UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES TOPOLÓGICAS CON FUNCIONES CONTINUAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

MIGUEL ÁNGEL CORONA GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA

2009

"A mis padres, Ana María y Jose Abraham,
quienes moldearon la persona que soy,
por todo su apoyo, esfuerzo, amor, paciencia y que saben cuanto los amo"

"A mis hermanos, Abraham y Maria de los Angeles
por su cariño y el ejemplo necesario para seguir"

"Dedico este escrito, especialmente, a mi abuelo
Alfredo García, que en paz descanse. Por todos los momentos que compartí
con él y que siempre sabía animarme en momentos difíciles"

"Agradezco a mi tutora, Maria Isabel, por darme
la oportunidad de trabajar con ella, durante y en la elaboración de esta tesis"

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno.
Corona
García
Miguel Ángel
57 35 49 86
Universidad Nacional Auntonoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
301227874

2. Datos del Tutor
Dra.
Puga
Espinosa
María Isabel

3. Datos del Sinodal 1
Dra.
Pellicer
Covarrubias
Patricia

4. Datos del Sinodal 2
Dr.
Tamariz
Mascarua
Angel

5. Datos del Sinodal 3
Dr.
Macías
Alvarez
Sergio

6. Datos del Sinodal 4
Mat.
Vivanco
Gutiérrez
Melisa

7. Datos del trabajo escrito
Aplicaciones topológicas con continuas
79 p
2009

Índice

Introducción

Encontrar funciones continuas y suprectivas entre dos espacios topológicos diferentes X y Y es un problema importante en las matemáticas.

En el capítulo 1, desarrollamos los conceptos básicos a utilizar durante todo este escrito. Estos son vistos generalmente en un primer curso de topología, por lo que cualquier estudiante que lo haya llevado no tendrá ningun problema durante su lectura.

En la construcción del conjunto de Cantor podemos observar que se va haciendo cada vez más pequeño conforme seguimos repitiendo los pasos para obtenerlo. Al terminar de construirlo parecería que sólo nos queda "*polvo*" del intervalo $[0, 1]$. Imaginemos ahora que recogimos este "*polvo*" y lo vaciamos en un cubo, lo que veríamos es que el cubo es llenado por este polvo(!!). Matemáticamente hablando, lo que estaríamos diciendo es que existe una función suprayectiva entre el conjunto de Cantor y el cubo. En el capítulo 2, se desarrolla una generalización de este resultado con la "*pequeña*" diferencia que podemos cambiar el cubo por cualquier espacio métrico compacto y a la función le podemos añadir la propiedad de la continuidad. Asimismo caracterizamos las propiedades que hacen que un conjunto sea homeomorfo al conjunto de Cantor.

Durante la demostración de los principales teoremas del capitulo 2, surgió la interrogante de que tanto se podría *"copiar"* la demostración de éstos para un espacio que fuera el producto finito o numerable espacios métricos compactos, sin tomar en cuenta que este mismo es ya un compacto; especialmente para un producto numerable. La respuesta a esta interrogante se da en la segunda aplicación del capítulo 3, en el que se demuestra que el producto numerable de espacios métricos compactos es un espacio métrico compacto porque es la imagen continua del conjunto de Cantor.

Y es que, si bien es difícil imaginar que el conjunto de Cantor *"llena"* al cuadrado, es más sorprendente aún, que el conjunto Cantor *"llene"* al cubo de Hilbert. Esto es sólo parte del Capítulo 3, en el que se desarrollan aplicaciones directas e indirectas de lo que llamaremos el Teorema de la función general, entre las más intersantes están: 1) La existencia de una infinidad de conjuntos homeomorfos a Cantor; 2) Todo espacio métrico, compacto y totalmente disconexo tiene una copia topológica en el conjunto de Cantor; 3) Todo abierto de un continuo no degenerado contiene una copia topológica del conjunto de Cantor; 4) El conjunto de Cantor es homeomorfo al espacio $\{0,1\}^{\aleph_0}$,etc.

En el capítulo 4, se desarrollan los conceptos de conexidad local, el concepto de la propiedad S, la estructura básica de los espacios de Peano y los continuos de Peano, para poder, junto con el Teorema de la función general, caracterizar a los espacios métricos que son la imagen continua del intervalo $[0,1]$.

Esperando entonces que este trabajo sea de agrado para el lector.

CAPÍTULO 1

Preliminares

0. Términos Generales

En este capítulo expondremos definiciones y resultados que se utilizarán en los capítulos posteriores. Aunque no incluimos la demostración de algunos de éstos, damos una referencia en donde se pueden encontrar.

Los espacios que se usarán en adelante se denotaran por las letras X, Y y Z respectivamente. Cuando se trate de espacios topológicos se usarán los simbolos Γ o Υ para las topologías, asi pues al usar la notación (X, Γ) se tratará de un espacio topológico. También se da por hecho los conceptos T_1, T_2(Hausdorff),Regular y Normal para un espacio topológico. Cuando se usen los espacios métricos(véase [[2], Definición 1.2.1, pág. 40]) se usará la notación d o D para indicar a la métrica, de modo que al usar la notación (X, d) estaremos hablando de un espacio métrico.

Para un espacio métrico (X, d), $B(r, z, X) = \{y \in X : d(y, z) < r\}$ y se escribirá solamente $B(r, z)$ cuando solo sea un espacio. Si $A, B \subset X$, denotaremos por el *diám*(A) =sup$\{d(x, y) : x, y \in A\}$, $d(A, B)$=ínf$\{d(x, y) : x \in A$ y $y \in B\}$ y la *nube* de radio ϵ de A denotada por $N_d(A, \epsilon)$ como, $N_d(A, \epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon$ para algún $a \in A\}$.

El simbolo $\mathbb{N}$ denotará al conjunto de los números naturtales, $\mathbb{Q}$ al de los números racionales y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales.

Una *cubierta abierta* $\mathcal{C}$, de un espacio topologico, es una colección de conjuntos abiertos del espacio tales que la unión de todos ellos resulta en el espacio total. Un espacio topológico (X, Γ), es un espacio *Lindelöff* si para toda cubierta abiera $\mathcal{C}$ de X, podemos extraer una cantidad, a lo más numerable, de elementos de tal modo que sigan siendo una cubierta de X.

Una función $f : Y \to Z$ una función entre espacios topológicos es *cerrada* si para todo F cerrado de Y, $f(F)$ es cerrado en Z. Una función f es un *homeomorfismo* si es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas. Un espacio topológico (X, Γ) es un *arco* si existe un homeomormiso entre X y el intervalo cerrado $[0, 1]$. Un espacio topológico (S, Γ), es *homogéneo* si para cada par de puntos $p, q \in S$, existe un homeomorfismo $F : S \to S$ tal que $F(p) = q$.

Un espacio topológico (X, Γ) tiene la propiedad del *punto fijo*, si para toda función continua $f : X \to X$ existe $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

1. Producto cartesiano y teoremas clásicos

Definición 1.1. Sea $\{(X_\alpha, \Gamma_\alpha) : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos, sea $X = \Pi_{\alpha \in J}\ X_\alpha$ y $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la $\alpha - \acute{e}sima$ proyección natural. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ índices de $\mathfrak{I}$ y $U_{\alpha_i} \in \Gamma_{\alpha_i}$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Definimos $\langle U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\rangle = \cap_{i=1}^{n} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ y la *topología producto* para el espacio X, que denotaremos como $\Gamma_\times$, por medio de la siguiente base

$$\beta = \{\langle U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\rangle : U_{\alpha_i} \text{ abierto de } X_{\alpha_i} \text{ y } \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathfrak{I}\}.$$

Para una familia numerable de espacios métricos $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ tales que si $x_i, y_i \in X_i$, $d_i(x_i, y_i) \leq 1$ para cada i. Definimos en X la siguiente métrica. Sea $\mathcal{D} : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\mathcal{D}(p, q) = \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{d_j(p_j, q_j)}{2^j} \text{ donde } p = (p_i)_{i=1}^{\infty}, q = (q_i)_{i=1}^{\infty} \in X$$

Denotemos por $\Gamma_{\mathcal{D}}(X)$ a la topología inducida por esta métrica.

Únicamente para el siguiente lema usaremos $\widetilde{B}(r, x)$ para denotar a los elementos que distan de x en menos que r con respecto a la métrica $\widetilde{d}$ y $B(r, x)$ los elementos que distan de x en menos que r con respecto a la métrica d. Asi, Γ_d denotará a la topología inducida por d y $\Gamma_{\widetilde{d}}$ a la topología inducida por la métrica $\widetilde{d}$.

Lema 1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces existe una métrica $\widetilde{d}$ de X, tal que $\Gamma_d = \Gamma_{\widetilde{d}}$ y que además $\text{diám}_{\widetilde{d}}(X) \leq 1$.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos $\widetilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Comprobemos primero que se trata de una métrica.

1) $\widetilde{d}(x, y) \geq 0$. Puesto que $d(x, y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$.

2) $\widetilde{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Veamos que, $\widetilde{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $\widetilde{d}(x, y) = d(x, y)$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3) $\widetilde{d}(x, y) = \widetilde{d}(y, x)$. Se sigue de la definición.

4) $\widetilde{d}(x, y) \leq \widetilde{d}(x, z) + \widetilde{d}(z, y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$. Sean $x, y, z \in X$. Los posibles valores de $\widetilde{d}(x, z) + \widetilde{d}(z, y)$ son $\{d(x, z) + d(z, y),\ 1 + d(z, y),\ d(x, z) + 1,\ 2\}$.

Caso 1. Si $d(x, y) < 1$, entonces $\widetilde{d}(x, y) = d(x, y)$ y, con cualquiera de las posibilidades se cumple que $\widetilde{d}(x, y) \leq \widetilde{d}(x, z) + \widetilde{d}(z, y)$ pues por hipótesis d es métrica.

Caso 2. Si $d(x, y) \geq 1$, entonces $\widetilde{d}(x, y) = 1$ pero, como d es una métrica entonces $1 = \widetilde{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Por lo tanto $\widetilde{d}(x, y)$ es menor que cualquiera de las posibilidades de valor de $\widetilde{d}(x, z) + \widetilde{d}(z, y)$. Con esto concluimos que $\widetilde{d}$ es una métrica.

Así pues sólo resta verificar que $\Gamma_d = \Gamma_{\widetilde{d}}$. Sean $x \in X$, $\epsilon > 0$; si $\epsilon \geq 1$, entonces $\widetilde{B}(\epsilon, x) \subset B(\epsilon, x)$, ya que si $y \in \widetilde{B}(1, x)$, entonces $\widetilde{d}(x, y) < 1$ entonces por la definición de $\widetilde{d}$, se tendría que $\widetilde{d}(x, y) = d(x, y)$. Por lo tanto, $d(x, y) < 1$, es decir, $y \in B(1, x)$. Si $\epsilon < 1$, entonces simplemente tomamos $\widetilde{B}(\epsilon, x)$ y, por la misma razón que con $\epsilon \geq 1$, tenemos que $\widetilde{B}(\epsilon, x) \subset B(\epsilon, x)$. Por lo tanto $\Gamma_d \subset \Gamma_{\widetilde{d}}$.

Para la otra contención, sólo es necesario observar que $\widetilde{B}(\epsilon, x) = X$ si $\epsilon > 1$. Si $\epsilon < 1$, entonces $\widetilde{B}(\epsilon, x) = B(\epsilon, x)$. Por lo tanto $\Gamma_{\widetilde{d}} \subset \Gamma_d$. Como $d(x, y) \leq 1$ para cualesquiera $x, y \in X$, entonces $\text{diám}_D(X) \leq 1$. $\square$

Asi pues para un espacio métrico cualquiera podemos suponer que cualesquiera dos elementos de éste distan en menos que 1.

Lema 1.3. Sea una familia numerable de espacios métricos $\{(X_i, d_i) : i \in \mathbb{N}\}$ tales que $d_i(x_i, z_i) \leq 1$ para cada i y para cualesquiera dos elementos x_i, z_i de X_i. Entonces para el producto cartesiano de esta familia $X = \Pi_{i \in \mathbb{N}} X_i$ se cumple que $\Gamma_{\mathcal{D}} = \Gamma_{\times}$, donde $\mathcal{D}$ es la métrica definida en 1.1.

Demostración. Primero demostremos $\Gamma_{\times} \subset \Gamma_{\mathcal{D}}$, es decir que todo abierto en la topología inducida por la métrica es también un abierto en la topología producto. Sea W un elemento básico de $\Gamma_{\times}$, es decir, tomamos W de la forma $\langle U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n} \rangle$ con U_{α_i} abierto del espacio X_{α_i} para $i = 1, ..., n$ y $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{N}$. Tomamos $p \in W$.

Supongamos que $p = (p_i)_{i=1}^{\infty} \in W$, entonces $p_{\alpha_k} \in U_{\alpha_k}$, por lo que existe $\delta_k > 0$ tal que $B(\delta_k, p_k, X_x) \subset U_{\alpha_k}$ con $k \in \{1, ..., n\}$. Para cada $k \in \{1, ..., n\}$ elijamos $\gamma_k > 0$ tal que $\gamma_k 2^k < \delta_k$ y tomemos $\delta = \min\limits_{k \in 1, ..., n} \{\gamma_k\}$, este mínimo existe y es mayor que 0, pues $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$es un conjunto finito; ahora veamos que esta δ hace que $B(\delta, p, X) \subset W$. Para ver esto, sea $q \in B(\delta, p, X)$, con $q = (q_i)_{i=1}^{\infty}$. Es claro, por la forma de W, que basta verificar que $q_{\alpha_k} \in U_{\alpha_k}$.

Sea $1 \leq k \leq n$ fijo, como $q \in B(\delta, p, X)$. Entonces $\mathcal{D}(p,q) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(p_i,q_i)}{2^i} < \delta$, como $\frac{d_{\alpha_k}(p\alpha_k, q_{\alpha_k})}{2^{\alpha_k}} \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{d_j(p_j,q_j)}{2^j}$ tenemos que $\frac{d_{\alpha_k}(p_{\alpha_k}, q_{\alpha_k})}{2^{\alpha_k}} < \delta$ entonces $d_{\alpha_k}(p_{\alpha_k}, q_{\alpha_k}) < 2^{\alpha_k} \cdot \delta \leq 2^{\alpha_k} \cdot \gamma_{\alpha_k} < \delta_{\alpha_k}$. Por lo tanto, $q_{\alpha_k} \in U_{\alpha_k}$.

Ahora veamos la otra contención. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Nuestro objetivo será, encontrar W abierto relativo a $\Gamma_\times$ tal que $W \subset B(\epsilon, x, X)$. Tomamos esta $\epsilon > 0$ para exhibir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k>N} \frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2}$. Supongamos que $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$. Definimos $W = \left\langle B(\frac{\epsilon}{2}, x_1, X_1), ..., B(\frac{\epsilon}{2}, x_N, X_N) \right\rangle$ es un abierto relativo a $\Gamma_\times$. Veamos que W nos funciona. Sea $y \in W$. Supongamos que $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$.

Entonces $\mathcal{D}(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{d_j(x_j,y_j)}{2^j} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{d_j(x_j,y_j)}{2^j} + \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} \frac{d_j(x_j,y_j)}{2^j}$. Sabemos que $y_k \in B(\frac{\epsilon}{2}, x_k, X_k)$ para $1 \leq k \leq N$, además $d_k(x_k, y_k) \leq 1$ si $k \geq N$, por lo tanto:

$$d(x,y) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{\epsilon}{2}}{2^j} + \sum_{J=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y, concluimos que, $W \subset B(\epsilon, x, X)$. $\square$

Este último resultado sigue siendo valido, aún si no se cumpliera que diám$(X_n) \leq 1$, debido a 1.2.

Lema 1.4. Sea $\{(X_i, \Gamma_i) : i \in I\}$ una familia de espacio topológicos homogeneos. Entonces $X = \Pi_{i \in I} X_i$ es un espacio homogeneo.

Demostración. Sean $p = (p_i)_{i=1}^{\infty}, q = (q_i)_{i=1}^{\infty} \in X$. Como cada X_i es homogéneo, existe $F_i : X_i \to X_i$ homeomorfismo tal que $F_i(p_i) = q_i$. Definimos $F : X \to X$ dada por $F(x) = (F_i(x_i))_{i=1}^{\infty}$, donde $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$. Por lo tanto, como cada función coordenada es biyectiva, F lo es. Como cada coordenada es continua, F lo es y como cada coordenada tiene inversa, F la tiene. Es decir, F es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 1.5. Sea $\{(Y_\alpha, \Gamma_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $\{A_{\alpha,\beta} : \beta \in J,\ A_{\alpha,\beta} \subset Y_\alpha\}$ una colección de conjuntos. Entonces $\prod\limits_{\alpha \in I} [\cap_{\beta \in J}\ A_{\alpha,\beta}] = \bigcap\limits_{\beta \in J} [\Pi_{\alpha \in I}\ A_{\alpha,\beta}]$.

Demostración. Mostremos primero que $\prod\limits_{\alpha \in I} [\cap_{\beta \in J}\ A_{\alpha,\beta}] \subset \bigcap\limits_{\beta \in J} [\Pi_{\alpha \in I}\ A_{\alpha,\beta}]$.

Sea $(z_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod\limits_{\alpha\in I}[\cap_{\beta\in I} A_{\alpha,\beta}]$. Entonces $z_\alpha \in \cap_{\beta\in I} A_{\alpha,\beta}$ para cada $\alpha \in I$. Luego $z_\alpha \in A_{\alpha,\beta}$ para cada $\beta \in J, \alpha \in I$. Por lo tanto, $(z_\alpha)_{\alpha\in I} \in [\Pi_{\alpha\in I} A_{\alpha,\beta}]$ para cada $\beta \in J$ y, obtenemos con esto que, $(z_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap\limits_{\beta\in J}[\Pi_{\alpha\in I} A_{\alpha,\beta}]$.

Ahora veamos la otra contención. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap\limits_{\beta\in J}[\Pi_{\alpha\in I} A_{\alpha,\beta}]$. Entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \Pi_{\alpha\in I} A_{\alpha,\beta}$ para cada $\beta \in J$, de donde $x_\alpha \in A_{\alpha,\beta}$ para cada $\alpha \in I, \beta \in J$. Por lo tanto, $x_\alpha \in \cap_{\beta\in J} A_{\alpha,\beta}$ para cada $\alpha \in I$, y obtenemos con esto que, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod\limits_{\alpha\in I}[\cap_{\beta\in I} A_{\alpha,\beta}]$. $\square$

Teorema 1.6. (**Teorema Metrización de Urysohn)** Véase [[15], Teorema 23.1, pág. 166]. Un espacio topológico, (Y, Γ) es metrizable si y sólo si (Y, Γ) es regular y tiene una base numerable.

Para una referencia en español véase [[5], Teorema 4.8, pág 72].

Teorema 1.7. (**Teorema de extensión de Tietze**). Véase [[3], Teorema 5.1, págs. 149-151]. Sea (X, Γ) espacio topológico Hausdorff. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1) X es normal.

2) Para todo $A \subset X$ cerrado, cada función $f : A \to \mathbb{R}$ continua tiene una extensión continua $F : X \to \mathbb{R}$. Más aún, si $|f(x)| < c$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces F puede escogerse de tal manera que $|F(x)| < c$ para todo $x \in X$.

2 Compactos

En la siguiente sección, damos los principales resultados bases, que se usarán durante todo el escrito.

Definición 1.8. (**Propiedad de Heine-Borel**) Sea (X, Γ) un espacio topológico. Decimos que (X, Γ) cumple *la propiedad de Heine-Borel* si a toda cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X, se puede extraer un número finito de elementos que sigan siendo una cubierta abierta del espacio X. Así mismo, un espacio (X, Γ) que tiene la propiedad de Heine-Borel también se le conoce como un espacio topológico compacto.

Definición 1.9. (**Propiedad de la intersección finita**) Sea (X, Γ) un espacio topológico. Decimos que X tiene *la propiedad de la intersección finita* si para cada familia de cerrados $\mathcal{L} = \{F_\alpha | \alpha \in I\}$ tales que $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha = \varnothing$, existe un número finito de elementos de la familia original $\{F_{\alpha_1}, ..., F_{\alpha_n}\}$, tales que $\cap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$.

Teorema 1.10. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) (X, Γ) es un espacio topológico compacto.

2) (X, Γ) tiene la propiedad de la intersección finita.

Demostración. 1) implica 2). Sea $\mathcal{L} = \{F_\alpha | \alpha \in I\}$ una familia de cerrados de X tales que $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha = \varnothing$, por las leyes de Morgan, $X = \cup_{\alpha \in I}(X \setminus F_\alpha)$ donde $X \setminus F_\alpha$ es un conjunto abierto de X. Entonces $\tilde{\mathcal{L}} = \{X \setminus F_\alpha | \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $X \setminus F_{\alpha_1}, X \setminus F_{\alpha_2}, ..., X \setminus F_{\alpha_n}$ tales que $X = \cup_{i=1}^{n}(X \setminus F_{\alpha_i})$. Usando nuevamente las leyes de Morgan, $\cap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$ y esta es precisamente la definición de que X tenga la propiedad de la intersección finita.

2) implica 1). Sea $\mathcal{C} = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$ una familia de abiertos de X tales que $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$, por las leyes de Morgan, $\cap_{\alpha \in I}(X \setminus U_\alpha) = \varnothing$ donde $X \setminus U_\alpha$ es un cerrado de X, entonces $\tilde{\mathcal{C}} = \{X \setminus U_\alpha | \alpha \in I\}$ es una familia de cerrados tales que $\cap_{\alpha \in I}(X \setminus U_\alpha) = \varnothing$. Como X tiene la propiedad de la intersección finita, existen $X \setminus U_{\alpha_1}, X \setminus U_{\alpha_2}, ..., X \setminus U_{\alpha_n}$ tales que $\cap_{i=1}^{n}(X \setminus U_{\alpha_i}) = \varnothing$, usando nuevamente las leyes de Morgan, $\cup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = \varnothing$, de donde concluimos que X es compacto. $\square$

Proposición 1.11. Sea (X, Γ) espacio topológico compacto y $A \subset X$ cerrado. Entonces A es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{V_\beta | \beta \in J\}$ una cubierta abierta de A. Entonces $A = \cup \mathcal{C}$. Como cada $V_\beta = W_\beta \cap A$ donde W_β es un conjunto abierto de X, luego $\{W_\beta | \beta \in J\} \cup \{X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, existen $W_{\beta_1}, W_{\beta_2}, ..., W_{\beta_N}$ que cubren a X. De modo que también cubren a A, notemos que se puede quitar a $X \setminus A$ de esta cubierta pues su intersección con A es vacía. De manera que $A = \left[\cup_{i=1}^{N} W_{\beta_i}\right] \cap A = \cup_{i=1}^{N} \left[W_{\beta_i} \cap A\right] = \cup_{i=1}^{N} V_{\beta_i}$ y asi exhibimos una subcubierta de $\mathcal{C}$. Entonces, por definición, A es compacto. $\square$

Teorema 1.12. Sea (Y, Υ) espacio topológico Lindelöf y 1° numerable. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) Y es compacto.

2) (**Propiedad de Bolzano-Weierstrass**) Todo subconjunto numerable de Y, tiene un punto de acumulación.

3) (**Compacto por sucesiones).** Toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$, tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de la original convergente en Y.

Demostración. 1) implica 2). Sea $A \subset Y$. Supongamos que ningún punto de Y es un punto de acumulación de A. Entonces para cada $x \in Y$, existe un conjunto abierto U_x de x, tal que $U_x \cap A = \varnothing$ si $x \notin A$ y $U_x \cap A = \{x\}$ para $x \in A$, es decir, A es un cerrado y es un subespacio discreto de Y. Definimos $C = \{U_x | x \in A\} \cup (Y \setminus A)$,esta es una cubierta abierta de Y, que no puede reducirse a una subcubierta finita. Pues, supongamos que existen un número finito de abiertos $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n} \cup \{Y \setminus A\}$ tales que cubren a Y. Como A es numerable, existe $y \in A$ tal que $y \neq x_i$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y entonces por construcción de los conjuntos U_{x_i}, $y \notin \cup_{i=1}^{n} U_{x_i} \cup (Y \setminus A)$ y esto contradice que Y es compacto.

2) implica 3). Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Y. Definimos $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Caso 1. Si $|A| < \infty$, entonces existe $x_k \in A$ tal que $x_k = x_m$ para una infinidad de índices y entonces el resultado se sigue trivialmente. Caso 2. Si $|A| = \aleph_0$. Por 2) A tiene un punto de acumulación, digamos y_0, y dado que Y es 1^o numerable para cada vecindad U_{y_0} de y_0 existe $x_n \in A$ tal que $x_n \in U_{y_0}$, entonces tomamos los elementos de A que cumplan esto, de tal manera que sea una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

3) implica 1). Supongamos que Y no es compacto. Sea $\mathcal{C} = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de Y, a la que no se le puedan extraer un número finito de elemntos que sigan cubriendo a Y. Como Y es Lindelöff, existe subcubierta numerable $\tilde{\mathcal{C}} = \{U_{\alpha_n} | n \in \mathbb{N}\}$ de C. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $Y \setminus \cup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \neq \varnothing$. Tomemos una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos tales que $y_n \in Y \setminus \cup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$, por 3) existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $y_0 \in Y$ tales que $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a y_0. Como $Y = \cup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_0 \in U_{\alpha_m}$. Para p suficientemente grande, con $n_p > m$, $y_{n_p} \in U_{\alpha_m}$ contradiciendo que $y_{n_p} \in Y \setminus \cup_{k=1}^{n_p} U_{\alpha_{n_k}}$ pues $\cup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i} \subset \cup_{k=1}^{n_p} U_{\alpha_{n_k}}$. Por lo tanto, Y debe de ser compacto. $\square$

Proposición 1.13. Sean Y un espacio topológico compacto, Z espacio Hausdorff y $f : Y \to Z$ función continua. Entonces:

1) $f(Y)$ es compacto. Por lo tanto, f es cerrada.

2) Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. 1) Sea $C = \{W_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta de $f(Y)$. Como f es continua, $f^{-1}(W_\alpha)$ es un abierto de Y. Además si $f(Y) = \cup W_\alpha$ entonces aplinacdo f^{-1} tenemos que, $Y = f^{-1}(\cup W_\alpha) = \cup f^{-1}(W_\alpha)$. Por lo que $\widetilde{C} = \{f^{-1}(W_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta abierta de Y. Por hipótesis, Y es compacto, entonces existen $f^{-1}(W_{\alpha_1}), f^{\cdot -1}(W_{\alpha_2}), ..., f^{-1}(W_{\alpha_N})$ tales que $Y = \cup_{i=1}^N f^{-1}(W_{\alpha_i})$. De donde, $f(Y) = f(\cup_{i=1}^N f^{-1}(W_{\alpha_i})) = \cup_{i=1}^N f(f^{-1}(W_{\alpha_i})) \subset \cup_{i=1}^N W_{\alpha_i}$. Por lo tanto $f(Y)$ es compacto.

Para la segunda parte sea $A \subset Y$ cerrado y por tanto A es compacto, entonces por la primera parte, $f|_A(A)$ es compacto. Pero $f|_A(A) = f(A)$, y recordemos que en los espacios Hausdorff todos los compactos son cerrados, entonces $f(A)$ es un cerrado en Z.

2) Para esta parte sólo es necesario demostrar que $f^{-1} : Z \to Y$ es continua. Sea U abierto de Y. Como $Y \setminus U$ es cerrado, por 1), $f(Y \setminus U)$ es cerrado de Z, $f(Y \setminus U) = Z \setminus f(U)$ pues f es biyectiva. Por lo tanto $f(U)$ es un abierto de Z. □

Lema 1.14. Sea (Z, Γ) un espacio topológico compacto y Hausdorff. Entonces Z es regular, más aún Z es normal.

Demostración. Sean $x \in Z$ y $U \subset Z$ cerrado con $x \notin U$. Como Z es Hausdorff, para cada $y \in U$ existen abiertos V_y y W_y tales que $x \in W_y, y \in V_y$ y $W_y \cap V_y = \varnothing$. La colección $C = \{V_y | \ y \in U\}$ es una cubierta abierta de U. Al ser U cerrado, también es compacto. Entonces existen $y_1, y_2, ...y_n \in U$ de manera que $U \subset \cup_{i=1}^n V_{y_i}$. Definimos $V = \cup_{i=1}^n V_{y_i}$ y $W = \cap_{i=1}^n W_{y_i}$. Es claro que V y W son conjuntos abiertos de Z, y además, $V \cap W = \varnothing$ por la construcción del inicio. Por lo tanto, Z es regular.

Para la segunda parte. Sean $E, F \subset Z$ cerrados ajenos. Como Z es regular, para cada $x \in E$, existen W_x, V_x abiertos tales que $x \in W_x, F \subset V_x$ y $W_x \cap V_x = \varnothing$. La colección $\{W_x : x \in E\}$ es una cubierta abierta de E. Nuevamente por 1.11, E es compacto y existen $x_1, x_2, ..., x_m \in E$ para los cuales $E \subset \cup_{k=1}^m W_{x_k}$. Los conjuntos $N = \cup_{k=1}^m W_{x_k}$ y $M = \cap_{k=1}^m V_{x_k}$ son abiertos tales que $E \subset N, F \subset M$ y $N \cap M = \varnothing$. Así pues Z, es normal. □

Lema 1.15. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces X tiene una base numerable.

