



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

# SOBRE UNA CONJETURA DE HADWIGER

TESIS

que para obtener el título de:

MATEMÁTICA

presenta:

MARTHA ENRIQUETA PEÑA HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS



Octubre de 2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Al amor de mi vida:*

*mi hija Marla*

## Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
  - Apellido paterno: Peña
  - Apellido materno: Hernández
  - Nombre(s): Martha Enriqueta
  - Teléfono: 57 50 33 72
  - Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
  - Facultad: Facultad de Ciencias
  - Carrera: Matemáticas
  - Número de cuenta: 4-0111632-0
2. Datos del tutor
  - Grado: Dr.
  - Nombre(s): Juan José
  - Apellido paterno: Montellano
  - Apellido materno: Ballesteros
3. Datos del sinodal 1
  - Grado: Dr.
  - Nombre(s): Javier
  - Apellido paterno: Bracho
  - Apellido materno: Carpizo
4. Datos del sinodal 2
  - Grado: Dr.
  - Nombre(s): Hugo Alberto
  - Apellido paterno: Rincón
  - Apellido materno: Mejía
5. Datos del sinodal 3
  - Grado: Mat.
  - Nombre(s): Laura
  - Apellido paterno: Pastrana
  - Apellido materno: Ramírez
6. Datos del sinodal 4
  - Grado: Dr.
  - Nombre(s): Ricardo
  - Apellido paterno: Strausz
  - Apellido materno: Santiago

# Agradecimientos

Cerrar un ciclo siempre despierta una enorme cantidad de sentimientos; la mayoría de las veces encontrados y contradictorios. La culminación de este trabajo, es en muchos sentidos, el fin de un ciclo y el inicio de una nueva etapa de mi vida.

Para que este ciclo pudiera concluir de manera exitosa, fue necesario que muchas personas me apoyaran, me presionaran y me demostraran todo su afecto y su amor. Agradecerle a todos su esfuerzo y su dedicación es prácticamente imposible; sin embargo, con el riesgo de dejar el nombre de muchos de ellos en el tintero, quiero hacer patente mi agradecimiento a:

Mi tutor por su infinita paciencia y la gran dulzura de su trato. Gracias a su enorme dedicación pudimos poner el punto final de esta tesis.

A mis sinodales, porque cada uno de ellos representa un modelo a seguir en distintas áreas de las matemáticas y de la vida.

Entre los miembros de mi familia, la de sangre y la afectiva, debo destacar el apoyo y cariño que siempre me brindó mi padre; a mi madre, porque a pesar de las dificultades que genera el trato continuo y las diferencias de visión hacia la vida, siempre ha encontrado la manera de apoyarme, de poner la mano en la herida para que deje de doler y pueda sanar (aunque eso implique un mayor dolor de momento). Por el inmenso amor a mi hija y, en realidad, por todo lo que debo decirle y no puedo. A mis otras mamás: mi abuela y mi tía, que con su inmeso amor y consejos me han cobijado a lo largo de mi vida. A mi papá matemático, César Rincón, el cual ha sido un ejemplo en toda la extensión de la palabra y que sin sus peculiares consejos mi camino sería más difícil y diferente.

Por otro lado, estas líneas estarían incompletas si no reconociera el valor que tuvieron en su momento, las compañías de: Rodrigo, Valente, Yanick, Leonid y Fer Silva por los grandes momentos que pasé con ellos; Hugo porque me demostró que cambios casi imposibles, con ganas y amor se logran; Carlos por su gran esfuerzo; y a Isaac, porque sin él las matemáticas tuvieron otro color.

Hay muchos tipos de amor, no sólo el romántico; está el que se siente hacia los hijos, los amigos, los hermanos, los padres, etc.; pero ¿qué es el amor? sino escuchar, aceptar y ayudar a quienes busquen una guía y/o una luz en su camino. En éste sentido la vida me ha dado la oportunidad de conocer al maestro Andrés Porta quién, en su tránsito por la vida, ha decidido repartirlo. Es solamente gracias a la paz interior que ha logrado y a la sabiduría que los años le han dado que puede hacerlo con tanto éxito. Gracias por sus consejos y por ayudar a que termine un hermoso capítulo en mi vida y, así mismo que, comience a escribir uno mejor.

Por supuesto que hay un agradecimiento especial, para todos aquellos que están en mi corazón, pero que tienen un papel anónimo en estas líneas.

He dejado para el final, mi enorme reconocimiento y mi más sincero agradecimiento, para una persona que por el sólo hecho de existir, nos demuestra que debemos seguir teniendo fé en la humanidad. A Nadia por su existencia y su invaluable compañía y porque sin ella, esta tesis jamás se hubiera concluido.

# Índice general

<b>1. Definiciones y Preliminares</b>	<b>3</b>
<b>2. Resultados Previos</b>	<b>12</b>
<b>3. Gráficas con número cromático 4, 5 ó 6</b>	<b>18</b>
3.1. Número Cromático 4 . . . . .	18
3.2. Número cromático 5 . . . . .	21
3.3. Número cromático 6 . . . . .	25
<b>4. Gráficas con número de independencia 2</b>	<b>27</b>
4.1. Gráficas Infladas . . . . .	39

# Introducción

En la actualidad, una de las más intrigantes conjeturas de la Teoría de Gráficas es la Conjetura de Hadwiger, la cual liga el número cromático de una gráfica  $G$  con el máximo orden de gráficas completas menores de  $G$ . Esto es: Si toda buena coloración de una gráfica  $G$  usa al menos  $n$  colores, entonces es posible encontrar  $n$  subgráficas, conexas disjuntas de  $G$ , tal que cada par de ellas está conectada por al menos una arista. En otras palabras:

Toda gráfica  $n$ -cromática tiene a  $K_n$  como menor.

En el caso  $n = 1$ , en realidad se está hablando de una gráfica sin aristas para lo cual, el enunciado es obvio; para el caso  $n = 2$ , también es muy fácil verlo, pues cualquier gráfica conexa no trivial tiene a  $K_2$  como subgráfica, en particular la tiene como menor. Para  $n = 3$ , sabemos que la gráfica no es un árbol, ya que si lo fuera sería 2-cromática, no 3-cromática, por lo que tiene al menos un ciclo y, por lo tanto, es muy fácil ver que se puede contraer a  $K_3$ .

El caso  $n = 4$  fue probado por el mismo Hadwiger y, al menos una década después, por Dirac. Para  $n = 5$  Wagner, muchos años antes de que Hadwiger enunciara su conjetura, probó que este enunciado es equivalente al teorema de los cuatro colores. En 1975 Appel y Haken, probaron el teorema de los cuatro colores, y así quedó demostrada la conjetura para  $n = 5$ . Robertson, Seymour y Thomas probaron que para  $n = 6$ , la conjetura es, otra vez, equivalente al teorema de los cuatro colores. Así, para  $n = 6$  también es cierta la conjetura. Este es el mayor número cromático para el cual la conjetura ha sido confirmada.

El problema también ha sido abordado desde otras prespectivas, entre las cuales se en-

cuentra considerar el número de independencia de la gráfica. Este punto de vista ha dado como resultado, entre otras cosas, la definición de familias infinitas de gráficas que cumplen la conjetura, así como una serie de propiedades que debe cumplir, si existiese un contraejemplo a la conjetura, cuyo número de independencia fuera dos.

El presente trabajo expone varios de los resultados mencionados, que están entre los más relevantes alrededor del tema de la conjetura y se organiza de forma que en:

El primer capítulo presenta las definiciones básicas necesarias para la obtención de los resultados. El capítulo dos se aboca a presentar los resultados necesarios para poder llevar a acabo las pruebas de los teoremas principales de la tesis. El capítulo tres, presenta las pruebas de la veracidad de la conjetura para las gráficas de número cromático menor o igual a cinco y se da un esbozo de la prueba para el caso en que el número cromático es seis. La prueba de este último caso se omite dada su extensión (el artículo original en que se presenta la prueba tiene ochenta páginas). Finalmente, el capítulo cuatro presenta diecinueve propiedades que debe cumplir un contraejemplo a la conjetura que tuviera número de independencia dos; a la vez que se definen familias infinitas de gráficas con número de independencia dos que cumplen la conjetura.

# Capítulo 1

## Definiciones y Preliminares

- En este trabajo, una *gráfica*  $G = (V(G), E(G))$  es una pareja de conjuntos finitos, donde a  $V(G)$  se le llama los *vértices* de la gráfica y  $E(G)$  es llamado las *aristas* de  $G$ . De este último conjunto, sus elementos son parejas no ordenadas de elementos distintos de  $V(G)$ ; si  $u$  y  $v$  son vértices de  $G$  y  $e = (u, v) = uv$  es una arista de  $G$  diremos que  $u$  y  $v$  son *adyacentes* y que la arista  $e$  *incide* en ellos.

- Si  $x$  es un vértice de  $G$ , al conjunto de los vértices de  $G$  adyacentes (o vecinos) a  $x$ , se le denota por  $\Gamma(x)$ .

- Si  $e = uv$  es una arista de  $G$ , entonces se dice que  $e$  *une*  $u$  con  $v$  y los vértices  $u$  y  $v$  son llamados *vértices finales* o *terminales* de  $e$ . Si  $e_1$  y  $e_2$  son dos aristas de  $G$ , tales que tienen un vértice terminal en común, se dice que son *aristas adyacentes*.

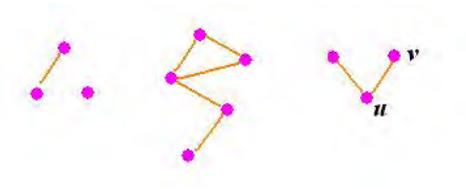


Figura 1.1:  $u$  es adyacente a  $v$ .

- Sea  $G$  una gráfica; el número de aristas incidentes en  $v \in V(G)$  es la *valencia* ó *grado* de  $v$  en  $G$ , y se denota por  $\delta(v)$ . El mínimo de todos los grados de los vértices de  $G$  es el grado

mínimo de la gráfica  $G$  y se denota por  $\delta(G)$ .

- Se dice que dos gráficas  $H$  y  $G$  son *isomorfas* ( $G \cong H$ ) si existe una biyección  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $uv \in E(G)$  si y sólo si  $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$ . A  $\theta$  se le llama isomorfismo de  $G$  a  $H$ .

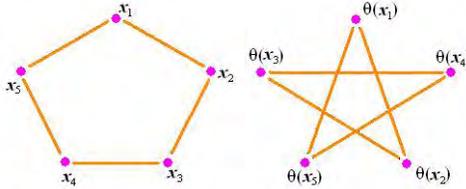


Figura 1.2: Gráficas isomorfas

- Una gráfica, en la cual cada par de vértices distintos están unidos por una arista es llamada una *gráfica completa*. A la gráfica completa con  $n$  vértices se le denota por  $K_n$

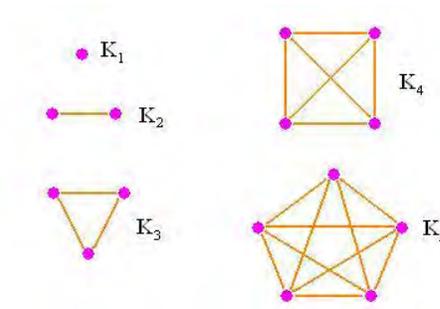


Figura 1.3: Gráficas completas

-El *complemento*  $\overline{G}$  de  $G$ , se define como la gráfica tal que  $V(\overline{G}) = V(G)$  y una arista está en  $\overline{G}$  si y sólo si no es una arista en  $G$ . En otras palabras, el complemento  $\overline{G}$  es lo que le falta a  $G$  para ser una gráfica completa.

- Una gráfica  $H$  es una *subgráfica* de  $G$  ( $H \subseteq G$ ) si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

- La subgráfica de  $G$  cuyo conjunto de vértices es  $H$  y cuyo conjunto de aristas es, el conjunto de aristas de  $G$  que tienen ambos vértices finales en  $H$ , es llamada *la subgráfica de  $G$  inducida por  $H$*  y se denota por  $G[H]$ .

