



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Caracterización de las digráficas asimétricas  
3-cuasitransitivas fuertemente conexas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
ISABEL HELENA URRUTIA SCHROEDER

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ  
MAT. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTÍZ



2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Caracterización de las digráficas asimétricas  $\mathfrak{3}$ -cuasitransitivas  
fuertemente conexas

Isabel Helena Urrutia Schroeder

Septiembre, 2009

1. Datos del alumno

Urrutia  
Schroeder  
Isabel Helena  
21 57 20 60  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemático  
303098520

2. Datos del tutor

Galeana  
Sánchez  
Hortensia

3. Datos del sinodal 2

Goldfeder  
Ortíz  
Ilán Abraham

4. Datos del sinodal 3

Montellano  
Ballesteros  
Juan José

5. Datos del sinodal 4

Pastrana  
Ramírez  
Laura

6. Datos del sinodal 5

Delgado  
Escalante  
Pietra Adriana

7. Datos del trabajo escrito

Caracterización de las digráficas asimétricas 3-cuasitransitivas  
fuertemente conexas  
60p  
2009



*A mi familia*



# Agradecimientos

Primero me gustaría agradecerles a todos los que me han apoyado durante mis estudios, incluyendo tanto a familia y amigos. Les debo todo.

Concretamente me gustaría agradecerles a todas las personas que han contribuido al proceso de elaboración de ésta tesis. Muchas gracias a la Dra. Hortensia Galeana S. y a Ilán Abraham Ortíz G., mis directores de tesis. He disfrutado enormemente el trabajar con ustedes, y ¡muchas gracias por todo su tiempo! ¡Salió muy bien!

Muchas gracias a mis sinodales por revisar tan rápidamente mi tesis y por prestarme algunas horitas de su tiempo: Laura Pastrana R., Pietra Delgado E. y Juan José Montellano B. Pietra; ¡Me encantó dar las ayudantías de gráficas contigo! Aprendí mucho siendo tu ayudante, y me divertí también. Mum and Daddy; thanks for taking time out of your exceedingly busy schedules to help me proofread. I promise that I'll soon grow out of being awful proofreader. I couldn't have asked for better parents than you guys.

Muchas gracias a Roberto, Angel, Andrés y la banda matemática, son geniales. Sé que omití a varios, pero sepan todos que siento un profundo agradecimiento por todo el cariño y apoyo que he recibido a lo largo de estos años. 9r4cI42 4 l02 e57UDI4N7E2 dE j0R9E p0r eL 4p0Y0 7éCNiC0 :P

¡Suerte a todos!



# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Nociones previas . . . . .	3
2.2	Conceptos básicos de gráficas . . . . .	3
2.3	Trayectorias y distancia en digráficas y en gráficas . . . . .	5
2.4	Digráficas transpuestas . . . . .	8
2.5	Conexidad, contracciones y composiciones . . . . .	9
2.6	Semicompletas y semicompletas bipartitas . . . . .	13
2.7	Digráficas cuasitransitivas y 3-cuasitransitivas . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Digráficas cuasitransitivas</b>	<b>15</b>
3.1	Algunas propiedades de las digráficas cuasitransitivas . . . . .	15
3.2	Caracterización de las digráficas cuasitransitivas . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Digráficas 3-cuasitransitivas</b>	<b>27</b>
4.1	Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas bipartitas . . . . .	27
4.2	Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas no bipartitas . . . . .	29
4.2.1	Existencia de un triángulo dirigido y lemas auxiliares . . . . .	29
4.2.2	Adyacencias de vértices fuera del triángulo con el triángulo . . . . .	34
4.2.3	Adyacencias entre vértices fuera del triángulo . . . . .	40
4.2.4	Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas no bipartitas . . . . .	43
4.3	Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas asimétricas fuertemente conexas . . . . .	45

---

<b>5 Conclusiones</b>	<b>47</b>
5.1 Algunas observaciones y trabajo futuro . . . . .	47

# Índice de figuras

2.1	La digráfica de Peterson . . . . .	4
2.2	$u$ y $v$ son vértices duplicados. . . . .	5
2.3	Una digráfica $D$ y su digráfica transpuesta $D^\tau$ . . . . .	8
2.4	Una construcción de un camino dirigido como en el lema 2.9 . . . . .	11
3.1	Corolario 3.3 . . . . .	16
3.2	Un ejemplo del teorema 3.5, donde $S_1$ , $S_2$ y $S_3$ son las componentes conexas de $\overline{UG(D)}$ . . . . .	18
3.3	$r \rightarrow s'$ en la afirmación 3.5.2 . . . . .	18
3.4	Ejemplo de la partición $S = V_0(s) \cup \dots \cup V_m(s)$ en $\overline{UG(D)}$ . . . . .	19
3.5	Afirmación 3.5.9 del teorema 3.5 . . . . .	22
3.6	Ejemplo del caso (a) del teorema 3.6 . . . . .	24
3.7	Ejemplo del caso (b) del teorema 3.6 . . . . .	25
4.1	Una digráfica 3–cuasitransitivas bipartita semicompleta . . . . .	28
4.2	El triángulo $(c_i, c_{i+6}, c_{i+3}, c_i)$ de la demostración del lema 4.3 . . . . .	30
4.3	Lema 4.4 . . . . .	31
4.4	Corolario 4.5 . . . . .	32
4.5	El paso inductivo de la demostración del lema 4.6 . . . . .	33
4.6	Teorema 4.10 . . . . .	35
4.7	Teorema 4.11 . . . . .	35
4.8	Lema 4.12 . . . . .	36
4.9	Lema 4.13 . . . . .	37
4.10	Teorema 4.14 . . . . .	38
4.11	Por la afirmación 4.14.1 se tiene que $T_1 = T_1^+ \cup T_1^-$ . . . . .	39

4.12 $v^+ \sim v^-$ en la demostración de la afirmación 4.14.2 . . . . .	40
4.13 Teorema 4.15 . . . . .	41

# Capítulo 1

## Introducción

Una gráfica dirigida es cuasitransitiva si para todo conjunto de vértices  $x$ ,  $y$  y  $z$ , tales que  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow z$  son flechas de la digráfica, entonces se tiene que  $x \rightarrow z$  o  $z \rightarrow x$  también es una flecha de la digráfica. Inspirados en la definición de digráficas cuasitransitivas, hemos definido las digráficas  $n$ -cuasitransitivas como las que cumplen que para todo par de vértices  $u$  y  $v$  tales que existe una trayectoria dirigida de longitud  $n$  entre ellas se tiene que  $u \rightarrow v$  o  $v \rightarrow u$  también es una flecha de la digráfica.

En el 1995 J. Bang-Jensen y J. Huang caracterizaron las digráficas cuasitransitivas [1]. En 2004 en [2], J. Bang-Jensen afirma que toda digráfica 3-cuasitransitiva fuertemente conexa es bipartita o semicompleta. Nosotros hemos encontrado una familia de digráficas 3-cuasitransitivas fuertemente conexas que no son bipartitas y tampoco son semicompletas. En esta tesis damos la caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas fuertemente conexas asimétricas.



## Capítulo 2

# Preliminares

En este capítulo se dará un breve repaso a las definiciones básicas de las digráficas y a algunas propiedades de estas que se usarán en el presente trabajo.

### 2.1 Nociones previas

Una *partición*  $P_0, \dots, P_n$  de un conjunto  $A$  es una familia de subconjuntos de  $A$ ,  $\{P_i\}_{i=0}^n$ , tales que

- i)  $P_i \neq \emptyset$  para todo  $0 \leq i \leq n$ ,
- ii)  $P_i \cap P_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  y
- iii)  $\bigcup_{i=0}^n P_i = A$ .

Decimos que dos conjuntos  $X$  y  $Y$  son *ajenos* si  $X \cap Y = \emptyset$ .

### 2.2 Conceptos básicas de gráficas

Una *gráfica dirigida* o *digráfica*  $D$  es un par ordenado de conjuntos  $(V(D), F(D))$  tales que  $F(D) \subset V(D) \times V(D)$ , es decir, un conjunto  $V(D)$  y otro conjunto  $F(D)$  de pares ordenados de elementos distintos de  $V(D)$ .  $V(D)$  es el conjunto de los *vértices* de  $D$  y  $F(D)$  es el conjunto de las *flechas* de  $D$ .

Una digráfica se representa fácilmente pintando puntos que representen a los vértices de  $D$  y flechas que representen a los elementos de  $F(D)$ , tales que si  $(u, v) \in F(D)$  pintamos

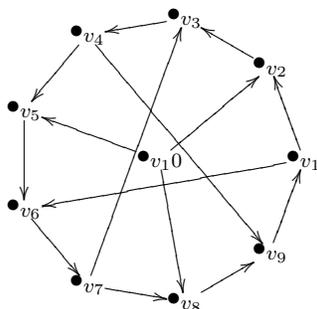


Figura 2.1: La digráfica de Peterson,  $(V(D), F(D))$  con  $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$  y  $F(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_9, v_1), (v_{10}, v_2), (v_{10}, v_5), (v_{10}, v_8), (v_7, v_3), (v_4, v_9), (v_1, v_6)\}$ .

una flecha con la cola en el vértice  $u$  y la punta en el vértice  $v$ , como se ilustra en la figura 2.2. Se escribirá  $u \rightarrow v$  cuando  $(u, v) \in F(D)$ .

Se dice que dos vértices  $u$  y  $v$  de  $V(D)$  son *adyacentes* en  $D$  si  $u \rightarrow v$  o si  $v \rightarrow u$ . Se denota que  $u$  y  $v$  son adyacentes escribiendo  $u \sim v$  o bien  $u \sim_D v$  cuando haga falta especificar que son adyacentes en  $D$ .

Se dice que hay una flecha desde  $u$  hacia  $v$  cuando  $u \rightarrow v$ .

El *ingrado* de un vértice  $v$ ,  $\delta^-(v)$ , es el número de flechas que llegan hacia  $v$ , es decir, el número de flechas de la forma  $(x, v)$  en  $F(D)$ .

El *exgrado* de un vértice  $v$ ,  $\delta^+(v)$ , es el número de flechas que salen desde  $v$ , es decir, el número de flechas  $(v, x) \in F(D)$ .

Un vértice  $v$  es un *vértice duplicado* de otro vértice  $u$  si para todo vértice  $x$  tal que  $x \rightarrow u$  se tiene que  $x \rightarrow v$  y para todo vértice  $y$  tal que  $u \rightarrow y$  se tiene que  $v \rightarrow y$ . Es decir,  $u$  y  $v$  son duplicados si son adyacentes hacia los mismos vértices y son adyacentes desde los mismos vértices.

Una gráfica es *asimétrica* si para todo par de vértices adyacentes  $u$  y  $v$  se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ , pero nunca ambas.

En esta tesis sólo se consideran gráficas dirigidas asimétricas tales que  $V(D) \neq \emptyset$  y  $|V(D)|$  es finito.

Dos digráficas  $D$  y  $E$  son *isomórficas* si existe una biyección entre  $V(D)$  y  $V(E)$  que respeta exactamente las adyacencias dadas por  $F(D)$  y  $F(E)$ . Esto se denota escribiendo  $D \cong E$ .

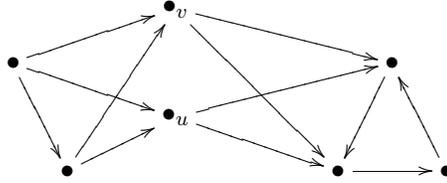


Figura 2.2:  $u$  y  $v$  son vértices duplicados.

Una digráfica  $E$  es una *subgráfica dirigida* o *subdigráfica* de otra digráfica  $D$  si  $V(E) \subset V(D)$  y  $F(E) \subset F(D)$  tal que si  $(u, v) \in F(E)$  entonces  $u \in V(E)$  y  $v \in V(E)$ .

Si  $W \subset V(D)$  la *digráfica inducida por  $W$  en  $D$*  es la que tiene como vértices al conjunto  $W$  y como conjunto de flechas al conjunto  $F(D) \cap (W \times W)$ . Se denota  $D[W]$  a la subdigráfica inducida por  $W$  en  $D$ .

Una *subdigráfica generadora*  $H$  de  $D$  es una subdigráfica de  $D$  que cumple que  $V(H) = V(D)$ .

Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $V(D)$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Se dice que  $A$  *domina a  $B$*  si  $a \rightarrow b$  para todo par de vértices  $a \in A$  y  $b \in B$ . Cuando  $A$  domina a  $B$  se escribe  $A \mapsto B$ .

Una *gráfica no dirigida* o *gráfica*  $G = (V, E)$  consiste en un conjunto  $V(G)$  de *vértices* y un conjunto  $A(G)$  de *aristas* de pares de elementos distintos de  $V(G)$ .

Sea  $D$  una digráfica. La gráfica subyacente de  $D$ ,  $\overline{UG(D)}$ , es la que tiene como conjunto de vértices a  $V(\overline{UG(D)}) = V(D)$  y como conjunto de aristas a  $V(\overline{UG(D)}) = \{(x, y) \text{ tales que } x \sim_D y\}$ .

El *complemento* de una gráfica  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , es una gráfica tal que  $V(G) = V(\overline{G})$  y tal que  $u \sim_{\overline{G}} v$  si y sólo si  $u \not\sim_G v$ .

Se dice que dos gráficas o dos digráficas  $D$  y  $E$  son *ajenas* si  $V(D) \cap V(E) = \emptyset$ .

### 2.3 Trayectorias y distancia en digráficas y en gráficas

Un *camino dirigido*  $P = (p_0, \dots, p_k)$  es una sucesión de vértices tales que  $p_i \rightarrow p_{i+1}$  para  $0 \leq i < k$ . Se dice que  $u$  es un *vértice inicial de  $P$*  si  $u$  es el primer vértice de  $P$ ; es decir, si  $u = p_0$ , y se dice que  $v$  es un *vértice terminal de  $P$*  si  $v$  es el último vértice de la trayectoria; es decir, si  $v = p_k$ .

