UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIÓN DE DOMINIOS LIPSCHITZ MEDIANTE CAMPOS VECTORIALES TRANSVERSALES

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

EDGARDO ROLDÁN PENSADO

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. JORGE RIVERA NORIEGA.

MÉXICO, D.F. AGOSTO, 2009

Índice general

Introducción

En el área del Análisis Matemático se suele trabajar en distintos tipos de dominios obteniendo diversos resultados. De esta forma en un dominio con frontera suave se tienen muchos resultados agradables pero en dominios más generales suele ser necesario aumentar el número de hipótesis o debilitar los resultados.

El Teorema de la Divergencia se enuncia usualmente para dominios suaves y funciones en la clase C^1. Como éste, otros teoremas asumen cierta regularidad de las cartas coordenadas, regularidad que involucra diferenciabilidad.

En contraste, la noción de curva rectificable requiere en cierto modo la aproximación de la curva por medio de poligonales, y ésta es la única regularidad que está en juego. De hecho, una noción de teoría geométrica de la medida extiende el concepto de rectificabilidad. Se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es rectificable si, salvo en un conjunto de medida cero, es la unión de gráficas de funciones Lipschitz.

Recientemente surge el interés en un área del análisis de estudiar aspectos bien conocidos cuando el ambiente es el espacio euclidiano, pero ahora permitiendo que el ambiente sea un dominio de tipo Lipschitz.

En particular Mitrea, Taylor y otros [8, 9, 10, 11] estudian problemas de tipo Dirichlet cuando el espacio ambiente es una variedad riemanniana. En esta situación es de interés que los dominios Lipschitz sean invariantes bajo ciertas transformaciones geométricas, más precisamente difeomorfismos de tipo C^1.

La forma natural de definir un dominio Lipschitz Ω en una variedad es haciéndolo localmente: Si para cada $p \in \partial\Omega$ existe una vecindad U de p tal que $U \cap \partial\Omega$ es esencialmente la gráfica de una función Lipschitz. Sin embargo, esta definición deja a varios autores insatisfechos debido a la dificultad de probar la invariancia de estos dominios bajo las transformaciones geométricas ya mencionadas.

El resultado principal que presentamos es una caracterización de dominios Lipschitz, ésta se logra utilizando campos vectoriales y con base en este resultado se puede dar una definición alternativa para dominios Lipschitz en variedades riemannianas.

Daremos a continuación una descripción técnica de los resultados de esta tesina, advirtiendo al lector que las nociones a continuación vertidas se definirán en el grueso de la tesina.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío. El resultado principal que aquí demostramos establece que un dominio de perímetro localmente finito Ω es fuertemente Lipschitz si y sólo si existe un campo vectorial en $\partial\Omega$ que es transversal a Ω. Esto puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\Omega \text{ es un dominio fuertemente Lipschitz} \iff \rho(\Omega) < \sqrt{2},$$

donde $\rho(\Omega) = \text{ínf}\{\|\nu - f\|_{L^\infty(\partial\Omega,\sigma)} : f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n), |f| = 1\}$ y ν es el vector normal exterior a Ω. Escrito de esta forma, el teorema puede ser comparado con el siguiente resultado de [5]:

$$\Omega \text{ es un dominio } C^1 \iff \rho(\Omega) = 0.$$

El teorema principal está demostrado en [5] y hemos seguido las líneas de su demostración. Para hacer esta tesina autocontenida hemos incluido algunas preliminares de [1, 3, 7] y a partir de esto enunciamos y demostramos el teorema de [5] aludido. En este trabajo nos limitamos a demostrar la caracterización y no tratamos las variedades en absoluto. Utilizamos una definición de dominio localmente fuertemente Lipschitz distinta pero equivalente a la utilizada en [5], esto nos permite simplificar la demostración.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo repasamos algunos conceptos de análisis y teoría de la medida que utilizaremos a lo largo de esta Tesina. Una buena referencia para los conceptos básicos de análisis es [1]. Para teoría de la medida nos basamos principalmente en [2] y algunos otros conceptos se pueden encontrar en [3, 7].

Trabajaremos principalmente en $\mathbb{R}^n$ y a lo largo de este trabajo n será un número natural fijo. Como es usual, $|\cdot|$ denotará la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ y para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, $B(x,r)$ es la bola abierta centrada en x de radio r. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, 2^X denotará al conjunto potencia de X.

Definición 1.1. Una función $\mu : 2^X \to [0,\infty]$ es una *medida sobre* X si

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ siempre que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Definición 1.2. Sea μ una medida sobre X y $A \subset X$. La *restricción de* μ *a* A se define como

$$(\mu\lfloor A)(B) = \mu(A \cap B) \qquad \text{para todo } B \subset X.$$

Definición 1.3. Un conjunto $A \subset X$ es *μ-medible* si para todo $B \subset X$ se satisface

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Es importante aclarar una diferencia importante entre [2] y otros textos. Lo que acabamos de definir como medida es llamado *medida exterior* en otros textos. El término *medida* se utiliza usualmente para referirse a una medida restringida al conjunto de subconjuntos medibles.

No es difícil ver que si $\mu(A) = 0$, entonces A es medible. A estos conjuntos se les llama *conjuntos μ-nulos*. Cuando se diga que la propiedad P se cumple *casi en todas partes* (c.t.p.) significa que la propiedad P se cumple en $X \setminus A$ para cierto $A \subset X$ con $\mu(A) = 0$. De igual forma, cuando se diga que la propiedad P se cumple *para casi todo $x \in B$* significa que la propiedad P se cumple en $B \setminus A$ para cierto $A \subset X$ con $\mu(A) = 0$.

Teorema 1.4. *El conjunto de conjuntos μ-medibles es una σ-álgebra. Además, si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos μ-medibles, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

i) Si los elementos de la familia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ son disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

ii) Si $A_1 \subset \cdots A_k \subset \cdots$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

iii) Si $A_1 \supset \cdots A_k \supset \cdots$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Existen medidas importantes que están relacionadas con la topología del conjunto X, es de especial importancia el caso en el que $X = \mathbb{R}^n$.

Definición 1.5. La *σ-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}^n$ es la menor σ-álgebra que contiene a los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. A los elementos de esta σ-álgebra se les llama *conjuntos borelianos.*

Definición 1.6. Sea μ una medida sobre $\mathbb{R}^n$. Decimos que

i) μ es una *medida regular* si para cada $A \subset X$ existe un conjunto μ-medible B tal que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.

ii) μ es una *medida de Borel* si todo conjunto boreliano es μ-medible.

iii) μ es una *medida de Borel regular* si μ es medida regular y también es medida de Borel.

iv) μ es una *medida de Radon* si μ es medida de Borel regular y $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Para funciones definidas en un espacio con una medida, queremos definir la integral de tal función, pero para poder hablar de integrabilidad es necesario primero definir funciones medibles y simples.

Definición 1.7. Sea Y un espacio topológico. Una función $f : X \to Y$ es μ-medible si para cada abierto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ es μ-medible.

Teorema 1.8. *Las funciones medibles tienen las siguientes propiedades:*

i) Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son dos funciones μ-medibles, entonces también lo son $f + g$, fg, $|f|$, $\min(f, g)$ y $\max(f, g)$. Si $g \neq 0$ en X, entonces f/g también es μ-medible.

ii) Si las funciones $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ son μ-medibles, entonces $\inf_{k\geq 1} f_k$, $\sup_{k\geq 1} f_k$, $\liminf_{k\to\infty} f_k$ y $\limsup_{k\to\infty} f_k$ también son μ-medibles.

Definición 1.9. Una función $g : X \to [-\infty, \infty]$ es *simple* si la imagen de g es a lo más numerable.

Dada $f : X \to [-\infty, \infty]$ escribiremos $f^+ = \max(f, 0)$ *la parte positiva de* f y $f^- = \max(-f, 0)$ *la parte negativa de* f. La función f la podemos escribir como $f^+ - f^-$.