- La gráfica  $G$  menos  $V' \subseteq V(G)$ , denotada por  $G - V'$ , es la subgráfica obtenida de  $G$  borrando los vértices en  $G$  de  $V'$  junto con sus aristas incidentes. Análogamente  $G$  menos

$E' \subseteq E(G)$ , denotado como  $G - E'$ , es la subgráfica de  $G$  obtenida borrando todas las aristas de  $E'$ . Denotaremos por  $G - e$  cuando hablemos de la subgráfica  $G - \{e\}$ ; y análogamente,  $G - v$  en lugar de  $G - \{v\}$ .

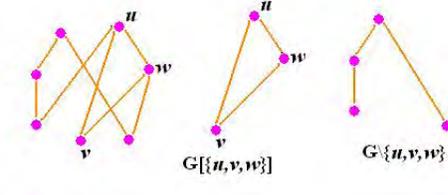


Figura 1.4: Gráficas restringidas a  $V$

- Una *camino en  $G$*  es una secuencia finita, no nula  $v_0e_1v_1...e_kv_k$ , cuyos términos son alternadamente vértices y aristas tales que para todo  $1 \leq i \leq k$ , los vértices terminales de  $e_i$  son  $v_{i-1}, v_i$ . Diremos que  $W = v_0e_1v_1...e_kv_k$  es un  $(v_0, v_k)$ -camino; por comodidad escribiremos a  $W = v_0, v_1, \dots, v_k$ , es decir, obviaremos las aristas  $e_i$ . A los vértices  $v_1, \dots, v_{n-1}$  se les llama *vértices internos*. El entero  $k$  es *la longitud del camino*.  $W$  se dice que es un *camino cerrado*, cuando  $v_0 = v_k$ .

- Una  $(v_0, v_k)$ -*trayectoria* es un  $(v_0, v_k)$ - camino tal que no repite vértices. Diremos que dos trayectorias son *disjuntas* cuando ningún vértice interno de una es vértice interno de la otra.

- Sea  $G$  una gráfica arbitraria. Por una 2-trayectoria  $P$  de  $G$ , entenderemos una subgráfica inducida de longitud dos en  $G$ .

- Un *ciclo* es un camino cerrado donde sus vértices internos son tales que  $v_i \neq v_j$  para todo  $i$  distinto de  $j$ . Si la longitud del ciclo es  $k$ , se dice que es un  $k$ -*ciclo*.

- Decimos que una gráfica es *conexa* si para cualesquiera dos vértices  $u, v$  de  $G$ ; existe una  $(u, v)$ -trayectoria en  $G$ . En otro caso, diremos que  $G$  es *disconexa*.

- Un *árbol* es una gráfica conexa tal que no contiene ciclos.

- Una *componente conexa* de una gráfica  $G$  es una subgráfica conexa maximal de  $G$ .

- Una familia de trayectorias en  $G$  se dice que son *internamente disjuntas*, si ningún vértice

de  $G$  es un vértice interno de más de una trayectoria de la familia.

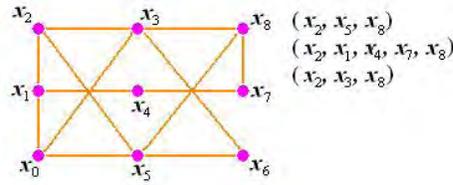


Figura 1.5: son 3  $(x_2, x_8)$ -trayectorias disjutas 2 a 2.

- Una trayectoria que contiene cada vértices de  $G$  es llamada *trayectoria Hamiltoniana*, análogamente, un *ciclo Hamiltoniano* de  $G$  es un ciclo que contiene todos los vértices de  $G$ .

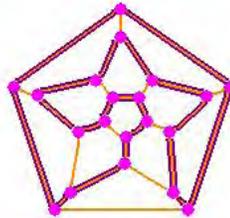


Figura 1.6: Ciclo Hamiltoniano

- Una arista  $e = xy$  en  $G$ , se dice que es una *arista dominante* si todo vértice de  $G$  es adyacente a al menos uno de los vértices terminales de  $e$ .

- Un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  es llamado *independiente* en  $G$ , si ningún par de vértices de  $S$  son adyacentes en  $G$ . Análogamente, un subconjunto  $R$  de  $E(G)$  es llamado independiente si ningún par de aristas de  $R$  son adyacentes en  $G$ .

- El número de vértices en un conjunto independiente máximo de  $G$  es llamado el *número de independencia de  $G$*  y es denotado por  $\alpha(G)$ .

-  $G$  es  $\alpha$ -crítica si para toda arista  $e$  de  $G$ ,  $\alpha(G - e) > \alpha(G)$ .

- El *clan* de una gráfica  $G$  es un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  tal que  $G[S]$  es completa. Claramente,  $S$  es un *clan de  $G$*  si y sólo si  $S$  es un conjunto independiente de  $\overline{G}$ .

- Una gráfica  $G = (V, E)$  se dice que es *bipartita* si existen  $X$  y  $Y$ , subconjuntos independientes de  $V$  tales que  $V = X \cup Y$  y  $X \cap Y = \emptyset$ . Sabemos que una gráfica  $G$  es bipartita si y

sólo si  $G$  no contiene ciclos de longitud impar.

- Una gráfica  $G$  *plana* es una gráfica dibujada en el plano de tal manera que, salvo tal vez en los vértices, ningún par de aristas se intersectan. Una gráfica se dice que es *planar* si es isomorfa a una gráfica plana.

## Conjuntos de corte

- Un vértice  $v$  de  $G$  es un *vértice de corte* si el número de componentes conexas de  $G - v$  es estrictamente mayor que el número de componentes conexas de  $G$ . Análogamente, una *arista de corte* de  $G$  es una arista  $e$ , tal que el número de componentes conexas de  $G - e$  es estrictamente mayor que el número de componentes conexas de  $G$ .

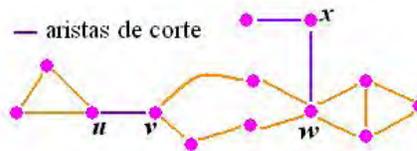


Figura 1.7:  $u, v, w, x$  son vértices de corte

- Un *conjunto de corte* de una gráfica conexa  $G$  es un subconjunto  $V'$  de  $V$  tal que  $G - V'$  es desconexo. Un **k-conjunto de corte** es un conjunto de corte con  $k$  elementos. La conectividad  $\kappa(G)$  de  $G$  es el mínimo  $k$  para el cual  $G$  tiene un  $k$ -conjunto de corte. Decimos que  $G$  es *k-conexo* si  $k \leq \kappa(G)$ . Si  $u$  y  $v$  son vértices de  $G$ , diremos que  $S$  *separa*  $u$  de  $v$ , si  $u$  y  $v$  están en distintas componentes conexas en  $G - S$ .

- Un *conjunto de aristas de corte* de una gráfica conexa  $G$  es un subconjunto  $E'$  de  $E$  tal que  $G - E'$  es desconexo. Una *k-arista* de  $G$  es un conjunto de aristas de corte con  $k$ -elementos. La *conectividad por aristas* de  $G$  es denotada por  $\kappa'(G)$ , y se define como el mínimo  $k$  tal que existe una  $k$ -arista de  $G$ .

## Coloraciones

- Una  $k$ -coloración de  $G$  es una función  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $f^{-1}(i)$  es llamada una clase cromática. Una  $k$ -buena coloración es aquella en la que dos vértices adyacentes le corresponden colores diferentes, es decir, si  $u$  es adyacente a  $v$ ,  $f(u)$  es distinta de  $f(v)$ .

Una gráfica es 1-coloreable si y sólo si  $G$  no tiene aristas y es 2-coloreable si y sólo si es bipartita.

-Se dirá que una coloración  $G$  es un re-nombramiento de otra coloración, si la partición que definen ambas coloraciones en  $V(G)$  con sus clases cromáticas es la misma.

- El *número cromático*,  $\chi(G)$  de  $G$ , es el mínimo  $k$  para el cual  $G$  tiene una buena  $k$ -coloración. Si  $\chi(G) = k$  se dice que  $G$  es  $k$ -cromática.

- Se dice que una gráfica *es crítica* si  $\chi(H) < \chi(G)$  para cualquier subgráfica propia  $H$  de  $G$ . Diremos que es  $k$ -crítica si  $\chi(G) = k$  y  $G$  es crítica.

## Apareamientos

- Un *apareamiento*  $M$  en  $G$  es un conjunto de aristas independientes de  $G$ .  $M$  es un apareamiento de  $U \subseteq V(G)$ , si cualquier vértice de  $U$  es incidente en una arista en  $M$ .

- Se dice que  $M$  *es conexo* si todo par de aristas de  $M$  están unidas por al menos una arista de  $G - M$ .

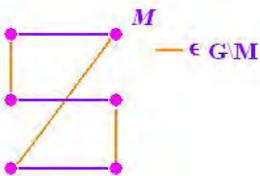


Figura 1.8:

-  $M$  *es dominante* si cualquier vértice en  $G - M$  es adyacente a al menos un vértice final

de cada una de las aristas de  $M$ .

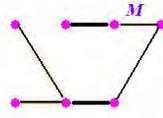


Figura 1.9:

- Se dice que un apareamiento  $M$  es *completo*, de  $X$  a  $Y$  (subconjuntos de  $V(G)$ ), si ningún vértice de  $Y$  es incidente con más de una arista de  $M$  y cada vértice de  $X$  es incidente con una arista de  $M$ .

- Un apareamiento  $M$  se dice que es *perfecto* si cualquier vértice  $v \in G$  es un vértice terminal de alguna arista en  $M$ .

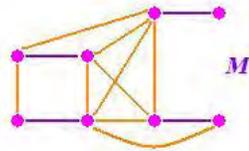


Figura 1.10: M es perfecto

-  $M$  es un *apareamiento máximo* si en  $G$  no existe otro apareamiento  $M'$  tal que  $|M| < |M'|$

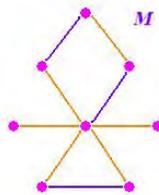


Figura 1.11: M es máximo

- Se dice que una gráfica  $G$  es *factor crítica* si  $G - x$  tiene un apareamiento perfecto para todo vértice  $x$  de  $G$ .

## Menores

- Sea  $e = uv$  una arista de una gráfica  $G$ . Por  $G/e$  denotaremos la gráfica obtenida de  $G$  *contrayendo* la arista  $e$  en un nuevo vértice  $v_e$ , el cuál será adyacente a todos los vecinos de  $u$  y de  $v$ . Formalmente,  $G/e$  es la gráfica  $(V', E')$  cuyo conjunto de vértices es  $V' = (V - \{u, v\}) \cup \{v_e\}$  y cuyo conjunto de aristas es

$$E' = \{xy \in E \mid \{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset\} \cup \{v_e y \mid uy \in E - \{e\} \text{ ó } vy \in E - \{e\}\}.$$

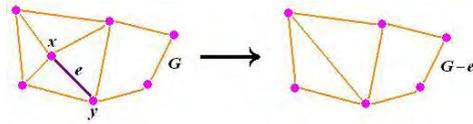


Figura 1.12: Contrayendo la arista  $e = xy$

Más generalmente, si  $X$  es una gráfica y  $\{V_x \mid x \in V(X)\}$  es una partición de  $V$  en subconjuntos conexos tales que, para cualesquiera dos vértices  $x, y \in V(X)$ , existe una  $V_x V_y$  arista en  $G$  si y sólo si  $xy \in E(X)$ , diremos que  $G$  es un  $MX$  y escribiremos  $G = MX$ . Los conjuntos  $V_x$  son las *ramas* de este  $MX$ . Intuitivamente, obtenemos  $X$  de  $G$  contrayendo todas las ramas a un vértice singular. (figura 13)

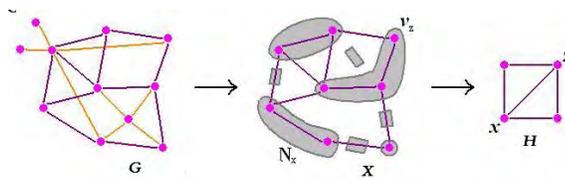


Figura 1.13:  $X = MH \subset G$ , entonces  $H$  es un menor de  $G$

- Una gráfica  $H$  es un *menor* ó *contracción* de  $G$ , si  $H$  puede ser obtenida de una subgráfica de  $G$  borrando vértices (y/o aristas) y/o contrayendo aristas, y a esto lo denotaremos como  $H \prec G$ . Es decir, si  $X = MH$  es una subgráfica de otra gráfica  $G$ , diremos que  $H$  es un menor de  $G$ . (figura 1.13)

- Si  $G$  es una gráfica, y reemplazamos las aristas de  $G$  con trayectorias independientes entre sus vértices finales (esto es, que ninguna de estas trayectorias tengan vértices internos

en otra trayectoria ó en  $G$ ), diremos que la gráfica  $H$  obtenida es una *subdivisión* de  $G$  y la escribimos como  $H = TG$ . Si  $X = TH$  es subgráfica de otra gráfica  $G$ , diremos que  $H$  es un menor topológico de  $G$ .(figura 1.14)

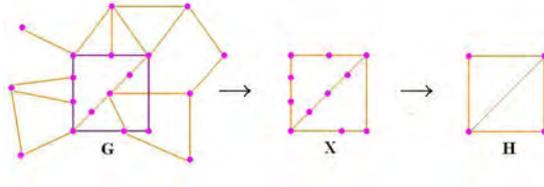


Figura 1.14:  $X = TH \subset G$ , entonces  $H$  es menor topológico de  $G$

- Si  $G$  es una gráfica, diremos que es *contracción crítica* si  $\chi(H) < \chi(G)$  para todo menor propio  $H$  de  $G$ .

