coordenadas polares  $(d, \Delta)$ .

45.- Imprimir estaciones  $(TE, PSE_1, EC, CE, PSE_2, ET)$ .

46.- Imprimir coordenadas  $(X,Y)_{TE}, (X,Y)_{PSE\ 1}, (X,Y)_{EC}, (X,Y)_{CE}, (X,Y)_{PSE\ 2}, (X,Y)_{ET}$ .

Notese que todos los niveles del pseudocódigo contienen un verbo específico. En pseudocódigo, los pasos del algoritmo se numeran de modo que se ejecute una acción por número. Si un número requiere dos pasos, se subdivide en forma de esquema hasta el siguiente nivel.

Este pseudocódigo es una buena manera de empezar a diseñar una solución de nuestro problema, pero para expresar el flujo del procesamiento de una manera más lúcida, se utilizará un **diagrama de flujo**, que es un mapa estructurado que muestra los pasos del algoritmo. En la figura 38 se describen las figuras utilizadas en cada una de las partes del diagrama de flujo.

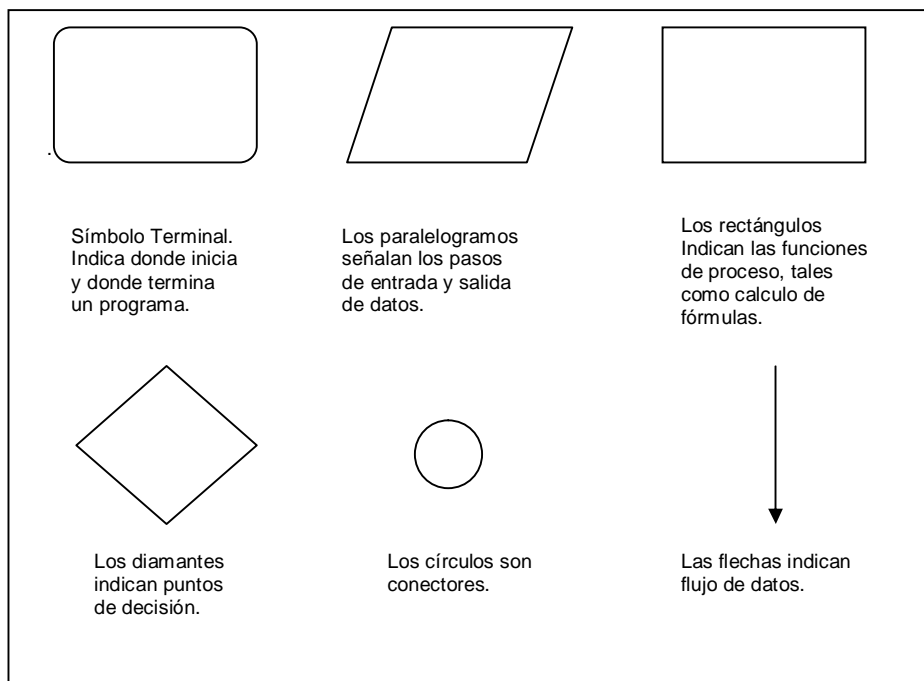
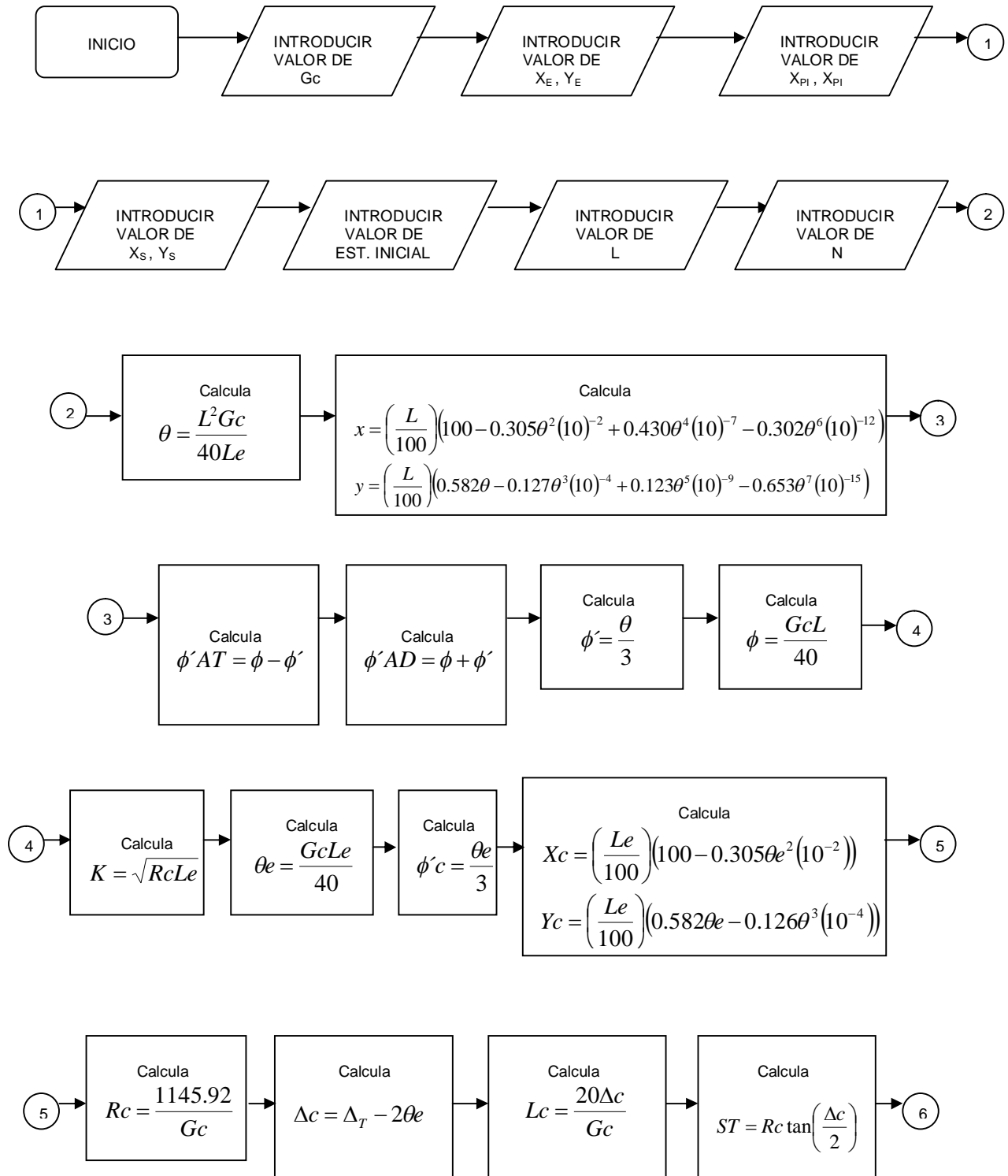


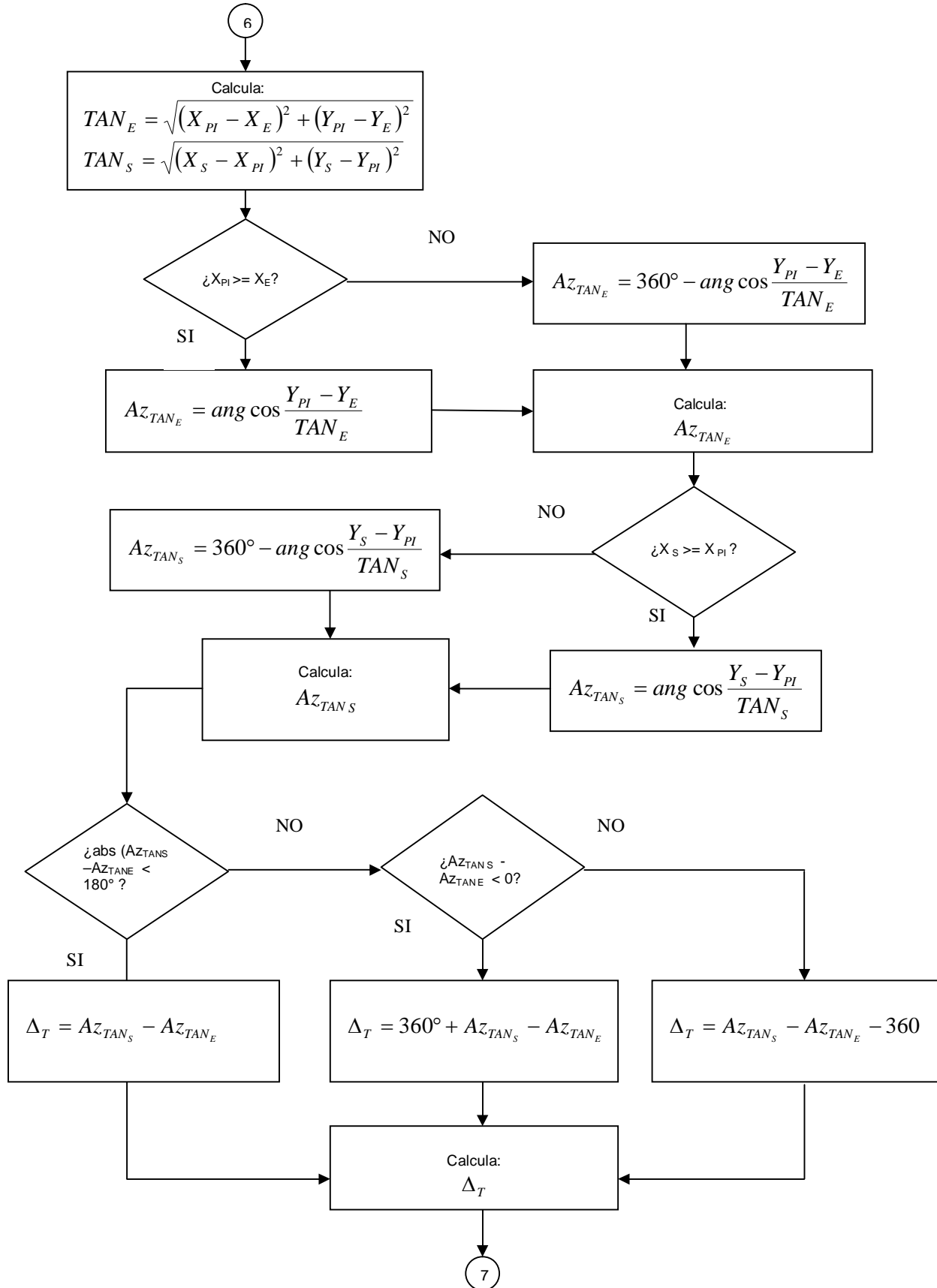
FIGURA 38.