Una *trayectoria dirigida*  $P = (p_0, \dots, p_k)$  es una sucesión de vértices tales que  $p_i \rightarrow p_{i+1}$

para  $0 \leq i < k$  y  $p_i \neq p_j$  para  $i \neq j$ . Se dice que  $u$  es un *vértice inicial de  $P$*  si  $u$  es el primer vértice de  $P$ ; es decir, si  $u = p_0$ , y se dice que  $v$  es un *vértice terminal de  $P$*  si  $u$  es el último vértice de la trayectoria, es decir, si  $v = p_k$ .

Una *ciclo dirigido*  $C = (c_0, \dots, c_k, c_0)$  es una sucesión de vértices tales que  $c_i \rightarrow c_{i+1}$  para  $0 \leq i < k$  y  $c_k \rightarrow c_0$  y  $c_i \neq c_j$  para  $i \neq j$ .

$P$  es una  *$(u, v)$ -trayectoria dirigida* si  $u$  es el vértice inicial de  $P$  y  $v$  es el vértice terminal de  $P$ . Análogamente, se dice que  $P$  es un  *$(u, v)$ -camino dirigido* si  $u$  es el vértice inicial de  $P$  y  $v$  es el vértice terminal de  $P$ .

La *longitud* de una trayectoria dirigida  $P$ , denotada por  $|P|$ , se define como el número de flechas que forman a la trayectoria. Por ejemplo, si  $P$  es una trayectoria dirigida tal que  $P = (p_0, \dots, p_k)$  entonces  $|P| = k$ .

La *longitud* de un camino dirigido  $P = (p_0, \dots, p_k)$ , denotada por  $|P|$ , se define como el número de flechas recorridas en el camino, contando una vez a cada flecha por cada vez que aparece en el camino.

Se tiene que toda trayectoria dirigida es un camino dirigido, por definición.

**Lema 2.1.** *Todo  $(u, v)$ -camino dirigido contiene una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida.*

**Demostración:** Se demostrará el lema por inducción sobre la longitud del camino dirigido. Sea  $P = (p_0, \dots, p_k)$ .

Cuando  $k = 1$  se tiene que  $P = (p_0, p_1)$  es una trayectoria dirigida.

Supongamos que todo camino dirigido  $P' = (p'_0, \dots, p'_k)$  con  $k < n$  contiene una trayectoria dirigida  $T$ .

Sea  $P = (p_0, \dots, p_n)$  un camino dirigido de longitud  $n$ . Si  $P$  es una trayectoria dirigida se cumple que  $P$  contiene una trayectoria dirigida, pues  $P$  se contiene a sí misma. Supongamos que  $P$  no es una trayectoria dirigida. Entonces existen dos vértices  $p_i$  y  $p_j$  en  $P$  tales que  $p_i = p_j$  y  $i \neq j$  con  $i < j$ . Consideremos al camino dirigido  $P^* = (p_0, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{j+1}, \dots, p_n)$ , en que  $p_i \rightarrow p_{j+1}$  pues  $p_j \rightarrow p_{j+1}$  y  $p_i = p_j$ .  $|P^*| < n$  entonces por la hipótesis inductiva se tiene que  $P^*$  contiene una trayectoria dirigida  $T$ . Como  $P$  contiene  $P^*$  y  $P^*$  contiene  $T$  entonces  $P$  contiene a  $T$ .  $\square(2.1)$

Una  *$(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima  $P$*  es una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida tal que  $|P| \leq |T|$  para toda  $(u, v)$ -trayectoria dirigida  $T$ .

La *distancia de un vértice  $u$  a otro vértice  $v$*  en una digráfica, denotada por  $d(u, v)$ , es  $|P|$  donde  $P$  es una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima. De la misma manera

se define la *distancia de un vértice  $u$  a un conjunto  $A$* ,  $d(u, A)$ , como  $|P|$  tal que  $P$  es la mínima  $(u, v)$ -trayectoria con  $v \in A$ . La *distancia de un conjunto  $A$  a un vértice  $u$* ,  $d(A, u)$ , se define como  $|P|$  tal que  $P$  es la mínima  $(u, v)$ -trayectoria con  $u \in A$ . Se define la *distancia de un conjunto  $A$  a un conjunto  $B$* ,  $d(A, B)$ , como  $|P|$  tal que  $P$  es la mínima  $(u, v)$ -trayectoria con  $u \in A$  y  $v \in B$ .

Una *trayectoria* en una gráfica  $P = (p_0, \dots, p_k)$  es una sucesión de vértices tales que  $p_i \sim p_{i+1}$  para  $0 \leq i < k$  y  $p_i \neq p_j$  para  $i \neq j$ .

En una gráfica una  $(p_0, p_k)$ -trayectoria es una trayectoria que empieza en el vértice  $p_0$ , y que termina en el vértice  $p_n$ .

La *distancia de un vértice  $u$  a otro vértice  $v$*  en una gráfica, denotada por  $d(u, v)$ , es  $|P|$  donde  $P$  es una  $(u, v)$ -trayectoria de longitud mínima.

Una *ciclo*  $C = (c_0, \dots, c_k, c_0)$  en una gráfica es una sucesión de vértices tales que  $c_i \sim c_{i+1}$  para  $0 \leq i < k$  y  $c_k \rightarrow c_0$  y  $c_i \neq c_j$  para  $i \neq j$ .

Una *camino cerrado*  $R = (r_0, \dots, r_k, r_0)$  en una gráfica es una sucesión de vértices tales que  $c_i \sim c_{i+1}$  para  $0 \leq i < k$  y  $c_k \sim c_0$ , es decir, tales que el primer y el último vértice de  $R$  es el mismo.

La *longitud* de un camino  $P = (p_0, \dots, p_k)$  o de un camino cerrado  $R = (r_0, \dots, r_k, r_0)$  denotada por  $|P|$  se define como el número de aristas recorridas en el camino, contando una vez a cada arista por cada vez que aparece en el camino.

**Lema 2.2.** *En una gráfica todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

**Demostración:** Sea  $G$  una gráfica y sea  $R = (r_0, \dots, r_k, r_0)$  un camino dirigido cerrado de  $G$  tal que  $|R| = k + 1$  es impar.

Demostraremos este lema haciendo una inducción sobre la longitud del camino cerrado.

Si  $|R| = 3$ ,  $R = (r_0, r_1, r_2, r_0)$ , se tiene que  $r_i \neq r_j$  para  $i \neq j$ , pues si hubieran vértices iguales se tendría que  $G$  tiene una flecha del tipo  $(a, a)$ , lo cual hemos prohibido en nuestra definición de digráficas para ésta tesis. Entonces  $R$  es un ciclo dirigido de longitud impar.

Supongamos que cada vez que se tiene un camino dirigido cerrado  $|R| < n$  con  $|R|$  impar, entonces  $R$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

Sea  $R = (r_0, \dots, r_{n-1}, r_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud  $n > 3$ . Si  $r_i \neq r_j$  para todo par de vértices con  $i \neq j$  entonces  $R$  es un ciclo dirigido de longitud impar. Entonces supongamos que existe un par de vértices  $r_i$  y  $r_j$  con  $i \neq j$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i < j$ . Sean  $R_1 = (r_i, r_{i+1}, \dots, r_{j-1}, r_j)$  y  $R_2 = (r_j, r_{j+1}, \dots, r_{i-1}, r_i)$ .

Observemos que  $R = R_1 \cup R_2$  y por lo tanto  $|R| = |R_1| + |R_2|$ . Como  $|R|$  es impar entonces  $|R_1|$  es impar y  $|R_2|$  es par o bien  $|R_1|$  es par y  $|R_2|$  es impar. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $|R_1|$  es impar. Como todo camino dirigido cerrado es de longitud por lo menos dos entonces  $|R_2| \geq 2$ , y por lo tanto  $|R_1|$  es un número impar menor que  $n$ . Entonces por nuestra hipótesis inductiva se tiene que  $R_1$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar  $C$ . Como  $C$  también está contenido en  $R$  se tiene lo que queríamos demostrar.  $\square(2.2)$

## 2.4 Digráficas transpuestas

La *digráfica transpuesta*  $D^\tau$  de una digráfica  $D$  es la que tiene como conjunto de vértices a  $V(D^\tau) = V(D)$  y tal que  $(u, v) \in F(D^\tau)$  si y sólo si  $(v, u) \notin F(D)$ . Es decir  $u \rightarrow_{D^\tau} v$  si y sólo si  $v \not\rightarrow_D u$ .

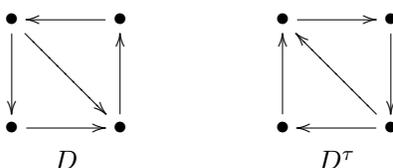


Figura 2.3: Una digráfica  $D$  y su digráfica transpuesta  $D^\tau$ .

**Lema 2.3.**  $D = (D^\tau)^\tau$ .

**Demostración:** Por definición se tiene que  $V(D) = V(D^\tau) = V((D^\tau)^\tau)$ . Sean  $u$  y  $v$  tales que  $(u, v) \in F(D)$ . Por definición se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  si y sólo si  $(v, u) \in F(D^\tau)$  y se tiene que  $(v, u) \in F(D^\tau)$  si y sólo si  $(u, v) \in F((D^\tau)^\tau)$ . Por lo tanto  $(u, v) \in F(D)$  si y sólo si  $(u, v) \in F((D^\tau)^\tau)$ . Entonces se tiene que  $D = (D^\tau)^\tau$ .  $\square(2.3)$

**Lema 2.4.** Sea  $T = (t_0, \dots, t_k)$  una  $(t_0, t_k)$ -trayectoria dirigida en  $D$ . Entonces  $T^\tau$  es una  $(t_k, t_0)$ -trayectoria dirigida en  $D^\tau$ .

**Demostración:** Como  $T = (t_0, \dots, t_k)$  es una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida, se tiene que  $t_i \rightarrow t_{i+1}$  en  $D$  con  $0 \leq i < k$ . Entonces se tiene que  $t_{i+1} \rightarrow t_i$  en  $D^\tau$  con  $0 \leq i < k$ . Entonces  $T^\tau = (t_k, \dots, t_0)$  es una  $(t_k, t_0)$ -trayectoria dirigida en  $D^\tau$ .  $\square(2.4)$

**Lema 2.5.** Sea  $C = (c_0, \dots, c_k, c_0)$  un ciclo dirigido en  $D$ . Entonces  $C^\tau$  es un ciclo dirigido en  $D^\tau$ .

**Demostración:** Como  $C' = (c_0, \dots, c_k)$  es una  $(c_0, c_k)$ -trayectoria dirigida de  $D$ , por el lema 2.4 se tiene que  $C'^\tau = (c_k, \dots, c_0)$  es una  $(c_k, c_0)$ -trayectoria dirigida de  $D^\tau$ . Como  $c_k \rightarrow c_0$  en  $D$  se tiene que  $c_0 \rightarrow c_k$  en  $D^\tau$ . Por lo tanto  $C' \cup (c_0, c_k) = (c_k, \dots, c_0, c_k)$  es un ciclo dirigido en  $D^\tau$ .  $\square(2.5)$

**Corolario 2.6.** Sea  $T = (t_0, \dots, t_k)$  una  $(t_0, t_k)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima en  $D$ . Entonces  $T^\tau$  es una  $(t_k, t_0)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima en  $D^\tau$ .

**Demostración:** Sea  $T = (t_0, \dots, t_k)$  una  $(t_0, t_k)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima en  $D$ . Supongamos que  $T^\tau$  no es una  $(t_k, t_0)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima en  $D^\tau$ . Entonces existe una  $(t_k, t_0)$ -trayectoria  $P = (p_0, \dots, p_j)$  en  $D^\tau$  tal que  $|P| = j < k = |T^\tau|$ . Por el lema 2.4 se tiene que  $P^\tau$  es una  $(t_0, t_k)$ -trayectoria dirigida en  $(D^\tau)^\tau$  y por el lema 2.3 que  $P^\tau$  es una  $(t_0, t_k)$ -trayectoria dirigida en  $D$ . Se tiene que  $|P^\tau| = |P| = j < k = |T^\tau| = |T|$ ; es decir,  $P^\tau$  y  $T$  son  $(t_0, t_k)$ -trayectorias dirigidas en  $D$  y  $|P^\tau| < |T|$ . Esto contradice nuestra suposición de que  $T$  es una  $(t_0, t_k)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima en  $D$ . Por lo tanto  $T^\tau$  es una  $(t_k, t_0)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima en  $D^\tau$ .  $\square(2.6)$

## 2.5 Conexidad, contracciones y composiciones

En una digráfica decimos que dos vértices  $u$  y  $v$  están *fuertemente conectados* si existen una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida y una  $(v, u)$ -trayectoria dirigida.

Un conjunto de vértices  $A$  de una digráfica es *fuertemente conexo* si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $A$ , éstos están fuertemente conectados.

Una *componente fuertemente conexas* es un conjunto fuertemente conexo maximal en vértices.

Se dice que una digráfica es *fuertemente conexas* si  $V(D)$  es un conjunto fuertemente conexo.

Una *componente conexas* en una gráfica es una subgráfica inducida por un conjunto de vértices maximal tal que existe una  $(u, v)$ -trayectoria para cualquier par de vértice  $u, v$  en la gráfica.

**Lema 2.7.** Sean  $D$  una digráfica y  $A$  y  $B$  dos componentes conexas distintas de  $D$ . Entonces  $A \cap B = \emptyset$ .

