UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas m-coloreadas con ciertas subdigráficas 2-coloreadas

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ

DIRECTORA DE LA TESINA: DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F. Octubre, 2009

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A DIOS le agradezco el gran regalo que me dio, el haber nacido en este mundo es el mejor obsequio que me pudo haber dado; gracias por sostenerme en los momentos más difíciles de mi vida, gracias por compartir un poco de tu infinita sabiduría conmigo. Gracias DIOS por seguir llenando mi cuerpo con aliento de vida cada día que pasa; pero sobre todo, agradezco el inconmensurale amor que sé que me tienes.

A mis padres les agradezco infinitamente el que me hayan dado una buena educación tanto académica como humana, por su apoyo incondicional, por su gran amor y comprensión, pero sobre todo les agradezco el haber hecho de mi una persona que hace las cosas por amor y no por conveniencia. Gracias mamá por todos los sacrificios que hiciste para que yo esté en este lugar.

A Laura Pastrana R. le agradezco el que me haya recibido como su pupila desde que terminé la carrera, gracias por sembrar em mi corazón el amor por las gráficas, gracias por seguir compartiendo conmigo todos tus conocimientos, tanto científicos como humanos; pero más aún, gracias por la confianza que siempre has mostrado hacia mi persona y por tu amistad inigualable. Gracias Laurita por todo el apoyo que he recibido de tu parte durante todos estos años.

A mis hermanos les agradezco su apoyo, su comprensión, sus observaciones, sus regaños; pero lo que más les agradezco es que siempre han estado a mi lado.

A mi gran amigo David Chan le doy las gracias por haberme presentado al amor de mi vida. Gracias David por estar siempre a mi lado, gracias por mostrarme que en esta vida y en la otra hay alguien que me ama y que está esperandome con los brazos abiertos, gracias por quererme tanto sin merecerlo, gracias por ser tú "David Chan Carrasco", gracias por todo.

A mis amigos les doy las gracias por el apoyo brindado en cada una de las actividades que compartimos dentro y fuera de las aulas; y sobre todo, les doy las gracias por darme la oportunidad de convivir con todos ustudes. Gracias amigos por compartir varios momentos agradables conmigo: Lidia, César, Israel, Kernel, Brenda, Roxana, Cintia, Gasde, Irma.

A Lucia H. le agradezco que me haya brindado su amistad incondicional, le agradezco sus observaciones muy pertinentes hacia mi persona en distintas situcaciones de mi estado emocional, agradezco que haya compartido conmigo sus sabios consejos, los cuales hicieron que cambiase mi percepción hacia algunas situaciones de la vida, agradezco que se haya preocupado por que yo tuviera un lugar donde trabajar durante la realización de mis estudios de Maestría. Gracias Luci por preocuparte por mi, siempre te llevo en mi corazón, y personas como tu hay pocas en este mundo.

Le doy las gracias a Hortensia Galeana Sánchez por permitirme trabajar con ella y por la confianza que ha depositado en mi.

Le doy las gracias al Dr. Rodolfo San Agustín Chi por haber revisado la presente tesina y por sus observaciones muy pertinentes hacia la misma, las cuales ayudaron a mejorar la redacción del trabajo.

Finalmente, le doy las gracias a CONACYT por el apoyo económico que me brindo para que yo pudiese realizar mis estudios de Maestría sin la más mínima preocupación.

Aunque me has hecho ver muchas angustias y males, restaurarás mi vida, me levantarás de nuevo de los abismos de la tierra. Aumentarás mi grandeza, y volverás a consolarme. (Sal. 71:20)

Índice general

Introducción

Una Digráfica D consiste de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, denotado por V(D), y un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de V(D) llamadas las flechas de D, denotado por F(D).

Este trabajo está enfocado principalmente en dar a conocer algunos de los problemas que se trabajarán en el doctorado, en el área de la teoría de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas m-coloreadas. Una trayectoria dirigida es monocromática si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color. Un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en una digráfica D cuyas flechas van a estar coloreadas con m-colores distintos es un subconjunto N de los vértices de D que cumple con: (1) para cualquier par de vértices en N no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre ellos, (2) para cualquier vértice x fuera de N existe un vértice z en N tal que hay una trayectoria dirigida monocromática de x a z.

En los preliminares daremos las definiciones básicas de la teoría de digráficas, así como un par de resultados que son de gran relevancia en dicha teoría.

El capítulo 1 consiste de tres secciones; en la primera sección se da una pequeña introducción a la teoría de núcleos. Un **núcleo** *N de una digráfica D es un subconjunto de los vértices de D que cumple con lo siguiente: (1) para todo par de vértices x y k en N no existen flechas entre ellos, (2) para cualquier vértice z en D que no pertenezca a N existe un vértice w en N tal que (z,x) es una flecha de D. También, veremos un par de resultados concernientes a la teoría de núcleos, los cuales son de gran interés por sus aplicaciones en la teoría de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas. En la segunda sección profundizaremos un poco en el origen de la teoría de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, donde veremos el teorema de Sands, Sauer y Woodrow, el cual nos dice que toda digráfica 2-coloreada que cumple con no tener trayectorias dirigidas infinitas exteriores tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, lo cual dará paso a la generalización del concepto de núcleo. Finalmente, en la tercera sección proporcionamos una serie de resultados que están dirigidos a la búsqueda de condiciones para que una digráfica m-coloreada tenga núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, los cuales van a estar ordenados cronológicamente dependiendo del tipo de digráfica m-coloreada. En esta misma sección veremos un resultado original el cual muestra bajo que condiciones un* *torneo 3-coloreado, que cumple con no tener ciclos dirigidos de longitud tres 3-coloreados, puede tener núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas; cabe mencionar que dicho resultado se obtuvo en conjunto con la Mat. Laura Pastrana Ramírez.*

En el capítulo 2 se proporciona la lista de algunos de los problemas que se estudiarán durante el doctorado.

Preliminares

En este apartado se proporcionan los conceptos básicos de la teoría de digráficas, así como algunos resultados de gran utilidad en dicha teoría.

0.1. Definiciones básicas

Definición 0.1.1 . *Una digráfica D consta de un conjunto finito no vacío de objetos, denotado por V(D), llamados los vértices de D, y una colección de pares ordenados de distintos elementos de V(D), denotado por F(D), cuyos elementos reciben el nombre de flechas.*

Notemos que también existen digráficas infinitas con respecto a la cantidad de vértices que ésta puede tener. En lo que sigue trabajaremos con digráficas finitas a menos que se diga lo contrario.

Para las siguientes definiciones consideremos una digráfica D.

Definición 0.1.2 *Diremos que dos vértices u y v en D son adyacentes si existe una flecha entre ellos.*

Definición 0.1.3 *Si(u,v)$\in$F(D), diremos que u es vértice inicial y v vértice final de la flecha (u,v).*

Observemos que en la definición de digráfica se encuentra implícito que no trabajaremos con lazos, donde un lazo es una flecha que tiene a un mismo vértice como vértice inicial y final.

Definición 0.1.4 *Diremos que una flecha* a *incide en un vértice v, si v es vértice inicial o final de* a.

Definición 0.1.5 *Dos o más flechas que unen al mismo par de vértices en la misma dirección son llamadas multiflechas. Una digráfica con multiflechas es llamada* **multidigráfica**.

Definición 0.1.6 *Si (u,v)$\in$F(D), entonces diremos que el vértice u es adyacente hacia el vértice v, y el vértice v es adyacente desde el vértice u.*

Definición 0.1.7 *El grado exterior de un vértice v, también llamado exgrado, denotado por* $\delta^+(v)$*, es el número de vértices adyacentes desde v, es decir, el número de flechas que salen de v.*

Definición 0.1.8 *El grado interior de un vértice v, también llamado ingrado, denotado por* $\delta^-(v)$*, es el número de vértices adyacentes hacia v, es decir, el número de flechas que llegan a v.*

Definición 0.1.9 *El grado de un vértice v, denotado por* $\delta(v)$*, se define como:*

$$\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$$

Definición 0.1.10 *El conjunto de los vecinos exteriores de un vértice x se define como:*

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V(D)/(x,y) \in F(D)\}$$

Definición 0.1.11 *El conjunto de los vecinos interiores de un vértice x se define como:*

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V(D)/(y,x) \in F(D)\}$$

Definición 0.1.12 *Diremos que* $(u,v) \in F(D)$ *es simétrica si* $(v,u) \in F(D)$*.*

Definición 0.1.13 *Diremos que* $(u,v) \in F(D)$ *es asimétrica si* $(v,u) \notin F(D)$*.*

Definición 0.1.14 *Dos digráficas* D_1 *y* D_2 *son isomorfas, denotado como* $D_1 \cong D_2$*, si existe una función biyectiva* $f: V(D_1) \longrightarrow V(D_2)$ *tal que:*

u es adyacente hacia v en D_1 *si y sólo si f(u) es adyacente hacia f(v) en* D_2 *.*

0.2. Tipos de subdigráficas y digráficas

Definición 0.2.1 *Una subdigráfica H de una digráfica D es una digráfica tal que* $V(H) \subseteq V(D)$ *y* $F(H) \subseteq F(D)$*.*

Definición 0.2.2 *Una subdigráfica inducida H de una digráfica D, denotada por D[H], es una digráfica tal que* $V(H) \subseteq V(D)$ *y para* $\{u,v\} \subseteq V(H)$*,* $(u,v) \in F(H)$ *si y sólo si* $(u,v) \in F(D)$*.*

Definición 0.2.3 *Una subdigráfica generadora H de una digráfica D es una digráfica tal que* $V(H)=V(D)$ *y* $F(H) \subseteq F(D)$*.*

Definición 0.2.4 *Sea D una digráfica y S un subconjunto no vacío de V(D), si* $u \in S$ *y* $v \in V(D)$ *son tales que* $(u,v) \in F(D)$*, entonces diremos que existe una Sv-flecha en D. Análogamente, si* $(v,u) \in F(D)$*, entonces diremos que existe una vS-flecha en D.*

Definición 0.2.5 *Sea D una digráfica y S, K subconjuntos no vacíos de V(D);si u∈S y v∈K son tales que (u,v)∈F(D), entonces diremos que existe una SK-flecha en D. Análogamente, si (v,u)∈F(D), entonces diremos que existe una KS-flecha en D.*