Demostración. Para cada n, la colección $C_n = \{B(\frac{1}{n}, z) : z \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Para cada n, existen $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, ..., z_{m(n)}^{(n)} \in X$ tales que $X = \cup_{k=1}^{m(n)} B(\frac{1}{n}, z_k)$ para cada n, . Sea $\beta = \{B(\frac{1}{n}, z_k) : k = 1, 2, ..., m(n), n \in \mathbb{N}\}$. Dado que la únión numerable de conjuntos numerables es numerable, β es numerable.

Definimos $Z = \{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, ..., z_{m(n)}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. Denotemos por Γ_β a la topología generada por β. Es claro, por construcción, que $\Gamma_\beta \subset \Gamma_d$, donde Γ_d es la topología generada por la métrica d. Resta ver que se satisface la otra contención. Sea $x \in U$ con U abierto en la topología Γ_d. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(r, x) \subset U$. Si $x \in Z$, entonces para $0 < \frac{1}{n} < r$, $x \in B(\frac{1}{n}, x) \subset B(r, x) \subset U$ con $B(\frac{1}{n}, x) \in \beta$; si $x \notin Z$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{2}{n} < r$. Como $\{B(\frac{1}{n}, z_i^{(n)}) : i = 1, 2, ..., m(n)\}$ es cubierta de X, existe $z_j^{(n)}$ tal que $x \in B(\frac{1}{n}, z_j^{(n)})$. Veamos que $B(\frac{1}{n}, z_j^{(n)}) \subset B(r, x)$, sea $\zeta \in B(\frac{1}{n}, z_j^{(n)})$, $d(\zeta, x) \leq d(\zeta, z_j^{(n)}) + d(z_j^{(n)}, x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < r$; de manera que $x \in B(\frac{1}{n}, z_j^{(n)}) \subset B(r, x) \subset U$. Por lo tanto, $\Gamma_\beta = \Gamma_d$. $\square$

Definición 1.16. Sea (Y, Γ) un espacio topológico. Se denota por:

$$2^Y = \{A \subseteq Y : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

Definición 1.17. (**Métrica de Hausdorff**) [Veáse [12], Teorema 4.2. pág. 53] Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$, como sigue: $H_d(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : B \subset N_d(A, \epsilon) \text{ y } A \subset N_d(B, \epsilon)\}$. Denotaremos a esta métrica como H_d.

Teorema 1.18. [Veáse [12], Teorema 4.13. págs. 59-60] Sea (X, d), espacio métrico compacto. Entonces $(2^X, H_d)$ es un espacio métrico compacto, donde H_d es la métrica de 1.17.

Definición 1.19. Sean (Y, Γ),(X, Υ) espacios topológicos, donde X es compacto. Decimos que X es una *compactación* de Y, si existe una función continua e inyectiva $f : Y \to X$ tal que $\overline{f(Y)} = X$. Es decir, X tiene una copia topológica de Y densa en X. Al subconjunto $X \setminus f(Y)$ se le conoce como el residuo de la compactación.

Lema 1.20. Sea (Z, d) un espacio métrico y compacto. Sean $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de cerrados de Z y U conjunto abierto de Z tal que: $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n \subset U$. Entonces:

1) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C_k \subset U$.

2) Si $C_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $C \neq \emptyset$.

Demostración. 1) Ya que $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n \subset U$ entonces por las leyes de Morgan $Z \setminus U \subset \cup_{n=1}^{\infty}(Z \setminus C_n)$, es decir, $\{Z \setminus C_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta del conjunto cerrado $Z \setminus U$, que es compacto por ser Z compacto. Lo que implica que existe una cubierta finita $\{Z \setminus C_{n_i} : i = 1, 2, ..., N\}$ de $Z \setminus U$. Sea $k = \max_{i=1,2,...,N}\{n_i\}$. Entonces $Z \setminus U \subset \cup_{n=1}^{k}(Z \setminus C_{n_i}) \subset \cup_{n=1}^{k} Z \setminus C_n = Z \setminus C_k$ pues $Z \setminus C_n \subset Z \setminus C_{n+1}$, es decir $C_k \subset U$.

2) Supongamos que $C_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ pero que $\cap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Entonces $\cup_{n=1}^{\infty}(Z \setminus C_n) = Z$. Aplicando 1) para Z vemos que $Z = \cup_{n=1}^{N}(Z \setminus C_n) = Z \setminus C_N$, lo que implica que $C_N = \emptyset$ contradiciendo la hipótesis. $\square$

Proposición 1.21. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia decreciente de cerrados no vacíos de X. Entonces $|\cap_{n=1}^{\infty} F_n| = 1$ si y sólo si diám(F_n) tiende a 0 si n crece..

Demostración. Supongamos diám(F_n) no se acerca a 0. Dado que $F_{n+1} \subset F_n$, diám$(F_{n+1}) \leq$diám(F_n). Entonces existen $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, tal que diám$(F_k) > \epsilon$ para $k \geq N$. Sean $(p_k)_{k=N}^{\infty}$ y $(q_k)_{k=N}^{\infty}$ sucesiones tales que $d(p_k, q_k) > \epsilon$ y $p_k, q_k \in F_k$ para $k \geq N$. Como X es compacto existe $(p_{k_i})_{i=N}^{\infty} \subset (p_k)_{k=N}^{\infty}$, tal que p_{k_i} converge a p y, además, $p \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ pues $F_{n+1} \subset F_n$. Para $(q_{k_i})_{i=N}^{\infty}$, existe una subsucesión $(q_{k_{i_j}})_{j=N}^{\infty}$ de $(q_{k_i})_{i=N}^{\infty}$ tal que $q_{k_{i_j}}$ converge a q y además también $q \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ por la misma razón que para p. Por construcción tendríamos que $d(p, q) \geq \epsilon > 0$ pues $d(p_{k_{i_j}}, q_{k_{i_j}}) > \epsilon$, entonces $p \neq q$, lo que contradice que $| \cap_{n=1}^{\infty} F_n| = 1$.

Por 1.20, $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. Sean $p, q \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces $p, q \in F_n$ para cada n. De donde $d(p, q) \leq$diám(F_n) para cada n. Como $diam(F_n)$ se aproxima a 0, $d(p, q)$ también se aproxima a 0 y dado que es una métrica esta igualdad se da si y sólo si $p = q$, por lo tanto $| \cap_{n=1}^{\infty} F_n| = 1$. $\square$

Lema 1.22. Sean (X, d) espacio métrico y $U, V \subset X$ con U compacto y V cerrado, no vacíos. Entonces $d(U, V) > 0$ si y sólo si $U \cap V = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $d(U, V) = 0$. Entonces existen dos sucesiones $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ contenidas en U y V, respectivamente tales que $d(a_i, b_i)$ se aproxima a 0 si i crece. Como U es compacto, existe $(a_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que a_{i_k} se aproxima a a para algún $a \in U$. Por otro lado, $d(b_{i_k}, a) \leq d(b_{i_k}, a_{i_k}) + d(a_{i_k}, a)$, pero está última suma se aproxima a 0, lo que implica que $a \in \overline{V}$, pero $V = \overline{V}$, entonces $a \in U \cap V$, lo cuál es una contradicción. El regreso es inmediato de la definición. $\square$

Hay que notar que la condición de que U sea compacto es indispensable, pues en $(\mathbb{R}, d_{usual})$, si $U = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ y $V = \left\{n + \frac{1}{n} : n \geq 2 \in \mathbb{N}\right\}$, cumplen que $U \cap V = \emptyset$ y $d(U, V) = 0$.

3. Espacios de descomposición

Definición 1.23. Sean (S, Γ) un espacio topológico y $\mathfrak{D}$ una colección de subconjuntos de S no vacíos, ajenos dos a dos tales que $\cup\, \mathfrak{D} = S$. Definimos $\Gamma(\mathfrak{D}) = \{\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D} : \cup\, \mathfrak{A}$ es un conjunto abierto de $S\}$. Podemos observar claramente que se trata de una topología para el espacio $\mathfrak{D}$. Entonces decimos que $(\mathfrak{D}, \Gamma(\mathfrak{D}))$ es una *descomposición* del espacio S. Una descomposición del espacio S es cerrada, si todos los elementos de $\mathfrak{D}$ son cerrados de S.

Intuitivamente, una descomposición es un espacio obtenido del espacio original en donde se identifican todos los miembros de un elemento de ésta como uno sólo. Por esta razón, las descomposiciones son frecuentemente llamados espacios de identificación. También, a menudo son llamados espacios cociente por la relación tan íntima entre las particiones y las relaciones de equivalencia en la teoría de conjuntos.

Lema 1.24. Sean (S, Γ) un espacio topológico, $(\mathfrak{D}, \Gamma(\mathfrak{D}))$ una descomposición de S y $\pi : S \to \mathfrak{D}$ la proyección natural, donde $\pi(a) = D$ si $a \in D$ (esta función está bien definida pues los elementos de $\mathfrak{D}$ son ajenos). Entonces $\Gamma(\mathfrak{D})$ hace de π una función continua y es la topología más grande con esta propiedad.

Demostración. Sea $\mathfrak{A} \in \Gamma(\mathfrak{D})$. Entonces $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}$ y $\cup\, \mathfrak{A} \in \Gamma$. Recordemos que $\pi^{-1}(\{A\}) = A$ para todo $\{A\} \in \mathfrak{D}$. Por lo tanto $\pi^{-1}(\mathfrak{A}) = \cup\, \mathfrak{A} \in \Gamma$. Para la segunda parte, sea $(\mathfrak{D}, \Upsilon)$ espacio topológico tal que para cada V abierto en la topología Υ, $\pi^{-1}(V) \in \Gamma$. Como $\pi^{-1}(V) = \cup\, V$, por la definición de $\Gamma(\mathfrak{D})$, $V \in \Gamma(\mathfrak{D})$, es decir, $\Upsilon \subset \Gamma(\mathfrak{D})$. $\square$

Lema 1.25. Si un espacio Hausdorff Y es la imagen continua de un espacio métrico compacto X, entonces Y es metrizable.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ función continua y suprayectiva. Por 1.13, se tiene que Y es compacto y, por 1.14, Y regular. Para poder aplicar 1.6, es suficiente exhibir una base numerable de Y. Por 1.15, X tiene una base numerable $\mathfrak{C}$. Para cada subconjunto finito $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{C}$, definimos $E(\mathcal{L}) = Y \setminus f(X \setminus \cup \mathcal{L})$.

Sea $\wp = \{E(\mathcal{L}) : \mathcal{L}$ es un subconjunto finito de $\mathfrak{C}\}$. Por la numerabilidad de $\mathfrak{C}$, se obtiene que $\wp$ también es numerable. Por 1.13, obtenemos que $\wp$ está formado de conjuntos abiertos de Y. Por otro lado, sean $p \in U$ con U abierto de Y. Por continuidad, $f^{-1}(p)$ es un compacto de X contenido en el abierto $f^{-1}(U)$. Por lo tanto, existe una familia finita $\mathcal{L}$ de $\mathfrak{C}$, tal que $f^{-1}(p) \subset \cup \mathcal{L} \subset f^{-1}(U)$. De donde obtenemos que $p \in E(\mathcal{L}) \subset U$. Así concluimos que Y es metrizable. $\square$

Definición 1.26. Sea (S, Γ) un espacio topológico. Una colección de subconjuntos $\mathfrak{D}$ de S, es *semicontinua superiormente* si dados $D \in \mathfrak{D}$ y U conjunto abierto de S tales que $D \subset U$, existe un conjunto abierto V tal que si $A \in \mathfrak{D}$ y $A \cap V \neq \varnothing$, entonces $A \subset U$. Notemos que esta definición no toma en cuenta la topología ya antes definida. Como notación, cuando estemos tratando con este tipo de descomposiciones sólo nos referiremos a éstas como descomposiciones *scs*.

Definición 1.27. Sean $\mathfrak{D}$ una descomposición de un espacio S y $A \subset S$. Decimos que A es $\mathfrak{D}$-saturado si $A = \cup\, \mathfrak{C}$ donde $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$. Algunos de los resultados inmediatos son: 1) $\pi^{-1}(\mathfrak{C})$ es $\mathfrak{D}$-saturado para $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$, 2) $A \subset S$ es $\mathfrak{D}$-saturado si y sólo si $A = \pi^{-1}(\pi(A))$ y 3) Si A es $\mathfrak{D}$-saturado y A es un abierto de S, entonces $\pi(A)$ es abierto en $\mathfrak{D}$. La demostración de éstas se siguen de la definición, por lo que las omitire.

Para entender un poco mejor las descomposiciones scs, se da la siguiente proposición.

Proposición 1.28. Sean (S, Γ) un espacio topológico, $\mathfrak{D}$ una descomposición de S y $\pi : S \to \mathfrak{D}$ la proyección natural. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1) $\mathfrak{D}$ es una descomposición scs.

2) π es una función cerrada.

3) Si $D \in \mathfrak{D}$, U abierto y $D \subset U$, entonces existe V abierto con $D \subset V \subset U$ y V es $\mathfrak{D}$-saturado.

Demostración. 1) implica 2). Sea C cerrado de S, entonces $\pi(C)$ es cerrado en $\mathfrak{D}$, por la definición de $\Gamma(\mathfrak{D})$ y 1.24, si y sólo si $\pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(C)]$

es abierto en S. Tomemos $p \in \pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(C)]$, entonces $\pi(p) \in \mathfrak{D} \setminus \pi(C)$. Para nuestro objetivo, veamos que $\pi^{-1}(\pi(p)) \subset S \setminus C$, supongamos que $\pi^{-1}(\pi(p)) \cap C \neq \varnothing$ y sea $y \in \pi^{-1}(\pi(p)) \cap C$, entonces $\pi(p) = \pi(y)$ y $\pi(y) \in \pi(C)$. Por lo tanto $\pi(p) \in \pi(C) \neq \varnothing$, lo que es una contradicción, por la elección de p. Dado que $S \setminus C$ es un abierto tal que $\pi^{-1}(\pi(p)) \subset S \setminus C$ y $\mathfrak{D}$ es scs, existe V abierto tal que $\pi(p) \subset V$. Sea $x \in V$, dado que $x \in \pi^{-1}(\pi(x)) \cap V$ y $\pi^{-1}(\pi(x)) \in \mathfrak{D}$por la definición tenemos que $\pi^{-1}(\pi(x)) \subset S \setminus C$. Ahora, veamos que si $x \in V$ entonces $\pi(x) \in \mathfrak{D} \setminus \pi(C)$. Supongamos que existe $x \in V$ tal que $\pi(x) \in \pi(C)$, entonces existe $y \in C$ que hace que $\pi(x) = \pi(y)$. De donde $\pi^{-1}(\pi(x)) \not\subset S \setminus C$ ya que $x \in \pi^{-1}(\pi(x))$, lo que contradice que $x \in V$ pues pasaría $\pi(x) \in \pi(C)$. Por lo tanto $p \in V \subset \pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(C)]$.

2) implica 3). Sean $D \in \mathfrak{D}$ y U abierto tales que $D \subset U$. Definimos $V = \pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(S \setminus U)]$. Entonces V es abierto pues π es cerrada y continua. Veamos que $D \subset V \subset U$.

Primero $D \subset V$. Por hipótesis $D \subset U$. Entonces $S \setminus U \subset S \setminus D$. De donde, $\pi(S \setminus U) \subset \pi(S \setminus D)$. Como $D \in \mathfrak{D}$, $\pi(S \setminus D) = \mathfrak{D} \setminus \pi(D)$, por lo tanto, $\pi(D) \in \mathfrak{D} \setminus \pi(S \setminus U)$ y aplicando π^{-1} tenemos que $D = \pi^{-1}(\pi(D)) \subset \pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(S \setminus U)] = V$.

Ahora que $V \subset U$. Sea $x \in V$. Por definición, $\pi(x) \in \mathfrak{D} \setminus \pi(S \setminus U)$. Entonces $\pi(S \setminus U) \subset \mathfrak{D} \setminus \{\pi(x)\}$, Aplicando π^{-1}, $(S \setminus U) \subset \pi^{-1}\pi(S \setminus U) \subset \pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \{\pi(x)\}] \subset S \setminus \{x\}$. Concluimos así, que $x \in U$.

Para que V sea $\mathfrak{D}$-saturado, según 2) de 1.27, sólo es necesario ver que $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$. Como π es suprayectiva, $\pi(\pi^{-1}(H)) = H$ para todo $H \subset \mathfrak{D}$, entonces $\pi^{-1}\pi(V) = \pi^{-1}\pi\,[\pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(S \setminus U)]] = \pi^{-1}[\pi\pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(S \setminus U)]] = \pi^{-1}[\mathfrak{D} \setminus \pi(S \setminus U)] = V$.

3) implica 1). Para cumplir con la definición lo único que resta ver es que si $A \in \mathfrak{D}$ y $A \cap V \neq \varnothing$ entonces $A \subset U$. Pero como V es $\mathfrak{D}-$saturado, la única manera de que esto sea posible es que $A \subset V$, y como $V \subset U$. Entonces $A \subset U$. $\square$

Lema 1.29. Sean (S, Γ) un espacio topológico T_1 y $\mathfrak{D}$ una descomposición scs de S. Entonces $\mathfrak{D}$ es una descomposición cerrada de S.

Demostración. Sea $A \in \mathfrak{D}$. Tomamos $p \in A$, observemos que $\{p\}$ es cerrado en S, y como π es cerrada, por 1.28. Entonces $\pi(\{p\}) = A$ es cerrado de $\mathfrak{D}$, de donde $W = \cup\{C \in \mathfrak{D} : C \neq A\}$ es un conjunto abierto, pero $W = S \setminus A$. Por lo tanto, A es un cerrado de S. $\square$

Teorema 1.30. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathfrak{D}$ una descomposición scs de X, entonces $(\mathfrak{D},\Gamma(\mathfrak{D}))$ es metrizable.

Demostración. Por 1.25, sólo es necesario demostrar que $(\mathfrak{D}, \Gamma(\mathfrak{D}))$ es Hausdorff. Sean $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ con $D_1 \neq D_2$. Por 1.29, D_1, D_2 son cerrados de X, como X es normal, existen dos abiertos ajenos U_1, U_2 de X tales que $D_i \subset U_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Como $\mathfrak{D}$ es scs, por 1.28, existen dos abiertos V_1 y V_2 abiertos de X, tales que $D_i \subset V_i \subset U_i$ y cada V_i es $\mathfrak{D}$-saturado. Si $D_i \subset V_i$ y $D_i \in \mathfrak{D}$, entonces $D_i \in \pi(V_i)$ para $i \in \{1, 2\}$. Por otro lado $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ pues $V_i \subset U_i$, recordando 2) y 3) de 1.27, tenemos que $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son abiertos de $\mathfrak{D}$. Además, $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \varnothing$, pues $\varnothing = V_1 \cap V_2 = \pi^{-1}(\pi(V_1)) \cap \pi^{-1}(\pi(V_2))$ y π es suprayectiva. $\square$

Definición 1.31 (**Función cociente**). Sean $(X, \Gamma), (Y, \Upsilon)$ espacios topológicos y $p : X \to Y$ una función suprayectiva. Decimos que p es una *función cociente* si Υ es la topología más grande que hace de p una función continua. Algunos autores llaman a esta función, función identificación o simplemente una identificación. Además $\Upsilon = \{V \subset Y : p^{-1}(V) \in \Gamma\}$, la demostración de esta observación es idéntica a 1.24, con las respectivas diferencias en la notación.

Lema 1.32. (**Lema de Transgresión**). Sean $(X, \Gamma), (Y, \Upsilon)$ y (Z, Ψ) espacios topológicos, $p : X \to Y$ una función cociente y $h : X \to Z$ una función continua. Supongamos que $h(x)$ es constante para cada $x \in p^{-1}(y)$ con $y \in Y$. Entonces: $h \circ p^{-1} : Y \to Z$ está bien definida y es continua.

Demostración. Para cada $y \in Y$, se tiene que $h \circ p^{-1}(y) = \{z\}$, pero escribamos $h \circ p^{-1}(x) = z$. Por lo tanto la función está bien definida.

Sea U un abierto de Z. Necesitamos mostrar que $\left(h \circ p^{-1}\right)^{-1}(U)$ es un abierto de Y. Para eso es necesario, dado que p se trata de una función cociente, que $p^{-1}\left[\left(h \circ p^{-1}\right)^{-1}(U)\right]$ sea un abierto de X. Por continuidad de h, $h^{-1}(U)$ es un abierto de X. Como $h(x)$ es constante para cada $x \in p^{-1}(y)$ con $y \in Y$, $h(x) = h \circ p^{-1} \circ p(x)$ entonces $h^{-1}(U) = \left(h \circ p^{-1} \circ p\right)^{-1}(U) = p^{-1} \circ \left(h \circ p^{-1}\right)^{-1}(U)$, por lo tanto $p^{-1}\left[\left(h \circ p^{-1}\right)^{-1}(U)\right]$ es un abierto de X. Asi pues $h \circ p^{-1}$ es una función continua. $\square$

Teorema 1.33. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Definimos $\mathfrak{D}_f = \{f^{-1}(y) :$

$y \in Y\}$, entonces $\mathfrak{D}_f$ es una descomposición scs de X y $\mathfrak{D}_f$ es homeomorfa a Y.

Demostración. Ya que $f^{-1}(Y) = X$, f es suprayectiva y $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$, para diferentes $y_1, y_2 \in Y$, tenemos que, $\mathfrak{D}_f$ es una descomposición de X. Ahora veamos que se trata de una descomposición scs. Supongamos que no. Siguiendo 1.26, existen $f^{-1}(y_0)$ y un abierto U de X con $f^{-1}(y_0) \subset U$ tal que para todo abierto V de X, existe $f^{-1}(z_0)$ tal que $f^{-1}(z_0) \cap V \neq \varnothing$, pero $f^{-1}(z_0) \cap (X \setminus U) \neq \varnothing$. Notemos que $f^{-1}(y_0)$ (por la continuidad de f) y $(X \setminus U)$ son compactos de X. Entonces por 1.22, $d(f^{-1}(y_0), (X \setminus U)) > 0$. Sin perdida de generalidad supongamos que $d(f^{-1}(y_0), (X \setminus U)) > 1$. Dado un número natural n, sea $V_n = N(f^{-1}(y_0), \frac{1}{n}, X)$. Entonces existen $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ con $p_i \in V_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y $(q_i)_{i=1}^{\infty} \subset (X \setminus U)$ tales que $f(p_i) = f(q_i)$. Por la compacidad de X y por construcción, existe $p \in f^{-1}(y_0)$ tal que $(p_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ converge a p si j crece, con $(p_{i_j})_{j=1}^{\infty} \subset (p_i)_{i=1}^{\infty}$. Por 1.12, como $X \setminus U$ es cerrado, existe $q \in X \setminus U$ tal que $(q_{i_{j_k}})_{k=1}^{\infty}$ converge a q si k crece, con $(q_{i_{j_k}})_{k=1}^{\infty} \subset (q_{i_j})_{j=1}^{\infty}$. Como $f(p_{i_{j_k}}) = f(q_{i_{j_k}})$ y f es continua entonces $f(q) = y_0$, de donde $q \in f^{-1}(y_0) \cap (X \setminus U)$ pero esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathfrak{D}_f$ es una descomposición scs.

Por 1.30, $\mathfrak{D}_f$ es metrizable y, por lo tanto, Hausdorff. Es claro que $h = \pi \circ f^{-1}$, donde π es la función utilizada para las descomposiciones scs, es biyectiva. Entonces por, 1.32 y 1.13, tenemos que $h : Y \to \mathfrak{D}_f$ es un homeomorfismo. $\square$

4. Componentes y casicomponentes

Las componentes y casicomponentes nos servirán para demostrar el teorema del cable cortado que usaremos en el capítulo 2.

Definición 1.34. Sea (X, Γ) un espacio topológico. Decimos que X es *disconexo* si existen $E, F \subset X$ no vacíos, abiertos (cerrados), ajenos y tales que $X = E \cup F$, notación: $X = E|F$. Un espacio X, es conexo si no es disconexo y diremos que E y F forman una disconexión de X.

Definición 1.35. Sea S un espacio topológico. Una *componente* del espacio S es un conexo máximo contenido en S. Si $p \in S$, definimos y denotamos por C_p a:

$$C_p = \cup\{D \subset S : D \text{ es conexo y } p \in D\}$$

Varias de las propiedades que tienen las componentes de un espacio, se enuncian a continuación:

Propiedades 1.36. [Véase [2], Proposición 6.2.2. Pag. 260] Sea (S, Γ) un espacio topológico. Entonces:

$C.1)$ Las componentes forman una partición de S.

$C.2)$ Las componentes de S, son conjuntos cerrados en S.

$C.3)$ Si C es una componente de S y $S = U|V$, con U, V abiertos ajenos y no vacíos, entonces $C \subset U$ o $C \subset V$ (Este enunciado permanece válido si se sustituye a C por cualquier conjunto conexo de S). Además, si $\{B_\alpha : \alpha \in I\} \cup \{B\}$ es una familia de subconjuntos conexos de S tales que $B_\alpha \cap B \neq \varnothing$ para cada α, entonces $B \cup [\cup_{\alpha \in I} B_\alpha]$ es un conjunto conexo.

Definición 1.37. Sea (S, Γ) un espacio topológico y sea $p \in S$. Definimos y denotamos la *casicomponente* del punto p como sigue:

$$Q_p = \cap\{A : A \text{ es un abierto y cerrado, con } p \in A\}$$

Al igual que las componentes, las casicomponentes tienen varias propiedades y se enuncian algunas a continuación:

Propiedades 1.38. [Véase [2], Teorema 9.2.4, págs. 427-428] Sea (S, Γ) espacio topológico. Entonces:

$Q.1)$ Las casicomponentes forman una partición del espacio S.

$Q.2)$ Sea $p \in S$ entonces $C_p \subset Q_p$. Por lo tanto toda, componente está contenida en una casicomponente.

$Q.3)$ Sean $p, q \in S$. Entonces $p, q \in Q$, para alguna casicomponente Q, si y sólo si siempre que $S = U|V$ con $U, V \in \Gamma$ ajenos, no vacíos, tal que $p \in U$, entonces $q \in U$. Equivalentemente, $p \in Q$ y $q \in Q'$ con Q y Q' casicomponentes, entonces $Q \neq Q'$ si y sólo si existen $U, V \in \Gamma$ ajenos, con $X = U|V$ y $p \in U, q \in V$.

Teorema 1.39. Sea (X, Γ) espacio métrico compacto. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1) Las componentes y casicomponentes coinciden. Es decir, si C y Q son una componente y una casicomponente, respectivamente, tales que $C \subset Q$, entonces $C = Q$.

2) (**Teorema del Cable Cortado**) Si existen cerrados A y B de X, tales que ningún conexo de X los intersecta al mismo tiempo (en particular ninguna componente lo hace), entonces $X = X_1 \cup X_2$, con X_1, X_2 cerrados ajenos, tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.

Demostración. 1) implica 2). Sean A y B cerrados de X tales que ningún subconjunto conexo de X los intersecta. Sea $p \in B$ fijo. Por hipótesis y $Q.3$), se tiene que para todo elemento $a \in A$, p y a están en distintas casicomponentes. Entonces $X = E_a | X \setminus E_a$ con E_a abierto y cerrado de X, $a \in E_a$ y $p \in X \setminus E_a$. La familia $\mathcal{L} = \{E_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto, existen $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \cup_{k=1}^{n} E_{a_k}$. Definimos $E_p = \cup_{k=1}^{n} E_{a_k}$, entonces E_p es un abierto y cerrado que contiene a A pero no a p. Como la elección de este $p \in B$ fue arbitraria, podemos entonces definir $\mathcal{F} = \{X \setminus E_p : p \in B\}$. Notemos que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de B, con $X \setminus E_p \cap A = \varnothing$ para todo $p \in B$. Como B es compacto, existen $p_1, p_2, ...p_m \in B$ tales que $B \subset \cup_{k=1}^{m} X \setminus E_{p_k}$. Definimos $F = \cup_{k=1}^{m} X \setminus E_{p_k}$, entonces F es un abierto y cerrado tal que $B \subset F$ y $F \cap A = \varnothing$. Por lo tanto $X = F | X \setminus F$ con $F, X \setminus F$ cerrados, ajenos y tales que $A \subset X \setminus F, B \subset F$.

2) implica 1). Sabemos, por $Q.2$), que toda componente está contenida en una casicomponente. Supongamos que existen una componente C y una casicomponente Q, con $C \subset Q$, tales que $Q \setminus C \neq \varnothing$. Sean $p \in Q \setminus C$ y $q \in C$. Definimos $A = \{p\}, B = \{q\}$. Observemos que A y B son conjuntos cerrados de X. Como C es una componente de X, ningún conexo puede tener a p y q. Es decir, ningún conexo intersecta a A y B al mismo tiempo. Entonces, por hipótesis, $X = X_1 \cup X_2$ con X_1 y X_2 cerrados ajenos, tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$. Pero esto contradice $Q.3$). Concluyendo que $Q \setminus C = \varnothing$ y, por lo tanto, $Q = C$. $\square$

Lo siguiente que haremos será demostrar que en un espacio Hausdorff y compacto, las componentes y las casicomponentes coinciden. Y por lo tanto en espacios métricos compactos, el Teorema del Cable Cortado se satisface. Para una prueba por separado del Teorema del Cable Cortado véase [[12], Teorema 5.2, pág. 72]

Teorema 1.40. Sea (S, Γ) espacio topológico Hausdorff y compacto. Entonces las componentes y casicomponentes coinciden.