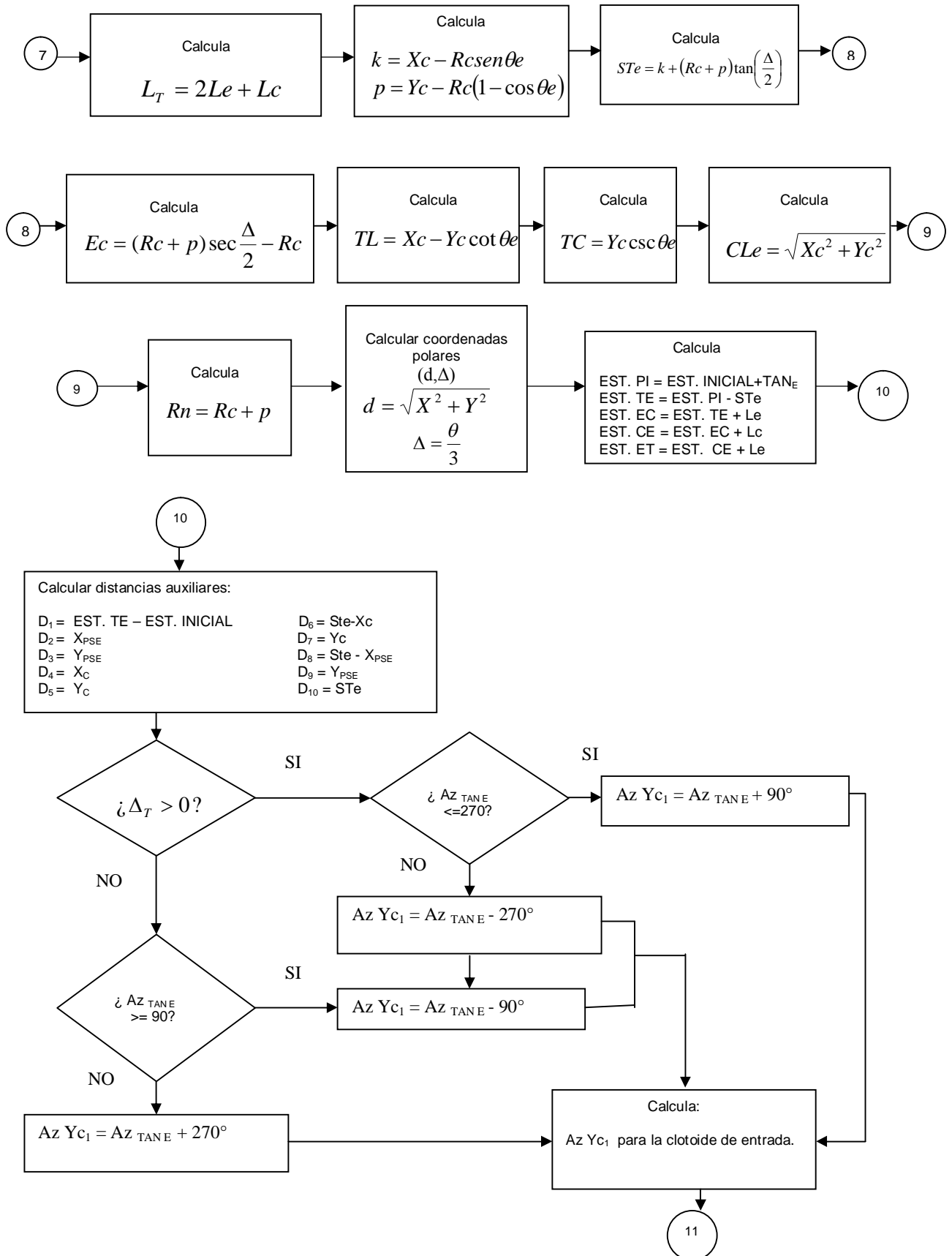
A continuación se presenta el diagrama de flujo que representa los pasos de nuestro algoritmo. En él se explica detalladamente el uso de todas las ecuaciones y el orden en que se calcularán todos los elementos geométricos.