Definición 0.2.6 *Una digráfica D es bipartita si existe una bipartición de V(D) en* V_1 *y* V_2 *tal que toda flecha de D tiene un extremo en* V_1 *y el otro en* V_2*.*

Definición 0.2.7 *Una digráfica D es r-regular si* $\delta^+(v)$ =r= $\delta^-(v)$ *para todo v∈ V(D).*

Definición 0.2.8 *Una digráfica D es completa si para todo par de vértices {u,v}⊆ V(D), (u,v)∈F(D) o (v,u)∈F(D).*

Definición 0.2.9 *Diremos que una digráfica D es simétrica si todas sus flechas son simétricas.*

Definición 0.2.10 *Diremos que una digráfica D es asimétrica si todas sus flechas son asimétricas.*

Definición 0.2.11 *La parte simétrica de una digráfica D, denotada por Sim(D), es una subdigráfica generadora de D, tal que sus flechas son las flechas simétricas de D.*

Definición 0.2.12 *La parte asimétrica de una digráfica D, denotada por Asim(D), es una subdigráfica generadora de D, tal que sus flechas son las flechas asimétricas de D.*

Definición 0.2.13 *Un torneo es una digráfica completa asimétrica.*

Definición 0.2.14 *Un torneo T es transitivo si {(u,v),(v,w)}⊆F(T), entonces (u,w)∈F(T).*

Definición 0.2.15 *Una digráfica D es llamada un torneo bipartito si sus vértices pueden ser partidos en dos conjuntos* V_1 *y* V_2 *tales que:*

1. *toda flecha de D tiene un extremo en* V_1 *y el otro en* V_2*.*
2. *Para todo* $x_1 \in V_1$ *y para todo* $x_2 \in V_2$ *tenemos que* $|\{(x_1,x_2), (x_2,x_1)\} \cap F(D)| = 1$*.*

0.3. Caminos dirigidos y Conexidad

Definición 0.3.1 *Un camino no dirigido* $C=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *es una sucesión alternada de vértices y flechas tal que* $(x_i,x_{i+1}) \in F(D)$ *ó* $(x_{i+1},x_i) \in F(D)$*, para* $0 \leq i \leq n-1$*.*

Definición 0.3.2 *Un camino dirigido* $C=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *es una sucesión alternada de vértices y flechas, donde* $(x_i,x_{i+1}) \in F(D)$*, para* $0 \leq i \leq n-1$*.*

Si el camino dirigido empieza en x_0 *y termina en* x_n*, diremos que es un* x_0x_n*-camino dirigido.*

Definición 0.3.3 *Una trayectoria dirigida es un camino dirigido que no repite vértices.*

Definición 0.3.4 *Un camino cerrado dirigido es un camino dirigido que empieza y termina en el mismo vértice.*

Definición 0.3.5 *La longitud de un camino dirigido C es el número de flechas que contiene y se denota como l(C).*

Definición 0.3.6 *Un ciclo dirigido* $\gamma=(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1)$ *es un camino cerrado dirigido, de longitud al menos dos, que no repite vértices, salvo el primero y el último.*

Definición 0.3.7 *Una digráfica D es conexa si para cualquier par de vértices* $\{u,v\}\subseteq V(D)$ *existe un uv-camino no dirigido.*

Definición 0.3.8 *Una digráfica D es unilateralmente conexa si para cualquier par de vértices* $\{u,v\}\subseteq V(D)$ *se cumple al menos una de las siguientes dos condiciones:*

1. *existe una uv-trayectoria dirigida.*

2. *existe una vu-trayectoria dirigida.*

Definición 0.3.9 *Una digráfica D es fuertemente conexa si para cualquier par de vértices* $\{u,v\}\subseteq V(D)$ *existe una uv-trayectoria dirigida y también existe una vu-trayectoria dirigida.*

De las definiciones anteriores notemos lo siguiente:

1. *Si D es fuertemente conexa, entonces D es unilateralmente conexa.*

2. *Si D es unilateralmente conexa, entonces D es conexa.*

Ahora que ya contamos con las definiciones básicas de la teoría de digráficas es necesario enunciar un par de resultados, de esta misma teoría, que nos serán de gran utilidad para el desarrollo de la primera parte de este trabajo, donde las demostraciones de dichos resultados se pueden consultar en [1].

Teorema 0.3.1 *Todo uv-camino dirigido contiene una uv-trayectoria dirigida.*

Lema 0.3.1 *Si D es una digráfica tal que* $\delta^+(v)\geq 1$ *para todo* $v\in V(D)$*, entonces D contiene un ciclo dirigido.*

Cabe mencionar que si en el Lema 0.3.1 cambiamos la hipótesis de $\delta^+(v)\geq 1$ *para todo* $v\in V(D)$ *por* $\delta^-(v)\geq 1$ *para todo* $v\in V(D)$*, entonces la conclusión será la misma.*

.

Teorema 0.3.2 *Todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Capítulo 1

Núcleos y Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas

En este capítulo daremos una pequeña introducción a la teoría de Núcleos en digráficas y mencionaremos algunos de los resultados que dieron origen a dicha teoría. Posteriormente se vera una generalización del concepto de núcleo, pero ahora considerando una digráfica cuyas flechas van a estar coloreadas.

1.1. Núcleos.

Sea D una digráfica.

Definición 1.1.1 *$I \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente si para todo par de vértices $\{u,v\} \subseteq I$, $(u,v) \notin F(D)$ y $(v,u) \notin F(D)$.*

Definición 1.1.2 *$A \subseteq V(D)$ es un conjunto absorbente si para cada $x \in V(D) \setminus A$ existe $y \in A$ tal que $(x,y) \in F(D)$.*

Definición 1.1.3 *$N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si N es un conjunto independiente y absorbente.*

No todas las digráficas tienen núcleo, y como ejemplo podemos mencionar a los ciclos dirigidos de longitud impar.

Por lo tanto, por el simple hecho de que existen digráficas que no tienen núcleo, la pregunta más natural que uno se podría hacer es la siguiente: ¿Qué estructura debe tener una digráfica para que ésta tenga núcleo?.

Como respuesta a la pregunta anterior se tiene que la existencia de núcleo en una digráfica fue probada por Von Neumann bajo la siguiente condición.

Teorema 1.1.1 *[2] Sea D una digráfica.*
Si D no tiene ciclos dirigidos, entonces D tiene núcleo.

Cabe mencionar que por la manera en la que se prueba la existencia de un núcleo en la digráfica D del Teorema 1.1.1 Von Neumann también demuestra que el núcleo es único.

Si seguimos considerando a D como una digráfica que no tiene ciclos dirigidos, es fácil ver que toda subdigráfica inducida de D tampoco tendrá ciclos dirigidos; así, por el Teorema 1.1.1 se tiene que tanto D como todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.

Por lo tanto, el argumento anterior sugiere que una digráfica D sin ciclos dirigidos le hereda la propiedad de tener núcleo a todas sus subdigráficas inducidas. Pero, en general podemos afirmar que no toda digráfica con núcleo cumple con que todas sus subdigráficas inducidas heredan dicha propiedad.

Las digráficas con núcleo que cumplen con que todas sus subdigráficas inducidas también tienen núcleo reciben un nombre muy especifico, el cual tiene su origen en el estudio de la conjetura de las gráficas perfectas planteada por Claude Berge, y se definen como sigue:

Definición 1.1.4 *Una digráfica D es* **Núcleo Perfecta** *si D y todas sus subdigráficas inducidas tienen núcleo.*

Notemos que existen digráficas que tienen ciclos dirigidos y además tienen núcleo. Por ejemplo, los ciclos dirigidos de longitud par tienen dos núcleos distintos.

Así, los siguientes resultados mejoran al Teorema 1.1.1.

Teorema 1.1.2 *Sea D una digráfica.*
Si D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D es Núcleo Perfecta.

La demostración del Teorema 1.1.2 dado por Richardson en [3] se caracterizó por ser muy larga y algo complicada, pero con la ayuda del concepto de seminúcleo, el Dr. Victor Neumann-Lara en [5] da una demostración más corta y elegante de dicho resultado.

El Teorema 1.1.3, dado por Duchet en [4], es uno de los resultados de la teoría de núcleos más utilizado en el desarrollo de la teoría de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, por lo que vale la pena dar su demostración.

Teorema 1.1.3 *Si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica, entonces D es Núcleo Perfecta.*

Demostración. *Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica.*

Primero demostraremos que D tiene núcleo y lo haremos por inducción sobre el número de vértices de D.

sabemos que todas las digráficas con uno y dos vértices tienen núcleo.

Hipótesis de Inducción. Si D' es una digráfica con p'$\lneqq$p vértices tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica, entonces D' tiene núcleo.

Sea D una digráfica con p vértices tal que todo ciclo dirigido tiene una flecha simétrica.

Por demostrar que D tiene núcleo.

Sin pérdida de generalidad supongamos que D tiene al menos un ciclo dirigido[1].

Consideremos el conjunto $S=\{v\in V(D)/\ \delta^+_{Asim(D)}(v)=0 \text{ y } \delta^+_{Sim(D)}(v)\neq 0\}$.

Supongamos que $S=\emptyset$.

<u>*Caso 1.*</u> *Para cada* $v\in V(D)$, $\delta^+_{Asim(D)}(v)\neq 0$.

En este caso existe un ciclo dirigido γ *tal que* $\gamma\subseteq Asim(D)$, *lo cual no puede suceder ya que por hipótesis todo ciclo dirigido en D tiene una flecha simétrica y* $\gamma\subseteq Asim(D)\subseteq D$.

<u>*Caso 2.*</u> *Para cada* $v\in V(D)$, $\delta^+_{Sim(D)}(v)=0$.

Este caso no es posible ya que supusimos que D tiene al menos un ciclo dirigido y por hipótesis éste tiene al menos una flecha simétrica.

<u>*Caso 3.*</u> *Para cada* $v\in V(D)$ $\delta^+_{Asim(D)}(v)\neq 0$ *y* $\delta^+_{Sim(D)}(v)=0$.