Demostración. Lo que trataremos, es ver que toda casicomponente Q de S, es un conjunto conexo. Supongamos que existe Q, tal que $Q = A \cup B$ en donde A, B son cerrados, ajenos y no vacíos. Sean $x \in A$ y $y \in B$, como S es Hausdorff y compacto entonces por 1.15, S es normal, es decir, existen U, V abiertos tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por otro lado $Q = Q_p$ para $p \in Q$. Entonces $Q_p \subset (U \cup V)$.

Tomando complementos obtenemos que $S \setminus (U \cup V) \subset S \setminus Q_p$. Recordando la definición de Q_p tendríamos que $S \setminus Q_p = \cup\{E : E$ es abierto y cerrado y $p \notin E\}$, es decir los conjuntos abiertos y cerrados que no contienen a p forman una cubierta abierta de $S \setminus (U \cup V)$. Usando la compacidad de $S \setminus (U \cup V)$, existen $E_1, E_2, ..., E_n$ abiertos y cerrados tales que $S \setminus (U \cup V) \subset \cup_{i=1}^{n} E_i$, donde $E_i \subset S \setminus Q_p$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. De esta última contención podemos observar que $E_i \cap B = \varnothing$, pues $B \subset Q_p$.

Definimos $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$. Entonces los conjuntos $U \cup E, V \setminus E$ cumplen con que:

1) $B \cap E = \varnothing$. Esto pasa porque $E_i \cap B = \varnothing$ para cada i.

2) $A \subset (U \cup E), B \subset (V \setminus E)$. Por 1).

3) $(U \cup E) \cap (V \setminus E) = \varnothing$. Esto se debe a que, $(U \cup E) \cap (V \cap (S \setminus E)) =(U \cap (V \cap (S \setminus E))) \cup (E \cap (V \cap (S \setminus E)))$. Por otra parte, $U \cap (V \cap (S \setminus E)) \subset U \cap V$ y $E \cap (V \cap (S \setminus E)) \subset E \cap (S \setminus E)$. Y ya que $U \cap V = E \cap (S \setminus E) = \emptyset$, obtenemos lo que queríamos.

4) $U \cup E, V \setminus E$ son abiertos de S. Pues E es un abierto y cerrado en S.

5) $S = (U \cup E) \cup (V \setminus E)$. Sea $x \in S$. Caso 1. Si $x \in E$ entonces $x \in U \cup E$. Caso 2. Si $x \notin E$, como $S \setminus E \subset (U \cup V)$, entonces $x \in U \cup V$. Si $x \in U$ entonces $x \in (U \cup E)$, si $x \in V$ entonces $x \in V \cap S \setminus E = V \setminus E$.

Por lo tanto $U \cup E, V \setminus E$ forman una disconexión de S, con $y \in V \setminus E$ y $z \in U \cup E$, pero esto contradice Q.3). Entonces Q debe de ser conexo. Por consiguiente Q está contenida en una componente C. Pero $C \subset Q$. Con esto el teorema queda demostrado. $\square$

Si se desea una prueba alternativa de 1.40, véase [[2], Teorema 9.2.4., págs. 427-428]

Definición 1.41. Sea (X, Γ) un espacio topológico. Decimos que X es *localmente conexo* si para cada $x \in X$ y un abierto U de x, existe V abierto tal que V es conexo y $x \in V \subset U$.

Lema 1.42. Sea (Z, Γ) espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1) Z es localmente conexo.

2) Para todo U conjunto abierto de Z y C_U es una componente de U, entonces C_U es un conjunto abierto.

3) (**Conexo en pequeño en** p) Para toda $p \in Z$, si $p \in U$ con U conjunto abierto de Z, existe $W \subset X$ conexo tal que $p \in int(W) \subset W \subset U$.

Demostración. 1) implica 2). Sean un abierto U de Z y C_U una componente de U. Sea $y \in C_U$. Como C_U es una componente de U, entonces $y \in U$. Por 1) existe un abierto y conexo V de Z tal que $p \in V \subset U$. Como V es conexo, entonces $V \subset C_U$. Es decir, a cada punto y de C_U le estamos asociando un abierto V tal que $y \in V \subset C_U$. Por lo tanto, C_U es un abierto de Z.

2) implica 1). Sean U abierto y $p \in U$. Entonces, como la componente C_U que contiene a p es un abierto y conexo de Z tal que $p \in C_U \subset U$, se cumple trivialmente 1).

1) implica 3)) El abierto W, que necesitamos es precisamente con $W = V$.

3) implica 2) Sean U abierto de Z, C_U una componente de U y $y \in C_U$. Por 3), existe un subconjunto conexo W tal que $y \in int(W) \subset W \subset U$. Como $W \subset U$ y es conexo, se tiene que $W \subset C_U$. Por lo que $y \in int(W) \subset W \subset C_U$. Es decir, para cada punto de la componente estamos encontrando un abierto $(int(W))$, contenido en ésta. Por lo tanto, se cumple 2). $\square$

Proposición 1.43. Sean (X, Γ) y (Y, Υ) espacios topológicos, $A \subset X$ conexo y $f : X \to Y$ función continua. Entonces $f(A)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $f(A)$ es disconexo. Entonces existen conjuntos abiertos E y F de Y tales que $f(A) = E \cup F$, con $E \cap f(A) \neq \varnothing$ y $F \cap f(A) \neq \varnothing$.

Por continuidad de f, $f^{-1}(E)$ y $f^{-1}(F)$ son abiertos, además de que, $f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F) = \varnothing$. De manera que $A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$, es decir, $f^{-1}(E)$ y $f^{-1}(F)$ son una disconexión de A, pero esto es una contradicción, pues por hipótesis A es conexo. $\square$

Proposición 1.44. Sean $(\mathbb{R}, d_{usual})$ y $A \subset \mathbb{R}$ cerrado, entonces las componentes de $\mathbb{R} \setminus A$ son un conjunto numerable.

Demostración. Sean $\{C_\alpha : \alpha \in \mathfrak{I}\}$ las componentes de $\mathbb{R}\setminus A$. Claramente $\mathbb{R}$ es localmente conexo. Entonces por 1.42, cada C_α es abierto de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso, existe $r_\alpha \in C_\alpha \cap \mathbb{Q}$ para cada $\alpha \in \mathfrak{I}$. Definimos $f : \{C_\alpha : \alpha \in \mathfrak{I}\} \to \mathbb{Q}$, dada por $f(C_\alpha) = r_\alpha$. Por construcción, f está bien definida y es inyectiva.

De manera que $|\mathfrak{I}| = |\{C_\alpha : \alpha \in \mathfrak{I}\}| = |f(\{C_\alpha : \alpha \in \mathfrak{I}\})|$ y, como $f(\{C_\alpha : \alpha \in \mathfrak{I}\}) \subset \mathbb{Q}$, tenemos que $\mathfrak{I}$ es numerable. $\square$

Definición 1.45. Decimos que un espacio métrico (X, d) es un *continuo* si es compacto y conexo. Si el espacio (X, d) tiene más de un punto, decimos que es un *continuo no degenerado*.

Proposición 1.46. Sean (X, d) un continuo no degenerado y U un abierto de X no vacío. Entonces U tiene más de un punto. Además, si $p, q \in U$ con $p \neq q$, existen $V_1, V_2 \subset U$ abiertos ajenos con $p \in V_1$, $q \in V_2$, $V_i \subset \overline{V_i} \subset U$, y diám$(V_i) < \delta$ para toda $\delta > 0$.

Demostración. Supongamos que existe $p \in X$ y un U abierto tal que $U = \{p\}$, como X es métrico entonces $\{p\}$ es un conjunto cerrado. Por la tanto U es abierto y cerrado de X. Lo que es una contradicción, pues X es conexo y tiene más de un punto.

Para la segunda parte, sean $p, q \in U$ y $\delta > 0$, como U es abierto y X es métrico, existen r_1 y $r_2 > 0$ tales que $p \in B(r_1, p) \subset U, q \in B(r_2, q) \subset U$ y $\overline{B(r_1, p)} \cap \overline{B(r_2, q)} = \varnothing$. Tomamos $V = B(\frac{r_1}{2}, p) \cap B(\frac{\delta}{2}, p)$ y $W = B(\frac{r_2}{2}, q) \cap B(\frac{\delta}{2}, q)$, y claramente estos V, W satisfacen nuestra afirmación. $\square$

Definición 1.47. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es *uniformemente localmente arco-conexo* $(ULAC)$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, z) < \delta$ entonces existe un arco A que tiene como puntos finales a x y z y además el diámetro de A es menor que ϵ.

CAPÍTULO 2

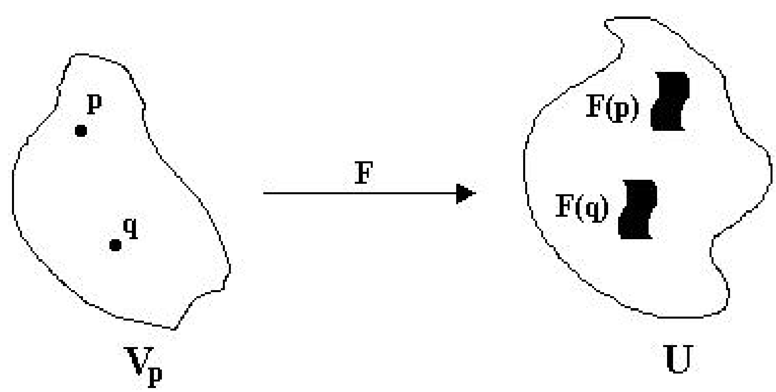
El teorema de la función general
Y
una caracterización de Cantor

La existencia (o no existencia) de funciones continuas y suprayectivas, es uno de los aspectos más importantes en la teoría de los continuos. En este capítulo expondremos condiciones suficientes para que exista una función continua y suprayectiva entre dos espacios topológicos compactos, el teorema de la función general (2.14). Este teorema (2.14), así como los dos lemas previos a éste, son sencillos de demostrar, mostrándonos lo útil y poderoso que es. Asímismo, veremos varias de sus aplicaciones directas e indirectas, a las que les dedicaremos todo el Capítulo 3.

El teorema 2.14 y la idea de varias aplicaciones se deben a M. K. Fort, Jr, en su único escrito que trata sobre este tema $One-to-one\ mappings\ onto\ the\ Cantor\ set$ en el año de 1956, véase [4].

1. Funciones semicontinuas superiormente y el teorema de la función general

Definición 2.1. Sean (X, Γ_1) y (Y, Γ_2) espacios topológicos, $p \in X$, U abierto de Y y $F : X \to 2^Y$ una función. Se dice que F es *semicontinua superiormente* en p si $F(p) \subseteq U$, existe V abierto de X con $p \in V$, tal que $F(x) \subseteq U$ para todo $x \in V$.



$figura$ 1

Bajo las mismas hipótesis, decimos que una función F es semicontinua superiormente en X, si para todo elememto $p \in X$, F es semicontinua superiormente en p. Como notación de ahora en adelante, sólo nos referiremos a este tipo de funciones como una función scs.

Existen muchos ejemplos de funciones scs, a continuación daremos algunos de ellos y sus propiedades.

Ejemplo 2.2. Sean $X = Y = \mathbb{R}$ y $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_d$, con Γ_d la topología inducida por la métrica $d(x, y) = |x - y|$. Sea $F : X \to 2^Y$ con $F(x) = [x, x + 1]$, entonces F es scs.

Demostración. Sean $p \in \mathbb{R}$ y U un abierto de $\mathbb{R}$ tales que $F(p) = [p, p + 1] \subset U$. Por 1.22 y, dado que $F(p)$ es compacto, $d(F(p), \mathbb{R} \setminus U) > 0$. Sea $\delta = \frac{d(F(p), \mathbb{R} \setminus U)}{2}$. Tomamos $q \in B_\delta(p)$. Entonces $F(q) = [q, q + 1] \subset [p - \delta, p + (1 + \delta)]$. Es claro que $d([p - \delta, p + (1 + \delta)], \mathbb{R} \setminus U) > 0$. Entonces por 1.22, $[q, q + 1] \cap (\mathbb{R} \setminus U) = \emptyset$ y, con esto, concluimos que $F(q) \subset U$ para todo $q \in B(\delta, p)$.

Teorema 2.3. Sean (X, Γ) y (Y, Υ) espacios topólogicos y $f : X \to Y$ una función suprayectiva tal que $f^{-1}(y)$ es cerrado para cada $y \in Y$. Definimos $F : Y \to 2^X$ como $F(y) = f^{-1}(y)$. Entonces F es scs si y sólo si f es cerrada.

Demostración. Una propiedad muy sencilla de ver y que utilizaremos es que si $f : X \to Y$ es una función, entonces $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ para todo $B \subset Y$.

Supongamos que F es scs. Sea $B \subset X$ cerrado. Entonces $f(B)$ es cerrado si y sólo si $Y \setminus f(B)$ es abierto. Sea $y \in Y \setminus f(B)$. Aplicando f^{-1}, $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(Y \setminus f(B)) \subset X \setminus B$. Por tanto $F(y) \subset X \setminus B$. Como F es scs, existe V abierto tal que $F(z) \subset X \setminus B$ para cada $z \in V$, es decir, $f^{-1}(z) \subset X \setminus B$. Por lo tanto, $y \in V \subset Y \setminus f(B)$.

Sea f función cerrada. Sean $y \in Y$, U abierto de X, tales que $F(y) \subset U$. Entonces $X \setminus U \subset X \setminus F(y)$. Aplicando f, $f(X \setminus U) \subset f(X \setminus F(y)) = Y \setminus \{y\}$. Como f es cerrada, $f(X \setminus U)$ es un cerrado de Y. Entonces $y \in Y \setminus f(X \setminus U)$, donde $Y \setminus f(X \setminus U)$ es un abierto de Y. Comprobemos que éste es el abierto que necesitamos. Sea $z \in Y \setminus f(X \setminus U)$. Además, $f^{-1}(z) \subset f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U)) \subset X \setminus U$. $\square$

Antes de continuar, recordemos la siguiente definición.

Definición 2.4. Sean (X, Γ) y $\{F_i : i \in I\}$ una colección de conjuntos de X. Definimos y denotamos al *límte superior* de estos conjuntos como sigue:

lím sup $F_i = \{y \in Y$: para toda vecindad W de y, $F_i \cap W \neq \varnothing$ para una infinidad de índices$\}$

Teorema 2.5. Sean $(X, d_1), (Y, d_2)$ espacios métricos con Y compacto y $p \in X$. Sea $F : X \to 2^Y$ una función. Entonces F es scs en p si y sólo si para toda $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ convergente a p, lím sup $F(x_i) \subset F(p)$.

Demostración. Sean una función scs F y $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de X, convergentea p. Observemos que cada $F(x_i)$ es un conjunto de Y. Sea $y \in$lím sup $F(x_i)$. Se demostrará que $y \in \overline{F(p)}$ y dado que $F(p)$ es cerrado, $y \in F(p)$.

Sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{2}{N} < \epsilon$. Definimos $U = \{z \in Y : d(z, q) < \frac{1}{N}$ para algún $q \in F(p)\}$. Claramente U es un abierto que contiene a $F(p)$. Como F es scs, existe una vecindad V de p tal que si $z \in V$, $F(z) \subset U$. Por otra parte dado que x_i converge a p, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V$ para $k \geq M$ y por lo tanto, $F(x_k) \subset U$ para $k \geq M$. Sea $W = B(\frac{1}{N}, y)$. Como $y \in$lím sup $F(x_i)$, $W \cap F(x_i) \neq \varnothing$ para una infinidad de índices. Tomemos x_m con $m \geq M$ tal que $F(x_m) \cap W \neq \varnothing$. Sea $\zeta \in F(x_m) \cap W$. Ya que $\zeta \in F(x_m)$ con $m \geq M$, cumple que $F(x_m) \subset U$. Entonces de la definición de U, existe $q \in U$ tal que $d_2(\zeta, q) < \frac{1}{N}$. Como $\zeta \in W$, $d_2(\zeta, y) < \frac{1}{N}$. De manera que $d_2(y, q) \leq d_2(y, \zeta) + d_2(\zeta, q) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \epsilon$ con $q \in F(p)$. Puesto que la elección de ϵ fue arbitraria, concluimos que $y \in \overline{F(p)}$, pero al ser $F(p)$ un cerrado obtenemos lo que deseabamos.

Inversamente. Supongamos que F no es scs en p. Entonces existen $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a p y un abierto U de Y con $F(p) \subset U$, para los cuales $F(x_i) \cap (Y \setminus U) \neq \varnothing$. Por hipótesis tendríamos que lím sup $F(x_i) \subset F(p)$. Tomemos una sucesión $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $y_i \in F(x_i) \cap (Y \setminus U)$. Por 1.12, existe una subsucesión $(y_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que y_{i_k} converge a y, para algún $y \in Y \setminus U$, ya que $Y \setminus U$ es cerrado y la sucesión original estaba contenida en este conjunto. Veamos ahora que $y \in$lím sup $F(x_i)$. Consideremos $B(r, y)$ para $r > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_{i_k} \in B(r, y)$ si $k \geq N$. Por construcción, $y_{i_k} \in F(x_{i_k})$. Así pues, $y_{i_k} \in B(r, y) \cap F(x_{i_k})$ si $k \geq N$, es decir, $B(r, y) \cap F(x_i) \neq \varnothing$ para una infinidad de índices. Por lo tanto, $y \in$lím sup $F(x_i) \subset F(p) \subset U$. Luego $y \in U \cap (Y \setminus U)$, lo que es imposible. $\square$

Teorema 2.6. Sean (X, Γ) y (Y, Γ) espacios topológicos con X compacto y una función scs $F : X \to 2^Y$ tal que $F(x)$ es compacto para cada $x \in X$. Entonces $\cup_{x \in X} F(x)$ es compacto.

Demostración. Sea $C = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ cubierta abierta de $\cup_{x\in X} F(x)$. Como $F(x)$ es compacto para cada $x \in X$, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n(x)} \in I$ tales que $F(x) \subset \cup_{i=1}^{n(x)} U_{\alpha_i}$. Definimos $W_x = \cup_{i=1}^{n(x)} U_{\alpha_i}$. Entonces $W_x \subset Y$ es abierto y $F(x) \subset W_x$. Como F es scs, existe V_x abierto tal que $F(z) \subset W_x$ para cada $z \in V_x$. Sea $\{V_x : x \in X\}$ la cubierta abierta formada por estos elementos. Por hipótesis, existen $x_1, x_2, ..., x_m \in X$ tales que $X \subset \cup_{j=1}^m V_{x_j}$. Entonces:
$\cup_{x\in X} F(x) = F(X) \subset F(\cup_{j=1}^m V_{x_j}) = \cup_{j=1}^m F(V_{x_j}) \subset \cup_{j=1}^m W_{x_j} = \cup_{j=1}^m \cup_{i=1}^{n(x_j)} U_{\alpha_i}$,
de modo que encontramos una cubierta finita con elementos de la cubierta original. $\square$

Teorema 2.7. Sean (X, Γ) y (Y, Υ) espacios topológicos Hausdorff, con X compacto y $F : Y \to 2^{X\times Y}$ la función definida por $F(y) = \{y\} \times X$. Entonces F es scs, donde $X \times Y$ tiene la topología producto.

Demostración. Sea $p \in Y$ y un abierto U de $Y \times X$ tales que $F(p) \subset U$; es decir, $\{p\} \times X \subset U$. Para cada $x \in X$, existen abiertos V_x de X y W_x de Y, tales que $(p, x) \in V_x \times W_x \subset U$. Notemos que $C = \{W_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tales que $\cup_{i=1}^n W_{x_i} = X$. Definimos $V = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$. Veamos que con este abierto nuestra definición se satisface. Sea (z, x) con $z \in V$ y $x \in X$. Como los W_{x_i} forman una cubierta abierya de X, $x \in W_{x_i}$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Además, $z \in V_{x_i}$ para el mismo índice que x. De manera que, $(z, x) \in V_{x_i} \times W_{x_i} \subset U$ por construcción. Entonces $(z, x) \in U$ para cada $x \in X$, por lo tanto $\{z\} \times X = \cup_{x\in X}(z, x) \subset U$. Así pues, F es scs. $\square$

Teorema 2.8. Sean $(X, \Gamma), (Y, \Upsilon)$ espacios topológicos compactos Hausdorff. Entonces $X \times Y$ es compacto. Por lo tanto, el producto finito de compactos es compacto.

Demostración. Sea $F : Y \to 2^{X\times Y}$ la función dada por $F(p) = \{p\} \times X$. Entonces, por el teorema previo, F es scs. También es claro que $F(p)$ es homeomorfo a X. De modo que, $F(p)$ es compacto para cada $p \in Y$. Por lo tanto, de 2.6 tenemos que $\cup_{p\in Y} F(p)$ es compacto. Claramente $\cup_{p\in Y} F(p) = Y \times X$.

Para la segunda parte usamos inducción sobre el número de espacios compactos. $\square$

Teorema 2.9(Heine-Borel). Sean un n fijo, $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual y A un cerrado y acotado. Entonces A es compacto con la métrica usual.

Demostración. Si A es acotado, $||x|| \leq M$ para algún $M \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in A$. Como $|x_i| \leq ||x|| \leq M$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ donde $x = (x_1, x_2, ...x_n)$. Por tanto $A \subset [-M, M]^n$. Es bien conocido que $[-M, M]$ es compacto, con la métrica usual de $\mathbb{R}$, de manera que aplicando 1.1 para $[-M, M]^n$ y tomando en cuenta 2.8, entonces $[-M, M]^n$ es compacto con la siguiente métrica $d(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$ para $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Por otra parte $d(x, y) \leq ||x - y|| \leq 2^n d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, es decir la métrica d y la usual de $\mathbb{R}^n$ inducen la misma topología para $\mathbb{R}^n$. Asi, $[-M, M]^n$ es compacto con la métrica usual. De 1.11, obtenemos que A es compacto. $\square$

Cabe mencionar que el recíproco del teorema anterior también es cierto, para una prueba véase [[3], Teorema 4.2, pág. 233].

Teorema 2.10. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos compactos, $F : X \to 2^Y$ una función y sea $\mathfrak{L} = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$. Entonces F es scs si y sólo si $\mathfrak{L}$ es cerrado en $X \times Y$.

Demostración. Sea F una función scs. Entonces $\mathfrak{L}$ es cerrado en $X \times Y$ si y sólo si $(X \times Y) \setminus \mathfrak{L}$ es abierto. Sea $(x, y) \in (X \times Y) \setminus \mathfrak{L}$, por la definición de F, $y \notin F(x)$. Como Y es regular, existen dos abiertos ajenos V_1, V_2 tales que $y \in V_1$ y $F(x) \subset V_2$. Como F scs, existe W abierto de X tal que $F(z) \subset V_2$ para cada $z \in W$, entonces $F(z) \cap V_1 = \varnothing$ para cada $z \in V_1$. Por lo tanto $(x, y) \in W \times V_1 \subset X \times Y \setminus \mathfrak{L}$ con $W \times V_1$ abierto.

Inversamente. Supongamos que F no es scs. Esto significa que existen $x \in X$ y un abierto U de Y, con $F(x) \subset U$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ con $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ y $F(x_n) \cap (Y \setminus U) \neq \varnothing$. Construyamos, con estos elementos, las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que x_n converge a x y $y_n \in F(x_n) \cap (Y \setminus U)$. Como Y es un espacio métrico compacto, por 1.12, existe subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que y_{n_k} converge a y para alguna $y \in Y$. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset (Y \setminus U)$, $y \in Y \setminus U$. Dado que $\mathfrak{L}$ es cerrado entonces $y \in F(x)$. De donde, $y \in F(x) \cap (Y \setminus U)$, pero $F(x) \subset U$. Por lo tanto, F es scs. $\square$

Lema 2.11. Sean (X, d) espacio métrico compacto con la propiedad del punto fijo y $\mathfrak{C} = \{f : X \to X : f \text{ es continua}\}$ con la métrica uniforme ρ, $\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x) : x \in X\}$ para $f, g \in \mathfrak{C}$. Para cada $f \in \mathfrak{C}$, definimos $F(f) = \{x \in X : f(x) = x\}$. Entonces $F : \mathfrak{C} \to 2^X$ es scs.

Demostración. Sean $f \in \mathfrak{C}$ y un abierto U de $\mathfrak{C}$ tal que $F(f) \subset U$. Sea $\alpha =$ínf$\{d(f(x), x) : x \in X \setminus U\}$. Si $\alpha = 0$, tomamos $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset X \setminus U$ tal que $d(f(z_n), z_n)$ converge a 0 si n crece. Por 1.12, existe (z_{n_k}) convergente a z, para algún $z \in X \setminus U$. De la continuidad de f, $f(z_{n_k})$ converge a $f(z)$ y, dado que $d(f(z_n), z_n)$ converge a 0 si n crece, entonces $f(z) = z$. Por lo tanto $z \in F(f)$; pero esto contradice que $z \in X \setminus U$. De modo que $\alpha > 0$. Veamos ahora que si $h \in B(\frac{\alpha}{2}, f, \mathfrak{C})$ entonces $F(h) \subset U$. Sea $y \in X \setminus U$. De la desigualdad del triángulo tenemos que $d(y, h(y)) \geq d(y, f(y)) - d(f(y), h(y)) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} > 0$.

Por lo tanto, $F(h) \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Concluimos así que F es scs. $\square$

Observación. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. Hemos definido funciones $F : Y \to 2^X$, las cuáles se hemos llamado funciones scs. Por otro lado, 2^X tiene la estructura de espacio métrico(1.17), entonces se podría pensar que una función scs, podría ser una función continua. La característica de este lema es que nos permite diferenciar una función scs de una función continua tomando a 2^X como espacio métrico. Para fijar estas ideas, sea $X = [0, 1]$ con la métrica usual. Este espacio tiene la propiedad del punto fijo(véase [[2], Ejercicio 9.6.26, pág. 451]) por lo que podemos aplicar este lema, de manera que $F : \mathfrak{C}_{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es scs.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : X \to X$ dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x < 1 - \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ cumple que f_n converge a Id con la métrica ρ si n crece. Si F fuera continua, tomando a $2^{[0,1]}$ como espacio métrico, se tendría que $F(f_n)$ converge, con la métrica de Hausdorff, a Id. Pero $F(f_n) = \{1\}$ para cada n y $F(Id) = [0, 1]$. Lo que implicaría que, $\{1\}$ converge, en la métrica de Hausdorff, a $[0, 1]$, lo cual, obviamente, es imposible.

Lema 2.12. Sean (X, Γ_1) y (Y, Γ_2) espacios topológicos. Supongamos que Y es Hausdorff. Sea $F : X \to 2^Y$ una función scs tal que $F(x) = \{y_x\}$ para cada $x \in X$. Entonces existe una función continua entre X y Y.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ definida de la siguiente manera: $f(x) = y_x$ donde y_x es precisamente el único elemenrto de $F(X)$. Sean un abierto U de Y y $p \in X$ tales que $f(p) \in U$. Entonces, por la definición de f, se sigue que $F(p) \subseteq U$. Por ser F scs existe V abierto de X,con $p \in V$, tal que $F(x) \subseteq U$

para cualquier $x \in V$, es decir, existe V abierto de X tal que $\{y_x\} \subseteq U$ para cualquier $x \in V$. Pero esta es la definición de continuidad de f. $\square$

Teorema 2.13. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos y compactos.

Sean $F_n : X \to 2^Y$ funciones scs para cada $n \in \mathbb{N}$ tales que $F_{n+1}(x) \subseteq F_n(x)$ para cualquier $x \in X$. Definimos $G : X \to Y$ como sigue: $G(x) = \cap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ entonces:

1) G está bien definida y es scs.

2) Si $Y = \cup_{x\in X} F_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Y = \cup_{x\in X} G(x)$.

Demostración. 1) Como $F_n(x)$ es cerrado y no vacío para cualquier $x \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, por 1.20, $\cap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ es cerrado y no vacío para cualquier $x \in X$. Es decir, $G(x)$ está bien definida. Sean $p \in X$ y $U \subseteq Y$ abierto tales que $G(p) \subseteq U$.

Como Y es compacto, por la definición de G y ya que $F_{n+1}(p) \subseteq F_n(p)$ por 1.20, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $G(p) \subseteq F_N(p) \subseteq U$. Por ser F_N scs, existe V abierto de X, tal que $F_N(x) \subseteq U$ para cualquier $x \in V$. Como $F_{k+1}(p) \subseteq F_k(p)$ se tiene que $F_k(x) \subseteq U$ para cualquier $x \in V_p$ y para cada $k \geq N$. Por otro lado, $\cap_{k\geq N} F_k(x) \subseteq F_N(x) \subseteq U$ y $\cap_{k\geq N} F_k(x) = \cap_{n=1}^{\infty} F_k(x) = G(x)$ para cualquier $x \in V$. Por lo tanto, V es un abierto de X tal que $G(x) \in U$ para cualquier $x \in V_p$. es decir, G es scs.

2) Supongamos que $Y = \cup_{x\in X} F_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Basta con demostrar que $Y \subseteq \cup_{x\in X} G(x)$.