Definición 1.10. Si $g : X \to [0, \infty]$ es una función simple y μ-medible, definimos la *integral de* g como

$$\int g d\mu = \sum_{0\leq y\leq\infty} y\mu\left(g^{-1}\{y\}\right).$$

Si $g : X \to [-\infty, \infty]$ es una función simple μ-medible tal que $\int g^+ d\mu < \infty$ ó $\int g^- d\mu < \infty$, entonces llamamos a g una *función μ-integrable simple* y definimos la *integral de* g como

$$\int g d\mu = \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu.$$

Si $f : X \to [-\infty, \infty]$ es una función medible entonces definimos la *integral inferior* y la *integral superior de* f respectivamente como

$$\int_* f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : g \text{ es una función } \mu\text{-integrable simple y } g \leq f \right\},$$

$$\int^* f d\mu = \text{ínf} \left\{ \int g d\mu : g \text{ es una función } \mu\text{-integrable simple y } g \geq f \right\}.$$

Diremos que f es *μ-integrable* si $\int^* f d\mu = \int_* f d\mu$ y definimos la *integral de* f como

$$\int f d\mu = \int_* f d\mu.$$

A diferencia de otros textos, nuestra definición de integrabilidad admite la posibilidad de que la integral de una función sea ∞ ó $-\infty$.

Los siguientes dos teoremas son muy útiles para encontrar el valor de una integral.

Teorema 1.11 (Teorema de la Convergencia Monótona)**.** *Sean $f_k : X \to [0, \infty]$ funciones μ-medibles tales que $f_1 \leq \cdots \leq f_k \leq \ldots$. Entonces*

$$\int \lim_{k\to\infty} f_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu.$$

Teorema 1.12 (Teorema de la Convergencia Dominada)**.** *Sean $g, f, f_k : X \to [0, \infty]$ funciones μ-medibles tales que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, $|f_k| \leq g$ y $\int |g| d\mu < \infty$. Entonces*

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu.$$

En esta Tesina se utilizan principalmente dos medidas en $\mathbb{R}^n$, ambas son medidas muy importantes y muy estudiadas. Estas medidas son la medida de Lebesgue y la medida de Hausdorff. A continuación definimos estas medidas y damos sus propiedades principales.

Definición 1.13. Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ números reales tales que $a_k \leq b_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Una *caja en* $\mathbb{R}^n$ es una conjunto de la forma $A = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$. El *volumen de* A se define como

$$\text{Vol}(A) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

Definición 1.14. La *medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ se define para cualquier $A \subset X$ como

$$\mathcal{L}^n(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{Vol}(B_j) : \{B_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ es una familia de cajas}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right\}.$$

Dado $s \geq 0$, sea $\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)}$, donde $\Gamma(s) = \int_{\mathbb{R}^+} t^{s-1}e^{-t}dt$ es la función Gama. Si n es un natural, entonces $\alpha(n)$ es la medida de Lebesgue de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.15. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $0 \leq s < \infty$. Para cada $0 < \delta \leq \infty$, sea

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\text{diam}C_j}{2}\right)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam}C_j \leq \delta\right\}.$$

La *medida de Hausdorff s-dimensional* se define como

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Teorema 1.16. *La medida de Hausdorff* $\mathcal{H}^s$ *en* $\mathbb{R}^n$ *cumple las siguientes propiedades:*

i) $\mathcal{H}^s$ *es una medida de Borel regular.*

ii) $\mathcal{H}^0(A) = \#(A)$ *para todo* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Aquí* $\#(A)$ *denota la cardinalidad de* A*.*

iii) $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$.

iv) Si $s > n$*, entonces* $\mathcal{H}^s(A) = 0$ *para todo* $A \subset \mathbb{R}^n$.

v) Si $\lambda > 0$*, entonces* $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *para todo* $A \subset \mathbb{R}^n$.

vi) Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es una isometría afín, entonces* $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *para todo* $A \subset \mathbb{R}^n$.

A continuación definimos las funciones Lipschitz y damos algunas de sus propiedades, estas funciones se utilizan posteriormente en la Fórmula de Área que relaciona las medidas de Hausdorff en diferentes espacios.

Definición 1.17. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una *función Lipschitz* si existe $C \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \tag{1.1}$$

para cualesquiera $x, y \in A$.

A la menor constante C que satisface (1.1) se le llama la *constante de Lipschitz de* f y se denota por $\mathrm{Lip}(f)$.

Teorema 1.18 (Rademacher)**.** *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función Lipschitz, entonces f es diferenciable $\mathcal{L}^n$-c.t.p. y en los puntos en los que es diferenciable se tiene que $|Df| \leq$Lip(f).*

Teorema 1.19 (Kirszbraun)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz, entonces existe una función Lipschitz $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $f = \widetilde{f}$ en A y Lip(f) =Lip$(\widetilde{f}\,)$.*

Teorema 1.20. *Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función lineal con $n \leq m$, entonces existen $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simétrico y $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ortogonal tales que*

$$L = O \circ S.$$

Definición 1.21. Si L, S y O son como en el Teorema 1.20, entonces el *Jacobiano de* L es

$$[L] = |\det S|.$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función Lipschitz con $n \leq m$, entonces es diferenciable $\mathcal{L}^n$-c.t.p. y por lo tanto en casi cualquier punto su derivada Df es una función lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Definimos el *Jacobiano de* f en los puntos donde f es diferenciable como

$$Jf = [Df].$$

Ahora estamos preparados para enunciar dos teoremas importantes que generalizan teoremas de Cálculo.

Teorema 1.22 (Fórmula de Cambio de Variable)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz con $n \leq m$. Entonces para cada $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrable se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right) d\mathcal{H}^n(y).$$

Corolario 1.23 (Fórmula de Área)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz con $n \leq m$. Entonces para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-medible se tiene*

$$\int_A Jf(x)d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})d\mathcal{H}^n(y).$$

Ahora definimos espacios de funciones, empezamos con espacios de funciones continuas y seguimos con espacios de funciones medibles.

Definición 1.24. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, entonces

$$\begin{aligned} C(A, \mathbb{R}^m) &= \{f : A \to \mathbb{R}^m : f \text{ es continua}\}, \\ C^k(A, \mathbb{R}^m) &= \{f : A \to \mathbb{R}^m : \text{todas las derivadas parciales de orden} \\ &\qquad\qquad \leq k \text{ de } f \text{ están en } C(A, \mathbb{R}^m)\}, \\ C^k_c(A, \mathbb{R}^m) &= \{f : A \to \mathbb{R}^m : f \in C^k(A, \mathbb{R}^m), \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto en } A\}. \end{aligned}$$

A los elementos de $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ los llamaremos simplemente *funciones diferenciables*.

Definición 1.25. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y μ una medida en $\mathbb{R}^n$. Dado $f : A \to \mathbb{R}$ μ-integrable, definimos *las normas L^1 y L^∞* como

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(A,\mu)} &= \int_A |f| d\mu, \\ \|f\|_{L^\infty(A,\mu)} &= \text{ínf}\left\{t \in \mathbb{R}^+ : \mu\left(\{x : x \in A, |f(x)| > t\}\right) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Los *espacios $L^1(A, \mu)$ y $L^\infty(A, \mu)$* se definen como

$$\begin{aligned} L^1(A, \mu) &= \{f : A \to \mathbb{R} : \|f\|_{L^1(A,\mu)} < \infty\}, \\ L^\infty(A, \mu) &= \{f : A \to \mathbb{R} : \|f\|_{L^\infty(A,\mu)} < \infty\}. \end{aligned}$$

Recordemos que si $k \leq n$ es un entero positivo, entonces un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es un *conjunto suave de dimensión* k si para cada $p \in M$ existen una isometría lineal $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y una función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ con $\varphi(0) = 0$ y $|\varphi(x)| < \varepsilon$ para $|x| < \varepsilon$ tales que

$$\mathcal{C} \cap M = \mathcal{C} \cap (p + \{\theta(x, t) : (x, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \varphi(x) = t\}),$$

donde $\mathcal{C} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : |x| < \varepsilon, |t| < \varepsilon\}$. Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es un *conjunto suave* si es un conjunto suave de dimensión $n - 1$.