Afirmamos que D tiene al menos un vértice de exgrado cero, ya que de lo contrario tendríamos que para cada $v\in V(D)$ $\delta^+_D(v)\geq 1$, *lo cual implicaría que, por el Lema 0.3.1, D tiene un ciclo dirigido* γ *y como* $\delta^+_{Asim(D)}(v)\neq 0$ *y* $\delta^+_{Sim(D)}(v)=0$ *para todo* $v\in V(D)$, *entonces tenemos que D es una digráfica asimétrica, por lo que* γ *es un ciclo dirigido asimétrico lo cual no puede suceder ya que por hipótesis* γ *debe tener una flecha simétrica.*

Por lo tanto, existe $w\in V(D)$ *tal que* $\delta^+_D(w)=0$. *Como* $\delta^+_D(w)=0$, *entonces* $\delta^+_{Asim(D)}(w)=0$ *y* $\delta^+_{Sim(D)}(w)=0$ *lo cual contradice que para cada* $v\in V(D)$ $\delta^+_{Asim(D)}(v)\neq 0$ *y* $\delta^+_{Sim(D)}(v)=0$.

El hecho de suponer que $S=\emptyset$ *nos condujo a contradicciones, entonces* $S\neq\emptyset$.

Ahora consideremos H=D[S]. Por definición de S tenemos que $H\subseteq Sim(D)$, *por lo tanto H es una digráfica simétrica por lo que H tiene un núcleo* [2] N_0.

[1] Si D no tuviera ciclos dirigidos, entonces por el Teorema 1.1.1 tendríamos que D tiene núcleo.
[2] En [1] Capítulo 14, Berge demuestra que toda digráfica simétrica tiene núcleo

Sea D'=D$\setminus$(H$\cup\Gamma_D^-$(N_0)). Tenemos que D' tiene p' vértices con p'$\lneqq$p y por hipótesis de inducción D' tiene un núcleo N_1.

Afirmamos que N=$N_0\cup$ N_1 es un núcleo de D.

i) N es un conjunto absorbente.

Sea v$\in$V(D)$\setminus$N.

<u>*Caso 1.*</u> *Si v$\in$V(H)$\setminus N_0$.*

Como N_0 es absorbente en H, entonces existe u$\in N_0$ tal que (v,u)$\in$F(H)$\subseteq$F(D).

<u>*Caso 2.*</u> *Si v$\in$V(D)$\setminus$ V(H) y v$\in$ Γ_D^-(N_0).*

Como v$\in$ Γ_D^-(N_0), entonces existe w$\in N_0$ tal que (v,w)$\in$F(D).

<u>*Caso 3.*</u> *Si v$\in$V(D)$\setminus$(V(H)$\cup\Gamma_D^-$(N_0)).*

En este caso tenemos que v$\in$V(D')$\setminus N_1$ y dado que N_1 es absorbente en D' existe z$\in N_1$ tal que (v,z)$\in$F(D).

Por lo tanto, N es un conjunto absorbente.

ii) N es un conjunto independiente.

N_0 y N_1 son ambos conjuntos independientes por ser núcleos de H y D' respectivamente.

ii.a) No existe N_1N_0-flecha, de lo contrario tendríamos que existen y$\in N_0$ y z$\in N_1$ tal que (z,y)$\in$F(D), entonces z$\in$ Γ_D^-(N_0), pero z$\in N_1\subseteq$D'=D$\setminus$(H$\cup\Gamma_D^-$(N_0)), por lo que z$\notin$ Γ_D^-(N_0).

ii.b) No existe N_0N_1-flecha, de lo contrario tendríamos que existen x$\in N_0$ y z$\in N_1$ tal que (x,z)$\in$F(D) y como N_0 $\subseteq$H tenemos que x$\in$S por lo que (z,x)$\in$F(D), lo que implica que existe N_1N_0-flecha lo cual ya vimos que no puede suceder.

Por lo tanto, N es un conjunto independiente.

De (i) y (ii) concluimos que N es un núcleo de D.

Ahora, como la propiedad de que todo ciclo dirigido en D tiene una flecha simétrica se hereda para todas las subdigráficas de D, se concluye que todas las subdigráficas de D tienen núcleo. Así, D es Núcleo Perfecta. ■

1.2. Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Definición 1.2.1 *Se dice que una digráfica D es m-coloreada si sus flechas están coloreadas con m-colores.*

Definición 1.2.2 *Una trayectoria dirigida (ciclo dirigido) es llamada(o) monocromática(o), si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color.*

Definición 1.2.3 *Sea D una digráfica m-coloreada.*

$I \subseteq V(D)$ es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para todo par de vértices $\{u,v\} \subseteq I$ no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre ellos.

Para referirnos a una "trayectoria dirigida monocromática" nos limitaremos a escribir "t.d.m."

La siguiente pregunta que se debe a Erdös aún sigue abierta.

Problema 1.2.1 *¿Para cada n, existe un entero positivo f(n) tal que todo torneo finito cuyas flechas están coloreadas con n colores contiene un conjunto $\mathcal{S}$ de f(n) vértices con la propiedad de que para cualquier vértice v que no pertenezca a $\mathcal{S}$ existe una t.d.m. de v a un vértice de $\mathcal{S}$?.*

En 1982 apareció publicado un artículo, escrito por B. Sands, N. Sauer y R. Woodrow, en la revista científica **Journal of Combinatorial Theory**, *donde ellos prueban de una manera muy elegante el siguiente Teorema.*

Teorema 1.2.1 *[6] Si D es una digráfica cuyas flechas están coloreadas con dos colores tal que no contiene trayectorias dirigidas monocromáticas infinitas exteriores[3], entonces existe un subconjunto $\mathcal{S}$ de V(D) que es independiente por t.d.m y para cualquier vértice x que no pertenece a $\mathcal{S}$ existe una t.d.m. de x a algún vértice de $\mathcal{S}$.*

Demostración. *Supongamos que D está coloreada con los colores rojo y azul.*

La notación que daremos enseguida es la que utilizaremos a lo largo de la prueba.

Sean $x,y \in V(D)$ y $S \subseteq V(D)$.

- $x \longrightarrow^{rojo} y$ *Existe una xy-t.d.m. de color rojo en D.*

[3] Sea D una digráfica, una sucesión de vértices $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una **trayectoria dirigida infinita exterior** en D si para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ y todos los elementos de la sucesión son distintos dos a dos.

- $x{\rightarrow}^{rojo}S$ $\quad$ *$x{\rightarrow}^{rojo}s$ para algún $s{\in}S$.*
- $S{\rightarrow}^{rojo}x$ $\quad$ *$s{\rightarrow}^{rojo}x$ para algún $s{\in}S$.*
- $x{\not\rightarrow}^{rojo}s$ $\quad$ *No existen xs-t.d.m. de color rojo en D.*

  Similarmente definimos $x{\rightarrow}^{azul}y$, $x{\rightarrow}^{azul}S$, $S{\rightarrow}^{azul}x$, $x{\not\rightarrow}^{azul}s$.

- $x{\rightarrow}^{mono}y$ $\quad$ *Existe una xy-t.d.m. en D.*

Sean $S,T{\subseteq}V(D)$.

Diremos que $S{\leq}T$ si para todo $s{\in}S$ existe $t{\in}T$ tal que pasa cualquiera de los dos casos.

1. $s{=}t$ $\quad$ *ó*
2. $s{\rightarrow}^{azul}t$ *y* $t{\not\rightarrow}^{azul}s$

Notemos que si $S{\subseteq}T$ entonces $S{\leq}T$.

Afirmamos que $\mathcal{I}{=}\{A{\subseteq}V(D)/$ A es un conjunto independiente por t.d.m. en $D\}$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo "$\leq$".

En efecto

I. *(Reflexiva)*

   Sea $A{\in}\mathcal{I}$.

   Como $A{\subseteq}A$, entonces $A{\leq}A$.

II. *(antisimétrica)*

   Sean $A,B{\in}\mathcal{I}$ tal que $A{\leq}B$ y $B{\leq}A$.

   Por demostrar que $A{=}B$.

   $\subseteq$] Sea $a{\in}A$

   Como $A{\leq}B$, entonces para $a{\in}A$ existe $b{\in}B$ tal que

   i) $a{=}b$ $\quad$ *ó*

   ii) $a{\rightarrow}^{azul}b$ *y* $b{\not\rightarrow}^{azul}a$

Si pasa (i), entonces tenemos que $a \in B$.

Supongamos que pasa (ii).

Puesto que $B \leq A$, *entonces para* $b \in B$ *existe* $a_1 \in A$ *tal que* $b \rightarrow^{azul} a_1$ *y* $a_1 \nrightarrow^{azul} b$, *ya que no puede suceder que* $a_1 = b$ *porque* A *es independiente por t.d.m.*

$a \rightarrow^{azul} b \rightarrow^{azul} a_1$

Por lo tanto existe una aa_1*-t.d.m. de color azul en* D *lo cual no es posible porque* A *es independiente por t.d.m.; y así, sólo puede suceder (i).*

III. (Transitivo)

Sean $A, B, C \in \mathcal{I}$ *tal que* $A \leq B$ *y* $B \leq C$.