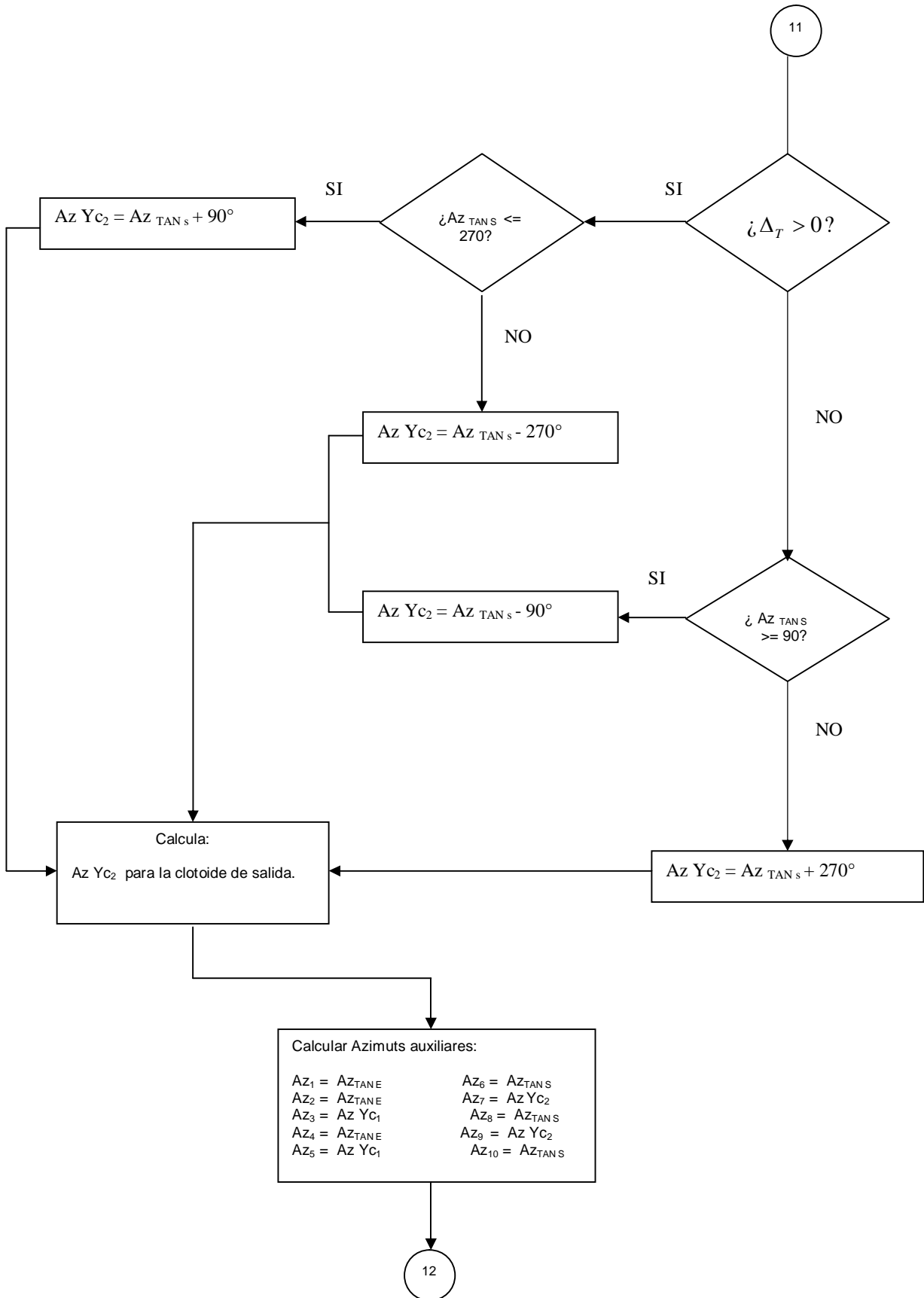
DIAGRAMA DE FLUJO

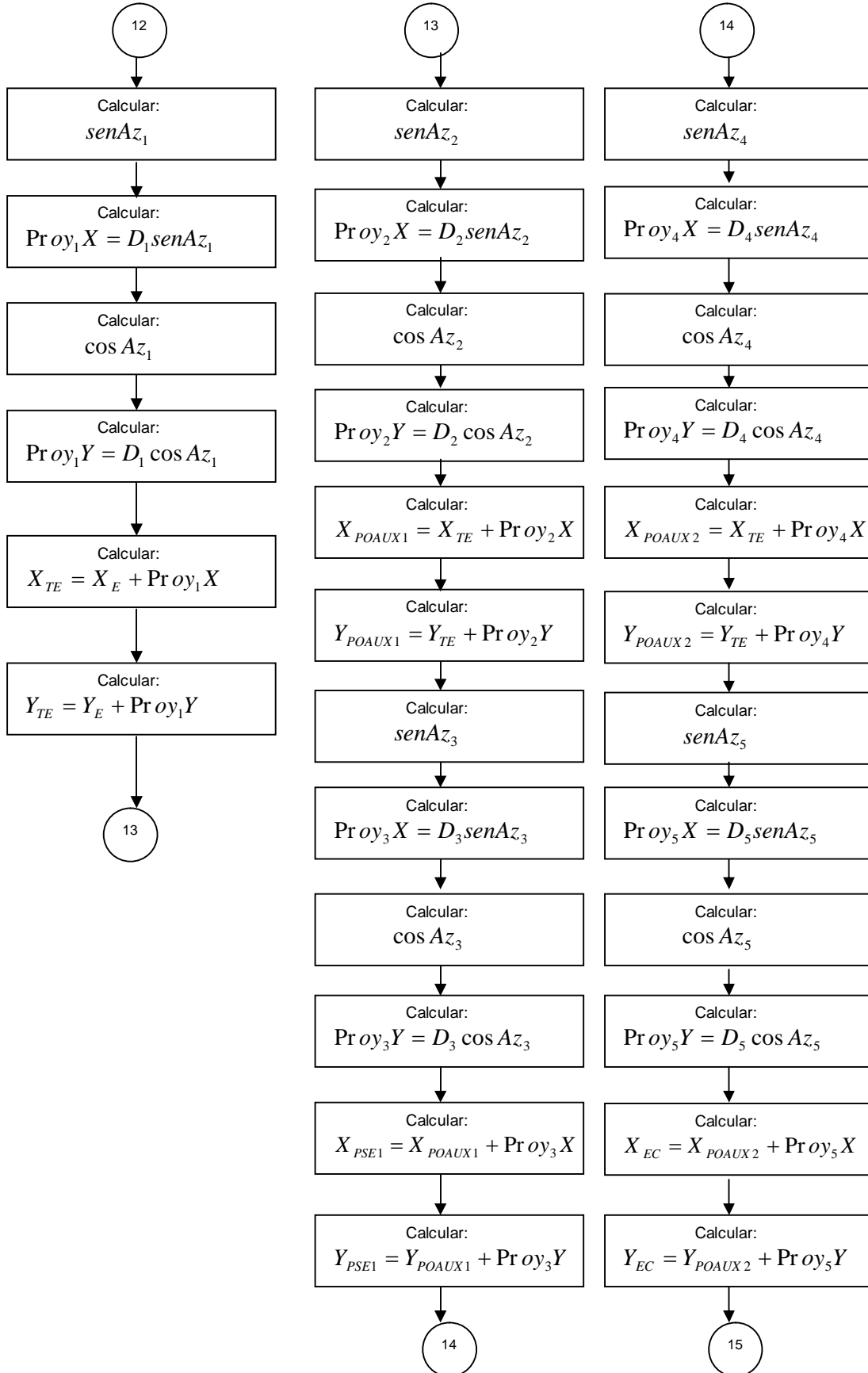


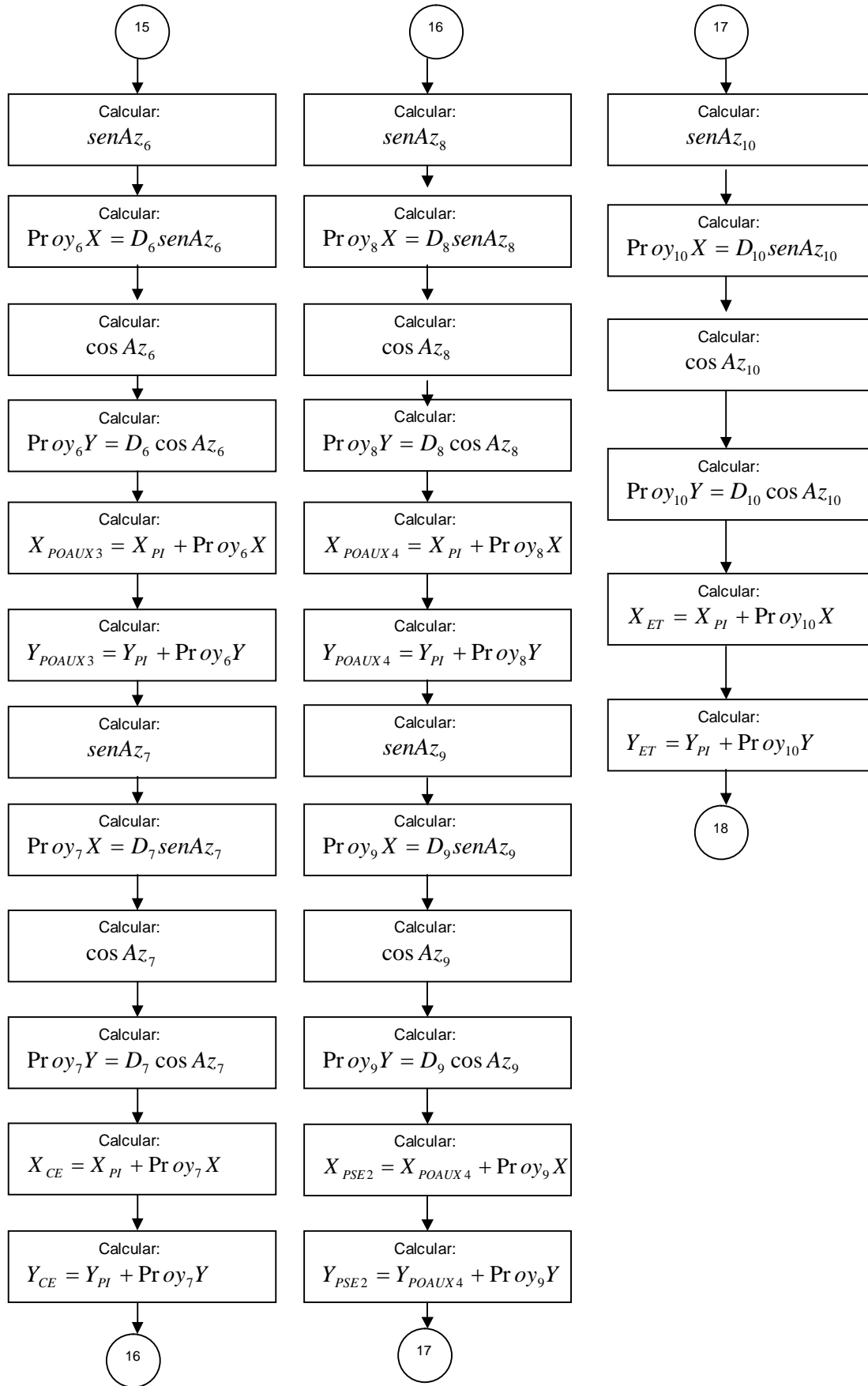


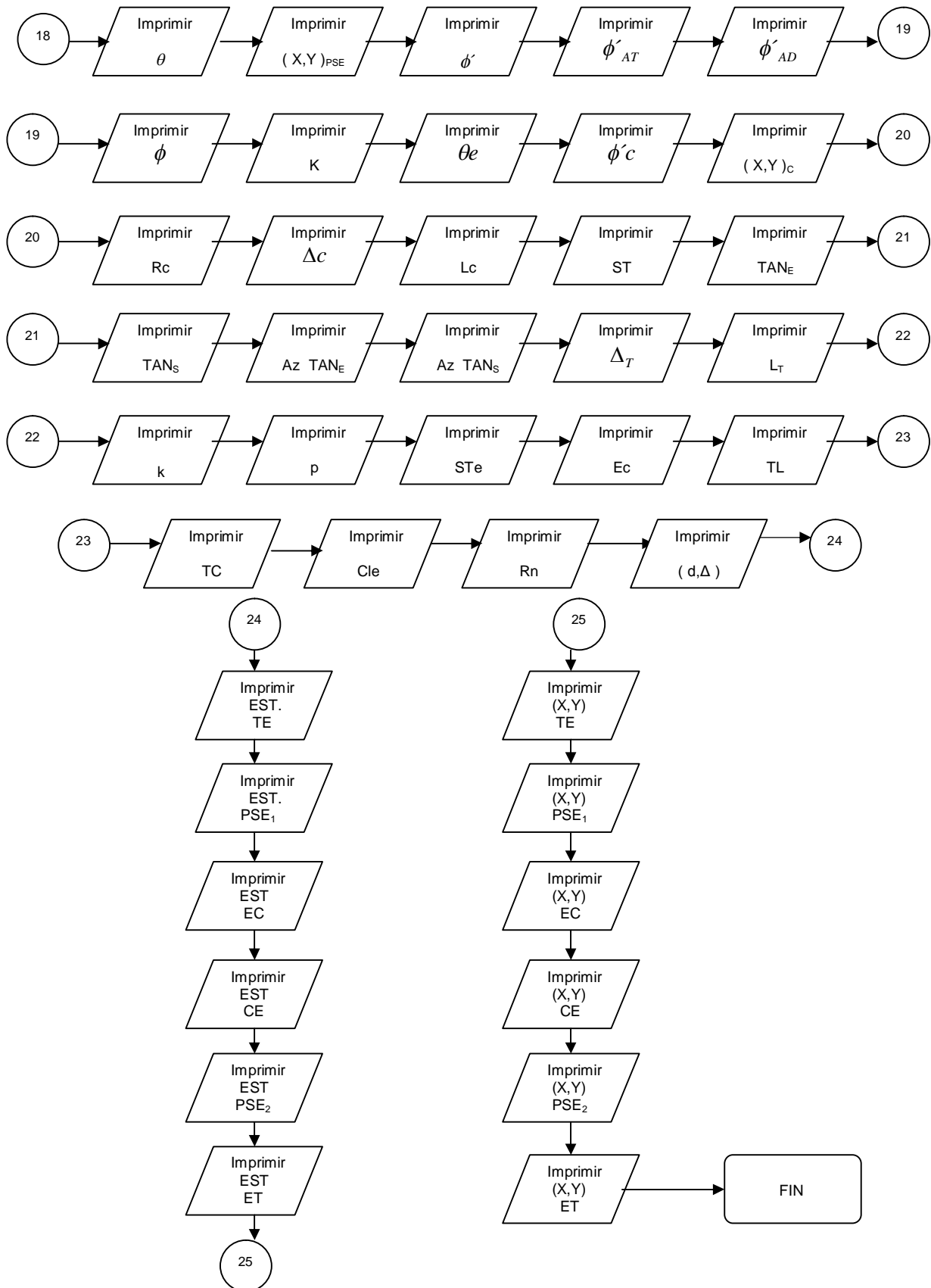












### 5.3 CODIFICACIÓN DEL PROGRAMA EN UN LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN.

En este caso no será necesario realizar la traducción del pseudocódigo a un lenguaje de programación, ya que para obtener los resultados de nuestras ecuaciones, se utilizará el programa Microsoft Office Excel, en el cual, basta con introducir los valores numéricos en las celdas correspondientes y estas se enlazan unas con otras realizando las operaciones de acuerdo con la expresión de cada elemento geométrico.

