



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN**

MAPEO DE SERIES DE TIEMPO EN FRACTALES

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y COMPUTACIÓN**

PRESENTA

DIEGO ANDRÉS PÉREZ RUIZ

ASESOR: M. EN C. HARVEY SPENCER SÁNCHEZ RESTREPO

SEPTIEMBRE DE 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Fis. Mat. Jorge Luis Suarez Madariaga.
Vocal: Act. Luz María Lavín Alanís.
Secretario: Lic. Ada Ruth Cuellar Aguayo.
1er Suplente: Lic. Cristian Carlos Delgado Elizondo.
2do Suplente: Mtro. Harvey Spencer Sánchez Restrepo.

Lugares donde se realizó la tesis:

Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM.

Facultad de Ciencias, UNAM.

ASESOR DE TESIS:

Harvey Spencer Sánchez Restrepo

SUSTENTANTE:

Diego Andrés Pérez Ruiz

Resumen

Este trabajo es una primera aproximación al estudio de los mapeos de las Series de Tiempo en Fractales, para ello se construye el pentágo de Sierpinsky herramienta que junto con el índice de Dorian, sugieren una caracterización única de la serie. Los resultados más significativos de mapear diferentes series con tendencia lineal, cuadrática, exponencial, temporales y procesos de ruido del tipo $1/f^\alpha$, son presentados.

Palabras clave: Series de Tiempo, Sistema Iterado de Funciones, Movimiento Browniano, Juego del Caos, Fractales.

Abstract

This work is a first approach to the study of mappings Time Series in Fractals, for this we build the Sierpinsky pentagon, mathematical tool that along with the rate of Dorian suggest a unique characterization of the series. Significant results of mapping different series with linear trend, quadratic, exponential, temporal series and noise processes of the type $1/f^\alpha$, are presented.

Keywords: Time Series, Iterated System Function, Brownian Motion, Chaos Game, Fractals.

En el *Timeo*, Platón dice que el tiempo está huyendo siempre y que su ser fugitivo es una imagen de la eternidad. Quiere decir, supongo, que el tiempo es una imagen en movimiento, una marioneta manipulada por un ser eterno que es inmune a la muerte.

Guillermo Fadanelli, *Las horas Muertas*.

Agradecimientos

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por permitirme estudiar en sus aulas, por darme una educación de calidad, y permitirme crecer en muchos aspectos de mi vida.

Gracias a mis padres, por todo su apoyo incondicional en cada instante de mi vida, gracias por su comprensión y amor ofrecidos en todo momento, ustedes son mi inspiración para alcanzar mis metas. Mi admiración y respeto.

Gracias a mis hermanos Dorian Andrea y a Daniel Alberto, son parte de mi propio ser y siempre los llevo conmigo. Los amo.

Gracias a mis abuelas y abuelos, porque hay ocasiones en la que madurar requiere de grandes sacrificios.

Gracias a mis tías, tíos, primas, primos, sobrinas y sobrinos, por estar ahí cuando uno menos lo espera, por su apoyo y porque todo este tiempo me han dicho que he llegado a ser un ejemplo.

Gracias a mis amigas y amigos, soy sumamente afortunado por conocer personas como ustedes y compartir emociones, sentimientos, y momentos tan especiales.

Gracias a mis maestros, de quienes siempre tomé lo mejor, gracias por sus consejos y haberme transmitido sus experiencias profesionales en todo momento.

Gracias a mi asesor, Harvey Spencer Sánchez Restrepo, por su apoyo constante y su paciencia en la elaboración de este trabajo, quién me hizo entender que el único juez de uno mismo es uno.

Gracias a mis sinodales, Fis. Mat Jorge Luis Suarez Madariaga, Act. Luz María Lavín Alanís, Lic. Ruth Cuellar Aguayo, Lic. Cristian Delgado Elizondo, por la revisión oportuna de este trabajo, por sus comentarios y valiosas recomendaciones.

Gracias al Dr. Gerardo Escalera Santos y al Dr. Antonio Durán Ruiz por las revisiones y a portaciones a este trabajo.

Con cariño y agradecimiento a cada uno de mis compañeros de generación, a quienes maduraron junto conmigo. Mi cariño y aprecio para todos ustedes.

Dedicatorias

A Dorian Ruiz Palma, mi madre, por darme la vida y estar al pendiente de mí, este camino lo recorrimos juntos.

A Florentino Pérez Pérez, mi padre, por tu apoyo en todo lo que emprendo y por hacerme mejor persona cada día.

a ellos por darme la mejor herencia que uno puede tener: la Educación.

Índice general

Introducción	VII
1. Las Series de Tiempo	1
1.1. Teoría de la Probabilidad	1
1.2. ¿Qué son las Series de Tiempo?	6
1.2.1. Componentes de información	8
1.2.2. Tipo de integración y propósito de estudiarlas	9
1.3. Estacionaridad	10
1.4. Los modelos ARMA	11
1.4.1. Proceso de medias móviles $MA(q)$	12
1.4.2. Proceso autorregresivo $AR(p)$	13
1.5. Los Modelos ARIMA	13
1.6. Procesos de ruido	17
1.6.1. Ruido blanco	18
1.6.2. Ruido de colores	19
1.7. Caos	21
1.8. Entropía y complejidad	25
1.9. Necesidades de nuevas herramientas	26
2. Fractalidad	28
2.1. Los Fractales	28
2.1.1. ¿Qué son los fractales?	29
2.1.2. Fractales en el plano complejo	31
2.1.3. Dimensión fractal	33
2.1.4. El exponente de Hurst	39
2.2. Medidas Asociadas	41
2.3. Construcción de fractales	43

2.4. Series de Tiempo autosimilares	45
2.5. Movimiento Browniano	46
2.6. Movimiento Browniano Fraccionario	49
3. Mapeo Fractal	51
3.1. Mapeo	52
3.1.1. El juego del Caos	53
3.2. Pentágono de Sierpinsky	59
3.3. Transformaciones Cíclicas	62
3.4. El Índice de Dorian	63
3.5. Simulación y Aleatoriedad	64
4. Resultados	66
4.1. Modelo $AR(2)$ y $MA(1)$	66
4.2. Tendencia lineal	68
4.3. Tendencia cuadrática	69
4.4. Tendencia exponencial	70
4.5. Varianza creciente	71
4.6. Varianza decreciente	72
4.7. Sinusoide	73
4.8. Ruido blanco	74
4.9. Ruido de colores	75
4.10. Conjeturas	77
Conclusiones	79
Anexo 1	80
Anexo 2	89

Introducción

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere-, like that of sculpture.

Bertrand Russell.

En lo pasado está la historia del futuro, el pasado es historia, el futuro es fantasía y el presente es tan sólo un instante. Resulta impensable que algunas de las civilizaciones del mundo antiguo no se hayan detenido a tratar de predecir el futuro, o que, no se hayan detenido a recabar información del pasado para proyectarla; pero parece que no fue así. Para muchas de las antiguas civilizaciones, el futuro dependía de la voluntad de los Dioses.

Desde los tiempos más remotos, la humanidad ha observado los cielos y ha tratado de entender y desentrañar sus recónditos secretos. La cultura Maya en el Sur-Sureste de la República Mexicana perfeccionó la astronomía, al grado de determinar la duración del año tropical, de crear las tablas de eclipses y de idear una fórmula para ajustar el calendario, más exacta que la usada en la actualidad, con el fin de conocer el futuro. La mayoría de las culturas, en su momento, han emprendido el estudio del universo y acumulado gran cantidad de información a fin de proyectarla y de predecir algunos fenómenos. También han logrado deducir una serie de conocimientos muchas veces empíricos, que les permite formarse una concepción de dicho universo, logrando una manera peculiar de enfocar el estudio de los fenómenos naturales y sociales.

En un mundo globalizado como el que vivimos hoy en día, la incertidumbre ante el futuro y lo desconocido se hace cada vez más frecuente. Para reducir el grado de incertidumbre se recurre a la elaboración de previsiones para anticipar la evolución de algún fenómeno, dichas previsiones en ocasiones suelen estar basadas en lo que ha ocurrido en el pasado; es decir, se infiere sobre alguna variable basándose en sucesos pretéritos. Una sucesión de observaciones

ordenadas en el tiempo es lo que se conoce como una *Serie de Tiempo* (ST). El disponer, en el presente, de un conocimiento sobre el futuro, aunque sea de forma aproximada, facilita la toma de decisiones.

La agrupación de todas estas técnicas para la previsión de fenómenos de diversa índole se le conoce como el *Análisis de las Series de Tiempo*. Existen dos enfoques para dicho análisis, *el enfoque clásico del Análisis de las Series de Tiempo* y *el enfoque estocástico del Análisis de las Series de Tiempo*. El primero de ellos considera a las Series de Tiempo afectadas por perturbaciones de carácter aleatorio atribuido a errores de medición y no se le considera como parte preponderante de la variable. El segundo considera el comportamiento aleatorio, impredecible y desconocido de las variables que dan lugar a la Serie de Tiempo. Dado que se trabaja con variables del tipo aleatorio, el modelo natural para representarlas es la teoría de los Procesos Estocásticos.

Ambos enfoques buscan el conocimiento y entendimiento de la variable que da lugar a la serie, para proveer al investigador de las bases y herramientas necesarias para las posteriores tomas de decisiones generalmente relacionadas con el comportamiento futuro del fenómeno en cuestión. Las Series de Tiempo se encuentran presentes prácticamente en todas las disciplinas; podemos citar ejemplos en la economía, finanzas, ingeniería, astronomía, entre otras.

El objetivo principal del estudio de las Series de Tiempo es la descripción y el análisis de la dinámica que gobierna una sucesión de eventos aleatorios, buscar patrones temporales que expliquen el comportamiento de la serie a través del tiempo.

Expresado todo lo anterior, el objetivo del presente trabajo es el siguiente:

Objetivo. Desarrollar una herramienta matemática que caracterice los datos de una serie de tiempo a través de su mapeo fractal.

Hipótesis. Es posible describir las estructuras subyacentes a las series temporales a través de su mapeo fractal.

Para ello, en el Capítulo 1, *Las Series de Tiempo*, se presentan las bases y la teoría necesaria sobre la cual construiremos el modelo que engloba el análisis de las Series de Tiempo, expresaremos los conceptos de la Teoría de Probabilidad, haremos el vínculo con los Proce-

tos Estocásticos y definiremos a una Serie de Tiempo como un Proceso Estocástico.

En el Capítulo 2, se definirán algunos conceptos de la Geometría Fractal, se hará una descripción del análisis fractal, de los tipos de dimensión que existen, la estructura y la construcción de los fractales. Es también en este capítulo donde se muestran fractales en el plano complejo, y al final se muestran las propiedades del Movimiento Browniano (MB), y se describe una Serie de Tiempo Fractal como un Movimiento Browniano Fraccionario (MBF).

En el Capítulo 3, para cumplir con el objetivo de la tesis, desarrollaremos una herramienta basada en el algoritmo del *Juego del Caos* propuesto por Barnsley en 1988. A través de dicho algoritmo seremos capaces de construir el Pentágono de Sierpinsky, herramienta que nos permitirá el mapeo de las Series de Tiempo.

En el Capítulo 4, se presentarán los resultados más relevantes encontrados al Mapear diversas Series de Tiempo en la herramienta matemática propuesta, y de esta manera se dará respuesta a nuestra hipótesis.

Finalmente se redactarán las conclusiones más relevantes del trabajo. Se incluye, al final, un Anexo con algunos conceptos de Probabilidad y Sistemas Dinámicos. El Anexo 2 incluye el código del programa desarrollado, que a lo largo de este trabajo fueron presentados para dar un carácter más dinámico y visual a los resultados presentados, los cuales se ponen a disposición del lector; el programa que permitió el mapeo de las Series de Tiempo fue desarrollado en el lenguaje de programación “C”, utilizando la librería de programación “OpenGL”.

Mayo del 2009.

Capítulo 1

Las Series de Tiempo

En este capítulo, se presenta el objeto de estudio así como algunas herramientas teóricas y conceptuales que han sido construidas para estudiar diversos fenómenos a partir de un conjunto de mediciones realizadas a través del tiempo. Se definen a las Series de Tiempo, que dentro de los objetivos del análisis se encuentran el conocimiento del comportamiento global del fenómeno que da lugar a la serie y el realizar pronósticos del comportamiento de la serie para la toma de decisiones. Se justifica el propósito de estudiarlas, las bondades de utilizar un enfoque estocástico y su relación con los conceptos de Caos y Entropía. De esta forma, se plantean las necesidades de nuevas herramientas conceptuales e instrumentales que posibiliten la detección de relaciones y componentes no lineales y eviten el marco reduccionista de la información autocontenida.

1.1. Teoría de la Probabilidad

Comencemos donde todo tiene su origen, con una cita del artículo *On the Wonderful World of Random Walks* escrito por E. W. Montroll y M. F. Shlesinger.

Since traveling was onerous (and expensive), and eating, and hunting, wenching generally did not fill the 17th century gentleman's day, two possibilities remained to occupy the empty hours, praying and gambling; many preferred the latter.

La teoría de la probabilidad y de los procesos estocásticos nace de los juegos de apuestas, las personas siempre se han obsesionado con los juegos de apuestas y de azar, pero fue sólo a través del pensamiento de la Ilustración que el resultado de un juego de azar dejó de ser visto como una decisión divina, y se convirtió en un pensamiento dócil al raciocinio y a la

especulación. Uno de los caballeros del Siglo XVII, llamado Chevaliere de Méré, realizó una pregunta, relacionada con las probabilidades de los juegos de azar, a Pascal (1623-1662). El subsiguiente intercambio de correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre Fermat (1601-1665) daría inicio a la **teoría de la probabilidad**.

El primer libro en teoría de probabilidad fue escrito por Christian Huygens (1629-1695), en 1657, bajo el título de *De Ratiocioniis in Ludo Aleae* (Sobre las relaciones en los juegos de dados). El primer tratado sobre la teoría de probabilidad en el sentido moderno fue publicado por Jacob Bernoulli en su libro *Ars Conjectandi* (El arte de hacer conjeturas) publicado en 1713.

Fue hasta 1933, que el matemático soviético Andréi Kolmogórov propuso un sistema de axiomas para la teoría de la probabilidad, basado en la teoría de conjuntos y en la teoría de la medida, desarrollada pocos años antes por Lebesgue, Borel y Frechet. Esta aproximación axiomática, que generaliza el marco clásico de la probabilidad, permitió la rigORIZACIÓN de muchos argumentos ya utilizados, así como el estudio de problemas fuera de los marcos clásicos.

El modelo matemático básico de la teoría de la probabilidad es el llamado *espacio de probabilidad*, que consta de una terna ordenada (Ω, \mathcal{F}, P) en donde Ω es un conjunto arbitrario no vacío que convenientemente puede ser interpretado como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Al conjunto Ω se le llama espacio muestral y un elemento típico de él se denota por ω . El segundo elemento es una colección no vacía de \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , llamada σ -álgebra, que es cerrada bajo las operaciones de complementos y uniones numerables. A los elementos de \mathcal{F} , subconjuntos de Ω , se les llama *eventos* o *conjuntos medibles*. Finalmente, el tercer elemento es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, llamada medida de probabilidad, que cumple con los axiomas de A. Kolmogórov establecidos en 1933, los cuales son:

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$ para cualquier A en \mathcal{F}
- P es σ -aditiva, es decir si A_1, A_2, \dots es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

El número $P(A)$ es la probabilidad que presenta el evento A cuando se realiza el experimento aleatorio. A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le llama espacio medible. En particular, si $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} , entonces se tiene el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. A los elementos de la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama *Borelianos* o Conjuntos Borel Medibles [1].

Definición 1 . (*Variable Aleatoria*). Una variable aleatoria es una función definida sobre el espacio muestral Ω que asigna valores del conjunto \mathbb{R} de todos los números reales.

La siguiente figura muestra una representación gráfica de una variable aleatoria X que asigna un elemento $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

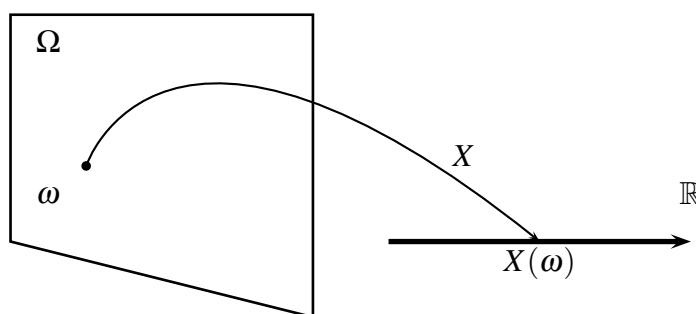


Figura 1.1: Una variable aleatoria X como función definida sobre el espacio muestral Ω que toma valores en \mathbb{R}

En este caso también se dice que X es una *función medible* $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, o simplemente que es \mathcal{F} -medible. Mediante una de estas funciones es posible plantear que cuando “el azar escoge”, elementos de Ω , escoge un número real.

El espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ puede convertirse en un espacio de probabilidad con la ayuda de una variable aleatoria X de la siguiente manera: para cada conjunto Boreliano \mathcal{B} se define una función $P_X(\mathcal{B}) = P(X^{-1}\mathcal{B})$, que resulta una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Se llama distribución de X , y encierra en ella toda la información probabilística de X . De manera equivalente, se estudia la función de distribución de X definida por $F(x) = P(X \leq x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Dado que se trabaja con series asociadas a fenómenos no deterministas, suponemos que cada observación x_t es el valor obtenido de una cierta variable aleatoria X_t definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . La Serie de Tiempo es la realización de una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T_o\}$, de donde podemos observar la impredecible naturaleza del fenómeno. La realización es *una* de todo el conjunto de posibles secuencias o resultados del proceso; si el fenómeno se pudiera repetir, se obtendrían resultados distintos.

Para poder comprender lo que es un proceso estocástico consideremos a $f(\omega, t)$ una función de dos argumentos, donde ω es una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , y el parámetro $t \in T$ continuo. Para cada valor de t , la función $f(\omega, t)$ es sólo una función de ω , por consiguiente, una variable aleatoria; para cada valor fijo de ω , la función $f(\omega, t)$ depende sólo de t y es una función de una variable real, función que recibe el nombre de realización del proceso estocástico. A través de este modelo se pretende representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo, siendo entonces la función aleatoria $f(\omega, t)$ de cuyo análisis se deriva el concepto de *Proceso Estocástico*.

Definición 2 . (*Proceso Estocástico*) *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $X_t, t \in T$ definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .*

Los procesos estocásticos son una generalización de las variables aleatorias cuando se manifiestan como función de un parámetro real. El proceso estocástico puede verse como una variable aleatoria cuando se fija el valor del parámetro t_o , entonces denotamos el proceso por $X_{t_o}(\bullet)$ y se denomina estado del proceso estocástico. Cuando en un proceso estocástico se especifica el resultado ω_o de la variable aleatoria, el proceso estocástico se convierte en $X_\bullet(\omega_o)$ y se denomina *realización del proceso o trayectoria del proceso*. Este concepto es el motivo por el cual se utilizan los procesos estocásticos para modelar las series de tiempo.

Se dice que el proceso es a tiempo discreto en caso de que el conjunto de parámetros sea un conjunto discreto, es decir $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ en un conjunto discreto. Se dice que el proceso es a tiempo continuo cuando el conjunto de parámetros consiste en un subintervalo de los números reales, por ejemplo $T = (a, b)$, consideraremos procesos donde las variables

aleatorias toman valores reales.

Una característica importante que cumplen algunos procesos es la de tener incrementos independientes. Esta propiedad la usaremos más adelante y puede escribirse de la siguiente forma: para cualquier tiempo $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables incremento $X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes; es decir, la función de distribución conjunta de todas ellas coincide con el producto de las funciones de distribución individuales.

A continuación mencionaremos procesos que también son de reconocida importancia: Un proceso estocástico X_t es de *Markov* (Markov, 1906) si para cada $0 \leq s \leq t$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con probabilidad uno se cumple que:

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A | X_s) \quad (1.1)$$

Esta igualdad establece que el estado del proceso al tiempo futuro $t > s$ es independiente del pasado (tiempos antes de s) cuando el estado del proceso al tiempo s es conocido. Esta propiedad es equivalente a la que exhiben los sistemas dinámicos deterministas, cuya evolución queda perfectamente determinada una vez que se establece la ley de movimiento y un estado inicial del sistema, no influyendo lo que ha sucedido antes del estado inicial.

Otro proceso estocástico de interés es el conocido con el nombre de *martingala*. Un proceso X_t es una *martingala* si es adaptado, integrable y para $0 \leq s \leq t$, con probabilidad uno se cumple:

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad (1.2)$$

Las martingalas son procesos que están relacionados con los juegos justos. Si X_t representa la fortuna de un jugador que apuesta continuamente, entonces la igualdad anterior se interpreta del siguiente modo. En promedio, la fortuna del jugador al tiempo t dada toda la historia del juego hasta el tiempo $s \leq t$ es la fortuna del jugador al tiempo s ; es decir, el juego es justo pues el jugador en promedio no pierde ni gana. Para más ejemplos de procesos estocásticos se puede consultar a Karlin y Taylor en [2].

1.2. ¿Qué son las Series de Tiempo?

De acuerdo con Brockwell y Davis, una *Serie de Tiempo Estocástica* (STE) es la realización observada de un **proceso estocástico** con espacio de estados Ω , el cual puede ser discreto o continuo y espacio paramétrico T siempre discreto.

El primer paso para el análisis de las Series de Tiempo es la selección adecuada del tipo de modelo (ya sea cuantitativo o cualitativo) que ha de emplearse para analizar los datos. Esta elección está relacionada con la idea de predicción de las realizaciones futuras, lo que conlleva una ilusión que ha permeado la manera de hacer ciencia en el siglo pasado pero que permanece en la actualidad: *estabilidad, uniformidad y regularidad*.

Para acceder a la posibilidad impredecible de observaciones futuras, es natural suponer que cada observación x_t es un valor de una variable aleatoria X_t . La Serie de Tiempo $\{x_t, t \in T_0\}$ es una realización de la familia de variables aleatorias $X_t, t \in T_0$. Estas consideraciones sugieren modelar los datos como una realización (o parte de una realización) de un proceso estocástico $X_t, t \in T$ donde $T \supseteq T_0$ [3].

El conjunto índice T , sobre el cual se desarrolla el proceso estocástico para los fines del análisis de las Series de Tiempo, se considera como un subconjunto de los números enteros; sin embargo, en una definición más general de un proceso estocástico, se permite total libertad sobre el conjunto índice T ; únicamente se pide que sea distinto del conjunto vacío.

Podemos definir a una Serie de Tiempo como “un conjunto de observaciones x_t , cada una registrada en un periodo específico de tiempo t , la serie es discreta si el conjunto T_0 de tiempo en la cual las observaciones están hechas es un conjunto numerable, y es continua si es obtenida cuando las observaciones están registradas de manera continua sobre un intervalo de tiempo no numerable. Podemos dividir las Series de Tiempo en Discretas y Continuas. Definiremos la notación $x(t)$ en lugar de x_t si deseamos indicar específicamente que las observaciones están hechas de manera continua”[4].

Podemos ahora dar una notación para las *Series de Tiempo* de la siguiente manera $\{x_t\}$ y sus variables aleatorias serán x_1, x_2, x_3, \dots . Así, el valor de x_t representa la t -ésima observación, es decir el valor que tendrá la serie de tiempo en el instante t . Si es conocido, es

constante; si no, es **variable aleatoria**.

Las Series de Tiempo se considerarán integradas por una parte determinística y una de carácter aleatorio, carente de regularidad y en consecuencia difícil de conocer su patrón de comportamiento. La parte determinista está conformada por la *tendencia* y *variación estacional*. De esta forma podemos escribir el modelo para la Serie de Tiempo $\{x_t, t \in T_o \subset \mathbb{Z}\}$ mediante la realización de un proceso estocástico X_t de la forma:

$$X_t = X(m_t, s_t, Y_t) \quad (1.3)$$

donde m_t es la componente de tendencia, s_t es la componente estacional e Y_t la componente aleatoria.

Lo anterior es conocido como el modelo **clásico-estocástico** por ser el resultado de la combinación de los modelos usados en la literatura, el enfoque clásico y el enfoque estocástico. El primero de ellos supone a la Serie de Tiempo formada por tendencia, variación estacional, ciclos y fluctuación aleatoria; mientras que el segundo de ellos supone los mismos excepto el ciclo; en este enfoque se presta atención en analizar el componente aleatorio de la serie y no se consideran los otros. A continuación se observa un ejemplo de una Serie de Tiempo:

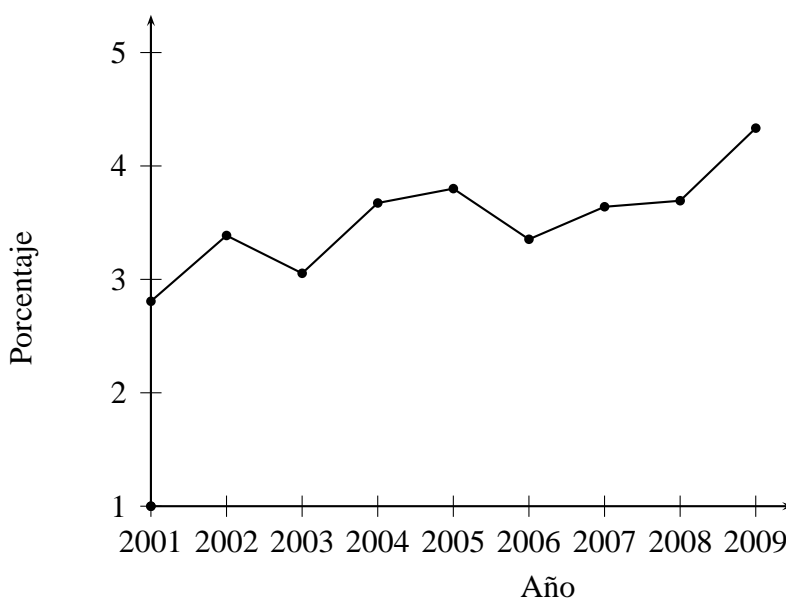


Figura 1.2: Tasa de Desempleo a Nivel Nacional. Enero de cada año. Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).