Utilizando la Fórmula de Área se puede demostrar que la medida de Hausdorff de un conjunto suave de dimensión k coincide con el volumen k-dimensional que se estudia en Cálculo. Por ejemplo, podemos enunciar el Teorema de la Divergencia de la siguiente manera.

Teorema 1.26 (Teorema de la Divergencia)**.** *Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto con frontera suave y vector normal exterior n. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial diferenciable y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces*

$$\int_V g\,div(F) d\mathcal{L}^n = \int_{\partial V} gF \cdot n d\mathcal{H}^{n-1} - \int_V \nabla g \cdot F d\mathcal{L}^n.$$

Ahora definimos el operador de convolución y damos algunas de sus propiedades.

Definición 1.27. Si μ es una medida en $\mathbb{R}^n$ y $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, entonces *la convolución de f y g* es

$$f * g = \int f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

Teorema 1.28. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$, entonces la convolución de f y g satisface las siguientes propiedades:*

i) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$.

ii) *El operador $*$ es conmutativo, asociativo y distributivo en $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$.*

iii) $a(f * g) = (af) * g$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

iv) *Si f es diferenciable en x, entonces $f * g$ también lo es y $\frac{\partial}{\partial x_k}(f * g) = (\frac{\partial}{\partial x_k} f) * g$ para $k = 1, \ldots, n$.*

Teorema 1.29. *Sea $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $\phi \geq 0$, $supp(f) \subset B(0,1)$ y $\int \phi d\mathcal{L}^n = 1$. Para cada $\delta > 0$ sea $\phi_\delta(x) = \delta^{-n}\phi(x/\delta)$, entonces para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ se tiene*

$$\lim_{\delta \to 0} \|f * \phi_\delta - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)} = 0.$$

A la familia de funciones $\{\phi_\delta\}_{\delta > 0}$ se le llama *aproximación a la identidad.* Esta noción es necesaria porque no existe una función $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ que satisfaga $\phi * f = f$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$.

Finalmente, enunciamos un teorema que necesitaremos más adelante.

Teorema 1.30. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de abiertos en $\mathbb{R}^n$ tales que $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Entonces existe una familia de funciones $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que* *i)* $f_\alpha \geq 0$ *para todo* $\alpha \in I$.

ii) $f_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *para todo* $\alpha \in I$.

iii) $supp(f_\alpha) \subset U_\alpha$ *para todo* $\alpha \in I$.

iv) *Para cada* $x \in A$ *existe un abierto* $V \ni x$ *tal que* $\{\alpha : supp(f_\alpha) \cap V \neq \emptyset\}$ *es finito.*

v) $\sum_{\alpha\in I} f_\alpha(x) = 1$ *para cada* $x \in A$.

A la familia de funciones f_α se le conoce como *partición de la unidad de* A *subordinada a* $\{U_\alpha\}$.

Capítulo 2

Dominios de Perímetro Localmente Finito

El objetivo de este capítulo es definir los dominios de perímetro localmente finito y dar algunos resultados relacionados que serán necesarios más adelante. Se enuncian los teoremas que más nos interesan pero no se dan demostraciones. Para estudiar el tema más detalladamente se recomienda leer el capítulo 5 de [2] y el capítulo 5 de [13].

A partir de este punto n denotará un número entero mayor o igual a 2 y U representará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. Sea $f \in L^1(U, \mathcal{L}^n)$, diremos que f tiene *variación acotada en U* si

$$\sup\left\{\int_U f\,\mathrm{div}(g)d\mathcal{L}^n : g \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1\right\} < \infty.$$

Al conjunto de funciones en U de variación acotada lo denotamos por $BV(U)$. Diremos que f es de *variación localmente acotada* si $f \in BV(V)$ para todo $V \subset U$ cuya cerradura sea compacta y esté contenida en U. Al conjunto de estas funciones las denotamos por $BV_{loc}(U)$.

Una característica de las funciones de variación acotada es que siguen cumpliendo una versión del Teorema de la Divergencia. Recuérdese que si $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ y $g \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n)$, entonces del Teorema de la Divergencia (Teorema 1.26) tenemos

$$\int_U f\mathrm{div}(g)d\mathcal{L}^n = -\int_U g \cdot \nabla f d\mathcal{L}^n. \tag{2.1}$$

Cuando f no es diferenciable pero es de variación localmente acotada, entonces es necesario sustituir al gradiente de f por una medida vectorial.

Teorema 2.2. *Sea $f \in BV_{loc}(U)$, entonces existen una medida de Radon σ en U y una función σ-medible $\upsilon : U \to \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\int_U f \operatorname{div}(g) d\mathcal{L}^n = -\int_U g \cdot \upsilon d\sigma \tag{2.2}$$

para todo $g \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n)$.

La medida σ es única y si $\widetilde{\upsilon}$ es otra función σ-medible que satisface (2.2), entonces $\upsilon = \widetilde{\upsilon}$ σ-c.t.p.

Dado un conjunto $E \subset U$, denotaremos por $\mathbf{1}_E : U \to \mathbb{R}$ a la función característica del conjunto E.

Definición 2.3. Un conjunto $\mathcal{L}^n$-medible $E \subset U$ tiene *perímetro localmente finito en U* si $\mathbf{1}_E$ es una función de variación localmente acotada en U.

A los conjuntos de perímetro localmente finito que también sean abiertos los llamaremos *dominios de perímetro localmente finito*. Normalmente a los dominios se les pide que sean conexos además de abiertos, pero en este trabajo la conexidad no juega ningún papel, por lo que la omitimos.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de perímetro localmente finito en $\mathbb{R}^n$, entonces podemos considerar la medida σ y la función υ asociadas a $\mathbf{1}_\Omega$ del Teorema 2.2. Llamaremos a $\nu = -\upsilon$ el *vector normal exterior a Ω* y a σ la *medida de superficie de Ω*.

Deseamos que el vector normal exterior cumpla ciertas condiciones satisfactorias, sin embargo, es imposible pedir que estas condiciones buenas se satisfagan en todos los puntos. Las fronteras reducidas se definen como los puntos de la frontera en donde se cumplen ciertas condiciones agradables.

Definición 2.4. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto $\mathcal{L}^n$-medible. Entonces dado $x \in \mathbb{R}^n$ decimos que $x \in \partial_* E$, la *frontera en el sentido de teoría de la medida de E*, si

i) $\limsup_{r\to 0^+} r^{-n} \mathcal{L}^n \left(B(x,r) \cap E\right) > 0$,

ii) $\limsup_{r\to 0^+} r^{-n} \mathcal{L}^n \left(B(x,r) \setminus E\right) > 0$.

Si E es de perímetro localmente finito, decimos que $x \in \partial^* E$, la *frontera reducida de E*, si

i) $\sigma(B(x,r)) > 0$ para todo $r > 0$,

ii) $\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\sigma(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \nu \, d\sigma = \nu(x)$,

iii) $|\nu(x)| = 1$.

Teorema 2.5. *Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de perímetro localmente finito, entonces*

$$\partial^* E \subset \partial_* E \subset \partial E \qquad y \qquad \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0.$$

La frontera reducida también nos ayuda a describir con detalle a la medida de superficie. Del trabajo de Federer y de De Giorgi se sabe el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de perímetro localmente finito. Si σ es la medida de superficie de E, entonces*

$$\sigma = \mathcal{H}^{n-1} \lfloor \partial^* E.$$

Debido a que muchas veces es conveniente trabajar a un nivel local, es necesario un resultado que nos diga cómo son los dominios de perímetro localmente finito cerca de algún punto. El siguiente teorema resulta útil en ese sentido.