### 5.4 PRUEBAS REALIZADAS AL PROGRAMA

Es un proceso iterativo relacionado con el paso anterior. Conforme se fue desarrollando cada parte del pseudocódigo, se sometió a una prueba, con el fin de detectar posibles errores más fácilmente.

### 5.5 VALIDACIÓN DEL PROGRAMA

Una vez que se elaboró todo el programa y que funcionaron bien las pruebas, se validará con un ejemplo numérico como se explica a continuación:

#### EJEMPLO NUMÉRICO:

El grado de curvatura ( $G_c$ ) de la curva circular y las coordenadas de los puntos extremos de las tangentes se conocerán una vez que se haya proyectado la ruta óptima.

Conviene aclarar que en ocasiones también  $R_c$  es un dato de entrada con el que inmediatamente calcularemos  $G_c$ , para así poder utilizar nuestro programa.

El radio de curvatura ( $R_c$ ) está en función del grado de curvatura y es inversamente proporcional a este, es decir:

$$R_c = \frac{1145.92}{G_c} \dots\dots\dots(21)$$

Como se dijo anteriormente, el valor de la longitud de la espiral ( $L_e$ ) lo obtendremos de las tablas proporcionadas en el tema 2.2. Mientras que el valor de  $L$  (longitud de las clotoide del origen a un PSE) se elige según las necesidades, siempre que sea menor que  $L_e$ .

Las coordenadas rectangulares de los puntos extremos de las tangentes de entrada y de salida, las obtendremos directamente de la carta topográfica ya sea de papel o digital.

La estación inicial será la que corresponda al punto donde comienza la tangente de entrada.

Los elementos de la curva que se calcularán serán los datos necesarios para elaborar los planos de proyecto. En el caso de los datos necesarios para el trazo en campo, las coordenadas rectangulares y polares de cada punto sobre la clotoide, dependerán del número de cuerdas, que será el adecuado para cada longitud de la espiral ( $Le$ ).

De acuerdo con lo anterior, los datos de nuestro ejemplo numérico serán:

Grado de curvatura de la  
curva circular .....  $G_c = 2.493^\circ$

Longitud de la espiral .....  $Le = 60.0$  m.

Coordenadas del punto donde comienza  
la tangente de entrada .....  $(X,Y)_E = (422\ 175.410 , 2\ 328\ 111.670)$  m.

Coordenadas del punto de  
intersección de las tangentes .....  $(X,Y)_{PI} = (422\ 336.170 , 2\ 328\ 278.033)$  m.

Coordenadas del punto donde  
termina la tangente de salida .....  $(X,Y)_S = (422\ 570.784 , 2\ 328\ 343.114)$  m.

Estación que corresponde al punto  
de la tangente de entrada ... EST. INICIAL =  $2 + 272.872$

Longitud de las clotoide  
del origen a un PSE .....  $L = 10$  m.

Numero de cuerdas para  $Le$  .....  $N = 6$



Obtendremos todos los elementos de la curva, de la siguiente forma:

**Elementos de la clotoide de entrada y de clotoide de salida para una longitud de arco L=10 m.**

1.- Cálculo de la deflexión de la clotoide en un punto P ( $\theta$ ). De la ecuación 22, tenemos que:

$$\theta = \frac{L^2 Gc}{40Le}$$

$$\theta = \frac{(10)^2 2.493}{40(60)}$$

$$\theta = 0.104^\circ = 00^\circ 06' 14.4''$$

2.- Cálculo de las coordenadas de un punto P sobre la clotoide. De las ecuaciones 27, tenemos que:

$$X = \frac{L}{100} \left( 100 - 0.304617\theta^2(10)^{-2} + 0.429591\theta^4(10)^{-7} - 0.301987\theta^6(10)^{-12} \right)$$

$$X = \frac{10}{100} \left( 100 - 0.304617(0.104)^2(10)^{-2} + 0.429591(0.104)^4(10)^{-7} - 0.301987(0.104)^6(10)^{-12} \right)$$

$$X = 10 \text{ m.}$$

$$Y = \frac{L}{100} \left( 0.581776\theta - 0.126585\theta^3(10)^{-4} + 0.122691\theta^5(10)^{-9} - 0.652558\theta^7(10)^{-15} \right)$$

$$Y = \frac{10}{100} \left( 0.5817(0.104) - 0.1265(0.104)^3(10)^{-4} + 0.1226(0.104)^5(10)^{-9} - 0.6525(0.104)^7(10)^{-15} \right)$$

$$Y = 0.006 \text{ m.}$$

3.- Cálculo del ángulo de la cuerda a un punto P ( $\phi'$ ). De la ecuación 42, tenemos que:

$$\phi' = \frac{\theta}{3}$$

$$\phi' = \frac{0.104}{3}$$

$$\phi' = 0.035^\circ = 00^\circ 02' 06''$$

4.- Cálculo del ángulo entre la tangente a un punto P y una cuerda atrás. De la ecuación 45, tenemos que:

$$\begin{aligned}\phi'AT &= \phi - \phi' \\ \phi'AT &= 0.623 - 0.035 \\ \phi'AT &= 0.589^\circ = 0^\circ 35' 20.4''\end{aligned}$$

5.- Cálculo del ángulo entre la tangente a un punto P y una cuerda adelante. De la ecuación 46, tenemos que:

$$\begin{aligned}\phi'AD &= \phi + \phi' \\ \phi'AD &= 0.623 + 0.035 \\ \phi'AD &= 0.658^\circ = 0^\circ 39' 28.8''\end{aligned}$$

6.- Cálculo del ángulo de la cuerda ( $\phi$ ). De la ecuación 48, tenemos que:

$$\phi = \frac{GcL}{40}$$

$$\phi = \frac{(2.493)(10)}{40}$$

$$\phi = 0.623^\circ = 00^\circ 37' 22.8''$$

### **Elementos generales de la clotoide de entrada y clotoide de salida.**

7.- Cálculo del parámetro de la clotoide (K). De la ecuación 50, tenemos que:

$$K = \sqrt{RcLe}$$

$$K = \sqrt{(459.653)(60)}$$

$$K = 166.077$$

8.- Cálculo de la deflexión de la espiral ( $\theta_e$ ). De la ecuación 52, tenemos que:

$$\theta_e = \frac{GcLe}{40}$$

$$\theta_e = \frac{(2.493)(60)}{40}$$

$$\theta_e = 3.739^\circ = 3^\circ 44' 22.2''$$

9.- Cálculo del ángulo de la cuerda larga de la clotoide ( $\phi'c$ ). De la ecuación 53, tenemos que:

$$\phi'c = \frac{\theta e}{3}$$

$$\phi'c = \frac{3.739}{3}$$

$$\phi'c = 1.246^\circ = 1^\circ 14' 45.6''$$

10.- Cálculo de las coordenadas del EC o del CE ( $X_c, Y_c$ ). De las ecuaciones 54, tenemos que:

$$X_c = \frac{Le}{100} \left( 100 - 0.304617\theta e^2 (10)^{-2} \right)$$

$$X_c = \frac{60}{100} \left( 100 - 0.304617(3.739)^2 (10)^{-2} \right)$$

$$X_c = 59.974 \text{ m.}$$

$$Y_c = \frac{Le}{100} \left( 0.581776\theta e - 0.126585\theta e^3 (10)^{-4} \right)$$

$$Y_c = \frac{60}{100} \left( 0.581776(3.739) - 0.126585(3.739)^3 (10)^{-4} \right)$$

$$Y_c = 1.305 \text{ m.}$$

**Los siguientes elementos corresponden a la curva circular.**

11.- Cálculo del radio de la curva circular ( $R_c$ ). De la ecuación 21, tenemos que:

$$R_c = \frac{1145.9156}{G_c}$$

$$R_c = \frac{1145.9156}{2.493}$$

$$R_c = 459.653 \text{ m.}$$

12.- Cálculo de la deflexión de la curva circular ( $\Delta c$ ). De la ecuación 55, tenemos que:

$$\Delta c = \Delta_T - 2\theta e$$

$$\Delta c = 30.478 - 2(3.739)$$

$$\Delta c = 22.999^\circ = 22^\circ 59' 56.4''$$

13.- Cálculo de la longitud de la curva circular ( $L_c$ ). De la ecuación 56, tenemos que:

$$L_c = \frac{20\Delta c}{G_c}$$

$$L_c = \frac{(20)(22.999)}{(2.493)}$$

$$L_c = 184.525 \text{ m.}$$

14.- Cálculo de la subtangente circular ( $ST$ ). De la ecuación 57, tenemos que:

$$ST = R_c \tan\left(\frac{\Delta c}{2}\right)$$

$$ST = 459.692 \tan\left(\frac{22.999}{2}\right)$$

$$ST = 93.522 \text{ m.}$$

**Los siguientes elementos corresponden a la curva circular con clotoides simétricas vista como conjunto:**

15.- Cálculo de la distancia del punto donde comienza la tangente de entrada al PI ( $TAN_E$ ). De la ecuación 69, tenemos que:

$$TAN_E = \sqrt{(X_{PI} - X_E)^2 + (Y_{PI} - Y_E)^2}$$

$$TAN_E = \sqrt{(422336.170 - 422175.410)^2 + (2328278.033 - 2328111.670)^2}$$

$$TAN_E = 231.344 \text{ m.}$$

16.- Cálculo de la distancia del PI al punto donde termina la tangente de salida (TAN<sub>S</sub>). De la ecuación 70, tenemos que:

$$TAN_S = \sqrt{(X_S - X_{PI})^2 + (Y_S - Y_{PI})^2}$$

$$TAN_S = \sqrt{(422570.784 - 422336.170)^2 + (2328343.114 - 2328278.033)^2}$$

$$TAN_S = 243.474 \text{ m.}$$

17.- Cálculo del azimut de la tangente de entrada (AZ<sub>TAN E</sub>). Del tema 4.4, aplicamos la ecuación 71, tenemos que:

$$Az_{TAN E} = \text{ang} \cos \frac{Y_{PI} - Y_E}{TAN_E}$$

$$Az_{TAN E} = \text{ang} \cos \frac{2328278.033 - 2328111.670}{231.344}$$

$$Az_{TAN E} = 44.019^\circ = 44^\circ 01' 8.4''$$

18.- Cálculo del azimut de la tangente de salida (AZ<sub>TAN S</sub>). Del tema 4.4, aplicamos la ecuación 73, tenemos que:

$$Az_{TAN S} = \text{ang} \cos \frac{Y_S - Y_{PI}}{TAN_S}$$

$$Az_{TAN S} = \text{ang} \cos \frac{2328343.114 - 2328278.033}{243.474}$$

$$Az_{TAN S} = 74.496^\circ = 74^\circ 29' 45.6''$$

19.- Cálculo del ángulo de deflexión entre las tangentes Δ<sub>T</sub>. Del tema 4.4, aplicamos la ecuación 75, tenemos que:

$$\Delta_T = Az_{TAN S} - Az_{TAN E}$$

$$\Delta_T = 74.496 - 44.019 = 30.478^\circ = 30^\circ 28' 37.2''$$

20.- Cálculo de la longitud total de la curva circular con espirales ( $L_T$ ). De la ecuación 59, tenemos que:

$$L_T = 2Le + Lc$$

$$L_T = 2(60) + 184.525$$

$$L_T = 304.525 \text{ m.}$$

21.- Cálculo de las coordenadas de PC ó PT ( $k, p$ ). De las ecuaciones 62 y 61, tenemos que:

$$k = Xc - Rcsen \theta e$$

$$k = 59.974 - (459.692)sen(3.739)$$

$$k = 29.996 \text{ m.}$$

$$p = Yc - Rc(1 - \cos \theta e)$$

$$p = 1.305 - (459.692)(1 - \cos(3.739))$$

$$p = 0.327 \text{ m.}$$

22.- Cálculo de la subtangente ( $Ste$ ). De la ecuación 63, tenemos que:

$$Ste = k + (Rc + p) \tan \frac{\Delta_r}{2}$$

$$Ste = 29.996 + (459.692 + 0.327) \tan \frac{30.478}{2}$$

$$Ste = 155.315 \text{ m.}$$

23.- Cálculo de la externa ( $Ec$ ). De la ecuación 64, tenemos que:

$$Ec = (Rc + p) \sec \frac{\Delta_r}{2} - Rc$$

$$Ec = (459.692 + 0.327) \sec \frac{30.478}{2} - 459.692$$

$$Ec = 17.091 \text{ m.}$$

24.- Cálculo de la tangente larga (TL). De la ecuación 65, tenemos que:

$$TL = Xc - Yc \cot \theta e$$

$$TL = 59.974 - 1.305 \cot(3.739)$$

$$TL = 40.001 \text{ m.}$$

25.- Cálculo de la tangente corta (TC). De la ecuación 66, tenemos que:

$$TC = Yc \csc \theta e$$

$$TC = 1.305 \csc(3.739)$$

$$TC = 20.016 \text{ m.}$$

26.- Cálculo de la cuerda larga de la clotoide. De la ecuación 67, tenemos que:

$$CLe = \sqrt{Xc^2 + Yc^2}$$

$$CLe = \sqrt{(59.974)^2 + (1.305)^2}$$

$$CLe = 59.989 \text{ m.}$$

27.- Cálculo del radio nominal. De la ecuación 68, tenemos que:

$$Rn = Rc + p$$

$$Rn = 459.692 + 0.327$$

$$Rn = 460.019 \text{ m.}$$

28.- Para calcular las coordenadas polares (d,Δ) para trazar la clotoide en campo, se tomarán longitudes de arco cada 10 m y utilizaremos las siguientes ecuaciones:

$$\theta = \frac{L^2 Gc}{40Le} \dots\dots\dots(22)$$

$$X = \frac{L}{100} \left( 100 - 0.304\theta^2 (10)^{-2} + 0.429\theta^4 (10)^{-7} - 0.301\theta^6 (10)^{-12} \right) \dots\dots\dots(27)$$

$$Y = \frac{L}{100} \left( 0.581\theta - 0.126\theta^3 (10)^{-4} + 0.122\theta^5 (10)^{-9} - 0.652\theta^7 (10)^{-15} \right)$$

$$d = \sqrt{X_{PSE}^2 + Y_{PSE}^2} \dots\dots\dots(40)$$

$$\Delta = \phi' = \frac{\theta}{3} \dots\dots\dots(44)$$

**Para L=10 m.**

$$\theta = \frac{L^2 Gc}{40Le}$$

$$\theta = \frac{(10)^2 (2.493)}{40(60)}$$

$$\theta = 0.104^\circ$$

$$X = \frac{L}{100} (100 - 0.304\theta^2(10)^{-2} + 0.429\theta^4(10)^{-7} - 0.301\theta^6(10)^{-12})$$

$$X = \frac{10}{100} (100 - 0.304(0.104)^2(10)^{-2} + 0.429(0.104)^4(10)^{-7} - 0.301(0.104)^6(10)^{-12})$$

$$X = 10.000\text{m.}$$

$$Y = \frac{L}{100} (0.581\theta - 0.126\theta^3(10)^{-4} + 0.122\theta^5(10)^{-9} - 0.652\theta^7(10)^{-15})$$

$$Y = \frac{10}{100} (0.581(0.104) - 0.126(0.104)^3(10)^{-4} + 0.122(0.104)^5(10)^{-9} - 0.652(0.104)^7(10)^{-15})$$

$$Y = 0.006 \text{ m.}$$

$$d = \sqrt{X_{PSE}^2 + Y_{PSE}^2}$$

$$d = \sqrt{(10)^2 + (0.006)^2}$$

$$d = 10.000\text{m.}$$

$$\Delta = \phi' = \frac{\theta}{3}$$

$$\Delta = \phi' = \frac{0.104}{3}$$

$$\Delta = \phi' = 0.035^\circ = 0^\circ 02' 06''$$



**Para L=20 m.**

$$\theta = 0.415^\circ$$

$$X = 20.000 \text{ m.}$$

$$Y = 0.048 \text{ m.}$$

$$d = 20.000 \text{ m.}$$

$$\Delta = \phi' = 0.139^\circ = 0^\circ 08' 20.4''$$

**Para L=30 m.**

$$\theta = 0.935^\circ$$

$$X = 29.999 \text{ m.}$$

$$Y = 0.163 \text{ m.}$$

$$d = 30.000 \text{ m.}$$

$$\Delta = \phi' = 0.312^\circ = 0^\circ 18' 43.2''$$

**Para L=40 m.**

$$\theta = 1.662^\circ$$

$$X = 39.997 \text{ m.}$$

$$Y = 0.387 \text{ m.}$$

$$d = 39.998 \text{ m.}$$

$$\Delta = \phi' = 0.554^\circ = 0^\circ 33' 14.4''$$

**Para L=50 m.**

$$\theta = 2.597^\circ$$

$$X = 49.990 \text{ m.}$$

$$Y = 0.755 \text{ m.}$$

$$d = 49.996 \text{ m.}$$

$$\Delta = \phi' = 0.866^\circ = 0^\circ 51' 57.6''$$

**Para L=60 m.**

$$\theta = 3.739^\circ$$

$$X = 59.974 \text{ m.}$$

$$Y = 1.305 \text{ m.}$$

$$d = 59.989 \text{ m.}$$

$$\Delta = \phi' = 1.247^\circ = 1^\circ 14' 49.2''$$

29.- Cálculo de estaciones de los puntos principales de la curva.

Del tema 4.3, sabemos que las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} EST.PI &= EST.INICIAL + TAN_E \\ &= (2 + 272.872) + (231.344) \\ &= \mathbf{2 + 504.216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EST.TE &= EST.PI - Ste \\ &= (2 + 504.216) - (155.315) \\ &= \mathbf{2 + 348.901} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EST.PSE_1 &= EST.TE + L \\ &= (2 + 348.901) + (10) \\ &= \mathbf{2 + 358.901} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EST.EC &= EST.TE + Le \\ &= (2 + 348.901) + (60) \\ &= \mathbf{2 + 408.901} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EST.CE &= EST.EC + Lc \\ &= (2 + 408.901) + (184.526) \\ &= \mathbf{2 + 593.427} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EST.PSE_2 &= EST.CE + Le - L \\ &= (2 + 593.427) + (60) - (10) \\ &= \mathbf{2 + 643.427} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EST.ET &= EST.CE + Le \\ &= (2 + 593.427) + (60) \\ &= \mathbf{2 + 653.427} \end{aligned}$$

30.- Cálculo de las coordenadas topográficas de los puntos principales de la curva.

Para calcular un par de coordenadas, necesitamos las coordenadas de un punto conocido, la dirección (azimut) de la línea que pasa por ambos y la distancia entre estos. Como se explicó en el tema 4.4, se calcularán las coordenadas de 10 puntos y utilizaremos las ecuaciones:

$$Pr_{oy}X = D \sin Az \dots\dots\dots( 87 )$$

$$Pr_{oy}Y = D \cos Az \dots\dots\dots( 88 )$$

$$X_{\text{CALCULADA}} = X_{\text{CONOCIDA}} + \text{Pr oy}X \dots\dots\dots( 89 )$$

$$Y_{\text{CALCULADA}} = Y_{\text{CONOCIDA}} + \text{Pr oy}Y \dots\dots\dots( 90 )$$