1.2.1. Componentes de información

Con la finalidad de comprender las ST y el modelo clásico-estocástico, consideramos el comportamiento de una ST como el resultado de la integración de uno o más de los siguientes componentes:

- **Tendencia.** Se llama tendencia al movimiento suave y regular de la Serie de Tiempo a largo plazo, y suele detectarse a simple vista o mediante una prueba estadística. La tendencia es posible detectarla, si a largo plazo la serie adopta una marcha persistente, ya sea de crecimiento, decrecimiento o estabilidad, aunque se necesita un horizonte bastante amplio. La tendencia es un componente sustancial. La eliminación puede hacerse a través de una transformación (puede ser logarítmica, recíproca o raíz cuadrada), de diferencias ordinarias o de diferencias finitas.
- **Variación Estacional.** La variación estacional, en ocasiones puede no existir, y ocurre cuando se observa un patrón sistemático o comportamiento que se repite en periodos menores o iguales a un año. Generalmente, es a través de la representación gráfica de la serie cuando es factible determinar si está o no presente. Puede intentarse eliminar a través de diferencias estacionales.
- **Ciclo.** El ciclo corresponde a repeticiones con longitud mayor a un año. Es difícil observarlo puesto que requiere de largos periodos de tiempo. El ciclo debe de ser considerado, si es que se percibe. En ocasiones es imposible notar su ocurrencia.
- **Fluctuación Aleatoria.** Las Series de Tiempo reales, siempre contendrán un conjunto de variaciones irregulares que representan el resultado de los llamados choques o golpes aleatorios. Estas fluctuaciones agrupan todo aquello que el modelo matemático no puede explicar. Para que un modelo sea adecuado, las fluctuaciones aleatorias deben ser estadísticamente insignificantes. Es debido a este comportamiento que el modelo utilizado para el análisis de las Series de Tiempo se apoya en la teoría de los procesos estocásticos, pues así respeta la naturaleza aleatoria de las observaciones [4].

En una Serie de Tiempo no es necesario observar todos los componentes anteriores; sin embargo, el componente de Fluctuación Aleatoria deberá estar siempre presente, pues se está trabajando con Series de Tiempo que no son deterministas, sino que están siendo afectadas por alguna perturbación de carácter aleatorio.

1.2.2. Tipo de integración y propósito de estudiarlas

En la sección anterior se describieron las componentes principales que integran el modelo clásico-estocástico de las Series de Tiempo; sin embargo, la manera en la que se integran es de carácter funcional, es decir a través de una función f . Y se puede adoptar múltiples formas, de acuerdo a cada función f . El modelo clásico-estocástico se convierte en el siguiente:

$$X_t = f(m_t, s_t, Y_t) \quad (1.4)$$

donde f es cualquier función, m_t es la componente de tendencia, s_t es la componente estacional e Y_t la componente aleatoria.

Los tipos de integración que se utilizan para las componentes de la serie, son:

$$\textit{Integración Aditiva} : X_t = f(m_t, s_t, Y_t) = m_t + s_t + Y_t$$

$$\textit{Integración Multiplicativa} : X_t = f(m_t, s_t, Y_t) = m_t \times s_t \times Y_t$$

La integración aditiva se utiliza cuando la variabilidad de la serie no muestra demasiados cambios, y se espera que continúe de esa manera a lo largo del tiempo. Mientras que la integración multiplicativa resulta adecuada cuando la serie presenta cambios notables a través del tiempo. Cuando el modelo de la serie suponga la integración multiplicativa, es posible transformarla a una integración aditiva mediante transformaciones logarítmicas.

El propósito de estudiar las Series de Tiempo es poder describir el proceso teórico que subyace a la Serie de Tiempo, en forma de un modelo matemático que tenga propiedades similares al proceso real y que represente a los datos (G. Videgaray, 2000).

Una vez escogido el modelo (o una familia de modelos) es posible estimar parámetros, comprobar el ajuste a los datos y utilizar el que mejor se ajuste a éstos, con el fin de mejorar nuestro entendimiento del fenómeno. De acuerdo a su objetivo o finalidad, existen modelos descriptivos, explicativos, de pronóstico, de optimización y de control. Una vez que un modelo satisfactorio ha sido desarrollado, puede ser usado en una variedad de diferentes caminos, dependiendo del campo particular de aplicación. Puede ser aplicado en la separación del ruido de señales digitales, la predicción de valores futuros en una serie y el control de los valores futuros [4].

1.3. Estacionaridad

La Estacionaridad es crucial para identificar el modelo más adecuado para un conjunto de datos. Podemos definirlo de 2 maneras diferentes:

Definición 3 . (*Estacionaridad en Sentido Fuerte o Estricto*). Se dice que una Serie de Tiempo (ST) es Estacionaria en Sentido Fuerte o Estricto si su función de distribución conjunta de probabilidad (no sólo la esperanza, las varianzas o las covarianzas, sino las funciones de distribución “completas”) permanece idéntica en el tiempo. Es decir si:

$$f(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k}) = f(Y_{t+\tau}, Y_{t-1+\tau}, \dots, Y_{t-k+\tau}) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

La propiedad anterior por lo general es muy difícil de verificar en datos reales.

Definición 4 . (*Estacionaridad en el Sentido Débil o Amplio*). Se dice que una ST es Estacionaria en el Sentido Débil o Amplio \iff satisface las siguientes 3 condiciones:

1. **Su media es constante en el tiempo.** Es decir:

$$E(Y_t) = E(Y_{t+\tau}) = \mu \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Si la serie original muestra tendencia el problema se complica, pues con esta muestra deberá de estimarse la media que en algunos casos puede ser constante o estar en función del tiempo. Si no hay tendencia puede asumirse que la media es constante y que el valor observado para cada periodo puede representarse por una constante que será la media muestral. En este caso la media de la serie puede calcularse utilizando la media aritmética.

2. **La varianza es constante en el tiempo.** Esto es:

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(Y_{t+\tau}) = \gamma_0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

3. **Su función de autocorrelación es independiente del tiempo.** La autocorrelación (corrección entre valores de la misma variable observada en diferentes momentos del tiempo) mide la posible dependencia entre un valor observado Y_t y otro Y_{t-k} que está separado por un intervalo de longitud k :

$$\text{Autocorr}(Y_t, Y_{t-k}) = \text{Autocorr}(Y_{t+\tau}, Y_{t-k+\tau}) = \rho_0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Si un fenómeno es estacionario, sus variables pueden estar relacionadas linealmente entre si, pero de forma que la relación entre las dos variables sólo depende de la distancia k entre ellas.

Si el fenómeno bajo estudio es estacionario entonces los valores de la media, la varianza, y la función de autocorrelación pueden estimarse considerando a la ST como una muestra de tamaño N (número de observaciones disponibles que provienen de una misma población) cuyos parámetros son constantes en el tiempo. Si la ST no es estacionaria el problema es que los N datos representan N muestras de tamaño 1, lo cuál no es representativo, por lo cual es imposible inferir sobre las propiedades de la población. Si el fenómeno no es estacionario deberá de realizarse una transformación matemática temporal que lo convierta en estacionario, al finalizar se hará la transformación inversa para regresar a los datos originales.

1.4. Los modelos ARMA

El proceso estocástico $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de Medias Móviles AutoRegresivo de parámetros $p, q \in \mathbb{R}$ o $ARMA(p, q)$ si $\{Y_t\}$ es estacionario y si para cada t

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (1.9)$$

donde $\{e_t\} \sim N(0, \sigma^2)$ es decir es ruido blanco, variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}$.

Si se introduce un operador de retraso B^n que atrasa a una variable, esto es:

$$B^i Y_t = Y_{t-i} \quad (1.10)$$

$$B^j e_t = e_{t-j} \quad (1.11)$$

la ecuación 1.9 se reescribe como:

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)e_t \quad (1.12)$$

donde $\phi_p(\cdot)$ y $\theta_q(\cdot)$ son polinomios de grados p y q respectivamente, esto es:

$$\phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \quad (1.13)$$

$$\theta_q(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q \quad (1.14)$$

Estos polinomios $\phi_p(\cdot)$ y $\theta_q(\cdot)$ se les denomina como los *polinomios de medias móviles autoregresivos* de la ecuación en diferencias.

1.4.1. Proceso de medias móviles $MA(q)$

Ahora consideremos $\{Y_t\}$ un proceso ARMA para el cual el polinomio de medias móviles autorregresivo satisface $\phi(z) = 1$, entonces el proceso $\{Y_t\}$ tiene la siguiente expresión:

$$Y_t = \theta(B)e_t \quad (1.15)$$

La cual puede ser escrita de la siguiente manera si se desarrolla el término a la derecha de la ecuación anterior.

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (1.16)$$

y el cual es un proceso conocido como proceso de medias móviles de orden q o $MA(q)$. Para conocer si un $MA(q)$ es un proceso estacionario se observa que:

$$E[X_t] = E[\theta(B)e_t] \quad (1.17)$$

$$= E\left[\sum_{j=0}^q \theta_j e_{t-j}\right] \text{ donde } \theta_0 = 1. \quad (1.18)$$

$$= \sum_{j=0}^q \theta_j E[e_{t-j}]. \quad (1.19)$$

puesto que $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ se llega a que $E[Y_t] = 0$. La función de autocovarianza para $MA(q)$ está dada por:

$$Cov(Y_{t+h}, Y_t) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|} & \text{si } |h| \leq q \\ 0 & \text{si } |h| > q \end{cases}$$

Esta característica indica que el proceso $MA(q)$ es *estacionario*. Consideremos ahora el caso particular en que $q = 1$, entonces el proceso definido por: $Y_t = e_t + \theta e_{t-1}$, con $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ y $\theta \in \mathbb{R}$. A $\{Y_t\}$ se le denomina *proceso de promedios móviles* o *proceso $MA(1)$* .

1.4.2. Proceso autorregresivo $AR(p)$

Consideremos $\{Y_t\}$ un proceso ARMA para el cual el polinomio de medias móviles autorregresivo satisface $\theta(z) = 1$, entonces el proceso $\{Y_t\}$ tiene la siguiente expresión:

$$\phi(B)Y_t = e_t \quad (1.20)$$

este proceso es denominado *proceso AutoRegresivo de orden p* o $AR(p)$. Se observa que en este modelo, los cuales Y_t depende de los p valores anteriores de ella misma $\{t-1, t-2, \dots, t-p\}$, es decir $Y_t = f(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$ llamado $AR(p)$ que tiene la siguiente estructura:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \quad (1.21)$$

El modelo $AR(1)$ el cual tiene la siguiente forma: $Y_t = e_t + \phi_1 Y_{t-1}$ tiene las siguientes propiedades:

- $\mu(t) = E[Y_t] = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E[Y_{t-j}] = 0$
- $\sigma^2(t) = E[Y_t^2] = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

Y la función de autocovarianza tiene por expresión:

$$\phi_x(h) = \phi^h \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \quad (1.22)$$

1.5. Los Modelos ARIMA

Los modelos de pronóstico de *Series de Tiempo* ARIMA (AutoRegresive Integrated Moving Average) han sido estudiados y aplicados en diversos proyectos de investigación, estos modelos se han popularizado gracias a George Box y Gwilym Jenkins en los años 70. Los modelos ARIMA tienen una estructura de ecuaciones en diferencias las cuales relacionan datos presentes y pasados de un fenómeno para realizar un pronóstico.

La elección de un buen modelo se basa en un análisis gráfico y estadístico, como son la función de autorrelación parcial, los residuales, el periodograma, el periodograma integrado, la función de autocorrelación. De acuerdo a los resultados que arroje este modelo, se estiman los parámetros necesarios para contruir el modelo que mejor pronostique y sea el más preciso y apegado a la realidad.

Los procesos mezclados son modelos más generales y robustos que los Autoregresivos o de Medias Móviles por sí mismos, ya que son una combinación de los modelos $AR(p)$ y $MA(q)$ y toman el nombre de procesos $ARMA(p, q)$, cuya estructura fue explicada con anterioridad. Los procesos $ARMA(p, q)$ pueden ser expresados como:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + e_t - \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} \quad (1.23)$$

$$Y_t - \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} = e_t - \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} \quad (1.24)$$

Con el operador de retraso lo anterior se expresa como:

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i\right) Y_t = \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j\right) e_t \quad (1.25)$$

$$\Phi(B) Y_t = \Theta(B) e_t \quad (1.26)$$

$$\text{Con: } \Phi(B) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i\right) \text{ y } \Theta(B) = \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j\right) e_t.$$

A menudo, una serie de tiempo puede representar tendencia, que es un factor que no permite hacer la estimación de un modelo ARIMA de manera inmediata. Para facilitar dicha modelación, se suele diferenciar la serie original Y_t previo a la estimación de parámetros de la siguiente manera:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} \quad (1.27)$$

En general, d diferencias ordinarias (o diferencias ordinarias de orden d) tienen la siguiente notación:

$$\Delta^d Y_t = (1 - B)^d Y_t \quad (1.28)$$

Si un modelo $ARMA(p, q)$ requiere primeramente de d -diferencias ordinarias para ser analizado mediante la metodología Box - Jenkins, se obtiene un modelo $ARIMA(p, d, q)$ que tiene la siguiente forma:

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i\right) (1 - B)^d Y_t = \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j\right) e_t \quad (1.29)$$

Que en notación compacta se escribe como:

$$\Phi(B) \Delta^d Y_t = \Theta(B) e_t \quad (1.30)$$

Un modelo $ARMA(p, q)$ equivale a un modelo $ARIMA(p, 0, q)$. Así como la estimación de las series con tendencia lineal no es directa para la metodología Box-Jenkins, tampoco lo es para aquellas con dependencia estacional (es decir, que Y_t dependa de cada S periodos atrás y no necesariamente de cada periodo inmediato anterior, es decir de $\{t - S, t - 2S, \dots, t - KS\}$). Frecuentemente es necesario considerar otro tipo de modelos que consideren estacionalidad.

En primera instancia, se tienen los modelos AutoRegresivos Estacionales $SAR(P)$ o $AR(P)_S$, en los cuales Y_t depende exclusivamente de $\{t - S, t - 2S, \dots, t - PS\}$ y posee la siguiente estructura:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-S} + \Phi_2 Y_{t-2S} + \dots + \Phi_P Y_{t-PS} \quad (1.31)$$

El modelo SARIMA es bastante útil cuando una serie Y_t depende de datos con intervalos fijos. Análogamente con los modelos $ARMA(p, q)$, existen modelos de Medias Móviles Estacionales denominados $SMA(Q)$ o $MA(Q)_S$, los cuales tienen la característica de dependencia en los errores separados cada S unidades en el tiempo. Equivalente de $\{t - S, t - 2S, \dots, t - QS\}$, para tener una estructura general como la siguiente:

$$Y_t = e_t - \Theta_1 e_{t-S} - \Theta_2 e_{t-2S} - \dots - \Theta_Q e_{t-QS} \quad (1.32)$$

Los modelos mezclados estacionales son aquellos que contemplan las partes AutoRegresivas y de Medias Móviles Estacionales para contar con $P + Q$ parámetros. Es decir, los modelos $SARIMA(P, Q)$ o $ARIMA(P, Q)_S$, que tienen la estructura general:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-S} + \dots + \Phi_P Y_{t-PS} + e_t - \Theta_1 e_{t-S} - \dots - \Theta_Q e_{t-QS} \quad (1.33)$$

Y de manera abreviada, se tiene lo siguiente:

$$Y_t - \sum_{I=1}^P \Phi_I Y_{t-I} = e_t - \sum_{J=1}^Q \theta_J e_{t-J} \quad (1.34)$$

Usando el operador de retraso: $\Phi(B)^S Y_t = \Theta(B)^S e_t$

$$\text{Con: } \Phi(B)^S Y_t = 1 - \sum_{I=1}^P \Phi_I B_{IS} \text{ y } \Theta(B)^S = 1 - \sum_{J=1}^Q \theta_J B_{JS}$$

Frecuentemente algunas series estarán estimadas de una mejor manera si se les realizan diferencias estacionales ordinarias, pero además hay series que requieren otro tipo de ajuste

estacional en forma de diferencias, es decir, diferencias *estacionales*. Una diferencia estacional se obtiene de modificar una serie Y_t como:

$$\Delta_S Y_t = Y_t - Y_{t-S} \quad (1.35)$$

$$\Delta_S Y_t = (1 - B^S) Y_t \quad (1.36)$$

Por lo tanto, una diferencia estacional de orden D (D diferencias estacionales) tienen una notación:

$$\Delta_S^D Y_t = (1 - B^S)^D Y_t \quad (1.37)$$

Por ende, se enuncia la estructura de un modelo $SARIMA(P, D, Q)$ o $ARIMA(P, D)_s$, la cual está dada por:

$$\left(1 - \sum_{I=1}^P \Phi_I B_{IS}\right) (1 - B^S)^D Y_t = \left(1 - \sum_{J=1}^Q \Theta_J(B)^{JS}\right) e_t \quad (1.38)$$

$$\Phi(B)^S \Delta_S^D Y_t = \Theta(B)^S e_t \quad (1.39)$$

Un modelo $SARIMA(P, D)$ es equivalente a un $SARIMA(P, 0, D)$. Existe una clase de modelo en la metodología que contempla a los modelos ordinarios ARIMA y a los modelos estacionales SARIMA y recibe el nombre de métodos multiplicativos.

Un modelo multiplicativo $ARIMA(p, 0, q) \times (P, 0, Q)_s$ tiene la siguiente forma:

$$\left(1 - \sum_{I=1}^P \Phi_I B_{IS}\right) \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B_i\right) Y_t = \left(1 - \sum_{J=1}^Q \Theta_J(B)^{JS}\right) \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j(B)^j\right) e_t \quad (1.40)$$

$$\Phi(B)^S \phi(B) Y_t = \Theta(B)^S \theta(B) e_t \quad (1.41)$$

Y tiene $p + d + P + D$ parámetros a estimar. Si se generaliza el modelo multiplicativo anterior, se le añade d diferencias ordinarias y D diferencias estacionales para obtener el modelo $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\left(1 - \sum_{I=1}^P \Phi_I B_{IS}\right) \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B_i\right) (1 - B^S)^D (1 - B)^d Y_t = \left(1 - \sum_{J=1}^Q \Theta_J(B)^{JS}\right) \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j(B)^j\right) e_t \quad (1.42)$$

$$\Phi(B)^S \phi(B) \Delta_S^D \Delta^d Y_t = \Theta(B)^S \theta(B) e_t \quad (1.43)$$

Es común que antes de iniciar la especificación y estimación de un modelo de Box-Jenkins, cuando una serie de tiempo Y_t tiene dependencia estacional, se le aplique una transformación a los datos para obtener un pronóstico con mayor precisión (antes de interpretar éste, se aplica la transformación inversa correspondiente). Un modelo $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ con los datos transformados se expresa como:

$$\Phi(B^S)\phi(B)\Delta_S^D\Delta^d Z_t = \Theta(B)^S\theta(B)e_t \quad (1.44)$$

Cuando $Z_t = f(Y_t)$ y f es generalmente logarítmica, cuadrada, raíz, recíproco, etc, y por ende tiene inversa, es decir f^{-1} . Finalmente, para obtener un pronóstico de un modelo ARIMA basta despejar a Y_t del modelo anterior y reemplazar t para Y_t y e_t con $\{n+1, n+2, \dots, n+(h-1)\}$ considerando que la serie tiene n datos y un horizonte de pronóstico h periodos de tiempo.

Para conocer una explicación más detallada de los métodos previamente expuestos, por favor refiérase a González (2003) y Brockweell (1990).

1.6. Procesos de ruido

El modelo más simple para una serie de tiempo es aquél en el que no existe tendencia ni componente estacional y además las observaciones son la realización de un proceso donde las variables son independientes e idénticamente distribuidas con media cero. A un proceso con tales características se les conoce como *proceso de ruido*.

Definición 5 *Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ se dice que es un proceso de ruido independiente, idénticamente distribuido si sus funciones de distribución $\{F_t(\bullet), t \in \mathcal{F}\}$ satisfacen:*

$$F_t(x) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) \quad (1.45)$$

$$= P(X_{t_1} \leq x_1), \dots, P(X_{t_n} \leq x_n) \quad (1.46)$$

$$= F(x_1) \dots F(x_n) \quad (1.47)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ para cada $t \in \mathcal{F}$ las variables X_{t_1}, \dots, X_{t_n} son idénticamente distribuidas la función esperanza del proceso estocástico $\mu(t) = 0$ para $t \in T$.

1.6.1. Ruido blanco

Un músico puede pensar que el ruido blanco es un sonido con la misma intensidad en todas las frecuencias como el sonido de un rayo, el de un motor o el de una turbina. Los ingenieros utilizan el ruido blanco como un ruido que perturba una entrada tal que la salida es una función de la entrada y el ruido. Se puede considerar el ruido blanco como un proceso aleatorio $\dot{z}(t)$ con media 0 y varianza ∞ tal que $\dot{z}(t)$ y $\dot{z}(s)$ son independientes para $t \neq s$ y

$$E\left(\int f(t)\dot{z}(t)dt\right)^2 = \int f(t)^2 dt \quad (1.48)$$

Así, $\dot{z}(t)$ puede considerarse como un análogo continuo de una secuencia aleatoria idénticamente distribuida e independiente. En cada instante de tiempo t , $\dot{z}(t)$ tiene una fluctuación infinita. Un matemático suele pensar en el ruido blanco como el tiempo derivado $\dot{B}(t)$ de un movimiento Browniano $B(t)$.

La importancia de los procesos independiente idénticamente distribuidos y de ruido blanco es que proporcionan un camino sencillo para la construcción de ST que sean estacionarias.

Definición 6 *El Ruido Blanco es un proceso estocástico generalizado X_ξ con índice ξ en un espacio de funciones tal que:*

- $X_{a\xi+b\eta} = aX_\xi + bX_\eta$
- X_ξ se encuentra normalmente distribuida con media 0 y varianza $\int |\xi(t)|^2 dt$

[5].

Por ejemplo, $X_\xi = \int \xi(t) dB(t)$ (Una integral de Wiener, ver Kuo [5]) es Ruido Blanco. La mejor manera de entender el Ruido Blanco consiste en considerarlo como una función generalizada en un espacio de dimensión infinita.

Cuando examinamos las propiedades de los modelos no lineales, es importante distinguir entre variables aleatorias independientes y no correlacionadas. El Ruido Blanco (o un proceso aleatorio puro) fue definido como una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas. En ocasiones, esto también es llamado un Ruido Blanco Estricto; y la frase *Ruido Blanco no correlacionado* es usada cuando valores sucesivos simplemente

no están correlacionados en lugar de que sean independientes.

Es importante distinguir que toda sucesión de variables aleatorias no correlacionadas $e_t \sim$ independientes idénticamente distribuidas con media $\mu = 0$ y $var = \sigma^2$ es Ruido Blanco, pero la afirmación inversa no es verdad. Si valores sucesivos siguen una distribución normal, entonces la correlación 0 implica independencia, entonces un Ruido Blanco no correlacionado es un Ruido Blanco estricto. Sin embargo, con modelos no lineales las distribuciones son en general no normales y la correlación 0 no necesariamente implica independencia.

El Ruido Blanco no correlacionado tiene propiedades de segundo orden conocidas; por ejemplo, tienen media constante y autocorrelación 0. Sin embargo, las definiciones no nos dicen nada acerca de las propiedades no lineales de las series. En particular, aunque $\{X_t\}$ sea Ruido Blanco Estricto o Ruido Blanco no correlacionado, el cuadrado de sus observaciones $\{X_t^2\}$ necesariamente no lo es. Sólo si $\{X_t\}$ es Ruido Blanco estricto, entonces $\{X_t^2\}$ es Ruido Blanco no correlacionado. Existe una variedad de pruebas para probar linealidad, cuya potencia depende en particular de un tipo de no linealidad, para más información puede consultarse a Brock y Potter (1993) y Tsay (2002).

1.6.2. Ruido de colores

De la misma manera que es posible descomponer la luz blanca en una gama de frecuencias luminosas, también es posible descomponer una señal, como la descrita por una ST, en sus componentes sinoidales, lo cuál es posible mediante el *análisis de Fourier*, que supone que cualquier señal puede ser expresada como la suma de sus componentes periódicas. Se toma una señal y se descompone en las frecuencias que la conforman, haciéndose así evidente la importancia relativa de cada una de ellas. El resultado de la llamada *Transformada de Fourier* puede convertirse en un espectro de potencias.

En este espectro los picos más prominentes representa las frecuencias más significativas en la señal. Si se tiene una ST autosemejante, el espectro de potencias se verá como la gráfica de una ley de potencia y aplicando la transformación $\log - \log$ se obtiene una recta cuya pendiente es el exponente de la ley de potencia. El valor de la pendiente se denota como $-\alpha$, con $\alpha \geq 0$ y provee información relevante acerca de la dinámica subyacente a la ST estudiada.

Podemos observar que las frecuencias de terremotos, fluctuaciones eléctricas y muchas

otras, coinciden con el espectro de potencia de la forma $1/f^\alpha$ donde f denota la frecuencia. Si tomamos una serie de números generados de manera aleatoria y utilizamos la Transformada de Fourier para calcular su espectro, observamos que éste disminuye como una hipérbola con $\alpha = 2$, es decir de la forma $1/f^2$ lo que se conoce como **ruido café** o movimiento browniano, en términos sencillos, que el ruido tiene mucho más contenido de baja frecuencia. El nombre de ruido café, proviene de que al verse la onda sigue un movimiento Browniano. Es decir, la muestra siguiente de la forma de onda es igual a la muestra anterior, más una cantidad aleatoria pequeña.