# Capítulo 2

## Resultados Previos

A lo largo de esta tesis, se hace mención a ciertos teoremas, los cuales se presentan a continuación.

**Teorema 1 Dirac (1952)** Sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices y valencia mínima  $\delta$ , tal que  $n \geq 3$  y  $\delta \geq n/2$ . Entonces  $G$  es Hamiltoniana.

**Demostración.** La prueba la realizaremos suponiendo falso el teorema y llegando a una contradicción.

Supongamos que  $G$  es una gráfica no Hamiltoniana con  $n \geq 3$  y  $\delta \geq n/2$  y supongamos también que para todo par de vértices  $u$  y  $v$  que no sean adyacentes en  $G$ ,  $G + uv$  es Hamiltoniana.

Dado que  $n \geq 3$ ,  $G$  no es completa, ya que toda gráfica completa con al menos 3 vértices es Hamiltoniana. Sean  $u, v$  vértices no adyacentes en  $G$ . Por hipótesis  $G + e$  con  $e = uv$  es Hamiltoniana. Además, puesto que  $G$  no lo es, cada ciclo Hamiltoniano de  $G + e$  debe contener a  $e$ . Entonces, existe un camino hamiltoniano  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , con origen en  $u = v_1$  y final en  $v = v_n$ . Definamos

$$S = \{v_i | uv_{i+1} \in E(G)\}; T = \{v_i | v_i v \in E(G)\}.$$

Nótese que  $\delta_G(u) = |S|$ ;  $\delta_G(v) = |T|$ ; que  $v = v_n \notin T$  y que  $v = v_n \notin S$  pues  $v_{n+1}$  no existe, ya que  $n$  es el mayor subíndice. De este modo,

$$(1) |S \cup T| < n.$$

Además

$$(2) S \cap T = \emptyset$$

ya que si  $S \cap T$  contiene un vértice  $v_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , entonces  $v_1v_2, \dots, v_iv_nv_{n-1} \dots v_{i+1}v_1$  es un ciclo Hamiltoniano, lo cual no es posible por hipótesis. Usando (1) y (2) tenemos

$$\delta_G(u) + \delta_G(v) = |S| + |T| < n$$

lo cuál contradice nuestras hipótesis, porque  $\delta_G(u)$  y  $\delta_G(v) \geq \delta/2$  y, entonces  $\delta_G(u) + \delta_G(v) \geq 2\delta \geq n$ .  $\boxplus$

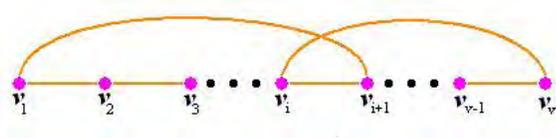


Figura 2.1:

**Teorema 2 (Menger)** Sea  $G$  una gráfica. Dados dos vértices  $x$  y  $y$  de  $G$  no adyacentes, el número mínimo de vértices que separan a  $x$  de  $y$  es igual al máximo número de  $xy$ -trayectorias internamente disjuntas en  $G$ .

**Demostración.** Primero obsérvese que si  $S$  es un subconjunto de  $V(G)$  tal que separa a  $x$  de  $y$  de cardinal mínimo  $k$ , es claro que en  $G$  existen a lo más  $k$   $xy$ -trayectorias disjuntas.

Mostraremos que si  $S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  es un conjunto de cardinalidad mínima  $k$  que separa a  $x$  y  $y$ , entonces  $G$  tiene al menos  $k$   $xy$ -trayectorias disjuntas.

Esta prueba la realizaremos por inducción sobre  $m = n + e$ , la suma del número de vértices ( $n$ ) y aristas ( $e$ ) en  $G$ . El caso para  $k = 1$  es claro, y en el caso cuando  $m = 5$ , se puede ver que

el teorema es cierto. Ahora, supongamos que para toda gráfica  $H$  donde  $|V(H)| + |E(H)| < m$  el teorema es cierto, y sea  $G$  una gráfica en donde  $|V(G)| + |E(G)| = m$ .

(1) Supongamos que  $x$  y  $y$  tienen un vecino en común  $z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ . Entonces necesariamente  $z$  está en  $S$ . En  $G - z$  el conjunto  $S - z$  es un conjunto mínimo que separa  $x$  de  $y$ . Por hipótesis de inducción, existen  $k - 1$   $xy$ -trayectorias independientes en  $G - z$ . Junto con la trayectoria  $xzy$ , entonces existen  $k$   $xy$ -trayectorias independientes en  $G$  como lo afirmábamos.

(2) Supongamos que  $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset$  y denotamos por  $H_x$  y  $H_y$  a las componentes conexas de  $G - S$  en las cuales están  $x$  y  $y$ , respectivamente. (ver figura 2.2)

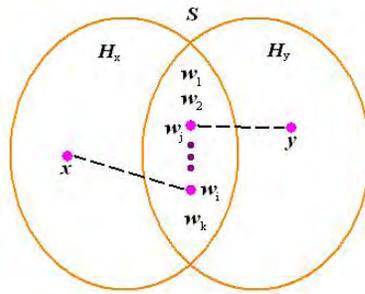


Figura 2.2:

(2a) Supongamos que algún elemento  $w_i$  del conjunto de corte  $S$  no es vecino de  $x$ , y algún  $w_j$  de  $S$  no es vecino de  $y$ ; esto implica que  $H_x \neq x$  y que  $H_y \neq y$ . Sea  $z$  un nuevo vértice, y definamos  $G_z$  la gráfica cuyos vértices son  $V(H_x \cup S \cup z)$  teniendo las aristas de  $G[H_x \cup S]$  junto con las aristas  $zw_i$  para toda  $i = 1, \dots, k$  (ver figura 2.3).

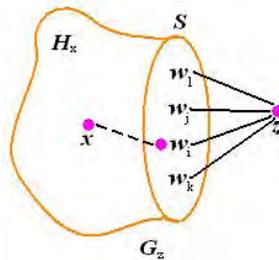


Figura 2.3:

La gráfica  $G_z$  es conexa y mas pequeña que  $G$ . Como  $S$  es un conjunto de corte mínimo, todos los vértices  $w_i$  tienen que ser adyacentes a algún vértice de  $H_y$ . Esto muestra que

$|E(G_z)| \leq |E(G)|$ . Más aún, por nuestra suposición en este caso,  $H_y \neq y$ , con lo que  $|V(G_z)| < |V(G)|$ . Si  $T$  es cualquier conjunto que separe a  $x$  de  $z$  en  $G_z$ , entonces  $T$  separe a  $x$  de todos los  $w_i$  en  $S - (T \cap S)$  en  $G$ . Esto significa que  $T$  separe a  $x$  de  $y$  en  $G$ . Dado que  $k$  es el tamaño de un conjunto de corte mínimo,  $|T| \geq k$ . Como  $|V(G_z)| + |E(G_z)| < |V(G)| + |E(G)|$ , por hipótesis de inducción, existen  $k$   $xz$ -trayectorias disjuntas en  $G_z$ . Este conjunto de  $k$  trayectorias ajenas en  $G_z$ , claramente nos definen un conjunto de  $k$  trayectorias disjuntas en  $H_x \cup S$ , siendo cada una de ellas una  $xw_i$ -trayectoria para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ . Usando un argumento análogo encontramos  $k$   $yw_i$ -trayectorias disjuntas en  $H_y \cup S$ . Combinando estas trayectorias, obtenemos  $k$   $xy$ -trayectorias disjuntas en  $G$  como se afirmaba.(figura 2.4)

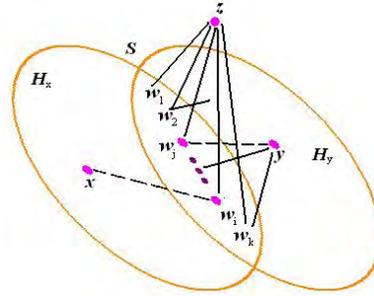


Figura 2.4:

(2b)Supongamos, ahora, que todos conjunto  $S$  de corte es un subconjunto de  $\Gamma(x)$  o de  $\Gamma(y)$ . Sea  $P = \{x, u_1, u_2, \dots, y\}$  una  $xy$ -trayectoria de longitud mínima en  $G$ . Por lo visto en el caso (1),  $P$  contiene al menos cuatro vértices. Definamos  $G_n$  como  $G - u_1u_2$ . Si  $T$ , el conjunto de separación entre  $x$  y  $y$  más pequeño en  $G_n$  tiene tamaño  $k$ , por inducción hemos terminado. Supongamos que  $|T| < k$ , entonces  $x$  y  $y$  están conectados, todavía, en  $G - T$ , necesariamente a través de la arista  $u_1u_2$ . Entonces ni  $u_1$  ni  $u_2$  son elementos de  $T$ . También,  $T_{u_1} = T \cup u_1$  y  $T_{u_2} = T \cup u_2$  son ambos conjuntos de corte mínimos en  $G$  (de tamaño  $k$ ). Entonces,  $T_{u_2} \subset \Gamma(x)$  o  $T_{u_2} \subset \Gamma(y)$  por hipótesis. Ahora,  $P$  es una trayectoria de longitud mínima, entonces  $u_2$  no es elemento de  $\Gamma(x)$ , con lo que  $T_{u_2} \subset \Gamma(y)$ . Más aún,  $u_1 \in \Gamma(x)$ , entonces  $T_{u_1} \subset \Gamma(x)$ . Combinando estos dos resultados tenemos que  $T$  es subconjunto de  $\Gamma(x) \cap \Gamma(y)$  lo cuál contradice nuestra suposición (2), ya que  $T$  no es vacío.†

Un teorema equivalente a éste es el teorema de Hall,

**Teorema 3 Hall** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica bipartita, con  $V = X \cup Y$ . Existe un apareamiento completo de  $X$  a  $Y$ , si y sólo si  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para cualquier subconjunto  $S$  de  $X$ .

**Teorema 4** Si  $G$  es una gráfica  $n$ -cromática mínima, entonces  $n - 1 \leq \delta(G)$

**Demostración.** Supongamos que  $n - 1 > \delta(G)$ . Por tanto existe  $v$  en  $V(G)$  tal que  $\delta_G(v) \leq n - 2$ .

Sea  $c_{G-v} : V(G - v) \rightarrow \{1, 2, \dots, n - 1\}$  una buena coloración de  $G - v$ . Como  $\Gamma(v)$  contiene  $n - 2$  vértices se sigue que hay algún color  $j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  que no pertenece al conjunto  $\{c_{G-v}(x) | x \in \Gamma(v)\}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que el color que no aparece es el 1.

Sea  $C : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n - 1\}$  la coloración definida como sigue: si  $x$  es un vértice de  $V(G - v)$ , entonces,  $C(x) = c_{G-v}(x)$ ; si  $x = v$  entonces  $C(v) = 1$ .

Afirmamos que  $C$  es una buena  $(n - 1)$ -coloración de  $G$ .

Dados  $x, y$  en  $V(G)$ , supongamos que  $C(x) = C(y)$ . Si  $x, y \neq v$  entonces  $C(x) = c_{G-v}(x)$  y  $C(y) = c_{G-v}(y)$ , por lo que  $c_{G-v}(x) = c_{G-v}(y)$  y, entonces, como  $c_{G-v}$  es una buena coloración  $x$  y  $y$  no son adyacentes en  $G - v$  y por tanto no son adyacentes en  $G$ .