**Demostración:** Supongamos que existe un vértice  $v \in A \cap B$ . Sean los vértices  $a \in A$  y  $b \in B$ . Como  $A$  y  $B$  son fuertemente conexas existen las trayectorias dirigidas  $A_1 = (a, \dots, a_i, \dots, v)$ ,  $A_2 = (v, \dots, a_i, \dots, a)$ ,  $B_1 = (b, \dots, b_i, \dots, v)$  y  $B_2 = (v, \dots, b_i, \dots, b)$ . Entonces  $A_1 \cup B_2 = (a, \dots, a_i, \dots, v, \dots, b_i, \dots, b)$  y  $B_1 \cup A_2 = (b, \dots, b_i, \dots, v, \dots, a_i, \dots, a)$  son un  $(a, b)$ -camino dirigido y un  $(b, a)$ -camino dirigido. Por el lema 2.1 estos caminos dirigidos contienen a una  $(a, b)$ -trayectoria dirigida y a una  $(b, a)$ -trayectoria dirigida respectivamente. Por lo tanto  $a$  y  $b$  están en  $A \cap B$  para todo par de vértices tales que  $a \in A$  y  $b \in B$ . Entonces  $A = B$ , lo cual contradice la hipótesis de que  $A$  y  $B$  son dos componentes conexas distintas. Por lo tanto  $A \cap B = \emptyset$ .  $\square(2.7)$

**Lema 2.8.** Sean  $D$  una digráfica y  $A$  y  $B$  dos componentes fuertemente conexas distintas de  $D$  tales que existen dos vértices  $a$  y  $b$  tales que  $a \sim b$ , con  $a \in A$  y  $b \in B$ . Entonces  $A \mapsto B$  o  $B \mapsto A$ .

**Demostración:** Sean los vértices  $a \in A$  y  $b \in B$ . Supongamos que existen las flechas  $a_1 \rightarrow b_1$  y  $b_2 \rightarrow a_2$  con  $a_1$  y  $a_2$  en  $A$  y  $b_1$  y  $b_2$  en  $B$ . Como  $A$  y  $B$  son fuertemente conexas existen las trayectorias dirigidas  $A_1 = (a, \dots, a_1)$ ,  $A_2 = (a_2, \dots, a)$ ,  $B_1 = (b_1, \dots, b)$  y  $B_2 = (b, \dots, b_2)$ . Entonces  $A_1 \cup (a_1, b_1) \cup B_1$  es una  $(a, b)$ -trayectoria dirigida y  $B_2 \cup (b_2, a_2) \cup A_2$  es una  $(b, a)$ -trayectoria dirigida, contradiciendo la suposición de que  $A$  y  $B$  dos componentes conexas distintas. Por lo tanto  $A \mapsto B$  o  $B \mapsto A$ .  $\square(2.8)$

Sea  $D$  una digráfica con vértices  $V(D) = \{v_1, \dots, v_k\}$  y  $D_1, \dots, D_k$  un conjunto de digráficas ajenas. Se define la *composición de  $D_1, \dots, D_k$  sobre  $D$* ,  $D[D_1, \dots, D_k]$ , como la que se obtiene sustituyendo a cada vértice  $v_i$  por la digráfica  $D_i$ , con las flechas  $u \rightarrow v$  para todo par de vértices  $u \in D_i$  y  $v \in D_j$  tales que  $D_i \mapsto D_j$ .

Dada una partición de los vértices de  $D$ ,  $P = \{D_1, \dots, D_k\}$  se define a la *contracción  $C/P$*  de una digráfica  $D$  como una digráfica que se obtiene cuando se contrae cada conjunto  $D_i$  a un vértice  $v_i$  y se eliminan flechas repetidas. Es decir, los vértices de  $C/P$  serán  $v_1, \dots, v_k$ , uno por cada elemento de la partición de  $V(D)$ , y se tendría que  $v_i \rightarrow v_j$  si hay flecha en  $D$  desde algún vértice de  $D_i$  hacia algún vértice de  $D_j$ .

Observemos que si  $D$  es una digráfica inducida por los vértices de un ciclo entonces  $D$  es fuertemente conexa, pues para cada vértice del ciclo se puede llegar a todos los demás viajando por trayectorias del ciclo.

**Lema 2.9.** Sean  $C/P$  una contracción de una digráfica usando la partición  $P = \{D_1, \dots, D_k\}$  de los vértices de  $D$  en sus componentes fuertemente conexas. Entonces  $C/P$  es acíclica.

**Demostración:** Supongamos que  $C/P$  contiene un ciclo  $C = (c_0, \dots, c_k, c_0)$ . Sean  $c_i$  y  $c_j$  dos vértices distintos de  $C$  con  $i < j$ . Sean  $P_1 = (c_i, \dots, c_0, \dots, c_j)$  y  $P_2 = (c_i, \dots, c_j)$ . Sean  $u$  y  $v$  vértices de  $D$  tales que  $u \in C_i$  y  $v \in C_j$ . Podemos construir una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida en  $D$  pasando por las componentes conexas que representan a los vértices de  $P_1$  de la siguiente manera: Por el lema 2.8 existe por lo menos una flecha de algún vértice en  $C_i$  a algún vértice de  $C_{i+1}$ , digamos  $c_i \rightarrow c_{i+1}$ . Como  $C_i$  es fuertemente conexas existe una  $(u, c_i)$ -trayectoria dirigida  $T_i$  en  $C_i$ . Por el lema 2.8 existe por lo menos una flecha de algún vértice en  $C_{i+1}$  a algún vértice de  $C_{i+2}$ , digamos  $c'_{i+1} \rightarrow c_{i+2}$ . Como  $C_{i+1}$  es fuertemente conexas existe una  $(c_{i+1}, c'_{i+1})$ -trayectoria dirigida  $T_{i+1}$  en  $C_{i+1}$ . Podemos viajar por la  $(c_{i+1}, c'_{i+1})$ -trayectoria dirigida, y luego saltar a  $C_{i+2}$  por  $c'_{i+1} \rightarrow c_{i+2}$ . Seguimos haciendo este proceso hasta llegar hasta la componente  $C_j$ , de donde podemos llegar a  $v$  por la conexidad fuerte de  $C_j$ . Así el camino dirigida  $T^* = T_i \cup (c_i, c_{i+1}) \cup T_{i+1} \cup (c'_{i+1}, c_{i+2}) \cup \dots \cup T_{j-1} \cup (c'_{j-1}, c_j) \cup T_j$  tiene como vértice inicial a  $u$  y como vértice final a  $v$ . Por el lema 2.1 se tiene que  $T^*$  contiene una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida. De la misma manera se puede construir una  $(v, u)$ -trayectoria dirigida en  $D$  saltando por las componentes conexas en  $D$  que representan a los vértices de  $P_2$ .

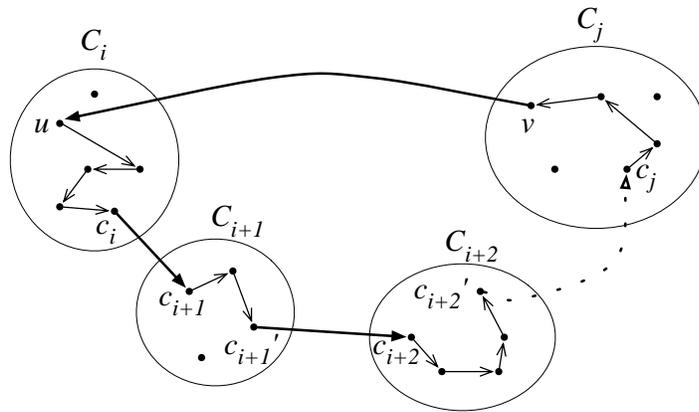


Figura 2.4: Una construcción de un camino dirigido como en el lema 2.9

Entonces  $u$  y  $v$  están conectadas, lo cual contradice que están en componentes conexas diferentes. Por lo tanto  $C/P$  es acíclica.  $\square(2.9)$

**Lema 2.10.** *Sea  $D$  una digráfica acíclica finita. Entonces existe algún vértice con ingrado cero y algún vértice con exgrado cero.*

**Demostración:** Sea  $P = (p_0, \dots, p_n)$  una trayectoria de longitud máxima en  $D$ .

Se probará que el ingrado de  $p_0$  y que el exgrado de  $p_n$  son cero, es decir, que  $\delta^-(p_0) = 0$  y  $\delta^+(p_n) = 0$ .

Supongamos primero que  $\delta^-(p_0) \neq 0$ . Entonces existe un vértice  $v$  tal que  $v \rightarrow p_0$ . Si  $v = p_i$  para alguna  $1 < i \leq n$  se tendría que  $(p_i, p_0, \dots, p_{i-1})$  es un ciclo dirigido en  $D$ , lo cual contradice la hipótesis de que  $D$  es acíclica. Se tiene que  $v \neq p_1$  pues  $D$  es asimétrica. Entonces  $v \neq p_i$  para toda  $i$  tal que  $p_i \in P$ . Entonces  $(v, p_0, \dots, p_n)$  es una trayectoria dirigida de longitud  $|P| + 1$ , lo cual contradice que  $P$  es una trayectoria de longitud máxima en  $D$ . Por lo tanto  $\delta^-(p_0) = 0$ .

Supongamos que  $\delta^+(p_n) \neq 0$ . Entonces existe un vértice  $u$  tal que  $p_n \rightarrow u$ . Si  $v = p_i$  para alguna  $0 \leq i < n - 1$  se tendría que  $(p_n, p_{i+1}, \dots, p_n)$  es un ciclo dirigido en  $D$ , lo cual contradice que  $D$  es acíclica. Se tiene que  $u \neq p_{n-1}$  pues  $D$  es asimétrica. Entonces  $u \neq p_i$  para toda  $i$  tal que  $p_i \in P$ . Entonces  $(p_0, \dots, p_n, u)$  es una trayectoria dirigida de longitud  $|P| + 1$ , lo cual contradice que  $P$  es una trayectoria de longitud máxima en  $D$ . Por lo tanto  $\delta^+(p_n) = 0$ .  $\square(2.10)$

Se define a una *componente fuertemente inicial* como una componente fuertemente conexa tal que su vértice correspondiente en  $C/P$  tiene ingrado cero. De la misma manera se define a una *componente fuertemente terminal* como una componente fuertemente conexa tal que su vértice correspondiente en  $C/P$  tiene exgrado cero.

**Corolario 2.11.** *Sea  $D$  una digráfica finita. Entonces tiene al menos una componente fuertemente conexa inicial y una terminal.*

**Demostración:** Consideramos la contracción  $C/P$  de  $D$  usando la partición  $P = \{D_1, \dots, D_k\}$  de los vértices de  $D$  en sus componentes fuertemente conexas. Por el lema 2.9 se sabe que  $C/P$  es acíclica. Por el lema 2.10 existen vértices  $c_I$  y  $c_T$  tales que  $c_I$  tiene ingrado cero y tales que  $c_T$  tiene exgrado cero, es decir,  $\delta^-(c_I)$  y  $\delta^+(c_T)$ . Por lo tanto la componente conexa  $c_I$  es una componente fuertemente conexa inicial, y la componentet conexa  $c_T$  es una componente fuertemente conexa terminal.  $\square(2.11)$

## 2.6 Semicompletas y semicompletas bipartitas

Una digráfica es *semicompleta* si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $V(D)$  se tiene que  $u \sim v$ .

Una digráfica es *bipartita* si existe una partición  $V(D) = \{V_1, V_2\}$  tal que si  $u \sim v$  se tiene que  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$  o que  $v \in V_1$  y  $u \in V_2$ ; es decir, tal que no hay flechas entre vértices de  $V_1$  ni entre vértices de  $V_2$ .

**Lema 2.12.** *Una digráfica  $D$  fuertemente conexa con  $|V(D)| > 1$  es bipartita si y sólo si  $D$  no contiene ningún ciclo dirigido de longitud impar.*

**Demostración:** Supongamos primero que  $D$  es bipartita, con la partición  $V(D) = \{V_0, V_1\}$  tal que si  $u \sim v$ , se tiene que  $u \in V_0$  y  $v \in V_1$  o que  $v \in V_0$  y  $u \in V_1$ . Supongamos que  $D$  contiene un ciclo  $C = (c_0, \dots, c_n, c_0)$  de longitud impar. Por la definición de digráfica bipartita y por la flecha  $v_i \rightarrow v_{i+1}$  si se tiene que si  $v_i \in V_0$  entonces  $v_{i+1} \in V_1$ . Como  $v_{i+1} \in V_1$  y por la flecha  $v_{i+1} \rightarrow v_{i+2}$  se tiene que  $v_{i+2} \in V_0$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $c_0 \in V_0$ . Como  $c_0 \rightarrow c_1$  se tiene que  $c_1 \in V_1$ . Por las observaciones anteriores se tiene que  $c_i \in V_0$  y que  $c_{i+1} \in V_1$  para toda  $i$  par. Como  $|C| = n + 1$  es impar, se tiene que  $n$  es par, entonces  $c_n \in V_0$ . Observemos que  $c_n \rightarrow c_0$ , lo cual contradice la suposición de que  $D$  es bipartita. Por lo tanto  $D$  no contiene ciclos de longitud impar.

Supongamos ahora que  $D$  no contiene ningún ciclo de longitud dirigido de longitud impar. Sea  $x$  un vértice en  $V(D)$ .

**Afirmación 2.12.1.** *Sea  $D$  un digráfica que no contiene ningún ciclo de longitud dirigido de longitud impar y sea  $y$  un vértice en  $V(D) - \{x\}$ . Entonces toda  $(x, y)$ -trayectoria dirigida  $P$  y toda  $(y, x)$ -trayectoria dirigida  $Q$  son tales  $|P| \equiv |Q| \pmod{2}$ ; es decir toda  $(x, y)$ -trayectoria dirigida  $P$  y toda  $(y, x)$ -trayectoria dirigida  $Q$  tienen la misma paridad.*

**Demostración:** Sean  $P$  una  $(x, y)$ -trayectoria dirigida y  $Q$  una  $(y, x)$ -trayectoria dirigida tales que  $|P| \not\equiv |Q| \pmod{2}$ . Por el lema 2.2 se tiene que todo camino dirigido cerrado contiene un ciclo dirigido de longitud impar, por lo tanto  $D$  contiene un ciclo de longitud impar, lo cual es una contradicción.  $\square(2.12.1)$

Sean  $V_0 = \{v \in V(D) - \{x\} \text{ tales que } |P| \text{ es par para toda } (x, y)\text{-trayectoria dirigida } P\}$  y  $V_1 = \{v \in V(D) - \{x\} \text{ tales que } |P| \text{ es impar para toda } (x, y)\text{-trayectoria dirigida } P\}$ . Claramente  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$  por la afirmación 2.12.1. Supongamos que hay una flecha

entre dos vértices de  $u$  y  $v \in V_0$ , digamos  $u \rightarrow v$ . Como  $u \in V_0$  existe una  $(x, u)$ -trayectoria dirigida  $P$  tal que  $|P|$  es par. Sea  $P^* = P \cup (u, v)$ . Entonces  $P^*$  es una  $(x, v)$ -trayectoria dirigida de longitud  $|P| + 1$ . Esto no es posible ya que contradice la afirmación 2.12.1. Por lo tanto  $D$  es bipartita con la partición  $V(D) = \{V_0, V_1\}$ .  $\square(2.12)$

Una digráfica es *bipartita semicompleta* si es bipartita y tal que para cualquier par de vértices  $u, v$  se tiene que  $u \sim v$  con  $u \in V_0$  y  $v \in V_1$ ; es decir, todo vértice de  $V_0$  es adyacente a todo vértice de  $V_1$ .