El **ruido rosa** tiene una frecuencia espectral de $1/f$ y se encuentra principalmente en la naturaleza. Se encuentra exactamente entre el ruido marrón y el ruido blanco. No es aleatorio ni predecible; al visualizarse se parece a una figura fractal. Al acercarlo, el patrón es idéntico a cuando se aleja, pero tiene una amplitud inferior.

Si una señal contiene igual proporción de todas las frecuencias, se dice que presenta **ruido blanco**, como la luz blanca que contiene todos los colores en igual proporción. En este caso la pendiente de la recta es $\alpha = 0$ y corresponde a fenómenos azarosos.

Si $\alpha = 3$ tenemos el **ruido negro** cuyo espectro es igualmente un hipérbola. Una manera de estimar el valor de α es mediante el exponente de Hurst, en el cual para la ST la relación $1/f^\alpha$ arroja que $\alpha = (2H + 1)$.

El ruido rojo es aquél en que predominan las frecuencias de periodo largo, mientras que en el ruido azul la importancia relativa de frecuencias cortas es mayor. Los fenómenos que exhiben ruido de colores son muy abundantes en la naturaleza. Se ha encontrado, por ejemplo, que las fluctuaciones de muchas poblaciones animales aparentemente son de color rojo y que el ruido negro caracteriza fenómenos como la variación en el nivel de ríos o los cambios en temperatura anual de algunas regiones.

Mediante el Exponente de Hurst también es posible identificar procesos de ruido de colores. Por ejemplo si $0 \leq H < 0,5$ se considera que se tiene ruido rosa y esta relacionado con la antipersistencia. Si $0,5 < H \leq 1$ se tienen un ruido negro. Este ruido aparece en procesos cíclicos de largo plazo, como nivel de ríos, número de manchas solares y cambios de precios en las bolsas de valores. Y tres efectos están relacionados a este ruido: Efectos Joseph (efec-

tos causados por tendencias y ciclos), Noah (discontinuidades hacia arriba y hacia debajo de las observaciones) y Mirror (de relación entre diferentes tipos de ruido).

1.7. Caos

Definir el concepto de **caos** es muy complejo y difícil, la palabra proviene del griego *Khaos* que significa abismo. En mecánica y matemáticas, es el comportamiento de sistemas dinámicos¹ gobernados por leyes determinísticas, impredecible aparentemente y se rigen por leyes de azar (Ver Anexo 1). Hoy se habla de un *Caos Determinístico*, en donde el azar o la impredecibilidad como es el caso del lugar donde caen las gotas de lluvia sumado al determinismo de los problemas físicos descrito por las leyes de Newton [6].

Existen diversas aplicaciones de las matemáticas del Caos, incluyendo el estudio del flujo turbulento de fluidos, la dinámica de las poblaciones, las irregularidades en el ritmo cardíaco, el movimiento del cúmulo de estrellas, entre otras tantas.

En 1986, en una conferencia internacional sobre caos celebrada en la *Royal Society of London*, se dio un término mucho más concreto: *Caos es el comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinístico*.

Por la definición anterior, entendemos que lo estocástico se refiere a lo aleatorio, mientras que lo determinístico se refiere a las leyes que rigen un sistema dinámico, en pocas palabras, su ecuación. El concepto de Caos ha llamado la atención en los últimos años, especialmente a los matemáticos aplicados. El comportamiento caótico nace principalmente de modelos no lineales y se podría definir como un comportamiento que simula a lo aleatorio y que es generado en distintos niveles por componentes deterministas. Una visión no técnica es dada por Gleick (1987) mientras que Kantz y Schreiber (1997) dieron una definición desde la física matemática. Chan y Tong (2001) y Isham (1993) dieron una perspectiva estadística.

Si un sistema caótico parece presentar un comportamiento como si fuera aleatorio el analista tiene la oportunidad de decidir qué entiende por aleatorio y tiene que decidir si una

¹Un sistema dinámico es la manera de describir el paso del tiempo a través de todos los puntos de un espacio dado S .

aparente serie de tiempo aleatoria fue generada por un modelo estocástico o por un modelo no lineal o por una combinación de ambos. Sería de gran interés para los científicos si las fluctuaciones, anteriormente pensadas como aleatorias, pueden ser modeladas a través de una ecuación. Desafortunadamente, distinguir entre las diferentes posibilidades resulta muy difícil en la práctica.

La idea central está ilustrada en la famosa ecuación logística, algunas veces llamada el mapeo logístico o mapeo cuadrático. Éste es un ejemplo que los matemáticos llaman una ecuación en diferencias o un mapeo en diferencias, los valores obtenidos a partir de iteraciones de este mapeo es algo que se puede considerarse como una **serie de tiempo determinística**.

Supóngase que la Serie de Tiempo es generada por la ecuación determinística siguiente:

$$x_t = kx_{t-1}(1 - x_{t-1}) \quad (1.49)$$

para $t = 1, 2, 3, \dots$ con $x_0 \in (0, 1)$ y $k \in \mathbb{R}$. El valor de $0 < k \leq 4$ la serie se quedará en un rango $(0, 1)$. Para valores menores de k , la naturaleza determinística de la serie se hace evidente. Para $0 < k < 1$ es fácil observar que la serie tiende a 0, cualquiera que sea el valor inicial.

Para valores de $1 \leq k \leq 3$ es fácil observar que la serie converge al valor de $x_t = (1 - 1/k)$ para valores grande de t , y este valor es llamado *punto fijo*. Nótese que el punto fijo $(1 - 1/k)$ es el punto que corresponde a la intersección de la línea a 45° y la curva cuadrática $x_t = kx_{t-1}(1 - x_{t-1})$ para $0 < k \leq 3$.

Para los valores de k en $3 < k < 3,57$ la serie exhibe un comportamiento cíclico, el cual depende de k , pero mientras $k \rightarrow 4$ la serie se aprecia más caótica.

Cuando $k = 4$, se puede observar que la serie tiene un espectro plano y tiene las propiedades de segundo orden de un Ruido Blanco no Correlacionado. Se observa que la serie fluctúa alrededor del intervalo $(0, 1)$ y la naturaleza determinística de la serie no es evidente en la gráfica del tiempo. Esto es un comportamiento caótico.

Un sistema caótico tiene la propiedad de que pequeños cambios en las condiciones iniciales generarán resultados distintos a la larga. Para ejemplificar lo anterior, es necesario

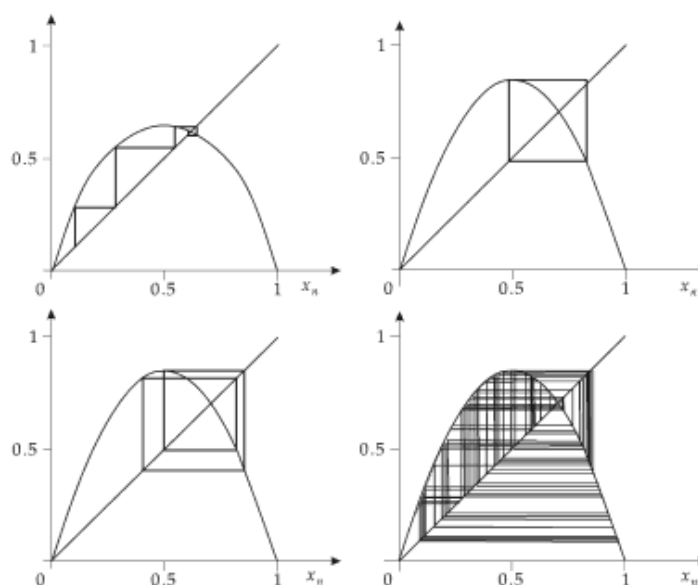


Figura 1.3: Diferentes Iteraciones de la Ecuación Logística para diferentes valores del parámetro r .

mencionar a Edward Lorenz quien construyó un modelo matemático muy simplificado, que intentaba capturar el comportamiento de la convección en la atmósfera; una vez que estudió las soluciones, se dio cuenta que alteraciones mínimas en los valores de las variables iniciales resultaban en soluciones ampliamente divergentes. Esta sensible dependencia de las condiciones iniciales fue conocida después como el *efecto mariposa*, que dice que el simple aleteo de las alas de una mariposa en Hong Kong puede crear un huracán en Nueva York. Lorenz publicó sus conclusiones en un trabajo titulado *Flujo determinístico no periódico*, describió un sistema relativamente simple de ecuaciones, que dieron lugar a un patrón de la complejidad infinita llamado atractor de Lorenz.

Dado que una de las manifestaciones más características del comportamiento caótico es su sensibilidad a cambios en las condiciones del sistema, es lógico buscar la forma de medir el grado de sensibilidad de trayectorias vecinas a perturbaciones en sus condiciones iniciales. La noción de divergencia exponencial de órbitas cercanas es formalizado con la introducción del *Exponente de Lyapunov*.

Definición 7 . (*Exponente de Lyapunov*) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Para cada

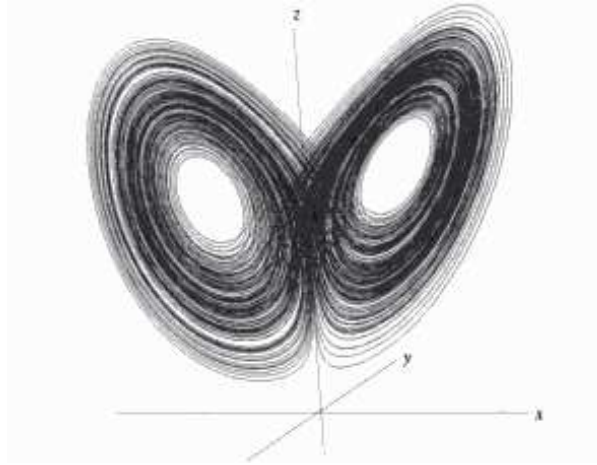


Figura 1.4: Diferentes trayectorias del Atractor de Lorenz.

punto x_0 definimos el exponente de Lyapunov de x_0 , $\lambda(x_0)$ de la siguiente manera:

$$\lambda(x_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(|(f^n)'(x_0)|) \quad (1.50)$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{(n-1)} \ln(|(f^j)'(x_0)|) \quad (1.51)$$

donde $x_j = f^j(x_0)$.

El uso de este exponente permite estimar la complejidad de los sistemas dinámicos. Básicamente, mide la sensibilidad a las condiciones iniciales y representa la separación exponencial entre dos trayectorias, inicialmente próximas, al cabo de N pasos o iteraciones. Ahora consideremos un valor x_i de una ST, y buscamos la secuencia para otro valor x_j entonces la secuencia de diferencias

$$dif_0 = |x_j - x_i| \quad (1.52)$$

$$dif_1 = |x_{j+1} - x_{i+1}| \quad (1.53)$$

$$dif_2 = |x_{j+2} - x_{i+2}| \quad (1.54)$$

$$\vdots \quad (1.55)$$

$$dif_n = |x_{j+n} - x_{i+n}| \quad (1.56)$$

se asume se incrementa de manera exponencial, esto es $dif_n = dif_0 e^{\lambda n}$. Tomando logaritmos de ambos lados, esto es:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{dif_n}{dif_0} \quad (1.57)$$

Lo cual es conocido como el Exponente de Lyapunov discreto para una serie de tiempo. Si $\lambda > 0$ el comportamiento es caótico. Un sistema caótico se define, en el sentido de los exponentes de Lyapunov, como un sistema que tiene al menos un exponente de Lyapunov positivo. La definición del Exponente de Lyapunov fue propuesta por él mismo en el trabajo titulado *Problème générale de la stabilité du mouvement* en 1892, con el cual marca el comienzo de la teoría de la estabilidad.

1.8. Entropía y complejidad

En 1948, C. Shannon definió la cantidad de aleatoriedad y la llamó *entropía* que es el punto inicial de la teoría de la información. La entropía es la idea central de esta teoría y mide la cantidad de aleatoriedad en una secuencia finita de varios símbolos. A.N. Kolmogorov y Ya. Sinai extendieron la definición de entropía y la utilizaron para estudiar transformaciones que preservan medidas en la teoría ergódica.

La entropía es un concepto que se aplicó inicialmente a sistemas de termodinámica para tener una idea de la cantidad de calor disipado por un cuerpo. La idea general es que un cuerpo cuando libera mayor cantidad de energía calorífica es que las moléculas que lo componen se mueven a mayor velocidad chocando unas con otras, y en cada choque de moléculas se libera alguna cantidad de energía en forma de calor. Entonces, una alta medida de entropía significaría más calor liberado por el cuerpo y una baja medida de entropía hace pensar que el cuerpo libera poco calor.

Imaginemos que hay un experimento con el posible resultado dado por un conjunto finito $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Supóngase que la probabilidad de obtener el resultado a_i es p_i , $0 \leq p_i \leq 1, p_1 + \dots + p_k = 1$. Si uno de los a_i , supóngase que a_1 ocurre con una probabilidad p_1 muy cercana a 1, entonces en la mayoría de los ensayos el resultado será de a_1 . Si el evento a_1 ocurre entonces no nos sorprenderá. Si de manera cuantitativa medimos la magnitud de *ser sorprendidos* de alguna manera, sería igual a 0 si p_1 es cercana a 1. Utilizaremos un ejemplo para denotar lo anterior, cuando nosotros recibimos una señal o un estímulo de una fuente, lo percibimos a través de los órganos como los ojos, la nariz, etc. Está establecido que la magnitud de nuestra percepción es proporcional al logaritmo de la magnitud de los

estímulos. Es razonable pensar en una aproximación al mundo real, que para cada posible resultado a_i con probabilidad p_i la magnitud de “ser sorprendidos”, es igual a $1/p_i$. Por lo tanto, la magnitud percibida del estímulo es igual al $\log(1/p_i)$. Para resumir, tenemos que

$$\text{informacion} = -\log(\text{probabilidad}) \quad (1.58)$$

Pues que a_i puede ocurrir, entonces tomamos el promedio sobre todos los valores de a_i , es decir:

$$\sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} \quad (1.59)$$

que es llamada la entropía de \mathcal{A} .

Definición 8 *Un experimento corresponde a una partición medible $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_k\}$ de un espacio de probabilidad (X, μ) . Definimos la entropía de la partición \mathcal{P} de la siguiente manera:*

$$H(\mathcal{P}) = \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i} = -\sum_i p_i \log p_i \quad (1.60)$$

donde $p_i = \mu(E_i)$ y la base de los logaritmos es 2.

Cuando la partición tiene dos subconjuntos, el valor máximo posible de la entropía es $\log 2$, y si escogemos la base logarítmica 2, el valor máximo de la entropía es $\log_2 2 = 1$. Se debe a Kolmogorov, Shannon y Kullback el desarrollo de modelos matemáticos para la entropía y la información, dando origen a la Teoría de la Información y la Teoría Ergódica. La entropía se identifica con un estado de desorden, en el sentido que un orden es un sistema de probabilidades que se introduce en el sistema, para poder prever su evolución.

1.9. Necesidades de nuevas herramientas

Para explicar e interpretar la naturaleza, durante mucho tiempo se recurrió a las ecuaciones de la mecánica newtoniana, durante mucho tiempo fuimos partícipes de la idea de que las ideas de Newton rigen al universo, sin embargo con el paso del tiempo y de una forma inevitable se descubrieron fenómenos que no eran posible de explicarlos con una simple ecuación matemática o con un conjunto de ecuaciones, a pesar de introducir nuevas variables y en ocasiones tener que replantear el modelo y agregar nuevos supuestos. Durante los últimos años del siglo XIX, se desató la crisis del determinismo. Los nuevos descubrimientos en la

astrofísica y en la termodinámica mostraron la existencia de fenómenos irreversibles en los cuales el tiempo avanza hacia estados de máxima entropía. Fue a partir de aquí de donde se empezó a gestar una nueva visión del mundo actual.

El determinismo fracasó, con ello surge la necesidad de replantear los problemas actuales y de entender una nueva visión del universo. Aquí, el problema de la realidad y la existencia humana son inseparables. En esta forma de ver la naturaleza, la reversibilidad y la simplicidad clásicas son sólo casos particulares [7]. El problema de la caracterización de las ST es algo complejo, no existe un parámetro que nos permita caracterizarlas. Este trabajo es una primera aproximación al mapeo de las ST en fractales y al problema de su caracterización. A menudo, se requiere conocer las estructuras que subyacen a las ST bajo alguna transformación, pues brindan información de otra índole.

No siempre es posible predecir un fenómeno, en ocasiones los datos no siguen un patrón relativamente estable, o los datos no son suficientes, en esas ocasiones se necesita de un **análisis cualitativo** que por lo general requieren de la opinión de un grupo de expertos y son mucho más subjetivos pues dependen de opiniones que pueden ser divergentes.

Con esto se expone la necesidad de desarrollar herramientas que permitan conocer las estructuras fractales que presentan las ST, sobre todo para poder entender el fenómeno. La sensibilidad de las condiciones iniciales impide hacer un pronóstico a largo plazo. Sin embargo, un pronóstico a corto plazo en series caóticas es posible si se conoce el modelo (Berliner, 1991). El problema se convierte en un problema de estimación de parámetros y que cumpla con los supuestos, lejos de ser un problema de predicción.

Capítulo 2

Fractalidad

2.1. Los Fractales

Los fractales constituyen un tema matemático de actualidad, gracias a las figuras que se generan por computadora siguiendo los procedimientos recursivos; los fractales se han popularizado en los últimos años y se caracterizan por su autosemejanza, son estructuras infinitas contenidas en una superficie finita y resultan de utilidad en áreas como la botánica, la biología, la economía, la computación, etc. En el análisis de una gran diversidad de fenómenos como turbulencias, bolsa de valores, dispersión del humo, etc. En el siguiente capítulo pretendemos dar una definición de Fractal, la descripción al análisis fractal, la dimensión fractal, los métodos para su construcción y las funciones recursivas.



Figura 2.1: La hoja del helecho de Barnsley

2.1.1. ¿Qué son los fractales?

Las figuras comunes de la geometría euclidiana no generan formas complejas como la hoja de un helecho o el perfil de una montaña. Éstas están sumamente limitadas, puesto que al dibujar cada vez más figuras del mismo tipo se pierde la estructura cuando es ampliada. Sin embargo, esto no ocurre precisamente en la naturaleza; la superficie rugosa de un mueble viejo mantiene prácticamente la misma complejidad si la ampliamos. Pero sí es posible imaginar cuerpos geométricos que posean esas propiedades, si los aumentamos y ampliamos conservan sus estructuras en cada parte, así como en las partes de todas sus partes.

La mención más explícita en la historia sobre el fenómeno de autosemjanza se remota al siglo V a. c, al examinar las ideas del filósofo griego **Anaxágoras** (500 a. c - 428 a. c). Según Anaxágoras el universo fue un caos de innumerables semillas, al cual la mente, mediante un movimiento de rotación, dio orden y forma. Estas “semillas” no son elementos pues cada una es tan compleja como el todo. La alusión a la autosemjanza es clara: según Anaxágoras todo el universo y sus partes, por pequeñas que sean, son homogéneas; sus diferencias son sólo de tamaño, no de composición. Así, cada semilla no es más simple que el resto, ni esencialmente distinta en su composición ([8], p. 297).

Notemos que se tiene una noción intuitiva de autosemjanza (o autosimilitud) muy sencilla y natural; generalmente la hemos percibido en algún momento y, de alguna manera, en diversos contextos, por ejemplo, al observar diferentes objetos de la naturaleza como los árboles, los helechos, el brocoli, la coliflor, las nubes, entre muchas otras figuras. Los subconjuntos de un objeto fractal tienen en esencia la misma forma que el conjunto completo. Los objetos fractales son divisibles infinitamente, donde cada subconjunto contiene el mismo detalle que el conjunto completo.

B. Mandelbrot[9], padre de la geometría fractal quien describió (informalmente) la noción de autosemjanza, a la que denomina “escalante”, de la siguiente manera: *Dícese de una figura geométrica o de un objeto natural cuyas partes tienen la misma forma o estructura que el todo, salvo que están a diferente escala y pueden estar ligeramente deformadas.*

A este tipo de formas geométricas que, entre otras propiedades, contienen una imagen de sí mismas en cada una de sus partes (autosemjanza), se les llaman ahora fractales, y hace ya más de una década que inundaron al mundo con un conjunto de nuevas reglas que tratan de

describir la naturaleza.

El propio Kenneth Falconer en [10] define un fractal al conjunto F que satisface alguna (s) de las siguientes propiedades:

1. F tiene una *estructura fina*, es decir posee detalle en todas las escalas de observación.
2. F es muy irregular para ser descrito en el lenguaje tradicional de la geometría, tanto local como globalmente.
3. F posee una forma de autosimilitud o autosemejanza, posiblemente aproximada o estadística.
4. Usualmente la dimensión fractal de F (definida de alguna manera) es mayor que su dimensión topológica.
5. En la mayoría de los casos F es definida de una manera muy simple, posiblemente recursiva.

Uno de los pioneros en la construcción de conjuntos extraños fue Georg Cantor (1845-1918), quien junto con Julius W. Dedekind (1831-1916) desarrollaron la teoría de conjuntos establecieron una propuesta universal para conjuntos infinitos, la cual establece que *un sistema S es infinito cuando es similar a una parte de él mismo*.

Giuseppe Peano (1858-1932) construyó curvas continuas que llenan el espacio. David Hilbert (1862-1943) desarrolló una construcción similar, una curva que pasa por cada punto en un cuadro, sin embargo esta curva no es diferenciable en ningún punto. La curva de Koch que se puede apreciar en la figura 2.2, es de longitud infinita, pero que además envuelve una área finita, no es diferenciable en ningún punto y contiene un número infinito de imágenes en miniatura perfectas de sí misma.

Las herramientas de la geometría fractal son, hoy día, elementos insustituibles en el trabajo de muchos físicos, químicos, biólogos, fisiólogos, economistas, etc., pues les han permitido reformular viejos problemas en términos novedosos, y tratar problemas complejos de forma muy simplificada. Los fractales, que durante mucho tiempo se consideraron “monstruosidades” geométricas e inaplicables divertimentos matemáticos, subyacen en fenómenos y estructuras tan variadas como la distribución de las estrellas del Universo, la ramificación

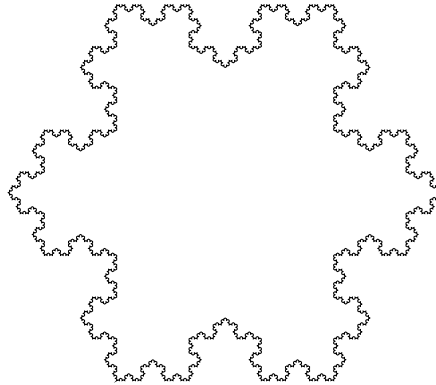


Figura 2.2: Copo de nieve de Koch es una de las más sencillas figuras fractales, y una de las primeras. Fue descubierta por el matemático sueco Helge von Koch en 1906.

alveolar en los pulmones, la frontera difusa de una nube, las fluctuaciones de precios en un mercado, y aún en la frecuencia de repetición de las palabras de este texto.[11]

2.1.2. Fractales en el plano complejo

Los fractales generados por las teorías de Gaston Julia (1893-1978) y Pierre Fatou (1878-1929), que datan de 1918, están basados en el plano complejo. Fatou estudió los procesos iterativos como $Z \rightarrow Z^2 + C$ donde $Z, C \in \mathbb{C}$. Se interesó en particular en el caso donde $Z_0 = 0$ que fue analizado a finales del siglo XX, con auxilio de ordenadores, por Mandelbrot, quien generó la representación gráfica del comportamiento de esta serie para cada valor complejo C , lo que hoy se conoce como el conjunto de Mandelbrot, que se observa en la figura 2.3.

El conjunto de Mandelbrot está dado por la siguiente ecuación:

$$Z_{n+1}(x, y) = (Z_n(x, y))^2 + C(x, y) \quad (2.1)$$

$$C(x, y) = (x_0, y_0) \quad (2.2)$$

Siendo x_0, y_0 los valores iniciales.

Estos conjuntos, fruto de los trabajos de Pierre Fatou y Gaston Julia, surgen como resultado de la aplicación reiterada de funciones holomorfas; es decir, $z \rightarrow f(z) \rightarrow f(f(z)) \rightarrow \dots$. Ahora, lo que nos interesa es analizar el caso de funciones polinómicas de grado mayor que

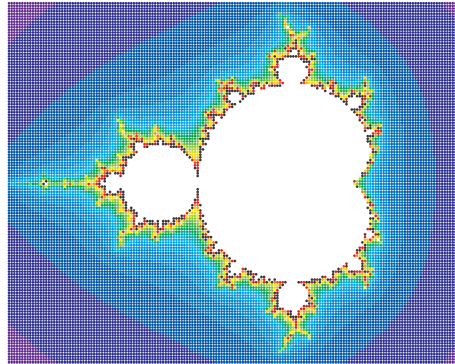


Figura 2.3: Representación del Conjunto de Mandelbrot

uno. Al aplicar sucesivas veces una función polinómica es muy posible que el resultado tienda a ∞ . Al conjunto de valores de $z \in \mathbb{C}$ que no escapan al infinito mediante esta operación se le denomina *Conjunto de Julia Relleno*, y a su frontera, simplemente Conjunto de Julia. Estos conjuntos se representan mediante un algoritmo de tiempo de escape, en que cada píxel se colorea según el número de iteraciones necesarias para escapar. Suele usarse un color especial, a menudo el negro, para representar los puntos que no han escapado tras un número grande y prefijo de iteraciones.