Teorema 2.7. *Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de perímetro localmente finito y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $E \cap B(x,r)$ es un conjunto de perímetro localmente finito para casi toda $r > 0$. Además, si $E \cap B(x,r)$ es un conjunto de perímetro localmente finito, ν es su vector normal exterior y σ es su medida de superficie, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot \nu d\sigma = \int_{E \cap \partial B(x,r)} g \cdot N d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial_* E \cap B(x,r)} g \cdot \nu d\sigma$$

para todo $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, donde N es el vector normal exterior a $B(x,r)$.

Corolario 2.8. *Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $E, E' \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos de perímetro localmente finito con vectores normales exteriores ν, ν' y medidas de superficie σ, σ' respectivamente. Si $E \cap V = E' \cap V$ para alguna vecindad V de x, entonces existe $r > 0$ tal que*

$$\int_{B(x,r)} g \cdot \nu d\sigma = \int_{B(x,r)} g \cdot \nu' d\sigma'.$$

para todo $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Capítulo 3

Campos Transversales y Dominios Lipschitz

En este capítulo se tratan dos conceptos distintos, los campos transversales y los dominios fuertemente Lipschitz. Se definen estos dos conceptos y se demuestran los resultados necesarios para posteriormente demostrar el resultado principal de este trabajo.

A partir de este momento supondremos que Ω es un dominio de perímetro localmente finito en $\mathbb{R}^n$ con vector normal exterior ν y medida de superficie σ.

Definición 3.1. Dado $p \in \partial\Omega$, diremos que Ω tiene un *campo vectorial continuo transversal cerca de* p si existen $r > 0$, $\kappa > 0$ y un campo vectorial continuo $X : B(p, r) \cap \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$\nu \cdot X \geq \kappa \qquad \sigma\text{-c.t.p. en } B(p, r) \cap \partial\Omega. \tag{3.1}$$

Al campo vectorial X lo llamaremos *campo vectorial continuo transversal a* Ω *cerca de* p.

Si Ω tiene un campo vectorial continuo transversal cerca de p para todo $p \in \partial\Omega$, entonces diremos que Ω tiene *campos vectoriales continuos localmente transversales*.

Diremos que Ω tiene un *campo vectorial continuo transversal global* si existen $\kappa > 0$ y un campo vectorial continuo $X : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$\nu \cdot X \geq \kappa \qquad \sigma\text{-c.t.p. en } \partial\Omega.$$

En este caso llamamos a X un *campo vectorial continuo transversal a* Ω.

Con algunas condiciones adicionales se pueden relacionar los conceptos de la definición anterior.

Teorema 3.2. *Si Ω satisface $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_*\Omega \cap B(p,r)) > 0$ para todo $p \in \partial\Omega$ y $r > 0$, entonces son equivalentes:*

(i) Ω tiene campos vectoriales continuos localmente transversales.

(ii) Para cada $p \in \partial\Omega$ existen $\kappa > 0$, $r > 0$ y un campo vectorial continuo X en $B(p,r) \cap \partial\Omega$ tales que $|X| = 1$ en $B(p,r) \cap \partial\Omega$ y se satisface (3.1).

Si además $\partial\Omega$ es compacto, entonces las propiedades anteriores son equivalentes a:

(iii) Ω tiene un campo vectorial continuo transversal global X tal que $|X| = 1$.

(iv) Existe un campo vectorial continuo X tal que $|X| = 1$ y $\|\nu - X\|_{L^\infty(\partial\Omega,\sigma)} < \sqrt{2}$.

Demostración. Primero probaremos $(i) \Rightarrow (ii)$. Dado $p \in \partial\Omega$, sean $r > 0$, $\kappa > 0$ y $X \in C(B(p,r) \cap \partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ tales que se satisface (3.1). Supongamos que X se anula en algún punto $q \in B(p,r) \cap \partial\Omega$, entonces existe $s > 0$ tal que $|X| < \kappa$ en $B(q,s) \cap \partial\Omega$. Esto implica que $|\nu \cdot X| < \kappa$ en $B(q,s) \cap \partial^*\Omega$. De los Teoremas 2.6 y 2.5 obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma(B(q,s) \cap \partial^*\Omega) &= \mathcal{H}^{n-1}(B(q,s) \cap \partial^*\Omega) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(B(q,s) \cap \partial_*\Omega) - \mathcal{H}^{n-1}(B(q,s) \cap (\partial_*\Omega \setminus \partial^*\Omega)) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(B(q,s) \cap \partial_*\Omega) > 0,\end{aligned}$$

lo que nos da un conjunto de medida σ-positiva en la que $|\nu \cdot X| < \kappa$, esto contradice (3.1). Por lo tanto X no se anula en $B(p,r) \cap \partial\Omega$. Sea

$$\kappa' = \kappa \min \left\{ \frac{1}{|X(y)|} : y \in \overline{B(p,r/2)} \cap \partial\Omega \right\}.$$

Notemos que κ' existe porque $\overline{B(p,r/2)} \cap \partial\Omega$ es compacto y $\kappa > 0$. Entonces

$$\nu \cdot \frac{X}{|X|} \geq \kappa' \qquad \sigma\text{-c.t.p. en } B(p,r/2) \cap \partial\Omega,$$

lo cual demuestra esta implicación.

La implicación $(ii) \Rightarrow (i)$ es clara.

Ahora supongamos que $\partial\Omega$ es compacto. Probaremos $(i) \Rightarrow (iii)$. De la compacidad, existen $p_i \in \partial\Omega$, $r_i > 0$, $\kappa_i > 0$ y $X_i \in C(B(p_i, r_i) \cap \partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ tales que $|X_i| = 1$ y $\nu \cdot X_i \geq \kappa_i$ σ-c.t.p. para $i = 1, \ldots, k$ y además $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^k B(p_i, r_i)$. Sea $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ una partición de la unidad subordinada a $\{B(p_i, r_i)\}_{i=1}^k$, definiendo $\kappa = \min\{\kappa_1, \ldots \kappa_k\}$ y $X = \sum_{i=1}^k \psi_i X_i$, tenemos que $X \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ y

$$\nu \cdot X = \sum_{i=1}^k \psi_i \nu \cdot X_i \geq \sum_{i=1}^k \psi_i \kappa_i \geq \kappa \qquad \sigma\text{-c.t.p. en } \partial\Omega.$$

Por lo tanto Ω tiene un campo vectorial continuo transversal global. Para ver que X se puede tomar unitario, se utiliza un razonamiento análogo al que usamos en la demostración de $(i) \Rightarrow (ii)$.

La implicación $(iii) \Rightarrow (i)$ es clara.

Finalmente, para ver que $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ basta notar que

$$\nu \cdot X = \frac{1}{2}\left(|\nu|^2 + |X|^2 - |\nu - X|^2\right) = \frac{1}{2}\left(2 - |\nu - X|^2\right) \qquad \sigma\text{-c.t.p. en } \partial\Omega,$$

por lo que X es globalmente transversal a Ω si y sólo si $\|\nu - X\|_{L^\infty(\partial\Omega,\sigma)} < \sqrt{2}$

□

La definición de dominio fuertemente Lipschitz se hace localmente y es conveniente darla usando una clase especial de vecindades.

Definición 3.3. Dados un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y un vector unitario $N \in \mathbb{R}^n$, se define el *cilindro centrado en p con dirección N y dimensiones $b, c > 0$* como

$$\mathcal{C}(p, N, b, c) = \left\{p' + tN : p' \in p + N^\perp, |p' - p| \leq b, |t| \leq c\right\}.$$

Es fácil ver que bajo un cambio de coordenadas, el cilindro es el producto cartesiano de la bola cerrada de radio b en $\mathbb{R}^{n-1}$ con un intervalo cerrado $[-c, c]$.