## 2.7 Digráficas cuasitransitivas y 3-cuasitransitivas

Una digráfica es *transitiva* si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  tales que existe una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud dos se tiene que  $u \rightarrow v$ .

Una digráfica es *cuasitransitiva* si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  tales que existe una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud dos se tiene que  $u \rightarrow v$  o bien  $v \rightarrow u$ .

Una digráfica es *3-cuasitransitiva* si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  tales que existe una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud  $n$  se tiene que  $u \rightarrow v$  o bien  $v \rightarrow u$ .

## Capítulo 3

# Digráficas cuasitransitivas

### 3.1 Algunas propiedades de las digráficas cuasitransitivas

**Lema 3.1.** Sean  $D$  una digráfica cuasitransitiva y  $P = (p_0, \dots, p_l)$  una  $(p_0, p_l)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima, y  $p_i$  y  $p_j$  dos vértices adyacentes en  $P$  tales que  $i < j$  con  $i + 1 \neq j$ . Entonces  $p_j \rightarrow p_i$ .

**Demostración:** Sean  $p_i$  y  $p_j$  dos vértices adyacentes de  $V(P)$  tales que  $i < j$  con  $i + 1 \neq j$ . Supongamos que  $p_i \rightarrow p_j$ . Entonces  $(p_0, \dots, p_i, p_j, \dots, p_l)$  es una  $(p_0, p_l)$ -trayectoria dirigida de longitud  $l - (j - i)$ . Observemos que  $l - (j - i)$  es menor a  $l$ , lo cual contradice suponer que  $P$  es mínima. Por lo tanto  $p_j \rightarrow p_i$ .  $\square(3.1)$

**Teorema 3.2.** Sean  $D$  una digráfica cuasitransitiva y  $P = (p_0, \dots, p_l)$  una  $(p_0, p_l)$ -trayectoria mínima. Entonces la subdigráfica inducida por los vértices de  $P$  es una digráfica semicompleta, en la cual  $p_j \rightarrow p_i$  para toda  $i$  y  $j$  tales que  $i < j$  con  $i + 1 \neq j$ , excepto para  $l = 3$ , caso en el cual puede no estar la flecha de  $p_l$  a  $p_1$ .

**Demostración:** Cuando  $l = 1$  claramente se cumple la proposición.

Cuando  $l = 2$  se tiene que  $p_0 \sim p_2$  por  $(p_0, p_1, p_2)$ . Además  $p_2 \rightarrow p_0$ , pues si la flecha fuera al revés, se tendría que  $P$  no es una  $(p_0, p_l)$ -trayectoria mínima.

Cuando  $l = 3$  se tienen las adyacencias  $p_0 \sim p_2$  por  $(p_0, p_1, p_2)$  y  $p_3 \sim p_1$  por  $(p_1, p_2, p_3)$ . También se tiene que  $p_2 \rightarrow p_0$  y que  $p_3 \rightarrow p_1$ , por el lema 3.1. Observemos que no hay más adyacencias forzadas por trayectorias dirigidas con vértices de  $P$ ; es decir, la gráfica dirigida con las flechas mencionadas es cuasitransitiva. Observemos también que la subdigráfica

inducida por los vértices de  $P$  es cuasitransitiva. Si agregáramos la flecha  $p_3 \rightarrow p_0$  la digráfica inducida por los vértices de  $P$  sigue siendo cuasitransitiva.

Cuando  $k = 4$  se tienen las adyacencias  $p_0 \sim p_2$ ,  $p_1 \sim p_3$  y  $p_2 \sim p_4$  por las trayectorias dirigidas  $(p_0, p_1, p_2)$ ,  $(p_1, p_2, p_3)$  y  $(p_2, p_3, p_4)$  respectivamente. Por el lema 3.1 se tienen las flechas  $p_2 \rightarrow p_0$ ,  $p_3 \rightarrow p_1$  y  $p_4 \rightarrow p_2$ . Luego se tiene una adyacencia  $p_4 \sim p_0$  por  $(p_4, p_2, p_0)$  y  $p_4 \rightarrow p_0$  por el lema 3.1. Luego se tiene que  $p_4 \sim p_1$  por  $(p_4, p_0, p_1)$ , y  $p_4 \rightarrow p_1$  por el lema 3.1.  $p_3 \sim p_0$  por  $(p_3, p_4, p_0)$  y  $p_3 \rightarrow p_0$  por el lema 3.1. Con estas flechas ya se tiene que la subdigráfica inducida por los vértices de  $P$  es una digráfica semicompleta, y las flechas tienen la orientación deseada.

Para los demás casos, hagamos una inducción sobre  $p$ . Supongamos que la proposición es verdadera para toda  $l < n$  con  $l \neq 3$  y  $n \geq 5$ . Considérese  $P = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)$ , una  $(p_0, p_n)$ -trayectoria dirigida mínima. Las subtrayectorias  $P_1 = (p_0, p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1})$  y  $P_2 = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$  son de longitud  $l = n - 1$  donde  $l < n$  y dado que  $n \geq 5$ , se tiene que  $l \geq 4$ , entonces cumplen los supuestos de la hipótesis inductiva. Es decir, se tiene que las subdigráficas inducidas por las subtrayectorias  $P_1$  y  $P_2$  son digráficas semicompletas y que  $p_j \rightarrow p_i$  para todo  $i$  y  $j$  tal que  $i < j$  con  $i + 1 \neq j$ . Dada esta información sólo falta verificar la existencia de la flecha  $p_n \rightarrow p_0$ . Se tienen las flechas  $p_n \rightarrow p_2$  y  $p_2 \rightarrow p_0$  porque  $P_1$  y  $P_2$  semicompletas. Entonces se tiene que  $p_0 \sim p_n$  por la trayectoria dirigida  $(p_n, p_2, p_0)$ . Finalmente  $p_n \rightarrow p_0$  por el lema 3.1, con lo cual completamos la demostración.

□(3.2)

**Corolario 3.3.** *Sea  $D$  una digráfica cuasitransitiva con una  $(x, y)$ -trayectoria y tal que  $x$  no domina a  $y$ . Entonces  $y \rightarrow x$  o existen vértices  $u, v \in V(D) - \{x, y\}$  tales que  $x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow y$  y  $y \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow x$ .*



Figura 3.1: Corolario 3.3

**Demostración:** Se considera una  $(x, y)$ -trayectoria mínima  $P = (p_0, \dots, p_n)$  con  $p_0 = x$  y  $p_n = y$ .

Caso 1:  $n = 3$ . Entonces sea  $P = (x = p_0, p_1, p_2, p_3 = y)$ . Se tiene que  $p_0 \sim p_2$  y  $p_1 \sim p_3$  por  $(p_0, p_1, p_2)$ ,  $(p_1, p_2, p_3)$  y  $(p_2, p_3, p_3)$ , y se tienen las flechas  $p_2 \rightarrow p_0$ ,  $p_3 \rightarrow p_1$  por el

lema 3.1. Si  $p_0 \sim p_3$ , se tiene la flecha  $p_3 \rightarrow p_0$ , pues por hipótesis  $x$  no domina a  $y$ ; es decir,  $p_0$  no domina a  $p_3$  y se cumple la proposición del corolario. Si  $p_0 \approx p_3$  también se cumple, tomando  $u = p_1$  y  $v = p_2$ .

Caso 2:  $n \neq 3$ . Por el teorema 3.2, sabemos que  $P$  es tal que  $p_i \rightarrow p_j$  para toda  $i$  y  $j$  tales que  $i < j$  con  $i + 1 \neq j$ , en particular para  $j = n$  y  $i = 0$  se tiene la flecha  $p_n \rightarrow p_0$ , donde  $p_n = y$  y  $p_0 = x$ .  $\square(3.3)$

**Corolario 3.4.** Sean  $A$  y  $B$  dos componentes fuertemente conexas de una digráfica cuasitransitiva  $D$ , donde hay por lo menos una flecha  $a \rightarrow b$  con  $a \in A$  y  $b \in B$ . Entonces  $A \mapsto B$ .

**Demostración:** Sean  $x \in A$  y  $y \in B$ . Supongamos que  $x \not\rightarrow y$ . Por el corolario anterior,  $y \rightarrow x$  o existen vértices  $u, v \in V(D) \setminus \{x, y\}$  tal que  $x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow y$  y  $y \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow x$ . Si  $y \rightarrow x$  entonces  $A \cup B$  sería una componente fuertemente conexas, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto existen vértices  $u, v \in V(D) \setminus \{x, y\}$  tal que  $x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow y$  y  $y \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow x$ . Si  $u \in A$  y si  $v \in B$  entonces se tendrían las flechas  $y \rightarrow u$  y  $v \rightarrow x$  que van de  $B$  a  $A$ . Si  $u \in B$  y si  $v \in A$  entonces se tendría la flecha  $u \rightarrow v$ . Si  $u, v \in A$  entonces se tendría la flecha  $y \rightarrow u$  de  $B$  a  $A$ . Si  $u, v \in B$  entonces se tendría la flecha  $v \rightarrow x$  de  $B$  a  $A$ . Al tener alguna flecha de  $B$  a  $A$  contradecimos la hipótesis de que  $A$  y  $B$  son componentes fuertes conexas. Por lo tanto  $x \rightarrow y$ , si  $x \neq a$  y  $y \neq b$ .  $\square(3.4)$

**Teorema 3.5.** Sea  $D$  una digráfica cuasitransitiva fuertemente conexas finita de orden al menos dos. Entonces (a)  $\overline{UG(D)}$  es desconexo, y (b) si  $S$  y  $S'$  son dos subdigráficas de  $D$  tales que  $\overline{UG(S)}$  y  $\overline{UG(S')}$  son componentes conexas distintas de  $\overline{UG(D)}$  entonces  $S \mapsto S'$  o  $S' \mapsto S$ , o bien  $S \mapsto S'$  y  $S' \mapsto S$ . En este último caso sucede que  $|V(S)| = |V(S')| = 1$ .

**Demostración:** (b) Sean  $S$  y  $S'$  subdigráficas de  $D$  como se piden.

**Afirmación 3.5.1.** Sean  $s, s'$  vértices de  $D$ , con  $s \in S$  y  $s' \in S'$ . Entonces  $s \sim s'$ .

**Demostración:** Probaremos la afirmación por reducción al absurdo. Si hubiera alguna pareja de vértices  $s, s'$ , con  $s \in S$  y  $s' \in S'$  tales que no hubiera flecha entre ellos, entonces  $s \sim s'$  en  $\overline{UG(D)}$ , por lo que  $\overline{UG(S)}$  y  $\overline{UG(S')}$  no serían componentes conexas diferentes de  $\overline{UG(D)}$ , lo que contradice nuestra elección de  $S$  y  $S'$ . Por lo tanto, para toda pareja de vértices  $s, s'$ , con  $s \in S$  y  $s' \in S'$ ,  $s \sim s'$ .  $\square(3.5.1)$

Como consecuencia de la afirmación, se tiene que  $s \rightarrow s'$  o  $s' \rightarrow s$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $s \rightarrow s'$ .

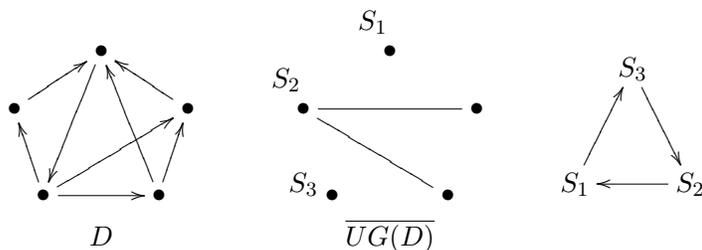


Figura 3.2: Un ejemplo del teorema 3.5, donde  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  son las componentes conexas de  $\overline{UG(D)}$

**Afirmación 3.5.2.** Sean  $s, s', r$ , con  $r \in S$ ,  $s \in S$  y  $s' \in S'$ , con  $s \rightarrow s'$  tal que  $r$  es vecino de  $s$  en  $\overline{UG(D)}$ . Entonces  $r \rightarrow s'$

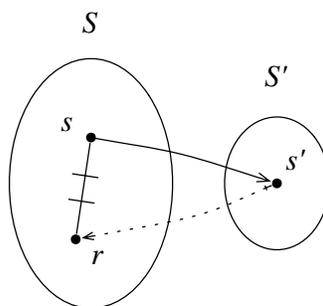


Figura 3.3:  $r \rightarrow s'$  en la afirmación 3.5.2

**Demostración:** Sabemos que hay una flecha entre  $r$  y  $s'$ , por la afirmación 3.5.1, pues estos vértices están en componentes conexas distintas de  $\overline{UG(D)}$ . Supongamos que  $s' \rightarrow r$ , entonces se tiene que  $(s, s', r)$  es una trayectoria de longitud dos entre  $r$  y  $s$ . Como  $D$  es cuasitransitiva, debe de haber una flecha entre  $r$  y  $s$ . Esto contradice nuestra elección de  $r$ . Por lo tanto, si hay una flecha de  $s \rightarrow s'$  entonces todo vértice  $r$ , vecino de  $s$  en  $\overline{UG(S)}$ , tiene una flecha  $r \rightarrow s'$ .  $\square(3.5.2)$

Definimos una partición de los vértices de la componente conexas  $S$  que contiene a  $s$  en  $\overline{UG(D)}$  en vecindades  $V_0(s), V_1(s), \dots, V_m(s)$  de  $s$ : Sean  $V_0(s) = \{s\}$ ,  $V_1(s) = \{r \in S - V_0(s)$

tales que  $r \sim s$  en  $\overline{UG(D)}$ ,  $V_2(s) = \{r \in S - (V_0(s) \cup V_1(s)) \text{ tales que } r \sim v \text{ en } \overline{UG(D)}$  para alguna  $v \in V_1(s)\}$ ,  $\dots$ ,  $V_i(s) = \{r \in S - (V_0(s) \cup \dots \cup V_{i-1}(s)) \text{ tales que } r \sim v \text{ en } \overline{UG(D)}$  para alguna  $v \in V_{i-1}(s)\}$ ,  $\dots$ ,  $V_m(s) = \{r \in S - (V_0(s) \cup \dots \cup V_{m-1}(s)) \text{ tales que } r \sim v \text{ en } \overline{UG(D)}$  para alguna  $v \in V_{m-1}(s)\}$  con  $m$  tal que  $V_m(s) \neq \emptyset$  y  $V_{m+1}(s) = \emptyset$ . Observemos que  $S = V_0(s) \cup \dots \cup V_m(s)$  ya que al ser  $S$  una componente conexa de la gráfica  $\overline{UG(D)}$  se tiene que existe una  $(s, r)$ -trayectoria en  $S$  para todo vértice  $r \in S$ .