Si  $x = v$  y  $y \neq v$ ,  $C(x) = 1$  y  $C(y) = c_{G-v}(y)$ , por lo que  $c_{G-v}(y) = 1$ , pero 1 no pertenece a  $\{c_{G-v}(z) | z \in \Gamma(v)\}$  por lo que  $y$  no es vecino de  $v$ ; lo cual significa que  $x$  y  $y$  no son adyacentes. Con lo que nuestra afirmación ha sido probada.

Pero entonces, se tiene que  $G$  no es  $n$ -cromática, lo cual es una contradicción a nuestras hipótesis.  $\square$

**Teorema 5 Tutte** Dada una gráfica  $G = (V, E)$ , ésta tiene un apareamiento perfecto si y sólo si para todo subconjunto  $U$  de  $V$ , el número de componentes conexas con un número impar de vértices en la subgráfica inducida  $G - U$  es menor ó igual que  $|U|$ .

**Teorema 6 Gallai** Si  $|V(G)| \leq 2\chi(G) - 2$  entonces,  $\overline{G}$  es desconexo.

**Teorema 7 Toft** Sea  $S$  un conjunto de aristas de corte en una gráfica  $G$ ,  $k$ -cromática contracción-crítica, y tal que  $G \neq K_k$ . Si  $|S| \leq 2k - 3$  entonces existe un vértice  $v$  con valencia  $|S|$  en  $G$  y tal que  $S$  es el conjunto de aristas de  $G$  incidentes en  $v$ .

**Teorema 8** Si  $G$  es  $k$ -crítica y  $S \subset V(G)$  es un conjunto de corte de  $G$ ,  $G[S]$  no puede ser completa.

**Demostración.** Si  $G$  es  $k$ -crítica, entonces toda subgráfica propia  $H$  de  $G$  es  $(k-1)$ -coloreable.

Sean  $H_1, H_2, \dots, H_r$  las componentes conexas de  $G - S$  y para cada  $i = 1, \dots, r$  sea  $G_i$  la gráfica inducida por  $V(H_i) \cup S$ . Si  $G[S]$  es completa, toda buena  $(k-1)$ -coloración de  $G_i$ , con  $i = 1, \dots, r$ , le asigna colores distintos a los vértices de  $S$ . Re-nombrando las  $(k-1)$ -coloraciones de cada  $G_i$  de tal manera que cada vértice de  $S$  reciba en cada coloración el mismo color, obtenemos una buena  $(k-1)$ -coloración de  $G$ , lo cual no es posible.  $\square$

**Teorema 9 Kuratowski** (Kuratowski 1930- Wagner 1937). Si  $G$  es una gráfica, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $G$  es plana.
- ii)  $G$  no tiene a  $K_5$  ni a  $K_{3,3}$  como menor.

**Teorema 10** Una gráfica  $G$  contiene a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$  como menor, si y sólo si, contiene a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$  como menor topológico.

**Teorema 11 4CC** Si toda gráfica plana puede ser bien coloreada (en vértices) con cuatro colores.

# Capítulo 3

## Gráficas con número cromático 4, 5

### ó 6

En este capítulo veremos lo siguiente:

- i)* Si  $G$  es una gráfica con número cromático 4, entonces tiene a  $K_4$  como menor.
- ii)* El teorema de los cuatro colores es equivalente a que si  $G$  es una gráfica 5-cromática, entonces tiene a  $K_5$  como menor.
- iii)* Una idea general de la prueba de que si  $G$  es una gráfica con número cromático 6 entonces contiene a  $K_6$  como menor.

### 3.1. Número Cromático 4

Para probar este caso, supondremos que la afirmación es falsa. Así, sea  $G$  una gráfica 4-cromática, de orden mínimo y que no contenga a  $K_4$  como menor.

Dado que  $G$  es de orden mínimo, se sigue que toda subgráfica propia de  $G$  es 3-coloreable, pues si para alguna subgráfica propia  $H$  de  $G$ ,  $\chi(H) = 4$ , tendríamos que  $H \succ K_4$  y por lo tanto  $G \succ K_4$ .

De ahí se sigue que  $G$  es 4-cromática crítica y por el Teorema 8, que  $G$  es al menos dos

conexa.

**Caso 1**  $G$  es 2-conexa.

Sea  $S = \{v_1, v_2\}$  un conjunto de corte. Sean  $H_1, H_2, \dots, H_r$  las componentes conexas de  $G - S$ ; para cada  $i = 1, 2, \dots, r$ , sea  $G_i$  la gráfica inducida por  $V(H_i) \cup S$ . Como  $G$  es 4-cromática crítica, se sigue que cada  $G_i$  es 3-coloreable, y por el Teorema 8,  $v_1$  y  $v_2$  no son adyacentes.

Afirmamos que existen dos componentes conexas  $G_i$  y  $G_j$  tales que toda buena coloración de  $G_i$  asigna colores diferentes a  $v_1$  y  $v_2$ , y toda buena 3-coloración de  $G_j$  asigna el mismo color a  $v_1$  y  $v_2$ . Supongamos que la afirmación es falsa, entonces para cada componente existe una buena 3-coloración que asigna los mismos colores a  $v_1$  y  $v_2$ ; y/o para cada componente existe una buena 3-coloración que asigna colores distintos a  $v_1$  y  $v_2$ .

Si para cada componente existe una buena 3-coloración que asigna el mismo color a  $v_1$  y  $v_2$ , re-nombrando las coloraciones de cada componente, de tal manera que el color asignado a  $v_1$  y  $v_2$  sea el mismo para cada coloración, obtenemos una buena 3-coloración de  $G$ , lo cual contradice nuestra hipótesis.

De manera análoga, en el caso en que para cada componente exista una buena 3-coloración que asigne colores diferentes a  $v_1$  y  $v_2$ , llegamos también, a una contradicción.

Dada la afirmación anterior, sean  $G_1$  y  $G_2$  tales que toda buena 3-coloración de  $G_1$  le asigne distintos colores a  $v_1$  y a  $v_2$ ; y toda buena 3-coloración de  $G_2$  le asigne el mismo color a  $v_1$  y  $v_2$ .

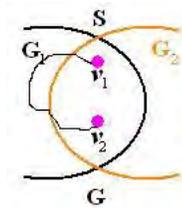


Figura 3.1:

Como  $G_1$  es conexa, existe una  $(v_1, v_2)$ -trayectoria, por lo que  $G_2 + v_1v_2$  es menor de

$G$ . Como toda buena 3-coloración de  $G_2$  le asigna el mismo color a  $v_1$  y a  $v_2$ ,  $G_2 + v_1v_2$  es 4-cromática y tiene orden menor que  $G$ . Por lo tanto,  $K_4 \prec G_2 + v_1v_2$  y entonces  $K_4 \prec G_{\boxplus}$ .

**Caso 2**  $G$  es  $k$ -conexa con  $k \geq 3$ .

Como  $K_4 \not\prec G$  entonces,  $G$  no es completa.

Sean  $x$  y  $y$  dos vértices no adyacentes de  $G$ . Entonces existen tres  $xy$ -trayectorias disjuntas en  $G$ .

Sean  $P_1 = (x = w_0, w_1, \dots, w_{l_w} = y)$ ,  $P_2 = (x = z_0, z_1, \dots, z_{l_z} = y)$  y  $P_3 = (x = q_0, q_1, \dots, q_{l_q} = y)$ , tales trayectorias. Como  $G$  es  $k$ -conexa,  $G - \{x, y\}$  es conexa, por lo que existe una  $w_1q_1$ -trayectoria, digamos  $(w_1 = r_0, r_1, r_2, \dots, r_{l_r} = q_1)$  en  $G - \{x, y\}$ .

Sea  $j = \max\{i | r_i \in P_1\}$ .

Obsérvese que  $r_j = w_t \in V(P_1)$ .

Sea  $l = \min\{i > j | r_i \in V(P_3)\}$

Igualmente obsérvese que  $r_l = q_s \in V(P_3)$  y que la trayectoria  $(w_t = r_j, r_{j+1}, \dots, r_l = q_s) = P_4$ , es disjunta con  $P_1$  y  $P_3$ .

**Caso 2.1**  $V(P_4) \cap V(P_2) = \emptyset$ .

Contrayendo  $(x = q_0, q_1, \dots, q_s)$  a la arista  $xq_s$ ,  $(q_s, q_{s+1}, \dots, q_{l_q} = y)$  a la arista  $q_sy$ ,  $(w_t = r_j, \dots, r_l = q_s)$  a la arista  $w_tq_s$  y contrayendo a  $P_2$  a una arista, se forma  $K_4$ .

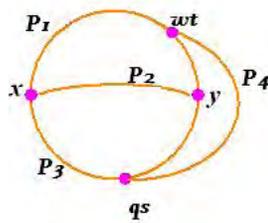


Figura 3.2:

**Caso 2.2**  $V(P_4) \cap V(P_2) \neq \emptyset$

Sea  $s = \min\{j \leq i \leq l | r_i \in V(P_2)\}$ .

Obsérvese que  $r_s = z_i$  en  $V(P_2)$ , y sea  $P_5 = (w_t = r_j, \dots, r_s = z_i)$ . Sea  $k = \max\{j \leq i \leq$

$l|r_i \in V(P_2)\}$ . Nótese que  $r_k = z_i$  en  $V(P_2)$  y sea  $P_6 = (z_a = r_k, \dots, r_l = q_s)$ . Contrayendo el segmento de  $P_2$  entre  $z_i = r_s$  y  $z_a = r_k$  al vértice  $z_i z_a$ ;  $P_5$  a la arista  $(w_t = r_j) z_i z_a$ ;  $P_6$  a la arista  $(q_s = r_l) z_i z_a$ ; la trayectoria  $(x = z_0, \dots, z_i z_a)$ ,  $(x = q_0, \dots, q_s = r_l)$  y  $(x = w_0, \dots, w_t = r_j)$  a las aristas  $x(z_i z_a)$ ,  $(x r_l)$  y  $x r_j$  respectivamente y, finalmente, la trayectoria  $(w_t, w_{t+1}, \dots, w_{l_w} = y = q_{l_q}, q_{l_q-1}, \dots, q_s)$  a la arista  $w_t q_s$  obtenemos a  $K_4$  como menor.†

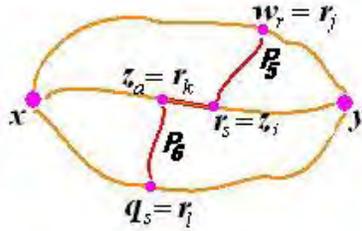


Figura 3.3:

## 3.2. Número cromático 5

En esta sección, probaremos la siguiente equivalencia:

“El teorema de los 4 colores se cumple si y sólo si cualquier gráfica que requiera 5 colores para bien colorearse, tiene a  $K_5$  como menor”.

Para la demostración de esta equivalencia, requerimos del siguiente resultado:

**Teorema 12** *Si  $G$  es una gráfica 4-conexa y no plana, entonces  $K_5 \prec G$ .*

La demostración de este resultado se encuentra al final de esta sección. Pasemos a probar la equivalencia.

**Teorema 13 de Wagner** *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(H): “Si  $G$  es 5-cromática entonces,  $K_5 \prec G$ .”

(4CC): “Toda gráfica plana puede ser bien coloreada (en vértices) con cuatro colores.”

**Demostración.** Que (H)  $\Rightarrow$  (4CC) es inmediato del teorema de Kuratowski (Teorema 15).

Inversamente, sea (4CC) verdadero y sea  $G$  una gráfica 5-cromática que no acepta a  $K_5$  como menor. Podemos suponer (contrayendo y borrando aristas de  $G$ , si es necesario) que toda contracción propia de  $G$  es 4-coloreable. Mostraremos que  $G$  es 4-conexa.

Supongamos lo contrario, que existe un conjunto de vértices de  $G$  tales que  $|S| \leq 3$  y  $G - S$  se separe en las componentes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ( $n \geq 2$ ). Podemos asumir que  $S$  es el más chico de tales conjuntos, y de aquí que cada vértice de  $S$  está unido a cada componente  $C_i$  por una arista. Sea  $C'_i = G[V(C_i) \cup S]$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Sea  $T$  un subconjunto independiente maximal de  $S$  en  $G$ . Obsérvese que como  $G$  es crítica,  $S$  no es completa (Teorema 8), con lo que  $S = T$  ó  $|T| = 2$ . Afirmamos que cada  $C'_i$  puede ser coloreada con 4-colores de tal forma que todos los vértices de  $T$  tengan el mismo color  $\alpha$ , y el color asignado a  $S - T$  no es  $\alpha$ .