El Conjunto de Julia muestra como aparentemente un ecuación muy sencilla puede resultar en un conjunto altamente intrínseco. Las funciones en el plano complejo como $f(z) = z^2 + C$ con $C \in \mathbb{R}$ puede resultar en fractales de una apariencia extraña. El Conjunto de Julia plantea una relación con la iteración de funciones de variable compleja.

El Conjunto de Julia está dado por las siguientes ecuaciones:

$$Z_{n+1}(x, y) = (Z_n(x, y))^2 + C(x, y) \quad (2.3)$$

$$Z_0 = (x_0, y_0) \quad (2.4)$$

Siendo x_0, y_0 los valores iniciales.

Arthur Cayley (1821-1895) trató de determinar que raíz de una ecuación compleja; sería obtenida por medio de aproximaciones desde varios puntos iniciales, utilizando el método

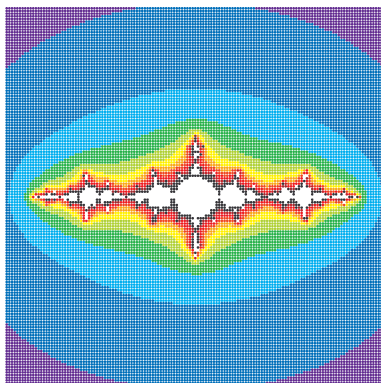


Figura 2.4: Representación del Conjunto de Julia

iterativo de Newton. Utilizando computadoras modernas se puede mostrar que las fronteras entre las regiones definidas en este problema son de naturaleza fractal.

Hoy por hoy, la geometría fractal ha generado su propio lenguaje con representaciones de un enorme contenido visual. En realidad, se trata de operaciones geométricas para rotar, trasladar, escalar y deformar cualquier figura a nuestro antojo. Los fractales han revolucionado la tecnología de la generación y reproducción de imágenes. Hoy día no sólo se les utiliza para almacenar o transmitir señales visuales, sino también para simular paisajes. Al decir de otros autores, los fractales parecen encontrarse en esa frontera difusa que existe en este mundo entre el caos y el orden; están ahí donde la imaginación apenas llega.

2.1.3. Dimensión fractal

Si bien, los objetos no son estrictamente sólidos ni presentan deformaciones, a pesar de que viven en un espacio tridimensional, su dimensión es fraccionaria entre uno y dos. Para calcular la dimensión de un fractal es necesario que, de una u otra manera, la gráfica esté llena parcial o totalmente el plano, existen diferentes enfoques para lograr lo anterior.

Mandelbrot introdujo el término fractal espacialmente para fenómenos espaciales o temporales que son continuos pero no diferenciables; y esto exhibe correlaciones parciales sobre varias escalas. El término fractal, estrictamente definido, se refiere a *una serie en la cual la dimensión de Hausdorff - Besicovitch rebasa a la dimensión topológica del objeto*. Una serie

continua, como un polinomio, es diferenciable puesto que se puede dividir en un número infinito de líneas rectas suaves. Una serie continua no diferenciable no puede ser resuelta. Todo intento de dividirlo en partes más pequeñas hará que los resultados sean más rugosos. Para una función fractal lineal, la dimensión D de Hausdorff - Besicovitch puede variar entre 1 (completamente diferenciable) y 2 (de manera áspera y regular que ocupa la totalidad de un espacio bidimensional). Para superficies el rango de D se encuentra entre 2 y 3.

El trabajo de Mandelbrot en [9] sugiere que las dimensiones fractales de las costas y otros fenómenos naturales son del orden de 1.2 a 1.3, lo que implica que dominan los efectos de largo alcance. Muestra de los datos publicados en muchas variables muestran que no sólo son los fractales pero que pueden tener una amplia gama de dimensión fractal.

Uno de los procedimientos para caracterizar, e incluso para poder clasificar los objetos, es el de atribuirle una cantidad numérica; en este caso, se les atribuye el concepto de **dimensión fractal**. Para calcular la dimensión de un fractal es necesario calcular de alguna manera la forma en que la gráfica llena parcial o totalmente el plano, por supuesto, existen varios enfoques para hacerlo, para consultar sobre otros métodos nos remitiremos a [10].

Existen diferentes dimensiones que pueden ser usada para describir un sistema dinámico y sus atractores, entre ellas se encuentran la dimensión de espacio fase, la dimensión topológica, la dimensión de información y la dimensión de integración (Embedding Dimension).

La *dimensión de espacio fase* N es el número de valores reales independientes que son necesarios para especificar una condición inicial arbitraria. La dimensión de espacio fase es una propiedad de un sistema dinámico. Las otras dimensiones que vamos a considerar son generalmente propiedades de conjuntos, pero las consideraremos en el contexto en donde son propiedades de atractores.

Un punto fijo x_0 de la función F se llama atractor si existe un intervalo alrededor de x_0 con la propiedad de que cualquier otro x_1 que permanezca en ese intervalo tenga una órbita en éste y tienda a x_0 bajo iteración de F [12]. Una vez que un punto fase entra en un atractor, no puede salir de él. Una propiedad observada en muchos experimentos numéricos es que casi cada condición inicial en una determinada cuenca toma el mismo tiempo promedio y, por lo tanto, la misma medida asintótica de probabilidad [13].

Desde un punto de vista topológico, la circunferencia y un segmento rectilíneo son la misma curva y encierran el mismo tipo de superficie (pues es posible transformar una en la otra mediante una deformación continua, es decir, sin que sea preciso someter a ninguna de las dos a manipulaciones “no topológicas”). Desde un punto de vista métrico, no son la misma curva, ya que la circunferencia y el área que encierra, el círculo, son finitos, y, en cambio, el segmento, aunque es finito, no encierra con su borde un área finita.

Es un quehacer matemático el intentar clasificar los objetos por lo que se conserva, por los invariantes, y analizar, por otra parte, qué ocurre con lo que no se conserva, cómo hay que analizarlo, qué hay que hacer con ello, cómo integrarlo en el mundo de los entes matemáticos.

Analicemos brevemente lo que significa el concepto de dimensión topológica, término que introdujo Henri Poincaré para discernir sobre cuestiones de este tipo.

La definición inductiva dada por Poincaré al introducir este concepto fue la siguiente:

1. El conjunto vacío tiene dimensión -1 .
2. Si los bordes de los entornos pequeños de todos los puntos del ente son espacios $(n - 1)$ dimensionales, decimos que el espacio que consideramos es n dimensional.

El conjunto vacío tiene una dimensión topológica: $D = -1$, un punto $D = 0$, un segmento de recta $D = 1$, un cuadrado $D = 2$ y un cubo $D = 3$.

K. Devlin, en 1988, dijo que “En una curva sólo podemos movernos en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie podemos ir adelante, atrás, a derecha, a izquierda. En un volumen podemos movernos, además, hacia arriba, hacia abajo. La curva tiene una dimensión, la superficie tiene dos dimensiones y el volumen tiene tres dimensiones”, con esto se refiere a una definición topológica de acuerdo al movimiento que se puede hacer dentro de un ente matemático.

Una definición distinta de dimensión topológica es la definición por semejanza, llamada también de autosemejanza, que sugirió Felix Hausdorff en 1919, readaptada posteriormente por Besicovich (**Dimensión de Hausdorff-Besicovich**):

Sea $N.r^D = 1$, la dimensión topológica de un objeto H es el número que verifica lo anterior con razón de semejanza r , entonces aplicando logaritmos y despejando D tenemos lo siguiente:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}} \quad (2.5)$$

Por ejemplo si un cubo lo dividimos en 8 cubos iguales, esto es $N = 8$, $r = 1/2$, entonces se obtiene lo siguiente:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3 \quad (2.6)$$

De donde concluimos que la dimensión de autosemejanza es $D = 3$. La dimensión topológica, en el sentido de Poincaré, coincide en general con la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich. Pero hay ciertos objetos geométricos en los que no ocurre así. A estos objetos geométricos los denominaremos, usando la terminología de Benoit Mandelbrot, Fractales. Diremos que la dimensión definida por Poincaré es su Dimensión Topológica y que la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich es su Dimensión Fractal.

Para un sistema dinámico con una fase de N dimensiones espaciales, sea $n(\varepsilon)$ el número de esferas N -dimensionales de radio ε requeridas para cubrir un atractor. La capacidad, o dimensión fractal [14], se define de la siguiente manera:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(\varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \quad (2.7)$$

Cuando un conjunto es “simple”, por ejemplo, un conjunto límite, un ciclo o un toro¹, la dimensión fractal es un entero igual a la dimensión topológica. El ejemplo clásico de un conjunto con una dimensión fractal no entera es el conjunto de Cantor.

Para una discusión más completa del concepto de **dimensión** en el contexto de los sistemas dinámicos, se sugiere consultar [15]. Nótese que la dimensión fractal, la dimensión de información, y la dimensión de integración requieren métricas en un espacio fase. La dimensión de información, además, requiere una medida de probabilidad.

¹Un toro es la superficie de revolución engendrada por una circunferencia que gira alrededor de una recta fija de su plano, que no la corta.

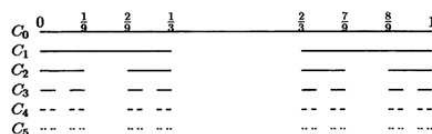


Figura 2.5: Conjunto de Cantor $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$

Box Counting Method

El método de Conteo por Cajas (Box Counting Method) consiste en establecer un sistema cartesiano de coordenadas que contenga el conjunto de puntos de la imagen que deseamos analizar al cual llamaremos conjunto A . Posteriormente se procede a contar la cantidad $N_n(A)$ de cuadrados, o cubos, esto es dependiendo de la dimensión en que se encuentre el objeto analizado, el tamaño de dicha dimensión será de $\frac{1}{2^n}$ de tamaño que interceptan al conjunto A . Es posible obtener valores muy exactos de $N_n(A)$ para $n = 0, 1, \dots, 6$. Dichos valores dependen del sistema de coordenadas que se utilicen. La aproximación de la dimensión fractal está dado por la pendiente de la recta obtenida por la regresión lineal de los puntos $(\ln(2^n), \ln N_n(A))$ [16]. A continuación una imagen de la descripción del método.

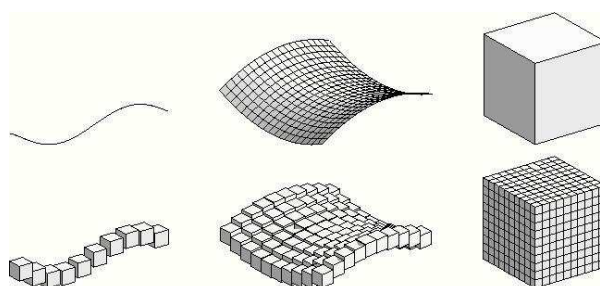


Figura 2.6: Cubriendo una curva, una superficie y un sólido con cuadritos de tamaño $\epsilon = \frac{1}{2^n}$

Teorema 1 (Teorema del Conteo por Cajas) Sea $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, donde la métrica Euclidea es usada. Cubrimos \mathbb{R}^n por “cajas” que se tocan entre sí, de longitud $(1/2^n)$ como ejemplificamos en la siguiente figura. Sea $\mathcal{N}_n(A)$ que denota el número de “cajas” de longitud $(1/2^n)$ que intersecta al atractor. Si:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathcal{N}_n(A))}{\ln(2^n)} \quad (2.8)$$

entonces A tiene una dimensión fractal D .

En resumen, para calcular una estimación de la Dimensión de un objeto fractal, a través del algoritmo de Box-Counting, es necesario contruir una tabla con 2 columnas:

- 1era: lado de cada caja cuadrada.
- 2nda: número de cajas con el lado correspondiente que se necesitan para el recubrimiento o que contienen puntos de F .

Posteriormente, es necesario contruir otra tabla de idénticas dimensiones a la primera con los datos $\log - \log$. Finalmente, sobre una gráfica $\log - \log$, se disponen los puntos de coordenadas $(\log N_k, k \log 2)$. De acuerdo con la disposición de los puntos, se ajusta una recta mediante una regresión lineal, cuya pendiente será una estimación de la dimensión.

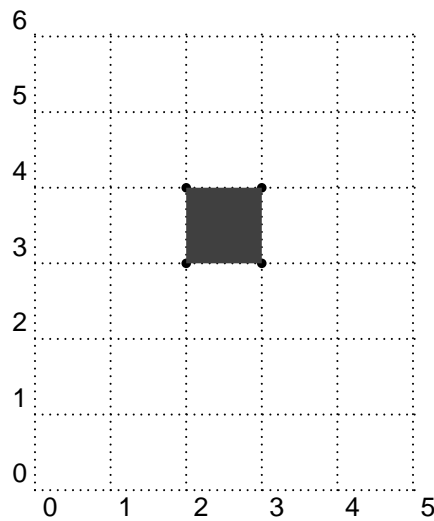


Figura 2.7: Cajas de lado $(1/2^n)$ cubriendo \mathbb{R}^2 con $\mathcal{N}_2(A)$

2.1.4. El exponente de Hurst

Hurst [17] empezó a trabajar en la presa del río Nilo alrededor de 1907; hidrólogo de profesión, permaneció en la región del Nilo por los siguientes 40 años. Durante su estancia se dedicó a resolver el problema de controlar las reservas del río, la idea era que no se derramara. El problema principal consistía en practicar una política de descargas de aguas; sin embargo, si el flujo del río era demasiado bajo, entonces el nivel era bajo. El problema que tenía que resolver Hurst era determinar la política de descargas a seguir, de tal manera que las reservas nunca se desbordaran ni se vaciaran.



Figura 2.8: Cuenca del Río Nilo ©Jacques Descloitres, MODIS Land Rapid Response Team.

La caída de agua por lluvia era incontrolable y seguía una caminata aleatoria, pues es común suponer cuando se trabaja con varios grados de libertad; cuando trató de probarlo, descubrió una nueva herramienta: **El exponente de Hurst**.

Hurst [17] midió cómo los niveles de la reserva fluctuaban alrededor de su nivel promedio a través del tiempo. El rango de la fluctuación cambiaba, dependiendo de la longitud del lapso de tiempo usado para medirlo. La regla $T^{\frac{1}{2}}$ consiste en que el rango se incrementa en la raíz cuadrada del tiempo. Hurst decidió crear un cociente sin dimensiones, dividiendo el rango por la desviación estándar de las observaciones. Esto se conoce como *Rescaled Range Analysis* o análisis *R/S*. Hurst halló que la mayoría de los fenómenos naturales siguen una caminata aleatoria sesgada o tendencia con ruido estadístico.

La fuerza de la tendencia y el nivel de ruido pueden ser medido mediante el análisis *R/S*

a una escala de tiempo, esto es, por cuanto H está por arriba de 0.50. Para explicar el trabajo de Hurst para una serie de tiempo en general, debemos definir un rango comparable con el de las fluctuaciones de los niveles de altura de la reserva.

Ahora comenzamos con una *Serie de Tiempo* $\{x_t\}$, con u observaciones:

$$x_{t,N} = \sum_{u=1}^t (e_u - M_N) \quad (2.9)$$

denotando a $x_{t,N}$ como la desviación acumulada sobre N periodos. e_u es el flujo entrante en el año u y M_N es el promedio de e_u sobre N periodos.

Ahora el rango se convierte en la diferencia entre el máximo y el mínimo de alcanzados en la ecuación anterior, es decir:

$$R = \max(x_{t,N}) - \min(x_{t,N}) \quad (2.10)$$

donde $\max(x_{t,N})$ es el valor máximo y $\min(x_{t,N})$ es el valor mínimo de x_t .

Para comparar los diferentes tipos de series de tiempo, Hurst dividió este rango por la desviación estándar de las observaciones originales. Esta nueva escala del rango debe incrementarse con el tiempo. De donde se obtiene la siguiente relación:

$$R/S = (\alpha N)^H \quad (2.11)$$

con R/S Rango con la nueva escala, α constante, N Número de observaciones y H el exponente de Hurst.

El exponente de Hurst se determina por medio de una regresión lineal de los puntos de $\ln(R/S)_n$ contra $\ln(n)$, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\ln(R/S)_n = \log(c) + H \log(N) \quad (2.12)$$

Si la serie es una caminata aleatoria, entonces el valor de $H = 0,50$. En otras palabras, el rango de desviaciones acumuladas debe de incrementarse con la raíz cuadrada del tiempo. Una vez que Hurst aplicó su estadístico al río Nilo observó que el exponente corresponde a 0,90 [17] lo mismo fue probado con otros ríos, pero el exponente fue siempre mayor que 0,50.

Cuando el exponente de $H \neq 0,50$, las observaciones no eran independientes, cada observación poseía memoria de todos los eventos que la precedían. Esta no era una “memoria” de corto plazo, comúnmente llamada Markoviana. Esta memoria era diferente: es de largo plazo; en teoría debe durar por siempre. Un evento que exhibe las estadísticas de Hurst es el resultado de un gran flujo de sucesos interconectados.

A partir del exponente H puede determinarse la dimensión fractal como $D = 2 - H$, un movimiento browniano tiene una dimensión fractal de 1.5, esto es $H = 0,5$. Si $H > 0,5$ la dimensión fractal disminuirá y tenderá a acercarse a una recta, en el caso contrario $H < 0,5$ la dimensión fractal aumentará y se acercará a una superficie.

El exponente de Hurst tiene una gran cantidad de aplicaciones a toda serie de tiempo pues es altamente robusto. Tiene unos cuantos supuestos sobre el sistema que es estudiado, y puede clasificar las series de tiempo. Puede distinguir una serie aleatoria de una que no lo es, inclusive, si la serie no tiene la distribución Gaussiana.

2.2. Medidas Asociadas

Nos concentraremos sólo con medidas de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Básicamente una medida es sólo una manera de atribuir un tamaño numérico a los conjuntos, de manera que si un conjunto es descompuesto en un número finito o contable de piezas de manera razonable, el tamaño del conjunto es la suma del tamaño de las piezas.

Llamemos μ una medida en \mathbb{R}^n si μ asigna un número no negativo, a cada subconjunto de \mathbb{R}^n tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$
3. Si $A_1 A_2 \dots$ es una secuencia finita de conjuntos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Si los A_i son conjuntos de Borel disjuntos, entonces se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Entonces llamamos $\mu(A)$ como la *medida* del conjunto A , y pensamos en $\mu(A)$ como el tamaño de A medido de alguna manera. La primera condición establece que la medida de conjunto vacío es cero. La segunda indica que tan largo sea el conjunto, tan largo sea la medida, tan largo va a ser el conjunto. Y la última condición establece que si un conjunto es unión de un número finito de piezas (que se pueden sobreponer), entonces la suma de la medida de las piezas es al menos igual a la medida del todo. Si un conjunto es descompuesto en un número finito de conjuntos disjuntos de Borel, entonces la medida de las piezas es igual a la medida del todo.

Medida de Hausdorff

Recordemos que si U es un subconjunto no vacío de un espacio Euclideo n -dimensional, \mathbb{R}^n el diámetro del conjunto U está definido por $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$; es decir, la distancia más lejada de dos pares de puntos en U . Si $\{U_i\}$ es una colección finita de conjuntos de diámetro δ que cubre F , esto es $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ con $0 \leq |U_i| \leq \delta$ para cada i , decimos que $\{U_i\}$ es una δ cubierta de F .

Supóngase que F es un subconjunto de \mathbb{R}^n y s es un número no negativo, para cualquier δ definimos lo siguiente:

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F\right\} \quad (2.13)$$

Así, puesto que buscamos todas las cubiertas de F por conjuntos de diámetros a lo más δ , buscamos minimizar esa suma de todas las s -ésimas potencias de los diámetros. Como δ decreciente, la clase de todas las cubiertas de F en 2.13 se reduce. Por lo tanto, el ínfimo $\mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ incrementa, y se aproxima al límite cuando $\delta \rightarrow 0$.

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F) \quad (2.14)$$

Este límite existe para cualquier subconjunto de F en \mathbb{R}^n , puesto que el límite puede ser y es usualmente 0 o ∞ . Llamamos $\mathcal{H}^s(F)$ la **Medida de Hausdorff s -dimensional** de F .

Puede mostrarse que \mathcal{H}^s es una medida. Se puede demostrar que $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$, que si E es contenido en F entonces $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$, y que si $\{F_i\}$ es un colección finita de conjuntos, entonces:

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) \quad (2.15)$$

La medida de Hausdorff generaliza la familia de ideas de longitud, área, volumen, etc. Puede demostrarse que para subconjuntos de \mathbb{R}^n , la Medida de Hausdorff n -dimensional con algunas constantes múltiples es una medida n -dimensional de Lebesgue, esto es el volumen n -dimensional. De manera más precisa, si F es una subconjunto Borel de \mathbb{R}^n , entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\mathcal{H}^s(F) = C_n^{-1} \text{vol}^n(F) \quad (2.16)$$

Donde $C_n = \pi^{n/2}/2^n(n/2)!$. Si n es par, y si n es impar $C_n = \pi^{(n-1)/2}/((n-1)/2)!/n!$

2.3. Construcción de fractales

Una de las formas más populares para generar fractales es utilizar un *Sistema Iterado de Funciones*, término introducido por Michael Barnsley en 1985, dado que los fractales representan autosemejanza. Estas autosimilitudes no sólo son propiedades de los fractales, también son usadas para definirlos.

Sea D un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n , comúnmente $D = \mathbb{R}^n$. Un mapeo definido $S : D \rightarrow D$ es llamado una **contracción** sobre D si existe un número c con $0 < c < 1$ tal que $|S(x) - S(y)| \leq c |x - y| \forall x, y \in D$. Cabe mencionar que cualquier contracción es continua.

Si la desigualdad se cumple, *i.e.* si $|S(x) - S(y)| = c |x - y|$, entonces el conjunto S se transforma en conjuntos geométricos similares, y llamamos S como una *contracción similar*.

Un número finito de familias de contracciones $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ con $m \geq 2$ es llamado un *Sistema iterado de funciones* y se denota por SIF. Llamamos un subconjunto no vacío compacto F de D un *atractor* o un conjunto invariante para el Sistema Iterado de Funciones si:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

La propiedad fundamental del Sistema Iterado de Funciones es que determina un único atractor, que usualmente es un fractal.

Teorema 2 *Considérese sistema iterado de funciones dado por las contracciones $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ en $D \in \mathbb{R}^n$ tal que satisface:*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad (x, y) \in D$$

Con una $c_i < 1$ para cada i . Entonces existe un único atractor F . i.e, un conjunto no vacío compacto tal que:

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

Más aún si nosotros definimos una transformación S en la clase S de un conjunto compacto no vacío por:

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

para $E \in S$, y escribimos S^k como la k -ésima iterada de S , entonces:

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$$

Para cada conjunto $E \in S$ tal que $S_i(E) \supset E \forall i$.

El copo de nieve de Koch se obtiene al añadir repetidamente triángulos a un simple triángulo equilátero. Las nuevas adiciones se hacen dividiendo los lados en tres partes iguales y colocando un nuevo triángulo en el tercio central. De esta manera, cada nueva figura es más compleja, pero todos los triángulos que la forman son exactamente iguales al original. Esta igualdad entre la figura original y cualquiera de sus más minúsculos detalles es característica de los fractales. No sólo el copo de nieve de Koch se obtiene a partir de un SIF, el triángulo de Sierpinsky y una gran parte de los fractales se construyen con el mismo mecanismo una regla sencilla que se repite una y otra vez, en el que el resultado de aplicar la regla a un dato se utiliza como dato para la siguiente iteración.

En la figura 2.9 se observa la construcción del copo de nieve de Koch.

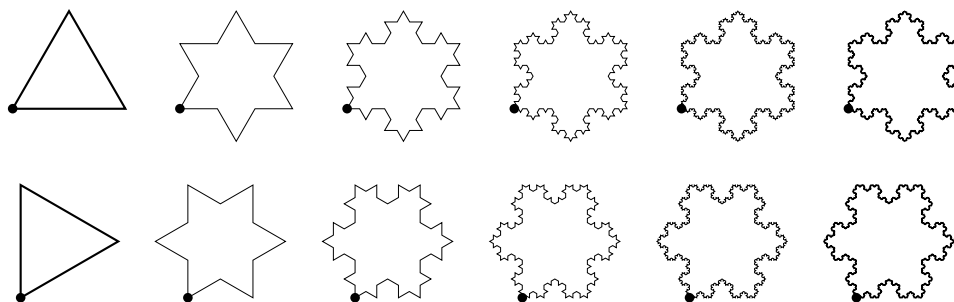


Figura 2.9: Construcción iterativa del Copo de nieve de Koch.

2.4. Series de Tiempo autosimilares

Los fenómenos autosimilares tienen el mismo aspecto o comportamiento cuando se visualizan a distintas escalas en una cierta dimensión. La dimensión puede ser el espacio o el tiempo. Una ST es *autosimilar*, si la serie agregada tiene la misma función de autocorrelación que la serie original. Esto es, dada una ST estacionaria $\{x_t\}$, la ST agregada denotada por $\{x_k^m\}$ que se define mediante la suma de la serie temporal original en bloques adyacentes y no superpuestos de tamaño m , entonces si $\{x_t\}$ es autosimilar tiene la misma función de autocorrelación que la serie $\{x_k^m\} \forall m$.

El grado de autosimilaridad de una serie puede expresarse utilizando el parámetro de Hurst. Una serie es estadísticamente autosimilar si $(0,5 \leq H \leq 1)$ a medida de que $H \rightarrow 1$ el grado de autosimilaridad se incrementa. Es también una medida de la longitud de dependencia a largo plazo: Un valor de $H = 0,5$ indica la ausencia de dependencia a largo plazo. Se han utilizado distintos métodos para determinar si una serie temporal dada es autosimilar y, de ser así, para estimar el parámetro de autosimilaridad H . Los métodos más comunes para la estimación son:

1. *Gráfico de Varianza - Tiempo*
2. *Gráfico R/S*
3. *Varianza Agregada*

Los métodos anteriores son más bien métodos de carácter práctico, y no se usan para hacer estimaciones puntuales del parámetro H sino más bien para tener una idea aproximada

acerca de si un conjunto de datos dado se ajusta a las características autosimilares o si es un modelo con dependencia de corto alcance. Para obtener estimaciones puntuales del parámetro se requiere hacer uso del *Estimador de Whittle*.