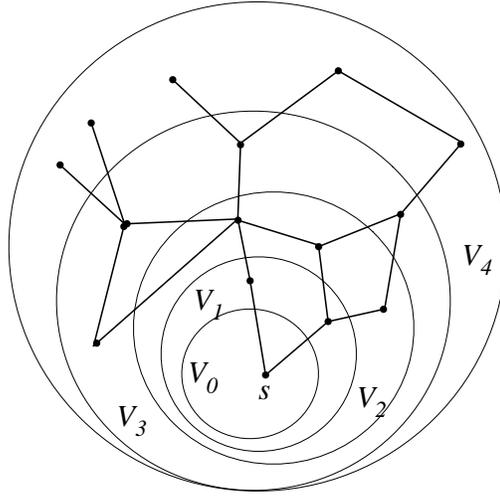


Figura 3.4: Ejemplo de la partición  $S = V_0(s) \cup \dots \cup V_m(s)$  en  $\overline{UG(D)}$

**Afirmación 3.5.3.** Sean  $V_i(s)$  y  $V_{i+1}(s)$ , con  $0 \leq i < m$ , tales que  $v \rightarrow s'$  para todo  $v \in V_i(s)$ . Entonces  $r \rightarrow s'$  para todo  $r \in V_{i+1}(s)$ .

**Demostración:** Esta afirmación es consecuencia directa de la afirmación 3.5.2. Sea  $r \in V_{i+1}(s) = \{r \in S - (V_0(s) \cup \dots \cup V_i(s)) \text{ tales que } r \sim v \text{ en } \overline{UG(D)}$  para alguna  $v \in V_i(s)\}$ , entonces existe un vértice  $v \in V_i(s)$  tal que  $r \sim v$  en  $\overline{UG(D)}$ . Por la afirmación 3.5.2 se tiene que  $r \rightarrow s'$ . Entonces  $r \rightarrow s'$  para todo  $r \in V_{i+1}(s)$ .  $\square(3.5.3)$

**Afirmación 3.5.4.** Sean  $S$  y  $S'$  componentes fuertemente conexas y  $s \in S$  y  $s' \in S'$  vértices tales que  $s \rightarrow s'$ . Entonces  $r \rightarrow s'$  para todo vértice  $r$  tal que  $r \in S$ .

**Demostración:** Observemos que demostrar la afirmación 3.5.4 es equivalente a demostrar que  $v \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_i(s)$  con  $0 \leq i \leq m$ , pues  $S = V_0(s) \cup \dots \cup V_m(s)$ .

Demostremos por inducción sobre  $k$  que  $v \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_i(s)$  con  $0 \leq i \leq k$ .

Cuando  $k = 0$  se tiene que  $s \rightarrow s'$  por hipótesis.

Cuando  $k = 1$  se tiene que  $s \rightarrow s'$  por hipótesis y que  $v \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_1(s)$  por la afirmación 3.5.2.

Supongamos que nuestra afirmación se cumple para toda  $k < m$ , es decir,  $v \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_i(s)$  con  $0 \leq i \leq m - 1$ . En particular  $v \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_{m-1}(s)$ . Entonces por la afirmación 3.5.3 se tiene que  $v \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_m(s)$ . Por lo tanto  $v \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_i(s)$  con  $0 \leq i \leq m$ .  $\square(3.5.4)$

**Afirmación 3.5.5.** Sean  $s, s', r$  vértices de la digráfica tales que  $s \in S$ ,  $r \in S'$  y  $s' \in S'$ , con  $s \rightarrow s'$  y tal que  $r$  es vecino de  $s'$  en  $\overline{UG(D)}$ . Entonces  $s \rightarrow r$ .

**Demostración:** Por la afirmación 3.5.1 se tiene que  $r \sim s$  pues estos vértices están en componentes conexas distintas de  $\overline{UG(D)}$ . Supongamos que  $r \rightarrow s$ . En este caso se tiene que  $(r, s, s')$  es una trayectoria de longitud dos entre  $r$  y  $s'$ . Entonces se tiene que  $r \sim s'$  por la cuasitransitividad de  $D$ . Esto contradice nuestra elección de  $r$ . Entonces  $s \rightarrow r$ . Por lo tanto, si hay una flecha de  $s \rightarrow s'$  entonces todo vértice  $r$ , vecino de  $s'$  en  $\overline{UG(S')}$ , tiene una flecha  $s \rightarrow r$ .  $\square(3.5.5)$

**Afirmación 3.5.6.** Sean  $V_i(s')$  y  $V_{i+1}(s')$  con  $0 \leq i < m$ , tales que  $s \rightarrow v$  para todo  $v \in V_i(s)$ . Entonces  $s \rightarrow r$  para todo  $r \in V_{i+1}(s')$ .

**Demostración:** Sea  $r \in V_{i+1}(s') = \{r \in S - (V_0(s') \cup \dots \cup V_i(s'))\}$  tales que  $r \sim v$  en  $\overline{UG(D)}$  para alguna  $v \in V_i(s')$ . Por definición de  $V_{i+1}(s')$  existe un vértice  $v \in V_i(s')$  tal que  $v \sim r$  en  $\overline{UG(D)}$ . Por la afirmación 3.5.5 se tiene que  $s \rightarrow r$ .  $\square(3.5.6)$

**Afirmación 3.5.7.** Sean  $s, s'$  vértices de la digráfica tales que  $s \in S$  y  $s' \in S'$ , con  $s \rightarrow s'$ . Entonces  $s \rightarrow r$  para todo vértice  $r$  tal que  $r \in S'$ .

**Demostración:** Demostrar la afirmación 3.5.7 es equivalente a demostrar que  $s \rightarrow v$  para todo vértice  $v \in V_i(s')$  con  $0 \leq i \leq m$ , pues  $S' = V_0(s') \cup \dots \cup V_m(s')$ .

Demostremos esta afirmación por inducción sobre  $k$  que  $s \rightarrow v$  para todo vértice  $v \in V_i(s')$  con  $0 \leq i \leq k$ .

Cuando  $k = 0$  se tiene que  $s \rightarrow s'$  por hipótesis.

Cuando  $k = 1$  se tiene que  $s \rightarrow s'$  por hipótesis y  $s \rightarrow v$  para todo vértice  $v \in V_1(s')$  por la afirmación 3.5.5.

Supongamos que nuestra afirmación se cumple para toda  $k < m$ , es decir,  $s \rightarrow v$  para todo vértice  $v \in V_i(s')$  con  $0 \leq i \leq k$ . En particular  $s \rightarrow s'$  para todo vértice  $v \in V_{m-1}(s')$ . Entonces por la afirmación 3.5.6 se tiene que  $s \rightarrow v$  para todo vértice  $v \in V_m(s')$ . Por lo tanto  $s \rightarrow v$  para todo vértice  $v \in V_i(s')$  con  $0 \leq i \leq m$ .  $\square(3.5.7)$

Con las afirmaciones 3.5.4 y 3.5.7 ya podemos demostrar (a).

Por la afirmación 3.5.4 se tiene que  $r \rightarrow s'$  para todo vértice  $r$  con  $r \in S$ ; es decir, hay una flecha hacia  $S'$  desde cada vértice  $r$  con  $r \in S$ . Por la afirmación 3.5.7 se tiene que  $r \rightarrow v$  para todo vértice  $v \in S'$ , y para todo vértice  $r \in S$ .

**Afirmación 3.5.8.** Si  $S \mapsto S'$  y  $S' \mapsto S$  entonces  $|V(S)| = |V(S')| = 1$ .

**Demostración:** Sean  $s \in S$  y  $s' \in S'$ . Supongamos que  $|V(S)| > 1$ . Entonces existe un vértice  $v \in V_1(s)$ . Como  $S' \mapsto S$ , se tiene la flecha  $s' \rightarrow v$ . Entonces se tiene que  $s \sim v$  por la trayectoria dirigida  $(s, s', v)$ , lo cual contradice nuestra elección del vértice  $v$ . De la misma manera, supongamos que  $|V(S')| > 1$ , entonces existe un vértice  $r \in V_1(s')$ .  $S \mapsto S'$ , entonces se tiene la flecha  $r \rightarrow s$ . Luego se tiene que  $s' \sim r$  por la trayectoria dirigida  $(r, s, s')$ , lo cual contradice nuestra elección del vértice  $r$ . Por lo tanto si  $S \mapsto S'$  y  $S' \mapsto S$ , entonces  $|V(S)| = |V(S')| = 1$ .  $\square(3.5.8)$

Con esto hemos demostrado el inciso (b) del teorema 3.5.

(a) La desconexidad se probará por inducción sobre  $n$ , el orden de  $D$ .

Cuando  $n = 2$ ,  $V(D) = \{u, v\}$ , por conexidad fuerte de  $D$ , se deben de tener las flechas  $u \rightarrow v$  y  $v \rightarrow u$ , por lo que  $F(\overline{UG(D)}) = \emptyset$ . Entonces  $\overline{UG(D)}$  es desconexo.

Examinemos el caso en que  $n=3$  ( $V(D) = \{u, v, w\}$ ). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $u \rightarrow v$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, debe de haber una trayectoria dirigida  $T$  desde  $u$  hasta  $w$ . Para esta  $(u, w)$ -trayectoria dirigida hay dos posibilidades:  $v \in T$  y  $v \notin T$ . Si  $v \in T$  se tienen las flechas  $u \rightarrow v \rightarrow w$ , y  $v$  es una componente conexa de  $\overline{UG(D)}$ , entonces  $\overline{UG(D)}$  es desconexa. Si  $v \notin T$  entonces se tienen las flechas  $u \rightarrow v$  y  $u \rightarrow w$ . Entonces  $u$  es una componente conexa de  $\overline{UG(D)}$  y por lo tanto  $\overline{UG(D)}$  es desconexa. Con esto hemos probado que  $\overline{UG(D)}$  es desconexa cuando  $n = 3$ .

Supongamos que toda digráfica cuasitransitiva  $D$  tal que  $|V(D)| < n$ , con  $n > 3$ , cumple que  $\overline{UG(D)}$  es desconexa.

Sea  $D$  tal que  $|V(D)| = n$ .

Examinemos dos casos:

(i) Supongamos que existe un vértice  $z$  de  $D$  tal que  $D - z$  no es fuertemente conexa.

**Afirmación 3.5.9.** Sean  $D$  una digráfica fuertemente conexa y  $z$  un vértice de  $D$  tal que  $D - z$  no es fuertemente conexa. Entonces (1) hay una flecha de toda componente fuertemente conexa terminal de  $D - z$  hacia  $z$  y (2) hay flecha de  $z$  hacia toda componente inicial de  $D - z$ .