Escogemos  $i \neq j$  y contraemos  $C_j$  a un vértice  $t$ ; entonces contraemos  $t$  y  $T$  a un vértice  $t'$ . Como  $T$  era maximal independiente en  $S$ ,  $t'$  es adyacente a todo vértice en  $S - T$ . Y como la gráfica obtenida es una contracción de  $G$ , puede ser coloreada con cuatro colores. Así, restableciendo los vértices de  $T$  con el color de  $t'$ , el cual es diferente de todos los colores de  $S - T$ , obtenemos una 4-coloración de  $C'_i$  como afirmábamos.

Por lo tanto, si  $T$  es un subconjunto independiente maximal de  $S$  tal que  $(G[S - T])$  es vacío ó puede ser coloreado, esencialmente de una forma, entonces la 4-coloración de los diferentes  $C'_i$  pueden ser combinados para dar una 4-coloración de  $G$ , lo cual es imposible. Aquí la suposición de que  $G$  no es 4-conexa ha inducido a una contradicción.

Dado que  $G \not\prec K_5$ , se sigue del Teorema 12 que  $G$  debe ser plana, pero entonces  $G$  es 4-coloreable por (4CC), contradiciendo la elección de  $G$ . $\dagger$

Ahora, pasemos a probar el Teorema 12.

**Demostración.** Por el teorema de Kuratowski y el Teorema 10, todo se reduce a probar que si  $G$  contiene una subdivisión  $H$  de  $K_{3,3}$ , entonces  $G \succ K_5$ . Sean  $A, B, C, D, E$  y  $F$  los

vértices de  $H$  de valencia 3 (en  $H$ ); y supongamos que forman los conjuntos independientes (en  $H$ )  $\{A, B, C\}$  y  $\{D, E, F\}$ . Cada pareja de vértices en distintos conjuntos independientes, son extremos de trayectorias ajenas en  $H$ , a las que llamaremos  $H$ -líneas.

Sea  $P$  una  $(AB)$ -trayectoria en  $G - \{D, E, F\}$ . Recorriendo la trayectoria de  $A$  a  $B$ , sea  $w$  el último vértice de  $P$  en alguna  $H$ -línea que emane de  $A$ , y sea  $x$  el primer vértice después de  $w$  en una  $H$ -línea que sale de  $B$  o  $C$  (sin pérdida de generalidad podemos suponer que de  $B$ ).

Sea  $P_{wx}$  la sección de  $P$  de  $w$  a  $x$ . Entonces  $P_{wx}$  no contiene ningún vértice de  $H$  en su interior, y  $x \neq w$ . Existe algún vértice en  $\{D, E, F\}$ , digamos  $F$ , tal que ni  $w$  ni  $x$  están en una  $H$ -línea que sale de él.

Ahora, sea  $Q$  una trayectoria en  $G - \{A, B, C\}$  de  $F$  a  $D$  o  $E$ . Recorriendo  $Q$  (iniciando por  $F$ ), sea  $y$  el último vértice de  $Q$  que esté en alguna  $H$ -línea de  $F$ . Sea  $z$  el siguiente vértice de  $Q$  que está en  $P_{wx} \cup H$  y sea  $Q_{yz}$  la sección de  $Q$  de  $y$  a  $z$ .

**Caso 1** Si  $z \notin P_{wx}$  entonces  $z$  está en alguna  $H$ -línea de  $D$  o  $E$ .

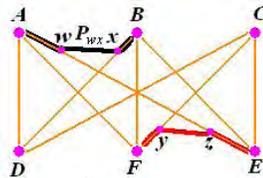


Figura 3.4:

Supongamos que es  $E$ . Contrayendo a un punto las trayectorias (sobre las  $H$ -líneas) de  $z$  a  $E$ , de  $y$  a  $F$ , de  $x$  a  $B$ , de  $w$  a  $A$  y la  $H$ -línea que va de  $C$  a  $D$ , obtenemos a  $K_5$ .

**Caso 2** Si  $z \in P_{wx}$ , tenemos dos subcasos:

**Caso 2.1**  $w \neq A$  ó  $x \neq B$ .

Supongamos que  $w \neq A$ . Si  $z \neq x$  contraemos a un punto la sección de  $P_{wx}$  entre  $z$  y  $w$ , y las trayectorias de  $x$  a  $B$ , de  $y$  a  $F$ , de  $A$  a  $D$  y de  $C$  a  $E$  (sobre las  $H$ -líneas), obtenemos a  $K_5$ .

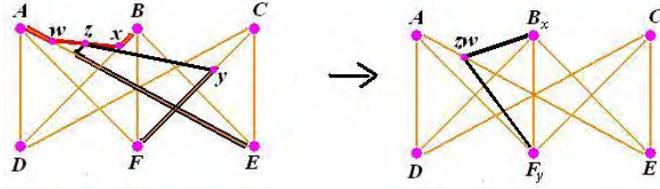


Figura 3.5:

**Caso 2.2**  $w = A$  y  $x = B$

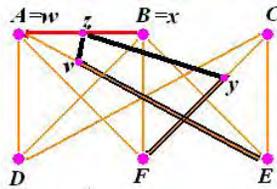


Figura 3.6:

Recorriendo  $Q$  desde  $F$ , sea  $v$  el vértice siguiente de  $z$  que está en  $H$ .  $v$  está en una  $H$ -línea de  $D$  ó  $E$  (pero no en  $F$ , pues  $y$  es el último vértice en  $Q$  con esta propiedad). Supongamos que  $v$  está en una  $H$ -línea que sale de  $E$  (ver fig. 3.6).

Contrayendo los vértices internos de  $P_{wx}$  y  $Q_{yv}$  a un vértice (el cual será vecino de  $A$ ,  $B$ ,  $v$  y de  $y$ ).

Ahora contraemos las trayectorias de  $v$  a  $E$  y de  $y$  a  $F$  (sobre las  $H$ -líneas); y contraemos a un punto la  $H$ -línea que va de  $C$  a  $Ev$ , y a un punto la  $H$ -línea que va de  $A$  a  $D$ . Así, obtenemos a  $K_5$

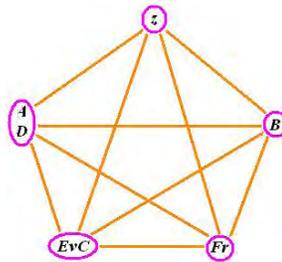


Figura 3.7:

### 3.3. Número cromático 6

En esta sección, daremos un esbozo de la prueba dada por Robertson, Seymour y Thomas, probando que la conjetura de Hadwiger es cierta para gráficas de número cromático 6.

Ya hemos visto que la conjetura de Hadwiger, para  $n = 5$  es equivalente al teorema de los cuatro colores; bueno, pues la conjetura cuando  $n = 6$ , también es equivalente al teorema de los cuatro colores. Más específicamente en la prueba se muestra (sin asumir el 4CC) que todo contraejemplo mínimo de la conjetura de Hadwiger, cuando  $n = 6$  es “picudo”. Esto quiere decir que consiste en una gráfica plana con un vértice adicional que impide que sea plana. Por otro lado, el 4CC implica que las gráficas picudas son cinco coloreables. Por tanto, de acuerdo al Teorema de los cuatro colores, no existe tal contraejemplo.

Para realizar la prueba se define lo que es una gráfica de Hadwiger:

Diremos que una gráfica  $G$  es una *gráfica de Hadwiger* si,

- i)*  $G$  no es 5-coloreable.
- ii)* Todo menor de  $G$  con menos vértices que  $G$  es 5-coloreable.
- iii)*  $G$  no tiene a  $K_6$  como menor.

Después se prueba que toda gráfica de Hadwiger es picuda; esencialmente en los cinco pasos siguientes:

**Paso 1.** Una gráfica de Hadwiger no picuda, tiene valencia mínima al menos 7 excepto, quizá por a lo más dos vértices de valencia 6.

**Paso 2.** Una gráfica de Hadwiger no picuda es 7-conexa excepto, para estos (a lo más 2) vértices de valencia 6.

**Paso 3.** Se encuentran diez subgráficas prohibidas, para una gráfica de Hadwiger no picuda. (fig. 3.8)

**Paso 4.** Existe un apareamiento perfecto en las gráficas de Hadwiger no picudas.

Por una “configuración reducible” se entenderá una subgráfica de  $G$  (cuyos vértices, típicamente, tienen valencia pequeña en  $G$ ) tal que le corresponde un menor propio, en donde

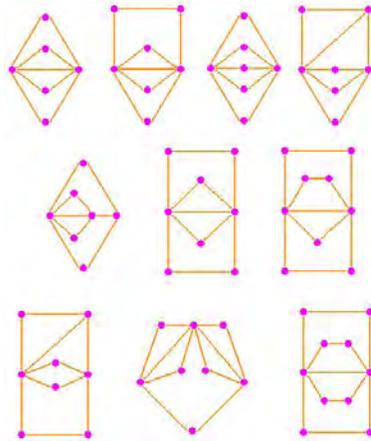


Figura 3.8: Gráficas Prohibidas para una de Hadwiger no picuda

cualquier 5-coloración de éste, induce una 5-coloración de  $G$ . Una gráfica de Hadwiger, por definición no puede contener una configuración reducible.

**Paso 5.** Se prueba que existe una configuración reducible o una subgráfica prohibida en cualquier gráfica de Hadwiger no picuda, y por lo tanto, no existe tal gráfica.

# Capítulo 4

## Gráficas con número de independencia

### 2

En este capítulo se presentarán una serie de propiedades que debe de cumplir una gráfica  $G$ , si ésta fuera un contraejemplo de orden mínimo a la conjetura de Hadwiger, teniendo como hipótesis adicional que  $\alpha(G) = 2$ . No se ha podido demostrar que este contraejemplo no existe.

Por otro lado, presentamos varias familias infinitas de gráficas con número de independencia 2, para las cuales, la conjetura es cierta.

Dado una gráfica  $G$ , si  $\alpha(G) \leq 2$  entonces  $\chi(G) \geq |V(G)|/2$ ; ya que si se bien colorea  $G$ , cada color podría usarse a lo más 2 veces. De ahí vemos que

H.2 Conjetura de Hadwiger para  $\alpha = 2$

$$\forall G : \alpha(G) \leq 2 \Rightarrow K_{\chi(G)} \prec G.$$

implica a

### H.3 Conjetura de Hadwiger para $\alpha = 2$

$$\forall G : \alpha(G) \leq 2 \Rightarrow G \succeq K_{\lceil |V(G)|/2 \rceil}.$$

Ahora pasemos a enlistar diecinueve propiedades que debe cumplir una gráfica  $G$ , con  $\alpha(G) = 2$ , si fuera un contraejemplo de orden mínimo, con respecto a la conjetura de Hadwiger.

- (1)  $\forall x \in V(G) : \chi(G) > \chi(G - x)$ , es decir,  $G$  es vértice crítica.
- (2) El complemento  $\overline{G}$  de  $G$  es conexo.
- (3)  $|V(G)| = 2\chi(G) - 1$ .
- (4)  $\forall x \in V(G) : \overline{G} - x$  tiene un apareamiento perfecto, es decir, el complemento  $\overline{G}$  de  $G$  es factor-crítico.

(5)  $\forall xy \in E(G) : \alpha(G - xy) = 3 > 2 = \alpha(G)$ , esto es,  $G$  es  $\alpha$ -crítica.

(6)  $\forall H, G \succ H$  y  $H \neq G : \chi(H) < \chi(G)$ , es decir,  $G$  es contracción-crítica.

(7)  $\chi(G) \geq 7$ .

(8)  $G$  es 7-vértice-conexa.

(9)  $\delta(G) \geq \chi(G)$ .  $G$  es  $\chi(G)$ -arista-conexa.

(10)  $G$  es Hamiltoniana.

(11)  $G$  es factor-crítica.

(12)  $G$  no tiene apareamientos conexos dominantes distintos del vacío.

(13)  $\omega(G) \leq \chi(G) - 3$ .

(14)  $\delta(G) \geq \chi(G) + 1$ .