Consideraremos al espacio $\mathbb{R}^n$ como el producto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces usaremos la notación $(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ para describir un vector en $\mathbb{R}^n$. De esta forma, denotaremos por $e_n = (0, 1)$ al n-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.4. Dado $p \in \partial\Omega$, diremos que Ω es un *dominio fuertemente Lipschitz cerca de* p si existen una isometría lineal $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, un cilindro $\mathcal{C}(p, N, b, c)$ y una función Lipschitz $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ con $\theta(e_n) = N$, $\varphi(0) = 0$ y $|\varphi(x)| \leq c$ para $|x| \leq b$ tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(p, N, b, c) \cap \Omega &= \mathcal{C}(p, N, b, c) \cap (p + \{\theta(x, t) : \varphi(x) < t\}) \\ \mathcal{C}(p, N, b, c) \cap \partial\Omega &= \mathcal{C}(p, N, b, c) \cap (p + \{\theta(x, t) : \varphi(x) = t\}). \end{aligned}$$

Diremos que Ω es un *dominio localmente fuertemente Lipschitz* si es un dominio fuertemente Lipschitz cerca de p para todo $p \in \partial\Omega$. Si además la frontera de Ω es compacta entonces diremos que Ω es un *dominio fuertemente Lipschitz*.

Intuitivamente, esta definición nos dice que Ω se ve localmente como la región sobre la gráfica de una función Lipschitz. De aquí la conveniencia de pedirle a las vecindades que sean cilindros.

Vale la pena notar que si Ω es un dominio fuertemente Lipschitz cerca de p entonces, en el contexto de la Definición 3.4, también se tiene la siguiente igualdad:

$$\mathcal{C}(p, N, b, c) \cap \overline{\Omega}^c = \mathcal{C}(p, N, b, c) \cap (p + \{\theta(x, t) : \varphi(x) > t\}). \tag{3.2}$$

Por el Teorema de Rademacher (Teorema 1.18) la función $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\mathcal{H}^{n-1}$-c.t.p., por lo que el dominio $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \varphi(x) < t\}$ tiene un vector normal exterior en el sentido de Cálculo diferencial dado por

$$N(x) = \frac{(\nabla\varphi(x), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x)|^2}}$$

en los puntos x en los que φ es diferenciable. Utilizando la Fórmula de Área (Corolario 1.23), no es difícil ver que esto implica que existe un campo vectorial en $\partial\Omega$ que es normal a Ω (en el sentido de cálculo diferencial) $\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial\Omega$-c.t.p. Llamemos η a este campo vectorial.

Teorema 3.5 (Teorema de la Divergencia para Dominios Fuertemente Lipschitz)**.** *Si Ω es un dominio fuertemente Lipschitz entonces para cada $g \in C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se tiene*

$$\int_\Omega div(g) d\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Demostración. Para cada $p \in \partial\Omega$, sean $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}(p, N_p, b_p, c_p)$, θ_p y φ_p el cilindro, la isometría lineal y la función Lipschitz de la Definición 3.4. Denotaremos por B_p a la bola centrada en el origen de radio b_p en $\mathbb{R}^{n-1}$. Sea

$$\eta_p(x) = \eta(x, \varphi_p(x)) = \frac{(\nabla\varphi_p(x), -1)}{\sqrt{|\nabla\varphi_p(x)|^2 + 1}}$$

para $\mathcal{H}^{n-1}$-casi todo $x \in B_p$.

Sea ϕ_δ una aproximación a la identidad y $\varphi_{p,\delta} = \varphi_p * \phi_\delta$, sea $\eta_{p,\delta} = \frac{(\nabla\varphi_{p,\delta}(x), -1)}{\sqrt{|\nabla\varphi_{p,\delta}(x)|^2+1}}$ el vector normal a la gráfica de $\varphi_{p,\delta}$. Sea $U_{p,\delta} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \varphi_{p,\delta}(x) < t\}$ la región sobre la gráfica de $\varphi_{p,\delta}$.

Denotaremos por $J_p(x) = \sqrt{|\nabla\varphi_p(x)|^2 + 1}$ al Jacobiano de la aplicación $B_p \to \mathbb{R}^n$ dada por $x \mapsto (x, \varphi_p(x))$. De la misma forma, llamaremos $J_{p,\delta}(x) = \sqrt{|\nabla\varphi_{p,\delta}(x)|^2 + 1}$ al Jacobiano de la aplicación $B_p \to \mathbb{R}^n$ dada por $x \mapsto (x, \varphi_{p,\delta}(x))$.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, denotaremos por $f^p : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ a la función definida como $f^p(x) = f(x, \varphi_p(x))$.

Sea $\{h_p\}_{p\in\partial\Omega}$ una partición de la unidad de $\partial\Omega$ subordinada a $\{\mathrm{int}(\mathcal{C}_p)\}_{p\in\partial\Omega}$. Dada una función $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1} = \sum_{p\in\partial\Omega} \int_{\mathcal{C}_p\cap\partial\Omega} (h_p g) \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Por la Fórmula de Cambio de Variable (Teorema 1.22) obtenemos

$$\int_{\mathcal{C}_p\cap\partial\Omega} (h_p g) \cdot \eta d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{B_p} (h_p^p g^p) \cdot \eta_p J_p d\mathcal{L}^{n-1}.$$

Pero cada coordenada de $\eta_p J_p = (\nabla\varphi_p, -1)$ está en $L^\infty(B_p, \mathcal{L}^{n-1})$ y por lo tanto en $L^1(B_p, \mathcal{L}^{n-1})$. Como $h_p^p g^p \in L^\infty(B_p, \mathcal{H}^{n-1})$, por los Teoremas 1.28 y 1.29 podemos escribir

$$\int_{B_p} (h_p^p g^p) \cdot \eta_p J_p d\mathcal{L}^{n-1} = \lim_{\delta\to 0} \int_{B_p} (h_p^p g^p) \cdot \eta_{p,\delta} J_{p,\delta} d\mathcal{L}^{n-1}.$$

Nuevamente aplicamos la Fórmula de Cambio de Variable (Teorema 1.22) para obtener

$$\int_{B_p} (h_p^p g^p) \cdot \eta_{p,\delta} J_{p,\delta} d\mathcal{L}^{n-1} = \int_{\mathcal{C}_p\cap\partial U_{p,\delta}} (h_p g) \cdot \eta_{p,\delta} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Por el Teorema de la Divergencia (Teorema 1.26) tenemos

$$\int_{\mathcal{C}_p\cap\partial U_{p,\delta}} (h_p g)\cdot \eta_{p,\delta} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\mathcal{C}_p\cap U_{p,\delta}} \operatorname{div}(h_p g) d\mathcal{L}^n.$$

El Teorema 1.29 y el Teorema de la Convergencia Dominada (Teorema 1.12) implican

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathcal{C}_p\cap U_{p,\delta}} \operatorname{div}(h_p g) d\mathcal{L}^n = \int_{\mathcal{C}_p\cap \Omega} \operatorname{div}(h_p g) d\mathcal{L}^n.$$

Si $h = (1-\sum h_p)\mathbf{1}_\Omega$, entonces $h\in C^\infty$ y $\operatorname{supp}(h)\subset\Omega$ es un dominio suave, por el Teorema de la Divergencia (Teorema 1.26) $\int_{\operatorname{supp}(h)} \operatorname{div}(hg)d\mathcal{L}^n = 0$, así que

$$\sum_{p\in\partial\Omega}\int_{\mathcal{C}_p\cap \Omega} \operatorname{div}(h_p g) d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} \operatorname{div}(g) d\mathcal{L}^n.$$

Esto nos da la igualdad deseada. □

Este teorema implica que si Ω es un dominio de perímetro localmente finito, entonces su vector normal exterior ν coincide con el vector normal exterior de Cálculo diferencial η $\mathcal{H}^{n-1}$-c.t.p., y la medida de superficie es $\mathcal{H}^{n-1}\lfloor\partial\Omega$. Otra consecuencia inmediata de este teorema es que la región sobre la gráfica de una función Lipschitz es de perímetro localmente finito.