2.5. Movimiento Browniano

En 1827, el botánico Robert Brown descubrió otro ejemplo de un fractal, al observar que las pequeñas partículas en suspensión, dentro de un fluido, estaban sometidas a rápidos movimientos irregulares, producidos por la agitación térmica de las moléculas del fluido. Este fenómeno, que posteriormente fue nombrado Movimiento Browniano en honor a su descubridor, es debido al incesante choque del polen con las moléculas del líquido. Estos choques ocurren un largo número de veces en un pequeño intervalo de tiempo, independientemente de los otros, y el efecto de un golpe en particular es pequeño comparado con el efecto global. Einstein publicó un estudio matemático de este movimiento que eventualmente le permitió a Jean Baptiste Perrin (ganador del premio Nobel) calcular el número de Avogrado.

En 1905, Albert Einstein formuló las bases matemáticas del movimiento Browniano, basándose en el supuesto de que el movimiento se debía a la acción de las moléculas de agua bombardeando los granos de polen. Pero el trabajo de Einstein, aunque elegante, no incluía los experimentos de laboratorio necesarios para demostrar la realidad de sus conclusiones. Fue cuando Einstein buscó a Perrin para reforzar sus cálculos con las observaciones. De 1908 a 1913, Perrin, desconocía los documentos publicados de Einstein, él se dedicó a los experimentos. Él creyó que si el movimiento browniano es el resultado de las colisiones moleculares, el promedio de movimientos de las partículas en suspensión están relacionadas con su tamaño, densidad y las condiciones del fluido (por ejemplo, presión y densidad), de conformidad con las leyes de gas. Con su trabajo Perrin recibiría el premio Nobel de física en 1926.

Esta teoría física del movimiento sugiere que el movimiento es aleatorio y tiene las siguientes propiedades:

- Tiene incrementos independientes.
- Los incrementos son variables aleatorias independientes.
- El movimiento es continuo.

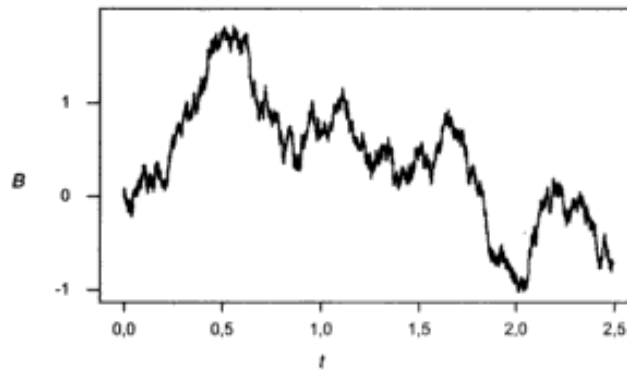


Figura 2.10: Movimiento Browniano en \mathbb{R}

La primera propiedad significa que el desplazamiento de una partícula de polen sobre intervalos disjuntos de tiempo son variables aleatorias independientes. Mientras que la segunda propiedad es desde el teorema del límite central [18]. (Anexo 1).

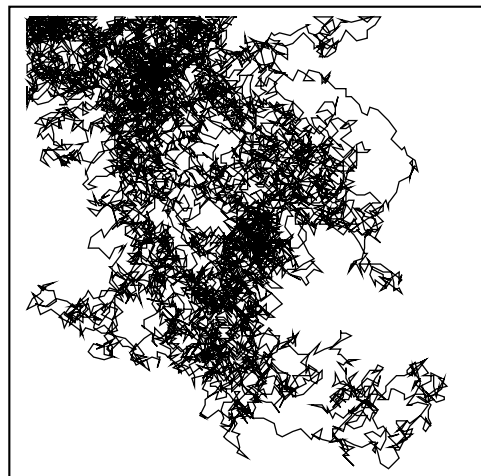


Figura 2.11: Movimiento Browniano en \mathbb{R}^2 .

En los años 20, Norbert Wiener presentó un modelo matemático para este movimiento basado en la teoría de los procesos estocásticos. En 1923, propuso una formulación matemática rigurosa que exhibía el comportamiento aleatorio similar al observado en el Movimiento Browniano. Las trayectorias descritas por este **Proceso de Wiener** en un espacio tridimensio-

nal eran tan irregulares como si tuvieran una dimensión Hausdorff igual a 2. Este es un ejemplo de un fenómeno natural con un comportamiento fractal que puede ser explicado por un simple modelo matemático. Una trayectoria puede ser escrita como una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $f(t)$ es la posición de la partícula en un instante de tiempo t . Podemos estudiar a f desde dos puntos de vista distintos. Pensándolo en la imagen $f([t_1, t_2]) = \{f(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}$ como un subconjunto de \mathbb{R}^n con t considerada como un simple parámetro o considerando la gráfica de $t, f = \{(t, f(t)) : t_1 \leq t \leq t_2\}$ como producto de la variación de f con respecto al tiempo. Las trayectorias Brownianas son, en general, fractales.

Definición 9 *Un proceso estocástico $\{B_t, t \geq 0\}$ es un movimiento browniano si se cumplen las condiciones siguientes:*

- $B_0 = 0$
- Fijados n instantes $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ los incrementos $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}$ son variables aleatorias independientes.
- Si $s < t$, el incremento $B_t - B_s$ tiene una ley normal $N(0, t - s)$.
- Las trayectorias del proceso son funciones continuas.

De lo anterior, se desprende que el movimiento Browniano es un proceso Gaussiano. La media del Movimiento Browniano está dada por $E(B_t) = 0$. Y la covarianza está dada por:

$$\begin{aligned} E(B_s B_t) &= E(B_s (B_t - B_s + B_s)) \\ E(B_s (B_t - B_s)) + E(B_s^2) &= s = \text{mín}(s, t) \end{aligned}$$

Si $s \leq t$, puede comprobarse que si un proceso gaussiano tiene media cero y función de autocovarianza $\text{mín}(s, t)$ entonces cumple las condiciones de la definición anterior.

Este movimiento tiene muchas propiedades y conexiones con otras ramas de las matemáticas. Es interesante mencionar que casi todas sus trayectorias son no diferenciables en ningún punto, las trayectorias Brownianas son entonces ejemplos de funciones consideradas “extrañas”, que son continuas pero no diferenciables en ningún punto.

2.6. Movimiento Browniano Fraccionario

Sea $(B(t); -\infty < t < \infty)$ un Movimiento Browniano Estándar y H un parámetro real tal que $0 < H < 1$. Se define de acuerdo a Mandelbrot y Van Ness el movimiento Browniano Fraccionario de índice H para $-\infty < t < \infty$ mediante la siguiente integral estocástica:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \times \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2}] dB(u) + \int_0^t (t-u)^{H-1/2} dB(u) \right\} \quad (2.17)$$

y $B_H(0) = 0$. Se conoce que B_H tiene incrementos estacionarios y se tienen las siguientes expresiones para sus varianzas y covarianzas:

$$\text{Var } B_H(t) = C_H t^{2H} \quad (2.18)$$

$$\text{donde } C_H = \frac{1}{[\Gamma(H+1/2)]^2} \times \left\{ \int_{-\infty}^0 [(1-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2}]^2 du + \frac{1}{2H} \right\}.$$

Si $\varphi_H(t, s)$ denota la covarianza de $B_H(t)$ se tiene que $s < t$, que $\varphi_H(t, s) = \frac{C_H}{2} [t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}]$.

Denotemos por $\Delta_v^{(k)} g(x)$ el incremento de orden k y tamaño v de la función g en el punto x , es decir:

$$\Delta_v^{(k)} g(x) = \Delta_v^{(k-1)} g(x+v) - \Delta_v^{(k-1)} g(x) \quad (2.19)$$

La función de covarianza $\varphi_H^{(k)}(t, s)$ del proceso de incrementos de orden k de $B_H(t)$ es para $k = 1$, y $k = 2$

$$\varphi_H^{(1)}(t, s) = \frac{C_H}{2} \Delta_u^{(2)} \theta_{2H}(t-s-v) \varphi_H^{(2)}(t, s) = -\frac{C_H}{4} \Delta_u^{(4)} \theta_{2H}(t-s-v) \quad (2.20)$$

donde $\theta_{2H}(x) = |x|^{2H}$. De las últimas expresiones se deduce que el proceso $B_H(t)$ no es estacionario pero tiene incrementos de primero y segundo orden estacionario. El movimiento Browniano Fraccionario provee una generalización de Movimiento Browniano, es una familia de un parámetro de un proceso Gaussiano, $B_H(t), t \geq 0$ que tiene media cero y covarianza:

$$E[B_H(S)B_H(t)] = 1/2(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad (2.21)$$

Donde $0 < H < 1$, y en el caso que $H = \frac{1}{2}$ se tiene el Movimiento Browniano Ordinario. Para explicar el Movimiento Browniano Fraccionario como una función $V_h(t)$ tal que satisface la siguiente propiedad: $\Delta V_h \propto \Delta t^H$. Con $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta V_h(t_2) - \Delta V_h(t_1)$ $0 < H < 1$ Y si $H = 1/2$, obtenemos el Movimiento Browniano. Si $H > 1/2$ tenemos persistencia, es decir son ST caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. Lo que suceda hoy impactará en el futuro por siempre como por ejemplo cambios semanales de ahora están relacionados con los cambios semanales futuros. Si $H < 1/2$ tenemos antipersistencia, un sistema antipersistente cubre menos distancia que uno aleatorio.

Capítulo 3

Mapeo Fractal

En esta sección consideraremos algunas de las aplicaciones de la teoría de la probabilidad al estudio de los fractales. La más importante de estas posibilidades es la construcción de fractales “aleatorios”; esto es, conjuntos aleatorios o medidas aleatorias que exhiben las irregularidades (y regularidades) características de los conjuntos y medidas normalmente asociadas a los fractales.

Analizaremos los caminos en la que la teoría de la probabilidad puede ser usada en el estudio de la geometría fractal, por ejemplo algunos de los conjuntos fractales como el triángulo de Sierpinsky, pueden ser construidos usando métodos aleatorios. Modificaremos un poco la idea básica de autosimilitud por una de autosimilitud estadística. Un conjunto aleatorio, se dice, es estadísticamente autosimilar si el conjunto está hecho de pequeñas partes, y cada parte es similar a una instancia del mismo conjunto aleatorio. Las partes no son similares al todo, pero son similares al conjunto que puede ser obtenido del todo si los eventos aleatorios ocurrieran de manera diferente. Es decir, una parte es similar al conjunto aleatorio cuya distribución de probabilidad es la misma que la distribución del conjunto entero.

De igual forma, se introduce el algoritmo del *Juego del Caos*, un algoritmo propuesto por Barnsley en 1988, que permite la construcción de conjuntos fractales deterministas a través de métodos aleatorios. Dicho algoritmo será el pilar para la construcción del Pentágono de Sierpinsky y permitirá el mapeo de Series de Tiempo en fractales.

3.1. Mapeo

Podemos definir un *Mapeo* como una función de X en Y cuya regla de correspondencia denotada por: $f : X \rightarrow Y$ satisface:

- Condición de Existencia: Todos los elementos de X están relacionados con elemento en Y , esto es $\forall x \in X \exists y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$
- Condición de Unicidad: Cada elemento de X está relacionado con un único elemento de Y , es decir, si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2$.

Un mapeo puede ser visto como una aplicación que lleva algo observado a un sistema de referencia diferente, en donde se puede preservar todas las características, en este caso se habla de monicidad. Además de los mapeos, existen los *mapeos aleatorios*.

El estudio de los mapeos aleatorios fue iniciado de manera diferente por diversos autores en 1950, y las propiedades de estos modelos han recibido mucho atención en la literatura. Los modelos ampliamente estudiados han sido casos particulares de un modelo general denotado por $T_{\mathbf{p}(n)}$. Dicho modelo consiste en lo siguiente:

Sea $[n]$ el conjunto de enteros $\{1, 2, \dots, n\}$ y sea \mathcal{M}_n el conjunto de todos los mapeos de $[n]$ en $[n]$. Para cada $n \geq 1$, sea $\mathbf{p}(n) = \{p_{ij}(n) : 1 \leq i, j \leq n\}$ un arreglo tal que $p_{ij}(n) \geq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$ y $\sum_{j=1}^n p_{ij}(n) = 1$ para cada $1 \leq i \leq n$, sea $X_1^n, X_2^n, \dots, X_n^n$ variables aleatorias independientes tal que $\Pr\{X_i^n = j\} = p_{ij}(n) \forall 1 \leq i, j \leq n$. Entonces el mapeo aleatorio $T_{\mathbf{p}(n)} : [n] \rightarrow [n]$ queda definido en términos de las variables $X_1^n, X_2^n, \dots, X_n^n$ por:

$$T_{\mathbf{p}(n)}(i) = j \iff X_i^n = j$$

Para toda $1 \leq i, j \leq n$, la distribución de $T_{\mathbf{p}(n)}$ está dada por:

$$\Pr\{T_{\mathbf{p}(n)} = f\} = \prod_{i=1}^n p_{if(i)}(n)$$

Para cada $f \in \mathcal{M}_n$. Cualquier mapeo $f \in \mathcal{M}_n$ puede ser representado como una gráfica dirigida $G(f)$ en un conjunto de vértices etiquetados con $1, 2, \dots, n$ tal que hay una arista dirigida del vértice i al vértice j en $G(f)$ si y sólo si $f(i) = j$. Esto se puede representar de la siguiente manera:

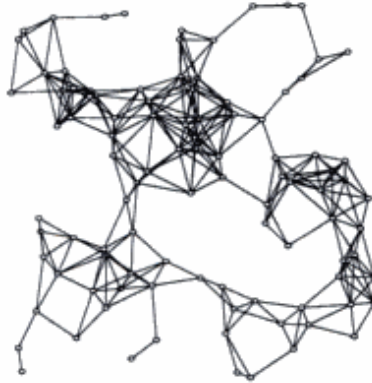


Figura 3.1: Gráfica Geométrica Aleatoria correspondiente a un Mapeo Aleatorio

3.1.1. El juego del Caos

Comencemos con 3 puntos en el plano, acomodados en las esquinas de un triángulo equilátero, a los cuales los llamaremos a_L, a_R, a_U , escogemos un punto inicial arbitrario x_0 en el plano. A partir de estos datos vamos a definir una secuencia aleatoria $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en el plano. Supóngase que x_n fue definido. Para la siguiente iteración, seleccione de manera aleatoria uno de los tres puntos a_e . El siguiente término x_{n+1} en nuestra secuencia es el punto medio del segmento de línea que resulta de unir x_n y a_e ; esto es:

$$x_{n+1} = (a_e + x_n)/2 \quad (3.1)$$

Esta construcción es llamada el juego del Caos y fue propuesta por Barnsley en 1988 y puede consultarse en [16]. De esta manera, obtenemos una secuencia aleatoria de puntos en el plano. Pero cuando varias iteraciones son llevada a cabo por una computadora, la figura se ve cada vez menos aleatoria conforme pasa el tiempo.

Esta secuencia aleatoria converge al triángulo de Sierpinsky, el conjunto autosimilar en el plano está determinado por el SIF consistente definido por las siguientes tres transformaciones:

$$f_L(x) = \frac{a_L + x}{2} \quad f_R(x) = \frac{a_R + x}{2} \quad f_U(x) = \frac{a_U + x}{2} \quad (3.2)$$

Ahora consideremos el sentido en el que converge.

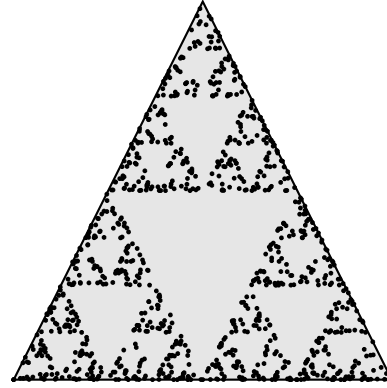
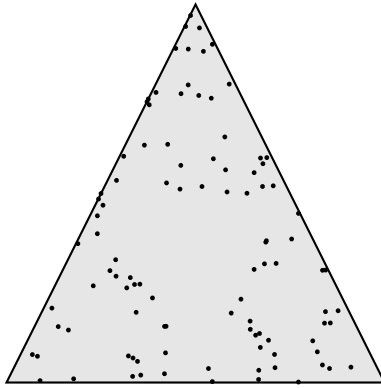


Figura 3.2: Triángulo de Sierpinsky con 100 puntos.

Figura 3.3: Triángulo de Sierpinsky con 1000 puntos.

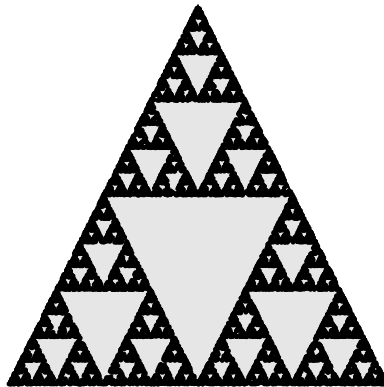


Figura 3.4: El Triángulo de Sierpinsky es un fractal denominado por el matemático Polaco W. Franciszek Sierpinski en 1915.

Convergencia. De hecho, consideremos un SIF más general. Sea S un espacio métrico completo no vacío, sea E un alfabeto, y para cada $e \in E$ sea $f_e : S \rightarrow S$ una función. Lo anterior define un SIF. Asumimos que si hay una constante $r < 1$ tal que:

$$\rho(f_e(x), f_e(y)) \leq r\rho(x, y) \quad (3.3)$$

$\forall x, y \in S$ y toda $e \in E$; esto es, que el sistema iterado de funciones sea contráctil. El atractor K es el único conjunto compacto no vacío tal que:

$$K = \bigcup_{e \in E} f_e[K] \quad (3.4)$$

Ahora consideremos una secuencia aleatoria $(p_e)_{e \in E}$ de probabilidades donde $p_e > 0 \forall e \in E$ y $\sum_{e \in E} p_e = 1$. Esto se convierte en una medida natural de un producto \mathcal{M} en un espacio $E^{(\omega)}$ de infinitas cadenas. Para nuestro espacio muestra de probabilidad tomamos $E^{(\omega)}$ y sea $\mathbb{P} = \mathcal{M}$ la medida de probabilidad. Esta construcción de la medida puede ser escrita de otra manera: si σ es una cadena infinita, escribimos σ_n como la n -ésima letra.

Si escogemos una cadena σ de manera aleatoria, de tal manera que las letras individuales σ_n son independientes e idénticamente distribuidas con distribución:

$$\sum_{e \in E} p_e \mathcal{E}_e$$

Ahora escogemos un punto arbitrario $x_0 \in S$ inicial. Cuando definimos x_{n-1} y $x_n = f_{\sigma_n}(x_{n-1})$, podemos simplificar nuestra notación escribiendo una composición:

$$f_{e_1 e_2 \dots e_n} = f_{e_1} \circ f_{e_2} \circ \dots \circ f_{e_n}$$

En esta notación, nuestra secuencia aleatoria se puede escribir de la siguiente manera: $f_{\sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1}(x_0)$. Una convención similar puede ser usada para abreviar el producto de las pes:

$$p(e_1 e_2 \dots e_n) = p_{e_1} p_{e_2} \dots p_{e_n} \quad (3.5)$$

Teorema 3 *Sea un sistema iterado de funciones contráctil denotado por (f_e) , con pesos (p_e) , y un punto inicial x_0 arbitrario. Sea K el atractor del sistema iterado de funciones. Sea la secuencia aleatoria (x_n) definida previamente. Entonces con probabilidad de 1, el conjunto de todos los puntos de la secuencia (x_n) es exactamente el conjunto K .*

Demostración Sea y_0 un punto en K , entonces tenemos que

$$\rho(f_{\sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1}(x_0), f_{\sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1}(y_0)) \leq r^n \rho(x_0, y_0) \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Así, nuestra secuencia aleatoria, comenzando en x_0 , tiene el mismo grupo de puntos que uno que comienza en y_0 . Asumimos que $x_0 \in K$. Cada función f_e mapea K en K y K es un conjunto cerrado. Esto hace claro que cada conjunto de puntos está en K . Por el contrario, mostraremos que cada punto en K es un conjunto de puntos de la secuencia (x_n) con probabilidad 1.

Si α es una cadena finita, decimos que α ocurre en una cada $\sigma \iff \sigma = \beta \alpha \tau$ para algunas cadenas β, τ . Ahora, dada una cadena finita $\alpha \in E^{(m)}$ considerando los eventos:

$$S_{km}(\alpha) = \{\beta \alpha \tau : \beta \in E^{km}, \tau \in E^\omega\} \quad (3.7)$$

Los eventos $S_{km} (k = 0, 1, 2, \dots)$ dependerán de bloques disjuntos de letras en la cada α , de manera que son eventos independientes. La probabilidad de cada S_{km} es $p(\alpha) > 0$. Por el lema de Borel-Cantelli (o por la ley de los grandes números) con probabilidad 1, de manera infinita muchos de los S_{km} suceden. En particular, uno de los S_{km} ocurre. Así que con probabilidad uno α ocurre en la cadena σ . Hay varias cadenas finitas α , con probabilidad 1, todas las cadenas finitas ocurren en σ . Utilizaremos esto para mostrar que cada elemento en K es un conjunto de puntos de la secuencia (x_n) .

Fijando una $x \in K$. Sea $\theta \in E^\omega$ una dirección de x , tal que:

$$\{x\} = \bigcap_{n \rightarrow \infty} f_{\theta \uparrow n}[K] \quad (3.8)$$

Dada n , sea $\alpha = \theta_n \theta_{n-1} \dots \theta_2 \theta_1$ la inversión de las primeras n letras de θ . Sabemos que α ocurre en σ ; decimos que $\sigma = \beta \alpha \tau$, donde $|\sigma| = m$. Entonces $x_{m+n} = f_{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \beta_m \dots \beta_1}(x_0) \in f_{\theta \uparrow n}[K]$. Estos puntos x_{m+n} convergen al punto x , entonces x es un punto del conjunto. ■

Lo anterior expresa que el conjunto de puntos construido llena densamente la figura límite, y la figura obtenida no depende de la sucesión concreta de transformaciones elegidas. Esta es la característica más interesante de dicho algoritmo, pues cuando el proceso aleatorio se repite un gran número de veces, el conjunto de puntos resultante se aproxima a una figura conocida y claramente determinista.

Algoritmo 1 . (Algoritmo del juego del Caos). Entrada: Un sistema Iterado de Funciones (IFS) $\mathcal{F}\{X; c_1, \dots, c_n\}$ y una secuencia aleatoria i_1, \dots de números desde $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Inicio: Escoger un $x_0 \in X$ arbitrario.
2. Iteración: $t - 1 \rightarrow t$: dado el vector $x_{t-1} \in X$ calcular x_t como $x_t = c_{i_t}(x_{t-1})$
3. Repetir el paso 2.

Parece sorprendente que un juego aleatorio como este dé lugar a modelos tan estructurados como los fractales, ilustrando las potentes conexiones que subyacen en las matemáticas. El trabajo matemático subyacente consiste en obtener la descripción analítica en términos de coordenadas cartesianas de todas las transformaciones estudiadas sobre los puntos del plano, que en la geometría afín está previamente estudiado.

A partir de un sistema de coordenadas cartesiano, se pueden hallar fórmulas matemáticas que permitan obtener las coordenadas del punto transformado a partir del anterior. Para ello, cada transformación puede descomponerse en partes, expresándose como la que resultaría al aplicar sucesivamente varias transformaciones simples.

Otra propiedad considerable del algoritmo es que aunque el atractor resultante es un fractal no es comúnmente llamado un atractor extraño dado que la órbita es aleatoria en lugar de ser caótica. La regla es lineal y no puede producir caos. La regla es sólo un ejemplo de que cómo puede ser jugado el juego del caos. En lugar de mover la mitad cada vértice con cada iteración, es decir utilizar un valor $r \neq 0,5$, se puede mover un valor $r \in [0, 1]$. El valor de $r = 0$ hará que éste nunca se despege de su condición inicial, mientras que el valor $r = 1$ hará que se visite en varias ocasiones los tres vértices en orden aleatorio. Ambos casos son poco interesantes, puesto que dan origen a un objeto con dimensión cero, en lugar de un objeto fractal. Se observa también que la dimensión fractal decrementa de 2 a 0 conforme el valor de r incrementa.

A continuación se observa la contrucción del triángulo de Sierpinsky mediante el juego del caos.