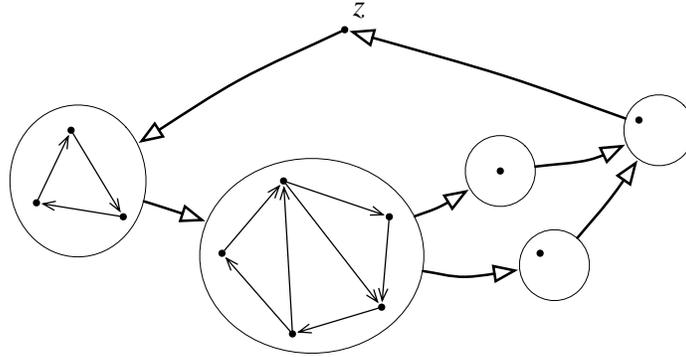


Figura 3.5: Afirmación 3.5.9 del teorema 3.5

**Demostración:** (1) Como  $D - z$  no es fuertemente conexa, tiene al menos dos componentes fuertemente conexas, de las cuales al menos una es una componente fuertemente conexa inicial por el corolario 2.11. Sean  $C_I$  una componente fuertemente conexa inicial de  $D - z$  y  $v$  un vértice en  $\overline{C_I}$  con  $v \neq z$ . Como  $C_I$  es una componente inicial de  $D - z$  y como  $v \notin C_I$ , entonces no hay trayectorias dirigidas desde  $v$  hacia vértices de  $C_I$  en  $D - z$ . Como  $D$  sí es fuertemente conexa, entonces en  $D$  sí hay trayectorias dirigidas desde  $v$  hacia vértices de  $C_I$ . Por lo tanto, toda trayectoria dirigida desde  $v$  hacia vértices de  $C_I$  en  $D$  pasa por  $z$ . Como  $C_I$  es una componente inicial, no hay ninguna otra componente de  $D - z$  que la domine, por lo tanto hay alguna flecha de  $z$  a  $C_I$  en  $D$ . (2) Como  $D - z$  no es fuertemente conexa tiene al menos dos componentes fuertemente conexas, de las cuales al menos una es una componente terminal por el corolario 2.11. Sean  $C_T$  una componente terminal de  $D - z$  y  $v$  un vértice en  $\overline{C_T}$  con  $v \neq z$ .  $C_T$  es una componente inicial de  $D - z$  y  $v \notin C_T$ , por lo tanto no hay trayectorias dirigidas desde  $v$  hacia vértices de  $C_T$  en  $D - z$ . Como  $D$  sí es fuertemente conexa, entonces en  $D$  existe una trayectoria dirigida desde  $v$  hacia vértices de  $C_T$ . Por lo tanto la trayectoria dirigida desde  $v$  hacia vértices de  $C_T$  en  $D$  pasa por  $z$ . Como  $C_T$  es una componente inicial, no hay ninguna otra componente de

$D - z$  que la domine, por lo tanto hay alguna flecha de  $z$  a  $C_T$  en  $D$ .  $\square(3.5.9)$

Si  $C$  es una componente fuertemente conexa, no inicial, hay una componente fuertemente conexa inicial  $C_I$  tal que hay una flecha de algún vértice de  $C_I$  a algún vértice de  $C$ , y por el corolario 3.4 se tiene que  $C_I \mapsto C$ . Como hay flecha de  $z$  a  $C_I$  y  $C_I$  domina a  $C$ , por cuasitransitividad de  $D$  sabemos que hay flechas de  $v$  a todo vértice de  $C$ . También sabemos que hay flecha de toda componente terminal  $C_T$  a  $v$ . Como también hay flecha de  $z$  a cualquier componente inicial  $C_I$ , se obtiene una trayectoria de longitud dos de algún vértice de  $C_T$  a algún vértice de  $C_I$ . Como  $D$  es cuasitransitiva, debe de haber una flecha de  $C_I$  a  $C_T$  o bien, una flecha de  $C_T$  a  $C_I$ . Observamos que si hay flecha de  $C_T$  a  $C_I$ ,  $C_I$  y  $C_T$  no serían componentes fuertemente conexas distintas, por lo que la flecha debe ser de  $C_I$  a  $C_T$ . Por el corolario 3.4  $C_T \mapsto C_I$ . Se obtiene así trayectorias de longitud dos de cada vértice de  $C_I$  a  $v$  pasando por algún vértice de  $C_T$ . Por cuasitransitividad de  $D$ ,  $v$  es adyacente a todo vértice de  $C_I$ . Como  $z$  es adyacente a todo vértice en  $D$ , entonces  $D$  es conexa, y  $\overline{UG(D)}$  es desconexa.

(ii) En el otro caso, si no existiera un vértice  $z$  tal que  $D - z$  no fuera fuertemente conexa, entonces existiría un vértice  $v$  tal que  $D - v$  sería fuertemente conexa. Claramente puede suceder que exista un vértice  $v$  tal que  $D - v$  es fuertemente conexa en el caso (i), pero la existencia de tal vértice está forzada si se niega; es decir, en el caso (ii). Consideremos entonces que existe un vértice  $v$  tal que  $D - v$  es fuertemente conexa. Como  $D$  es fuertemente conexa, debe de haber una flecha  $v \rightarrow w$  de  $v$  a  $D - v$ , ya que si no existiera tal flecha, no habrían caminos dirigidos de  $v$  a  $D - v$ , y  $D$  no sería fuertemente conexa.  $|V(D - v)| = n - 1$ , por hipótesis inductiva  $\overline{UG(D - v)}$  es desconexa. Sean  $S$  y  $S'$  componentes conexas de  $\overline{UG(D - v)}$ ,  $S$  una componente conexa inicial. Entonces sabemos que hay flecha de  $v$  a  $S$ . Entonces hay una trayectoria de longitud dos entre  $v$  y todo vértice de  $S'$ , pasando por algún vértice de  $S$ . Como  $D$  es cuasitransitiva, hay flechas entre  $v$  y todo vértices de  $S'$ . Entonces  $\overline{UG(S')}$  es una componente conexa de  $D$ , y  $D$  es desconexa.  $\square(3.5)$

## 3.2 Caracterización de las digráficas cuasitransitivas

En esta sección se presenta el teorema de J. Bang-Jensen y J. Huang que da una caracterización de las digráficas cuasitransitivas.

**Teorema 3.6** (J. Bang-Jensen y J. Huang). *Sea  $D$  una digráfica cuasitransitiva finita.*

- (a) Si  $D$  no es fuertemente conexa, existe una digráfica transitiva  $T$  con vértices  $\{v_1, \dots, v_t\}$  y digráficas quasitransitivas  $H_1, \dots, H_t$  tal que  $D = T[H_1, \dots, H_t]$ , donde cada  $H_i$  en la digráfica  $D$  se sustituye por un vértice  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ .
- (b) Si  $D$  es fuertemente conexa, existe una digráfica semicompleta  $S$  con vértices  $\{v_1, \dots, v_s\}$ , y digráficas quasitransitivas  $Q_1, \dots, Q_s$  tal que cada  $Q_i$  es un vértice o una digráfica no fuertemente conexa, y  $D = S[Q_1, \dots, Q_s]$ , donde cada  $Q_i$  se sustituye por  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

**Demostración:** (a) Supongamos primero que  $D$  no es fuertemente conexa. Sean  $C_1, \dots, C_t$  las componentes fuertemente conexas de  $D$ . Por el teorema 3.5 si hay flechas de las componentes  $C_i$  a  $C_j$  y  $C_j$  a  $C_k$ , entonces  $C_i \mapsto C_j \mapsto C_k$ . Por cuasitransitividad de  $D$ , también debe de haber una flecha entre  $C_i$  y  $C - k$  pues hay una trayectoria de longitud dos entre algún vértice de  $C_i$  y algún vértice de  $C_k$ . Si la flecha fuera de  $C_k$  a  $C_i$  entonces  $C_i$  y  $C_j$  no serían componentes fuertemente conexas de  $D$ . Por lo tanto hay una flecha de  $C_i$  a  $C_k$ .  $C_i \mapsto C_k$ . Si reducimos a cada  $C_i$  a un vértice  $v_i$ , se cumple que si  $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k$ , entonces  $v_i \rightarrow v_k$ . Entonces al sustituir a cada  $C_i$  fuertemente conexa por un vértice  $v_i$ , se obtiene una gráfica dirigida transitiva.

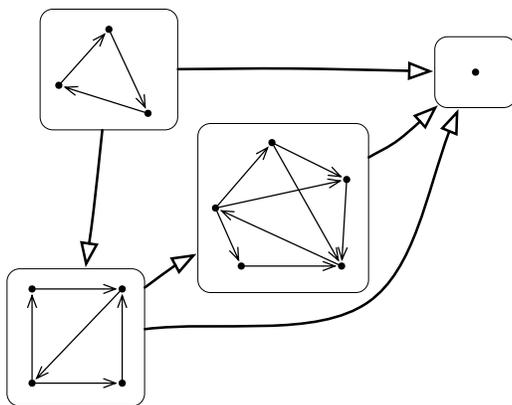


Figura 3.6: Ejemplo del caso (a) del teorema 3.6

(b) En el otro caso, supongamos que  $D$  es fuertemente conexa. Sean  $\overline{S}_1, \dots, \overline{S}_t$  las componentes conexas de  $\overline{U(D)}$ . Consideremos a las subdigráficas  $S_i$  de  $D$  donde  $S_i$  es la

subdigráfica inducida en  $D$  por  $V(S_i)$ , para cada  $i$  tal que  $1 \leq i \leq t$ .

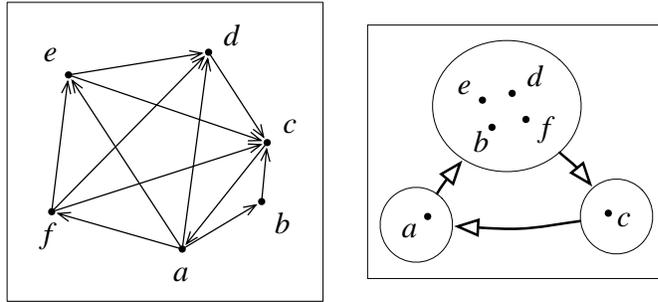


Figura 3.7: Ejemplo del caso (b) del teorema 3.6

Probaremos la parte (b) del teorema por inducción sobre el número de vértices de la digráfica  $D$ .

Cuando  $|V(D)| = 2$ , sabemos se tienen las dos posibles flechas entre los dos vértices de  $D$  para que la digráfica sea fuertemente conexa. En este caso se cumple el teorema tomando a los dos vértices de  $D$  como  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Supongamos como hipótesis inductiva que toda gráfica dirigida fuertemente conexa de orden  $k < n$  cumple que las  $S_i$ , obtenidas como se explicó arriba, son subdigráficas quasitransitivas no fuertes de  $D$  o vértices aislados, y que existe una digráfica semicompleta  $S$  con vértices  $\{v_1, \dots, v_s\}$  tales que  $D = S[Q_1, \dots, Q_s]$ , donde cada  $Q_i$  se sustituye por un vértice  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

Sea  $D$  tal que  $|V(D)| = n$ . Por el teorema 3.5 se tiene que  $\overline{U(D)}$  es desconexa. Sean  $S_1, \dots, S_t$  las subdigráficas inducidas en  $D$  por los vértices de las componentes conexas  $S'_1, \dots, S'_t$  de  $\overline{U(D)}$  respectivamente. Si  $S_i$  es no fuertemente conexa para toda  $i$ , nuestra proposición sería cierta. Supongamos que existe  $I \subset \{1, \dots, t\}$  tal que  $S_i$  es fuertemente conexa para toda  $i \in I$ . Observamos que  $|V(S_i)| < n$  para toda  $i \in \{1, \dots, t\}$ , en particular  $|V(S_i)| < n$  para toda  $i \in I$ . Por hipótesis inductiva, cada  $S_i$  con  $i \in I$  se puede descomponer en subdigráficas  $S_{i_1}, \dots, S_{i_{j_i}}$  no fuertemente conexas. Por lo tanto, podemos descomponer a  $D$  en  $S_1, \dots, S(s)$  tal que  $S_i$  no es fuertemente conexa para todo  $i \in \{1, \dots, n'\}$ . Se consideran a las  $Q_1, \dots, Q_s$  del teorema como las  $S_1, \dots, S_{n'}$ .  $\square(3.6)$



## Capítulo 4

# Digráficas 3-cuasitransitivas

En este capítulo de la tesis presentaremos los resultados que hemos obtenido inspirándonos en el trabajo de J. Bang-Jensen y J. Huang. Nuestro resultado principal es una caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas fuertemente conexas.

### 4.1 Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas bipartitas

**Teorema 4.1.** *Sea  $D$  una digráfica bipartita conexa 3-cuasitransitiva. Sea  $T$  una  $(t_0, t_n)$ -trayectoria de longitud mínima. Entonces  $D[V(T)]$  contiene una subdigráfica generadora bipartita semicompleta. Además, si  $i \equiv j \pmod{2}$  y  $i < j$ , y se tendrá que  $t_j \rightarrow t_i$ .*

**Demostración:** Cuando  $|V(T)| = 2$  la trayectoria dirigida claramente es una digráfica bipartita semicompleta.

Cuando  $|V(T)| = 3$  se tiene que  $T = (t_0, t_1, t_2, t_3)$  es una trayectoria dirigida de longitud tres. Por la 3-cuasitransitividad de  $D$  se tiene que  $t_0 \sim t_3$  y por el lema 3.1 se tiene que  $t_3 \rightarrow t_0$ . Entonces la gráfica con los vértices  $t_0, t_1, t_2, t_3$  y las flechas  $t_0 \rightarrow t_1, t_1 \rightarrow t_2, t_2 \rightarrow t_3, t_3 \rightarrow t_0$  forman una bipartida semicompleta con flechas dirigidas como queremos.

Supongamos que nuestra proposición se cumple cuando  $|T| < n$ ; es decir, si  $u$  y  $v$  son dos vértices tales que  $d(u, v) < n$ , entonces toda  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima contiene una subdigráfica generadora bipartida semicompleta. Además si  $i \equiv j \pmod{2}$  y  $i < j$ , entonces  $t_j \rightarrow t_i$ .

Sea  $T$  una  $(t_0, t_n)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima  $n$ . Por hipótesis inductiva

se tiene que las subtrayectorias  $(t_0, \dots, t_{n-1})$  y  $(t_1, \dots, t_n)$  contienen a subdigráficas generadoras bipartitas semicompletas tales que si  $i \equiv j \pmod{2}$  y  $i < j$ , se tiene que  $t_j \rightarrow t_i$ .