Por demostrar que $A \leq C$

sea $a \in A$

Como $A \leq B$, *entonces para* $a \in A$ *existe* $b \in B$ *tal que*

Caso 1. $a = b$

puesto que $B \leq C$ *entonces para* $a = b \in B$ *existe* $c \in C$ *tal que*

i) $a = c$ *ó*
ii) $a \rightarrow^{azul} c$ *y* $c \nrightarrow^{azul} a$

Caso 2. $a \rightarrow^{azul} b$ *y* $b \nrightarrow^{azul} a$

Como $B \leq C$, *entonces para* $b \in B$ *existe* $c \in C$ *tal que*

2.1. $b = c$

Para este subcaso $a \rightarrow^{azul} c$ *y* $c \nrightarrow^{azul} a$

2.2. $b \rightarrow^{azul} c$ *y* $c \nrightarrow^{azul} b$

$a \xrightarrow{}^{azul} b \xrightarrow{}^{azul} c$

Para este subcaso tenemos que $a \rightarrow^{azul} c$ *y como* $b \not\rightarrow^{azul} a$, *entonces* $c \not\rightarrow^{azul} a$

Por lo tanto $\mathcal{I}$ *es un conjunto parcialmente ordenado bajo "*$\leq$*".*

Ahora consideremos $\mathcal{L}=\{S \in \mathcal{I} / \ S \neq \emptyset$ *y* $S \rightarrow^{rojo} y$ *implica que* $y \rightarrow^{mono} S$ *para cada* $y \in V(D)\}$

Por demostrar que $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Aseguramos que existe $v \in V(D)$ *tal que* $v \rightarrow^{rojo} y$ *implica que* $y \rightarrow^{rojo} v$ *para cada* $y \in V(D)$; *ya que de lo contrario, si sucediera que* $\forall \ v \in V(D)$ *existe* $y \in V(D)$ *tal que* $v \rightarrow^{rojo} y$ *y* $y \not\rightarrow^{rojo} v$ *entonces tendríamos lo siguiente:*

1. *Para* $v_1 \in V(D)$ *existe* $y_1 \in V(D)$ *tal que* $v_1 \rightarrow^{rojo} y_1$ *y* $y_1 \not\rightarrow^{rojo} v_1$.
2. *Para* $y_1 \in V(D)$ *existe* $v_2 \in V(D)$ *tal que* $y_1 \rightarrow^{rojo} v_2$ *y* $v_2 \not\rightarrow^{rojo} y_1$, *donde* $v_2 \neq v_1$ *por (1).*
3. *Para* $v_2 \in V(D)$ *existe* $y_2 \in V(D)$ *tal que* $v_2 \rightarrow^{rojo} y_2$ *y* $y_2 \not\rightarrow^{rojo} v_2$, *donde* $y_2 \notin \{v_1, y_1\}$ *porque* $v_2 \not\rightarrow^{rojo} y_1$ *y* $y_1 \not\rightarrow^{rojo} v_1$.
4. *Para* $y_2 \in V(D)$ *existe* $v_3 \in V(D)$ *tal que* $y_2 \rightarrow^{rojo} v_3$ *y* $v_3 \not\rightarrow^{rojo} y_2$, *donde* $v_3 \notin \{v_1, y_1, v_2\}$ *porque* $y_2 \not\rightarrow^{rojo} v_2$, $v_2 \not\rightarrow^{rojo} y_1$ *y* $y_1 \not\rightarrow^{rojo} v_1$.

$\vdots$

$v_1 \rightarrow^{rojo} y_1 \rightarrow^{rojo} v_2 \rightarrow^{rojo} y_2 \rightarrow^{rojo} v_3 \ \cdots$

Siguiendo con este procedimiento llegamos a que $T=(v_1, y_1, v_2, y_2, \cdots)$ *es una trayectoria dirigida infinita exterior lo cual no puede suceder por la hipótesis.*

Por lo tanto existe $v \in V(D)$ *tal que* $v \rightarrow^{rojo} y$ *implica que* $y \rightarrow^{rojo} v$ *para cada* $y \in V(D)$, *y puesto que* $\{v\}$ *es un conjunto independiente por t.d.m, entonces* $\{v\} \in \mathcal{L}$ *y así* $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Afirmamos que $(\mathcal{L}, \leq)$ *tiene un elemento máximo.*

Por demostrar que toda cadena en $\mathcal{L}$ *tiene una cota superior en* $(\mathcal{L}, \leq)$.

Sea $\mathscr{C}$ *una cadena en* $(\mathcal{L}, \leq)$ *y definamos*

$$S^{\infty}=\{s \in \cup \mathscr{C} / \text{ existe } S \in \mathscr{C} \text{ tal que } s \in T \text{ para cada } T \geq S\}$$

Veamos que $S^{\infty} \neq \emptyset$ *y* S^{∞} *es una cota superior para* $\mathcal{L}$.

Sea $S \in \mathscr{C}$ *y* $s \in S$.

Si $s \in S^{\infty}$, *entonces* $S^{\infty} \neq \emptyset$ *y* $S \leq S^{\infty}$.

Supongamos que $s \notin S^{\infty}$.

Como $s \notin S^{\infty}$, *entonces existe* $S_1 \in \mathscr{C}$ *tal que* $S_1 \geq S$ *y* $s \notin S_1$ *por lo que existe* $s_1 \in S_1$ *tal que* $s \rightarrow^{azul} s_1$ *y* $s_1 \nrightarrow^{azul} s$.

Si $s_1 \in S^{\infty}$, *entonces* $S^{\infty} \neq \emptyset$ *y* $S \leq S^{\infty}$.

Supongamos que $s_1 \notin S^{\infty}$.

Como $s_1 \notin S^{\infty}$, *entonces existe* $S_2 \in \mathscr{C}$ *tal que* $S_2 \geq S_1$ *y* $s_1 \notin S_2$ *por lo que existe* $s_2 \in S_2$ *tal que* $s_1 \rightarrow^{azul} s_2$ *y* $s_2 \nrightarrow^{azul} s_1$, *donde* $s \neq s_2$ *porque* $s_1 \nrightarrow^{azul} s$.

Si $s_2 \in S^{\infty}$, *entonces* $S^{\infty} \neq \emptyset$ *y* $S_2 \leq S^{\infty}$, *lo que implica que* $S \leq S^{\infty}$.

Siguiendo con este procedimiento y como D *no tiene t.d.m. infinitas exteriores llegamos a un* $s_n \in S_n \in \mathscr{C}$ *tal que* $S_n \geq S_{n-1}$ $s_{n-1} \notin S_n$, $s_{n-1} \rightarrow^{azul} s_n$ *y* $s_n \nrightarrow^{azul} s_{n-1}$, *con* $s_n \in S^{\infty}$ *y* $s_n \notin \{s, s_1, s_2, ..., s_{n-2}\}$, *lo que implica que* $S_n \leq S^{\infty}$.

Por lo tanto, $S^{\infty} \neq \emptyset$ *y* $S \leq S^{\infty}$.

Así, $S^{\infty} \neq \emptyset$ *y* $S^{\infty} \geq S$ *para cada* $S \in \mathscr{C}$.

Ahora probemos que $S^{\infty} \in \mathcal{I}$.

sean $s, t \in S^{\infty}$

Por definición de S^{∞} *podemos suponer sin pérdida de generalidad que* $S, T \in \mathscr{C}$ *son tales que* $s \in W$ *para cada* $W \geq S$ *y* $t \in T$ *donde* $T \geq S$. *Por lo tanto, como* $s, t \in T$ *y* T *es independiente por t.d.m, entonces se concluye que no existen trayectorias dirigidas monocromáticas entre* s *y* t.

por lo tanto S^{∞} *es independiente por t.d.m.*

Por demostrar que $S^{\infty} \in \mathcal{L}$.

Si $y \in V(D)$ *es tal que* $S^{\infty} \rightarrow^{rojo} y$, *entonces para* $s \in S^{\infty}$ *tal que* $s \rightarrow^{rojo} y$ *existe* $S \in \mathscr{C}$ *tal que* $s \in S$, *por lo que* $S \rightarrow^{rojo} y$, *y puesto que* $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{L}$ *entonces* $y \rightarrow^{mono} S$.

Sea $t \in S$ *tal que* $y \rightarrow^{mono} t$.

Si $t \in S^{\infty}$, *entonces* $y \rightarrow^{mono} S^{\infty}$.

Supongamos que $t \notin S^{\infty}$.

Como $s,t \in S$ *y* S *es independiente por t.d.m, entonces* $y \nrightarrow^{rojo} t$.

Puesto que $S \leq S^{\infty}$, *entonces para* $t \in S$ *existe* $t^{\infty} \in S^{\infty}$ *tal que* $t \rightarrow^{azul} t^{\infty}$ *y* $t^{\infty} \nrightarrow^{azul} t$; *por lo tanto,* $y \rightarrow^{azul} t^{\infty}$ *y así* $y \rightarrow^{azul} S^{\infty}$.

Por lo tanto, $S^{\infty} \in \mathcal{L}$.

por lo tanto $\mathscr{C}$ *tiene una cota superior en* $(\mathcal{L}, \leq)$.

Por el Lema de Zorn, $(\mathcal{L}, \leq)$ *tiene un elemento máximo.*

Sea $\mathcal{S} \in \mathcal{L}$ *el máximo de* $(\mathcal{L}, \leq)$.

Afirmamos que $\mathcal{S}$ *es el conjunto buscado.*

Como $\mathcal{S}$ *es independiente por t.d.m., entonces sólo basta probar que para cualquier vértice* k *que no pertenece a* $\mathcal{S}$ *existe una t.d.m. de* k *a algún vértice de* $\mathcal{S}$.

Supongamos que existe $w \in V(D) \backslash \mathcal{S}$ *tal que* $w \nrightarrow^{mono} \mathcal{S}$.

Garantizamos que existe $x \in V(D) \backslash \mathcal{S}$ *tal que* $x \nrightarrow^{mono} \mathcal{S}$ *y* $y \rightarrow^{rojo} x$ *para cada* $y \notin \mathcal{S}$ *que satisface* $y \nrightarrow^{mono} \mathcal{S}$ *y* $x \rightarrow^{rojo} y$; *ya que si sucediera que para cada* $k \in V(D) \backslash \mathcal{S}$ *existe* $z \in V(D) \backslash \mathcal{S}$ *que satisface* $z \nrightarrow^{mono} \mathcal{S}$, $k \rightarrow^{rojo} z$ *y* $z \nrightarrow^{rojo} k$, *entonces tendríamos una trayectoria dirigida infinita exterior lo cual no es posible por la hipótesis.*

Por lo tanto, elijamos $x \in V(D) \backslash \mathcal{S}$ *tal que* $x \nrightarrow^{mono} \mathcal{S}$ *y* $y \rightarrow^{rojo} x$ *para cada* $y \notin \mathcal{S}$ *que satisface* $y \nrightarrow^{mono} \mathcal{S}$ *y* $x \rightarrow^{rojo} y$.

Ahora, por definición de $\mathcal{L}$, *y como* $x \nrightarrow^{mono} \mathcal{S}$, *se tiene que* $\mathcal{S} \nrightarrow^{rojo} x$.

Sea $T = \{t \in \mathcal{S} /\ t \nrightarrow^{azul} x\}$

Notemos lo siguiente:

- $T \cup \{x\}$ *es un conjunto independiente por definición de* T *y elección de* x.
- $T \cup \{x\} \geq \mathcal{S}$; *porque para* $s \in \mathcal{S}$ *como* $T \subseteq \mathcal{S}$ *entonces puede suceder que* $s \in T$ *y si* $s \notin T$ *se tiene por definición de* T *que* $s \rightarrow^{azul} x$ *y por elección de* x $x \nrightarrow^{azul} s$.