Sean $q \in Y$ y $n \in \mathbb{N}$ fijos. Como $Y = \cup_{x\in X}\ F_n(x)$, existe $x_n \in X$ tal que $q \in F_n(x_n)$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión formada por estos elementos. Como X es compacto, existen $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $p \in X$ tal que $\{x_{n_k}\}$ converge a p.

Afirmación. $q \in G(p)$.

Supongamos que $q \notin G(p)$. Sea $U = Y \diagdown \{q\}$. Entonces U es un abierto de Y tal que $G(p) \subset U$. Por ser Y compacto y por definición de G y por 1.20, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $G(p) \subseteq F_N(p) \subseteq U$. Dado que F_N es scs existe V abierto de X tal que $F_N(x) \subseteq U$ para cualquier $x \in V$. Por otra parte, se tiene que $\{x_{n_k}\}$ converge a p. Entonces existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $N' \geq N$ y $x_{n_k} \in V_p$ para cada $k \geq N'$, en consecuencia $F_N(x_{n_k}) \subseteq U$ para toda $k \geq N' \geq N$. Lo que implica que, por hipótesis, $F_{n_k}(x_{n_k}) \subseteq U$. Pero $q \in F_{n_k}(x_{n_k})$. Entonces $q \in U$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto, $Y = \cup_{x\in X} G(x)$. $\square$

Teorema 2.14 (**Teorema de la función general**)

Sean (X,d_1) y (Y,d_2) espacios métricos compactos y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones que cumplen las siguientes condiciones:

1) $F_n : X \to 2^Y$ es scs para cada $n \in \mathbb{N}$;
2) $F_{n+1}(x) \subseteq F_n(x)$ para cualquier $x \in X$;
3) $Y = \cup_{x\in X} F_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
4) diám$[F_n(x)]$ converge a 0 si n crece, para cualquier $x \in X$

Entonces existe una función continua y suprayectiva entre X y Y.

Demostración. Por 1.20, $\cap_{n=1}^{\infty} F_n(x) \neq \varnothing$ para cualquier $x \in X$. Sean $p,q \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. Entonces $d_2(p,q) \leq$diám$[F_n(x)]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por 4) se obtiene que $d_2(p,q) = 0$ y como d_2 es una métrica, $p = q$. Por lo tanto $\cap_{n=1}^{\infty} F_n(x) = \{p_x\}$ para cualquier $x \in X$.

Por 2.13, sabemos que para $G(x) = \cap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ es una función scs. Asi pues $G\,(x) = \{p_x\}$. Por 2.12 aplicado a G, existe una función continua.

Por 2.13, se tiene que $Y = \cup_{x\in X} G(x)$. De modo que la función que nos garantiza 2.12 también es suprayectiva. $\square$

2. El conjunto ternario de Cantor

Definición 2.15. Se dice que un espacio topológico S es *perfecto*, si es cerrado y todos sus puntos son puntos de acumulación.

Definición 2.16. Sea S un espacio topológico, se dice que S es *totalmente disconexo*, si los únicos subconjuntos conexos de S son puntos. En particular, cada componente está formada por un punto.

El conjunto de Cantor se construye como sigue : $\mathbf{C} = \cap_{i=0}^{\infty} C_i$; donde $C_0 = [0,1]\,,\ C_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, ..., y donde cada C_i se obtiene recursivamente de C_{i-1} al quitar la tercera parte central abierta de cada una de las componentes que tiene C_{i-1}.

Algunas de las propiedades del conjunto de Cantor se prueban en el siguiente teorema.

Teorema 2.17. El conjunto ternario de Cantor **C,** cumple:

1) **C** es un espacio métrico;

2) $\mathbf{C}$ es compacto;
3) $\mathbf{C}$ es perfecto;
4) $\mathbf{C}$ es totalmente disconexo;

Demostración. 1) Como $\mathbf{C}$ es subespacio de $\mathbb{R}$, $\mathbf{C}$ es métrico.

2) Sabemos que $[0,1]$ compacto con la métrica usual. Dado que $\mathbf{C} \subset [0,1]$ y es cerrado pues por construcción es la intersección de cerrados. Entonces $\mathbf{C}$ es compacto con la métrica inducida por la usual.

3) Sea $x \in \mathbf{C}$. Entonces $x \in C_0$. Tomamos $x_0 = 0$ o 1, (para cualquiera de los dos casos $x_0 \in \mathbf{C}$) de modo que $x \neq x_0$, por lo que $|x - x_0| \leq 1$. También sabemos que $x \in C_1$. Entonces x está en alguno de los intervalos que componen a C_1 y cuya longitud es menor igual a $\frac{1}{3}$, es decir, $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ o $[\frac{2}{3}, 1]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in [0, \frac{1}{3}]$. Elegimos $x_1 = 0$ o $\frac{1}{3}$ (para cualquier caso $x_1 \in \mathbf{C}$) de modo que $x \neq x_1$. Entonces $|x - x_1| \leq \frac{1}{3}$. Aplicando el mismo procedimiento con $x \in C_2$. Encontramos x_2 de manera que $x \neq x_2$ y que $|x - x_2| \leq \frac{1}{3^2}$. Siguiendo este camino, generamos $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ tal que $|x - x_k| \leq \frac{1}{3^k}$. Por lo tanto, x es un punto de acumulación de $\mathbf{C}$ y como la elección de x fue arbitraria, concluímos que $\mathbf{C}$ es perfecto.

4) Para demostrar este inciso, veamos que $\mathbf{C}$, no puede contener intervalos con más de un punto. Sean $x, z \in \mathbf{C}$ y $x \neq z$, encontremos $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{3^k} < |x - z|$. Recordando la construcción de $\mathbf{C}$, vemos que la longitud de las componentes de C_i es de $\frac{1}{3^i}$. Si tomamos $i = k$, entonces x y z, están necesariamente en distintas componentes. Por lo que existe $y \in [0,1] \setminus \mathbf{C}$ tal que $y \in (x, z)$ o (z, x), según sea el caso. Por lo tanto $\mathbf{C}$ no puede contener intervalos.

Como todos los conexos con más de un punto de $\mathbb{R}$ son intervalos(véase[[2], Teorema 6.1.5, pág. 248]), vemos que los únicos conexos de $\mathbf{C}$, ya que $\mathbf{C}$ no contiene intervalos abiertos, son puntos. Por lo tanto, $\mathbf{C}$ es totalmente disconexo. □

Cabe mencionar, para nuestro propósito, que el conjunto de Cantor tiene, además, otra propiedad. Las componentes de $[0,1] \setminus C_1$ es 1, las de $[0,1] \setminus C_2$ es 3, y asi sucesivamente. Es decir, el número de componentes de $[0,1] \setminus C_i$ crece hacia infinito conforme i también lo hace.

Esta es una propiedad que nos será útil para el siguiente lema.

Lema 2.18. Sea $\mathbf{C}$ el conjunto de Cantor. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:

1) Dado $n \geq 1$, $\mathbf{C} = \cup_{i=1}^{n} D_i$ donde cada D_i es un conjunto compacto, no vacío y además $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

2) Para cada D_i, del inciso anterior y $m \geq 1$, $D_i = \cup_{k=1}^{m} D_{i,k}$ donde cada $D_{i,k}$ es un conjunto compacto, no vacío y además $D_{i,k} \cap D_{i,j} = \emptyset$ si $j \neq k$.

Demostración. 1) Sea $n \geq 1$ y ℓ suficientemente grande de tal manera que el número de componentes de $[0,1] \setminus C_\ell)$ sea mayor que n, esta ℓ existe por la observación previa. Tomamos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$ tales que cada t_i, con $1 \leq i \leq n-1$, pertenece a una y sólo una componente de $[0,1] \setminus C_\ell$. Definimos $D_i = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathbf{C}$ para $1 \leq i \leq n$. Dado D_i es un conjunto cerrado y $\mathbf{C}$ es compacto, se tiene que D_i es compacto. Claramente, D_i es diferente del vacío pues $t_i < t_{i+1}$ y cada t_i está en una sóla componente para de $[0,1] \setminus C_\ell$ para cada $1 \leq i \leq n-1$.

También, $\cup_{i=1}^{n} D_i = \cup_{i=1}^{n}([t_{i-1}, t_i] \cap \mathbf{C}) = (\cup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]) \cap \mathbf{C} = [0,1] \cap \mathbf{C} = \mathbf{C}$. El hecho de que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$ se sigue de la construcción de los t_i.

2) Sean $m \geq 1$ y D_i como se definió en 1); es decir, $D_i = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathbf{C}$ con $t_{i-1} < t_i$ y en distintas componentes de $[0,1] \setminus C_\ell$ para la ℓ como en 1). Esto nos dice que existe, al menos, un intervalo de la forma $\left[\frac{k-1}{3^\ell}, \frac{k}{3^\ell}\right]$ para algún $0 \leq k \leq 3^\ell$ tal que $t_{i-1} < \frac{k-1}{3^\ell} < \frac{k}{3^\ell} < t_i$. Retomando la definición del conjunto de Cantor, le quitamos un tercio central a este intervalo y a los que van quedando, etcétera, de tal manera hasta que el número de componentes de $\left[\frac{k-1}{3^\ell}, \frac{k}{3^\ell}\right] \setminus C_q'$ sea mayor que m, donde C_q' es un paso recursivo de $\left[\frac{k-1}{3^\ell}, \frac{k}{3^\ell}\right]$ y, asi, entonces poder tomar $s_0 = \frac{k-1}{3^\ell} < s_1 < s_2 < ... < s_{m-1} < s_m = \frac{k}{3^\ell}$ en distintas componentes de $\left[\frac{k-1}{3^\ell}, \frac{k}{3^\ell}\right] \setminus C_q'$.

Observemos que $s_i \notin \mathbf{C}$ para $1 \leq i \leq m-1$. Definimos $t_0 = \widetilde{t_{i-1}}$, $\widetilde{t_1} = s_1, ..., \widetilde{t_{m-1}} = s_{m-1}$, $\widetilde{t_m} = t_i$ y $D_{i,j} = [\widetilde{t_{j-1}}, \widetilde{t_j}] \cap \mathbf{C}$ para tener con estos conjuntos que

$\cup_{j=1}^{m} D_{i,j} = \cup_{j=1}^{m}([\widetilde{t_{j-1}}, \widetilde{t_j}] \cap \mathbf{C}) = (\cup_{j=1}^{m} [\widetilde{t_{j-1}}, \widetilde{t_j}]) \cap \mathbf{C} = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathbf{C} = D_i$.
Al igual que en 1) $D_{i,k} \cap D_{i,j} = \emptyset$ por la construcción de los s_i. □

Proposición 2.19. Sea $\mathbf{C}$ el conjunto de Cantor. Entonces los conjuntos D_i de 2.18 son abiertos en $\mathbf{C}$.

Demostración. Sea $n \geq 1$, por 2.18, $\mathbf{C} = \cup_{i=1}^{n} D_i$. Retomando la prueba de 2.18. Sabemos por construcción que $t_i \notin \mathbf{C}$ para $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Entonces, $D_i = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathbf{C}$ pero $(t_{i-1}, t_i) \cap \mathbf{C} = [t_{i-1}, t_i] \cap \mathbf{C}$ puesto que

$t_i \notin \mathbf{C}$ para $2 \leq i \leq n-1$. Por tanto, D_i es abierto en $\mathbf{C}$ para $2 \leq i \leq n-1$. Por lo que sólo basta verificar los casos $i = 1$ e $i = n$.

Para $i = 1$, $t_0 = 0 \in \mathbf{C}$. Entonces, $D_1 = [t_0, t_1] \cap \mathbf{C}$, pero $[t_0, t_1) \cap \mathbf{C} = [t_0, t_1] \cap \mathbf{C}$, ya que $t_1 \notin \mathbf{C}$. Es decir D_1 es abierto en $\mathbf{C}$.

Para $i = n$, $t_n = 1 \in \mathbf{C}$. Entonces, $D_n = [t_{n-1}, t_n] \cap \mathbf{C}$, pero $(t_{n-1}, t_n] \cap \mathbf{C} =[t_{n-1}, t_n] \cap \mathbf{C}$, ya que $t_{n-1} \notin \mathbf{C}$. Entonces D_n es abierto en $\mathbf{C}$.

Aplicando un razonamiento parecido, podemos verificar que los $D_{i,j}$ también tienen la propiedad de ser abiertos en $\mathbf{C}$. $\square$

Una de las principales aplicaciones que tiene el teorema de la función general es el siguiente teorema, demostrado por primera vez por Hausdorff(véase [8]) y Alexandrov(véase [1]), ambos lo demostraron separadamente en el mismo año, en 1927, que nos permitirá tener varios resultados interesantes, como el de caracterizar al conjunto de Cantor y que veremos más adelante.

Teorema 2.20. Sea (Y, d) un espacio métrico y compacto. Entonces Y es la imagen continua del conjunto de Cantor.

Demostración. Sea $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$. Tomamos en Y la cubierta abierta $\Im = \{B(\epsilon_1, y) : y \in Y\}$. Como Y es compacto, existe $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset Y$ tal que $Y = \cup_{i=1}^{n} B(\epsilon_1, y_i)$. Definimos, para nuestro propósito, los siguientes conjuntos, $A_i = \overline{B(\epsilon_1, y_i)}$ para $1 \leq i \leq n$. Ya que $B(\epsilon_1, y_i) \subset A_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, se sigue que $Y = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Además, cada A_i cumple:

1) A_i es compacto. Por ser un cerrado contenido en el compacto Y.

2) diám$[A_i] \leq 1$ con $1 \leq i \leq n$. Por construcción.

Por 2.18, existen $D_1, D_2, ..., D_n \subset \mathbf{C}$ compactos ajenos dos a dos y con la propiedad de que $\mathbf{C} = \cup_{i=1}^{n} D_i$.

Sea $F_1 : \mathbf{C} \to 2^Y$ dada por $F_1(t) = A_i$ si $t \in D_i$. Entonces:

3) F_1 está bien definida y es scs. Primero, verifiquemos que F_1 está bien definida. Esto se sigue de que $D_i \cap D_j = \emptyset$ con $i \neq j$. Sean $t \in \mathbf{C}$ y $U \subset Y$ abierto tales que $F_1(t) \subset U$. Supongamos que $t \in D_i$ para alguna $1 \leq i \leq n$. Por 2.19, sabemos que D_i es también un abierto de $\mathbf{C}$. Este es precisamente, el abierto que hace que $F_1(x) \subset U$ para cualquier $x \in D_i$, pues la definición de F_1 asi lo hace ver.

4) $Y = \cup_{t \in \mathbf{C}} F_1(t)$. Sabemos que $Y = \cup_{i=1}^{n} A_i$, pero cada $A_i = F_1(t_i)$ para algún $t_i \in D_i$ y, además, $\cup_{i=1}^{n} F_1(t_i) \subset \cup_{t \in \mathbf{C}} F_1(t)$. Entonces $Y \subset \cup_{t \in \mathbf{C}} F_1(t)$. La otra contención es obvia.

Sean $\epsilon_2 = \frac{1}{4}$ y $\Im_i = \{B(\epsilon_2, y) : y \in A_i\}$. Observemos que es una cubierta abierta de A_i. Por ser A_i un compacto, existe $\{y_{i,1}, y_{i,2}, ..., y_{i,m(i)}\} \subset A_i$ tal que $A_i \subset \cup_{k=1}^{m(i)} B(\epsilon_2, y_{i,k})$.

Para $1 \leq k \leq m(i)$, definimos $A_{i,k} = \overline{B(\epsilon_2, y_{i,k}) \cap A_i}$. Demostraremos que estos conjuntos tienen las siguientes propiedades:

5) $A_{i,k}$ es compacto. Se sigue pues cada A_i es un compacto.

6) $A_i = \cup_{k=1}^{m(i)} A_{i,k}$. Dado que $A_i \subset \cup_{k=1}^{m(i)} B(\epsilon_2, y_{i,k})$. Entonces

$$A_i = A_i \cap (\cup_{k=1}^{m(i)} B(\epsilon_2, y_{i,k})) = \cup_{k=1}^{m(i)} (A_i \cap B(\epsilon_2, y_{i,k})) \subset \cup_{k=1}^{m(i)} (\overline{A_i \cap B(\epsilon_2, y_{i,k})}) = \cup_{k=1}^{m(i)} A_{i,k} \subset A_i$$

7) diám$[A_{i,k}] \leq \frac{1}{2}$. Se cumple trivialmente. Este mismo proceso lo podemos hacer para toda $1 \leq i \leq n$.

Por 2.18, existen conjuntos compactos y ajenos dos a dos $D_{i,1}, D_{i,2}, ..., D_{i,m(i)}$, tales que $D_i = \cup_{k=1}^{m(i)} D_{i,k}$.

Sea $F_2 : \mathbf{C} \to 2^Y$ definida de la siguiente manera: $F_2(t) = A_{i,k}$ si $t \in D_{i,k}$. Entonces:

8) F_2 es scs. Siguiendo la misma idea que con F_1, podemos ver que F_2 está bien definida y es scs.

9) $F_2(t) \subseteq F_1(t)$ para cualquier $t \in \mathbf{C}$. Sea $t \in \mathbf{C}$. Entonces $t \in D_i$ para un único $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo que $F_1(t) = A_i$. Como $D_i = \cup_{k=1}^{m(i)} D_{i,k}$, existe un único $j \in \{1, 2, ..., m(i)\}$ tal que $t \in D_{i,j}$. Entonces $F_2(t) = A_{i,j}$ pero, obviamente, $A_{i,j} \subseteq A_i$. Por lo tanto, $F_2(t) \subseteq F_1(t)$.

10) $Y = \cup_{t \in \mathbf{C}} F_2(t)$. Sabemos que

$Y = \cup_{i=1}^{m} A_i = \cup_{i=1}^{n} (\cup_{k=1}^{m(i)} A_{i,k}) = \cup_{i=1}^{n} (\cup_{k=1}^{m(i)} F_2(x_{i,k})) = \cup_{i,k} F_2(x_{i,k})$ con $x_{i,k} \in D_{i,k}$, ya que por 2.17, $\mathbf{C}$ es perfecto, de modo que siempre es posible encontrar los $x_{i,k}$, es decir, $\mathbf{C}$ es al menos numerable, de hecho $\mathbf{C}$ es no numerable (Capítulo 3, Aplicación 8). Por otro lado $\cup_{i,k} F_2(x_{i,k}) \subset \cup_{t \in \mathbf{C}} F_2(t)$. Lo que implica que $Y \subset \cup_{t \in \mathbf{C}} F_2(t)$. La otra contención es inmediata.

Siguiendo este mismo proceso con $A_{i,k}$ y notando que, también podemos iterar 2.18, encontramos una sucesión de funciones $\left\{F_n : \mathbf{C} \to \mathbf{2}^Y | n \in \mathbb{N}\right\}$ que cumplen:

11) F_n es scs para cada $n \in \mathbb{N}$;

12) $F_{n+1}(t) \subseteq F_n(t)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.;

13) $Y = \cup_{t \in \mathbf{C}} F_n(t)$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

14) diám$[F_n(t)] \leq \frac{1}{2^n}$ se aproxima a 0 si n crece;

Y éstas las hipótesis del teorema de la función general(2.14). Es decir, existe una función $f : \mathbf{C} \to Y$ continua y suprayectiva. $\square$

Corolario 2.21. Sea (Y, Γ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces Y es un espacio métrico y compacto si y sólo si Y es la imagen continua del conjunto de Cantor. Además, todo espacio métrico compacto (Z, d) es homeomorfo a una descomposición scs del conjunto de Cantor.

Demostración. Supongamos que Y es un espacio métrico y compacto. Por 2.20, obtenemos lo deseado. Inversamente, por 1.13, Y es compacto y por 1.30, Y es métrico.

Para la segunda parte, por 2.20 existe una continua y suprayectiva $h : C \to Z$. Por 1.33, Z es homeomorfo a $\mathfrak{D}_h$, donde $\mathfrak{D}_h = \{h^{-1}(z) : z \in Z\}$ y $\mathfrak{D}_h$ es una descomposición scs. $\square$

Aplicaciones de este teorema nos permiten extender a $f : \mathbf{C} \to Y$ a todo el intervalo $[0, 1]$ de manera continua. Ejemplos de este tipo los trataremos en el capítulo siguiente.

3. Caracterización del conjunto de Cantor

El Teorema 2.20 nos permite ver a todo espacio métrico y compacto como la imagen continua del conjunto de Cantor. A partir de este resultado, podremos caracterizar a los conjuntos que son homeomorfos al conjunto de Cantor. Para esto necesitaremos de un teorema, un lema y de un refinamiento de 2.18.

Definición 2.22. Sea (Y, d) un espacio métrico y compacto. Se dice que Y es un *conjunto de Cantor* si existe un homeomorfismo entre Y y **C.**

Lema 2.23. Sea Y un espacio métrico compacto y totalmente disconexo. Entonces para cada $\epsilon > 0$, Y se puede ver como la unión finita de conjuntos $K_1, K_2, ..., K_n \subset Y$ cerrados no vacíos, ajenos dos a dos y tales que diám$(K_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración. Demostremos primero que para toda $y \in Y$ y toda $\epsilon > 0$, existe un abierto y cerrado $M(y)$ tal que $y \in M(y)$ y diám$(M(y)) < \epsilon$. Sean

$y \in Y$ y $\epsilon > 0$. Sea $U = B(\frac{\epsilon}{2}, y)$. Tomemos $A = \{y\}$ y $B = Y \setminus U$, notemos que A y B son cerrados y ajenos. Por 1.40, entonces existen $X_1, X_2 \subset Y$ cerrados ajenos tales que $Y = X_1 \cup X_2$ con $\{y\} \subset X_1$ y $Y \setminus U \subset X_2$. Tomando $M(y) = X_1$, es claro que $X_1 = Y \setminus X_2 \subset Y \setminus (Y \setminus U) = U$. Entonces diám$(X_1) < \epsilon$. Además, es claro que X_1 es un abierto de Y.

Tomemos, para Y, la cubierta formada por los $M(y)$ con $y \in Y$. Como Y es compacto, existe $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset Y$ de tal manera que $Y = \cup_{i=1}^{n} M(y_i)$. Como estos $M(y_i)$ pudieran no ser ajenos hacemos lo siguiente.

Sean $L_1 = M(y_1)$, y para $2 \leq i \leq k$, $L_i = M(y_i) \setminus \cup_{k=1}^{i-1} M(y_k)$. Como cada $M(y_i)$ es abierto y cerrado, podemos ver que cada L_i es también abierto y cerrado. Descartando los L_i vacíos, y redefiniéndolos como K_i, obtenemos lo deseado. $\square$

Lema 2.24. Sean $\mathbf{C}$ es conjunto de Cantor y $D_1, D_2, ..., D_n$ los conjuntos obtenidos en 2.18. Sea $m \geq 2$ un entero dado. Entonces para $1 \leq i \leq n$ fijo, D_i se puede expresar como la unión de m conjuntos $D_{i,j}$ no vacíos, cerrados, ajenos dos a dos y tales que diám$(D_{i,j}) \leq \frac{2}{3}$diám$(D_i)$ para cada $1 \leq j \leq m$.

Demostración. Fijamos $1 \leq i \leq n$. Sean $g =$mín(D_i) y $\ell =$máx(D_i). Como D_i es un subconjunto cerrado de $\mathbf{C}$, tiene máximo y mínimo. Entonces diám$(D_i) = |g - \ell|$. Más aún $g, \ell \in \mathbf{C}$, por definición de D_i y dado que $\mathbf{C}$ no tiene puntos aislados(2.17). Tomando en cuenta estas observaciones y recordando que $\mathbf{C}$ es totalmente disconexo (2.17), podemos encontrar $t_1 \notin \mathbf{C}$ tal que $\frac{2}{3}g + \frac{1}{3}\ell < t_1 < \frac{2}{3}\ell + \frac{1}{3}g$. Para entender un poco más la elección de esta t_1, se da la siguiente figura:

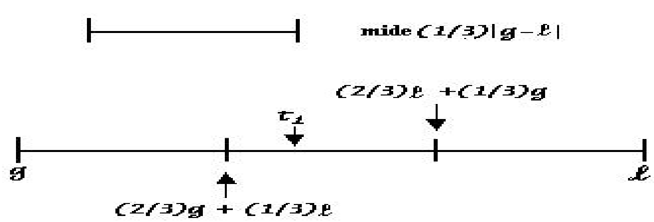


figura 2

Si $m = 2$, definimos $D_{i,1} = [g, t_1] \cap D_i$ y $D_{i,2} = [t_1, \ell] \cap D_i$, y éstos son los conjuntos que necesitamos. Supongamos que $m \geq 3$. Por construcción, sabemos que $\ell > 0$ y $\ell \in D_i$. Como D_i es abierto de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}$ es perfecto, podemos tomar puntos $s_i < \ell$ con $s_i \in \mathbf{C}$ tales que $t_1 < s_1 < s_2 < ... < s_{m-1} < \ell$. Por (2.17), $\mathbf{C}$ no contiene intervalos abiertos, entonces podemos encontrar $t_i \notin \mathbf{C}$ tales que $s_{i-1} < t_i < s_i$ con $2 \leq i \leq m-1$. De esta forma, tenemos una sucesión finita de puntos $t_0, t_1, ..., t_n$ tales que

$$t_0 = g < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < ... < t_{m-1} < s_{m-1} < \ell = t_m$$

Definiendo $D_{i,j} = [t_{j-1}, t_j] \cap D_i$, para cada $1 \leq j \leq m$,se cumplen los siguientes enunciados:

1) $D_i = \cup_{j=1}^m D_i$. Esto se debe a que
$\cup_{j=1}^m D_i = \cup_{j=1}^m [t_{j-1}, t_j] \cap D_i = D_i \cap [\ \cup_{j=1}^m [t_{j-1}, t_j]\ ] = D_i \cap [g, \ell] = D_i$

2) $D_{i,j} \cap \mathbf{C} \neq \emptyset$. Ya que $s_j \in D_{i,j} \cap \mathbf{C}$,y por construcción.

3) $D_{i,j}$ son abiertos en $\mathbf{C}$ para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Si $2 \leq j \leq m-1$, $[t_{j-1}, t_j] \cap \mathbf{C} = (t_{j-1}, t_j) \cap \mathbf{C}$ ya que $t_{j-1}, t_i \notin \mathbf{C}$. Si $j = 1$ (resp. $j = m$), $[t_0, t_1)$ (resp. $(t_{m-1}, t_m]$) es un abierto de $\mathbf{C}$. Entonces $[t_0, t_1) \cap D_i = D_{i,1}$ (resp. $(t_{m-1}, t_m] \cap D_i = D_{i,m}$) ya que $t_1, t_{m-1} \notin \mathbf{C}$. Por tanto el enunciado se cumple.

4) diám$(D_{i,j}) \leq |t_1 - \ell| \leq \frac{2}{3}|\ell - g|$ =diám(D_i) para cada $1 \leq j \leq m$. Por construcción de los $D_{i,j}$, sabemos que diám$(D_{i,j}) \leq |t_1 - \ell|$. Y por la elección de t_1, también $|t_1 - \ell| \leq \frac{2}{3}|\ell - g|$. Pero $|\ell - g|$ =diám(D_i). De manera que obtenemos lo que deseabamos. $\square$

Ahora, caractericemos al conjunto de Cantor.

Teorema 2.25. Sea (Y, Γ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces Y es un Cantor si y sólo si Y es métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo.

Demostración. Supongamos que Y es métrico compacto, perfecto y totalmente disconexo. Sea $\epsilon = 1$. Por 2.23, existen subconjuntos $K_1, K_2, ..., K_n$ de Y que son no vacíos, cerrados, ajenos dos a dos, con diámetro menor que ϵ y que cubren a Y. Sean $D_1, D_2, ..., D_n$ los subconjuntos obtenidos de 2.18.

Definimos $F_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{2}^Y$ como $F_1(t) = K_i$ si $t \in D_i$, aplicando un razonamiento parecido al de 2.20, podemos ver que F_1 está bien definida, es scs, $Y = \cup_{t \in \mathbf{C}} F_1(t)$ y diám$(F_i(t)) < 1$.

Fijamos $1 \leq i \leq n$. Como los K_i son un número finito de cerrados ajenos dos a dos, también son abiertos de Y. Como Y es perfecto, entonces diám$(K_i) > 0$, es decir, cada K_i tiene más de un punto.

Sea $\epsilon_i = \frac{1}{2}$diám(K_i). Como K_i es compacto y totalmente disconexo, podemos aplicar 2.23, para escribir a K_i como la unión finita de conjuntos

$K_{i,1}, K_{i,2}, ..., K_{i,m(i)}$ los cuáles son no vacíos, cerrados, ajenos dos a dos y con diámetro menor que ϵ_i. Es necesario observar que $m(i) \geq 2$, pues no podemos cubrir a K_i con sólo un conjunto cuyo diámetro es estrictamente menor al de K_i. Entonces a partir de este $m(i)$, por 2.24, encontremos los subconjuntos $D_{i,1}, D_{i,2}, ..., D_{i,m(i)}$ de D_i, los cuáles son no vacíos, ajenos dos a dos, abiertos y cerrados tales que diám$(D_{i,j}) < \frac{2}{3}$diám(D_i), para cada $1 \leq j \leq m(i)$.