Los siguientes dos Lemas nos dicen un poco acerca de la topología y la frontera en medida de los dominios fuertemente Lipschitz.

Lema 3.6. *Si Ω es un dominio localmente fuertemente Lipschitz, entonces $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$.*

Demostración. La contención $\partial\overline{E}\subset\partial E$ se da para todo $E\subset\mathbb{R}^n$, ya que

$$\partial\overline{E} = \overline{\overline{E}}\cap\overline{(\overline{E})^c} = \overline{E}\cap\overline{\operatorname{int}(E^c)}\subset\overline{E}\cap\overline{E^c} = \partial E.$$

Para mostar $\partial\Omega\subset\partial\overline{\Omega}$ tomamos $p\in\partial\Omega$. Entonces Ω es un dominio fuertemente Lipschitz cerca de p. Sean θ y $\mathcal{C}(p,N,b,c)$ como en la Definición 3.4 y sea $r>0$. Tomamos $c'<0$ tal que $|c'|<\min\{c,r\}$, entonces $\varphi(0) = 0 > c'$. Esto implica por (3.2) que

$$p+\theta(0,c')\in\mathcal{C}(p,N,b,c)\cap(p+\{\theta(x,t):\varphi(x)>t\}) = \mathcal{C}(p,N,b,c)\cap\overline{\Omega}^c$$

por lo que $B(p,r)$ interseca tanto a $\overline{\Omega}$ como a $\overline{\Omega}^c$. Por lo tanto $p\in\partial\overline{\Omega}$. □

Lema 3.7. *Si Ω satisface $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$, entonces $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_*\Omega \cap B(p,r)) > 0$ para todo $p \in \partial\Omega$ y $r > 0$.*

Demostración. Supongamos que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_*\Omega \cap B(p,r)) = 0 \tag{3.3}$$

para algún $p \in \partial\Omega$ y $r > 0$. La hipótesis $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ implica que $B(p,s)$ interseca a Ω y a $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ para toda $s \in (0,r)$. Por el Teorema 2.7 podemos encontrar $s \in (0,r)$ tal que $\Omega \cap B(p,s)$ es de perímetro localmente finito. Dado $g \in C_c^1(B(p,s),\mathbb{R}^n)$ tenemos por los Teoremas 2.2, 2.6 y 2.7 que

$$\int_{\Omega\cap B(p,s)} \mathrm{div}(g) d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega\cap\partial B(p,s)} g \cdot N d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial_*\Omega\cap B(p,s)} g \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1},$$

pero como $g = 0$ en $\partial B(p,s)$ y por (3.3) se tiene que $\int_{\Omega\cap B(p,s)} \mathrm{div}(g) d\mathcal{L}^n = 0$.

Como esto es para cualquier $g \in C_c^1(B(p,s),\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{L}^n(\Omega\cap B(p,s)) = 0$, pero $\Omega\cap B(p,s)$ es abierto. Esto es una contradición, por lo tanto $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_*\Omega\cap B(p,r)) > 0$. $\square$

Capítulo 4

Resultados principales

En este capítulo demostraremos que un dominio de perímetro localmente finito es un dominio localmente fuertemente Lipschitz si y sólo si tiene campos vectoriales continuos transversales y satisface cierta condición topológica en la frontera. También se demuestra una versión de este teorema cerca de un punto. Posteriormente enunciamos el teorema de una forma distinta para poder compararlo con un resultado similar.

Primero necesitamos un lema de topología.

Lema 4.1. *Si Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que*

$$\partial\Omega_i = \partial\overline{\Omega}_i \qquad \textit{para } i = 1, 2$$

entonces

$$\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \partial(\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2}).$$

Demostración. Al principio de la demostración del Lema 3.6, demostramos $\partial\overline{E} \subset \partial E$ para todo $E \subset \mathbb{R}^n$, por lo que basta probar $\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset \partial(\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})$. Sea $x \in \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ y supongamos que $x \notin \partial(\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})$.

Como $x \in \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, tenemos que

$$B(x, r) \cap \overline{\Omega_1 \cap \Omega_2} \neq \emptyset \tag{4.1}$$

para toda $r > 0$. Además como $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es abierto y $x \in \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ tenemos que $x \notin \Omega_1 \cap \Omega_2$, por lo que existe $i \in \{1, 2\}$ tal que

$$x \notin \Omega_i. \tag{4.2}$$

Si $B(x,r)$ interseca a $(\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})^c$ para toda $r > 0$ entonces, junto con (4.1) obtenemos que $x \in \partial(\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})$, lo cual contradice nuestra suposición. Por lo tanto existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \overline{\Omega_1 \cap \Omega_2} \subset \overline{\Omega_i}$. Esto implica $x \notin \partial\overline{\Omega_i}$, pero el hecho de que $x \in \overline{\Omega_i}$ junto con (4.2) implica que $x \in \partial\overline{\Omega_i}$. Esto contradice la suposición $x \notin \partial(\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2})$. □

Ahora estamos listos para comenzar la demostración de la versión local del teorema. Como la prueba es muy larga, la hemos partido en varias afirmaciones para facilitar su lectura.

Teorema 4.2. *Sea Ω un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ con perímetro localmente finito y sea $p \in \partial\Omega$. Entonces Ω es un dominio fuertemente Lipschitz cerca de p si y sólo si tiene un campo vectorial continuo transversal cerca de p y existe $r > 0$ tal que*

$$\partial(\Omega \cap B(p,r)) = \partial\left(\overline{\Omega \cap B(p,r)}\right).$$

Nuevamente, denotaremos por e_n al n-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Demostración del Teorema 4.2. Mediante una isometría afín, podemos suponer que $p = 0$ y $X(0) = e_n$.

Probaremos primero una implicación del teorema.

Afirmación 1. *Si Ω es un dominio fuertemente Lipschitz cerca de 0, entonces tiene un campo vectorial continuo transversal cerca de 0 y existe $r > 0$ tal que $\partial(\Omega \cap B(0,r)) = \partial\left(\overline{\Omega \cap B(0,r)}\right)$.*

Demostración. Sean θ, $\mathcal{C}(0,N,b,c)$ y $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ como en la Definición 3.4. Sin perder la generalidad podemos suponer que θ es la identidad. Del Teorema 3.5 sabemos que la región sobre la gráfica de φ es un dominio de perímetro localmente finito. Por el Corolario 2.8 sabemos que existe $0 < r < \min\{b,c\}$ tal que $\nu(x,\varphi(x)) = \frac{(\nabla\varphi(x),-1)}{\sqrt{|\nabla\varphi(x)|^2+1}}$ para $\mathcal{H}^{n-1}$-casi todo $x \in B(0,r) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Esto junto con la Fórmula de Área (Corolario 1.23) implica que el campo vectorial constante $(0,-1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ es transversal a Ω cerca de 0. Para la segunda parte de la afirmación, como $r < \min\{b,c\}$, se tiene que $\partial(\Omega \cap B(0,r)) = \partial\left(\overline{\Omega \cap B(0,r)}\right)$. □

Habiendo probado eso, seguiremos con la otra implicación del teorema. Supongamos que Ω tiene un un campo vectorial continuo transversal cerca de 0 y existe $r > 0$ tal que $\partial(\Omega \cap B(0, r)) = \partial\left(\overline{\Omega \cap B(0, r)}\right)$.

Afirmación 2. *Existe $s \in (0, r)$ tal que $0 \in \partial(\Omega \cap B(0, s)) = \partial\left(\overline{\Omega \cap B(0, s)}\right)$ y $\Omega \cap B(0, s)$ es de perímetro localmente finito.*

Esta Afirmación es una consecuencia inmediata del Teorema 2.7 y el Lema 4.1.

En vista de esto podemos suponer (redenotando a Ω por $\Omega \cap B(0, s)$ si es necesario) que Ω es un dominio de perímetro localmente finito, abierto y no vacío, que satisface $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ y que existe X campo vectorial continuo transversal cerca de 0 tal que $X(0) = e_n$.