Como $\mathcal{S}$ es máximo en $\mathcal{L}$, entonces por las observaciones anteriores se concluye que $T\cup\{x\}\notin\mathcal{L}$.

Por lo tanto, existe un vértice z tal que $T\cup\{x\}\rightarrow^{rojo}z$ y $z\nrightarrow^{mono}T\cup\{x\}$, donde podemos observar que $z\notin\mathcal{S}$ porque $\mathcal{S}$ es un conjunto independiente por t.d.m. y $x\nrightarrow^{mono}\mathcal{S}$.

Si $T\rightarrow^{rojo}z$, entonces por la definición de $\mathcal{L}$ se tiene que $z\rightarrow^{mono}\mathcal{S}\setminus T$, porque $z\nrightarrow^{mono}T\cup\{x\}$; luego $z\nrightarrow^{rojo}\mathcal{S}\setminus T$ ya que de lo contrario tendríamos una t.d.m. roja entre dos elementos distintos de $\mathcal{S}$ lo cual no es posible porque $\mathcal{S}$ es independiente por t.d.m; por lo tanto $z\rightarrow^{azul}\mathcal{S}\setminus T$, y por definición de T se tiene que $\mathcal{S}\setminus T\rightarrow^{azul}x$; así $z\rightarrow^{azul}x$ lo cual no es posible porque $z\nrightarrow^{mono}T\cup\{x\}$.

Por lo anterior se concluye que $x\rightarrow^{rojo}z$.

Notemos que $z\nrightarrow^{rojo}\mathcal{S}$, porque $x\nrightarrow^{rojo}\mathcal{S}$, y $z\nrightarrow^{azul}\mathcal{S}$ ya que de lo contrario si tuviéramos $z\rightarrow^{azul}\mathcal{S}\setminus T$; esto es porque $z\nrightarrow^{mono}T\cup\{x\}$, y como $\mathcal{S}\setminus T\rightarrow^{azul}x$, entonces $z\rightarrow^{azul}x$ lo cual no es posible porque $z\nrightarrow^{mono}T\cup\{x\}$.

Por lo tanto $x\rightarrow^{rojo}z$, $z\nrightarrow^{mono}\mathcal{S}$ y $z\nrightarrow^{rojo}x$, porque $z\nrightarrow^{mono}T\cup\{x\}$, lo cual es imposible por la elección de x.

Por lo tanto $\mathcal{S}$ satisface las condiciones del Teorema.■

Con lo anterior Sands, Sauer y Woodrow prueban para n=2 en la pregunta planteada por Erdös que f(2)=1.

Una generalización del concepto de Núcleo es el de Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, el cual se debe a Hortensia Galeana Sánchez, y lo podemos definir considerando lo siguiente.

Definición 1.2.4 *Sea D una digráfica m-coloreada.*

$A\subseteq V(D)$ es absorbente por t.d.m. si para cada $x\in V(D)\setminus A$ existe $y\in A$ tal que hay una xy-trayectoria dirigida monocromática enD.

Definición 1.2.5 *Sea D una digráfica m-coloreada.*

$N\subseteq V(D)$ es un Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D si N es independiente por t.d.m. y absorbente por t.d.m.

Por lo tanto, la conclusión del Teorema 1.2.1 es que D tiene Núcleo por t.d.m.

Al igual que en núcleos, existen digráficas m-coloreadas que no tienen núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, por ejemplo el ciclo dirigido de longitud tres cuyas flechas *están coloreadas con tres colores distintos.*

A partir de este momento, convenimos que en lugar de escribir toda la frase "núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas", nos limitaremos a escribir "núcleo por t.d.m."

Ahora relacionemos el concepto de núcleo por t.d.m. y el de núcleo por medio de la siguiente multidigráfica m-coloreada.

Definición 1.2.6 *Sea D una digráfica m-coloreada.*
La cerradura de D, denotada por $\mathfrak{C}(D)$, es una multidigráfica m-coloreada definida como sigue:
$V(\mathfrak{C}(D))=V(D)$
$F(\mathfrak{C}(D))=F(D) \cup \{(u,v)$ *con color i* $/ \exists$ *una uv-trayectoria dirigida monocromática de color i contenida en D*$\}$.

Notemos que si $\gamma=(u_1,u_2,\ldots,u_n,u_1)$ es un ciclo dirigido monocromático de color a, *entonces se tiene que para todo par de vértices consecutivos u_i y u_{i+1} de γ, $(u_{i+1},u_{i+2},\ldots,u_1,u_2,\ldots,u_{i-1},u_i)$ es una $u_{i+1}u_i$-trayectoria dirigida monocromática de color* a, *por lo que en la cerradura de γ tenemos a la flecha (u_{i+1},u_i) con color* a *y como γ también está contenido en $\mathfrak{C}(\gamma)$, por definición de cerradura, entonces (u_i,u_{i+1}) es una flecha simétrica de γ en $\mathfrak{C}(\gamma)$ y como esto pasa para todo par de vértices consecutivos de γ, entonces se concluye que γ es un ciclo dirigido simétrico en su cerradura.*

Por otro lado, de acuerdo a la definición de cerradura se tiene el Lema siguiente.

Lema 1.2.1 *Sea D una digráfica m-coloreada y $\mathfrak{C}(D)$ su cerradura, entonces $\mathfrak{C}(D)\cong \mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D))$.*

Demostración. *Sea D una digráfica m-coloreada.*

Por definición de cerradura tenemos que $V(\mathfrak{C}(D))=V(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$ y $F(\mathfrak{C}(D))\subseteq F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$.

Por demostrar que $F(\mathfrak{C}(D))=F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$.

Sólo falta probar que $F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))\subseteq F(\mathfrak{C}(D))$.

Supongamos que existe $(u,v)=a\in F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$ tal que $a\notin F(\mathfrak{C}(D))$.

Como $a\in F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$, entonces por definición de cerradura tenemos que en $\mathfrak{C}(D)$ existe T una uv-t.d.m de color i, donde $l(T)\geq 2$ porque $a\notin F(\mathfrak{C}(D))$.

Supongamos que $T=(u=x_1,x_2,\ldots,x_n=v)$ para alguna $n\in \mathbb{N}$, con $n\geq 3$.
Como $\{(x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,x_4),\ldots,(x_{n-1},x_n)\}\subseteq F(\mathfrak{C}(D))$, entonces por definición de cerradura tenemos que en D existen T_1 una x_1x_2-t.d.m de color i, T_2 una x_2x_3-t.d.m de color

i, T_3 una x_3x_4-t.d.m de color i, T_4 una x_4x_5-t.d.m de color i,..., T_{n-1} una $x_{n-1}x_n$-t.d.m. de color i, por lo que $\cup_{i=1}^{n-1} T_i$ es un uv-camino dirigido monocromático de color i contenido en D, el cual contiene una uv-trayectoria dirigida, por Lema 0.3.1, y como todas sus flechas tienen el mismo color, entonces está trayectoria dirigida es monocromática. Por lo tanto $a=(u,v)\in F(\mathfrak{C}(D))$, lo cual no puede suceder, ya que supusimos que $a\notin F(\mathfrak{C}(D))$.

Así, $F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))\subseteq F(\mathfrak{C}(D))$.

Por lo tanto, $F(\mathfrak{C}(D))=F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$.

Como $V(\mathfrak{C}(D))=V(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$ y $F(\mathfrak{C}(D))=F(\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)))$ se concluye que $\mathfrak{C}(D)\cong\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D))$. ■

Por lo tanto, de acuerdo a la estructura de $\mathfrak{C}(D)$ y la definición de Núcleo por t.d.m. se tiene el Teorema siguiente.

Teorema 1.2.2 *. Sea D una digráfica m-coloreada.
N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)$.*

Demostración. *Sea D una digráfica m-coloreada.*

$\Rightarrow$] *Sea N un núcleo por t.d.m. de D.*

Por demostrar que N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)$.

i) N es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Sea $\{u,v\}\subseteq N$.

Como N es núcleo por t.d.m. de D, entonces no existen uv-t.d.m. y vu-t.d.m. en D. Por lo tanto, $(u,v)\notin F(\mathfrak{C}(D))$ y $(v,u)\notin F(\mathfrak{C}(D))$, por definición de cerradura.

ii) N es un conjunto absorbente en $\mathfrak{C}(D)$.

Sea $v\in V(\mathfrak{C}(D))\setminus N$.

Como $V(D)=V(\mathfrak{C}(D))$ y N es núcleo por t.d.m. de D, entonces existe una vN-t.d.m. en D y por definición de cerradura tenemos que existe la vN-flecha en $\mathfrak{C}(D)$.

Por lo tanto, $\forall\ v\in V(\mathfrak{C}(D))\setminus N$ existe la vN-flecha en $\mathfrak{C}(D)$.

De (i) y (ii) tenemos que N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)$.

$\Leftarrow$] *Sea N un núcleo de* $\mathfrak{C}(D)$.

Por demostrar que N es núcleo por t.d.m. de D.

i) N es un conjunto independiente por t.d.m. en D.

Sea $\{u,v\} \subseteq N$.

Como N es un conjunto independiente en $\mathfrak{C}(D)$ *por ser núcleo, entonces no existe* $(u,v) \in F(\mathfrak{C}(D))$, *no existe* $(v,u) \in F(\mathfrak{C}(D))$ *y por definición de cerradura tenemos que no existe una uv-t.d.m. en D y no existe una vu-t.d.m. en D.*

Por lo tanto, N es un conjunto independiente por t.d.m. en D.

ii) N es un conjunto absorbente por t.d.m en D.

Sea $w \in V(D) \setminus N$.

Como $V(D)=V(\mathfrak{C}(D))$ *y N es núcleo de* $\mathfrak{C}(D)$, *entonces existe la wN-flecha en* $\mathfrak{C}(D)$ *y por definición de cerradura tenemos que en D existe una wN-t.d.m.*

Por lo tanto, para todo $w \in V(D) \setminus N$ *existe una wN-t.d.m. en D.*

Así, de (i) y (ii) tenemos que N es núcleo por t.d.m. de D. ■

Con el Teorema anterior ahora ya es posible hacer más explícito el hecho de que el concepto de Núcleo por t.d.m. generaliza al de núcleo.