Definamos $F_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{2}^Y$ como $F_2(t) = K_{i,j}$ si $t \in D_{i,j}$. Aplicando un razonamiento parecido a 2.20, podemos ver que F_2 es scs, $Y = \cup_{t \in \mathbf{C}} F_1(t)$, y $F_2(t) \subset F_1(t)$. Además, diám$(K_{i,j})$ es menor a ϵ_i cuyo valor es de $\frac{1}{2}$diám(K_i). Continuando con este proceso y notando que se pueden aplicar el mismo razonamiento que en 2.24 a cada subconjunto $D_{i,j}$. Encontramos una familia de funciones $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cumplen todas las condiciones de 2.14. Por lo que podemos garantizar la existencia de una función f continua y suprayectiva entre $\mathbf{C}$ y Y.

Lo verdaderamente importante en cómo se construyó esta función, es que podemos asegurar que f es inyectiva. Sean $s, t \in \mathbf{C}$, con $s \neq t$. Entonces encontramos $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < (2/3)^{k-1} < |s - t|$. Retomando nuestra construcción de la f, sea F_k. Para definir a esta función F_k encontramos, $E_1, E_2, ..., E_q \subset \mathbf{C}$, tales que $E_i = D_{i,i_1,i_2,...,i_{k-1}}$; es decir, E_i resultó de la aplicación de k veces 2.24. Entonces:

$$\begin{gathered}\text{diám}(E_i) = \text{diám}(D_{i,i_1,i_2,...,i_{k-1}}) < (\tfrac{2}{3})\text{diám}(D_{i,i_1,i_2,...,i_{k-2}}) < \\ (\tfrac{2}{3})^2\text{diám}(D_{i,i_1,i_2,...,i_{k-3}}) < .... < (\tfrac{2}{3})^{k-1}\text{diám}(D_i).\end{gathered}$$

De manera que diám$(E_i) < (\frac{2}{3})^{k-1}$, para $1 \leq i \leq q$. Esto nos lleva a que s y t están en distintas E_i y E_j. Por lo que, $F_k(t) \neq F_k(s)$, pues la función F_k manda conjuntos ajenos en conjuntos ajenos y, como $f(t) \in F_k(t)$ y $f(s) \in F_k(s)$, entonces f es inyectiva. Por lo tanto f es biyectiva. Por 1.13, f es un homeomorfismo.

Inversamente. Sea $F : \mathbf{C} \to Y$ un homeomorfismo. Por 1.25, Y es métrico y compacto. Además Y es totalmente disconexo y perfecto, pues F manda conexos en conexos (1.43) y por la continuidad de F y la de F^{-1}, la imagen y preimagen de un punto límite es un punto límite. $\square$

Por lo tanto, hemos caracterizado a los únicos conjuntos que pueden ser homeomorfos a conjunto Cantor.

CAPÍTULO 3

Aplicaciones

Las siguientes aplicaciones, directas e indirectas, del teorema de la función general(2.14) son soluciones a los problemas planteados en [[12],págs. 112-114]. Para un producto de espacios métricos, al espacio producto le estaremos asociando la topología dada en 1.1.

3.1. Compactaciones. Sea (M, Γ) un espacio topológico discreto numerable. Sean $(Z_1, d_1), (Z_2, d_2)$ espacios métricos y compactos que son compactaciones de M. Supongamos que $Z_1 \setminus M_1$ y $Z_2 \setminus M_2$ son homeomorfos al conjunto de Cantor $\mathbf{C}$, donde M_1 y M_2 son las copias topológicas de M contenidas en Z_1 y Z_2 respectivamente. Entonces Z_1 es homeomorfo a Z_2.

Demostración. Denotemos $\widetilde{\mathbf{C}}_i = Z_i \setminus M_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Sea $H_i : \mathbf{C} \to \widetilde{\mathbf{C}}_i$ un homeomorfismo para $i \in \{1, 2\}$. Definimos $A_1 = H_1(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_1^1)$ y $A_2 = H_1(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_1^2)$, donde C_1^1 y C_1^2 son las componentes de $\mathbf{C}_1$ y donde $\mathbf{C}_1$ es el primer paso de la construcción de $\mathbf{C}$.

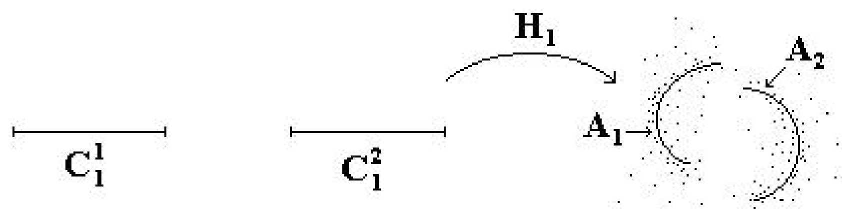


figura 3*a*)

Como H_1 es un homeomorfismo, entonces A_1 y A_2 son cerrados ajenos, por 1.11. Entonces A_1 y A_2 son compactos, de donde, $d_1(A_1, A_2) > 0$. Así pues, sean:

$$A_1' = \{y \in Z_1 : d_1(y, A_1) \leq \tfrac{1}{3} d_1(A_1, A_2)\}$$

y

$$A_2' = \{y \in Z_1 : d_1(y, A_2) \leq \tfrac{1}{3} d_1(A_1, A_2)\}.$$

Entonces:

1) A_i' es un abierto y cerrado para $i \in \{1, 2\}$. Es claro que cada A_i' es cerrado. Además, $A_1' = Z_1 \setminus (A_2' \cup M_1')$, donde $M_1' \subset M_1$. Como M_1 es discreto, M_1' es cerrado y, por lo tanto, A_1' también es abierto. De la misma manera, podemos ver que A_2' tiene la propiedad de ser abierto y cerrado.

2) $A_i \subset A_i'$ para $i \in \{1,2\}$. Por Construcción.

3) $A_1' \cap A_2' = \emptyset$. Por construcción.

4) $|Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')| < \infty$. Por construcción $|Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')| \subset M_1$. Por 1), $|Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')|$ es cerrado y dado que Z_1 es compacto $|Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')|$ no puede ser numerable, de otro modo M_1 tendría un punto de acumulación, pero M_1 es discreto. Es decir, $|Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')| < \infty$. Aplicando el mismo proceso para Z_2 con H_2, obtenemos dos conjuntos B_1' y B_2' con las mismas propiedades que los A_i'.

Sabemos entonces que $Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')$ y $Z_2 \setminus (B_1' \cup B_2')$ son finitos. Para nuestro propósito, necesitamos que ambos conjuntos tengan las misma cardinalidad. Como esto pudiera no suceder, hagamos lo siguiente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n = |Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')|$ y $m = |Z_2 \setminus (B_1' \cup B_2')|$ con $m > n$. Dado que M_1 es un discreto, numerable y denso en Z_1, tomemos $\{x_1, x_2, ..., x_{m-n}\} \subset M_1 \cap A_1'$ elementos distintos dos a dos. Luego, $A_1' \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{m-n}\}$ es un abierto y cerrado pues $\{x_1, x_2, ..., x_{m-n}\}$ es un conjunto abierto y cerrado.

Definimos $\widetilde{A_1} = A_1' \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{m-n}\}$, y $\widetilde{A_2} = A_2'$, para tener que $Z_1 = \widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2} \cup \{u_i\}_{i=1}^m$ donde $u_i \in Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $u_{i+n} = x_i$ para $i \in \{1, 2, ..., m-n\}$. Es decir, $\{u_i\}_{i=1}^m = \{x_1, x_2, ..., x_{m-n}\} \cup Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')$. Además, por construcción, $\widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}$ y $\{u_i\}_{i=1}^m$ siguen siendo abiertos y cerrados y ajenos, puesto solo se modificó A_1' y $\{x_1, x_2, ..., x_{m-n}\}$ es un conjunto abierto y cerrado que no estaba en A_2'.

Definimos $\widetilde{B_1} = B_1'$, $\widetilde{B_2} = B_2'$ y, para así, tener que $Z_2 = \widetilde{B_1} \cup \widetilde{B_2} \cup \{z_i\}_{i=1}^m$ donde $\widetilde{B_1} = B_1'$, $\widetilde{B_2} = B_2'$ y $\{z_i\}_{i=1}^m = Z_2 \setminus (B_1' \cup B_2')$.

Definimos $F_1 : Z_1 \to 2^{Z_2}$ como: $F_1(t) = \begin{cases} \{z_i\}, & \text{si } t = u_i; \\ \widetilde{B_1}, & \text{si } t \in \widetilde{A_1}; \\ \widetilde{B_2}, & \text{si } t \in \widetilde{A_2}; \end{cases}$

Entonces F_1 es scs, puesto que $\widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}, \{u_i\}_{i=1}^m$ son abiertos y cerrados de Z_1 y, claramente $Z_2 = \cup_{t \in Z_1} F_1(t)$ por la definición de F_1.

Por otro lado, sean, $x, y \in \widetilde{A_i}$. Entonces $d_1(x,y) \leq d_1(x,a) + d_1(a,b) + d_1(b,y)$, donde $a, b \in A_i$ son tales que $d_1(x,a) = d_1(x, A_i)$ y $d_1(y,b) = d_1(y, A_i)$; estos elementos existen por la compacidad de A_i. Por lo que, $\text{diám}(\widetilde{A_i}) \leq \frac{2}{3} d_1(A_1, A_2) + \text{diám}(A_i)$; asimismo $\text{diám}(\widetilde{B_i}) \leq \frac{2}{3} d_2(B_1, B_2) + \text{diám}(B_i)$ para $i \in \{1, 2\}$.

Sean $A_{1,1} = H_1(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_2^1), A_{1,2} = H_1(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_2^2)$, $A_{2,1} = H_1(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_2^3), A_{2,2} = H_1(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_2^4)$, donde $\mathbf{C}_2^i$ es la $i-$ésima componente de $\mathbf{C}_2$ y $\mathbf{C}_2$ es el segundo paso en la construcción de $\mathbf{C}$.

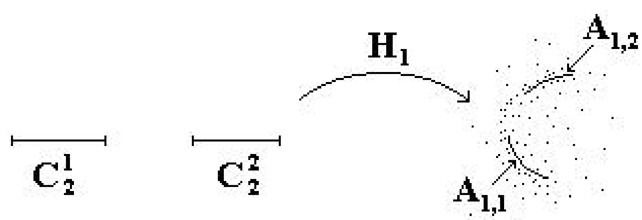


figura 3b)

Como H_1 es un homeomorfismo, $A_{k,i}$ y $A_{j,s}$ son cerrados, $A_{k,i} \cap A_{j,s} = \varnothing$ si $k \neq j$ o $i \neq s$, $A_{i,j} \subset \widetilde{A_i}$ y por 1.33, $d_1(A_{1,1}, A_{1,2}) > 0$. Definimos:

$$A_{1,1}' = \{y \in \widetilde{A_1} : d_1(y, A_{1,1}) \leq \tfrac{1}{3} d_1(A_{1,1}, A_{1,2})\},$$

$$A_{1,2}' = \{y \in \widetilde{A_1} : d_1(y, A_{1,2}) \leq \tfrac{1}{3} d_1(A_{1,1}, A_{1,2})\},$$

$$A_{2,1}' = \{y \in \widetilde{A_2} : d_1(y, A_{2,1}) \leq \tfrac{1}{3} d_1(A_{2,1}, A_{2,2})\},$$

$$A_{2,2}' = \{y \in \widetilde{A_2} : d_1(y, A_{2,2}) \leq \tfrac{1}{3} d_1(A_{2,1}, A_{2,2})\}.$$

Entonces:

5) $A_{i,j}'$ es abierto y cerrado para $i, j \in \{1, 2\}$. Es claro que $A_{i,j}$ es cerrado, además $A_{1,1}' = Z_1 \setminus (A_{1,1} \cup \widetilde{A_2} \cup M_1')$, donde $M_1' \subset M_1$. Por lo tanto, $A_{1,1}'$ es abierto, pues $A_{1,1} \cup \widetilde{A_2} \cup M_1'$ es cerrado. Asímismo, podemos ver que $A_{1,2}'$, $A_{2,1}'$ y $A_{2,2}'$ son abiertos.

6) $A_{i,j}' \subset \widetilde{A_i}$ para $i, j \in \{1, 2\}$. Por construcción.

7) $A_{i,j}' \cap A_{s,t}' = \varnothing$ si $i \neq s$ o $j \neq t$. Por construcción.

8) $|\widetilde{A_i} \setminus (A_{i,1}' \cup A_{i,2}')| < \infty$ para $i \in \{1, 2\}$. Se procede igual que con 4).

Aplicando argumentos parecidos a los que hicimos con $\widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}$, tenemos que diám$(A_{i,j}') \leq \frac{2}{3} d_1(A_{i,1}, A_{i,2})+$diám$(A_{i,j})$ para $i \in \{1, 2\}$.

Nuevamente, aplicamos argumentos parecidos con H_2 para $\widetilde{B_1}$ y $\widetilde{B_2}$, para obtener conjuntos $B_{1,1}' B_{1,2}'$, $B_{2,1}'$ y $B_{2,2}'$ tales que:

9) $B_{i,j}'$ es abierto y cerrado para $i, j \in \{1, 2\}$;

10) $B_{i,j}' \subset \widetilde{B_i}$ para $i, j \in \{1,2\}$;
11) $B_{i,j}' \cap B_{s,t}' = \varnothing$ con $j \neq t$ o $i \neq s$;
12) $|\widetilde{B_1} \setminus (B_{1,1}' \cup B_{1,2}')| < \infty$;
13) diám$(B_{i,j}') \leq \frac{2}{3} d_2(B_{i,1}, B_{i,2})$+diám$(B_{i,j})$ para $i \in \{1,2\}$.

Si seguimos el mismo camino que con $Z_1 \setminus (A_1' \cup A_2')$ y $Z_2 \setminus (B_1' \cup B_2')$, podemos suponer, además, que $|\widetilde{A_1} \setminus (A_{i,1}' \cup A_{i,2}')| = |\widetilde{B_1} \setminus (B_{1,1}' \cup B_{1,2}')| = p$ y $|\widetilde{A_2} \setminus (A_{2,1}' \cup A_{2,2}')| = |\widetilde{B_2} \setminus (B_{2,1}' \cup B_{2,2}')| = q$. Por lo tanto:

$\widetilde{A_1} = A_{1,1}' \cup A_{1,2}' \cup \{u_{1,i}\}_{i=1}^{p}$, donde $\{u_{1,i}\}_{i=1}^{p} = \widetilde{A_1} \setminus (A_{1,1}' \cup A_{1,2}')$;
$\widetilde{A_2} = A_{2,1}' \cup A_{2,2}' \cup \{u_{2,i}\}_{i=1}^{q}$, donde $\{u_{2,i}\}_{i=1}^{q} = \widetilde{A_2} \setminus (A_{1,1}' \cup A_{1,2}')$;
$\widetilde{B_1} = B_{1,1}' \cup B_{1,2}' \cup \{z_{1,i}\}_{i=1}^{p}$, donde $\{z_{1,i}\}_{i=1}^{p} = \widetilde{B_1} \setminus (B_{1,1}' \cup B_{1,2}')$;
$\widetilde{B_2} = B_{2,1}' \cup B_{2,2}' \cup \{z_{2,i}\}_{i=1}^{q}$, donde $\{z_{2,i}\}_{i=1}^{q} = \widetilde{B_2} \setminus (B_{2,1}' \cup B_{2,2}')$.

Sea $F_2 : Z_1 \to 2^{Z_2}$ dada por: $F_2(t) = \begin{cases} F_1(t), & \text{si } t \in Z_1 \setminus (\widetilde{A_1} \cup \widetilde{A_2}); \\ \{z_{i,j}\}, & \text{si } t = u_{i,j}; \\ B_{i,j}', & \text{si } t \in A_{i,j}'; \end{cases}$

Podemos observar que F_2 es scs pues $A_{1,1}', A_{1,2}', A_{2,1}' A_{2,2}', \{u_{1,i}\}_{i=1}^{p}$ y $\{u_{2,i}\}_{i=1}^{q}$ son abiertos y cerrados de Z_1. Además, $Z_2 = \cup_{t \in Z_1} F_2(t)$ y $F_2(t) \subseteq F_1(t)$, por construcción.

Asi, encontramos una familia de funciones $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que cumplen las condiciones las tres primeras hipótesis de 2.14. Como diám$(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n^j)$ converge a 0 si n crece, H_i es cerrada e inyectiva para $i \in \{1,2\}$ y por 1.21, diám$(H_i(\mathbf{C} \cap \mathbf{C}_n^j))$ converge a 0, de manera que diám$(F_n(t))$ converge a 0 si n crece, para $i \in \{1,2\}$. Dado que los conjuntos abiertos y cerrados que usamos para definir a F_n (por ejemplo $B_{1,1}', B_{1,2}' B_{2,1}' B_{2,2}'$ para F_2) su diámetro tiende a 0 cuando n crece, aseguramos la existencia de $f : Z_1 \to Z_2$ una función continua y suprayectiva. Observemos que el diámetro de los conjuntos que se usan para definir a cada F_n en el dominio(por ejemplo $A_{1,1}', A_{1,2}', A_{2,1}' A_{2,2}'$ para F_2) también convergen a 0. Por lo que, la función que nos aegura 2.14 , además de ser suprayectiva, es inyectiva. Por 1.13, concluimos que f es un homeomorfismo. $\square$

En el siguiente ejercicio, hacemos la prueba de 2.20 en un producto numerable de espacios compactos y métricos, para ver que el espacio producto es, también, un espacio métrico y compacto.

3.2. Producto de Compactos. Sea $\{(X_n, d_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios métricos compactos tales que para cada $x_n, y_n \in X_n$, $d_n(x_n, y_n) \leq 1$.

Entonces $X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto.

Demostración. Lo que trataremos de hacer es construir una función G scs del conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ en 2^X, de tal manera que $|G(t)| = 1$ para todo elemento $t \in \mathbf{C}$ y $\cup_{t\in\mathbf{C}} G(t) = X$, para luego usar 2.12. Durante la demostración, usaremos la igualdad $\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^M}$ para todo $M \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$. Como X_1 es compacto, existen conjuntos cerrados, no vacíos $A_1^{(1)}, A_2^{(2)}, ..., A_{n(1)}^{(1)}$ que cubren a X_1, tales que diám$(A_k^{(1)}) < \frac{1}{2}$. Por 2.18 y 2.19, existen conjuntos abiertos y cerrados, no vacíos y ajenos dos a dos $D_1, D_2, ..., D_{n(1)}$ que cubren a $\mathbf{C}$.

Definimos $F_1 : \mathbf{C} \to 2^X$ como:

$$F_1(t) = A_i^{(1)} \times \Pi_{s=2}^{\infty} X_s, \quad \text{si } t \in D_i.$$

F_1 está bien definida pues los D_k son no vacíos y ajenos dos a dos. Veamos que F_1 cumple:

1) F_1 es scs. Sean $t \in \mathbf{C}$ y U abierto de X, con $F_1(t) \subset U$. Si $t \in \mathbf{C}$, existe un único D_k tal que $t \in D_k$. Entonces, por definición, $F_1(z) = F_1(t)$ para cada $z \in D_k$. De manera que $F(z) \subset U$ para cada $z \in D_k$ y, como D_k es un abierto se satisface la definición de scs.

2) $\cup_{t\in\mathbf{C}} F_1(t) = X$. Sea $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$. Entonces $x_1 \in X$. Como los $A_i^{(1)}$ forman una cubierta de X, existe $A_j^{(1)}$ tal que $x_1 \in A_j^{(1)}$. Entonces, para $t \in D_j$, $F_1(t) = A_j^{(1)} \times \Pi_{s=2}^{\infty} X_s$ y $x \in A_j^{(1)} \times \Pi_{s=2}^{\infty} X_s$.

3) diám$(F_1(t)) < 1$. Por 1.3, $\Gamma_{\mathcal{D}} = \Gamma_{\times}$, donde $\mathcal{D}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$ con $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X$. Entonces si $F_1(t) = A_i^{(1)} \times \times \Pi_{s=2}^{\infty} X_s$:

$$\text{diám}(F_1(t) \leq \frac{\text{diám}(A_i^{(1)})}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{diám}(X_n)}{2^n} \leq \frac{\frac{1}{2}}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} < 1.$$

Sea $\epsilon_2 = \frac{1}{2^2}$. Como $A_i^{(1)}$ es compacto, existen conjuntos cerrados y no vacíos $A_{i,1}^{(1)}, A_{i,2}^{(1)}, ..., A_{i,m(i)}^{(1)}$ que son cubren a $A_i^{(1)}$ y tales que diám$(A_{i,j}^{(1)}) < \frac{1}{2^2}$, para $1 \leq i \leq n(1)$ y $1 \leq j \leq m(i)$. Para esta misma ϵ_2, existen cerrados y no vacíos $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, ..., A_{n(2)}^{(2)}$ que cubren a X_2 con diám$(A_k^{(2)}) < \frac{1}{2^2}$ para cada índice k. Para $m(i)n(2)$, por 2.18 y 2.19, existen $D_{i,j,k}$ abiertos y cerrados, no vacíos y ajenos dos a dos, tales que cubren a D_i, con $1 \leq j \leq m(i), 1 \leq k \leq n(2)$. Definimos $F_2 : \mathbf{C} \to 2^X$ como:

$$F_2(t) = A_{i,j}^{(1)} \times A_k^{(2)} \times \Pi_{s=3}^{\infty} X_s, \quad \text{si } t \in D_{i,j,k}$$

F_2 está bien definida pues los $D_{i,j,k}$ son no vacíos y ajenos dos a dos. Al igual que con F_1, veamos que F_2 satisface:

4) F_2 es scs. Sean $t \in \mathbf{C}$ y U un abierto de X, con $F_1(t) \subset U$. Si $t \in \mathbf{C}$, existe un único $D_{i,j,k}$ tal que $t \in D_{i,j,k}$. Entonces $F_2(z) = F_2(t)$ para $z \in D_{i,j,k}$, de manera que $F_2(z) \subset U$ para $z \in D_{i,j,k}$ y, como $D_{i,j,k}$ es un abierto, se satisface la definición de scs.

5) $\cup_{t\in\mathbf{C}} F_2 = X$. Sea $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X$. Entonces existen $A_{i,j}^{(1)} \subset A_i^{(1)} \subset X_1$ y $A_k^{(2)} \subset X_2$ tales que $y_1 \in A_{i,j}^{(1)}$ y $y_2 \in A_k^{(2)}$, de manera que para $t \in D_{i,j,k}$, $y \in F_2(t) = A_{i,j}^{(1)} \times A_k^{(2)} \times \Pi_{s=3}^{\infty} X_s$.

6) $\text{diám}(F_2(t)) < \frac{1}{2}$. Si $F_2(t) = A_{i,j}^{(1)} \times A_k^{(2)} \times \Pi_{s=3}^{\infty} X_s$:

$$\text{diám}(F_2(t)) \leq \frac{\text{diám}(A_{i,j}^{(1)})}{2} + \frac{\text{diám}(A_k^{(2)})}{2^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\text{diám}(X_n)}{2^n} \leq \frac{\frac{1}{2^2}}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{2^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2}.$$

7) $F_2(t) \subseteq F_1(t)$ para todo $t \in \mathbf{C}$. Se cumple por la construcción y la definición de F_2.

Para cada n, sea $F_n : \mathbf{C} \to 2^X$ la $n-$ésima funcion construida con este proceso. Obtenemos que cumple:

8) F_n es scs;
9) $F_{n+1}(t) \subseteq F_n(t)$ para cada n;
10) $X = \cup_{t\in C} F_n(t)$ para cada n;
11) $\text{diám}(F_n(t)) < \frac{1}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definimos $G : \mathbf{C} \to 2^X$ dada por $G(t) = \cap_{n=1}^{\infty} F_n(t)$.

Afirmación. G es scs y $\cup_{t\in C} G(t) = X$.

Antes de comenzar con la prueba de esta afirmación, observemos que por construcción y por 1.21, $G(t) \neq \varnothing$, de manera que G está bien definida y de hecho $|G(t)| = 1$ pues $\text{diám}(A_{i_1,i_2,..,i_{m-1},j}^{(n)})$ converge a 0 si m crece, para toda n. Los conjuntos $A_{i_1,i_2,..,i_{m-1},j}^{(n)}$ son los que usamos para definir a F_n y estos son subconjuntos compactos de X_n.

Sean $t \in \mathbf{C}$ y U un abierto de X tales que $G(t) \subset U$. Usando las observaciones previas tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(\frac{1}{2^n}, z_t, X) \subset U$, donde $\{z_t\} = G(t)$. Por 11), $F_n(t) \subset B(\frac{1}{2^n}, z_t, X) \subset U$. Como F_n es scs, existe un abierto V_t de $\mathbf{C}$, tal que $F_n(x) \subset U$ para $x \in V_t$. Por 9), $F_N(x) \subset F_n(x)$ para $N \geq n$. De manera que $\cap_{N\geq n} F_N(x) \subset U$ para cada $x \in V_t$. Puesto que, $\cap_{N\geq n}F_N(x)=\cap_{n=1}^{\infty}F_N(x)$. Entonces $G(x)\subset U$ para cada $x\in V_t$. Luego entonces, G es scs.

Sea $q\in X$. Ya que $q\in\cup_{t\in C}\ F_n(t)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces $q\in F_n(t_n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión formada por estos elementos. Como $\mathbf{C}$ es compacto (2.17), existe $(t_{n_k})_{k=1}^{\infty}\subset(t_n)_{n=1}^{\infty}$ y $t\in\mathbf{C}$ tales que $\{t_{n_k}\}$ se converge a t si k crece.

Mostremos que $q\in G(t)$. Supongamos que $q\notin G(t)$. Sea $U=X\diagdown\{q\}$ abierto U de X, entonces $G(t)\subset U$. Por lo hecho previamente, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $G(p)\subseteq F_n(p)\subseteq U$. Dado que F_n es scs, existe V abierto de X tal que $F_n(x)\subseteq U$ para cualquier $x\in V$, donde $t\in V$. Por otra parte, como $\{t_{n_k}\}$ se converge a t, entonces existe $N'\in\mathbb{N}$ con $N'\geq n$ tal que $t_{m_k}\in V_t$ para cada $m_k\geq N'$. En consecuencia $F_n(t_{m_k})\subseteq U$ para cualquier $m_k\geq N'\geq n$, lo que implica por hipótesis que $F_{m_k}(t_{m_k})\subseteq U$. Pero $q\in F_{m_k}(t_{m_k})$ entonces $q\in U$, lo cuál es una contradicción. Así pues $X=\cup_{t\in\mathbf{C}}G(t)$.

Teniendo en cuenta lo dicho al inicio de esta demostración y usando 1.13, tenemos que $f(\mathbf{C})=X$ es compacto. $\square$

Observación. El proceso hecho en 3.2 no se puede aplicar a una famila no numerable de espacios métricos compactos $\{(X_\alpha,d_\alpha):\alpha\in I\}$, puesto que no existe función continua y suprayectiva $f:\mathbf{C}\to\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$, por 1.25 y ya que que no existe metrica d tal que $\Gamma_d=\Gamma_\times$, donde $\Gamma_\times$ es la topología producto. Sin embargo, como es bien sabido, el enunciado es cierto para cualquier famila de espacios topológicos compactos (**Teorema de Tychonoff**) [véase [3], Teorema 1.4.(4), Pag. 224].

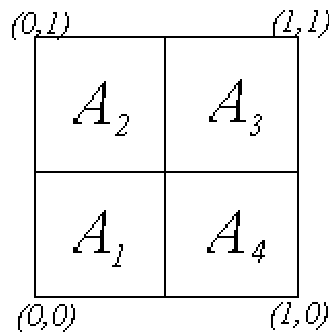
Las siguientes tres aplicaciones dan ejemplos de espacios que son "*cubiertos*" por el $[0,1]$, es decir, para los cuales existen funciones continuas y suprayectivas del $[0,1]$ en el espacio especificado. En la primera se garantiza una función continua y suprayectiva del intervalo $[0,1]$ en el cuadrado unitario, miéntras que las otras dos son extensiones de una función del conjunto de cantor en el espacio dado.

En 1890, en el libro *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Giuseppe Peano(véase [13]) mostró que el cuadrado unitario podía obtenerse como la imagen continua de un intervalo cerrado. Otras funciones que "*llenan*" al cuadrado han sido construidas D. Hilbert(véase [9]), W. Sierpiński(véase [15]), entre otros.

Cabe subrayar que el ejemplo inesperado de Peano, trajo consigo, la noción intuitiva de la dimensión de un espacio y la precipitada busqueda de una definición adecuada para la dimensión de un espacio topológico.

3.3. Curva de Peano. En esta aplicación daremos las ideas esenciales para la demostración del teorema de Hahn-Mazurkiewicz (4.14). Sea $I = [0,1]$ con la métrica usual, entonces existe una función $f : I \to I^2$ continua y suprayectiva, donde I^2 también tiene la métrica usual.

Demostración. Dividamos I^2 en cuatro partes, como se muestra en la figura $4a$), y denotémoslos por A_1, A_2, A_3, A_4.