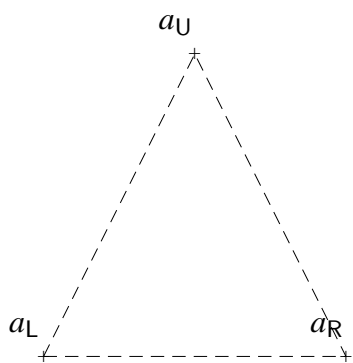


Figura 3.5: Vértices Iniciales

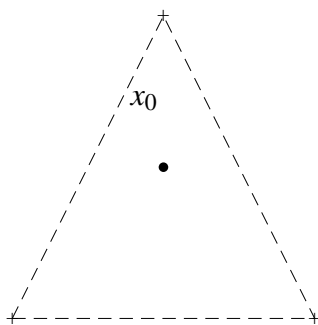


Figura 3.6: Comienzo

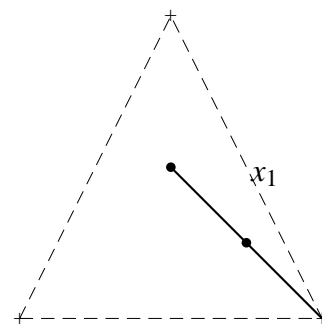


Figura 3.7: $x_1 = f_R(x_0)$

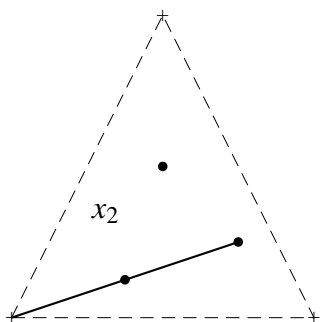


Figura 3.8: $x_2 = f_L(x_1)$

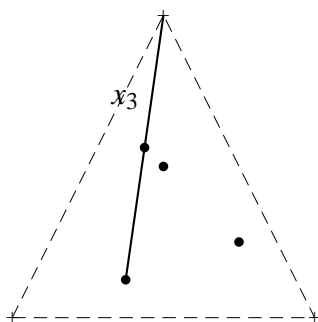


Figura 3.9: $x_3 = f_U(x_2)$

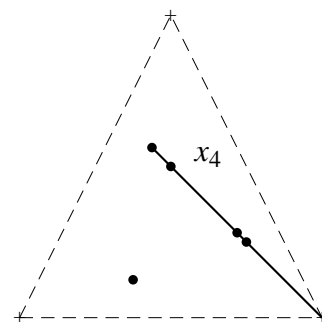


Figura 3.10: $x_4 = f_R(x_3)$

3.2. Pentágono de Sierpinsky

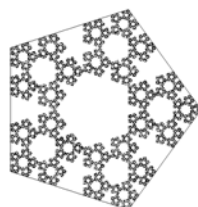


Figura 3.11: Pentágono de Sierpinsky

El siguiente sistema iterado de funciones denota el Pentágono de Sierpinsky.

$$f_A(x) = (a_A + x)(r)$$

$$f_B(x) = (a_B + x)(r)$$

$$f_C(x) = (a_C + x)(r)$$

$$f_D(x) = (a_D + x)(r)$$

$$f_E(x) = (a_E + x)(r)$$

Con r el índice de Dorian. El *Pentágono de Sierpinsky* al igual que el Triángulo de Sierpinsky es una muestra de como un conjunto fractal determinístico puede ser construido mediante métodos aleatorios. Dicho pentágono será la herramienta que nos permitirá el mapeo y la caracterización de las Series de Tiempo. Su dimensión fractal es de 1.91. Una buena estimación es hacer variar el parámetro r , el cual será el índice de caracterización de la Serie de Tiempo.

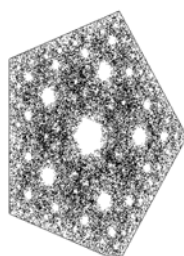


Figura 3.12: Variación en el índice para el Pentágono de Sierpinsky.

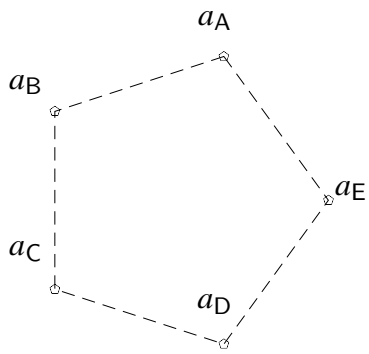


Figura 3.13: Vértices Iniciales

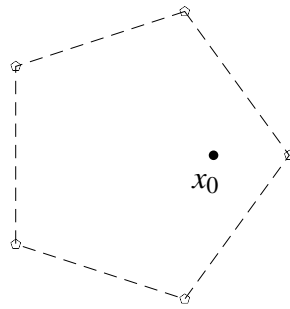


Figura 3.14: Comienzo

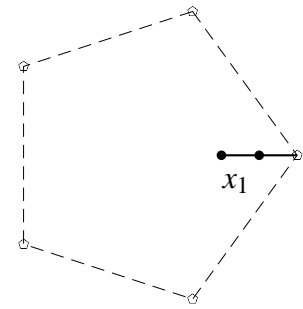


Figura 3.15: $x_1 = f_E(x_0)$

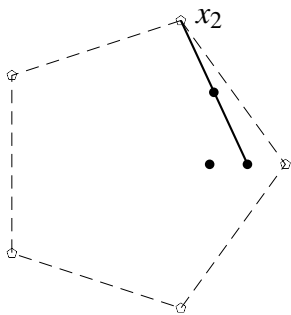


Figura 3.16: $x_2 = f_A(x_1)$

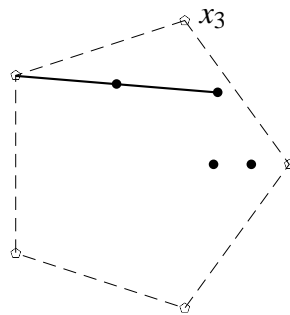


Figura 3.17: $x_3 = f_B(x_2)$

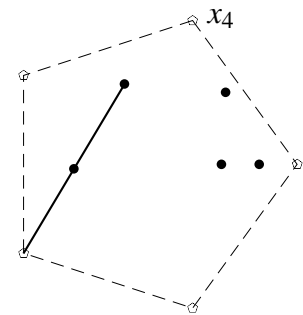


Figura 3.18: $x_4 = f_C(x_3)$

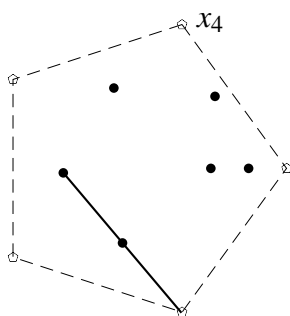


Figura 3.19: $x_5 = f_D(x_4)$

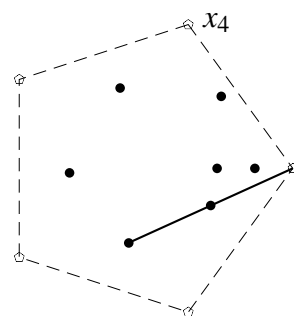


Figura 3.20: $x_6 = f_E(x_5)$

En la página anterior se observa la construcción del pentágono de Sierpinsky mediante el algoritmo del *Juego del Caos*. Ahora se observa la construcción del Pentágono, Hexágono y Octágono de Sierpinsky, los cuales fueron construidos a través de un SIF, permitiéndonos obtener los atractores característicos para cada uno de ellos.

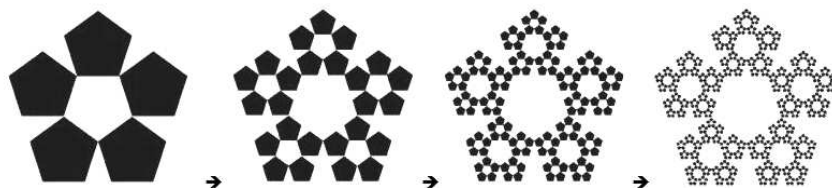


Figura 3.21: Pentágono de Sierpinsky

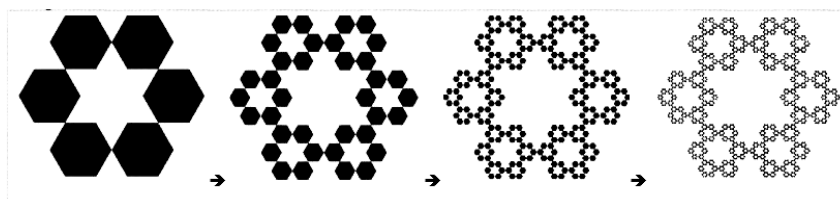


Figura 3.22: Hexágono de Sierpinsky

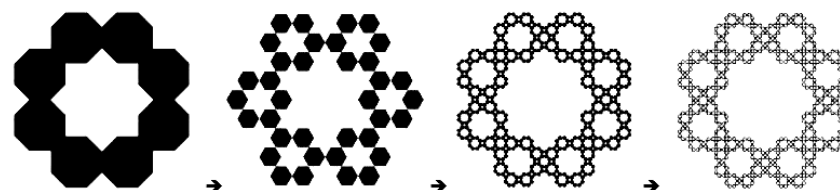


Figura 3.23: Octágono de Sierpinsky

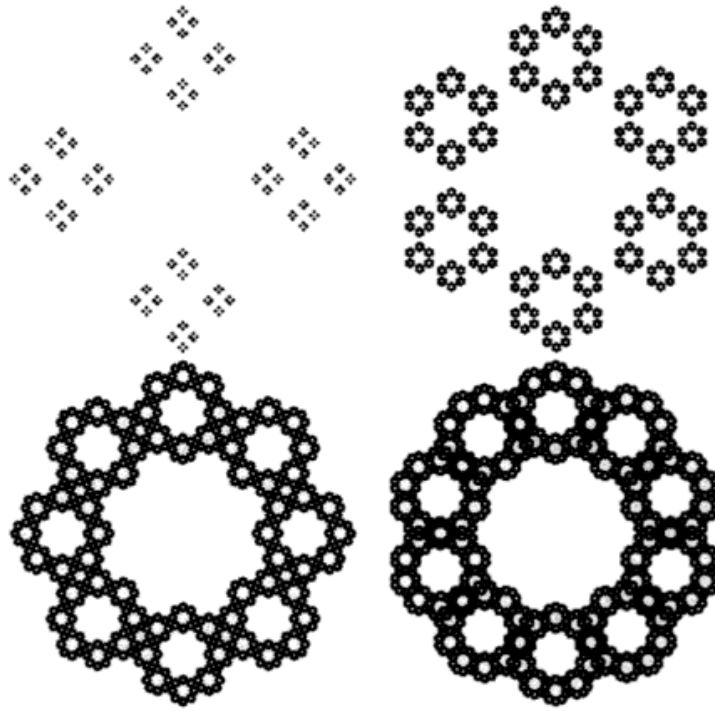


Figura 3.24: El juego del Caos para diferentes Polígonos

3.3. Transformaciones Cíclicas

La representación de una ST en un fractal es una representación gráfica en dos coordenadas, donde una tercera dimensión puede ser interpretada como el eje del tiempo. La idea es usar una representación de una circunferencia o de un polígono con muchos vértices que se asemeje a una circunferencia y de esta manera poder representar n datos mediante n puntos equidistantes en una circunferencia unitaria. A través de esta representación podemos considerar un alfabeto de tamaño n denotada por $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Definimos a una transformación cíclica como un mapeo uno en uno de $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{S}^1$ de un alfabeto \mathcal{A} en un círculo unitario \mathbb{S}^1 definido por:

$$b(a_k) = \left(\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \right)^T$$

El acomodo de los valores que conforman el alfabeto \mathcal{A} se refleja en la posición de la circunferencia en el círculo unitario. El alfabeto correspondiente $\mathcal{A}' \subset \mathbb{S}^1$ está dado por:

$$\mathcal{A}' = \left\{ \left(\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \right)^T \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

Teorema 4 (Fronteras de los fractales después de una Transformación Cíclica). Sea $(Z_t)_{t=1,2,\dots}$ una serie de un alfabeto transformado $\mathcal{A}' \subset \mathbb{S}^1$ resultado de una transformación cíclica. Sea $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ la correspondiente serie fractal generada con $m = \sum_{k=1}^{n/4} \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)$ y condición inicial $X_0 = 0$. Tiene por norma

$$\|X_i - X_j\| \leq \frac{1}{2(1+m)}$$

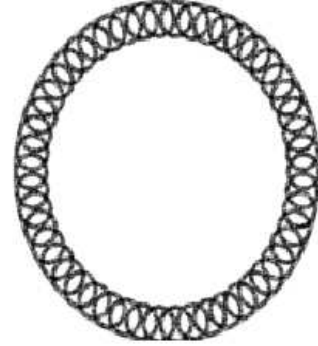


Figura 3.25: Mapeo Cíclico para una transformación del tipo seno **Figura 3.26:** Mapeo Cíclico para una transformación del tipo coseno

Teorema 5 (Fronteras de los fractales después de una Transformación Cíclica). Sea $(Z_t)_{t=1,2,\dots}$ una serie de un alfabeto transformado $\mathcal{A}' \subset \mathbb{S}^1$ resultado de una transformación cíclica. Sea $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$ la correspondiente serie fractal con $m = \sum_{k=1}^{n/4} \sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)$ y condición inicial $X_0 = 0$. Tiene por norma

$$\|X_i - X_j\| \leq \frac{1}{1+m}$$

3.4. El Índice de Dorian

Para el estudio y la caracterización de las ST, se formuló una expresión matemática que dependiera de algunos de los parámetros que pudiéramos obtener a partir de una ST, los parámetros de los cuales depende el índice que a continuación se propone incluye el número

de vértices del polígono en el que se va a mapear y el exponente de Hurst, dentro de la expresión se incluye una suma trigonométrica la cual depende del número de vértices del polígono en el que se va a mapear.

La expresión para el *Índice de Dorian* es la siguiente:

$$\mathcal{D}(n, H) = \frac{H}{(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/4 \rfloor} \cos(\frac{2\pi k}{n}))} \quad (3.9)$$

con $\lfloor n/4 \rfloor$ denotando el menor entero. Y una segunda expresión, la cual depende del parámetro α para caracterizar procesos de ruido $1/f^\alpha$ es la siguiente:

$$\mathcal{D}(n, \alpha) = \frac{\alpha - 1}{2(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/4 \rfloor} \cos(\frac{2\pi k}{n}))} \quad (3.10)$$

De esta manera estos serán los coeficientes que permitirán el Mapeo del las Series de Tiempo y de los procesos de Ruido $1/f^\alpha$, pues el índice de Dorian será el único para cada una de estas series. Cabe mencionar que para lo anterior el valor del índice se encuentra acotado, esto es $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$.

Entre las propiedades interesantes de este índice se encuentra que para un procesos de ruido con $\alpha = 2$, esto es un movimiento browniano y para una representación en un triángulo $n = 3$, el valor de $\mathcal{D} = 0,5$, justamente con el cual al mapearlo y dividir los subintervalos en partes iguales el mapeo converge al triángulo de Sierpinsky. Dicho índice también es sensible a las condiciones iniciales del problema.

A través de este índice es posible obtener la dimensión fractal de la serie, esto se logra mediante la siguiente expresión:

$$D = 2 - \mathcal{D} \Gamma_n \quad (3.11)$$

con \mathcal{D} denotado como el índice de Dorian y $\Gamma_n = (1 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/4 \rfloor} \cos(\frac{2\pi k}{n}))$.

3.5. Simulación y Aleatoriedad

Una de las herramientas más importantes para procesos complejos es la simulación. La palabra simulación tiene sus orígenes en 1940, cuando Von Neuman y Ulam que trabajaban en el proyecto Monte Carlo, durante la Segunda Guerra Mundial, tuvieron el problema de resolver reacciones cuya solución experimental sería demasiado cara y el análisis matemático

muy complicado. Gracias al surgimiento de la computación y el uso de la simulación en ella, pudieron surgir incontables aplicaciones.

Thomas H. Naylor define la palabra simulación como una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos períodos de tiempo. H. Maisel y G. Gnugnoli definen la simulación como una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos periodos de tiempo.

La simulación nos permitirá crear diversas secuencias o ST con características muy específicas, mediante una generación de números aleatorios podremos generar ST aleatorias, es sabido que no existe una manera práctica para obtener una secuencia perfecta de números aleatorios. Los datos usualmente tienen patrones o se derivan de predicciones teóricas basadas en los ideales de números aleatorios. Cuando se generan algunos experimentos numéricos, es necesario que sean repetidos por otros investigadores con el fin de determinar independencia. Es por eso que surge la necesidad de considerar algoritmos rápidos y simples para la generación de números aleatorios. Los lenguajes de computación como “C” han creado programas que emplean generadores de la forma $x_{n+1} = ax_n + b(\text{mod}M)$ para valores de a, b y M . Es necesario establecer un valor para x_0 conocido también como valor “semilla” de esta forma se inicia un proceso recursivo.

Desde que las computadoras pueden generar números aleatorios por reglas determinísticas, no existen números completamente aleatorios. Estos son llamados *números pseudoaleatorios*. En la teoría práctica, éstos son tratados como si fueran aleatorios para simular un fenómeno aleatorio. Con el paso del tiempo, hemos usado el término de generador de números aleatorios en lugar de generador de números pseudoaleatorios. Para generar números aleatorios, se utiliza el método congruencial lineal, denotado por $LCG(M, a, b, x_0)$ que es un algoritmo dado por:

$$x_{n+1} = ax_n + b(\text{mod}M) \quad (3.12)$$

con valor inicial x_0 .

Capítulo 4

Resultados

En esta sección consideraremos los resultados más importantes al mapear algunos de los modelos de Series de Tiempo más importantes, se hace una simulación de diferentes modelos con características específicas para cada uno de ellos, y posteriormente se calcula el índice de Dorian, una vez realizado lo anterior se grafica y se procede a calcular su correspondiente mapeo en el Pentágono de Sierpinsky, para eso se hizo uso de un programa desarrollado en el lenguaje de programación “C”, cuyo código se puede encontrar en el Anexo 2.

Al finalizar el procedimiento anterior, se procede al cálculo de la dimensión fractal para cada una de las imágenes obtenidas. Se incluye la simulación de modelos del tipo $AR(2)$ y $MA(1)$, Series de Tiempo que tienen una tendencia lineal, tendencia cuadrática, exponencial, modelos con varianza creciente y decreciente además de una senoide. Al final del capítulo incluimos procesos de ruido y de ruido blanco.

4.1. Modelo $AR(2)$ y $MA(1)$

A la hora de considerar diferentes Series de Tiempo, se caracterizaron aquellas que fuesen más representativas, entre las cuales podemos mencionar los modelos $AR(p)$ y $MA(q)$, se procedió a la simulación de dichos modelos, el primer modelo que se planteó fue un modelo $AR(2)$, cuya ecuación se encuentra a continuación:

$$Y_t = 0,5y_{t-1} + 0,2y_{t-2} + e_t \quad (4.1)$$

Para la simulación de este modelo se recurrió a una hoja de cálculo, una vez obtenido el modelo, cuya gráfica se aprecia a continuación, se procedió al cálculo de los **quintiles**, que

son los valores de la variable, que ordenados de menor a mayor, dividen a la distribución en partes, de tal manera que cada una de ellas contiene el mismo número de frecuencias, en este caso se dividió a la distribución en 5 partes. Una vez obtenido lo anterior se procedió a su mapeo fractal, calculando el índice de Dorian, cuyo valor para el modelo anterior corresponde a $\mathcal{D} = 0,132924$, calculados los quintiles y sustituido el índice de Dorian, podemos apreciar en la siguiente figura su mapeo fractal.

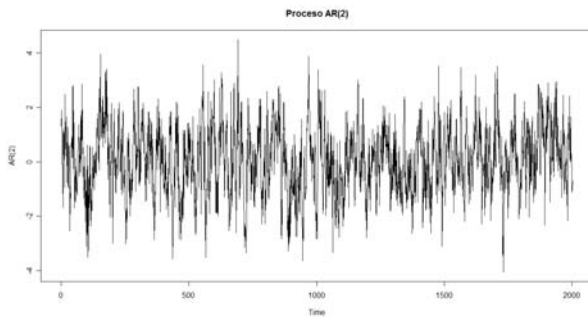


Figura 4.1: Modelo $AR(2)$

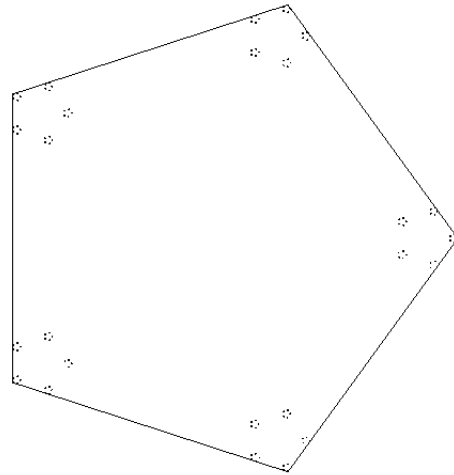


Figura 4.2: Mapeo Fractal del Modelo $AR(2)$

Una vez obtenido su mapeo fractal, observamos que índice de Hurst para la serie anterior es de $H = 0,174$, lo cual nos arroja una dimensión fractal de la serie de $F = 1,826$, muy cercana a la de una superficie. Al realizar el Box Counting Method (Método de conteo por cajas) para el mapeo fractal este nos arroja el valor de $D = 1,91729$.

Para la simulación de un modelo del tipo $MA(1)$ cuya ecuación está dada por:

$$Y_t = e_t - 0,3e_{t-1} \quad (4.2)$$

procedimos a la simulación mediante una hoja de cálculo, se obtuvo el índice de Dorian cuyo valor corresponde a $\mathcal{D} = 0,0557670$, con un exponente de Hurst $H = 0,073$, con lo anterior, el fractal correspondiente se aprecia a continuación, no obstante el cálculo de la dimensión fractal de la ST es de $F = 1,927$, mientras que para el pentágono utilizando el Box Counting Method corresponde a $D = 1,91767$.

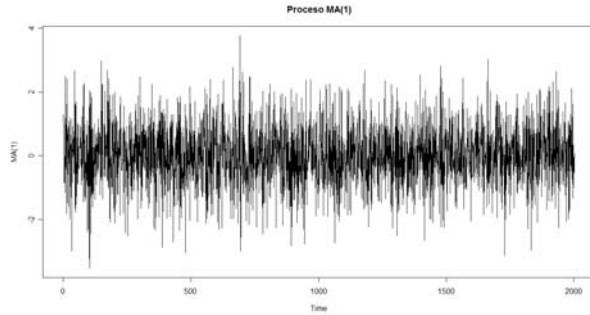


Figura 4.3: Modelo $MA(1)$

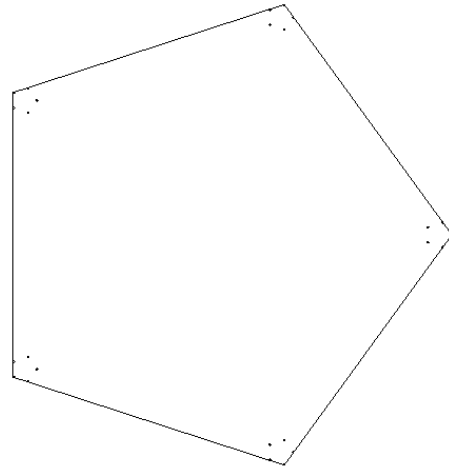


Figura 4.4: Mapeo Fractal del Modelo $MA(1)$.

4.2. Tendencia lineal

Una tendencia lineal se representa por:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + e_t \quad (4.3)$$

Con e_t como ruido blanco, esto es el valor de la ST es igual a una constante llamada ordenada al origen, más una pendiente multiplicada por el valor del tiempo, el cual se incrementa sucesivamente. Si la pendiente es negativa la ST será decreciente, mientras que si la pendiente es positiva, la ST será creciente. Si $\alpha_1 = 0$ tenemos una ST sin tendencia paralela al eje del tiempo. En otro caso tendremos la gráfica de una línea recta.

La representación gráfica con el valor de $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = 0,35$ se exhibe en la siguiente figura, el índice de Dorian, corresponde a $\mathcal{D} = 0,733374$, y el exponente de Hurst a $H = 0,96$. La dimensión fractal de la serie es de $F = 1,04$, parecido a la recta, pues la tendencia es lineal y su representación gráfica asemeja a una recta. Al parecer en la figura correspondiente a su mapeo no hay una superficie fractal, lo anterior debido a que los puntos que se mapearon todos se encuentran en cada uno de los vértices, los cuales fueron coloreados, apenas se distinguen.

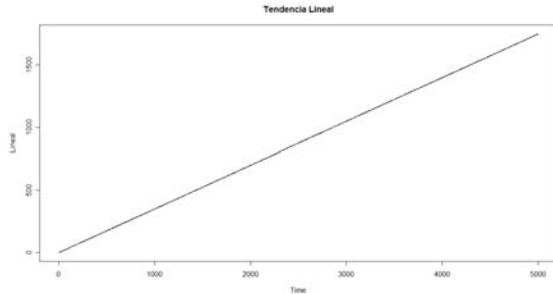


Figura 4.5: Modelo de Tendencia Lineal.

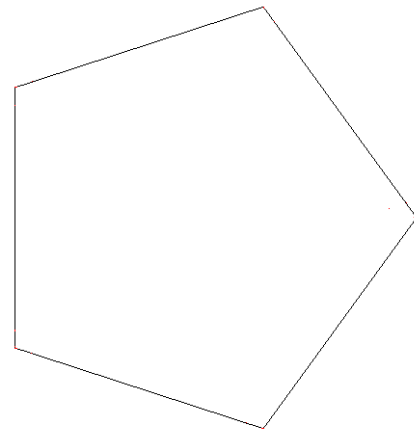


Figura 4.6: Mapeo Fractal del Modelo de Tendencia Lineal.

4.3. Tendencia cuadrática

Como hemos visto anteriormente la tendencia puede ser no lineal esto es cuadrática, logarítmica, polinomial, sinusoidal, etc. La tendencia cuadrática presenta crecimientos o decrecimientos muy significativos. Una tendencia cuadrática se representa por:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + e_t \tag{4.4}$$

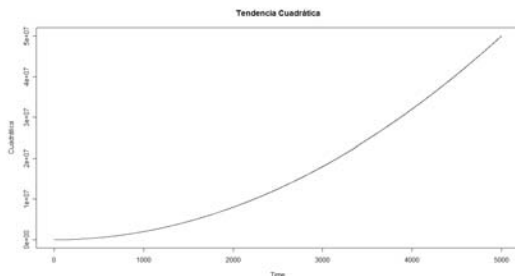


Figura 4.7: Modelo de Tendencia Cuadrática.