**PUNTO 1 (TE).**

Datos:

$$(X,Y)_E = ( 422\ 175.410 , 2\ 328\ 111.670 )$$

$$Az = Az_{TANE} = 44^{\circ}01'8.4''$$

$$D = \text{ESTACIÓN TE} - \text{ESTACIÓN INICIAL} = 76.029 \text{ m.}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Pr oy}X = D \text{sen}Az = 76.029 \text{sen}(44^{\circ}01'8.4'') = 52.832$$

$$\text{Pr oy}Y = D \text{cos}Az = 76.029 \text{cos}(44^{\circ}01'8.4'') = 54.674$$

$$X_{TE} = X_E + \text{Pr oy}X = 422175.410 + 52.832 = 422228.242$$

$$Y_{TE} = Y_E + \text{Pr oy}Y = 2328111.670 + 54.674 = 2328166.344$$

$$\therefore (X,Y)_{TE} = ( 422\ 228.242 , 2\ 328\ 166.344 ) \text{ m.}$$

**PUNTO 2 (PO AUX 1).**

Datos:

$$(X,Y)_{TE} = ( 422\ 228.242 , 2\ 328\ 166.344 )$$

$$Az = Az_{TANE} = 44^{\circ}01'8.4''$$

$$D = X_{PSE} = 10 \text{ m.}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Pr oy}X = D \text{sen}Az = 10 \text{sen}(44^{\circ}01'8.4'') = 6.949$$

$$\text{Pr oy}Y = D \text{cos}Az = 10 \text{cos}(44^{\circ}01'8.4'') = 7.191$$

$$X_{POAUX1} = X_{TE} + \text{Pr oy}X = 422228.242 + 6.949 = 422235.191$$

$$Y_{POAUX1} = Y_{TE} + \text{Pr oy}Y = 2328166.344 + 7.191 = 2328173.535$$

$$\therefore (X,Y)_{POAUX1} = ( 422\ 235.191 , 2\ 328\ 173.535 ) \text{ m.}$$

**PUNTO 3 ( PSE 1 ).**

Datos:

$$(X,Y)_{PO\ AUX\ 1} = (422\ 235.191 , 2\ 328\ 173.535 )$$

$$Az = Az_{Yc1} = 134^{\circ}01'8.4''$$

$$D = Y_{PSE} = 0.006\ m.$$

Sustituyendo valores:

$$Pr\ oyX = D\ senAz = 0.006\ sen(134^{\circ}01'8.4'') = 0.004$$

$$Pr\ oyY = D\ cos\ Az = 0.006\ cos(134^{\circ}01'8.4'') = -0.004$$

$$X_{PSE1} = X_{POAUX1} + Pr\ oyX = 422235.191 + 0.004$$

$$Y_{PSE1} = Y_{POAUX1} + Pr\ oyY = 2328173.535 - 0.004$$

$$\therefore (X,Y)_{PSE\ 1} = ( 422\ 2355.195 , 2\ 328\ 173.531 )\ m.$$

**PUNTO 4 ( PO AUX 2 ).**

Datos:

$$(X,Y)_{TE} = ( 422\ 228.242 , 2\ 328\ 166.344 )$$

$$Az = Az_{TANE} = 44^{\circ}01'8.4''$$

$$D = Xc = 59.974\ m.$$

Sustituyendo valores:

$$Pr\ oyX = D\ senAz = 59.974\ sen(44^{\circ}01'8.4'') = 41.676$$

$$Pr\ oyY = D\ cos\ Az = 59.974\ cos(44^{\circ}01'8.4'') = 43.128$$

$$X_{POAUX2} = X_{TE} + Pr\ oyX = 422228.242 + 41.676 = 422269.918$$

$$Y_{POAUX2} = Y_{TE} + Pr\ oyY = 2328166.344 + 43.128 = 2328209.472$$

$$\therefore (X,Y)_{PO\ AUX\ 2} = ( 422\ 269.918 , 2\ 328\ 209.472 )\ m.$$

**PUNTO 5 ( EC ).**

Datos:

$$(X,Y)_{PO\ AUX\ 2} = (422\ 269.918 , 2\ 328\ 209.472 )$$

$$Az = Az_{Yc1} = 134^{\circ}01'8.4''$$

$$D = Yc = 1.305\ m.$$

Sustituyendo valores:

$$Pr\ oyX = D\ senAz = 1.305\ sen(134^{\circ}01'8.4'') = 0.939$$

$$Pr\ oyY = D\ cos\ Az = 1.305\ cos(134^{\circ}01'8.4'') = -0.907$$

$$X_{EC} = X_{POAUX2} + Pr\ oyX = 422269.918 + 0.939 = 422270.856$$

$$Y_{EC} = Y_{POAUX2} + Pr\ oyY = 2328209.472 - 0.907 = 2328208.565$$

$$\therefore (X,Y)_{EC} = ( 422\ 270.856 , 2\ 328\ 208.565 )\ m.$$

**PUNTO 6 ( PO AUX 3 ).**

Datos:

$$(X,Y)_{PI} = ( 422\ 336.170 , 2\ 328\ 278.033 )$$

$$Az = Az_{TANS} = 74^{\circ}29'45.6''$$

$$D = STe - Xc = 95.341\ m.$$

Sustituyendo valores:

$$Pr\ oyX = D\ senAz = 95.341\ sen(74^{\circ}29'45.6'') = 91.871$$

$$Pr\ oyY = D\ cos\ Az = 95.341\ cos(74^{\circ}29'45.6'') = 25.485$$

$$X_{POAUX3} = X_{PI} + Pr\ oyX = 422336.170 + 91.871 = 422428.040$$

$$Y_{POAUX3} = Y_{PI} + Pr\ oyY = 2328278.033 + 25.485 = 2328303.518$$

$$\therefore (X,Y)_{PO\ AUX\ 3} = ( 422\ 428.040 , 2\ 328\ 303.518 )\ m.$$

**PUNTO 7 (CE).**

Datos:

$$(X,Y)_{POAUX3} = (422\ 428.040 , 2\ 328\ 303.518)$$

$$Az = Az_{Yc_2} = 164^{\circ}29'45.6''$$

$$D = Yc = 1.305 \text{ m.}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Pr oy}X = D \text{sen}Az = 1.305 \text{sen}164^{\circ}29'45.6'' = 0.349$$

$$\text{Pr oy}Y = D \cos Az = 1.305 \cos 164^{\circ}29'45.6'' = -1.258$$

$$X_{CE} = X_{POAUX3} + \text{Pr oy}X = 422428.040 + 0.349 = 422428.389$$

$$Y_{CE} = Y_{POAUX3} + \text{Pr oy}Y = 2328303.518 - 1.258 = 2328302.260$$

$$\therefore (X,Y)_{CE} = (422\ 428.389 , 2\ 328\ 302.260) \text{ m.}$$

**PUNTO 8 (PO AUX 4).**

Datos:

$$(X,Y)_{PI} = (422\ 336.170 , 2\ 328\ 278.033)$$

$$Az = Az_{TANS} = 74^{\circ}29'45.6''$$

$$D = STe - X_{PSE} = 145.315 \text{ m.}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Pr oy}X = D \text{sen}Az = 145.315 \text{sen}(74^{\circ}29'45.6'') = 140.027$$

$$\text{Pr oy}Y = D \cos Az = 145 \cos(74^{\circ}29'45.6'') = 38.843$$

$$X_{POAUX4} = X_{PI} + \text{Pr oy}X = 422336.170 + 140.027 = 422476.196$$

$$Y_{POAUX4} = Y_{PI} + \text{Pr oy}Y = 2328278.033 + 38.843 = 2328316.876$$

$$\therefore (X,Y)_{POAUX4} = (422\ 476.196 , 2\ 328\ 316.876) \text{ m.}$$

**PUNTO 9 (PSE 2).**

Datos:

$$(X,Y)_{POAUX4} = (422\,476.196, 2\,328\,316.876)$$

$$Az = Az_{Yc_2} = 164^\circ 29' 45.6''$$

$$D = Y_{PSE} = 0.006 \text{ m.}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Pr oy}X = D \text{sen}Az = 0.006 \text{sen}(164^\circ 29' 45.6'') = 0.002$$

$$\text{Pr oy}Y = D \text{cos}Az = 0.006 \text{cos}(164^\circ 29' 45.6'') = -0.006$$

$$X_{PSE2} = X_{POAUX4} + \text{Pr oy}X = 422476.196 + 0.002 = 422476.198$$

$$Y_{PSE2} = Y_{POAUX4} + \text{Pr oy}Y = 2328316.876 - 0.006 = 2328316.870$$

$$\therefore (X,Y)_{PSE2} = (422476.198, 2\,328\,316.870) \text{ m.}$$

**PUNTO 10 (ET).**

Datos:

$$(X,Y)_{PI} = (422\,336.170, 2\,328\,278.033)$$

$$Az = Az_{TANS} = 74^\circ 29' 45.6''$$

$$D = S_{Te} = 155.315 \text{ m.}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Pr oy}X = D \text{sen}Az = 155.315 \text{sen}(74^\circ 29' 45.6'') = 149.663$$

$$\text{Pr oy}Y = D \text{cos}Az = 155.315 \text{cos}(74^\circ 29' 45.6'') = 41.516$$

$$X_{ET} = X_{PI} + \text{Pr oy}X = 422336.170 + 149.663 = 422485.832$$

$$Y_{ET} = Y_{PI} + \text{Pr oy}Y = 2328278.033 + 41.516 = 2328319.549$$

$$\therefore (X,Y)_{ET} = (422\,485.832, 2\,328\,319.549) \text{ m.}$$

Todos los resultados se resumen y clasifican en las siguientes tablas:

$\theta$	$\phi$	$\phi'$	$\phi'_{AD}$	$\phi'_{AT}$	$X_{PSE}$ (m)	$Y_{PSE}$ (m)
0°06'14.4"	0°37'22.8"	0°02'06"	0°39'28.8"	0°35'20.4"	10.000	0.006

Tabla 14. Elementos de la clotoide para una longitud de arco L=10 m.

K	$\theta_e$	$\phi'_c$	$X_c$ (m)	$Y_c$ (m)
166.077	3°44'22.2"	1°14'45.6"	59.974	1.305

Tabla 15. Elementos generales de la clotoide.

$\Delta_c$	$L_c$ (m)	ST (m)
22°59'56.4"	184.525	93.522

Tabla 16. Elementos de la curva circular.

$TAN_E$ (m)	$TAN_S$ (m)	$AZ_{TAN E}$	$AZ_{TAN S}$	$\Delta_T$	$L_T$ (m)
231.344	243.474	44°01'8.4"	74°29'45.6"	30°28'37.2"	304.525

k (m)	p (m)	STe (m)	Ec (m)	TL (m)	TC (m)	CLe (m)	Rn(m)
29.996	0.327	155.315	17.091	40.001	20.016	59.989	460.019

Tabla 17. Elementos de la curva circular con clotoides simétricas en conjunto.