$figura$ $4a$)

Definimos $F_1 : I \to 2^{I^2}$ dada por:

$$F_1(t) = \begin{cases} A_1, & \text{si } t = 0; \\ A_i, & \text{si } \frac{i-1}{4} < t < \frac{i}{4} \quad i \in \{1,2,3,4\}; \\ A_i \cup A_{i+1}, & \text{si } t = \frac{i}{4}; \\ A_4, & \text{si } t = 1; \end{cases}$$

Veamos que:

1) F_1 es scs. Sean $U \subset I^2$ abierto y $t \in I$ tales que $F_1(t) \subset U$. Veamos los siguientes casos:

Caso 1. $t \neq \frac{i}{4}$, para $i \in \{1,2,3,4\}$. Entonces $t \in (\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4})$, para un único i. De manera que $F_1(t) = A_i$. Por definición, $F_1(t) = F_1(y) = A_i$, para $y \in (\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4})$. Como $F_1(t) \subset U$, $F_1(y) \subset U$ para $y \in (\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4})$, con $(\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4})$ un abierto de I. Por lo tanto F_1 es scs si $t \neq i/4$. Este caso se puede ampliar para $t = 0$ y $t = 1$, observando que $[0, \frac{1}{4})$ y $(\frac{3}{4}, 1]$ son abiertos de I.

Caso 2. $t = \frac{i}{4}$, para alguna $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Por definición $F_1(t) = A_i \cup A_{i+1}$. Podemos observar que, también de la definición, para $y \in (\frac{i-1}{4}, \frac{i+1}{4})$, $F_1(t) = A_i$ o $F_1(t) = A_{i+1}$ o $F_1(t) = A_i \cup A_{i+1}$. De manera que para cualquier caso, $F_1(y) \subseteq F_1(t)$ con $y \in (\frac{i-1}{4}, \frac{i+1}{4})$ y, a su vez, $F_1(t) \subset U$. Entonces $F_1(y) \subset U$ para $y \in (\frac{i-1}{4}, \frac{i+1}{4})$. Por lo tanto, F_1 es scs si $t = \frac{i}{4}$.

2) $\cup_{t \in I} F_1(t) = I^2$. Por construcción.

Ahora, dividamos a cada A_i en cuatro cuadrados congruentes $A_{i,1}$, $A_{i,2}$, $A_{i,3}$, $A_{i,4}$, como se muestra en la figura 4b), asegurándonos que las intersecciones $A_{i,j} \cap A_{i,j+1}$ si $1 \leq i \leq 4$ y $i \leq j \leq 3$, $A_{i,4} \cap A_{i+1,1}$ $1 \leq i \leq 3$, en cada caso, sean aristas en común de los cuadrados tomados.

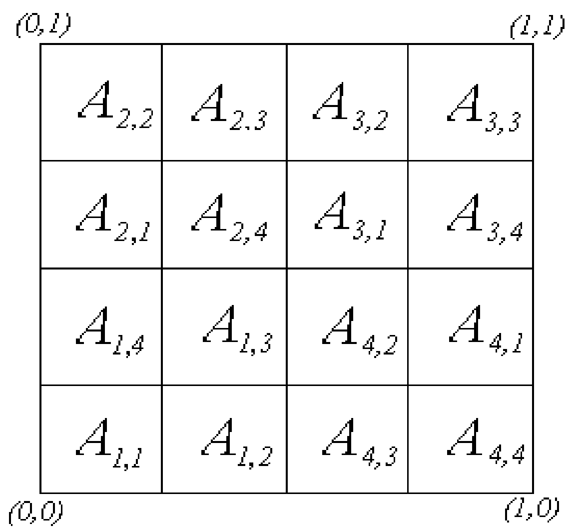


figura 4b)

Definimos F_2 para $t \in [0, \frac{1}{4}]$ como sigue:

$$F_2(t) = \begin{cases} A_{1,1}, & \text{si } t = 0; \\ A_{1,j}, & \text{si } \frac{j-1}{16} < t < \frac{j}{16} \quad j \in \{1,2,3,4\}; \\ A_{1,j} \cup A_{1,j+1}, & \text{si } t = \frac{j}{16}; \\ A_{1,4} \cup A_{2,1}, & \text{si } t = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

De la misma manera definimos a F_2 para $t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]$, etcétera. Entonces que F_2 satisface:

3) F_2 es scs. Sean $U \subset I^2$ un abierto y $t \in I$ tales que $F_2(t) \subset U$. Para simplificar un poco las cosas supongamos, sin pérdida de generalidad, que $t \in [0, \frac{1}{4}]$. Veamos los siguientes casos:

Caso 1. $t \neq \frac{j}{4}$, para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces $t \in (\frac{j-1}{4}, \frac{j}{4})$ para un único j, de manera que $F_2(t) = A_{1,j}$. Por definición, $F_2(t) = F_2(y) = A_{1,j}$ para $y \in (\frac{j-1}{4}, \frac{j}{4})$. Como $F_2(t) \subset U$, $F_2(y) \subset U$ para $y \in (\frac{j-1}{4}, \frac{j}{4})$, con $(\frac{j-1}{4}, \frac{j}{4})$ un abierto de I. Por lo tanto, F_2 es scs si $t \neq \frac{j}{4}$. Este caso se puede ampliar para $t = 0$ y $t = \frac{1}{4}$, observando que $[0, \frac{1}{16})$ y $(\frac{3}{16}, \frac{5}{16})$ son abiertos y sirven para que $F_2(t) \subset U$, respectivamente.

Caso 2. $t = \frac{j}{4}$, para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$. Por definición $F_2(t) = A_{1,j} \cup A_{1,j+1}$. Podemos observar que, también de la definición, para $y \in (\frac{j-1}{4}, \frac{j+1}{4})$, $F_2(t) = A_{1,j}$ ó $F_2(t) = A_{1,j+1}$ ó $F_2(t) = A_{1,j} \cup A_{1,j+1}$. De manera que para cualquier caso $F_2(y) \subseteq F_2(t)$ con $y \in (\frac{j-1}{4}, \frac{j+1}{4})$ y a su vez $F_2(t) \subset U$. Entonces $F_2(y) \subset U$ para $y \in (\frac{j-1}{4}, \frac{j+1}{4})$. Por lo tanto F_2 es scs si $t = \frac{j}{4}$.

4) $\cup_{t \in I} F_2(t) = I^2$. Por construcción.

5) $F_2(t) \subset F_1(t)$. Por construcción.

Continuando con este proceso encontramos una familia de funciones $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que cumplen las hipótesis de 2.14. De manera que existe una función continua y suprayectiva $f : I \to I^2$. $\square$

3.4. Extensión en el cubo de Hilbert. Sea $H = \Pi_{i=1}^{\infty}[0, 1]_i$ el cubo de Hilbert, entonces existe una función continua y suprayectiva $\mathcal{F} : [0, 1] \to H$.

Demostración. Por 3.2, H es un espacio métrico compacto. Entonces por 2.20, existe una función continua y suprayectiva $f : \mathbf{C} \to H$. Extenderemos f a todo el intervalo $[0, 1]$ de manera continua. Como $[0, 1] \setminus \mathbf{C}$ es un abierto de $\mathbb{R}$ con la métrica usual, $[0, 1] \setminus \mathbf{C} = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, por 1.44.

La idea de como extender esta función es ilustrada a continuación:

Sí a_i y $b_i \in [0, 1] \setminus \mathbf{C}$, y además $f(a_i), f(b_i)$ son como se muestran en la figura $5a)$:

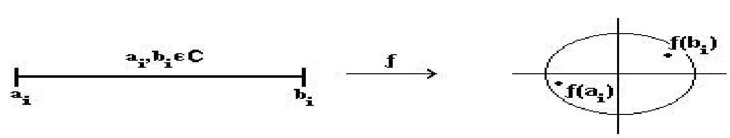


figura $5a)$

Entonces definiremos $\mathcal{F}$ como se muestra en la figura $5b)$:

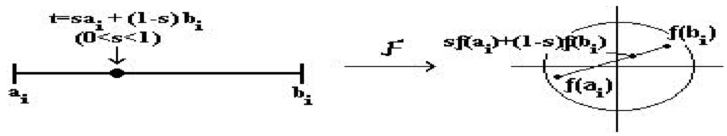


figura 5b)

Antes de continuar, sean $s \in [0,1]$ y $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in H$. Definimos $sx = (sx_i)_{i=1}^{\infty}$. Como $0 \leq x_i \leq 1$ para cada i, entonces $0 \leq sx_i \leq s \leq 1$, de modo que $0 \leq sx_i \leq 1$ para cada i. Por lo tanto, $sx \in H$. Sea $t \in [0,1] \setminus \mathbf{C}$. Entonces $t \in (a_i, b_i)$, para alguna i, por lo que $t = s_t a_i + (1 - s_t) b_i$ con $s_t \in (0,1)$.

Sea $\varphi : [0,1] \setminus \mathbf{C} \to \prod_{i=1}^{\infty} [0,1]$ dada por: $\varphi(t) = s_t f(a_i) + (1 - s_t) f(b_i)$. Notemos por lo hecho antes, que efectivamente, $\varphi(t) \in H$.

Ya teniendo estas dos funciones f y φ podemos definir nuestra extensión:

Sea $\mathcal{F} : [0,1] \to \prod_{i=1}^{\infty} [0,1]$ definida como sigue: $\mathcal{F}(t) := \begin{cases} f(t), & \text{si } t \in \mathbf{C}; \\ \varphi(t), & \text{si } t \notin \mathbf{C}; \end{cases}$

Para ver que $\mathcal{F}$ es continua, consideremos dos casos. Sea $t_0 \in (a_i, b_i)$:

Caso 1. $t_0 \notin \mathbf{C}$.

Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ tal que t_n converge a t_0 si n crece. Como $t_0 \notin \mathbf{C}$, entonces existe un único i tal que $t_0 \in (a_i, b_i)$. Por lo que, podemos escribir $t_0 = s_0 a_i + (1 - s_0) b_i$ con $s_0 \in (0,1)$ Por otro lado, ya que t_n converge a t_0 y (a_i, b_i) es abierto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \in (a_i, b_i)$ para cada $k \geq N$, de donde t_k se puede expresar como $t_k = s_k a_i + (1 - s_k) b_i$ para cada $k \geq N$, con $s_k \in (0,1)$.

Supongamos que $f(a_i) = (x_1^i, x_2^i, ...)$ y que $f(b_i) = (y_1^i, y_2^i, ...)$. Entonces $\varphi(t_k) = (s_k x_1^i + (1 - s_k) y_1^i, s_k x_2^i + (1 - s_k) y_2^i, ...)$, de aquí obtenemos que, $\mathcal{D}$ es la métrica de 1.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{F}(t_k), \mathcal{F}(t_0)) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|s_k x_j^i + (1-s_k) y_j^i - (s_0 x_j^i + (1-s_0) y_j^i)|}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|s_k - s_0||x_j^i|}{2^j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|s_k - s_0||y_j^i|}{2^j} \end{aligned}$$

Las sumas $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j^i|}{2^j}, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|y_j^i|}{2^j} < \infty$ pues $f(a_i), f(b_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1]$ y s_k converge a s_0 pues t_k converge a t_0. Concluimos que $d(\mathcal{F}(t_k), \mathcal{F}(t_0))$ converge a 0 si k crece.

Esta demostración permanece valida si $t = a_i$ o b_i, de manera que $\mathcal{F}$ es continua por la derecha para el caso $t = a_i$ y $\mathcal{F}$ es continua por la izquierda en el caso $t = b_i$.

Caso 2. $t_0 \in \mathbf{C}$. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier $t \in B(\delta, t_0, \mathbf{C})$, $\mathcal{D}(f(t), f(t_0)) < \epsilon$. Veremos que esta δ funciona. Sea $t \in B(\delta, t_0, [0,1])$. Dividamos casos:

Caso 2.1. Sea $t \in \mathbf{C}$. Entonces $t \in B(\delta, t_0, \mathbf{C})$, lo que implica que $\mathcal{D}(f(t), f(t_0)) < \epsilon$. De donde, por definición $\mathcal{F}|_{\mathbf{C}} = f$, $\mathcal{D}(\mathcal{F}(t), \mathcal{F}(t_0)) < \epsilon$.

Caso 2.2. Si $t \notin \mathbf{C}$, entonces existe un único i, tal que $t \in (a_i, b_i)$, con $a_i, b_i \in B(\delta, t_0, \mathbf{C})$. Sin perdida de generalidad, supongamos que a_i, entre a_i y b_i, es el elemento de $\mathbf{C}$ más cercano a t_0, de manera que $a_i \in B(\delta, t_0, \mathbf{C})$. Sabemos que $t = s_t a_i + (1 - s_t) b_i$, retomando la notación del caso 1 y definiendo a $f(t_0) = (x_1^0, x_2^0, ...)$ obetenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{F}(t), \mathcal{F}(t_0)) = \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{|s_t x_j^i + (1-s_t) y_j^i - x_j^0|}{2^j} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{|s_t||x_j^i - x_j^0|}{2^j} + \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{|(1-s_t)||y_j^i - x_j^0|}{2^j} \\ &= |s_t| \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{|x_j^i - x_j^0|}{2^j} + (|1 - s_t|) \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{|y_j^i - x_j^0|}{2^j} \\ = s_t \mathcal{D}(f(a_i), f(t_0)) + (1 - s_t)\mathcal{D}(f(a_i), f(t_0)) &\leq s_t \epsilon + (1 - s_t)\epsilon = \epsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{D}(\mathcal{F}(t), \mathcal{F}(t_0)) = \epsilon$, es decir, $\mathcal{F}$ es continua en $\mathbf{C}$. Pero, además, también hemos demostrado que $(\mathcal{F}(t_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mathcal{F}(t_0)$, para cualquier $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ que converga a t_0. Es decir $\mathcal{F}$ es continua en $[0,1]$. $\square$

Entre otros conjuntos Y en los que se puede hacer esta extensión, se encuentran los B_n definidos como, $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_{usual} \leq 1\}$, donde $||.||$ hace de B_n un espacio compacto. La siguiente aplicación generaliza este resultado.

Hagamos una extensión más de una función que tiene por dominio al conjunto de Cantor a todo el intervalo $[0,1]$.

3.5. Espacios *ULAC*. Sea (X, d) un continuo $ULAC(1.47)$, entonces existe $F : [0,1] \to X$ función continua y suprayectiva.

Demostración. Es fácil ver que si (X, d) es un conexo $ULAC$, entonces para cualesquiera $x, y \in X$, existe una función continua $H : [0,1] \to X$ tal que

$H(0) = x$ y $H(1) = y$. Por 2.20, existe una función continua y suprayectiva $f : \mathbf{C} \to X$. Esta función es la que trataremos de extender.

Sea $\epsilon_1 = 1$. Como X es $ULAC$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $d(x, z) < \delta_1$, entonces existe un arco A que tiene como puntos finales a x, z y con diámetro menor que 1. Por la continuidad uniforme de f, para δ_1, existe $\gamma_1 > 0$, sin perdida de generalidad $\gamma_1 \leq \frac{1}{3}$, tal que si $|t_1 - t_2| < \gamma_1$, $d(f(t_1), f(t_2)) < \delta_1$. De manera que, para estos puntos $f(t_1)$ y $f(t_2)$, se satisface la condición $ULAC$. Y por lo tanto $d(f(t_1), f(t_2)) < 1$.

Sea $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$. Entonces existe $\delta_2 > 0$, que satisaface $ULAC$. Como f es uniformemente continua, existe γ_2' tal que si $|t_1 - t_2| < \gamma_2'$ con $t_1, t_2 \in \mathbf{C}$, entonces $d(f(t_1), f(t_2)) < \delta_2$ y, al igual que para δ_1, para estos puntos se satisface la condición $ULAC$. Por lo tanto, $d(f(t_1), f(t_2)) < \frac{1}{2}$. Definimos $\gamma_2 = \min\{\gamma_2', \frac{\gamma_1}{3}\}$. Es claro que, para γ_2, se siguen cumpliendo las condiciones de γ_2'.

De esta manera construimos una sucesión de números $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $\gamma_{n+1} < \gamma_n$ y γ_n convergen a 0 si n crece, puesto que $\gamma_n \leq \frac{1}{3^n}$. Como hemos visto antes, $[0, 1] \setminus \mathbf{C} = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Definimos $I_n = \{i \in \mathbb{N} : \gamma_{n+1} \leq b_i - a_i < \gamma_n\}$. Estos conjuntos I_n dividen a casi todos los intervalos (a_i, b_i) a excepción de los que tienen longitud $b_i - a_i \geq \gamma_1$. Pero este caso sólo sucede para un número finito de índices puesto que $(a_i - b_i)$ converge a 0 si i crece, sin importar la numeración que se le dé a $[0, 1] \setminus \mathbf{C}$.

Si $b_j - a_j \geq \gamma_1$, por lo dicho al inicio de la demostración, existe una función continua $H_j : [0, 1] \to X$ tal que $H_j(0) = f(a_j)$ y $H_j(1) = f(b_j)$. Notemos que podemos modificar H_j de tal forma que $H_j : [a_j, b_j] \to X$ y tal que $H_j(a_j) = f(a_j)$ y $H_j(b_j) = f(b_j)$.

Para los otros casos, podemos encontrar, por construcción, un arco con diámetro cada vez más pequeño. Es decir, si $k \in I_m$, existe una función continua e inyectiva $A_k : [0, 1] \to X$ tal que $A_k(0) = f(a_k)$, $A_k(1) = f(b_k)$ y diám$(A_k([0, 1])) \leq \frac{1}{m}$. También podemos hacer que $A_k : [a_k, b_k] \to X$ sea una función continua e inyectiva, con $A_k(a_k) = f(a_k)$, $A_k(b_k) = f(b_k)$ y diám$(A_k([a_k, b_k])) \leq \frac{1}{m}$. Sea $F : [0, 1] \to X$ dada por:

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \in \mathbf{C}; \\ H_j(t), & \text{si } t \in (a_j, b_j) \textit{ con } b_j - a_j \geq \gamma_1; \\ A_k(t), & \text{si } t \in (a_k, b_k) \text{ y } k \in I_n; \end{cases}$$

Veamos que esta función es continua. Para esto dividámoslo en dos casos:

Caso 1: $t_0 \notin \mathbf{C}$ y $t_0 \in (a_p, b_p)$ para un único indice p.

Para cualquier caso ya sea si $F(t)$ está definida por $H_j(t)$ o $A_p(t)$ ambas funciones son continuas en todo el intervalo (a_p, b_p).

Caso 2: $t_0 \in \mathbf{C}$.

Sea $\epsilon > 0$ fijo. Por la propiedad arquimediana, encontremos $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Por construcción, las longitudes de las componentes C_n^j que son utilizadas para obtener el conjunto de Cantor, son iguales a $\frac{1}{3^n}$. Sea C_n^l componente del paso C_n tal que $t_0 \in C_n^l$.

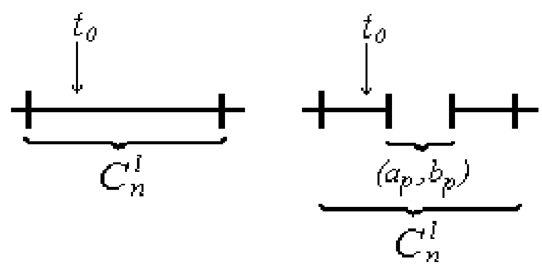


figura 6

Sea $V = (t_0 - \gamma_n, t_0 + \gamma_n) \cap (int(C_n^l)$, con $int\left(C_n^l\right)$ repecto a $[0, 1]$. Veamos que este abierto cumple con la definición de continuidad para F :

Caso 2.1: $\zeta \in V \cap \mathbf{C}$ entonces $|\zeta - t_0| < \gamma_n$. Lo que implica, por construcción de γ_n, que $d(f(\zeta), f(t_0)) < \epsilon$. Dado que $F|_{\mathbf{C}} = f$, hemos concluido.

Caso 2.2: $\zeta \in V \setminus \mathbf{C}$.

Notemos que $\zeta \in (a_q, b_q)$ y, además, $(a_q, b_q) \subset C_n^l$ pues $\gamma_n < \frac{1}{3^n}$. De manera que, $|t_0 - a_q| \leq \gamma_{n+1}$ o $|t_0 - b_q| \leq \gamma_{n+1}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que se satisface la primera desigualdad (figura 6). Entonces, $d(F(t_0), F(\zeta)) \leq d(F(t_0), F(a_q)) + d(F(a_q), F(\zeta))$.

Supongamos que $(a_q, b_q) \subset C_n^l$, asi $b_q - a_q < \frac{1}{3^n}$. De manera que, $q \in I_s$ para $s \geq n$ pues $\gamma_n \leq \frac{1}{3^n}$. Entonces existe un arco A_q que tiene por puntos finales a $f(a_q)$ y $f(b_q)$ con diámetro menor que $\frac{1}{s}$, por construcción de las γ_n. Como $F(\zeta)$ está en A_q, $d(F(\zeta), f(a_q)) < \frac{1}{s} \leq \frac{1}{n}$. Por otra parte, dado que $|t_0 - a_q| < \gamma_{n+1}$ con $t_0, a_q \in \mathbf{C}$, $d(f(t_0), f(a_q)) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, luego entonces:

$$d(F(t_0), F(a_q)) + d(F(a_q), F(\zeta)) = d(f(t_0), f(a_q)) + d(f(a_q), F(\zeta)) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \epsilon$$

Por lo tanto, F es continua en todo $[0, 1]$ y la suprayectividad se sigue conservando del hecho de $F|_{\mathbf{C}}$ es suprayectiva. $\square$

La siguiente aplicación nos permite observar que todo espacio totalmente disconexo "vive" en el conjunto de Cantor.

3.6. Espacios Totalmente Disconexos en C. Sea (Y, d) un espacio métrico, compacto y totalmente disconexo. Entonces (Y, d) tiene una copia topológica contenida en $(\mathbf{C}, d_{usual})$.

Demostración. Sea $\epsilon = 1$. Entonces por 1.39, existen conjuhntos abiertos y cerrados, no vacíos, ajenos dos a dos $K_1, K_2, ..., K_n$ tales que $Y = \cup_{i=1}^{n} K_i$ y diám$(K_i) < 1$. Luego, por 2.18, existen abiertos y cerrados, ajenos dos a dos $D_1, D_2, ..., D_n$ tales que $\mathbf{C} = \cup_{i=1}^{n} C_i$. Definimos $F_1 : Y \to 2^{\mathbf{C}}$ dada por $F_1(t) = D_i$ si $t \in K_i$. De manera semejante a como se hizo con en la demmostración de 2.20, F_1 es scs.

Supongamos que diám$(K_i) > 0$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Es decir, K_i tiene más de un punto. Sea $\epsilon_i = \frac{1}{2}$diám(K_i), entonces como K_i es compacto y totalmente disconexo, existen, por 1.39, conjuntos $K_{i,1}, K_{i,2}, ..., K_{i,m(i)}$ con $m(i) \geq 2$, abiertos y cerrados, no vacíos, ajenos dos a dos tales que $K_i = \cup_{j=1}^{m(i)} K_{i,j}$ con diám$(K_{i,j}) < \epsilon_i = \frac{1}{2}$diám$(K_i)$. Por 2.23, existen conjuntos abiertos y cerrados, no vacíos, ajenos dos a dos $D_{i,1}, D_{i,2}, ..., D_{i,m(i)}$ tales que $D_i = \cup_{j=1}^{m(i)} D_{i,j}$ con diám$(D_{i,j}) \leq (2/3)$diám(D_i).

Si diám$(K_j) = 0$, entonces $K_j = \{y_j\}$, definimos $D_j' = \{x_j\}$ para $x_j \in D_j$.

Definimos $F_2 : Y \to 2^{\mathbf{C}}$ dada por:

$$F_2(x) = \begin{cases} D_j', & \text{si } diam(K_j) = 0; \\ D_{i,j}, & \text{si } t \in K_{i,j}; \end{cases}$$

Entonces, por construcción, F_2 es scs y $F_2(y) \subseteq F_1(y)$ para cada $y \in Y$. De esta manera construimos una familia de funciones $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$:

1) F_n es scs;
2) $F_{n+1}(y) \subseteq F_n(y)$ para todo $y \in Y$;
3) diám(F_n) converge a 0 si n crece ∞.

Por 2.14, existe una función continua $f : Y \to \mathbf{C}$. Como el diámetro de los conjuntos cerrados usados para la definición de cada F_k (D_i para F_1, $D_{i,j}$ para F_2) converge a 0, por construcción, podemos afirmar que f es inyectiva. Por lo tanto, f es una inmersión, es decir, Y tiene una copia topologica en $\mathbf{C}$. $\square$

3.7. Producto de conjuntos de Cantor. El producto finito o numerable de conjuntos de Cantor es un conjunto de Cantor.

Demostración. Sea $(X_i, d_i)_{i=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos tales que (X_i, d_i) es un conjunto Cantor. Por 1.2 podemos suponer que $d_i\,(x_i, y_i) \leq 1$ para cada $x_i, y_i \in X_i, i \in \mathbb{N}$. Demostraremos que $X = \Pi_{i=1}^{\infty} X_i$ es un espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo.

3.7.1) Compacidad y metrizabilidad de X.

Por 1.3, $\Gamma_{\times} = \Gamma_{\mathcal{D}}$, es decir X es métrico. Por 3.2, X es compacto con $\Gamma_{\times}$. Por lo tanto $(X, \mathcal{D})$ es un espacio métrico y compacto.

3.7.2) X es perfecto.

Sean $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ y $\epsilon > 0$ fijos. Como cada X_i es perfecto, existe $y_i \in X_i$ tal que $d_i(x_i, y_i) < \epsilon$. Definimos $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X$, entonces $\mathcal{D}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} < \epsilon \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \epsilon$, donde $\mathcal{D}$ es la métrica definida en 1.1.

3.7.3) X es totalmente disconexo.

Por 3.7.1) X es compacto. Por 1.40, las componentes y casicomponentes de X coinciden. Demostremos que las casicomponentes de X están formadas solamente por un punto.

Sean $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ elementos de X, tales que $x \neq y$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$, tal que $x_i \neq y_i$. Como el espacio X_i es totalmente disconexo, existen U_i y V_i conjuntos abiertos ajenos de X_i tales que $X_i = U_i \cup V_i$ con $x_i \in U_i$ y $y_i \in V_i$. Definimos $U = U_i \times \Pi_{j \neq i} X_j$ y $V = V_i \times \Pi_{j \neq i} X_j$. Por 1.1, U y V son abiertos de X. Por construcción, $x \in U, y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ y $X = U \cup V$. Es decir, U y V forman una disconexión del espacio X. Por lo tanto, las casicomponentes de X son puntos.

Asi pues, X es un espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo. Por 2.24, X es un conjunto de Cantor. Si es que sólo tuvieramos una familia finita de espacios de Cantor, aplicamos los mismos razonamientos anteriores. $\square$

3.8. $\Pi_{n=1}^{\infty}\{0,1\}_i$ **es homeomorfo a C**. Sea $(\{0,1\}, d_{usual})$ el espacio métrico y discreto de dos puntos. Entonces $X = \Pi_{i=1}^{\infty}\{0,1\}_i$ es un conjunto de Cantor.

Demostración. Al igual que en 3.7, demostraremos que X es un espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo.

3.8.1) Compacidad y metrizabilidad de X.

La demostracición es semejante a 3.7.1)

3.8.2) X es perfecto.

Sea $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ y $\epsilon > 0$ fijos. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon$. Definimos $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ con $y_i = x_i$ para $i = 1, 2, ..., N-1$ y $x_k \neq y_k$ para $k \geq N$ y esto es posible de hacer ya que $x_k \in \{0, 1\}$. Con esto tenemos, claramente, que $d(x, y) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon$ con $x \neq y$.

3.8.3) X es totalmente disconexo.

Sean $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in X$, con $x \neq y$. Como $x \neq y$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \neq y_k$. Tomemos entonces $U = \{x_k\} \times \Pi_{j \neq k}\{0, 1\}_j, V = \{y_k\} \times \Pi_{j \neq k}\{0, 1\}_j$ son abiertos de X, pues $\{x_k\}, \{y_k\}$ son conjuntos abiertos del $\{0, 1\}$. Repitiendo el mismo argumento que en 3.7.3) tenemos lo deseado.

Por lo tanto X es un espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo. Por 2.25, X es Cantor. $\square$

3.9. C es Homogéneo. El conjunto de Cantor $\mathbf{C}$, es un espacio homogéneo.

Demostración. Obviamente $(\{0, 1\}, d_{usual})$ es un espacio homogéneo. Asi pues, por 1.4, $X = \Pi_{i=1}^{\infty}\{0, 1\}_i$ es un espacio homogéneo.

Sean $p, q \in \mathbf{C}$, sabemos por 3.8, que existe un homeomorfismo $H : \mathbf{C} \to X$. Por 1.4 existe un homeomorfismo $F : X \to X$ tal que $F(H(p)) = H(q)$. Definimos un homeomorfismo $G : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, dado por $G(x) = H^{-1} \circ F \circ H(x)$ que cumple que $G(p) = q$. Por lo tanto $\mathbf{C}$ es un espacio homogéneo. $\square$

Hasta ahora, sólo sabemos que condiciones debemos de pedirle a un espacio métrico para que sea homeomorfo a cantor. Vimos también, que el conjunto de cantor es homeomorfo al producto numerable del conjunto discreto $\{0, 1\}$. La siguiente aplicación nos habla de como podemos formar una infinidad de conjuntos que sean homeomorfos al conjunto de Cantor.

3.10. **La relacion entre $2^{\mathbf{C}}$ y C**. Sea (X, d), espacio métrico y compacto. Entonces (X, d) es un conjunto de Cantor si y sólo si 2^X es un conjunto de Cantor.