En el caso en que  $n$  sea par, obsérvese que  $T$  ya es una digráfica bipartida semicompleta, y las flechas estarán orientadas como se quieren. Supongamos que  $n$  es impar. Por hipótesis inductiva, se tiene las flechas  $t_n \rightarrow t_2$ ,  $t_2 \rightarrow t_3$  y  $t_3 \rightarrow t_0$ .  $t_n \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow t_0$  es una trayectoria de longitud tres. Por la 3-cuasitransitividad de  $D$  se tiene que  $t_n \rightarrow t_0$  o  $t_0 \rightarrow t_n$ . Por el lema 3.1 se tiene que  $t_n \rightarrow t_0 \in F(D)$ . Notamos que la subdigráfica de  $T$  que tiene como flechas las que hemos señalado es una subdigráfica generadora bipartita semicompleta de  $T$ .  $\square(4.1)$

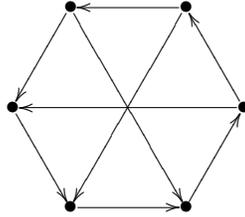


Figura 4.1: Una digráfica 3-cuasitransitivas bipartita semicompleta

**Teorema 4.2.** *Sea  $D$  una digráfica bipartita conexa 3-cuasitransitiva fuertemente conexa. Entonces  $D$  es bipartita semicompleta.*

**Demostración:** Sea  $D$  una digráfica bipartita conexa 3-cuasitransitiva fuertemente conexa con la partición  $V(D) = \{V_0, V_1\}$ . Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en diferentes partes de la partición de  $V(D)$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $u$  está en  $V_0$  y que  $v$  está en  $V_1$ . Como  $D$  es fuertemente conexa se tiene que los vértices  $u$  y  $v$  están conectados. Sea  $T = (t_0, \dots, t_k)$  con  $t_0 = u$  y  $t_k = v$  una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima. Como  $t_i \sim t_{i+1}$  para todo  $0 < i < k - 1$ , se tiene que  $t_i \in V_0$  para toda  $i$  par y que  $t_i \in V_1$  para toda  $i$  impar. Dado que  $t_0 \in V_0$  y  $t_k \in V_1$ , se tiene que  $k$  es impar. Por el teorema 4.1 se tiene que  $T$  contiene una subdigráfica generadora bipartita semicompleta  $H$ . Como  $H$  es semicompleta se tiene que  $t_0 \sim_H t_k$ . Entonces  $t_0 \sim_T t_k$ . Por lo tanto  $u \sim v$  para cualquier par de vértices con  $u \in V_0$  y  $v \in V_1$ . Por otro lado,  $D$  es bipartita. Entonces  $D$  es bipartita semicompleta.  $\square(4.2)$

## 4.2 Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas no bipartitas

Para la caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas no bipartitas se demuestra la existencia de un ciclo dirigido de longitud tres en una digráfica 3-cuasitransitiva fuertemente conexa. Se estudian las adyacencias de vértices del ciclo con vértices que no pertenecen al ciclo en la subsección 2, y las adyacencias entre pares de vértices que no están en el ciclo en la subsección 3. En la subsección 4 se enuncia y se demuestra el teorema 4.17, el cual da la caracterización de las digráficas 3-cuasitransitiva fuertemente conexas.

### 4.2.1 Existencia de un triángulo dirigido y lemas auxiliares

En esta sección probamos la existencia de un ciclo dirigido de longitud tres — es decir, la existencia de un *triángulo* —, en una digráfica 3-cuasitransitiva fuertemente conexa. También estudiaremos algunas de las propiedades de trayectorias dirigidas en digráficas 3-cuasitransitivas, en especial de las trayectorias dirigidas que tengan vértices iniciales o terminales en un triángulo. Algunas de estas propiedades se usan para las demostraciones de la sección 2.

**Lema 4.3.** *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva con un ciclo dirigido  $C$  tal que  $|C|$  es impar. Entonces  $C$  contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$ .*

**Demostración:** Se demuestra este lema por medio de una inducción sobre la longitud del ciclo impar de longitud mínima de la digráfica. Sea  $l = |T|$  la longitud del ciclo dirigido de longitud impar mínima.

Cuando  $l = 3$ , se cumple la afirmación del lema.

Cuando  $l = 5$ ,  $C = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_0)$ . Se tiene que  $c_i \sim c_{i+3} \pmod{3}$  por  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}) \pmod{3}$ . Observemos que si se tuviera alguna flecha del tipo  $c_i \rightarrow c_{i+3}$ , entonces se tendría el triángulo dirigido  $(c_i, c_{i+3}, c_{i-1}, c_i)(c_i, c_{i+3}, c_{i+4}, c_i)$ . Así supongamos que  $c_{i+3} \rightarrow c_i$  para todo par de vértices a distancia tres en el ciclo. Las ternas de vértices del tipo  $c_i, c_{i+1}$  y  $c_{i+3}$  forman triángulos dirigidos. En particular se tiene el triángulo dirigido  $(c_0, c_1, c_3, c_0)$ . Entonces  $D$  contiene un triángulo dirigido.

Con fines ilustrativos, mostraremos el caso  $l = 7$ ,  $C = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_0)$ . Observemos que nuevamente  $c_i \sim c_{i+3} \pmod{3}$  por  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}) \pmod{3}$  y que si  $c_i \rightarrow c_{i+3}$ , se tendría que  $(c_i, c_{i+3}, c_{i+4}, c_{i+5}, c_{i+6}, c_{i+7}) = (c_i, c_{i+3}, c_{i+4}, c_{i+5}, c_{i+6}, c_i)$  es

un ciclo dirigido de longitud cinco, y ya hemos demostrado que entonces  $D$  contiene un triángulo dirigido. Entonces se tienen también adyacencias del tipo  $c_i \sim c_{i+2}$  por  $(c_i, c_{i-3}, c_{i-6}, c_{i-5}) = (c_{i+7}, c_{i+4}, c_{i+1}, c_{i+2}) \pmod{7}$  y la 3-cuasitransitividad de nuestra digráfica. Si  $c_{i+2} \rightarrow c_i$  se tendría el triángulo dirigido  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_i)$  y si  $c_i \rightarrow c_{i+2}$ , se tendría el ciclo  $(c_i, c_{i+2}, c_{i+3}, c_i)$ , el cual es un triángulo dirigido.

Como hipótesis inductiva supongamos ahora que si una digráfica contiene un ciclo dirigido de longitud impar  $C'$ , tal que  $|C'| = l$ ,  $l < n$  ( $n$  impar), entonces la digráfica contiene un triángulo dirigido. Sea  $D$  una digráfica con un ciclo dirigido  $C$ , tal que  $|C| = n$ . Notemos primero que si hay una flecha  $c_i \rightarrow c_{i+j} \pmod{n}$ , con  $j$  impar, entonces se tiene que el ciclo dirigido que se obtiene de recorrer a  $C$ , reemplazando a  $(c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+j-1}, c_{i+j})$  por  $(c_i, c_{i+j})$ , es un ciclo dirigido de longitud impar  $l$  con  $l \leq n$ . Por hipótesis inductiva, se tendría que la digráfica contiene un triángulo dirigido. Supongamos entonces que cuando  $c_i \sim c_{i+j}$ , con  $j$  impar, el sentido de la flecha es hacia  $c_i$ , es decir,  $c_{i+j} \rightarrow c_i$ . Probaremos por inducción que para cada par de vértices de tipo  $c_i, c_{i+j}$ , con  $j$  impar tal que  $j \geq 3$ , se tiene que  $c_i \sim c_{i+j}$ . Cuando  $j = 3$ , se tiene que  $c_i \sim c_{i+3}$  por  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3})$  para toda  $i$ . Supongamos que nuestra afirmación es cierta para las  $j$  impares tales que  $j \leq m$ , con  $m$  impar. Probaremos que  $c_{i+m} \sim c_i$ . Se tienen, por hipótesis inductiva, las flechas  $c_{i+m} \rightarrow c_{i+m-3}, c_{i+m-3} \rightarrow c_{i-1}$  (como  $i+m-3-(i-1) = m-2$  y  $m$  es impar, entonces estos vértices están a una distancia impar menor que  $m$ ). Entonces  $(c_{i+m}, c_{i+m-3}, c_{i-1}, c_i)$  es una trayectoria dirigida de longitud tres entre  $c_i$  y  $c_{i+m}$ . Por la 3-cuasitransitividad de la digráficas, se tiene que  $c_i \sim c_{i+m}$ , lo que queríamos probar.

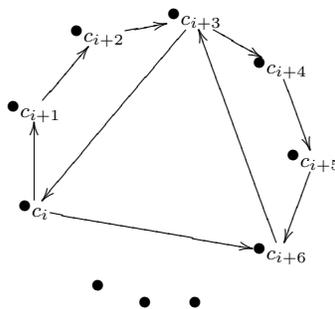


Figura 4.2: El triángulo  $(c_i, c_{i+6}, c_{i+3}, c_i)$  de la demostración del lema 4.3

Observemos que se tienen las adyacencias  $c_{i+3} \rightarrow c_i$ ,  $c_{i+6} \rightarrow c_{i+3}$  y  $c_i \rightarrow c_{i+6}$ . Las primeras dos por  $(c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3})$  y  $(c_{i+3}, c_{i+4}, c_{i+5}, c_{i+6})$ , que son trayectorias de lon-

gitud impar, y si las flechas estuvieran en sentido contrario, ya sabemos que se formarían ciclos de longitud menor a  $n$ , los cuales contendrían un triángulo dirigido por nuestra hipótesis inductiva. Para probar que se tiene la tercera flecha,  $c_i \rightarrow c_{i+6}$ , observemos que si tuviéramos que  $c_{i+6} \rightarrow c_i$ ,  $(c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+6-1}, c_{i+6}, c_i)$ , es un ciclo dirigido de longitud impar siete, el cual contendría un triángulo dirigido por la hipótesis inductiva. Por lo tanto la podemos considerar orientada al revés. Observemos que dadas estas flechas,  $C$  contiene el triángulo dirigido  $(c_i, c_{i+6}, c_{i+3}, c_i)$ , lo cual completa la demostración del lema 4.3.

□(4.3)

**Lema 4.4.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$  y  $v \in V(D - T)$  tales que  $d(T, v) = l$  con  $l \geq 2$ . Sea  $P = (p_0, \dots, p_l)$  una  $(T, v)$ -trayectoria dirigida mínima, con  $p_0 \in T$  y  $p_l = v$ . Entonces en  $D$  existen las flechas  $p_2 \rightarrow x$ ,  $p_2 \rightarrow y$  y  $p_2 \rightarrow z$ .

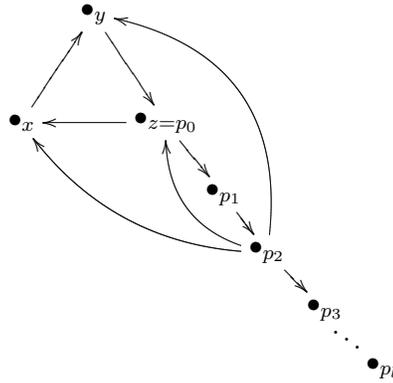


Figura 4.3: Lema 4.4

**Demostración:** Primero se observa que si se tuviera una flecha de tipo  $t \rightarrow p_2$ ,  $t \in T$ , entonces  $P' = (c, p_2, \dots, p_l)$  sería una  $(T, v)$ -trayectoria de longitud  $l - 1$  y, por lo tanto, se tendría que  $d(T, v) = l - 1$ , lo que contradice suponer que  $d(T, v) = l$ . Por lo tanto, toda flecha entre los vértices de  $T$  y  $p_2$  es hacia  $p_2$ , es decir,  $t \rightarrow p_2$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $p_0 = y$ . Entonces  $x \sim p_2$  por  $(x, p_0, p_1, p_2)$  y se tiene que  $p_2 \rightarrow x$ .  $p_2 \sim z$  por  $(p_2, x, y, z)$ , entonces  $p_2 \rightarrow z$ . Finalmente  $p_2 \sim y$  por  $(p_2, z, x, y)$ , entonces  $p_2 \rightarrow y$ .

□(4.4)

**Corolario 4.5.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$  y  $u \in V(D - T)$  tales que  $d(u, T) = l$ , con  $l \geq 2$ . Sea  $P = (p_0, \dots, p_l)$ ,  $p_0 = u$  y  $p_l \in T$ . Entonces existen las flechas  $x \rightarrow p_{l-2}$ ,  $y \rightarrow p_{l-2}$  y  $z \rightarrow p_{l-2}$ .

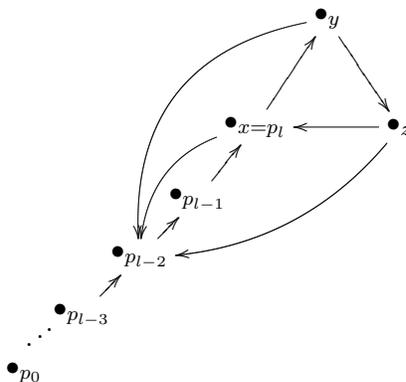


Figura 4.4: Corolario 4.5

**Demostración:** Se observa que este corolario es equivalente al lema 4.4 aplicado a  $D^\tau$ , la digráfica transpuesta de  $D$ , y tomando a  $u$  como  $v$  y a  $P^\tau$  como una  $(T, u)$ -trayectoria mínima. En efecto, aplicando el lema 4.4 a  $P^\tau$  se tendría que  $p_{l-2} \rightarrow x$ ,  $p_{l-2} \rightarrow y$  y  $p_{l-2} \rightarrow z$  en  $D^\tau$ . Entonces en  $D$  se tendrían las flechas  $x \rightarrow p_{l-2}$ ,  $y \rightarrow p_{l-2}$  y  $z \rightarrow p_{l-2}$ .  $\square(4.5)$

**Lema 4.6.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva y  $P = (p_0, \dots, p_l)$  una  $(p_0, p_l)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima  $l$ , con  $l \geq 4$ , con la flecha interna  $p_2 \rightarrow p_0$ . Entonces la subdigráfica inducida por los vértices de  $P$  es semicompleta y  $p_j \rightarrow p_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .

**Demostración:** Supongamos que  $l = 4$ . Se tienen las flechas  $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 \rightarrow p_4$  que forman a la trayectoria  $P$ , la flecha  $p_2 \rightarrow p_0$  por hipótesis y las flechas  $p_4 \rightarrow p_1$  y  $p_3 \rightarrow p_0$  por la 3-cuasitransitividad de la digráfica en las trayectorias  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  y  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$ , respectivamente, y la minimalidad de  $P$ . Se tiene que  $p_4 \sim p_0$  por  $(p_4, p_1, p_2, p_0)$  y  $p_4 \sim p_2$  por  $(p_4, p_0, p_1, p_2)$ . Finalmente, se tiene que  $p_3 \sim p_1$  por  $(p_3, p_4, p_0, p_1)$ . Estas flechas hacen adyacentes a todos los vértices de  $P$ ; esto es, la subdigráfica inducida por los vértices de

$P$  es semicompleta y todas las flechas excepto las que ligan a dos vértices consecutivos de  $P$  son hacia el vértice de índice menor.