ESTACIÓN	No. PUNTO	LONGITUD ARCO (m)	COORD. X (m)	COORD. Y (m)	CUERDA d (m)	DEFLEXIÓN $\Delta$
TE 2+272.872	0	0	0.000	0.000	0.000	00°00'00 "
282.872	1	10	10.000	0.006	10.000	00°02'06 "
292.872	2	20	20.000	0.048	20.000	00°08'20.4 "
302.872	3	30	29.999	0.163	30.000	00°18'43.2 "
312.872	4	40	39.997	0.387	39.998	00°33'14.4 "
322.872	5	50	49.990	0.755	49.996	00°51'57.6 "
EC 2+332.872	6	60	59.974	1.305	59.989	01°14'49.2 "

Tabla 18. Coordenadas polares de la clotoide de entrada.

ESTACIÓN	No. PUNTO	LONGITUD ARCO (m)	COORD. X (m)	COORD. Y (m)	CUERDA d (m)	DEFLEXIÓN $\Delta$
ET 2+653.427	0	0	0.000	0.000	0.000	00°00'00 "
643.427	1	10	10.000	0.006	10.000	00°02'06 "
633.427	2	20	20.000	0.048	20.000	00°08'20.4 "
623.427	3	30	29.999	0.163	30.000	00°18'43.2 "
613.427	4	40	39.997	0.387	39.998	00°33'14.4 "
603.427	5	50	49.990	0.755	49.996	00°51'57.6 "
CE 2+593.427	6	60	59.974	1.305	59.989	01°14'49.2 "

Tabla 19. Coordenadas polares de la clotoide de salida.

PUNTO	ESTACIÓN	COORDENADA X (m)	COORDENADA Y (m)
TE	2+ 348.901	422 228.242	2 328 166.344
PSE 1	2+358.901	422 235.195	2 328 173.531
EC	2+408.901	422 270.856	2 328 208.565
CE	2+593.427	422 428.389	2 328 302.260
PSE 2	2+643.427	422476.198	2 328 316.870
ET	2+653.427	422 485.832	2 328 319.549

Tabla 20. Estaciones y coordenadas topográficas de los puntos principales.

En la figura 39 se muestra la curva circular con clotoides simétricas. En ella, las curvas de transición se distinguen ya que muestran los puntos cuyas coordenadas fueron calculadas con el software desarrollado. La línea que une los puntos principales es el eje de proyecto. Este dibujo se hizo con el programa autocad.

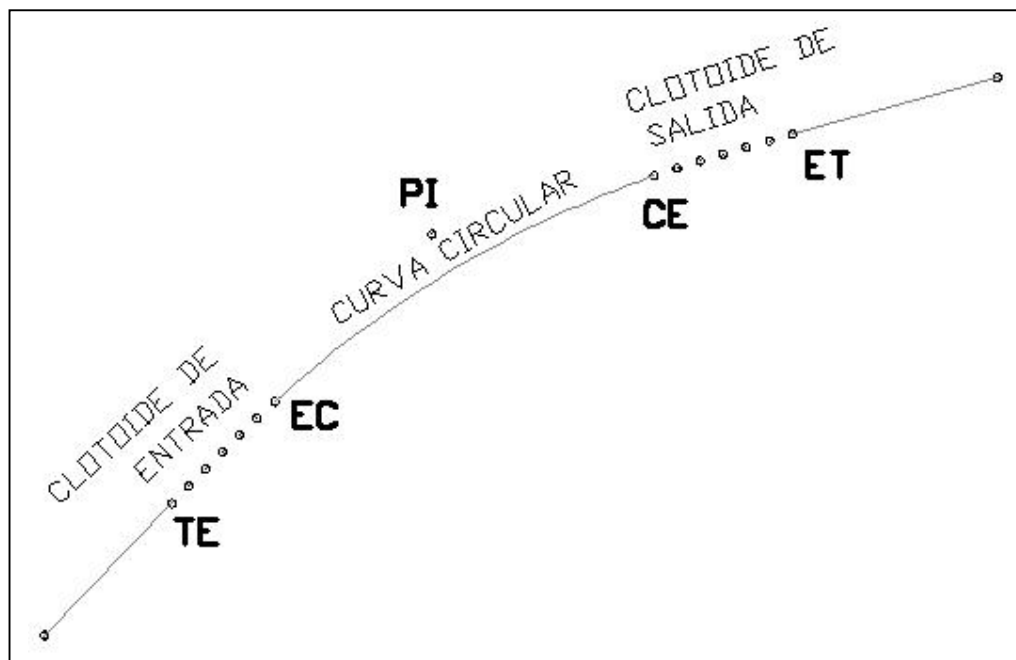


Figura 39

## CAPITULO 6

### INSTRUCCIONES PARA EL USO DEL SOFTWARE

#### 6.1 FORMATO DE LOS DATOS DE ENTRADA

En el tema 5.5 se explicó el procedimiento para obtener los datos de entrada, ahora el formato para introducir cada uno de estos al programa es:

- 1.-El grado de curvatura ( $G_c$ ) se introduce en grados decimales.
- 2.-La longitud de la espiral ( $L_e$ ) se introduce con milésimas de punto y las unidades son metros.
- 3.-Coordenadas del punto donde comienza la tangente de entrada  $(X, Y)_E$  se introducen con milésimas de punto y las unidades son metros.
- 4.-Coordenadas del punto de intersección de las tangentes  $(X, Y)_{PI}$  se introducen con milésimas de punto y las unidades son metros.
- 5.-Coordenadas del punto donde termina la tangente de salida  $(X, Y)_S$  se introducen con milésimas de punto y las unidades son metros.
- 6.-Estación que corresponde al punto de la tangente de entrada (EST. INICIAL). Se introduce el número de kilómetro y el número de metros con milésimas de punto.
- 7.-Longitud de las clotoide del origen a un PSE ( $L$ ). Se introduce con milésimas de punto y las unidades son metros.
- 8.-Número de cuerdas en que se divide  $L_e$  ( $N$ ). Es un número que se introduce sin decimales.

Estos datos se introducen en el cuadro superior que muestra el programa.

#### 6.2 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS ENTREGADOS POR EL PROGRAMA

El programa entrega los resultados indicando las unidades de cada uno y agrupándolos de acuerdo con la clasificación de elementos geométricos vista en el tema 4.5.

## CONCLUSIÓN

La presente tesis es una introducción a la proyección y trazo de curvas en una vía de comunicación tan importante como lo es una carretera, debido a esto, todos aquellos profesionales que deseen continuar su carrera en este campo, deben continuar sus estudios más ampliamente. El reto más importante para un proyectista es elegir la mejor ruta para construir esta vía, ya que se deben tomar en cuenta varios factores importantes, como lo son: el costo, impacto al ambiente, tiempo de construcción, calidad de materiales, ubicación de bancos de material, fácil acceso de maquinaria durante la construcción, tiempo de trabajo, derecho de vía, entre muchos otros. Una vez que se seleccionó la mejor ruta posible, el calcular los elementos geométricos para darle forma definitiva al proyecto, es un proceso que puede automatizarse gracias a la programación. Por ello, aquí se ha explicado un ejemplo de las muchas maneras en que podemos complementar nuestros conocimientos en topografía y proyecto geométrico con los conceptos de programación para así desarrollar nuestros propios programas de acuerdo con nuestros requerimientos.

Para que el usuario obtenga los resultados, en el ejemplo propuesto se ha utilizado el formato de hoja de cálculo (Excel) y algunas aplicaciones de Visual Basic. Sin embargo existen lenguajes de programación que pueden usarse para esta misma aplicación (Visual Basic, C, C++, Java, solo por mencionar algunos), aunque como sabemos, estos lenguajes quedan obsoletos y descontinuados conforme pasa el tiempo y lo que se pretende es que el lector capte la uniformidad de la computación y la utilice como una herramienta valiosa en la proyección y trazo de carreteras.

El impacto del trabajo del ingeniero en Geomática, que aplique sus conocimientos en Topografía y Computación para proyección y trazo de carreteras, puede resumirse en:

- 1.- Conservar en buen estado la red carretera existente para asegurar el servicio eficaz y permanente.
2. Construir nuevas carreteras que sirvan a núcleos de población actualmente incomunicados.
- 3.- Construir obras que mejoren el sistema carretero en zonas ya comunicadas, cuando la demanda así lo requiera.

El crecimiento de una red de carreteras y el uso cada vez más intenso al que se encuentra sujeta, obligan a otorgar una particular atención a su construcción y conservación dentro de los programas de inversiones. Por ello es importante que de manera permanente, el ingeniero en Geomática actualice sus conocimientos en estas y demás áreas involucradas.

## GLOSARIO DE TÉRMINOS

### A

**Abscisa.** Es la coordenada X en un sistema cartesiano (o rectangular).

**Aceleración.** Es una magnitud vectorial que nos indica el ritmo o tasa con que aumenta o disminuye la velocidad de un móvil en función del tiempo.

**Acotamiento.** Faja contigua a la calzada comprendida entre su orilla y la línea de hombros de una carretera.

**Alineamiento Horizontal.** Proyección del eje de proyecto de una carretera sobre un plano horizontal.

**Ampliación.** Es un sobreaño adicional que se le da tanto a la calzada como a la corona respecto al ancho en la tangente.

**Ángulo.** Se denomina ángulo, en el plano, a la porción de éste comprendida entre dos semirrectas que tienen un origen común denominado vértice.

**Arco.** Es una sección de la circunferencia

**Azimut.** Angulo que forma una línea con la dirección Norte - Sur, medido de 0° a 360° a partir del norte, en el sentido del movimiento del reloj.

### B

**Bombeo.** Pendiente transversal que desciende de la corona o subcorona a partir de su eje y hacia ambos lados en tangente horizontal.

### C

**Cadenamientos.** Es el kilometraje de las estaciones correspondientes a las secciones en estudio, es decir a cada 20 m y en los puntos de interés.

**Calzada.** Parte de la corona destinada al tránsito de vehículos.

**Cero.** En sección transversal, punto de intersección de las líneas definidas por el talud del terraplén o del corte y el terreno natural.

**Configuración.** Forma, relieve, accidentes o características tridimensionales de la superficie terrestre.

**Coordenadas rectangulares.** Es un sistema de referencia dos ejes (plano), o tres ejes (en el espacio), perpendiculares entre sí (plano y espacio), que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas.