Demostración. Para demostrar esta aplicación se seguirán los siguientes pasos.

3.10.1) (X,d) es compacto si y sólo si $(2^X, H_d)$ es compacto.

Si (X,d) es compacto, por 1.18, $\left(2^X, H_d\right)$ también lo es. Inversamente. La función $i : X \to 2^X$ dada por $i(x) = \{x\}$, representa a una inmersión de X en 2^X, donde $i(X)$ es un conjunto cerrado en 2^X.

3.10.2) (X,d) es perfecto si y sólo si $(2^X, H_d)$ es perfecto.

Supongamos que (X,d) es perfecto. Sea $D \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, dados. Consideremos lo siguientes casos:

Caso 1. $|D| = 1$.

Supongamos que $D = \{x\}$ para algún $x \in X$. Como X es perfecto, existe $y \neq x$ tal que $d(x,y) < \frac{\epsilon}{3}$. Entonces, para $A_D = \{y\}$, se cumple que $H_d(D, A_D) < \epsilon$.

Caso 2. $|D| > 1$. Sea D_a el conjunto de puntos aislados de D. Es decir, el conjunto de puntos $w \in D$ para los que existe $r_w > 0$ tal que $B(r_w, w) \cap D = \{w\}$.

Caso 2.1. $D_a \neq \emptyset$. Sea $x \in D_a$ fijo. Entonces existe $r_x > 0$ tal que $B(r_x, x) \cap D = \{x\}$. Sea $r_0 = \min\{r_x, \epsilon\}$. Como X es perfecto, existe $y \in X$ con $y \neq x$ tal que $y \in B(r_0, x)$. Definimos $A_D = (D \setminus \{x\}) \cup \{y\}$. Entonces, es claro que $D_A \in 2^X, D_A \neq D$ y que $H_d\,(D, D_A) < \epsilon$, pues D y D_A sólo difieren de un punto y, en estos donde no coinciden, a decir y para D y x para D_A, viven en la misma vecindad de radio ϵ.

Caso 2.2. $D_a = \emptyset$. Entonces, D es perfecto pues D es cerrado en X. Sea $x \in D$ fijo. Elijamos $w_x \in D$, distinto a x, tal que $d(x, w_x)$ es menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Definamos $A_D = D \setminus B(\frac{\epsilon}{2}, x))$. Claramente $A_D \in 2^X$, $A_D \neq D$ y $A_D \subset N_d(D, \epsilon)$. Resta ver que $D \subset N_d(A_D, \epsilon)$.

Sea $b \in D$. Dividamos nuevamente dos casos:

Caso 2.2.1. $b \notin B(\frac{1}{2}, x)$. Entonces $b \in D \setminus B(\frac{\epsilon}{2}, x)$ y habremos concluido.

Caso 2.2.2. $b \in B(\frac{\epsilon}{2}, x)$. Entonces $d(b, w_x) < d(b,x) + d(x, w_x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$, donde $w_x \in D$. Por tanto $b \in N_d\,(A_D, \epsilon)$.

Por lo tanto, 2^X es perfecto.

Inversamente. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$, dados. Como $\{x\} \in 2^X$ entonces existe $B \in 2^X$ con $B \neq \{x\}$ y $H_d(\{x\}, B) < \epsilon$. Como $B \setminus \{x\} \neq \emptyset$, para

$y \in B \setminus \{x\}$, $y \neq x$, pues $y \in N(\{x\}, \epsilon)$, y $d(y, x) < \epsilon$.

3.10.3) (X, d) es totalmente disconexo si y sólo si $(2^X, H_d)$ es totalmente disconexo.

Supongamos que X es totalmente disconexo. Por hipótesis y 1.18, tenemos que 2^X es espacio un métrico y compacto. Por 1.40, las componentes y casicomponentes coinciden. Entonces sólo es necesario probar que las casicomponentes de 2^X están formadas por un sólo elemento de 2^X.

Sean $A, B \in 2^X$ con $A \neq B$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $B \setminus A \neq \varnothing$. Sea $p \in B \setminus A$. Como X es totalmente disconexo y compacto, para cada $a \in A$ existe un abierto y cerrado E_a tal que $a \in E_a$ pero $p \notin E_a$. Tomamos la cubierta abierta de A,dada por:

$$\mathcal{L} = \{E_a : E_a \text{ es abierto y cerrado, } a \in A \text{ y tal que } p \notin E_a\}$$

Como A es un conjunto cerrado de X, A es compacto. Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \cup_{k=1}^{n} E_{a_k}$. Definimos $E = \cup_{k=1}^{n} E_{a_k}$ entones E es un abierto y cerrado y además $p \notin E$. Definimos,

$$U = \{D \in 2^X : D \subset E\} \text{ y } V = \{F \in 2^X : F \setminus E \neq \varnothing\}$$

Antes de continuar recordemos que si E es un abierto y cerrado, entonces $Fr(E) = \varnothing$ $(Fr(E) = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E} = E \cap (X \setminus E) = \varnothing)$. Demostremos que estos conjuntos cumplen las sigueintes propiedades:

1) $2^X = U \cup V$. Por definición.

2) $A \in U$ y $B \in V$. Por construcción $A \subset E$ y $p \in B \setminus E$.

3) $U \cap V = \varnothing$. Por definición.

4) U y V son abiertos y cerrados en 2^X. Sea $D \in \overline{U}$. Entonces existe $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ tal que $H_d(D, D_n) < \frac{1}{n}$. Sea $b \in D$ fijo. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, hay un $b_n \in D_n \subset E$ tal que $d(b, b_n) < \frac{1}{n}$. Asi, $b \in \overline{E}$, como E es cerrado $b \in E$. Por lo tanto, $D \subset E$; es decir, $U = \overline{U}$.

Mostremos ahora que V es cerrado. Sea $F \in \overline{V}$. Entonces existe $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ tal que $H_d(F, F_n) < \frac{1}{n}$. Supongamos que $F \setminus E = \varnothing$; es decir, $F \subset E$.

Como $F_n \setminus E \neq \varnothing$ para cada n, tomamos $c_n \in F_n \setminus E$. Como $H_d(F, F_n) < \frac{1}{n}$, $F_n \subset N(F, \frac{1}{n})$ por lo que existe $e_n \in F$ tal que $d(c_n, e_n) < \frac{1}{n}$. Como X es compacto, por 1.12, existe $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que c_{n_k} converge a c para algun $c \in X$. Como $c_n \in F_n \setminus E$ y $F_n \setminus E \subset X \setminus E$, $c \in \overline{X \setminus E}$. Además,

$d(c_n, e_n) < \frac{1}{n}$ entonces e_{n_k} converge a c. Por lo tanto, $c \in \overline{F}$ pues $e_n \in F$. De modo que $c \in \overline{X \setminus E} \cap \overline{F}$. Asi $c \in \overline{X \setminus E} \cap \overline{E}$, lo cuál es una contradicción pues $Fr(E) = \emptyset$. De modo que, $F \setminus E \neq \varnothing$. Es decir $V = \overline{V}$.

Usando 1) y 3), tenemos que U, V son abiertos, y concluimos 4). Por lo tanto, U, V son una separación del espacio 2^X con $A \subset U$ y $B \subset V$. Así pues, tenemos que la casicomponente de A está formada sólo por A.

Inversamente. Sean $x, y \in X$, distintos fijos. Como 2^X es totalmente disconexo entonces $2^X = U|V$, tales que $\{x\} \in U$ y $\{y\} \in V$, definimos:

$$P = \{z \in X : \{z\} \in U\} \text{ y } Q = \{w \in X : \{w\} \in V\}$$

Entonces se tiene que:

5) $X = P \cup Q$. Por construcción.
6) $x \in P$ y $y \in Q$. Por construcción.
7) $P \cap Q = \varnothing$. Por construcción.
8) P, Q son abiertos y cerrados de X. Sea $z \in P$ fijo. Como U es un abierto de 2^X, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\epsilon, \{z\}, 2^X) \subset U$. Sea $s \in B(\epsilon, z, X)$. Entonces $d(s, z) < \epsilon$. Por lo tanto, $\{z\} \subset N(\{s\}, \epsilon, 2^X)$ y $\{s\} \subset N(\{z\}, \epsilon, 2^X)$, es decir, $H_d(\{z\}, \{s\}) < \epsilon$. Así pues, $B(\epsilon, z, X) \subset P$. Por lo tanto, P es un abierto. Para ver que Q es abierto, se repiten los mismos argumentos, con sus respectivas diferencias.

Usando 5) y 7) se tiene que P, Q son cerrados y concluimos 8). Por lo tanto, P y Q forman una disconexión de X con $x \in P$ y $y \in Q$. Asi que, la casicomponente de x está formada únicamente por x. Es decir, X es totalmente disconexo.

Luego entonces por 2.25, (X, d) es un conjunto de Cantor si y sólo si $(2^X, H_d)$ es un conjunto de Cantor. $\square$

En la aplicación 3.8, encontramos un conjunto que es homeomorfo al conjunto de Cantor. En la siguiente, damos otro ejemplo un poco más accesible.

3.11. Cantor a partir de la sucesión armónica. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Entonces Ç$= \{A \subset 2^X : 0 \in A\}$ es un conjunto de Cantor.

Demostración. Seguiremos el mismo camino que en las aplicaciones 3.7 y 3.8.

3.11.1) Ç es compacto y métrico. Ya que (X, d) es un espacio métrico y compacto, por 1.17 y 1.18, $(2^X, H_d)$ es un espacio métrico y compacto. Por 1.11, sólo es necesario probar que Ç es un conjunto cerrado de 2^X.

Sea $D \in 2^X \backslash$Ç. Por definición $0 \notin D$. Como D es un conjunto cerrado de X, D debe de ser finito, de lo contrario, dado que X es compacto, tendría un punto de acumulación, pero el único punto de X que es de acumulación es el 0.

Sean $\frac{1}{s} = \min\{\frac{1}{p} : \frac{1}{p} \in D\}$ y $\epsilon = \frac{1}{2s}$. Mostremos que $B(\epsilon, D, 2^X) \subset 2^X \backslash$Ç. Sea $C \in B(\epsilon, D, 2^X)$. Entonces $H_d(D, C) < \epsilon$. Lo que implica que $C \subset N(D, \epsilon)$; es decir, para cada $x \in C$, existe $y_x \in D$ tal que $|x - y| < \epsilon$. Si $0 \in C$ entonces existe $y_0 \in D$ tal que $y_0 < \epsilon$. Pero, construimos ϵ de tal manera que $\epsilon < b$ para cada elemento b de D. Por lo tanto, $0 \notin C$. Asi, $B(\epsilon, D, 2^X) \subset 2^X \backslash$Ç. Es decir, Ç es un cerrado de 2^X.

3.11.2) Ç es perfecto. Sea $B \in$ Ç. Para demostrar este inciso, dividámoslo en dos casos:

Caso 1. B es finito.

Definimos $C_1 \in$ Ç como $C_1 = B \cup \{1\}$. Entonces $H_d(B, C_1) \leq 1$. De manera semejante definimos $C_2 \in$ Ç como $C_2 = B \cup \{\frac{1}{2}\}$. De donde, $H_d(B, C_2) \leq \frac{1}{2}$. En general, definimos $C_i = B \cup \{\frac{1}{i}\}$ para tener que $H_d(B, C_i) \leq \frac{1}{i}$ converge a 0 si i crece. Este caso se hizo para garantizar que $B \neq C_i$ para una infinidad de C_i.

Caso 2. B es infinito.

Entonces B se trata de una subsucesión de la sucesión armónica junto con el 0. Es decir $B = \{b_1, b_2, ...\} \cup \{0\}$ donde b_i converge a 0 si i crece. Definimos $C_i = B \setminus \{b_i\}$, entonces es claro que $C_i \in$Ç, $B \neq C_i$ y $H_d(B, C_i)$ converge a 0 si i crece.

Por lo tanto, B es un punto de acumulación de Ç.

3.11.3) Ç es totalmente disconexo. Demostremos que las casicomponentes de Ç sólo tienen un punto y, por lo tanto, las componentes también sólo tendrán un punto.

Sean $A, B \in$ Ç con $A \neq B$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A \backslash B \neq \emptyset$. Como los elementos de A y B son términos de la sucesión armónica. Sea $\frac{1}{k_0} \in A \setminus B$. Definimos $U = \{C \in$ Ç: $\frac{1}{k_0} \in C\}$ y $V = \{E \in$Ç: $\frac{1}{k_0} \notin E\}$. Mostremos que se cumplen las siguientes propiedades:

1) $U \cap V = \varnothing$. Por construcción.
2) $A \in U, B \in V$. Por construcción.
3) Ç$= U \cup V$. Por construcción.
4) U, V son abiertos de Ç. Sea $C \in U$. Por definición $\frac{1}{k_0} \in C$. Tomamos $D \in B(\frac{1}{2k_0(k_0+1)}, C, 2^X)$. Lo que implica que $C \subset N(D, \frac{1}{2k_0(k_0+1)})$. Por lo que para $\frac{1}{k_0} \in C$ existe $x \in D$ tal que $|x - \frac{1}{k_0}| < \frac{1}{2k_0(k_0+1)}$; pero esto es imposible, a menos que $x = \frac{1}{k_0}$. Es decir, $\frac{1}{k_0} \in D$. Asi $B(\frac{1}{2k_0(k_0+1)}, C, 2^X) \subset U$. Resta ver que V también es un abierto. Sea $E \in V$. Entonces $\frac{1}{k_0} \notin E$, Tomamos $F \in B(\frac{1}{2k_0(k_0+1)}, E, 2^X)$, entonces $F \subset N(E, \frac{1}{2k_0(k_0+1)})$. Supongamos que $\frac{1}{k_0} \in F$. Por definición, para $\frac{1}{k_0} \in F$ debe de existir $x \in E$ tal que $|x - \frac{1}{k_0}| < \frac{1}{2k_0(k_0+1)}$, pero esto únicamente puede pasar si $x = \frac{1}{k_0}$, es decir,$\frac{1}{k_0}$ debe ser un elemeto de E. Lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\frac{1}{k_0} \notin F$, es decir $B(\frac{1}{2k_0(k_0+1)}, E, 2^X) \subset V$.

Esto demuestra que U, V son es una separación de Ç con $A \in U$ y $B \in V$. Por lo tanto, Ç es totalmente disconexo.

Por lo tanto, Ç es un espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo. Por 2.25, Ç es un conjunto de Cantor. □

3.12. Compactación de $\mathbb{N}$. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\mathbf{C} \cup \mathbf{M}$ donde $\mathbf{M}$ el conjunto de puntos medios de las componentes de $[0,1] \setminus \mathbf{C}$. Entonces es $\mathbf{C} \cup \mathbf{M}$ homeomorfo a 2^X.

Demostración. Lo que haremos será, demostrar que 2^X y $\mathbf{C} \cup \mathbf{M}$ son compactaciones de los naturales, donde los naturales tienen la métrica usual, para despues aplicar 3.1 y concluir que son espacios homeomorfos.

Para 2^X, sabemos por 3.11 que Ç es homeomorfo al conjunto de Cantor, resta ver que $2^X \setminus$Ç es discreto, numerable y denso en 2^X.

3.12.1) $2^X \setminus$Ç es discreto. Sea $D \in 2^X \setminus$Ç. Por definición $0 \notin D$. Como D es un conjunto cerrado de X, D debe de ser finito, de lo contrario, dado que X es compacto, tendría un punto de acumulación, pero el único punto de X que es de acumulación es el 0. Sea $\frac{1}{p_0}$ =mín$\{\frac{1}{b} : \frac{1}{b} \in D\}$. Mostremos que, $B(\frac{1}{p_0(p_0+1)}, D, 2^X) = \{D\}$. Sea $C \in B(\frac{1}{p_0(p_{0+1})}, D, 2^X)$, entonces $C \in N(D, \frac{1}{p_0(p_{0+1})})$. Asi, para cada $\frac{1}{n} \in C$ existe $\frac{1}{m} \in D$ tal que $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \frac{1}{p_0(p_{0+1})}$. Si $m \neq n$ entonces $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \geq \frac{1}{m(m+1)}$. Como $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{p_0}$, además $\frac{1}{m(m+1)} \geq \frac{1}{p_0(p_{0+1})}$. De manera que, $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \frac{1}{p_0(p_0+1)}$ sólo es posible cuando $m = n$.

Con esto concluimos que $C = D$.

3.12.2) $2^X \setminus Ç$ es numerable. Sea $B \in 2^X \backslash Ç$. Sabemos por lo hecho al inicio de 3.12.1 que B debe de ser finito. Definimos $\mathfrak{B}_n = \{B \in 2^X \backslash Ç\text{: } |B| = n\}$. Lo siguiente que haremos será mostrar que cada $\mathfrak{B}_n$ es numerable. Sean $p_1, p_2, ..., p_n$ números primos distintos. Definimos $f : \mathfrak{B}_n \to \mathbb{N}$ como sigue $f(B) = \Pi_{i=1}^n p_i^{k_i}$ donde $B = \{\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, ..., \frac{1}{k_n}\}$. Por el teorema fundamental de la aritmética, podemos ver que f se trata de una función inyectiva. Es claro que $2^X \backslash Ç = \cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$, y como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, obtenemos lo deseado.

3.12.3) $2^X \setminus Ç$ es denso en 2^X. Sea $A \in Ç$ y $\epsilon > 0$ fijos. Tomamos $n = n(\epsilon) > 1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Definimos $B = B(\epsilon)$ como $B = \{\frac{1}{n}\} \cup (\{\frac{1}{k} : k = 1, 2, ..., n-1\} \cap A)$. Claramente $B \neq \varnothing$, es un cerrado de X, es decir, $B \in 2^X$ y $B \in 2^X \setminus Ç$. Lo que afirmamos es que $H_d(A, B) < \epsilon$. Para esto necesitamos probar que $A \subset N_d(B, \epsilon)$ y $B \subset N_d(A, \epsilon)$. Demostremos primero que $A \subset N_d(B, \epsilon)$. Sea $a \in A$. Si $a \leq \frac{1}{n}$ entonces $|a - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$. Si $a > \frac{1}{n}$ entonces $a \in [\{\frac{1}{k} : k = 1, 2, ..., n-1\} \cap A] \subset B$; es decir, $a \in B$, por lo tanto, $a \in N_d(B, \epsilon)$. Ahora mostremos que $B \subset N_d(A, \epsilon)$. Sea $b \in B$. Si $b = \frac{1}{n}$, como $0 \in A$, entonces $|0 - b| = \frac{1}{n} < \epsilon$. Si $b \in \{\frac{1}{k} : k = 1, 2, ..., n-1\} \cap A$, entonces $b \in A$. Por lo tanto, $b \in N(A, \epsilon)$. Concluyendo, con esto que, $H_d(A, B) < \epsilon$.

Por tanto 2^X es una compactación de los naturales, con $2^X \backslash (2^X \backslash Ç)$ homeomorfo a $\mathbf{C}$.

Para ver que $\mathbf{C} \cup \mathbf{M}$ es una compactación de $\mathbf{M}$, notemos que $\mathbf{M}$ es un conjunto discreto y numerable ya que las componentes de $[0, 1] \setminus C$ son abiertas y forman un conjunto numerable. Por tanto $\mathbf{M}$ es homeomorfo a $\mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}$ tiene la topología discreta. Resta ver, entonces, que $\mathbf{M}$ es denso en $\mathbf{C} \cup \mathbf{M}$.

Sean $x \in \mathbf{M} \cup \mathbf{C}$ y $\epsilon > 0$ fijos. Tomemos $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$. El caso en que $x \in \mathbf{M}$ es trivial. Por lo que supongamos $x \in \mathbf{C}$, sea C_n el n-ésimo paso en la construcción del conjunto de Cantor. Entonces $x \in C_n^k$, donde C_n^k es alguna de las componentes de C_n. Sabemos que C_n^k tiene la forma $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$. Para $m_n = (\frac{1}{2})(\frac{k+1}{3^n} - \frac{k}{3^n}) \in \mathbf{M}$, tenemos que $d(x, m_n) \leq \frac{1}{3^n} < \epsilon$.

Por lo tanto $\mathbf{C} \cup \mathbf{M}$ es una compactación de los naturales. Usando la aplicación 3.1, obtenemos que $\mathbf{C} \cup \mathbf{M}$ es homeomorfo a $\mathbf{2}^X$. $\square$

3.13. Cantor en todo abierto. Sean (X, d) continuo no degenerado y sea U un abierto de X no vacío. Entonces U contiene un conjunto de Cantor.

Demostración. Sea un abierto no vacío U, por 1.46 existen $p_1, q_1 \in U$ y abiertos V_1 y V_2 con cerraduras ajenas tales que $p_1 \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset U$ y $q_1 \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset U$ y diám$(V_i) < 1$. Definimos $C_1 = \overline{V_1} \cup \overline{V_2}$. Para V_1, repitiendo argumentos parecidos que con U, existen abiertos ajenos $V_{1,1}$ y $V_{1,2}$ y $p_{1,2}$, tales que $p_1 \in V_{1,1} \subset \overline{V_{1,1}} \subset V_1$ y $p_{1,2} \in V_{1,2} \subset \overline{V_{1,2}} \subset V_1$ y diám$(V_{1,j}) < \frac{1}{2}$. Haciendo lo mismo con q_1 y V_2, obtenemos $V_{2,1}, V_{2,2}$ y $q_{1,2}$ con mismas características. Definimos $C_2 = [\overline{V_{1,1}} \cup \overline{V_{1,2}}] \cup [\overline{V_{2,1}} \cup \overline{V_{2,2}}]$. Notemos que, por construcción, $C_2 \subset C_1$. Continuando con este proceso, generamos una familia anidada de conjuntos cerrados $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que diám$(C_n^i) \leq \frac{1}{2^n}$ donde cada C_n^i es uno de los cerrados que forman parte de C_n.

Definimos $\tilde{\mathbf{C}} = \cap_{n=1} C_n$, demostremos que $\tilde{\mathbf{C}}$ cumple que:

1) $\tilde{\mathbf{C}}$ es Métrico y Compacto. Se cumple pues la sucesión es anidada y X es métrico y compacto.

2) $\tilde{\mathbf{C}}$ es Perfecto. Esta demostración es semejante a la demostración de 2.24.

3) $\tilde{\mathbf{C}}$ es Totalmente Disconexo. Supongamos que $\tilde{\mathbf{C}}$, tiene una casicomponente Q, con más de un punto. Sean $p, q \in Q$ distintos. Entonces $d(p,q) > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < d(p,q)$. Por construcción diám$(C_n^i) \leq \frac{1}{2^n}$ donde C_n^i es uno de los cerrados que forman parte de el C_n. Entonces existe k tal que $p \in C_n^k$ y $q \notin C_n^k$.Como X es normal, existe un abierto W tal que $C_n^k \subset W$ y $W \cap C_n^j = \varnothing$ para $j \neq k$. Asi pues, $\tilde{\mathbf{C}} \cap C_n^k = \tilde{\mathbf{C}} \cap W$. Por lo tanto, $\tilde{\mathbf{C}} \cap C_n^k$ es un abierto y cerrado de $\tilde{\mathbf{C}}$. De donde, $\tilde{\mathbf{C}} \cap C_n^k, \tilde{\mathbf{C}} \cap (X \setminus C_n^k)$ forma una partición de $\tilde{\mathbf{C}}$. Esto contradice el hecho de que p y q estén en la misma casicomponente Q de $\tilde{\mathbf{C}}$. Por lo tanto, las casicomponentes de $\tilde{\mathbf{C}}$ sólo tienen un punto. Por 1.40, las componentes de $\tilde{\mathbf{C}}$ están formadas por un sólo punto, es decir, $\tilde{\mathbf{C}}$ es totalmente disconexo.

Luego $\mathbf{C}$ es homeomorfo a $\tilde{\mathbf{C}}$ con $\tilde{\mathbf{C}} \subset U$. $\square$

Según el Corolario 2.21, todo espacio métrico compacto es homeomorfo a una descomposición del conjunto de Cantor. La siguiente aplicación nos dice quien es la descomposición de $\mathbf{C}$ que es homeomorfa al intervalo $[0,1]$.

3.14. El intervalo $[0,1]$ y la descomposición de $\mathbf{C}$. Sea $\mathbf{C}$ el conjunto ternario de Cantor, y (a_i, b_i) $i = 1, 2, ...$ las componentes de $[0,1] \setminus \mathbf{C}$. Sea

$\mathfrak{D} = \{\{a_i, b_i\} : i = 1, 2, ...\} \cup \{\{t\} : t \in \mathbf{C} \setminus \cup_{i=1}^{\infty}\{a_i, b_i\}\}$. Entonces $\mathfrak{D}$ es una descomposición scs de $\mathbf{C}$ y $\mathfrak{D}$ es homeomorfo a $[0, 1]$.

Demostración. Sea $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función "*escalera*" de Cantor, dada por:

Para cada $x \in [0, 1]$, sea $0.\alpha_1\alpha_2...$ su expansión ternaria; es decir, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}$, donde $\alpha_i = 0, 1$ o 2. Sea $N = N(x) \in \mathbb{N}$ el primer indice para el cual $\alpha_N = 1$ (Si no hay tal N, sea $N = \infty$). Definimos $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como sigue:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^N} \text{ con } \beta_i = \frac{\alpha_i}{2}$$

Se puede demostrar que ψ es continua. Por lo tanto, $\psi|_{\mathbf{C}}$ es continua con $\psi(0) = 0$ y $\psi(1) = 1$. Además, $\psi|_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow [0, 1]$ es suprayectiva ya que $\psi(a_i) = \psi(b_i)$ con $i \in \{1, 2, ...\}$ y si $t, s \in \mathbf{C} \setminus \cup_{i=1}^{\infty}\{a_i, b_i\}$, entonces $\psi(t) \neq \psi(s)$. Recordando la demostración de 1.33, tenemos que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\psi}$ es una descomposición scs y que $\mathfrak{D}_{\psi}$ es homeomorfo a $[0, 1]$. $\square$

CAPÍTULO 4

El Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Durante la segunda mitad del siglo XIX, una curva era entendida, frecuentemente, como la trayectoria de un punto que se mueve de manera continua. Tal definición fue planteada por C. Jordan en 1887, en su libro *Cours d'Analyse*, vol. III, de manera que el término *"Curva de Jordan"*(véase [10]) denotaba a cualquier subconjunto del plano o de un espacio que fuera la imagen continua de un intervalo cerrado.

1. Espacios y continuos de Peano

Como ya hemos visto, todo espacio métrico compacto es una imagen continua del conjunto de Cantor y, en consecuencia, obtuvimos la caracterización de los conjuntos homeomorfos al conjunto de Cantor. En este capítulo, carac-terizaremos por completo a los espacios que son una imagen continua del intervalo $[0, 1]$ (4.18). En el capítulo 3, en las aplicaciones 3.3,3.4 y 3.5, vimos ya algunos ejemplos de estos espacios.

Definición 4.1. Se dice que un espacio topológico (Y, Γ), es un *espacio de Peano* si siempre que $p \in X$ y U sea una vecindad de p, exista un conexo y abierto C, tal que $p \in C \subset U$. Para espacios métricos, se dice (X, d) es un espacio de Peano, si para cada $p \in X$ y $\epsilon > 0$, existe una vecindad conexa de p con diámetro menor a ϵ. Un continuo es de Peano si como espacio es de Peano. A estos espacios también se les conoce como espacios localemnete conexos(1.41).

Definición 4.2. Sea (X, d) espacio métrico. Se dice que un subconjunto Y de X tiene la *propiedad* S, si para cada $\epsilon > 0$, existe un número finito de subconjuntos no vacíos y conexos $A_1, A_2, .., A_n$ tales que:

$$Y = \cup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{y diám}(A_i) < \epsilon \text{ para cada } i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Veremos en los siguientes teoremas, que para espacios métricos compactos, la propiedad S y el ser de Peano son equivalentes.

Cabe notar que la propiedad S no es una propiedad topólogica, es decir, existen espacios métricos homeomorfos X y Y tales que X tiene la propiedad S y, sin embargo Y no la tiene. Por ejemplo, es el caso de los espacios: $X = (0, 1)$ y $Y = \mathbb{R}$, con la métrica usual.

Teorema 4.3. Sea (X, d) un espacio métrico que satisface la propiedad S. Entonces X, es un espacio de Peano.

Demostración. Sólo es necesario que se cumpla algún enunciado de 1.42. Veamos que cumple el tercero.

Sean $p \in X$, y U un abierto. Entonces existe $\epsilon > 0$, tal que $B(\epsilon, p) \subset U$. Como X tiene la propiedad S, para $\frac{\epsilon}{3}$ existe una cubierta de X de conexos no vacíos $A_1, A_2, ..., A_n$ con diámetro menor que $\frac{\epsilon}{3}$. Sea $G = \cup\{A_i : p \in \overline{A_i}\}$, veamos cumple las siguientes propiedades:

1) G es conexo. Supongamos que $G = E|F$ para E y F abiertos de X. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \in E$. Sea A_j un elemento de la cubierta de X tal que $A_j \subset G$. Por definición, $p \in \overline{A_j}$ y como $\overline{A_j}$ es conexo, $\overline{A_j} \subset E$. Por lo tanto, $G \subset E$ y $F = \emptyset$. Es decir, G es conexo.