Corolario 1.2.1 *Sea D una digráfica m-coloreada.*
Si para todo par de flechas a *y* b *en D, el color de* a *es distinto al color de* b, *entonces N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de D.*

Demostración. *Sea D una digráfica m-coloreada tal que para todo par de flechas* a *y* b *en D, el color de* a *es distinto al color de* b.

Por la hipótesis tenemos que para todo par de vértices u *y* v *de D no existen t.d.m. entre ellos, de longitud al menos dos, por lo que* $\mathfrak{C}(D)=D$.

Por lo tanto, por el Teorema 1.2.2, tenemos que N es núcleo por t.d.m. de D si y sólo si N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)=D$. ■

1.3. Algunos resultados sobre la existencia de Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas m-coloreadas.

En esta sección daremos a conocer algunos de los resultados que se tienen sobre las condiciones que se le deben de pedir a las digráficas m-coloreadas para que tengan núcleo por t.d.m.; así como en el Teorema 1.3.8 presentamos un resultado original en el cual damos condiciones para que un torneo 3-coloreado sin C_3 tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Definición 1.3.1 *Sea D una digráfica m-coloreada y* γ_n=(0,1,...,n-1,0) *un ciclo dirigido en D. Diremos que* γ_n *es* $\mathcal{C}(D)$*-monocromático si existe un conjunto* $\{f_i=(i,i+1)\in F(\mathcal{C}(D))/ i\in\{1,...,n\}$ *módulo n*$\}$ *de flechas coloreadas del mismo color.*

Definición 1.3.2 *Llamaremos* C_3 *y* T_3 *al ciclo dirigido de longitud tres y al torneo transitivo de orden tres, respectivamente, cuyas flechas están coloreadas con tres colores distintos.*

Definición 1.3.3 *Si v es un vértice de una digráfica m-coloreada, denotamos por* $\zeta(v)$ *a el conjunto de colores asignados a las flechas que tienen como extremo a v; y lo llamaremos, la vecindad del vértice v.*

Definición 1.3.4 *Si v es un vértice de una digráfica m-coloreada, denotamos por* $\zeta^+(v)$ *a el conjunto de colores asignados a las flechas que tienen como extremo inicial a v; y lo llamaremos, la exvecindad del vértice v .*

Definición 1.3.5 *Si v es un vértice de una digráfica m-coloreada, denotamos por* $\zeta^-(v)$ *a el conjunto de colores asignados a las flechas que tienen como extremo final a v; y lo llamaremos, la invecindad del vértice v.*

Definición 1.3.6 *Un casi-torneo es una digráfica m-coloreada que resulta de eliminar una flecha (x,y) de algún torneo m-coloreado* T_n.

Definición 1.3.7 *Un ciclo dirigido es llamado casi-monocromático si todas sus flechas con a lo más una excepción son del mismo color.*

Torneos m-coloreados

1. [7]**(1988) On Monochromatic Paths in m-coloured Tournaments**.

   Teorema 1.3.1 *Sea T un torneo m-coloreado el cual no contiene* T_3 *ni* C_3*. Entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v.*

2. [8](1996) **On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments.**

   Teorema 1.3.2 *Sea T un torneo m-coloreado. Si cada ciclo dirigido contenido en T de longitud a lo más 4 es casi-monocromático, entonces $\mathfrak{C}(T)$ es Núcleo Perfecta.*

   Teorema 1.3.3 *Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es monocromático. Entonces $\mathfrak{C}(T)$ es Núcleo Perfecta.*

   Teorema 1.3.4 *Sea T un torneo m-coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es $\mathfrak{C}(T)$-monocromático. Entonces $\mathfrak{C}(T)$ es Núcleo Perfecta.*

   Teorema 1.3.5 *Sea T un torneo m-coloreado con p vértices. Si existe alguna k ($3 \leq k \leq p$) tal que:*

   a) *Para cada torneo m-coloreado $T' \subseteq T$ tal que T' no contiene ciclos dirigidos de longitud k, $\mathfrak{C}(T')$ es Núcleo Perfecta.*
   b) *Cada ciclo dirigido de longitud k contenido en T es $\mathfrak{C}(T)$-monocromático.*

   Entonces $\mathfrak{C}(T)$ es Núcleo Perfecta.

3. [9](2005) **Monochromatic Paths and at most 2-Coloured Arc Sets in Edge-Coloured Tournaments.**

   Teorema 1.3.6 *Sea T un torneo 3-coloreado tal que no contiene C_3, y para cada $v \in V(T)$ se tiene que $|\zeta(v)| \leq 2$. Entonces $\mathfrak{C}(T)$ es una digráfica Núcleo Perfecta.*

   Teorema 1.3.7 *Si T es un torneo m-coloreado con $m \geq 4$, tal que para cada vértice $v \in V(T)$ tenemos que $|\zeta(v)| \leq 2$, entonces T tiene Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

4. [2](2009) **Condiciones para que un torneo 3-coloreado sin C_3 tenga núcleo por t.d.m. (María del Rocío Sánchez López y Laura Pastrana Ramírez).**

   Teorema 1.3.8 *Si T es un torneo 3-coloreado sin C_3 tal que cumple las siguientes dos condiciones:*

   1. $|\zeta^-(v)| \leq 2$ para cada $v \in V(T)$; y

   2. $\zeta^-(w) = \{a, b\}$ para algún $w \in V(T)$, con $a \neq b$, implica que $\zeta^+(w) = \{c\}$, donde $c \notin \{a, b\}$

   Entonces $\mathfrak{C}(T)$ es núcleo perfecta.

Demostración. *Demostraremos que todo ciclo dirigido en $\mathfrak{C}(T)$ tiene al menos una flecha simétrica.*

Supongamos que T está coloreado con los colores 1, 2 y 3.

Notemos que $\zeta^-{}_{\mathfrak{C}(T)}(v)=\zeta^-(v)$, $\zeta^+{}_{\mathfrak{C}(T)}(v)=\zeta^+(v)$. Por otro lado, $\zeta^-{}_{\mathfrak{C}(T)}(v)=\{a,b\}$, con $a\neq b$, implica que $\zeta^+{}_{\mathfrak{C}(T)}(v)=\{c\}$, donde $c\notin\{a,b\}$, $\forall$ $v\in V(T)$.

Sea γ un ciclo dirigido en $\mathfrak{C}(T)$.

Si $\gamma\nsubseteq T$, entonces existe $(u,v)\in F(\gamma)\subseteq F(\mathfrak{C}(T))$ tal que $(u,v)\notin F(T)$ y como T es torneo se tiene que $(v,u)\in F(T)\subseteq F(\mathfrak{C}(T))$ por lo que $(u,v)\in Sim(\mathfrak{C}(T))$ y así (u,v) es una flecha simétrica en γ.

Por lo tanto, supongamos que γ es un ciclo dirigido en T.

Demostraremos que γ tiene al menos una flecha simétrica en $\mathfrak{C}(T)$ por inducción sobre la longitud, $l(\gamma)$, del ciclo dirigido.

Consideremos la siguiente notación para vértices distintos $u,v\in V(\mathfrak{C}(T))$ la cual usaremos en el transcurso de la prueba.

- *$u\twoheadrightarrow^a v$, si $(u,v)\in F(T)$ y es de color a.*
- *$u\rightarrow^a v$, si en $\mathfrak{C}(T)$ existe alguna flecha de u a v con color a.*
- *$u\nrightarrow^a v$, si en $\mathfrak{C}(T)$ no hay flechas de u a v con color a.*
- *$u\Rightarrow^a v$, si $u\rightarrow^a v$ y en $\mathfrak{C}(T)$ todas las flechas de u a v son de color a.*

Para $l(\gamma)=3$. Como $\gamma\subseteq T$ se deduce de la hipótesis del teorema que $\gamma=(v_1,v_2,v_3,v_1)$ no es C_3; sin pérdida de generalidad podemos suponer que las flechas (v_1,v_2) y (v_2,v_3) tienen el mismo color. Así, (v_1,v_2,v_3) es una trayectoria dirigida monocromática contenida en T, por lo tanto $(v_1,v_3)\in F(\gamma\cap Sim(\mathfrak{C}(T)))$.

Paso inductivo. Si γ' es un ciclo dirigido en T tal que $l(\gamma')\leq n$, entonces γ' tiene una flecha simétrica.

Sea $\gamma=(v_0,v_1,\ldots,v_n,v_0)$ un ciclo dirigido en T de longitud $n+1$, con $n\geq 3$.

Supongamos que en $\mathfrak{C}(T)$ γ es un ciclo dirigido asimétrico.

Ahora, consideremos las siguientes afirmaciones sobre γ.

1) γ está coloreado con al menos dos colores distintos.

Como todo ciclo dirigido monocromático en T es simétrico en $\mathfrak{C}(T)$, entonces γ no puede ser monocromático.

2) Para cualquier par de vértices no consecutivos u y v de γ, (u,v)$\in$Sim($\mathfrak{C}(T)$).

Sean u y v dos vértices no consecutivos de γ.

Supongamos sin pérdida de generalidad que u=v_i y v=v_j, para algún i,j$\in\{0,\ldots,n\}$ con i<j.

Si (u,v)$\in$F(T), entonces $(v_0,\ldots,v_i,v_j,v_{j+1},v_n,v_0)$ es un ciclo dirigido en T de longitud menor que n+1 el cual por hipótesis de inducción tiene al menos una flecha simétrica y como γ no tiene flechas simétricas, entonces (u,v)$\in$Sim($\mathfrak{C}(T)$).

Si (v,u)$\in$F(T), entonces $(v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_i)$ es un ciclo dirigido en T de longitud menor que n+1 el cual por hipótesis de inducción tiene al menos una flecha simétrica y como γ no tiene flechas simétricas, entonces (v,u)$\in$Sim($\mathfrak{C}(T)$).

3) Si para algún i$\in\{0,1,\ldots,n\}$ $v_{i-1}\to^a v_i$ y $v_i\to^b v_{i+1}$, con a$\neq$b, entonces $v_{i+1}\Rightarrow^c v_{i-1}$ donde c$\notin\{a,b\}$ y $(v_{i-1},v_{i+1})\in$F(T).

Sea i$\in\{0,1,\ldots,n\}$ tal que $v_{i-1}\to^a v_i$ y $v_i\to^b v_{i+1}$, con a$\neq$b.