**Corona.** Superficie terminada de una carretera comprendida entre sus hombros.

**Cuerda.** Es un segmento de línea cuyos extremos son dos puntos del círculo.

## D

**Deflexión.** Desviación de una línea horizontal.

**Divergencia.** Situación de dos líneas que se van apartando una de otra.

## E

**Ecuación.** Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.

## F

**Fuerza centrífuga.** Es la que tiende a alejar los objetos del centro de rotación del eje mediante la velocidad tangencial, perpendicular al radio, en un movimiento circular.

**Fuerza centrípeta.** Es la fuerza que tira de un objeto hacia el centro de un camino circular mientras que el objeto sigue dicha trayectoria a una rapidez constante

## N

**Normal.** Es un vector perpendicular a todos los vectores contenidos en un plano dado.

## O

**Ordenada.** Es la coordenada Y en un sistema cartesiano (o rectangular).

**P**

**Peralte.** Pendiente transversal en curvas horizontales.

**Programación.** Consiste en desarrollar programas a pequeña escala para procesar información.

**Proyección.** Es el producto de la distancia por el coseno y el seno del azimut correspondiente.

**R**

**Radio.** El radio de una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto llamado centro.

**S**

**Sobreelevación.** Es la pendiente que se le da a la corona hacia el centro de la curva horizontal para contrarrestar parcialmente el efecto de la fuerza centrífuga del vehículo.

**Subcorona.** es la superficie que limita las tercerías y sobre lo que apoyan las capas del pavimento.

**Subtangente.** Es la distancia entre el punto donde comienza o termina la curva y el PI.

**Subtender.** Unir los extremos de un arco o línea.

**T**

**Talud.** Es la superficie comprendida entre la línea de ceros y el hombro correspondiente, se fijan de acuerdo con la naturaleza del material que los forman.

**Tangente.** Es una recta que solo tiene un punto en común con una curva, es decir la *toca* en un solo punto, que se llama punto de tangencia.

**Topografía.** Ciencia de la determinación de las dimensiones y características tridimensionales de la superficie terrestre a través de la medición de distancias, direcciones y elevaciones.

**Transversal.** Proyección de una sección de un objeto que se ha realizado mediante un corte perpendicular al eje largo del mismo.

**Trayectoria.** Es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

**Trazo.** Procedimiento para situar en el terreno puntos y detalles tomados del plano y deducidos del estudio que se realice sobre el mismo.

**Trigonometría.** Es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.

## V

**Vector.** Magnitud física con longitud, dirección y sentido definidos

**Velocidad.** Es una magnitud física de carácter vectorial que expresa el desplazamiento de un objeto por unidad de tiempo.



## BIBLIOGRAFÍA

### **TOPOGRAFÍA**

Miguel Montes de Oca  
Alfaomega

### **TOPOGRAFÍA**

Jack McCormac  
Limusa Wiley

### **PRACTICAS DE TOPOGRAFÍA, CARTOGRAFÍA Y FOTOGRAMETRÍA**

Francisco Valdés Doménech  
Biblioteca CEAC del topógrafo.

### **DIAGRAMAS DE FLUJO**

Mario V. Farina  
Diana Técnico

### **INTRDUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN**

Ramón A. Mata Toledo  
Mc Graw Hill

### **FISICA CONCEPTUAL Novena Edición**

Paul G Hewitt  
PEARSON ADDISON WESLEY

### **NORMAS DE SERVICIOS TÉCNICOS PARA PROYECTO GEOMÉTRICO DE CARRETERAS**

Publicado por la SCT México 1984

### **MANUAL DE PROYECTO GEOMÉTRICO DE CARRETERAS**

Secretaría de Obras Públicas  
México, 1971

<http://www.arqhys.com/contenidos/transicion-curvas.html>

[http://www.carreteros.org/normativa/trazado/3\\_1ic/apartados/4\\_4.htm](http://www.carreteros.org/normativa/trazado/3_1ic/apartados/4_4.htm)

<http://doblevia.wordpress.com/2007/09/03/curvas-espiales-de-transicion/>

<http://www.geocities.com/topografiaycarreteras/CAPITULO4.htm>

**DATOS DE ENTRADA PARA EL PROGRAMA**

<b>Gc (m)</b>	<b>Le (m)</b>	<b>X<sub>E</sub> (m)</b>	<b>Y<sub>E</sub> (m)</b>	<b>X<sub>PI</sub> (m)</b>	<b>Y<sub>PI</sub> (m)</b>
2.493	60.000	422175.410	2328111.670	422336.169	2328278.033
<b>X<sub>S</sub> (m)</b>	<b>Y<sub>S</sub> (m)</b>	<b>Est.Inicial (km+m)</b>	<b>L (m)</b>	<b>N</b>	
422570.784	2328343.114	2+272.872	10.000	6	

**ELEMENTOS DE LA CLOTOIDE PARA UN PUNTO PARTICULAR (P)**

<b>θ (°)</b>	<b>φ (°)</b>	<b>φ' (°)</b>	<b>φ' AD (°)</b>	<b>φ' AT (°)</b>	<b>X<sub>PSE</sub> (m)</b>	<b>Y<sub>PSE</sub> (m)</b>
0.104	0.623	0.035	0.658	0.589	10.000	0.006

**ELEMENTOS GENERALES DE LA CLOTOIDE PARA UNA LONGITUD (Le)**

<b>K</b>	<b>θ<sub>e</sub> (°)</b>	<b>φ' c (°)</b>	<b>X<sub>c</sub> (m)</b>	<b>Y<sub>c</sub> (m)</b>
166.077	3.739	1.246	59.974	1.305

**ELEMENTOS DE LA CURVA CIRCULAR**

<b>R<sub>c</sub> (m)</b>	<b>Δ<sub>c</sub> (°)</b>	<b>L<sub>c</sub> (m)</b>	<b>ST (m)</b>
459.692	22.999	184.526	93.522

**ELEMENTOS DE LA CURVA CIRCULAR CON CLOTOIDES SIMÉTRICAS (COMO CONJUNTO)**

<b>TAN<sub>E</sub> (m)</b>	<b>TAN<sub>S</sub> (m)</b>	<b>Az TAN<sub>E</sub></b>	<b>Az TAN<sub>S</sub></b>	<b>Δ<sub>T</sub></b>	<b>L<sub>T</sub></b>	<b>k</b>
231.344	243.474	44.019	74.496	30.478	304.526	29.996
<b>p</b>	<b>Ste</b>	<b>Ec</b>	<b>TL</b>	<b>TC</b>	<b>Cle</b>	<b>Rn</b>
0.327	155.315	17.091	40.001	20.016	59.989	460.019

**COORDENADAS POLARES PARA TRAZAR LA CLOTOIDE DE ENTRADA EN CAMPC**

	ESTACIÓN	No. DE PUNTO	LONG. DE ARCO	COORD. X	COORD. Y	CUERDA d	DEFLEXIÓN Δ °	DEFLEXION Δ		
								°	'	"
TE	2+272.872	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00
	2+282.872	1	10	10.000	0.006	10.000	0.035	0.000	2	4.64
	2+292.872	2	20	20.000	0.048	20.000	0.138	0.000	8	18.56
	2+302.872	3	30	29.999	0.163	30.000	0.312	0.000	18	41.76
	2+312.872	4	40	39.997	0.387	39.999	0.554	0.000	33	14.24
	2+322.872	5	50	49.990	0.756	49.995	0.866	0.000	51	56.00
EC	2+332.872	6	60	59.974	1.305	59.989	1.246	1.000	14	47.04
#####	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#####
#####	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#####
#####	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#####

**COORDENADAS POLARES PARA TRAZAR LA CLOTOIDE DE SALIDA EN CAMPC**

	ESTACIÓN	No. DE PUNTO	LONG. DE ARCO	COORD. X	COORD. Y	CUERDA d	DEFLEXIÓN Δ	DEFLEXION Δ		
								°	'	"
ET	2+653.427	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00
	2+643.427	1	10	10.000	0.006	10.000	0.035	0.000	2	4.64
	2+633.427	2	20	20.000	0.048	20.000	0.138	0.000	8	18.56
	2+623.427	3	30	29.999	0.163	30.000	0.312	0.000	18	41.76
	2+613.427	4	40	39.997	0.387	39.999	0.554	0.000	33	14.24
	2+603.427	5	50	49.990	0.756	49.995	0.866	0.000	51	56.00
CE	2+593.427	6	60	59.974	1.305	59.989	1.246	1.000	14	47.04
#####	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#####
#####	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#####
#####	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#i VALOR!	#####

**ESTACIONES Y COORDENADAS DE LOS PUNTOS PRINCIPALES DE LA CURVA**

	ESTACIÓN	DISTANCIA	(Az)	SEN (Az)	PROY X	COS (Az)	PROY Y	X	Y	
TE	2+348.901	76.029	44.019	0.695	52.832	0.719	54.674	422228.242	2328166.344	TE
PO AUX		10.000	44.019	0.695	6.949	0.719	7.191	422235.191	2328173.535	
PSE <sub>1</sub>	2+358.901	0.006	134.019	0.719	0.004	-0.695	-0.004	422235.195	2328173.531	PSE <sub>1</sub>
PO AUX		59.974	44.019	0.695	41.676	0.719	43.128	422269.918	2328209.472	
EC	2+408.901	1.305	134.019	0.719	0.939	-0.695	-0.907	422270.856	2328208.565	EC
PI	2+504.216							422336.169	2328278.033	
PO AUX		95.341	74.496	0.964	91.871	0.267	25.485	422428.040	2328303.518	
CE	2+593.427	1.305	164.496	0.267	0.349	-0.964	-1.258	422428.389	2328302.260	CE
PO AUX		145.315	74.496	0.964	140.027	0.267	38.843	422476.196	2328316.876	
PSE <sub>2</sub>	2+643.427	0.006	164.496	0.267	0.002	-0.964	-0.006	422476.198	2328316.870	PSE <sub>2</sub>
ET	2+653.427	155.315	74.496	0.964	149.663	0.267	41.516	422485.832	2328319.549	ET