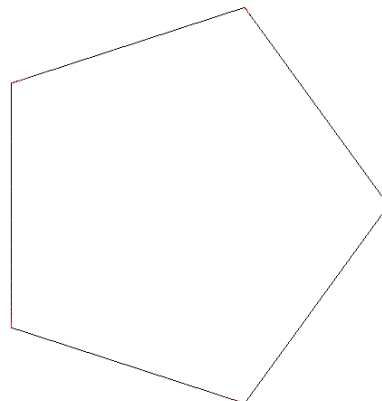


Figura 4.8: Mapeo fractal del Modelo de Tendencia Cuadrática

En la gráfica anterior aprecia una curva con tendencia cuadrática cuyo valores para cada una de las constantes corresponden a $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 2$. Una vez calculado el índice de Dorian, cuyo valor corresponde a $\mathcal{D} = 0,759348$ y $H = 0,994$, la dimensión fractal de la serie es $F = 1,006$. Al igual que el mapeo lineal, no se distingue ninguna figura fractal en su mapeo, pues los puntos se encuentran sobre los vértices, de una manera totalmente encimada, los puntos se representan de color rojo.

4.4. Tendencia exponencial

Una tendencia exponencial existe cuando el crecimiento o decrecimiento de los datos es todavía más rápido, los datos se asemejan a una figura de la función exponencial cuya ecuación está dada de la siguiente manera:

$$Y_t = \alpha_0 e^{\alpha_1 t + e_t} \quad (4.5)$$

Este mismo modelo puede expresarse como:

$$\ln(Y_t) = \ln(\alpha_0) + \alpha_1 t + e_t \quad (4.6)$$

tomando algoritmos de ambos lados. Este modelo es muy parecido al modelo lineal, salvo que existe una transformación del tipo logaritmo de la variable original.

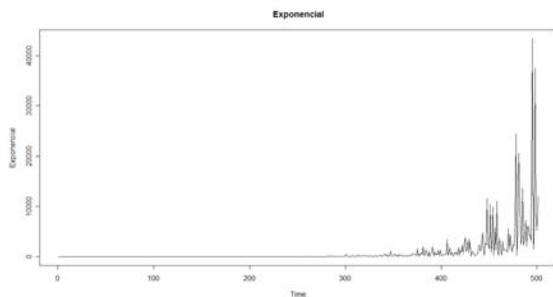


Figura 4.9: Modelo de Tendencia Exponencial

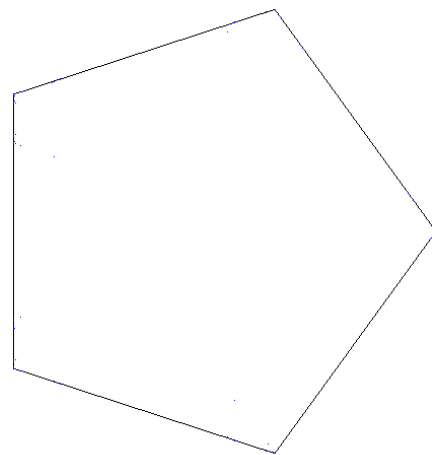


Figura 4.10: Mapeo fractal del modelo de Tendencia Exponencial

La siguiente representación anterior del modelo con tendencia exponencial corresponde a uno cuyos parámetros son $\alpha_0 = 0,025$ y $\alpha_1 = 0,025$. El índice de Dorian para la serie anterior corresponde a $\mathcal{D} = 0,179524$ y el valor de $H = 0,235$. La dimensión fractal de la serie es $F = 1,765$. En la imagen correspondiente a su mapeo fractal podemos distinguir apenas pequeños patrones en color azul, estos patrones se asemejan a una estructura del tipo fractal, sin embargo no surge del todo.

4.5. Varianza creciente

Comúnmente se requiere de modelos que puedan ser capaces de medir la dispersión de los datos con respecto a un parámetro en particular, en ocasiones se requiere medir la dispersión de los datos con respecto a su media, para efectuar dicha medición se requiere hacer uso de la varianza medida de dispersión de los datos. Una varianza creciente en los datos de una Serie de Tiempo resulta un problema para el investigador pues es más difícil la predicción de los datos. Mientras mayor sea la dispersión de los datos, mayor es la magnitud de las desviaciones respecto a su media y por ende, más alto el valor de la varianza.

Se habla del término *homocedasticidad* cuando la varianza es la misma para cada observación, se podría decir que la varianza permanece constante. La *heterocedasticidad* corresponde a una varianza desigual para cada observación. A continuación se hace una modelación de una ST con varianza creciente.

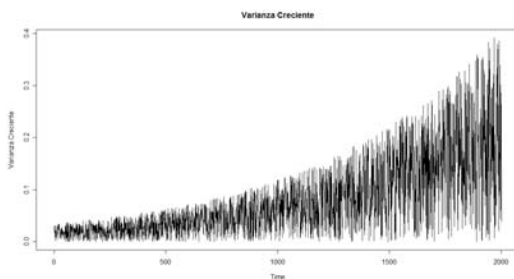


Figura 4.11: Modelo de Varianza Creciente.

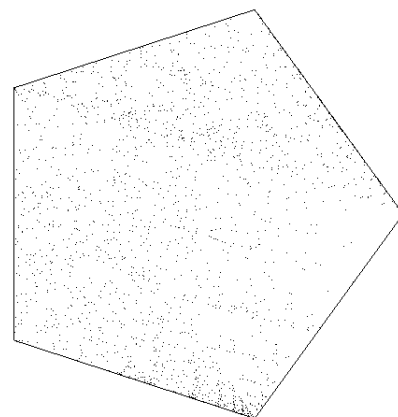


Figura 4.12: Mapeo fractal del Modelo de Varianza Creciente.

Con $\mathcal{D} = 0,592811249$ y un exponente de $H = 0,776$, la dimensión fractal para la serie es de $F = 1,224$, mientras que la dimensión mediante el Box Counting Method corresponde a $D = 1,91699$. La imagen del mapeo al parecer no existe una estructura fractal, al parecer existe una aleatoriedad en los puntos, se ve que hay una dispersión y no converge a un atractor.

4.6. Varianza decreciente

Un modelo con varianza decreciente comúnmente se verá como una parábola, sin embargo la dispersión de los datos cada vez será menor conforme avanza con el tiempo, tendiendo a una línea recta o a estabilizarse en un solo punto. Un modelo de Varianza Decreciente tiene la siguiente forma.

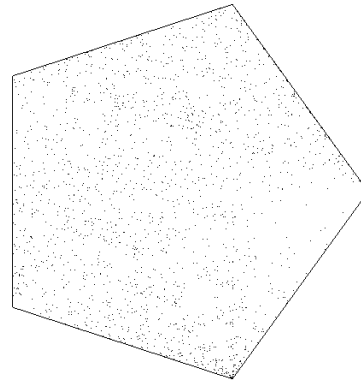
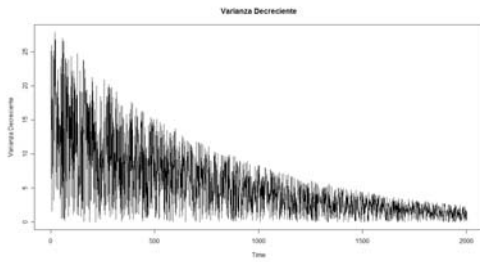


Figura 4.13: Modelo de Varianza Decreciente.

Figura 4.14: Mapeo fractal de un modelo de Varianza Decreciente.

Para la gráfica anterior podemos observar que el índice de Dorian para el mapeo de la serie corresponde a $\mathcal{D} = 0,582880$, mientras que el exponente de Hurst corresponde a $H = 0,763$. La dimensión fractal de la serie es de $F = 1,237$, mientras que para la imagen mediante el Box Counting Method corresponde a $D = 1,91633$. En esta imagen, al igual que el mapeo del la Varianza Creciente, la imagen no converge a ninguna del tipo fractal, al parecer hay una aleatoriedad en los puntos, la dispersión del modelo también se refleja en su mapeo. Al parecer también existen regiones sin puntos dentro del mapeo. La dimensión del mapeo fractal para una serie con varianza creciente y para una con varianza decreciente es muy semejante.

4.7. Sinusoide

En este apartado se procede a la simulación de una serie con una tendencia no lineal conformada por una sinusoide, esto es a través de una función del tipo sin o cos, o en general una combinación de ambas. En general a todos los gráficos de onda se les llama sinusoide. Una sinusoide puede estar descrita por la siguiente ecuación:

$$A \sin(2\pi ft + \varphi) \quad (4.7)$$

donde A es la amplitud de la onda, f la frecuencia y φ la fase. La ecuación anterior puede ser descrita como:

$$A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (4.8)$$

con $T = \frac{1}{f}$. La siguiente simulación de una gráfica sinusoidal fue realizada con una combinación de cuatro funciones del tipo sin y cos. La simulación se realizó en una hoja de cálculo, lo grando obtener lo siguiente:

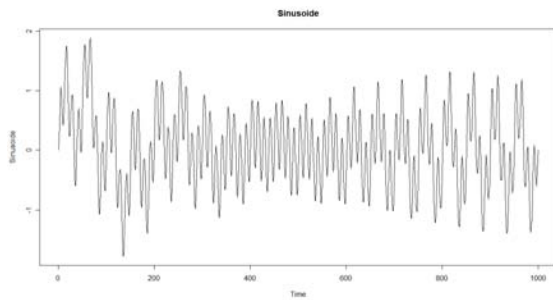


Figura 4.15: Sinusoide

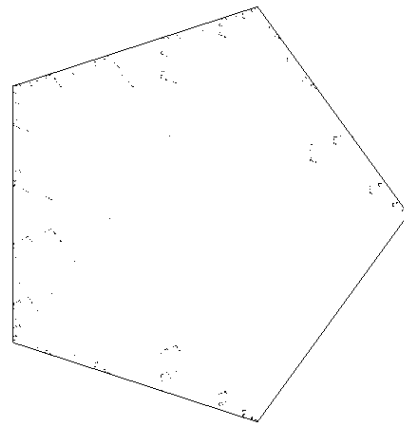


Figura 4.16: Mapeo fractal de un Sinusoide.

Para la figura anterior, el exponente de Hurst, $H = 0,518$ este valor es muy cerca de tener una serie que se comporta como ruido blanco, el índice de Dorian obtenido es de $\mathcal{D} = 0,395716$. La dimensión para la serie corresponde a $F = 1,482$, y la dimensión del mapeo mediante Box Counting Method corresponde a un valor de $D = 1,91848$. La imagen que resulta del mapeo fractal al parecer corresponde a una estructura fractal sin embargo está in-

conclusa, muy probablemente por la cantidad de puntos mapeados, sin embargo parecería pensar que se trata de un fractal.

4.8. Ruido blanco

Hemos definido con anterioridad el Ruido Blanco como una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas con media cero y varianza σ^2 . Es un proceso estocástico en el cual los valores en dos instantes de tiempo diferentes no guardan correlación estadística, es por ello que al calcular su espectro de potencia observamos una constante. En la siguiente gráfica se puede observar una simulación de ruido blanco, para lo anterior utilizamos una hoja de cálculo, y haciendo uso de la función

```
=distr.norm.estand.inv(aleatorio)
```

en Excel simulamos valores de Ruido Blanco los cuales se muestran a continuación:

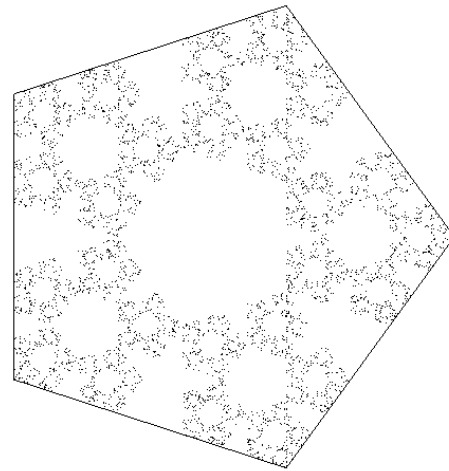
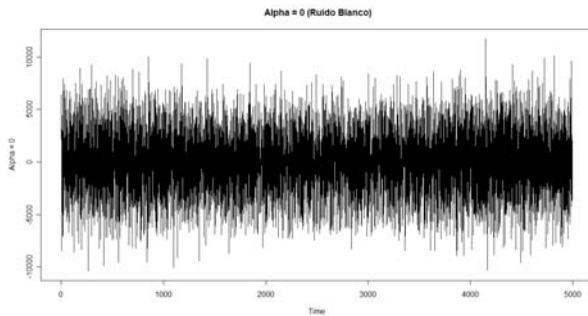


Figura 4.17: Ruido Blanco $\alpha = 0$

Figura 4.18: Mapeo del Ruido Blanco

El mapeo de una serie de tiempo que representa el ruido blanco converge al pentágono de Sierpinsky, al calcular el índice de Dorian, observamos que coincide con el índice con el que se construye el pentágono de Sierpinsky, el exponente de Hurst es igual a 0,5 y el índice de Dorian es de $\mathcal{D} = 0,381966011$. La dimensión fractal de la serie es de $F = 1,5$, mientras que la dimensión fractal para el mapeo corresponde al valor de $D = 1,91$. Cabe mencionar que un proceso de este tipo que es totalmente aleatorio y que los valores no se encuentran correlacionados convergen a una figura totalmente determinista.

4.9. Ruido de colores

En esta sección se procederá a la caracterización de series de tiempo que son resultados de procesos de ruido del tipo $1/f^\alpha$. Se hará el mapeo de diferentes tipos de ruidos, principalmente con valores de $\alpha = 1,5$, $\alpha = 1,794$, $\alpha = 2,248$ y $\alpha = 2,71$.

Para la simulación de estos procesos, se recurrió al desarrollo de un programa en el lenguaje de programación “C”, que permite generar una serie con tales características. Se procedió a la simulación de un proceso de ruido $\alpha = 1,5$, de donde se obtuvo la siguiente gráfica.

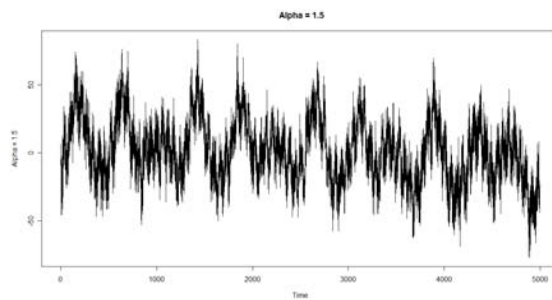


Figura 4.19: Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 1,5$

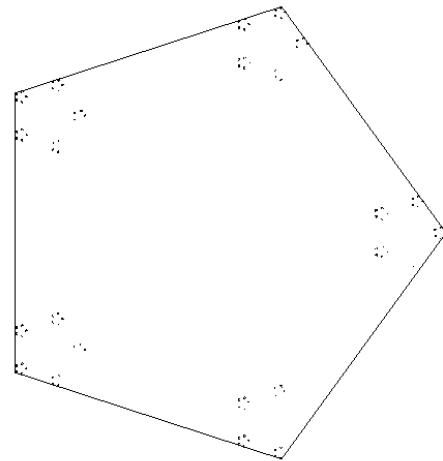


Figura 4.20: Mapeo de un proceso de Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 1,5$

Con un exponente de Hurst $H = 0,250$ y con un índice de Dorian $\mathcal{D} = 0,1634$. La dimensión fractal de la serie de tiempo corresponde a $F = 1,75$. En el mapeo se puede observar que se forma una figura fractal con pequeñas repeticiones de pentágonos en cada uno de los vértices, la figura que se obtiene es tienen una dimensión $D = 1,91531$.

Continuando con el mapeo de series de tiempo, se procede a la simulación de un movimiento browniano o ruido café con un exponente de $\alpha = 2$, este sugiere que el exponente de Hurst para tal movimiento es de $H = 0,5$, por lo que tienen el mismo mapeo fractal que el ruido blanco, al realizar su mapeo se observará que converge al pentágono de Sierpinsky. Cabe mencionar que para la expresión del índice de Dorian como una función que depende de n, α , esto es $\mathcal{D}(n, \alpha)$ dicho índice coincide con el valor de $0,381966011$.

Continuando con el mapeo para los procesos de ruido, se simuló un ruido con un exponente $\alpha = 2,248$, la gráfica correspondiente a este proceso de ruido se muestra en la siguiente gráfica.

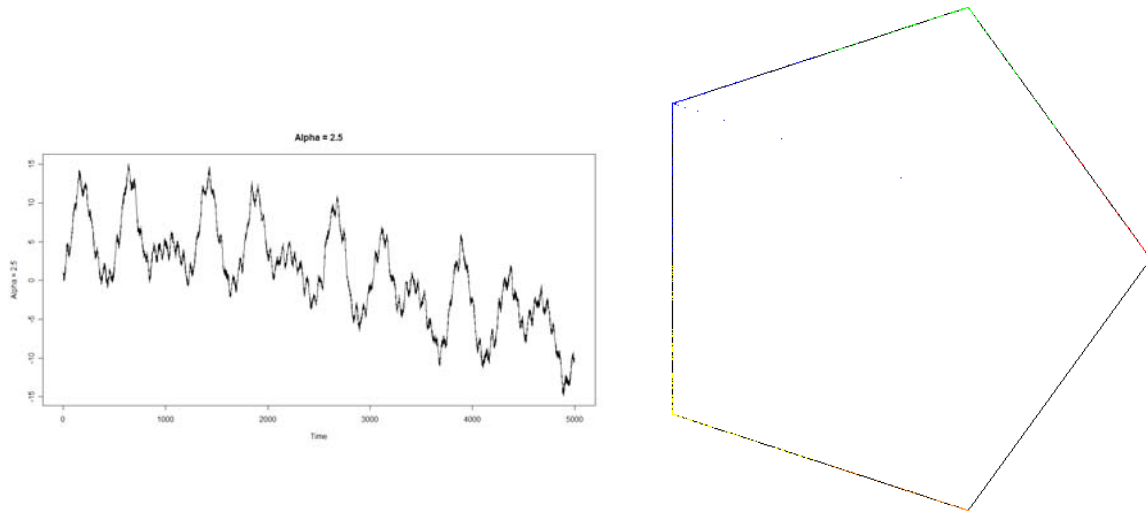


Figura 4.21: Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,248$

Figura 4.22: Mapeo para un proceso de ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,248$

Para este proceso de ruido, su exponente de Hurst corresponde a $H = 0,624$, y el índice de Dorian corresponde a $\mathcal{D} = 0,476693582$. La dimensión fractal de la serie es de $F = 1,376$. La imagen correspondiente al mapeo fractal muestra que al parecer no hay ningún fractal, sin embargo los puntos se encuentran sobre la recta que conforma el vértice del pentágono, dichos valores se encuentran coloreados de acuerdo a cada vértice, se distingue una secuencia de puntos que se dirigen al vértice de la izquierda coloreado de azul.

La siguiente gráfica muestra una simulación de un proceso de ruido con un exponente $\alpha = 2,71$, la imagen de a un lado corresponde a su mapeo fractal, se puede observar que los puntos se encuentran en cada uno de los vértices, al igual que el mapeo anterior, a cada uno de los vértices se le asigna un color, y se observan los puntos a lo largo de los vértices. Cabe mencionar que no existe una secuencia de puntos hacia un vértice como en el mapeo anterior, sino que de una vez se encuentran mapeados sobre los vértices. El exponente de Hurst para la serie simulada corresponde a $H = 0,855$, y el índice de Dorian $\mathcal{D} = 0,653161$. La dimensión fractal de la serie es $F = 1,145$.

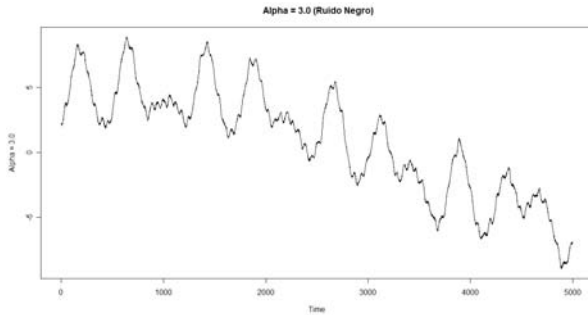


Figura 4.23: Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,71$

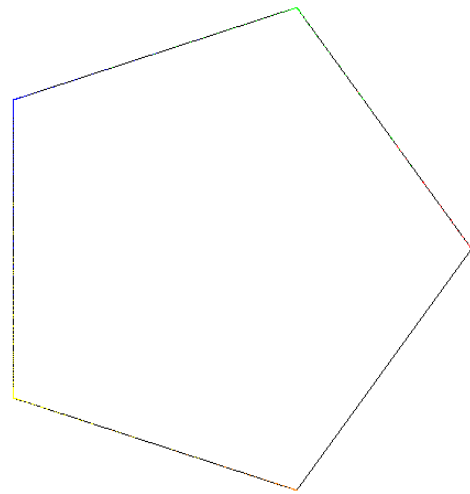


Figura 4.24: Mapeo para un proceso de ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,71$

4.10. Conjeturas

A partir de los resultados obtenidos es posible realizar algunas conjeturas sobre el mapeo de Series de Tiempo en Fractales, en primer lugar se demuestra que subyacen estructuras fractales en las series de tiempo y en especial en procesos de ruido del tipo $1/f^\alpha$. Las series que tienen un exponente de Hurst H , y que corresponden a modelos diferentes, esto es un modelo de ruido con $\alpha = 2,71$ y una serie con tendencia cuadrática o exponencial presentan el mismo mapeo fractal. Conforme el exponente de Hurst crece y el índice de Dorian también, el mapeo fractal obtenido cada vez se acerca a los vértices del pentágono, no existiendo una figura fractal. Mientras si ocurre lo contrario, es posible obtener una figura fractal cada vez más parecida a un ruido aleatorio.

El mapeo de ruido blanco corresponde a una estructura fractalmente determinista. Es posible continuar con su estudio y ver la manera en la que impacta. Es posible mencionar que se pueden hacer diferentes intervalos, pues en este trabajo se consideraron los **quintiles** de la distribución, sin embargo es posible manipularlos y continuar con su estudio.

Los modelos de varianza creciente y decreciente al parecer no tienen una estructura fractal claramente observable, es posible que no exista un patrón en ellos, sin embargo es muy

apresurado decir tal afirmación, para ello será necesario un estudio más amplio para cada uno de ellos, y para poder mapear diferentes series de tiempo con varianza creciente y decreciente, en un principio es posible suponer que la dispersión de los datos altera al mapeo de las series.

Los modelos con una tendencia de una senoide claramente reflejan un mapeo fractal, sin embargo es posible que se necesiten una gran cantidad de datos para que estas figuras puedan claramente surgir.

Conclusiones

Esta tesis presenta una primera aproximación al mapeo de las Series de Tiempo en fractales, los resultados obtenidos indican que es posible describir las estructuras subyacentes a las series temporales a través de su mapeo fractal, dándole una respuesta a nuestra hipótesis inicial.

El cambio de paradigma de enfoques en la realidad es inminente, convivimos con fenómenos no lineales. El estudio de las ST en fractales dará mucho de que hablar en un futuro no muy lejano, de manera que se irá perfeccionando su estudio y surgirán nuevas herramientas que nos proporcionen información innovadora y útil que permita entender el fenómeno, combinado con la computación, estas nuevas herramientas permitirán explicar fenómenos que si bien por su complicada estructura y magnitud todavía no entendemos, llegaremos a entenderlos.

La importancia de este trabajo y del mapeo de las Series de Tiempo radica en que es posible proponer un mapeo único para cada serie estudiada, a través de la determinación del índice de Dorian, que propone con base en el exponente de Hurst un índice único para cada serie y la figura en la que se mapea, ya sea triángulo, pentágono o hexágono, este índice es sensible a las condiciones iniciales del problema.

Los resultados muestran que diversos fenómenos que ocurren en la naturaleza tienen un atractor muy particular bajo un mapeo fractal, los problemas que presentan una estructura “caótica”, en realidad tienen un orden. En lo pasado esta la historia del futuro, el pasado es historia, el futuro es fantasía y el presente es tan sólo un instante, más en ese instante se encuentra la vida.

Anexo 1

En el presente anexo se definirán y explicarán de manera muy breve algunos de los conceptos y teoremas referente a probabilidad, procesos estocásticos y sistemas dinámicos, para dar al lector una introducción a los mismos.

Test de Dickey - Fuller

Dickey y Fuller [19] diseñaron un procedimiento para probar formalmente la presencia de Raíces Unitarias. La prueba comienza por suponer que la serie x_t sigue un modelo $AR(1)$, de la forma:

$$y_t = \rho y_{t-1} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

donde y_0 es el valor observado y $\{e_t\} \sim N(0, \sigma^2)$. Y se prueba para el caso de que ρ sea igual a 1, de aquí la expresión de *raíz unitaria*. Dickey y Fuller (1979) consideraron tres diferentes ecuaciones de regresión que se pueden utilizar para probar la existencia de una raíz unitaria:

$$y_t = \rho y_{t-1} + e_t \quad y_t = \alpha_0 + \rho y_{t-1} + e_t \quad y_t = \alpha_0 + \rho y_{t-1} + \alpha_1 t + e_t \quad (4.10)$$

Se dice que $\{y_t\}$ tiene una raíz unitaria $\Leftrightarrow \rho = 1$. En el caso de que el modelo tenga una raíz unitaria, esto es que $\rho = 1$, entonces y_t sigue una caminata aleatoria sin desvío. Si $\alpha_0 \neq 0$ y $\rho = 1$ $\{y_t\}$ sigue una aleatoria con desvío, lo cual significa que $E(y_t)$ es una función lineal de t . Un proceso de raíz unitaria con desvío se comporta de manera muy distinta a un proceso sin desvío.

Una versión simple de la prueba consiste en estimar una o más de las ecuaciones 4.10 mediante el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios con el fin de obtener el valor estimado de ρ y su error estándar asociado.