Por (2) $(v_{i-1},v_{i+1})\in$Sim($\mathfrak{C}(T)$), por lo que:

Si $v_{i+1}\to^b v_{i-1}$, entonces $(v_i,\ v_{i+1},\ v_{i-1})$ es una t.d.m. (de color b) por lo que $(v_i,v_{i-1})\in$Sim($\mathfrak{C}(T)$) lo cual no es posible.

Si $v_{i+1}\to^a v_{i-1}$, entonces (v_{i+1},v_{i-1},v_i) es una t.d.m. (de color a) lo que implica que $(v_{i+1},v_i,)\in$Sim($\mathfrak{C}(T)$), lo cual contradice el hecho de que γ no tiene flechas simétricas.

Por lo tanto $v_{i+1}\Rightarrow^c v_{i-1}$, donde c$\notin\{a,b\}$, y como T no tiene C_3, entonces $(v_{i+1},v_{i-1})\notin$F(T) por lo que $(v_{i-1},v_{i+1})\in$F(T).

4) Si a$\in\zeta^-(v_i)\cap\zeta^+(v_i)$ para algún i$\in\{0,1,\ldots,n\}$, entonces $\zeta^-(v_i)=\{a\}$.

Sea $v_i\in V(\mathfrak{C}(T))$ que cumple con lo anterior.

Si suponemos que $|\zeta^-(v_i)|$=2, entonces por la condición 2 del Teorema se tendría que $\zeta^+(v_i)=\{c\}$, con c$\neq$a, lo cual contradice que a$\in\zeta^+(v_i)$. Por lo tanto $\zeta^-(v_i)=\{a\}$.

5) Si $\{a,b\}\subseteq\zeta^+(v_i)$ *y* $c\in\zeta^-(v_i)$*, con* $a\neq b$ *y* $c\notin\{a,b\}$ *para algún* $i\in\{0,1,\ldots,n\}$*, entonces* $\zeta^-(v_i)=\{c\}$.

Como $|\zeta^+(v_i)|=2$*, entonces por la condición 2 del teorema no puede suceder que* $|\zeta^-(v_i)|=2$.

6) $v_n\twoheadrightarrow^1 v_0$ *y* $v_0\twoheadrightarrow^2 v_1$.

Por (1) existen dos flechas consecutivas en γ *con diferente color, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que* $v_n\twoheadrightarrow^1 v_0$ *y* $v_0\twoheadrightarrow^2 v_1$.

7) $v_1\Rightarrow^3 v_n$ *y* $(v_n,v_1)\in F(T)$.
Por (6) y (3).

Por (7) sabemos que $(v_n,v_1)\in F(T)$ *y como desconocemos su color ahora nos dedicaremos a analizar los posibles casos para el color de ésta flecha.*

Caso 1 $v_n\twoheadrightarrow^1 v_1$.

Para este caso consideremos las siguientes afirmaciones.

1.a) $\zeta^-(v_1)=\{1,2\}$.

por (6) sabemos que $v_0\rightarrow^2 v_1$ *y como* $v_n\twoheadrightarrow^1 v_1$*, entonces* $\zeta^-(v_1)=\{1,2\}$.

1.b) $v_1\twoheadrightarrow^3 v_2$.

Por (1.a) y la condición 2 del teorema.

1.c) $v_2\Rightarrow^1 v_0$ *y* $(v_0,v_2)\in F(T)$.

Por (6) $v_0\rightarrow^2 v_1$*, por (1.b)* $v_1\rightarrow^3 v_2$*; y así por (3) se concluye que* $v_2\Rightarrow^1 v_0$ *y* $(v_0,v_2)\in F(T)$.

1.d) $n\geq 4$.

Supongamos que $n=3$.

Por (1.c) $(v_0,v_2)\in F(T)$ *por lo que veremos que color tiene ésta flecha.*

Por (1.c) sabemos que $v_2 \rightarrow^1 v_0$*, por lo que si* $v_0 \twoheadrightarrow^1 v_2$*, entonces* $1 \in \zeta^-(v_2) \cap \zeta^+(v_2)$*, y por (4) se concluye que* $\zeta^-(v_2) = \{1\}$ *lo cual no es posible porque por (1.b)* $3 \in \zeta^-(v_2)$*.*

Por (1.b) se sabe que $v_1 \rightarrow^3 v_2$*, por lo que si* $v_0 \twoheadrightarrow^2 v_2$*, entonces por la condición 2 del teorema se tiene que* $v_2 \rightarrow^1 v_3$*; y así* (v_2, v_3, v_1) *es una t.d.m. de color 1 por lo que* $(v_2, v_1) \in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual no es posible.*

Por lo tanto $v_0 \twoheadrightarrow^3 v_2$*, y puesto que* T *no contiene* C_3 *se tiene que* $v_2 \twoheadrightarrow^1 v_3$ *o* $v_2 \twoheadrightarrow^3 v_3$*.*

Si $v_2 \twoheadrightarrow^1 v_3$*, entonces* (v_2, v_3, v_1) *es una t.d.m. de color 1 por lo que* $(v_1, v_2) \in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual no puede suceder.*

Si $v_2 \twoheadrightarrow^3 v_3$*, entonces* (v_0, v_2, v_3) *es una t.d.m. de color 3 lo que implica que* $(v_0, v_3) \in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual es imposible.*

Por lo tanto $n \geq 4$*.*

1.e) $v_0 \nrightarrow^1 v_2$.

Si suponemos que $v_0 \rightarrow^1 v_2$*, entonces* $1 \in \zeta^-(v_2) \cap \zeta^+(v_2)$*, porque por (1.c)* $1 \in \zeta^+(v_2)$*; y así por (4) se concluye que* $\zeta^-(v_2) = \{1\}$ *lo cual es imposible porque por (1.b)* $3 \in \zeta^-(v_2)$*.*

1.f) $v_0 \nrightarrow^2 v_2$.

Supongamos que $v_0 \rightarrow^2 v_2$*, y con esto consideremos las siguientes subafirmaciones.*

1.f.1) $\zeta^-(v_2) = \{2, 3\}$.

Como $v_0 \rightarrow^2 v_2$ *y por (1.b)* $3 \in \zeta^-(v_2)$*, entonces* $\zeta^-(v_2) = \{2, 3\}$*.*

1.f.2) $v_2 \twoheadrightarrow^1 v_3$.

Por (1.f.1) y la condición 2 del teorema.

1.f.3) $v_3 \Rightarrow^2 v_1$ *y* $v_1 \twoheadrightarrow^3 v_3$.

Puesto que por (1.b) $v_1 \rightarrow^3 v_2$ *y por (1.f.2)* $v_2 \rightarrow^1 v_3$*, entonces por (3) se tiene que* $v_3 \Rightarrow^2 v_1$ *y* $(v_1, v_3) \in F(T)$*, donde por (1.a) y la condición 2 del teorema se concluye* *que* $v_1 \twoheadrightarrow^3 v_3$.

1.f.4) $\zeta^-(v_3)=\{1,3\}$.

Por (1.f.2) $1 \in \zeta^-(v_3)$ *y por (1.f.3)* $3 \in \zeta^-(v_3)$, *por lo que* $\zeta^-(v_3)=\{1,3\}$.

En conclusión, como $(v_3,v_0) \in F(\mathfrak{C}(T))$ *entonces por (1.f.4) y la condición 2 del teorema se tiene que* $v_3 \rightarrow^2 v_0$ *por lo que* $2 \in \zeta^-(v_0) \cap \zeta^+(v_0)$, *ya que por (6)* $v_0 \rightarrow^2 v_1$, *y así por (4)* $\zeta^-(v_0)=\{2\}$ *lo que contradice el hecho de que por (6)* $1 \in \zeta^-(v_0)$.

Por lo tanto, $v_0 \not\twoheadrightarrow^2 v_2$.

1.g) $v_0 \twoheadrightarrow^3 v_2$.

por (1.e) y (1.f).

1.h) $(v_n,v_2) \in F(T)$.

Supongamos que $(v_2,v_n) \in F(T)$.

Por (6) sabemos que $v_n \twoheadrightarrow^1 v_0$ *y por (1.g)* $v_0 \twoheadrightarrow^3 v_2$, *por lo que* (v_n,v_0,v_2,v_n) *es un ciclo dirigido de longitud tres en* T, *y puesto que* T *no contiene* C_3 *se tiene que* (v_2,v_n) *no tiene color 2 y además tampoco puede tener color 1 ya que de lo contrario* $1 \in \zeta^-(v_n) \cap \zeta^+(v_n)$ *y por (4)* $\zeta^-(v_n)=\{1\}$, *lo cual no es posible porque por (7)* $3 \in \zeta^-(v_n)$; *por lo tanto* $v_2 \twoheadrightarrow^3 v_n$, *lo cual implica que* (v_0,v_2,v_n) *es una t.d.m. de color 3 y así* $(v_0,v_n) \in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual no es posible. Por lo tanto,* $(v_n,v_2) \in F(T)$.

1.i) $v_n \not\twoheadrightarrow^1 v_2$.

Supongamos que $v_n \rightarrow^1 v_2$.

Por (1.c) sabemos que $1 \in \zeta^+(v_2)$, *lo que implica que* $1 \in \zeta^-(v_2) \cap \zeta^+(v_2)$ *y por (4)* $\zeta^-(v_2)=\{1\}$ *lo cual no puede suceder porque por (1.g)* $3 \in \zeta^-(v_2)$.

1.j) $v_n \not\twoheadrightarrow^2 v_2$.

Supongamos que $v_n \rightarrow^2 v_2$.

Por (1.g) sabemos que $3\in\zeta^-(v_2)$ *por lo que* $\zeta^-(v_2)=\{2,3\}$ *y por la condición 2 del teorema se tiene que* $v_2\rightarrow^1 v_n$*, lo que implica que* (v_2,v_n,v_1)*, recordemos que la suposición del Caso 1 es que* $v_n\rightarrow^1 v_1$*, es una t.d.m. de color 1 y así* $(v_2,v_1)\in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual no es posible.*

1.k) $v_n\rightarrow^3 v_2$.

Por (1.i) y (1.j).

En resumen tenemos que por (1.k) y (7) $3\in\zeta^-(v_n)\cap\zeta^+(v_n)$*, y así por (4)* $\zeta^-(v_n)=\{3\}$*, por lo que* $v_2\rightarrow^3 v_n$ *lo cual implica que* (v_0,v_2,v_n) *es una t.d.m. de color 3; por lo tanto* $(v_0,v_n)\in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual nos lleva a una contradicción.*

Por lo tanto, este caso no es posible; es decir, $v_n\nrightarrow^1 v_1$.