Afirmación 3. *Sea $\nu' = \nu - (e_n \cdot \nu)e_n$ la proyección ortogonal de ν en $e_n^\perp$. Entonces existe $a > 1$ tal que*

$$e_n \cdot \nu \geq \frac{1}{a}|\nu'| \qquad \sigma\text{-c.t.p.}$$

en alguna vecindad V de 0.

Demostración. Sabemos que existe $\kappa > 0$ tal que $\nu \cdot X \geq \kappa$ σ-c.t.p. en alguna vecindad de 0. Como $X(0) = e_n$ y X es continuo, existe una vecindad V de 0 tal que $|X - e_n| < \kappa/2$ en V, por lo que $\nu \cdot e_n \geq \nu \cdot X \geq \frac{\kappa}{2}$. Sea $a > 1$ tal que

$$(1 + a^2)\frac{\kappa^2}{4} \geq 1.$$

Entonces, como $e_n \cdot \nu \geq \frac{\kappa}{2}$ σ-c.t.p. en V, tenemos que

$$\begin{aligned} |\nu - (e_n \cdot \nu)e_n|^2 &= |\nu|^2 - 2(e_n \cdot \nu)^2 + (e_n \cdot \nu)^2|e_n|^2 \\ &= 1 - (e_n \cdot \nu)^2 \\ &\leq a^2(e_n \cdot \nu)^2 \end{aligned}$$

σ-c.t.p. en V. Finalmente, como $e_n \cdot \nu$ es positivo, sacando raíz cuadrada obtenemos

$$e_n \cdot \nu \geq \frac{1}{a}|\nu'| \qquad \sigma\text{-c.t.p. en } V$$

□

Sean $b, c > 0$ tales que

$$ab < c \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C}(0, e_n, b, c) \subset V.$$

Más adelante probaremos que $\partial\Omega \cap \mathcal{C}(0, e_n, b, c)$ es localmente la gráfica de una función Lipschitz de constante a lo más a. Para simplificar escribiremos $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, e_n, b, c)$.

Sea $\{\phi_\delta\}_{\delta>0}$ una aproximación a la identidad como en el Teorema 1.29. Por el Teorema 1.28, la función

$$\chi_\delta = \phi_\delta * \mathbf{1}_\Omega,$$

es diferenciable. Utilizando el Teorema 1.28 y el Teorema 2.2 aplicado a los campos vectoriales $g_k(y) = \phi_\delta e_k(x - y)$ para $k = 1, \ldots, n$, se pueden obtener

$$\nabla \chi_\delta(x) = -\int_{\partial\Omega} \phi_\delta(x - y)\nu(y)d\sigma(y)$$

y

$$\nabla' \chi_\delta(x) = -\int_{\partial\Omega} \phi_\delta(x - y)\nu'(y)d\sigma(y),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Afirmación 4. *Si* $\delta < \text{mín}\{b, c\}$, *entonces*

$$-\frac{\partial}{\partial x_n}\chi_\delta(x) \geq \frac{1}{a}|\nabla' \chi_\delta(x)|, \qquad \textit{para todo } x \in \mathcal{C}$$

donde ∇' *es el gradiente sobre las primeras* $n - 1$ *coordenadas.*

Demostración. Como el soporte de ϕ_δ está contenido en $\mathcal{C}$ y ν' es la proyección de ν en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, obtenemos de la Afirmación 3 que

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_n}\chi_\delta(x) &= -\nabla \chi_\delta(x) \cdot e_n = \left(\int_{\partial\Omega} \phi_\delta(x - y)\nu(y)d\sigma(y)\right) \cdot e_n \\
&= \int_{\partial\Omega} \phi_\delta(x - y)\nu(y) \cdot e_n d\sigma(y) \\
&\geq \frac{1}{a}\int_{\partial\Omega} \phi_\delta(x - y)|\nu'(y)|d\sigma(y) \\
&\geq \frac{1}{a}\left|\int_{\partial\Omega} \phi_\delta(x - y)\nu'(y)d\sigma(y)\right| \\
&= \frac{1}{a}|\nabla' \chi_\delta(x)|.
\end{aligned}$$

□

Afirmación 5. *Sea* $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(0, e_n, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$. *Si* $x \in \mathcal{C}' \cap \overline{\Omega}$ *y* $y \in \mathcal{C}' \cap \Omega^c$*, entonces*

$$y_n - x_n \leq a|y' - x'|,$$

donde $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$*,* $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Demostración. Primero supongamos que $x \in \mathcal{C} \cap \Omega$ y que $y \in \mathcal{C} \cap \overline{\Omega}^c$. Como $\text{supp}(\phi_\delta) \subset B(0, \delta)$, entonces si δ es suficientemente pequeño tenemos $\chi_\delta(x) = 1$ y $\chi_\delta(y) = 0$. Supongamos que $y_n - x_n \geq a|y' - x'|$. Entonces de la Afirmación 4 obtenemos que para $z \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
(y - x) \cdot \nabla \chi_\delta(z) &= (y_n - x_n)\partial_n \chi_\delta(z) + (y' - x') \cdot \nabla' \chi_\delta(z) \\
&\leq (y_n - x_n)\partial_n \chi_\delta(z) + |y' - x'|\, |\nabla' \chi_\delta(z)| \\
&\leq (y_n - x_n)\partial_n \chi_\delta(z) + \frac{y_n - x_n}{a} |\nabla' \chi_\delta(z)| \\
&\leq (y_n - x_n)\partial_n \chi_\delta(z) - (y_n - x_n)\partial_n \chi_\delta(z) = 0.
\end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos

$$0 \geq \int_0^1 (y - x) \cdot \nabla \chi_\delta(x + t(y - x))dt = \chi_\delta(y) - \chi_\delta(x) = 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo que

$$y_n - x_n < a|y' - x'|. \tag{4.3}$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
\text{int}(\mathcal{C}) \cap \overline{\Omega} &= (\text{int}(\mathcal{C}) \cap \Omega) \cup (\text{int}(\mathcal{C}) \cap \partial\Omega) \\
&\subset (\mathcal{C} \cap \Omega) \cup \partial(\mathcal{C} \cap \Omega) \\
&= \overline{\mathcal{C} \cap \Omega}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{C}' \cap \overline{\Omega} \subset \text{int}(\mathcal{C}) \cap \overline{\Omega} \subset \overline{\mathcal{C} \cap \Omega}. \tag{4.4}$$

Por otro lado, $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ implica que $\partial(\Omega^c) = \partial(\overline{\Omega}^c)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\text{int}(\mathcal{C}) \cap \Omega^c &= (\text{int}(\mathcal{C}) \cap \text{int}(\Omega^c)) \cup (\text{int}(\mathcal{C}) \cap \partial(\Omega^c)) \\
&\subset (\mathcal{C} \cap \overline{\Omega}^c) \cup (\text{int}(\mathcal{C}) \cap \partial(\overline{\Omega}^c)) \\
&\subset (\mathcal{C} \cap \overline{\Omega}^c) \cup \partial(\mathcal{C} \cap \partial(\overline{\Omega}^c)) \\
&= \overline{\mathcal{C} \cap \overline{\Omega}^c}.
\end{aligned}$$

Esto a su vez implica

$$\mathcal{C}' \cap \Omega^c \subset \mathrm{int}(\mathcal{C}) \cap \Omega^c \subset \overline{\mathcal{C} \cap \overline{\Omega}^c}. \tag{4.5}$$