(15)  $\kappa(G) \geq \chi(G)$ .

Ahora, sean  $x, y$  dos vértices no adyacentes en  $G$ . Sea  $B$  el conjunto de vecinos en común de  $x$  y  $y$ . Sea  $A = \{v \in G | v \text{ es adyacente a } x \text{ pero no a } y\}$  sea  $C = \{v \in G | v \text{ es adyacente a } y \text{ que no lo sean de } x\}$ .

(16) Sea  $b \in B$ . Entonces  $b$  tiene al menos un “no vecino” en  $A$  y al menos un “no vecino” en  $C$  (en particular  $A$  y  $C$  son no vacíos).

(17) Sea  $a \in A$  y  $c \in C$ . Entonces  $a$  es adyacente a  $c$  si y sólo si tienen un común “no vecino”  $b \in B$ .

(18) Si  $A, B$  y  $C$  son los descritos anteriormente, entonces  $2 \leq |A| \leq k-4$ ,  $2 \leq |C| \leq k-4$  y  $5 \leq |B| \leq 2k-7$ , donde  $k = \chi(G)$ .

(19) Cualesquiera dos vértices no adyacentes  $x$  y  $y$  en  $G$  están unidos por al menos cinco 2-trayectorias. Más aún, toda 2-trayectoria en  $G$  es parte de un  $C_5$  inducido.

Ahora pasemos a las pruebas:

Supongamos que la gráfica  $G$  es el contraejemplo de orden mínimo de H.2.

Si  $\chi(G-x) = \chi(G)$  para alguna  $x \in V(G)$ , entonces por la minimalidad de  $G$ , vemos que

$$G-x \succeq K_{\chi(G-x)} = K_{\chi(G)} \text{ pero } G \succeq G-x$$

y por lo tanto

$G \succeq K_{\chi(G)}$ , lo cual es imposible. Entonces,

(1)  $\forall x \in V(G) : \chi(G) > \chi(G-x)$ , es decir,  $G$  es vértice crítica. Más aún:

(2) El complemento  $\overline{G}$  de  $G$  es conexo.

Supongamos que no lo es, es decir que,  $\overline{G}$  es desconexo. Supongamos primero que  $\overline{G}$  tiene dos componentes, por lo tanto,  $G$  consiste en dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  tal que para todo  $x$  en  $V(G_1)$  y  $y$  en  $V(G_2)$  tenemos que, la arista  $xy$  está en  $G$  (Fig 4.1) y como  $G_1 \succ K_{\chi(G_1)}$  y  $G_2 \succ K_{\chi(G_2)}$  (por la minimalidad de  $G$ ), entonces  $G \succ K_{\chi(G_1)+\chi(G_2)}$ .

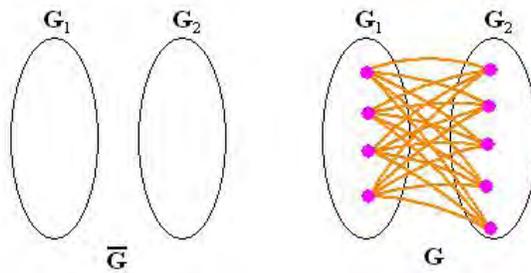


Figura 4.1:

Ahora, para bien colorear a  $G_1$ , necesitamos al menos  $\chi(G_1)$  colores. Como cada vértice de  $G_1$  está unido a todos los vértices de  $G_2$ , entonces requerimos  $\chi(G_2)$  colores más para bien

colorear a  $G$ , es decir, se requiere al menos  $\chi(G_1) + \chi(G_2)$  colores para bien colorear a  $G$ . Por lo tanto  $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$  y entonces  $G \succ K_{\chi(G)}$ , lo cual no se puede. Si  $\overline{G}$  tiene más componentes, llegamos a una contradicción de forma análoga. Así  $\overline{G}$  es conexa.

Ahora bien, si  $|V(G)| \leq 2\chi(G) - 2$ , el Teorema 6 dice que  $\overline{G}$  es desconexo, lo que contradice (2), por lo tanto  $|V(G)| \geq 2\chi(G) - 1$ .

Si  $|V(G)| = 2\chi(G)$  entonces para cualquier  $x \in V(G)$ , se tiene que

$$2\chi(G) - 1 = |V(G - x)| \leq 2\chi(G - x)$$

entonces

$$\chi(G) - \frac{1}{2} \leq \chi(G - x) \leq \chi(G),$$

es decir,

$$\chi(G - x) = \chi(G) \text{ (dado que } \chi \text{ es un entero) lo cual contradice (1).}$$

Por lo tanto

$$(3) |V(G)| = 2\chi(G) - 1 \text{ (es decir, } \chi(G) = \frac{|V(G)|+1}{2}\text{)}.$$

Dado que  $G \not\succeq K_{\chi(G)}$  y que  $|V(G)| = 2\chi(G) - 1$  se tiene que  $G \not\succeq K_{\lceil \frac{|V(G)|+1}{2} \rceil} = K_{\lceil V(G)/2 \rceil}$ , siendo así  $G$  un contraejemplo de H.3. Por lo tanto tenemos que

**Teorema 14** *Las conjeturas H.2 y H.3 son equivalentes. Más aún, cualquier contraejemplo de H.3 es contraejemplo de H.2 y cualquier contraejemplo de orden mínimo de H.2 es un contraejemplo de H.3.*

Supongamos que  $G_1$  es un contraejemplo de H.2 tal que tiene el número cromático más pequeño. Entonces  $\chi(G_1) \leq \chi(G)$ , pero  $|V(G_1)| \geq |V(G)|$  (por la minimalidad de  $G$ ). Entonces como  $\alpha(G_1) = 2$  se sigue que  $2\chi(G) - 1 = |V(G)| \leq |V(G_1)| \leq 2\chi(G_1)$ , pero  $\chi(G_1) \leq \chi(G)$  por lo tanto la única opción es que  $\chi(G) = \chi(G_1)$ , y esto prueba el siguiente teorema:

**Teorema 15** *Si  $G$  es un contraejemplo más pequeño de H.2, en términos de  $|V(G)|$ , entonces  $G$  es un contraejemplo más pequeño de H.2 en términos de  $\chi(G)$ .*

Otra propiedad de  $G$  puede derivarse de que si  $x \in V(G)$  entonces  $\alpha(G - x) \leq \alpha(G) = 2$  y  $2\chi(G - x) = 2\chi(G) - 2 = |V(G)| - 1 = |V(G - x)|$ , es decir,  $G - x$  tiene una  $(\chi(G) - 1)$ -coloración en la cual, cada clase de color tiene tamaño exactamente dos. Es decir, cada color se está usando exactamente 2 veces, por lo que hay un apareamiento perfecto para  $\overline{G} - x$ .

(4)  $\forall x \in V(G) : \overline{G} - x$  tiene un apareamiento perfecto, es decir, el complemento  $\overline{G}$  de  $G$  es factor-crítico.

Sea  $xy \in E(G)$  y  $H$  la gráfica obtenida de  $G$  contrayendo  $xy$  en un nuevo vértice  $z$ . Entonces  $H$  tiene un vértice menos que  $G$ , con lo cual,  $G \succ H \succ K_{\chi(H)}$  por la minimalidad de  $G$ . Por lo tanto  $\chi(H) < \chi(G)$ .

Una  $(\chi(G) - 1)$ -coloración de  $H$  da inmediatamente una  $(\chi(G) - 1)$ -coloración de  $G - xy$ , dando a  $x$  y  $y$  el color de  $z$  y dejando fijos todos los otros colores. Pero una  $(\chi(G) - 1)$ -coloración de los  $2\chi(G) - 1$  vértices de  $G - xy$  tiene al menos una clase de color con tamaño mayor o igual a tres. Por lo tanto

(5)  $\forall xy \in E(G) : \alpha(G - xy) = 3 > 2 = \alpha(G)$ , esto es,  $G$  es  $\alpha$ -crítica.

Finalmente, sea  $H$  un menor propio de  $G$ , es decir,  $G \succ H$  y  $H \neq G$ . Si  $H$  tiene menos vértices que  $G$ , entonces  $H \succ K_{\chi(H)}$  con lo que  $\chi(H) < \chi(G)$ .

Si  $|V(H)| = |V(G)|$ , entonces  $H \subset G - xy$  y para alguna  $xy \in E(G)$  se tiene que  $\chi(H) \leq \chi(G - xy) < \chi(G)$ . Entonces en cualquier caso  $\chi(H) < \chi(G)$ . Por lo tanto

(6)  $\forall H, G \succ H$  y  $H \neq G$ :  $\chi(H) < \chi(G)$ , es decir,  $G$  es contracción-crítica.

Por la minimalidad de  $G$  (en cuanto al número cromático -Teorema 18), de (3) y de (6) se tiene

(7)  $\chi(G) \geq 7$ .

(8)  $G$  es 7-vértice-conexa (Teoremas 1 y 2).

(9)  $\delta(G) \geq \chi(G)$ .  $G$  es  $\chi(G)$ -arista-conexa. (Teorema 7)

De (3) y (9) y del Teorema 1 obtenemos (10); el cual junto con (3) implica (11)

(10)  $G$  es Hamiltoniana.

(11)  $G$  es factor-crítica.

Ahora veremos que

(12)  $G$  no tiene apareamientos conexos dominantes distintos del vacío.

**Demostración.** Supongamos que  $M \neq \emptyset$  es un apareamiento conexo dominante en  $G$ . Definamos  $G' = G - V(M)$ .  $G'$  es más pequeña que  $G$ , por lo que, por hipótesis de inducción,  $G' \succ K_{\lceil \frac{n'}{2} \rceil}$ . Por otro lado,  $\lceil \frac{n'}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{2} - |M| \rceil$ . Ahora, contrayendo a  $M$  en  $|M|$  vértices (ojo,  $|M| = \frac{|V(M)|}{2}$ ), tenemos que, por ser un apareamiento conexo, al contraer  $M$  en  $|M|$  vértices, obtenemos a  $K_{|M|}$ , pero por ser un apareamiento dominante, todos los vértices de  $G'$  están unidos a cada uno de los  $|M|$  de la contracción, así tenemos que

$$G \succ K_{\lceil \frac{n}{2} - |M| + |M| \rceil} = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

lo cual es imposible, dado que  $G$  es un contraejemplo a esta conjetura.†

Claramente una gráfica  $H$  no contiene una 2-trayectoria si y sólo si toda componente de  $H$  es una gráfica completa. (ver fig. 4.2)

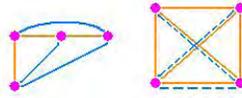


Figura 4.2: Sucede así para todo vértice que se agregue. Por lo que, siempre se obtiene una completa

Si  $H$  tiene una 2-trayectoria  $P = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\alpha(H) = 2$ , entonces, contrayendo  $P$  a un vértice  $z$ , éste es adyacente a todos los otros vértices de la gráfica  $H$ , ya que si existe  $v \in V(H)$  tal que  $v$  y  $z$  no fueran adyacentes, entonces se observa que en el conjunto  $\{v, z\}$ , la gráfica inducida por este conjunto es desconexa y si a  $z$  se le *desdobla* a la 2-trayectoria, la gráfica inducida por  $\{v, x_1, x_3\}$  tiene 3-componentes, contradiciendo que  $\alpha(G) = 2$ . Por lo tanto  $z$  es adyacente a  $v$  para cada  $v \in H - V(P)$ . Estas observaciones nos ayudan para ver que:

**Teorema 16** *Sea  $G$  una gráfica con  $\alpha(G) \leq 2$ . Sea  $n = |V(G)|$  y  $\omega = \omega(G)$ . Entonces, se cumple que:*

(a)  $G \succ K_{\lceil(\omega+n)/3\rceil}$ .

(b) Si  $n \geq 2k - 1$  y  $\omega \geq k - 2$ , entonces  $G \succ K_k$ .

**Demostración.** (a) Para el caso  $n = \omega$  se sigue que  $G$  es completa, y el enunciado es trivial.

Ahora procederemos por inducción sobre  $n - \omega$ .

Sea  $K = K_\omega$  la gráfica completa máxima de  $G$  y sea  $H = G - V(K)$ .

Si  $H$  contiene una 2-trayectoria  $P$ , entonces definimos  $G' = G - V(P)$ . Nótese que  $V(P) \cap V(K) = \emptyset$ . Por lo tanto  $K$  es subgráfica de  $G'$ .