Consideremos la hipótesis nula de que $\{y_t\}$ tenga una raíz unitaria; es decir: $H_0 : \rho = 1$. En casi todos los casos estamos interesados en la alternativa inclinada hacia un lado, es decir $H_1 : \rho < 1$. Si la hipótesis alternativa es correcta entonces nuestra ST es estacionaria, por el contrario si nuestra hipótesis nula es correcta entonces nuestra ST no es estacionaria. Generalmente $0 < \rho < 1$ ya que $\rho < 0$ sería muy raro en una serie en la que sospechamos que tiene una raíz unitaria. La alternativa $H_1 : \rho > 1$ no es considerada [20].

Una ecuación conveniente para hacer la prueba de la raíz unitaria se obtiene del modelo AR(1), del cual si se resta y_{t-1} y se define $\theta = \rho - 1$, entonces obtenemos lo siguiente:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \theta y_{t-1} + e_t \quad (4.11)$$

y si cumple $E(e_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_0) = 0$, entonces se dice que es un modelo dinámico completo. De tal manera que se hace la prueba para $H_0 : \theta = 0$ contra la hipótesis de $H_1 : \theta < 0$. El problema es que bajo H_0 , y_{t-1} es estacionario, y entonces el teorema del límite central (que se basa en la distribución normal para el estadístico t) no aplica, en este caso el estadístico t no tiene una distribución aproximadamente normal, ni siquiera en pruebas grandes.

La distribución asintótica del estadístico t bajo H_0 se conoce como **distribución de Dickey - Fuller** [20]. Mientras que no podamos usar los valores críticos comunes, si podemos usar el estadístico común para $\hat{\theta}$ en $\Delta y_t = \alpha + \theta y_{t-1} + e_t$, al menos una vez que los valores críticos asociados hayan sido calculados. El resultado se conoce como el *test de Dickey Fuller* para raíces unitarias.

Sistema Dinámico

Un sistema dinámico es la manera de describir el paso del tiempo a través de todos los puntos de un espacio de estados S . El espacio de estados S puede ser el espacio de estados de un problema físico. Matemáticamente, S podría ser el espacio Euclideo o un subconjunto abierto de un espacio Euclideo o algún otro espacio como una superficie en \mathbb{R}^3 . Cuando consideramos un sistema dinámico en mecánica, el espacio S es el conjunto de posibles posiciones y velocidades del sistema. Para simplicidad, asumimos que el espacio S es un espacio Euclideo \mathbb{R}^n ; en ciertos casos, la importancia del comportamiento del sistema dinámico será confirmada en un subconjunto particular de \mathbb{R}^n .

Dada una posición inicial $X \in \mathbb{R}^n$, un sistema dinámico en \mathbb{R}^n nos indica la posición de X en el instante de tiempo $t = 1, 2, 3, \dots$. Ahora denotaremos esas nuevas posiciones de X con X_1, X_2, X_3, \dots . En el instante de tiempo 0, X se localiza en la posición X_0 . Una unidad de tiempo antes X se encuentra en X_{-1} . En general, la trayectoria de X está dada por X_t . Si medimos la posición de X_t usando sólo valores del tiempo enteros entonces tenemos lo que se conoce como un *Sistema Dinámico Discreto*. Si el tiempo es medido de manera continua con $t \in \mathbb{R}$ entonces tenemos un *Sistema Dinámico Continuo*. Si el sistema depende del tiempo en una manera continua diferenciable, entonces tenemos un *Sistema Dinámico Suave*.

En el caso de las ecuaciones diferenciables, nosotros asumimos que la función X_t es continuamente diferenciable. El mapeo $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que toma X en X_t , es definida para t , y de acuerdo a nuestra interpretación de X_t , como un estado de movimiento en el tiempo; es razonable decir que ϕ_t tiene a ϕ_{-t} como su inversa. También ϕ_0 debe ser la función de identidad tal que $\phi_0(X) = X$ y $\phi_t(\phi_s(X)) = \phi_{t+s}(X)$ como una condición natural. Formalizamos los conceptos anteriores en la siguiente definición:

Definición 10 (*Sistema Dinámico*) *Un sistema dinámico suave en \mathbb{R}^n es una función continua diferenciable $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $\phi(t, X) = \phi_t(X)$ que satisface:*

- $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función identidad: $\phi_0(X_0) = X_0$
- La composición $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$

[21]

Recordemos que un subconjunto $U \in W$ se dice que es denso en W si hay puntos arbitrarios en U cercanos a cualquier punto en el conjunto W . Decimos que un mapeo f , que toma un intervalo $I = [\alpha, \beta]$ es caótico si:

- Puntos periódicos de f son densos en I .
- f es transitiva en I ; esto es, dado cualquiera dos subintervalos U_1 y U_2 en I existe un punto $x_0 \in U_1$ y una $n > 0$ tal que $f^n(x_0) \in U_2$.
- f tiene una sensible dependencia en I .

El lema de Borel-Cantelli

En la teoría de probabilidad, el lema de Borel-Cantelli es un teorema sobre una secuencia de eventos. De una forma más general, es resultado de la teoría de la medida. Fue nombrado por Émile Borel y Francesco Paolo Cantelli. Las demostraciones de la mayoría de los teoremas fuertes están basadas de diferentes formas en el lema de Borel-Cantelli. A continuación se presentan las versiones más importantes:

Lema 1 (*Lema Borel-Cantelli*) Sea A_1, A_2, \dots una secuencia de eventos para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ entonces se cumple que:

$$P\{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\} = P\{\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_i\} = P\{A_n \text{ i.o}\} = 0$$

esto es con probabilidad 1 sólo si un número de eventos finitos A_n ocurren de manera simultánea.

Lema 2 (*Lema Borel-Cantelli 2*) Sea A_1, A_2, \dots una secuencia de pares de eventos independientes para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Entonces:

$$P\{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\} = 1$$

esto es con probabilidad 1 un número infinito de eventos A_n ocurren simultáneamente.

Ley de los Grandes Números

Existen 4 versiones de la ley de los grandes números, 2 versiones de la ley débil de los grandes números y 2 versiones de la ley fuerte de los grandes números. Comenzaremos explicando la ley de los grandes números.

Se establece que una sucesión de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad Ω obedece la ley de los grandes números cuando la media de las muestras de variables tiene a la media de las esperanzas de las variables aleatorias de la sucesión, según el número total de variables aumenta. Lo que implica que el promedio de una muestra al azar de una población de gran tamaño tenderá a estar cerca de la media de la población completa.

El promedio de una secuencia de variables elegidas al azar, con una distribución de probabilidad común, converge a su valor esperado, en el límite, mientras el tamaño de la secuencia se aproxima al infinito. Cuando las variables aleatorias tienen una varianza finita, el teorema del límite central extiende nuestro entendimiento de la convergencia de su promedio describiendo la distribución de diferencias estandarizadas entre la suma de variables aleatorias y el valor esperado de esta suma. Sin importar la distribución subyacente de las variables aleatorias, esta diferencia estandarizada converge a una variable aleatoria normal estándar.

Definición 11 (*Desigualdad de Kolmogorov*). Sea ξ_1, ξ_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes que tienen un valor esperado y varianza finita, $m_i = E\xi_i, V_i = \text{Var}(\xi_i)$, entonces:

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |(\xi_1 + \dots + \xi_k) - (m_1 + \dots + m_k)| \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^n V_i \quad (4.12)$$

Definición 12 (*Desigualdad de Markov*). En el lenguaje de la Teoría de la Medida, la desigualdad de Markov indica que si (X, S, μ) es un espacio con medida, y si f es una función de variable real en un espacio medible extendible, y $t > 0$ entonces:

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu \quad (4.13)$$

Para el caso especial en que el espacio tenga una medida 1 (esto es, que sea un espacio de probabilidad), la desigualdad puede ser escrita como: Si X es una variable aleatoria cualquiera y $a > 0$, entonces:

$$\Pr(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a} \quad (4.14)$$

Definición 13 (*Desigualdad de Chebyshev*). La desigualdad de Chebyshev establece que si X es una variable aleatoria con desviación estándar s , entonces la probabilidad de que la variable aleatoria esté distanciada de su media a lo más a veces, la desviación típica es menor o igual que $\frac{1}{a^2}$. Lo que nos conduce a la siguiente relación:

$$\Pr(|X - E(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2} \quad (4.15)$$

Teorema 6 (*Ley de los grandes números*). Si x_1, x_2, \dots son variables independientes idénticamente distribuidas con esperanza μ , y $|\mu| < \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mu$.

Además $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq y \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu \right| = 0$

Ley Fuerte de los Grandes Números

Teorema 7 (*Ley Fuerte de los Grandes Números*). Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con una misma media m , y $E((X_i - m)^4) \leq a < \infty$. Entonces:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = m\right) = 1 \quad (4.16)$$

Los promedios parciales $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ con probabilidad de 1 convergen a m .

Ley Débil de los Grandes Números

Teorema 8 (*Ley Débil de los Grandes Números*). Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con una misma media m , y una varianza $\leq v < \infty$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Los promedios parciales $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ convergen en probabilidad a m .

Demostración Sea $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$. Entonces usando la linealidad del valor esperado y la varianza podemos observar que $E(S_n) = m$ y que la $Var(S_n) \leq v/n$, utilizando la desigualdad de Chebychev, tenemos que.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq v/n^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

■

La principal diferencia entre la ley débil de los grandes números y la ley fuerte es que la operación límite y probabilidad están intercambiadas. Es posible demostrar que la ley fuerte implica la ley débil, pero no viceversa. Nótese también que la ley fuerte parece ser una fórmula cerrada.

Teorema del Límite Central

El nombre de Teorema del Límite Central se refiere a un resultado que afirma la convergencia en una distribución de una suma normada de variables aleatorias, esto es $(S_n - a_n)/b_n$

a una función de densidad normal Φ . En el caso del Teorema del Límite Central, que enunciaremos a continuación, las variables aleatorias son independientes y el límite de la distribución es Gaussiana.

Sean ξ_1, ξ_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes con varianza finita, $m_i = E\xi_i, \sigma_i^2 = \text{Var}(\xi_i), \zeta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, M_n = E\zeta_n = \sum_{i=1}^n m_i, D_n^2 = \text{Var}(\zeta_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Sea $F_i = F_{\xi_i}$ la función de distribución de la variable aleatoria ξ_i .

Definición 14 (Condición de Lindeberg). Se dice que se cumple la condición de Lindeberg si se satisface que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{(x: |x-m_i| \geq \varepsilon D_n)} (x-m_i)^2 dF_i(x) = 0$$

para cualquier $\varepsilon > 0$.

La condición de Lindeberg implica que si el $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \infty$

Teorema 9 (Teorema del Límite Central, Condición de Lindeberg) Sea ξ_1, ξ_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes con varianza finita. Si la condición de Lindeberg se satisface, entonces la distribución de $(\zeta_n - M_n)/D_n$ converge débilmente a una distribución $N(0, 1)$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Definición 15 (Condición de Lyapunov) La condición de Lyapunov dice satisfacerse si existe una $\delta > 0$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E(|\xi_i - m_i|^{2+\delta}) = 0 \quad (4.17)$$

Teorema 10 (Teorema del Límite Central, Condición de Lyapunov) Sea ξ_1, ξ_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes con varianza finita. Si la condición de Lyapunov se satisface entonces la distribución de $(\zeta_n - M_n)/D_n$ converge débilmente a una distribución $N(0, 1)$ conforme $n \rightarrow \infty$.

Transformaciones Afines

Definición 16 Sea (X, d) un espacio métrico. Una transformación en X es una función $f: X \rightarrow X$ que asigna exactamente un punto $f(x) \in X$ a cada punto $x \in X$. Si $S \subset X$ entonces $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$. f es una función uno a uno si $x, y \in X$ con $f(x) = f(y)$ lo que implica $x = y$. f es una función sobre si $f(X) = X$. f es llamada invertible si es uno a uno y sobre. En este caso es posible definir la transformación $f^{-1}: X \rightarrow X$, llamada la inversa de f denotada por $f^{-1}(y) = x$ donde $x \in X$ es el único punto tal que $y = f(x)$

Definición 17 Sea $f: X \rightarrow X$ una transformación en un espacio métrico. Las iteraciones hacia adelante de f son transformaciones $f^{on}: X \rightarrow X$ definida por $f^{o0}(x) = x, f^{o1}(x) = f(x), f^{o(n+1)}(x) = f \circ f^{on} = f(f^{on}(x))$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Si la función f tiene inversa, entonces las iteraciones hacia atrás de f son transformaciones $f^{o(-m)}(x): X \rightarrow X$ definidas por $f^{o(-1)}(x) = f^{-1}(x), f^{o(-m)}(x) = (f^{om})^{-1}(x)$ para $m = 1, 2, 3, \dots$

Definición 18 Una transformación $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ es llamada una transformación afín bidimensional.

Podemos utilizar la siguiente notación equivalente:

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

Donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 y t es el vector columna $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ el cual no distinguimos del par ordenado $(e, f) \in \mathbb{R}^2$. Tal transformación tiene una importancia geométrica y propiedades algebraicas.

La matriz A puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

donde (r_1, θ_1) son las coordenadas polares del punto (a, c) y $(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$ son las coordenadas polares del punto (b, d) . La transformación lineal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

en \mathbb{R}^2 mapeo cualquier paralelogramo con vertice en el origen en otro paralelogramo con vertice en el origen. Nótese que el paralelogramo gira por la transformación.

La transformación general afín $w(x) = Ax + t$ en \mathbb{R}^2 consiste en una transformación lineal A , que deforma el espacio relativo al origen, seguida de una *traslación* específica por el vector t . La transformación lineal

$$R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es llamada *rotación*. Y la transformación lineal:

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es llamada *reflexión*.

Anexo 2

Pentágono de Sierpinsky

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <GL/glut.h>
#include <time.h>
#include <GL/glui.h>
#define MAX_COLORES 30

//Declaración de prototipo de funciones
void coordenadas();
void grafica();

//Declaración de variables globales
int o,i=0,j;
int coor[5][2];
int tx, ty, tw, th;
float A=0.0, B=0.20, C=0.40, D=0.60, E=0.80, F=1.0;
int r1;
float
colores[30][3]={1,0,0},{0,1,0},{0,0,1},{1,1,0},{1,0,1},{0,1,1},
{1,1,1},{0,0,0},{.5,0,0},{0,.5,0},{0,0,.5},{.5,.5,0},
{.5,0,.5},{0,.5,.5},{.5,.5,.5},{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1},
{1,1,0},{1,0,1},{0,1,1},{1,1,1},{0,0,0},{.5,0,0},{0,.5,0},
{0,0,.5},{.5,.5,0},{.5,0,.5},{0,.5,.5},{.5,.5,.5}};
```



```
char archivo[30];

void drawString (char *s)
{
    unsigned int i;
    for (i = 0; i < strlen (s); i++)
        glutBitmapCharacter (GLUT_BITMAP_HELVETICA_12, s[i]);
}

void drawStringBig (char *s)
{
    unsigned int i;
    for (i = 0; i < strlen (s); i++)
        glutBitmapCharacter (GLUT_BITMAP_TIMES_ROMAN_24, s[i]);
}

void coordenadas(void)
{
    coor[0][1]=240;
    coor[0][0]=520;
    coor[1][1]=430;
    coor[1][0]=381;
    coor[2][1]=357;
    coor[2][0]=158;
    coor[3][1]=122;
    coor[3][0]=158;
    coor[4][1]=49;
    coor[4][0]=381;
}

void Teclado(unsigned char key, int x, int y)
{
    switch(key) {
        case 27:
            exit(0);
    }
}
```

```

break;
    case 'r':
        if(i<=60) i++;
    default:break;
}
glutPostRedisplay();
}

//===== FUNCION PARA GRAFICAR =====

void grafica(void)
{
    int driver, mode;
    srand(time(NULL));
    int XT, YT,p,xi,yi,i=0,j=0;
    float datoledo;
    FILE *mac;
    glBegin(GL_LINE_LOOP);
        glVertex2f(coor[0][0],coor[0][1]);
        glVertex2f(coor[1][0],coor[1][1]);
        glVertex2f(coor[2][0],coor[2][1]);
        glVertex2f(coor[3][0],coor[3][1]);
        glVertex2f(coor[4][0],coor[4][1]);
    glEnd();
    p=rand()%3;
    XT=(320+coor[p][0])/2;
    YT=(240+coor[p][1])/2;
    glBegin(GL_POINTS);
        glColor3f(1,1,1);
        glVertex2f(XT,YT);
    glEnd();

    if ((mac=fopen("arch.txt","r"))==NULL)
    {

```

```
        sprintf(archivo,"Error, el archivo especificado no existe");
        glRasterPos2f (0,3);
        drawStringBig (archivo);
        exit(0);
    }

    glColor3f(0,0,1);
    glBegin(GL_POINTS);
    do{
        fscanf(mac,"%f",&datoleido);

        if (datoleido >= A && datoleido <= B)
        {
            XT=(XT+coor[0][0])/2;
            YT=(YT+coor[0][1])/2;
            glVertex2f(XT,YT);
        }

        else{
            if (datoleido > B && datoleido <= C)
            {
                XT=(XT+coor[1][0])/2;
                YT=(YT+coor[1][1])/2;
                glVertex2f(XT,YT);
            }
            else{
                if (datoleido > C && datoleido <= D)
                {
                    XT=(XT+coor[2][0])/2;
                    YT=(YT+coor[2][1])/2;
                    glVertex2f(XT,YT);
                }
                else{
                    if (datoleido > D && datoleido <= E)
```

```

        {
            XT=(XT+coor[3][0])/2;
            YT=(YT+coor[3][1])/2;
            glVertex2f(XT,YT);
        }
        else
            if (datoleido > E && datoleido <= F)
            {
                XT=(XT+coor[4][0])/2;
                YT=(YT+coor[4][1])/2;
                glVertex2f(XT,YT);
            }
        }
    }
}
i++;
if(i%100==0) {glColor3fv(colores[j]);j++;}
}while(i!=4000);
glEnd();
}

```

```
void Dibuja(void)
```

```

{
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
    glPointSize(2.0);
    coordenadas();
    grafica();
    glFlush();
}

```

```
void Reshape(int x,int y)
```

```

{
    glClearColor(0.0,0.0,0.0,0.0);
    glColor3f(1.0f,1.0f,1.0f);
}

```

```
GLUI_Master.get_viewport_area( &tx, &ty, &tw, &th );
glViewport( tx, ty, tw, th );
glMatrixMode(GL_PROJECTION);
glLoadIdentity();
gluOrtho2D(0.0, 640.0, 0.0, 480.0);
}

int main(int argc, char** argv)
{
    glutInit(&argc, argv);
    glutInitDisplayMode(GLUT_SINGLE | GLUT_RGB);
    glutInitWindowSize(640,480);
    glutInitWindowPosition(100, 150);
    glutCreateWindow("Pentagono");
    glutDisplayFunc(Dibuja);
    glutReshapeFunc(Reshape);
    glutKeyboardFunc(Teclado);
    glutMainLoop();
    return 0;
}
```

Bibliografía

- [1] Rincón Luis, *Curso Intermedio de Probabilidad* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM.
- [2] Karlin S. y Taylor H. M. (1975) *A first course in stochastic processes*. Academic Press, Inc.
- [3] Brockell and Davis *Time Series: Theory and Methods*, Second Edition, Springer 1991.
- [4] Gonzalez Videgaray MariCarmen, *Series de Tiempo 1*, notas del curso, UNAM FES Acatlán, Estado de México.
- [5] Kuo Hui-Hsiung *White Noise Distribution Theory* CRC Press, 1996.
- [6] Stewart I., *¿Juega Dios a los Dados? La nueva matemática del caos*. Grijalbo Mondadori S.A. ed, Barcelona.
- [7] Prigogine, I. and Stengers, I., *Order Out of Chaos. Man's New Dialogue with Nature*. Bantam Books, Canada, 1988.
- [8] G. Sarton, *Historia de la Ciencia (La ciencia antigua durante la edad de oro griega)*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1965.
- [9] B. Mandelbrot, *Los Objetos Fractales. Forma, hazar y dimensión*, Tusquets Editores, S.A., Barcelona, España, 1993.
- [10] Falconer, K. *Fractal Geometry* John Wiley and Sons. 1990.
- [11] Talanquer, Vicente *FRACTUS, FRACTA, FRACTAL. FRACTALES, DE LABERINTOS Y ESPEJOS* Fondo de Cultura Económica, 1996.
- [12] Blanchard, Devaney, Hall *Ecuaciones Diferenciales* Thompson Ediciones, México 1999.

- [13] D. Ruelle, *Supplement to the Prog. Theor. Phys.* 64 (1978) 339.
- [14] B. Mandelbrot, *Fractals: Form Chance and Dimension* (Freeman, San Fransisco, 1977).
- [15] D. Farmer, *Information Dimension and the Probabilistic Structure of Chaos*, Chapter I, UCSC Doctoral Dissertation.
- [16] Barnsley, M., *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988.
- [17] Hurst,H.E. *Long Term of Reservoirs*. Transactions. The American Society of Civil Engineers 116, 1951.
- [18] Revuz Daniel, Yor Marc *Continuous Martingales and Brownian Motion* Springer, 2001.
- [19] Dickey, D.A. and W.A. Fuller, *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*, Journal of the American Statistical Association, 74, p. 427.
- [20] Wooldridge, Jeffrey M. *Introductory Econometrics, A Modern Approach* , South-Western College Publishing 2000.
- [21] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1948).
- [22] L^AT_EX User's guide. <http://www.latex-project.org/guides/>.
- [23] PSTricks User's Guide. <http://www.dante.de/CTAN/graphics/pstricks/base/doc/pstricks-doc.pdf>
- [24] Filippo Mori, Lapo. Tables in L^AT_EX2 ϵ : Packages and Methods. <http://www.tug.org/pracjourn/2007-1/mori/mori.pdf>

Índice de figuras

1.1.	Una variable aleatoria X como función definida sobre el espacio muestral Ω que toma valores en \mathbb{R}	3
1.2.	Tasa de Desempleo a Nivel Nacional. Enero de cada año. Fuente: Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).	7
1.3.	Diferentes Iteraciones de la Ecuación Logística para diferentes valores del parámetro r	23
1.4.	Diferentes trayectorias del Atractor de Lorenz.	24
2.1.	La hoja del helecho de Barnsley	28
2.2.	Copo de nieve de Koch es una de las más sencillas figuras fractales, y una de las primeras. Fue descubierta por el matemático sueco Helge von Koch en 1906.	31
2.3.	Representación del Conjunto de Mandelbrot	32
2.4.	Representación del Conjunto de Julia	33
2.5.	Conjunto de Cantor $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$	37
2.6.	Cubriendo una curva, una superficie y un sólido con cuadritos de tamaño $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$	37
2.7.	Cajas de lado $(1/2^n)$ cubriendo \mathbb{R}^2 con $\mathcal{N}_2(A)$	38
2.8.	Cuenca del Río Nilo ©Jacques Descloitres, MODIS Land Rapid Response Team.	39
2.9.	Construcción iterativa del Copo de nieve de Koch.	45
2.10.	Movimiento Browniano en \mathbb{R}	47
2.11.	Movimiento Browniano en \mathbb{R}^2	47
3.1.	Gráfica Geométrica Aleatoria correspondiente a un Mapeo Aleatorio	53
3.2.	Triángulo de Sierpinsky con 100 puntos.	54
3.3.	Triángulo de Sierpinsky con 1000 puntos.	54

3.4. El Triángulo de Sierpinsky es un fractal denominado por el matemático Polaco W. Franciszek Sierpinski en 1915.	54
3.5. Vértices Iniciales	58
3.6. Comienzo	58
3.7. $x_1 = f_R(x_0)$	58
3.8. $x_2 = f_L(x_1)$	58
3.9. $x_3 = f_U(x_2)$	58
3.10. $x_4 = f_R(x_3)$	58
3.11. Pentágono de Sierpinsky	59
3.12. Variación en el índice para el Pentágono de Sierpinsky.	59
3.13. Vértices Iniciales	60
3.14. Comienzo	60
3.15. $x_1 = f_E(x_0)$	60
3.16. $x_2 = f_A(x_1)$	60
3.17. $x_3 = f_B(x_2)$	60
3.18. $x_4 = f_C(x_3)$	60
3.19. $x_5 = f_D(x_4)$	60
3.20. $x_6 = f_E(x_5)$	60
3.21. Pentágono de Sierpinsky	61
3.22. Hexágono de Sierpinsky	61
3.23. Octágono de Sierpinsky	61
3.24. El juego del Caos para diferentes Polígonos	62
3.25. Mapeo Cíclico para una transformación del tipo seno	63
3.26. Mapeo Cíclico para una transformación del tipo coseno	63
4.1. Modelo $AR(2)$	67
4.2. Mapeo Fractal del Modelo $AR(2)$	67
4.3. Modelo $MA(1)$	68
4.4. Mapeo Fractal del Modelo $MA(1)$	68
4.5. Modelo de Tendencia Lineal.	69
4.6. Mapeo Fractal del Modelo de Tendencia Lineal.	69
4.7. Modelo de Tendencia Cuadrática.	69
4.8. Mapeo fractal del Modelo de Tendencia Cuadrática	69
4.9. Modelo de Tendencia Exponencial	70
4.10. Mapeo fractal del modelo de Tendencia Exponencial	70

4.11. Modelo de Varianza Creciente.	71
4.12. Mapeo fractal del Modelo de Varianza Creciente.	71
4.13. Modelo de Varianza Decreciente.	72
4.14. Mapeo fractal de un modelo de Varianza Decreciente.	72
4.15. Sinusoide	73
4.16. Mapeo fractal de un Sinusoide.	73
4.17. Ruido Blanco $\alpha = 0$	74
4.18. Mapeo del Ruido Blanco	74
4.19. Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 1,5$	75
4.20. Mapeo de un proceso de Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 1,5$	75
4.21. Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,248$	76
4.22. Mapeo para un proceso de ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,248$	76
4.23. Ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,71$	77
4.24. Mapeo para un proceso de ruido $1/f^\alpha$ con $\alpha = 2,71$	77