2) $diam(G) < \epsilon$. Sean $x, y \in G$. Entonces existen A_{i_1} y A_{i_2} tales que $x \in A_{i_1}$, $y \in A_{i_2}$ y $p \in \overline{A_{i_j}}$ con $j \in \{1, 2\}$. De modo que $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$.

3) $p \notin \overline{X \setminus G}$. Claramente, $X \setminus G \subset \cup_{p \notin \overline{A_n}} A_n$. Entonces $\overline{X \setminus G} \subset \overline{\cup_{p \notin \overline{A_n}} A_n}$ y, además, $\overline{\cup_{p \notin \overline{A_n}} A_n} \subset \cup_{p \notin \overline{A_n}} \overline{A_n}$, pues los A_n son un número finito de conjuntos. De modo que $\cup_{p \notin \overline{A_n}} \overline{A_n}$ es un conjunto cerrado. Como $p \notin \cup_{p \notin \overline{A_n}} \overline{A_n}$, $p \notin \overline{X \setminus G}$.

Resumiendo, obtuvimos que $p \in X \setminus (\overline{X \setminus G}) = int(G) \subset G \subset B_\epsilon(p) \subset U$. Por lo tanto, X es un espacio de Peano. $\square$

La condición de que el espacio sea de Peano no es suficiente para garantizar que tenga la propiedad S. Ejemplos de esto son $(\mathbb{R}, d_{usual})$ y $(\mathbb{R}, d')$ con d' la métrica discreta. El siguiente teorema fue demostrado por primera vez en 1920 por Waclaw Sierpiński (véase [4]).

Teorema 4.4. Un espacio métrico, compacto, no vacío (X, d) es un espacio de Peano si y sólo si (X, d) satisface la propiedad S. En particular, un espacio métrico conexo (X, d) es un continuo de Peano si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, X se puede escribir como la unión finita de subcontinuos con diámetro menor que ϵ.

Demostración. Si X satisface la propiedad S, por 4.3, X es un espacio de peano.

Demostremos entonces que, para cada $\epsilon > 0$, X se puede ver como la unión finita de conexos con diámetro menor que ϵ.

Sea $\epsilon > 0$. Para cada $y \in X$, existe un abierto y conexo U tal que $y \in U_y \subset B(\frac{\epsilon}{2}, y)$, asi diám$(U_y) < \epsilon$. Tomemos para X, la cubierta abierta formada por estos conjuntos $\{U_y : y \in X\}$. Por la compacidad de X, $U_{y_1}, U_{y_2}, ..., U_{y_n}$ que cubren a X, donde cada U_{y_i} es conexo y diámU_{y_i} es menor a ϵ, para $i \in \{1, ..., n\}$.

Para la segunda parte del teorema tomamos simplemente la cerradura de estos conjuntos; e inversamente, notemos que para la definición de que un espacio tenga la propiedad S, no es necesario que los conjuntos conexos que se piden, sean cerrados. Por lo que la demostración de una de las implicaciones es realmente el teorema 4.3. $\square$

En la segunda parte del Teorema 4.4, los subcontinuos que forman la cubierta de X, pueden no ser de Peano. Sin embargo, este "problema" puede arreglarse, como lo veremos en la Proposición 4.7.

Proposición 4.5. Sean (X, d) espacio métrico, $Y \subset X$ con la propiedad S y $Y \subset Z \subset \overline{Y}$. Entonces, Z tiene la propiedad S. Por tanto, Z es un espacio de Peano.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como Y tiene la propiedad S, $Y = \cup_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i es conexo, no vacío y diám$(A_i) < \epsilon$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Definimos $B_i = \overline{A_i} \cap Z$. Entonces:

1) B_i es conexo para $i \in \{1, ..., n\}$. Como $A_i \subset B_i \subset \overline{A_i}$, y A_i es conexo, no vacío para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

2) diám$(B_i) < \epsilon$. Ya que $A_i \subset B_i \subset \overline{A_i}$, diám$(A_i) \leq$ diám $(B_i) \leq$diám$(\overline{A_i})$. Y diám$(A_i) =$ diám$\left(\overline{A_i}\right)$.

3) $Z = \cup_{i=1}^{n} B_i$. Como $Z \subset \overline{Y}$ y $\overline{Y} \subset \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, obtenemos que:

$$Z = Z \cap \left[\cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right] = \cup_{i=1}^{n} \left[Z \cap \overline{A_i}\right] = \cup_{i=1}^{n} B_i.$$

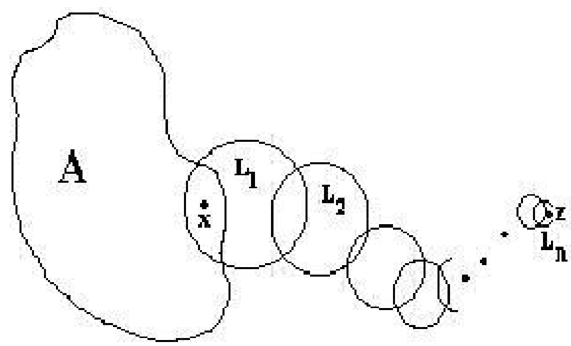
Por lo tanto, Z tiene la propiedad S. $\square$

Definición 4.6. Sean (X, d) espacio métrico y $\epsilon > 0$. Una $S(\epsilon)$-*cadena* es una colección $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ de conjuntos no vacíos, tales que las siguientes condiciones se cumplen:

1) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$;
2) L_i es conexo para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$;
3) $diam(L_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Si $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ es una $S(\epsilon)$-cadena, llamaremos a cada L_i un *eslabón* de $\mathcal{L}$. Si $x \in L_1$ y $z \in L_n$, decimos que $\mathcal{L}$ es una $S(\epsilon)$-cadena de x a z. Para $A \subset X$, se define al conjunto $S(A, \epsilon)$ como sigue ($figura$ 7):

$S(A, \epsilon) = \{x \in X$:existe una $S(\epsilon)$-cadena de un punto de A a $x\}$



$figura$ 7

En espacios con la propiedad S, los conjuntos $S(A, \epsilon)$ nos permitirán construir conjuntos tan pequeños como queramos con la propiedad S.

Proposición 4.7. Sea (X, d) espacio métrico con la propiedad S. Entonces para todo $A \subset X$ no vacío y $\epsilon > 0$, el conjunto $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S.

Demostración. Sean $A \subset X$ no vacío y $\epsilon, \delta > 0$, fijos. Nuestro objetivo será, escribir $S(A, \epsilon) = \cup_{i=1}^{n} B_i$ donde B_i son no vacíos, conexos y diám$(B_i) < \delta$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

1) $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}$

Definamos el siguiente conjunto K como:

$K = \{x \in X$: existe una $S(\epsilon)$-cadena de x a algún punto de A, con a lo más k eslabones$\}$.

Como X tiene la propiedad S, existen conjuntos conexos, no vacíos $A_1, ...,$ A_m, con diámetro menor que $\frac{\epsilon}{2^{k+1}}$, que cubren a X. Sean $E_1, E_2, ..., E_n$ los conjuntos de la cubierta para los cuáles $E_i \cap K \neq \emptyset$.

Para estos conjuntos E_i, los siguientes enunciados se cumplen:

2) $K \subset \cup_{i=1}^{n} E_i$. Por construcción.

3) $E_i \cap K \neq \emptyset$ para cada i. Por construcción.

4) E_i es conexo para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por construcción.

5) diám$(E_i) < \frac{\delta}{4}$. Por construcción.

6) $E_i \subset S(A, \epsilon)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Fijemos $1 \leq i \leq n$ y sea $y \in E_i$. Por 3) existe $x \in E_i \cap K$. Entonces existe una $S(\epsilon)$-cadena $\{L_1, L_2, ..., L_t\}$, con $t \leq k$, que une un punto de A con x. Veamos que $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_{t,} L_{t+1} = E_i\}$ es una $S(\epsilon)$-cadena. Se debe cumplir que:

7) $L_j \cap L_{j+1} \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq t$. Por construcción $L_j \cap L_{j+1} \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq t-1$ y, claramente, $x \in L_t \cap L_{t+1}$.

8) L_j es conexo para $1 \leq j \leq t+1$. Por construcción, L_j es conexo para $1 \leq j \leq t$ y como $E_i = L_{t+1}$, por 4), L_{t+1} es conexo.

9) diám$(L_j) < \frac{\epsilon}{2^j}$ para $1 \leq j \leq t+1$. Por construcción, diám$(L_j) < \frac{\epsilon}{2^j}$ para $1 \leq j \leq t$, diám(L_{t+1}) =diám(E_i). Por otro lado, diám$(E_i) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ y $\frac{\epsilon}{2^{k+1}} \leq \frac{\epsilon}{2^{t+1}}$, ya que $t \leq k$. Por lo tanto, $y \in S(A, \epsilon)$.

De 6) podemos ver que estos E_i pudieran no ser suficientes para cubrir a $S(A, \epsilon)$, es por esto que definimos, para cada $i \in \{1, 2, ..., n, \}$ el conjunto $\wp_i$ como sigue:

$$\wp_i = \{M \subset X : a) M \subset S(A, \epsilon);\ b)\ M \cap E_i \neq \emptyset;\ c)\ M \text{ es conexo; } d) \text{ díam}(M) < \tfrac{\delta}{4}\}$$

Ahora, definimos $B_i = \cup \wp_i$ ($\wp_i \neq \emptyset$ pues $E_i \in \wp_i$). Sea $1 \leq i \leq n$ fijo. Cada B_i cumple las siguientes propiedades:

10) B_i es conexo para $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como E_i es conexo, por definición de $\wp_i$ y por 1.36, $B_i = [\cup_{M \in \wp_i} M] \cup E_i$ es conexo.

11) diám$(B_i) < \delta$. Sean $p, q \in B_i$. Entonces $p \in M$ y $q \in M'$, con $M, M' \in \wp_i$. Por definición de $\wp_i$, existe $x \in M \cap E_i$ y $z \in M' \cap E_i$. Asi:

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, y) + d(y, q) \leq \text{diám}(M) + \text{diám}(E_i) + \text{diám}(M') < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta$$

Resta verificar que $S(A, \epsilon) = \cup_{i=1}^{n} B_i$. Por construcción, $\cup_{i=1}^{n} B_i \subset S(A, \epsilon)$.

Demostremos que $S(A, \epsilon) \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$. Primero, observemos que $K \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$, pues $K \subset \cup_{i=1}^{n} E_i$ y $\cup_{i=1}^{n} E_i \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$. Sea $y \in S(A, \epsilon)$, si $y \in K$, tenemos el resultado. Supongamos que $y \notin K$. Como $y \in S(A, \epsilon)$, existe una $S(\epsilon)$-cadena $\{L_1, L_2, ..., L_m\}$ de un punto de A a y. Ya que $y \notin K$, entonces $m > k$.

Sea $H = \cup_{i=k}^{m} L_i$. Mostremos que H está $\wp_j$ para algún j.

13) $H \subset S(A, \epsilon)$. Esto se debe a que $\{L_1, L_2, ..., L_m\}$ es una $S(\epsilon)$-cadena.

14) $H \cap E_j \neq \emptyset$ para algún j. Por la definición de K, $L_k \subset K$. Por 2), existe j tal que $L_k \cap E_j \neq \emptyset$ y, por tanto, $H \cap E_j \neq \emptyset$.

15) H es conexo. Al igual que en 13), $\{L_1, L_2, ..., L_m\}$ es una $S(\epsilon)$-cadena.

16) $diam(H) < \frac{\delta}{4}$. Por definición $H = \cup_{i=k}^{m} L_i$, entonces

$$\text{diám}(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \text{diám}(L_i) < \sum_{i=k}^{m} \frac{\epsilon}{2^i} < \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \frac{\delta}{4}.$$

Asi, $H \in \wp_j$. Por lo tanto, $H \subset B_j \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$, con $y \in H$, es decir, $S(A, \epsilon) \subset \cup_{i=1}^{n} B_i$. $\square$

Lema 4.8. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ no vacío y $\epsilon > 0$. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados:

1) $\text{diám}(S(A, \epsilon)) \leq \text{diám}(A) + 2\epsilon$;
2) Si A es conexo, entonces $S(A, \epsilon)$ es conexo;
3) Si (X, d) tiene la propiedad S, entonces $S(A, \epsilon)$ es un abierto de X.

Demostración. 1) Sean $p, q \in S(A, \epsilon)$, $\{L_1, L_2, ..., L_m\}$ y $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$, $S(\epsilon)$-cadenas de p a x y de q a z respectivamente, con $x, z \in A$. Entonces:
$d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, z) + d(z, q) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{diám}(L_i) + \text{diám}(A) + \sum_{i=1}^{n} \text{diám}(H_i)$
$\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} + \text{diám}(A) = 2\epsilon + \text{diám}(A)$.

2) Sea A conexo. Como $S(A, \epsilon)$ es la unión de todas las $S(\epsilon)$-cadenas, y cada una de éstas es conexa y, como la intersección de cada $S(\epsilon)$-cadena con A es no vacía, entonces por 1.36, $S(A, \epsilon)$ es conexa.

3) Sea $y \in S(A, \epsilon)$, entonces existe una $S(\epsilon)$-cadena $\{L_1, L_2, ..., L_m\}$ que une un punto de A con y. Como (X, d) tiene la propiedad S, entonces, por 4.3, existe un abierto conexo U tal que $y \in U$ y $\text{diám}(U) < \frac{\epsilon}{2^{m+1}}$. Este U, es precisamente el abierto que hace que $y \in U$ y $U \subset S(A, \epsilon)$. Sea $x \in U$. Definimos $\{L_1, L_2, ..., L_m, L_{m+1} = U\}$ como la $S(\epsilon)$-cadena que une un punto de A con x. $\square$

Teorema 4.9. Si un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad S, entonces para cada $\epsilon > 0$, X puede escribirse como la unión finita de conjuntos conexos con la propiedad S, y con diámetro menor a ϵ; más aún, éstos pueden ser elegidos abiertos o cerrados en X.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fija. Como X tiene la propiedad S, X puede escribirse como la unión finita de conjuntos conexos, no vacíos, $A_1, A_2, ..., A_n$ tales que diám$(A_i) < \frac{\epsilon}{3}$. Por 4.7 y por 4.8, $S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$ es un conexo, abierto, diám$(S(A_i, \frac{\epsilon}{3})) < \epsilon$ y con la propiedad S para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Obviamente, estos conjuntos siguen siendo una cubierta de X. Si queremos que los conjuntos sean cerrados, simplemente tomamos la cerradura de estos conjuntos y utilizamos 4.5. $\square$

Teorema 4.10. Si (X, d) es un continuo de Peano, entonces para toda $\epsilon > 0$, X puede escribirse como la unión finita de continuos de Peano con diámetro menor que ϵ.

Demostración. Sea (X, d) es un continuo de Peano. Por 4.4, (X, d) tiene la propiedad S. Por 4.9, X se puede cubrir con un número finito de continuos con la propiedad S y con diámetro menor que ϵ. Nuevamente, por 4.4 cada uno de estos continuos son de Peano. $\square$

2. El teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Para demostrar el teorema de Hahn-Mazurkiewicz, sólo requerimos de 4.10 y de dos resultados muy sencillos.

Definición 4.11. Sea (X, Γ) un espacio topológico. Una *cadena débil* es una colección $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ de conjuntos no vacíos tales que cumplen la siguiente condición:

$$L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, 2, ..., n-1\}$$

Sea $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ es una cadena débil. Decimos que $\mathcal{L}$ es una cadena débil de L_1 a L_n. Si $p \in L_1$ y $q \in L_n$, decimos que $\mathcal{L}$ es una cadena débil de p a q. A cada L_i le llamaremos un *eslabón* de $\mathcal{L}$.

Lema 4.12. Sean (X, Γ) un espacio topológico y $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, ..., L_m\}$ y $\Im = \{F_1, F_2, ..., F_n\}$ cadenas débiles en X, tales que $L_1 = F_1$. Entonces existe una cadena débil $\wp$ de L_1 a F_n y tal que $\wp = \mathcal{L} \cup \Im$.

Demostración. Cabe hacer notar que, para la definición de cadena débil, no requerimos que los eslabones sean todos distintos. Definimos la cadena débil $\wp = \{P_1, P_2, ..., P_{2m+n}\}$ que tiene por eslabones a $P_i = L_i$ para $1 \leq i \leq$

m, $P_{m+i} = L_{m-(i-1)}$ para $1 \leq i \leq m$, y $P_{2m+i} = F_i$ para $1 \leq i \leq n$. Esta cadena claramente cumple con lo deseado. $\square$

Lema 4.13. Sean (S, Γ) espacio topológico conexo, $p, q \in S$ y $\mathcal{L}$ una familia finita de conjuntos cerrados que forman una cubierta de S. Entonces $\mathcal{L}$ se puede numerar de tal forma que sea una cadena débil de p a q.

Demostración. Como $S = \cup\, \mathcal{L}$, entonces existe $L_1 \in \mathcal{L}$ tal que $p \in L_1$. Definimos $\mathcal{L}_0 = \{L \in \mathcal{L}$: existe una cadena débil de L_1 a C y cuyos eslabones están en $\mathcal{L}\}$. Nuestro objetivo será ver que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$.

Definamos $A = \cup\, \mathcal{L}_0$ y $B = \cup\, (\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0)$. Es fácil observar, de la definición, que estos conjuntos son ajenos. Como $\mathcal{L}$ se trata de una familia finita de cerrados, entonces tanto A como B son cerrados. Por la conexidad de S, obtenemos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Pero $p \in L_1 \in \mathcal{L}_0$, entonces $B = \emptyset$. Por lo tanto, $\cup\, \mathcal{L}_0 = S$; es decir, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. Ya una vez teniendo esto, tomamos $L' \in \mathcal{L}$ tal que $q \in L'$. Entonces, ya que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$, existe una cadena débil $\wp$ de L_1 a L'. Si $\cup\, \wp = S$ concluimos. Si no se da la igualdad, entonces existe $L_2 \in \mathcal{L}$ con $L_2 \notin \wp$, como $\cup\, \mathcal{L}_0 = S$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ existe una cadena débil de L_1 a L_2. Por 4.12, obtenemos una nueva cadena que contiene más elementos de $\mathcal{L}$ y, como esta familia es finita, este proceso termina hasta tener una cadena débil $\Re$ de p a q que contiene todos los elementos de $\mathcal{L}$ y, por lo tanto, $\cup\, \Re = S$. $\square$

Teniendo en cuenta el antecedente histórico dado al inicio de este capítulo y las aplicaciónes 3.3 y 3.4, la situación fue clarificada por H. Hahn(véase [6]) y S. Mazurkiewicz(véase [11]), quienes obtuvieron, independientemente, la caracterización de la conexidad local. Además, las primeras ideas sobre este concepto fueron tratadas por ellos mismos. Tal resultado, es el siguiente teorema.

Teorema 4.14 (**Teorema de Hahn-Mazurkiewicz**). Sea (X, d) un continuo de Peano. Entonces X es una imagen continua del intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Este resultado se basa prinicipalmente en 4.10, 4.13 y 2.14.

Sean $\epsilon = 1$ y $p, q \in X$. Por 4.10, existe una familia de continuos de Peano $\mathcal{L} = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$, cada uno con diámetro menor que 1 y que cubren a X. Por 4.13, $\mathcal{L}$ se puede numerar como una cadena débil $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de p a q donde $A_i = B_k$ para algún $1 \leq k \leq m$ y para cada $1 \leq i \leq n$. Tomemos un subconjunto de elementos $\{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ de $[0, 1]$ tal que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$.

Definimos $F_1 : [0,1] \to 2^X$ de la manera siguiente:

$$F_1(t) = \begin{cases} A_i, & \text{si } t \in (t_{i-1}, t_i) \text{ con } 1 \leq i \leq n; \\ A_i \cup A_{i+1}, & \text{si } t = t_i \text{ con } 1 \leq i \leq n-1; \\ A_1, & \text{si } t = 0; \\ A_n, & \text{si } t = 1; \end{cases}$$

Demostremos que:

1) F_1 es scs. Sea U un abierto de X tal que $F_1(t) \subset U$, para algún $t \in [0,1]$. Hagamos dos casos:

Caso 1.1. $t \in (t_{i-1}, t_i)$ para algún $1 \leq i \leq n$, tenemos, por definición, que $F_1(x) = F_1(t)$ para cada $x \in (t_{i-1}, t_i)$. De modo que (t_{i-1}, t_i) es un abierto que necesitamos en $[0,1]$ y que cumple la definición.

Caso 1.2. Si $t = t_i$ con $1 \leq i \leq n-1$, $F_1(t) = A_i \cup A_{i+1}$. Para $x \in (t_{i-1}, t_{i+1})$, los posibles valores de $F_1(x)$ son A_i o $A_i \cup A_{i+1}$ o A_{i+1}, de manera que, para cualquier caso, $F_1(x) \subset F_1(t) \subset U$. Los casos $t = 0$ y $t = 1$, se hacen de forma semejante, por lo que sólo veremos el caso $t = 0$. Sea $x \in [0, t_1)$. Entonces, por definición de $F_1(x) = F_1(0)$ para cualquier $x \in [0, t_1)$ y como $F_1(t) \subset U$. Entonces $F_1(x) \subset U$ para cualquier $x \in [0, t_1)$. De donde, el abierto $[0, t_1)$ funciona para que F_1 sea scs en $t = 0$.

2) $\cup_{t \in [0,1]} F_1(t) = X$. Por definición, para cada A_i, existe $t \in [0,1]$ tal que $F_1(t) = A_i$ y los A_i forman una cubierta de X.

Ya que los elementos A_i, forman una cadena débil de conjuntos, elegimos $p_1 \in A_1$ y $p_i \in A_{i-1} \cap A_i$ con $1 \leq i \leq n$.

Sea $\epsilon = \frac{1}{2}$. Por 4.10 y por 4.13 para cada A_i, obtenemos una cadena débil $\{A_{i,1}, A_{i,2}, ..., A_{i,m(i)}\}$ de p_i a p_{i+1}, donde cada $A_{i,j}$ es un continuo de Peano y todos ellos forman una cubierta de A_i con diámetro menor que $\frac{1}{2}$. Para cada $m(i)$, tomamos un subconjunto de elementos $\{t_{i,0}, t_{i,1}, t_{i,2}, ..., t_{i,m(i)}\}$ de $[t_i, t_{i+1}]$, tales que $t_i = t_{i,0} < t_{i,1} < t_{i,2} < ... < t_{i,m(i)-1} < t_{i,m(i)} = t_{i+1}$.

Definimos $F_2 : [0,1] \to 2^X$ como:

$$F_2(t) = \begin{cases} A_{i,j}, & \text{si } t \in (t_{ij}, t_{i,j+1}); \\ A_{i,j} \cup A_{i,j+1}, & \text{si } t = t_{i,j} \text{ con } 1 < j < m(i); \\ A_{i,m(i)} \cup A_{i+1,1}, & \text{si } t = t_{0,i} \text{ con } 2 \leq i \leq n; \\ A_{1,1}, & \text{si } t = 0; \\ A_{n,m(n)}, & \text{si } t = 1; \end{cases}$$

Siguiendo un razonamiento parecido al que hicimos previamente con F_1, podemos ver que:

3) F_2 es scs;

4) $\cup_{t\in[0,1]}F_2(t) = [0, 1]$.

Además, $F_2(t) \subset F_1(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Esta última propiedad, se sigue por la construcción y por la definición de $F_2(t)$.

Continuando por este proceso, definimos una familia de funciones $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cumplen las condiciones de 2.14. Por lo tanto, existe una función continua y suprayectiva del $[0, 1]$ en X. $\square$

Lema 4.15. Sean S_1 y S_2 espacios topológicos, $f : S_1 \to S_2$ una función continua y suprayectiva y C una componente de S_2. Entonces $f^{-1}(C)$ es la unión de algunas componentes de S_1.

Demostración. Este resultado se sigue de la igualdad:

$f^{-1}(C) = \cup\{K : K$ es una componente de S_1 tal que $K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset\}$

Obviamente, $f^{-1}(C) \subset \cup\{K : K$ es una componente de S_1 tal que $K \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset\}$, pues todo elemento de S_1 está en alguna componente. La otra contención la obtenemos de 1.36, 1.43 y teniendo en cuenta siempre que C es una componente de S_2. $\square$

Proposición 4.16. Sean (X, d), (Y, D) espacios métricos, con X un continuo de Peano y $f : X \to Y$ continua y suprayectiva. Entonces, Y es un continuo de Peano.

Demostración. Como la continuidad preserva compacidad (1.13) y conexidad (1.43), sólo es necesario verificar que Y cumpla con la definición de espacio de Peano. Veamos que 2) de 1.42, se satisface.

Sea C una componente de un abierto U de Y. Por 4.15, $f^{-1}(C)$ es la unión de algunas componentes de $f^{-1}(U)$, por la continuidad de f, $f^{-1}(U)$ es un abierto de X. Como X es localmente conexo, satisface 2) de 1.42, entonces para toda componente K de $f^{-1}(U)$, se tiene que K es un abierto de X; es decir, $f^{-1}(C)$ es un abierto de X. Entonces $X \setminus f^{-1}(C)$ es un cerrado. Por 1.13, $f(X \setminus f^{-1}(C))$ es cerrado. Por otro lado, $f(X \setminus f^{-1}(C)) = Y \setminus C$ pues f es suprayectiva; asi que, $Y \setminus C$ es un cerrado. Tomando el complemento, se tiene el resultado. $\square$

Corolario 4.17. Sean (X, d) continuo de Peano, (Y, Γ) espacio topológico Hausdorff y $f : X \to Y$ continua y suprayectiva. Entonces Y es un continuo de Peano.

Demostración. Por 1.25, Y es métrico. Por 4.16, obtenemos que Y es un continuo de Peano. $\square$

Teorema 4.18. Sea (X, Γ) espacio topológico Hausdorff. Entonces X es un continuo de Peano si y sólo si X es una imagen continua del intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Si X es un continuo de Peano, por 4.14, X es una imagen continua de $[0, 1]$. Inversamente, si X es una imagen continua del intervalo $[0, 1]$, por 1.25, X es métrico y por 4.16, X es un continuo de Peano. $\square$

Teorema 4.19. Sean X y Y son continuos de Peano. Entonces, para cualesquiera n puntos $y_1, y_2, ..., y_n \in Y$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, existe una función continua y suprayectiva $F : X \to Y$ tal que $F(x_i) = y_i$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración. Sea $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset Y$. Por 4.14, existe una función continua y suprayectiva $f : [0, 1] \to Y$. Sean $\{t_1, t_2, ..., t_n\} \subset [0, 1]$ tal que $f(t_i) = y_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Tomemos $p, q \in X \setminus \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ con $p \neq q$.

Definimos $h : \{p, q, x_1, x_2, ..., x_n\} \to [0, 1]$ como $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = p; \\ 1, & \text{si } x = q; \\ t_i, & \text{si } x = x_i; \end{cases}$
Por 1.7, existe $H : X \to [0, 1]$ continua tal que $H|_{\{p,q,x_1,x_2,...,x_n\}} = h$. Dado que X es conexo, $H(p) = 0$ y $H(q) = 1$, se obtiene que $H(X) = [0, 1]$, es decir H es suprayectiva. Si definimos la función $F = f \circ H : X \to Y$, claramente cumple con lo deseado. $\square$

Corolario 4.20. Sean X y Y espacios compactos, con X un continuo de Peano. Entonces Y es un continuo de Peano si y sólo si Y es una descomposición scs de X.

Demostración. Sea Y continuo de Peano. Por 4.19, existe una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$. Por 1.33, Y es homeomorfo a $\mathfrak{D}_f$ donde $\mathfrak{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ es una descomposición scs de X.

Inversamente. Si Y es una descomposición scs de X. Por 1.24, la proyección natural $\pi : X \to Y$ de X sobre Y es continua y suprayectiva. De manera que, por 4.17, Y es un continuo de Peano. $\square$

Bibliografía

[1] Alexandroff, P.S., Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Ann., 96, 555-571, 1927.

[2] Diederich Hinrichsen, Topología General, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[3] Dugundji James, Topology, Allyn and Bacon Inc, Boston, 1976

[4] Fort M. K., Jr., One to one mappings onto the Cantor set, J. of the Indian Math. Soc., 25(1961), 103-107.

[5] García Uribe M. L., Teoremas Clásicos de Metrización, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM 2008.

[6] Hahn, H., Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurven, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, 123, 2433-2487, 1914.

[7] Hans Sagan, Space-Filling Curves, Springer-Verlag 1994. ISBN 0387942653.

[8] Hausdorff, F., Mengenlehre, zweite, neubearbeitete Auflage, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin,1927.

[9] Hilbert, D. Über die stetige Abbildung einer linie auf ein flächenstück, Math. Ann. 38(1891), págs. 459-460.

[10] Jordan C., Cours d' Analyse, Vol.III, 1887.

[11] Mazurkiewicz, S., Travaux de Topologie et ses Applications, PWN, Warszawa 1969.

[12] Nadler B., S. Jr, Continuum Theory: An Introduction, West Virginia University, Marcel Dekker, Inc. 1992.

[13] Peano G. , Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Math. Ann 36 (1890), 157-160.

[14] S. Willard, General Topology, Dover Publ. Inc, 2004.

[15] Sierpinsky W., Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jourdanienne, Fund. Math., 1(1920), págs. 44-60.

[16] Platzman,Loren K., Space filling and the planar traveling salesman problem, Journal of the Asociation of computing Machinery, 36(4), págs. 719-737.