Como  $G'$  es una gráfica con menos vértices que  $G$ , y  $\omega(G) = \omega(G')$  entonces, por hipótesis de inducción  $G' \succ K_{\lceil\frac{\omega(G)+(n-3)}{3}\rceil} = K_{\lceil\frac{\omega(G)+n}{3}\rceil-1}$ . Como  $\alpha(G) = 2$  la gráfica resultante de contraer  $P$  a un vértice  $z$  es igual a  $G'$  más un vértice adyacente a cualquier otro de  $G'$ . Entonces  $G$  tiene como menor a  $K_{\lceil\frac{\omega(G')+n}{3}\rceil} = K_{\lceil\frac{\omega(G)+n}{3}\rceil}$ .

Si  $H$  no contiene una 2-trayectoria, entonces  $H$  es una gráfica completa ó es la unión disjunta de dos gráficas completas. En ambos casos, afirmamos que  $2\omega \geq n$ . En el primer caso, si  $H$  es una gráfica completa, es claro que  $2\omega \geq n$ . Ahora supongamos que,  $H$  es la unión disjunta de dos gráficas completas  $H_1, H_2$ .

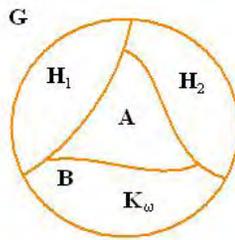


Figura 4.3:

Como  $\alpha(G) = 2$ , entonces cada vértice de  $K$  es adyacente a todos los vértices de  $H_1$  ó es adyacente a todos los vértices de  $H_2$ .

Sea  $A = \{v \in V(K) | v \text{ es adyacente a todos los vértices de } H_1\}$

y

$B = \{v \in V(K) | v \text{ es adyacente a todos los v\u00e9rtices de } H_2\}$ .

Claramente,

$$|H_1| + |A| \leq \omega$$

$$|H_2| + |B| \leq \omega.$$

Entonces

$$|H_1| + |H_2| + |A| + |B| \leq 2\omega,$$

$$\text{pero } |A| + |B| = \omega \text{ y } n = |H_1| + |H_2| + \omega$$

entonces

$$|H_1| + |H_2| + \omega \leq 2\omega$$

con lo que

$$n \leq 2\omega.$$

As\u00ed entonces

$3\omega \geq \omega + n$ , de donde se sigue que  $\omega \geq \lceil \frac{n+\omega}{3} \rceil$ , y como claramente  $G \succ K_w$  obtenemos (a).

(b) Para probar esto, supondremos lo contrario, es decir,  $G \not\succeq K_k$ . Obs\u00e9rvese que por (a)  $n = 2k - 1$ , y  $\omega = k - 2$ .

Dado que el conjunto de los v\u00e9rtices no vecinos a cualquier v\u00e9rtice de  $G$ , induce una gr\u00e1fica completa entonces  $\delta(G) \geq k$ . Si  $k = 4$ ,  $\omega = 2$  y entonces, la vecindad de cualquier v\u00e9rtice ser\u00eda independiente, contradiciendo que  $\alpha(G) = 2$ . Si  $k = 5$  entonces  $n = 9$  y  $\delta(G) \geq 5$  lo que implica que un v\u00e9rtice de  $G$  tiene grado al menos 6. Como el n\u00famero de Ramsey  $r(3, 3)$  es 6 y  $\alpha(G) \leq 2$ , tendr\u00edamos  $\omega \geq 4$ , lo que es una contradicci\u00f3n, por tanto  $k \geq 6$ .

Ahora, sea  $K = K_{k-2}$  una subgr\u00e1fica completa m\u00e1xima de  $G$  y sea  $H = G - V(K)$ . Si  $H$  no contiene una 2- trayectoria entonces  $H$  es una gr\u00e1fica completa \u00f3 la uni\u00f3n disjunta de dos completas. As\u00ed, siguiendo la prueba de (a) se tiene que  $\omega \geq \lceil n/2 \rceil \geq \lceil \frac{2k-1}{2} \rceil = k$ , lo que es una contradicci\u00f3n, pues  $G \not\succeq K_k$ .

Si  $H$  tiene dos 2-trayectorias disjuntas por v\u00e9rtices, entonces contrayendo ambas 2-trayectorias,

obtenemos un  $K_k$ , lo cual es imposible. Por tanto  $H$  no tiene dos 2-trayectorias disjuntas.

Entonces sea  $P = xzy$  una 2-trayectoria de  $G - V(K)$ . Afirmamos que  $G - V(P)$  tiene dos subgráficas completas máximas disjuntas en vértices,  $K'$  y  $K''$ .

Esto es evidente si  $G - V(K) - V(P)$  es una gráfica completa. Por otro lado, si  $G - V(K) - V(P)$  es la unión disjunta de gráficas completas  $H_1$ ,  $H_2$  y como  $\alpha(G) = 2$ , cada vértice de  $K$  está unido a todos los vértices de  $H_1$  ó a todos los vértices de  $H_2$ . Dado que  $|V(K)| + |(H_1)| + |(H_2)| = 2k - 4$  y  $\omega = k - 2$  se tiene que en este caso la afirmación también es cierta.

Dado que  $\omega = k - 2$ ,  $x$  tiene un “no vecino”  $x'$  en  $K'$  y  $y$  tiene un “no vecino”  $y' \in K$ . Más aún, por ser  $\alpha(G) = 2$  implica que  $x' \neq y'$  y que  $x'y$  y  $xy'$  son aristas de  $G$  (como se muestra en la figura 4.4).

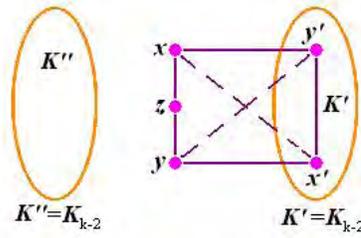


Figura 4.4:

Dado que  $x'y'x$  y  $y'x'y$  son 2-trayectorias disjuntas en  $G - V(K'')$ , los vértices  $x$ ,  $z$  y  $y$  son cada uno adyacentes a todos los vértices de  $H = K' - x' - y'$  o a ninguno. Como  $\alpha(G) \leq 2$  podemos asumir que  $x$  es adyacente a todos los vértices de  $H$ , entonces cualesquiera dos vértices  $x''$  y  $y''$  de  $H$  producen dos 2-trayectorias disjuntas  $x'x''x$  y  $y'y''y$  de  $G - (K'')$ , lo cuál es imposible. Nótese que  $|V(H)| = |V(K')| - 2 = k - 4 \geq 2$  (vimos que  $k \geq 6$ ).

Si, por otro lado,  $y$  no es adyacente a ninguno de los vértices de  $H$ , entonces el grado de  $y$  en  $G$  es a lo más  $k - 3 + 2 = k - 1$ , contradiciendo el hecho de que  $\delta(G) \geq k$ . Nótese que  $y$  no es adyacente a todos los vértices de  $K'' = K_{k-2}$  dado que  $\omega = k - 2$ .

Así, obtenemos una contradicción en todos los casos, y entonces, el enunciado (b) es probado.†

Como  $G$  es un contraejemplo mínimo de H.2 entonces por (3) tenemos que:  $|V(G)| = 2\chi(G) - 1$ . Si  $\omega(G) = 2\chi(G) - 2$ , entonces, por el teorema anterior  $G$  tendría como menor a  $K_{\chi(G)}$ . Por lo tanto

$$(13) \quad \omega(G) \leq \chi(G) - 3.$$

Dado que los no vecinos de cualquier vértice en  $G$  inducen una gráfica completa concluimos de las propiedades (13) y (3) que

$$(14) \quad \delta(G) \geq \chi(G) + 1.$$

**Teorema 17** *Sea  $G$  una gráfica conexa con  $\alpha(G) = 2$  y  $\kappa(G) \leq |V(G)|/2$ . Entonces  $G$  contiene un apareamiento conexo dominante no vacío.*

**Demostración.** Sea  $S \subset V(G)$  un conjunto de corte mínimo en  $G$ . Obsérvese que  $G - S$  tiene exactamente dos componentes, digamos  $A$  y  $B$ . Además, inducen subgráficas  $G[A]$  y  $G[B]$  completas. Más aún, cada vértice de  $S$  es adyacente a todos los vértices de  $A$  o a todos vértices de  $B$ .

Sean  $S_A = \{v \in S | v \text{ adyacente a todo } A\}$  y  $S_B = \{v \in S | v \text{ adyacente a todo } B\}$ . Sea  $s_A = |S_A|$  y  $s_B = |S_B|$ ,  $s = |S| = \kappa(G)$ ,  $a = |A|$  y  $b = |B|$ .

*Caso 1.* Supongamos que  $s_A \leq b$  y  $s_B \leq a$ . Afirmamos que existe un apareamiento completo de  $S_b$  en  $A$  y uno de  $S_A$  en  $B$ . Sea  $C$  un subconjunto de  $S_B$  y  $\Gamma(C)$  todos los vecinos de  $C$  en  $A$ . Claramente  $S - C \cup \Gamma(C)$  es un conjunto de corte en  $G$  y como  $S$  es mínimo, el cardinal de  $C$  es menor o igual al cardinal de  $\Gamma(C)$ . Así, por el Teorema 3, vemos que hay un apareamiento completo de  $S_B$  en  $A$ . De manera análoga, se ve que hay un apareamiento completo de  $S_A$  en  $B$ . Sea  $M_A$  un apareamiento completo de  $S_B$  en  $A$  y sea  $M_B$  un apareamiento completo de  $S_A$  en  $B$ . Entonces  $M = M_A \cup M_B$  contiene un apareamiento conexo dominante en  $G$ .

*Caso 2.* Supongamos que  $s_A > b$ , y supongamos también que  $a \geq s - b$ . Afirmamos que hay un apareamiento completo de  $B$  en  $S_A$ . Sea  $C$  un subconjunto de  $B$  y  $\Gamma(C)$  los vecinos de  $C$  en  $S_A$ . Entonces  $S_B \cup (B - C) \cup \Gamma(C)$  es un conjunto de corte de  $G$ , como  $S$  es mínimo

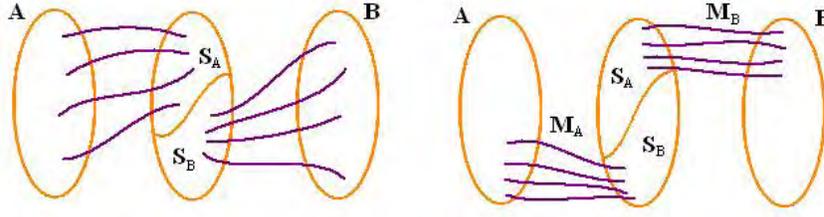


Figura 4.5:

$s_B + |B - C| + |\Gamma(C)| \geq |S| = s_A + s_B > b + s_B$ ; por lo que  $|B - C| + |\Gamma(C)| > b$  por lo que  $\Gamma(C) > C$ . Por tanto, por el teorema 3, la afirmación se sigue. Así, sea  $M_B$  un apareamiento completo de  $B$  en  $S_A$ . Ahora, sea  $M_B(B)$  el conjunto de todos los vértices en  $S_A$  apareados por  $M_B$ . Entonces  $S - M_B(B)$  tiene tamaño  $s - b \leq a$ . Por lo tanto existe un apareamiento completo  $M'$  de  $S - M_B(B)$  en  $A$ . Finalmente, sea  $M = M_B \cup M'$ . Entonces  $M = M_B \cup M'$  es un apareamiento conexo dominante en  $G$ .

Sólo falta considerar el caso  $s_A > b$  y  $a < s - b$ . Pero entonces,  $s > a + b$  y  $s + a + b = |V(G)|$ . Por tanto  $s = \kappa(G) > |V(G)|/2$ , lo cual es una contradicción.†

De (12) sabemos que  $G$  no contiene un apareamiento conexo dominante no vacío; (3) dice que  $|V(G)| = 2\chi(G) - 1$  de lo que se sigue

$$(15) \quad \kappa(G) \geq \chi(G).$$

Ésto pues si  $\kappa(G) < \chi(G) = \frac{|V(G)|+1}{2}$  implica que  $\kappa(G) \leq \frac{|V(G)|}{2}$ , con lo que se tendría un apareamiento conexo dominante no vacío.