Sean $x \in \mathcal{C}' \cap \overline{\Omega}$ y $y \in \mathcal{C}' \cap \Omega^c$. Por (4.4) y (4.5), x y y pueden ser expresados como el límite de una sucesión de puntos en $\mathcal{C} \cap \Omega$ y $\mathcal{C} \cap \overline{\Omega}^c$ respectivamente. De esto y la ecuación (4.3) obtenemos

$$y_n - x_n \leq a|y' - x'|.$$

□

Afirmación 6. *Sea B la bola de radio $\frac{b}{2}$ en $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces $\overline{B} \times \{-\frac{c}{2}\} \subset \Omega$ y $\overline{B} \times \{\frac{c}{2}\} \subset \overline{\Omega}^c$.*

Demostración. Si no ocurre que $\overline{B} \times \{-\frac{c}{2}\} \subset \Omega$, entonces existe $x' \in \overline{B}$ tal que $(x', -\frac{c}{2}) \notin \Omega$. Como $0 \in \overline{\Omega}^c$, por la Afirmación 5 tenemos que

$$\frac{c}{2} = 0 - \left(-\frac{c}{2}\right) \leq a|x' - 0| \leq \frac{ab}{2},$$

lo que contradice la definición de b y c. De manera análoga se establece que $\overline{B} \times \{\frac{c}{2}\} \subset \overline{\Omega}^c$. □

Afirmación 7. *Para cada $x' \in \overline{B}$ existe un único $\varphi(x') \in (-\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ tal que $(x', \varphi(x')) \in \mathcal{C} \cap \partial\Omega$. Además φ es Lipschitz de constante $\leq a$ y*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}' \cap \Omega & = & \mathcal{C}' \cap (\{(x', t) : \varphi(x') > t\}), \\ \mathcal{C}' \cap \partial\Omega & = & \mathcal{C}' \cap (\{(x', t) : \varphi(x') = t\}). \end{array} \tag{4.6}$$

Demostración. Para cada $x' \in B$ consideramos el segmento $I_{x'} = \{(x', t) : -\frac{c}{2} \leq t \leq \frac{c}{2}\}$. Por la afirmación anterior sabemos que $(x', -\frac{c}{2}) \in I_{x'} \cap \Omega$ y que $(x', \frac{c}{2}) \in I_{x'} \cap \overline{\Omega}^c$, por lo que necesariamente existe $t_1 \in I_{x'} \cap \partial\Omega$. Si $t_2 \in I_{x'} \cap \partial\Omega$, entonces por la Afirmación 5 tenemos que $t_1 - t_2 \leq 0$ y $t_2 - t_1 \leq 0$. Por lo tanto $I_{x'} \cap \partial\Omega$ tiene un único elemento al que llamaremos $\varphi(x')$. Esto a su vez implica que el conjunto $\{x'\} \times [-\frac{c}{2}, \varphi(x'))$ es precisamente $\Omega \cap I_{x'}$. La Afrimación 5 implica que $\varphi : B \to \mathbb{R}$ es Lipschitz de constante $\leq a$. Finalmente notemos que

$$\mathcal{C}' \cap \partial\Omega = \bigcup_{x' \in B} (I_{x'} \cap \partial\Omega) = \mathcal{C}' \cap (\{(x', t) : x' \in B, \varphi(x) = t\}).$$

De manera análoga obtenemos,

$$\mathcal{C}' \cap \partial\Omega = \bigcup_{x' \in B} (I_{x'} \cap \Omega) = \mathcal{C}' \cap (\{(x', t) : x' \in B, \varphi(x) > t\}).$$

$\square$

Notemos que por el Teorema de Kirszbraun (Teorema 1.19) podemos extender φ a una función $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz de constante $\leq a$.

Para estar completamente de acuerdo con la definición de dominio fuertemente Lipschitz, sea $\theta(x) = -x$, entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}' \cap \Omega & = & \mathcal{C}' \cap (\{\theta(x', t) : -\hat{\varphi}(-x') < t\}) \\ \mathcal{C}' \cap \partial\Omega & = & \mathcal{C}' \cap (\{\theta(x', t) : -\hat{\varphi}(-x') = t\}). \end{array} \tag{4.7}$$

Esto demuestra que Ω es un dominio fuertemente Lipschitz cerca de 0. $\square$

Ahora demostraremos la versión general del teorema.

Teorema 4.3. *Sea Ω un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ con perímetro localmente finito. Entonces Ω es un dominio localmente fuertemente Lipschitz si y sólo si Ω tiene campos vectoriales continuos transversales y $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$.*

Demostración. Supongamos que Ω tiene campos vectoriales continuos localmente transversales y sea $p \in \partial\Omega$. Entonces Ω tiene un campo vectorial continuo transversal cerca de p. Como $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$, del Lema 4.1 obtenemos que $\partial(\Omega \cap B(p,r)) = \partial\left(\overline{\Omega \cap B(p,r)}\right)$ para toda $r > 0$. Finalmente, del Teorema 4.2 concluimos que Ω es fuertemente Lipschitz cerca de p. Como $p \in \partial\Omega$ fue arbitrario, Ω es un dominio localmente fuertemente Lipschitz.

Ahora supongamos que Ω es un dominio localmente fuertemente Lipschitz. Del Lema 3.6 sabemos que $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$. Para cada $p \in \partial\Omega$, Ω es fuertemente Lipschitz cerca de p y por el Teorema 4.2 existe un campo vectorial continuo transversal cerca de p. Por lo tanto Ω tiene campos vectoriales continuos transversales. $\square$

Con esto hemos probado que es posible valerse únicamente de campos vectoriales para definir un dominio localmente fuertemente Lipschitz. Una vez obtenida esta equivalencia en el plano euclidiano $\mathbb{R}^n$, se puede definir en una variedad riemanniana a un dominio fuertemente Lipschitz como un dominio que tiene un campo vectorial continuo transversal cerca de cualquier punto en su frontera y que satisfaga $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$.

El teorema anterior se puede volver a enunciar de la siguiente manera:

Teorema 4.4. *Si Ω es un dominio acotado y satisface $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$, entonces Ω es un dominio Fuertemente Lipschitz si y sólo si $\rho(\Omega) < \sqrt{2}$. Donde $\rho(\Omega) = \text{ínf}\{\|\nu - f\|_{L^\infty(\partial\Omega,\sigma)} : f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n), |f| = 1\}$.*

Este teorema se puede demostrar fácilmente utilizando los Teoremas 4.3, 3.2 y el Lema 3.7.

Existen teoremas parecidos que caracterizan otros tipos de dominios. Por ejemplo, en [5] se da una caracterización de dominios suaves.

Teorema 4.5. *Si Ω es acotado y satisface $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$, entonces Ω es un dominio C^1 si y sólo si $\rho(\Omega) = 0$.*

En [6] se hace una caracterización de dominios más generales usando condiciones similares a las usadas en el Teorema 4.4.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading MA, 1981.

[2] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton FL, 1992.

[3] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, reprint of the 1998 edition, 2001.

[4] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monogr. Stud. Math. 24, Pitman Boston MA, 1985.

[5] S. Hofmann, M. Mitrea, M. Taylor, *Geometric and Transformational Properties of Lipschitz Domains, Semmes-Kenig-Toro Domains, and Other Classes of Finite Perimeter Domains*, J. Geom. Anal., 17, pp. 593-647, 2007.

[6] S. Hofmann, M. Mitrea, M. Taylor, *Singular integrals and elliptic boundary problems on regular Semmes-Kenig-Toro domains*, preprint, 2008.

[7] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Spaces*, Jones and Bartlett Publ., Boston MA, 1993.

[8] D. Mitrea, M. Mitrea, *Layer potentials, the Hodge Laplacian, and global boundary problems in nonsmooth Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 150, No. 713, 2001.

[9] M. Mitrea, M. Taylor, *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., 163, No. 2, pp. 181-251, 1999.

[10] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Hölder continuous metric tensors*, Comm. in PDE 25, pp. 1487-1536, 2000.

[11] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: the case of Dini metric tensors*, Trans. AMS 355, pp. 1961-1985, 2003.

[12] J. H. Wells, L. R. Williams, *Embeddings and Extensions in Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[13] W. Zimmer, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.