Caso 2 $v_n\twoheadrightarrow^2 v_1$.

Para este caso tomemos en cuenta las siguientes afirmaciones.

2.a) $\zeta^-(v_n)=\{3\}$.

Sabemos por (6) que $v_n\rightarrow^1 v_0$ *y como* $v_n\rightarrow^2 v_1$*, entonces* $\{1,2\}\subseteq\zeta^+(v_n)$*, además por (7)* $3\in\zeta^-(v_n)$ *por lo que se concluye de (5) que* $\zeta^-(v_n)=\{3\}$.

2.b) $n\geq 4$.

Supongamos que $n=3$.

Como $v_n\twoheadrightarrow^2 v_1$ *y por (2.a) sabemos que* $v_2\twoheadrightarrow^3 v_n$*, entonces* (v_3,v_1,v_2,v_n) *es un ciclo dirigido de longitud tres contenido en* T *y puesto que* T *no contiene* C_3 *concluimos que* $(v_1,v_2)\in F(T)$ *no tiene color 1.*

Si $v_1\twoheadrightarrow^2 v_2$*, entonces* (v_3,v_1,v_2) *es una t.d.m. de color 2 por lo que* $(v_3,v_2)\in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual no puede suceder.*

Por lo tanto $v_1\twoheadrightarrow^3 v_2$*, lo que implica que* $3\in\zeta^-(v_2)\cap\zeta^+(v_2)$ *y por (4)* $v_0\rightarrow^3 v_2$*, así* (v_0, v_2, v_3) *es una t.d.m. de color 3 por lo que* $(v_0,v_3)\in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual nos lleva a una contradicción.*

Por lo tanto $n \geq 4$.

2.c) $v_1 \Rightarrow^2 v_2$.

Supongamos que $v_1 \nrightarrow^2 v_2$.

Si $v_1 \rightarrow^1 v_2$, *por (6) sabemos que* $v_0 \rightarrow^2 v_1$, *por lo que si aplicamos (3) a* $i=1$ *obtenemos que* $v_2 \rightarrow^3 v_0$, *por lo que* $\zeta^-(v_0)=\{1,3\}$, *y así por la condición 2 del teorema se tiene que* $v_0 \rightarrow^2 v_2$ *y* $v_0 \rightarrow^2 v_3$, *lo que implica que* $\zeta^-(v_2)=\{1,2\}$ *y nuevamente por la condición 2 del teorema tenemos que* $v_2 \rightarrow^3 v_3$; *por lo tanto,* $\zeta^-(v_3)=\{2,3\}$ *y además por (3)* $v_3 \rightarrow^2 v_1$ *lo cual es una contradicción a la condición 2 del teorema.*

Por lo tanto $v_1 \rightarrow^3 v_2$; *por (6) sabemos que* $v_0 \rightarrow^2 v_1$ *y así, por (3) aplicado a* $i=1$, *se tiene que* $1 \in \zeta^+(v_2)$ *y* $(v_0,v_2) \in F(T)$, *además* $v_0 \nrightarrow^1 v_2$ *ya que de lo contrario tendríamos que* $\zeta^-(v_2)=\{1,3\}$ *lo que contradice* $1 \in \zeta^+(v_2)$ *y la condición 2 del teorema.*

Ahora, si $v_0 \twoheadrightarrow^2 v_2$, *entonces* $\zeta^-(v_2)=\{2,3\}$ *por lo que* $v_2 \rightarrow^1 v_n$, *lo cual implica que* $1 \in \zeta^-(v_n)$, *pero esto contradice a (2.a).*

Con lo anterior concluimos que $v_0 \twoheadrightarrow^3 v_2$, *y por (2.a) sabemos que* $v_2 \rightarrow^3 v_n$, *por lo que* (v_0,v_2,v_n) *es una t.d.m. de color 3 y así* $(v_0,v_n) \in Sim(\mathfrak{C}(T))$ *lo cual no es posible.*

Por lo tanto $v_1 \Rightarrow^2 v_2$.

Sea $j_0 = min\{j=2,\ldots,n \mid v_j \nrightarrow^2 v_{j+1}$, *sumas tomadas módulo* $n+1\}$.

j_0 *existe porque* $v_n \nrightarrow^2 v_0$.

2.d) $v_j \rightarrow^2 v_{j+1}$ *para cada* $0 \leq i \leq j_0\text{-}1$.

Por la elección de j_0.

2.e) $\zeta^-(v_i)=\{2\}$ *para cada* $i \in \{1,\ldots,j_0\text{-}1\}$.

Por (2.d) tenemos que $2 \in \zeta^-(v_i) \cap \zeta^+(v_i)$ *para cada* $0 \leq i \leq j_0\text{-}1$ *y por (4) se concluye que* $\zeta^-(v_i)=\{2\}$ *para cada* $i \in \{1,\ldots,j_0\text{-}1\}$.

Como $v_{j_0} \nrightarrow^2 v_{j_0+1}$, *entonces podemos suponer que* $v_{j_0} \rightarrow^a v_{j_0+1}$ *con* $a \neq 2$, *y puesto que* $v_{j_0-1} \rightarrow^2 v_{j_0}$, *por (3) concluimos que* $v_{j_0+1} \rightarrow^b v_{j_0-1}$ *donde* $b \notin \{2,b\}$. *Por lo tanto*

$\zeta^-(v_{j_0-1})$=$\{2,b\}$ lo que contradice (2.e).

Así, el caso 2 no es posible; es decir, $v_n \not\twoheadrightarrow^2 v_1$.

Puesto que el caso 1 y el caso 2 nos llevan a una contradicción, entonces se tiene que $v_n \twoheadrightarrow^3 v_1$.

Por (6) sabemos que $v_0 \rightarrow^2 v_1$, lo que implica que $\zeta^-(v_1)$=$\{2,3\}$; pero por (7) $v_1 \rightarrow^3 v_n$ lo cual contradice la condición 2 del teorema.

Como el hecho se suponer que $\gamma \subseteq Asim(\mathfrak{C}(T))$ nos lleva a una contradicción, entonces se concluye que γ tiene al menos una flecha simétrica.

Por lo tanto, $\mathfrak{C}(T)$ es Núcleo Perfecta. ■

Casi-torneos

1. [10]**(1998) Kernels in edge-colored digraphs.**

   Teorema 1.3.9 *Sea D una digráfica m-coloreada que resulta de eliminar una flecha (x,y) de algún torneo m-coloreado T_n (es decir $D \cong T_n$-(x,y)). Si toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Entonces al menos una de las dos siguientes condiciones se cumple:*

   a*) D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas*

   b*) Existe un ciclo dirigido $\gamma \subseteq Asim(\mathfrak{C}(D))$ tal que $\{x,y\} \subseteq V(\gamma)$.*

   Teorema 1.3.10 *Sea D una digráfica m-coloreada que resulta de eliminar una flecha (x,y) de algún torneo m-coloreado T_n (es decir $D \cong T_n$-(x,y)). Si todo ciclo dirigido contenido en D de longitud a lo más 4 es casi-monocromático, entonces D tiene Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

2. [11]**(2006) Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en Torneos y Casi-torneos m-coloreados.**

   Teorema 1.3.11 *Si D un casi-torneo m-coloreado, con $m \geq 4$, tal que para cada $v \in V(D)$ $|\zeta(v)| \leq 2$, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es una digráfica Núcleo Perfecta.*

Torneos Bipartitos

1. [12]**(2004) On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments**.

   Teorema 1.3.12 *Sea D un torneo bipartito m-coloreado. Si todo ciclo dirigido de longitud 4 en D es monocromático, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es Núcleo Perfecta.*

Capítulo 2
Plan de trabajo

En el capítulo anterior expusimos algunos de los resultados que hay sobre la existencia de núcleo por t.d.m., donde dichos resultados están en su mayoría basados en pedir condiciones a los ciclos dirigidos y a los colores de la vecindad de cada vértice en la digráfica m-coloreada.

El trabajo a realizar durante el doctorado estará enfocado principalmente en generalizar los resultados vistos en el capítulo anterior.

Problemas

1. *Condiciones para que una digráfica m-coloreada donde todo ciclo dirigido sea a lo más 2-coloreado tenga núcleo por t.d.m.*
2. *Condiciones para que una digráfica m-coloreada donde toda vecindad de cada vértice es a lo más dos coloreada tenga núcleo por t.d.m.*
3. *Saber si existe un número k tal que si T es un torneo m-coloreado en el que todo ciclo dirigido de longitud a lo más k es dos coloreado cumple con tener núcleo por t.d.m.*
4. *Explorar la conjetura de Erdös (dada en el Problema 1.2.1) en torneos con vecindades 2-coloreadas (exactamente 2) y con estructuras pequeñas 2-coloreadas.*
5. *Estudiar si la condición de que ciertas subestructuras sean 2-coloreadas implican la existencia de núcleo por t.d.m.*

Bibliografía

[1] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*. North Holland publishing Co. North Holland, New York, 1973.

[2] En proceso de envio para su publicación.

[3] M. Richardson, *On weakly ordered systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 113-116.

[4] P. Duchet, *Graphes noyau-parfaits*. Ann. Discrete Math. 9 (1980) 93-101.

[5] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una digráfica*, Anales del Instituto de Matemáticas II, 1971, Universidad Nacional Autónoma de México.

[6] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 33 (1982), 271-275.

[7] Shen Minggang, *On Monochromatic Paths in m-Coloured Tournaments*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 45, 108-111 (1988).

[8] H. Galeana Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Mathematics 156 (1996) 103-112.

[9] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy, *Monochromatic Paths and at most 2-Coloured Arc Sets in Edge-Coloured Tournaments.*, Graphs and Combinatorics (2005)21, 307-317.

[10] H. Galeana Sánchez,*Kernels in edge-colored digraphs.*, Discrete Mathematics 184 (1998) 87-99.

[11] M. del Rocío Sánchez López, *Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en Torneos y Casi-torneos m-coloreados.*, Tesis de Licenciatura, UNAM (2006) 151-152.

[12] H. Galeana Sánchez, R. Rojas Monroy, *On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments*, Discrete Mathematics 285 (2004) 313-318.