Ahora, sean  $x, y$  dos vértices no adyacentes en  $G$ . Sea  $B$  el conjunto de vecinos en común de  $x$  y  $y$ . Sea  $A = \{v \in G | v \text{ es adyacente a } x \text{ pero no a } y\}$  sea  $C = \{v \in G | v \text{ es adyacente a } y \text{ que no lo sean de } x\}$ . Entonces como  $\alpha(G) = 2$ , ambas,  $G[A]$  y  $G[C]$  son completas. Más aún,  $B \neq \emptyset$  dado que  $G$  no contiene a  $K_{\lfloor |V(G)|/2 \rfloor}$  como menor.

(16) Sea  $b \in B$ . Entonces  $b$  tiene al menos un “no vecino” en  $A$  y al menos un “no vecino” en  $C$  (en particular  $A$  y  $C$  son no vacíos).

**Demostración.** Por (5) sabemos que  $G$  es  $\alpha$ -crítica, o sea, si  $xb$  es una arista de  $G$ , entonces  $\alpha(G - xb) = 3$ . El común “no vecino”  $c$  de  $x$  y  $b$  debe pertenecer a  $C$ . De la misma

manera, se toma la arista  $yb$ , entonces el común “no vecino”  $a$  de  $y$  y  $b$  debe pertenecer a  $A$ . †

(17) Sea  $a \in A$  y  $c \in C$ . Entonces  $a$  es adyacente a  $c$  si y sólo si tienen un común “no vecino”  $b \in B$ .

**Demostración.** Si  $a$  y  $c$  tienen un “no vecino” común  $b$ , entonces ellos están unidos por una arista, dado que  $\alpha(G) = 2$ . Inversamente, si  $a$  y  $c$  están unidos por una arista  $ac$ , entonces  $\alpha(G - ac) = 3$ , implicando un común “no vecino”  $b$  de  $a$  y  $c$ . El vértice  $b$  debe pertenecer a  $B$  dado que  $\alpha(G) = 2$ . †

(18) Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son los descritos anteriormente, entonces  $2 \leq |A| \leq k-4$ ,  $2 \leq |C| \leq k-4$  y  $5 \leq |B| \leq 2k-7$ , donde  $k = \chi(G)$ .

**Demostración.** Dado que  $x$  es adyacente a todos los vértices de  $A$ , de (13) se tiene que  $\omega(G) \leq k-3$ , por lo que  $|A| \leq k-4$ . Análogamente,  $|C| \leq k-4$ . Pero entonces  $|B| = 2k-3 - |A| - |C| \geq 5$ .

Sabemos que ambos,  $A$  y  $C$  son no vacíos. Entonces, supongamos que  $|A| = 1$ . Por (16) no existen aristas entre  $A$  y  $B$ . Por esta razón  $G[B]$  es completa. Entonces  $B$  ó  $C$  inducen un  $K_{k-2}$ . Esto contradice la propiedad (13). †

(19) Cualesquiera dos vértices no adyacentes  $x$  y  $y$  en  $G$  están unidos por al menos cinco 2-trayectorias. Más aún, toda 2-trayectoria en  $G$  es parte de un  $C_5$  inducido.

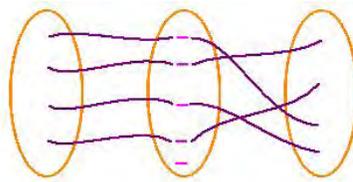


Figura 4.6:

**Demostración.** La primera parte se sigue inmediatamente del hecho de que  $|B| \geq 5$  y la segunda parte es inmediata de (16) y (17). †

## 4.1. Gráficas Infladas

En este capítulo presentaremos una familia infinita de gráficas, y veremos que tanto ellas como sus gráficas *infladas*, cumple la conjetura de Hadwiger.

Dado una gráfica  $G$ , decimos que la gráfica  $H = inf(G)$  es una *gráfica inflada* de  $G$ , si cada vértice  $v \in G$  es remplazado por una gráfica completa  $K_v$  (ó por el conjunto vacío); y si dos vértices  $v$  y  $u$  de  $G$  son adyacentes, entonces en  $H$  todo vértice de  $K_u$  es adyacente a todo vértice de  $K_v$ . La gráfica completa  $K_u$  con la cual se remplazó a  $u$ , es llamada un **átomo** de la gráfica inflada. Claramente, la gráfica inflada preserva el número de independencia, es decir  $\alpha(H) = \alpha(G)$ .

Obsérvese que H.3 dice que cualquier gráfica inflada  $H$  obtenida de una gráfica  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$  debería satisfacer  $H \succeq K_{\lceil |V(H)|/2 \rceil}$ .

Ahora sí, procedemos a definir nuestra familia infinita de gráficas: Para  $k \geq 1$  definimos una familia de gráficas  $C_{3k-1}^{k-1}$  como sigue.

Para  $k = 1$  sea  $C_2^0 = \overline{K_2}$ . Para  $k \geq 2$  se define  $C_{3k-1}^{k-1}$  como la gráfica  $G$ , donde  $V(G) = \{x_1, \dots, x_{3k-1}\}$  y para cada  $1 \leq i \leq 3k-1$ ,  $x_i$  es adyacente a  $x_{i+j}$  y a  $x_{i-j}$ , donde  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ .

**Teorema 18** *En cada gráfica inflada  $G$  de  $C_{3k-1}^{k-1}$ , con  $k \geq 1$  y  $n$  vértices, existe un apareamiento conexo dominante  $M$  tal que contrayendo aristas de  $M$ , obtendremos una gráfica que contenga un  $K_{\lceil n/2 \rceil}$ .*

**Demostración.** La prueba se hará por inducción sobre  $k$ .

Para  $k = 1$ , la gráfica consiste en dos gráficas completas disjuntas y, entonces  $G \supseteq K_{\lceil n/2 \rceil}$  y  $M = \emptyset$  lo que verifica la afirmación.

Si  $k = 2$ , escojamos el átomo más pequeño en  $C_5^1$  y llamémosle  $B_1$ . Ahora, se etiquetan a los átomos restantes como  $B_2, B_3, B_4$  y  $B_5$  en sentido de las manecillas del reloj, ó en sentido contrario, de tal suerte que en ese etiquetamiento  $|B_4| \leq |B_3|$ . Sea  $M_1$  un apareamiento de  $B_1$

en  $B_2$  el cual cubre todos los vértices de  $B_1$  y sea  $M_2$  un apareamiento de  $B_4$  en  $B_3$  el cual cubra todo  $B_4$ .

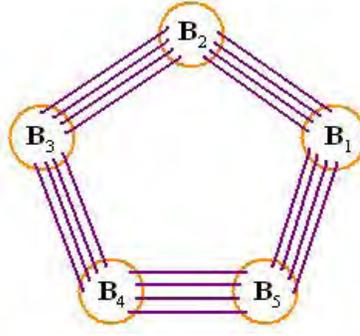


Figura 4.7:

Entonces  $M_0 = M_1 \cup M_2$  es un apareamiento conexo dominante. Los vértices no apareados forman dos gráficas completas, una llamada  $B_5$  y la otra, es una subgráfica completa inducida de  $B_2 \cup B_3$ . Se toma la más grande de estas dos subgráficas y la renombramos como  $B_0$ . Obsérvese que  $B_0$  tienen al menos  $\frac{n-2|B_1|-2|B_4|}{2}$  vértices. Entonces contrayendo todas las aristas del apareamiento  $M_0$  se obtiene un menor (que junto con  $B_0$ ), tiene al menos  $\frac{n-2|B_1|-2|B_4|}{2} + |B_1| + |B_4| = n/2$  vértices y es completa; con lo cual el teorema es cierto para  $k = 2$ .

Supongamos que el teorema es verdadero para toda  $k' \leq k$  y consideremos una gráfica inflada de  $C_{3k-1}^{k-1}$ . Escojamos el átomo más pequeño y llamémosle  $B_1$ . El resto de los átomos (en sentido de las manecillas del reloj, ó en contrasentido) por  $B_2, \dots, B_{3k-1}$  de tal forma que  $|V(B_{2k})| \leq |V(B_{k+1})|$ .

Ahora sea  $M_1$  un apareamiento de  $B_1$  en  $B_k$ , el cual cubre todos los vértices de  $B_1$ , y  $M_2$  un apareamiento de  $B_{2k}$  en  $B_{k+1}$ , el cual cubre todos los vértices de  $B_{2k}$ . Observemos que  $M_0 = M_1 \cup M_2$  es entonces un apareamiento conexo dominante. Sea  $D_k$  la gráfica completa formada por todos los vértices no apareados de  $B_k \cup B_{k+1}$ .

Así, remplazando  $B_k \cup B_{k+1}$  con  $D_k$  y borrando  $B_1$  y  $B_{2k}$ , obtendremos una gráfica  $H$  que contiene como subgráfica una gráfica inflada de  $C_{3(k-1)-1}^{k-1}$ . Pero por hipótesis de inducción, esta gráfica contiene un apareamiento conexo dominante  $M'$  el cual al contraerlo se obtiene una

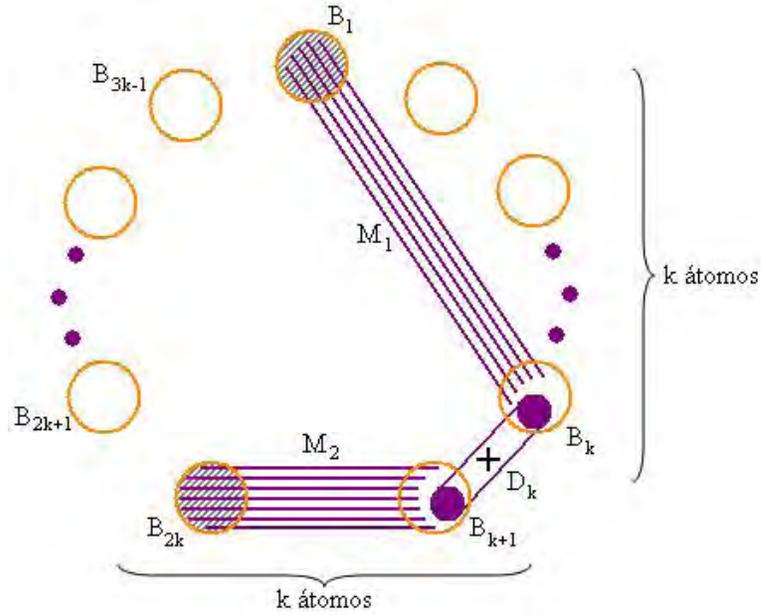


Figura 4.8:

gráfica completa con la mitad del número de vértices de  $H$ , siendo  $|V(H)| = n - 2|B_1| - 2|B_{2k}|$ . Así  $M \cup M'$  es un apareamiento conexo dominante en la gráfica inflada  $C_{3k-1}^{k-1}$ . Como  $|V(M)| = 2|B_1| + 2|B_{2k}|$ , entonces  $M \cup M'$  es un apareamiento conexo dominante de la gráfica inflada de  $C_{3k-1}^{k-1}$  que al contraerlo se obtiene una gráfica completa en la mitad del número de vértices de la inflación y esto prueba el teorema.†

# Bibliografía

- [1] **Deistel Reinhard.** *Graph Theory.* Electronic Edition 2000, Springer-Verlag. New York (1997-2000)
- [2] **Oystein Ore** *The four-color problem,* Academic Press. New York (1967)
- [3] **D. R. Woodall,** *A short proof of a theorem of Dirac's about Hadwiger's conjecture,* Journal of Graph Theory. Vol. 16. pp. 79-80 (2006)
- [4] **J. A. Bondy y USR Morty,** *Graph Theory with Applications.* Department of Combinatorics Optimization. University of Waterloo. Ontario. Canadá.(1976)
- [5] **Neil Robertson, Paul Seymour y Robin Thomas** *Hadwiger's Conjecture For K-6 Free Graphs.* Combinatorica. Springer-Verlag. Vol 14. (1993) pp. 279-361.
- [6] **Michael D. Plummer, Michel Stiebitz y Bjarne Toft** *On a Special case of Hadwiger's Conjecture.* Discussiones Mathematicae. Graph Theory Vol.23 (2003) pp. 333-363
- [7] **H. Young Peyton A.** *Quick Proof of Wagner's Equivalence Theorem,* J. London Math Soc. Vol 2 (1971). pp. 661-664