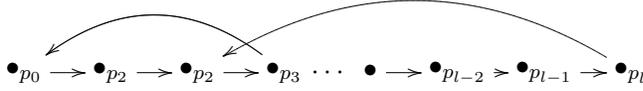


Figura 4.5: El paso inductivo de la demostración del lema 4.6

Supongamos que se cumple nuestro lema para  $l < n$  con  $n \geq 5$ . Sea  $P = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$  una  $(p_0, p_n)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima en una digráfica 3-cuasitransitiva tal que  $p_2 \rightarrow p_0$ . Por hipótesis inductiva  $P_1 = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$  es semicompleta, pues es de longitud menor que  $n$ , claramente es mínima, y  $p_2 \rightarrow p_0$ . Entonces se tiene la flecha  $p_3 \rightarrow p_1$ , con lo que  $P_2 = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$  también es semicompleta, pues cumple las condiciones de nuestra hipótesis inductiva. Por último, se tiene que  $p_n \sim p_0$  por la 3-cuasitransitividad de la digráfica  $D$  en la trayectoria dirigida  $(p_n, p_2, p_3, p_0)$ , y  $p_n \rightarrow p_0$  por la minimalidad de  $P$ . Con estas flechas concluimos que la subdigráfica inducida por los vértices de  $P$  es semicompleta y  $p_j \rightarrow p_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .  $\square(4.6)$

**Corolario 4.7.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva y  $P'$  una  $(p'_0, p'_l)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima de longitud con  $l \geq 4$ , con la flecha interna  $p'_l \rightarrow p'_{l-2}$ . Entonces la subdigráfica inducida por los vértices de  $P'$  es semicompleta y  $p'_j \rightarrow p'_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .

**Demostración:** Observemos que este corolario es equivalente al lema 4.6, aplicado a  $D^\tau$ . En particular, fijémonos en  $P'^\tau$ , la trayectoria  $P'$  transpuesta, y tomemos a  $p'_l$  como  $p_0$ , a  $p'_0$  como  $p_l$ , y a  $P'^\tau$  como una  $(p_l, p_0)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima. También se tiene la flecha  $p'_{l-2} \rightarrow p'_l$  en  $P'^\tau$ , pues  $p'_l \rightarrow p'_{l-2}$  en  $P$ , y con esto  $P'^\tau$  satisface las hipótesis del corolario 4.5. Entonces se tendría que la subdigráfica inducida por los vértices de  $P'^\tau$  es semicompleta y que  $p'_i \rightarrow p'_j$  si  $i \neq j + 1$ ,  $i > j$ , (fijándonos en que los índices de  $P'^\tau$  corren al revés de la orientación de las flechas). Entonces  $P'$  es semicompleta y sus flechas son tales que  $p'_j \rightarrow p'_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .  $\square(4.7)$

**Lema 4.8.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$  y  $v \in V(D - T)$  tales que  $d(v, T) \geq 2$ . Sea  $P = (p_0, \dots, p_l)$  una  $(v, T)$ -trayectoria dirigida mínima, con  $p_0 = v$  y  $p_l \in T$ . Entonces la subdigráfica inducida por los vértices de  $P$  es semicompleta y  $p_j \rightarrow p_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .

**Demostración:** Cuando  $d(v, T) \geq 4$ , se tiene la flecha  $p_2 \rightarrow p_0$  por el lema 4.4, entonces  $P$  satisface las hipótesis del lema 4.6, por lo que se cumple que  $P$  es semicompleta y  $p_j \rightarrow p_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ . Cuando  $d(v, T) = 2$ , también se tiene la flecha  $p_2 \rightarrow p_0$  por el lema 4.4, lo cual también satisface el lema 4.6. Sólo falta verificar que se satisface para el caso  $d(v, T) = 3$ .

Supongamos entonces que  $d(v, T) = 3$ . Sea  $P = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  una  $(v, T)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima, con  $p_3 = x$ . Por el corolario 4.5 se tienen las flechas  $t \rightarrow p_{l-2}$  para toda  $t \in T$ ; es decir,  $x \rightarrow p_1$ ,  $y \rightarrow p_1$  y  $z \rightarrow p_1$ . Por otro lado,  $p_3 \sim p_0$  por  $(p_0, p_1, p_2, p_3)$  y  $p_3 \rightarrow p_0$ , pues  $d(v, T) = 3$ . Luego, se tiene que  $y \sim p_0$  por  $(y, z, x, p_0)$  y  $y \rightarrow p_0$  pues  $d(v, T) = 3$ . Entonces  $p_2 \sim p_0$ . Por la minimalidad de  $P$ , se tiene que  $p_2 \rightarrow p_0$ . Con estas flechas, la digráfica inducida por  $P$  es semicompleta, con las flechas  $p_j \rightarrow p_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .  $\square(4.8)$

**Corolario 4.9.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$  y  $v \in V(D - T)$  tales que  $d(T, v) \geq 2$ . Sea  $P' = (p'_0, \dots, p'_l)$  una  $(T, v)$ -trayectoria dirigida mínima, con  $p'_0 \in C$  y  $p'_l = v$ . Entonces la subdigráfica inducida por los vértices de  $P'$  es semicompleta y  $p'_j \rightarrow p'_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .

**Demostración:** Este corolario es equivalente al lema 4.8, aplicado a  $D^\tau$ . Fijémonos en  $P'^\tau$ , la trayectoria transpuesta de  $P'$ .  $P'^\tau$  es una  $(v, T)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima, con  $d(v, T) \geq 2$ . Por el lema 4.6 la subdigráfica inducida por los vértices de  $P'^\tau$  es semicompleta y  $p'_i \rightarrow p'_j$  si  $i \neq j + 1$ ,  $i > j$  (pues los índices de  $P'^\tau$  corren al revés de la orientación). Entonces  $P'$  es semicompleta y sus flechas son tales que  $p'_j \rightarrow p'_i$  si  $j \neq i + 1$ , con  $j > i$ .  $\square(4.9)$

#### 4.2.2 Adyacencias de vértices fuera del triángulo con el triángulo

En esta sección examinaremos las adyacencias entre un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$ , y algún vértice  $v$  tal que  $v \notin T$ . El principal resultado de esta sección es el teorema 4.14, el cual demuestra que todo vértice  $v$  tal que  $v \notin T$  es adyacente a todos los vértices de  $T$ , o bien, todo vértice  $v$  tal que  $v \notin T$  es tal que  $x \rightarrow v \rightarrow z$  y  $v \approx y$ .

**Teorema 4.10.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva,  $T = (x, y, z, x)$  un triángulo dirigido en  $D$  y  $v \in V(D - T)$  tales que  $d(v, T) = 1$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v \rightarrow x$ . Entonces sucede (i) o (ii):

- (i)  $v \sim t$  para todo  $t \in T$  ó

(ii)  $z \rightarrow v$  y  $y \approx v$

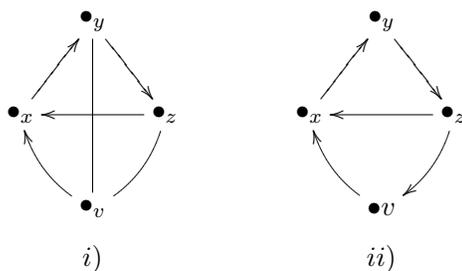


Figura 4.6: Teorema 4.10

**Demostración:** Se tiene que  $v \sim z$  por  $(v, x, y, z)$ .

*Caso 1.* Supongamos primero que  $v \rightarrow z$ . Entonces  $v \sim y$  por  $(v, z, x, y)$ . Entonces se cumple (i).

*Caso 2.* Ahora supongamos que  $z \rightarrow v$ . Observemos que la digráfica que contiene esta flecha y las flechas dadas por la hipótesis es fuertemente conexa, 3-cuasitransitiva, y no hay más adyacencias obligadas por la 3-cuasitransitividad de la digráfica. Si  $y \approx v$  entonces se cumple (ii). En otro caso, se cumple (i). □(4.10)

**Teorema 4.11.** Sean  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva,  $T = (x, y, z, x)$  un triángulo dirigido en  $D$  y  $v \in V(D - T)$  tales que  $d(v, T) \geq 2$ , entonces  $v \sim x$ ,  $v \sim y$  y  $v \sim z$ .

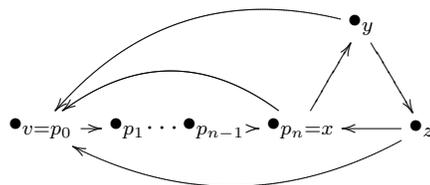


Figura 4.7: Teorema 4.11

**Demostración:** Demostraremos este teorema por medio de una inducción sobre  $d = d(v, T)$ .

Supongamos primero que  $d = 2$ . Sea  $P = (p_0, p_1, p_2)$  una  $(v, T)$ -trayectoria dirigida mínima, con  $p_0 = v$  y  $p_2 \in T$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $p_2 = x$ . Se tiene la adyacencia  $v \sim y$  por  $(v, p_1, x, y)$  y  $y \rightarrow v$  pues supusimos que  $d(v, T) = 2$ . Luego,  $z \sim v$  por  $(z, x, y, v)$  y nuevamente se tiene que  $z \rightarrow v$ , pues  $d(v, T) = 2$ . Por último, se tiene que  $x \sim v$  por  $(x, y, z, v)$ . Entonces  $v$  es adyacente a todos los vértices del triángulo  $T$ .

Supongamos ahora que si  $v'$  es tal que  $d(v', T) = l$ ,  $l < n$  con  $n > 2$ , entonces  $v' \sim t$  para todo  $t \in T$ . Sea  $v$  tal que  $d(v, T) = n$ , con  $n > 2$ .

Demostraremos que  $v \sim t$  para todo  $t \in T$ . Sea  $P = (p_0, \dots, p_n)$  una  $(v, T)$ -trayectoria dirigida de longitud mínima tal que  $v = p_0$  y  $p_n \in T$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $p_n = x$ . Por el lema 4.6, se tiene que la subdigráfica inducida por los vértices de  $P$  es semicompleta y, en particular, se tiene la flecha  $p_n \rightarrow p_0$ ; es decir,  $x \rightarrow p_0$ . Entonces  $y \sim p_0$  por  $(y, z, x, p_0)$  y  $y \rightarrow p_0$ , pues  $d(v, T) > 2$ . Entonces  $z \sim p_0$  por  $(z, x, y, p_0)$ . Con esto, hemos encontrado que  $v \sim t$  para toda  $t \in T$ .  $\square(4.11)$

Con esta nueva información, definiremos dos tipos de vértices que pueden haber en una gráfica dirigida con un triángulo dirigido, que no pertenecen al triángulo  $T = (x, y, z, x)$ . Sean  $T_1$  y  $T_2$ , con  $T_1 = \{v \in V(D) \text{ tal que } v \sim t \text{ para toda } t \in T\}$  y  $T_2 = \{v \in V(D) \text{ tal que } v \rightarrow x, z \rightarrow v \text{ y } y \approx v\}$ .

**Lema 4.12.** *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$ . Entonces  $V(D) = V(T) \cup T_1 \cup T_2$ .*

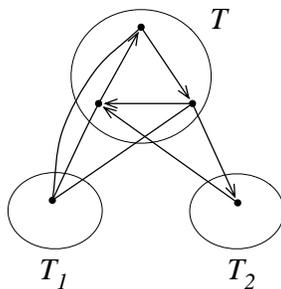


Figura 4.8: Lema 4.12

**Demostración:** Por el teorema 4.10, si  $d(v, T) = 1$  entonces  $v \in T_1$  o  $v \in T_2$ . Por el

teorema 4.11, si  $d(v, T) \geq 2$  entonces  $v \in T_1$ . Estos son todos los casos posibles. Con esto hemos demostrado el lema.  $\square(4.12)$

**Lema 4.13.** *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$  y dos vértices,  $u$  y  $v$ , del tipo  $T_2$ . Entonces  $u$  y  $v$  son vértices duplicados.*

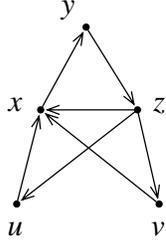


Figura 4.9: Lema 4.13

**Demostración:** Recordemos que dos vértices  $u$  y  $v$  son duplicados si son adyacentes hacia los mismos vértices y son adyacentes desde los mismos vértices.

$v$  es tal que  $v \rightarrow x$ ,  $z \rightarrow v$  y  $y \approx v$  y  $u$  es tal que  $u \rightarrow x'$ ,  $z' \rightarrow u$  y  $y' \approx u$ , con  $T = (x, y, z, x) = (x', y', z', x')$ . Demostraremos que  $x' = x$ .

*Caso 1.* Supongamos que  $x' = y$ . Entonces  $y' = z$  y  $z' = x$ . En este caso se tiene la trayectoria dirigida  $(z, v, x, u) = (y', v, z', u)$  y  $y' \sim u$ . Esto contradice nuestras hipótesis iniciales, así que este caso no puede suceder.

*Caso 2.* Ahora supongamos que  $x' = z$ . Se tiene que  $y' = x$  y  $z' = y$ . Entonces se tiene la trayectoria dirigida  $(z', u, x', v) = (y, u, z, v)$  y  $y \sim v$ , lo cual no sucede por hipótesis. Entonces este caso no sucede.

Por lo tanto  $x' = x$  y, como consecuencia, se tiene que  $y' = y$  y  $z' = z$ .  $\square(4.13)$

**Teorema 4.14.** *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva fuertemente conexa que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$ . Entonces  $v \in T_1$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$  o bien  $v \in T_2$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$ .*

**Demostración:** Supongamos que el teorema es falso, es decir, que existen  $u, v \in V(D - T)$  tales que  $u \in T_2$  y  $v \in T_1$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $u \rightarrow x$ ,  $z \rightarrow u$  y  $y \approx u$ .

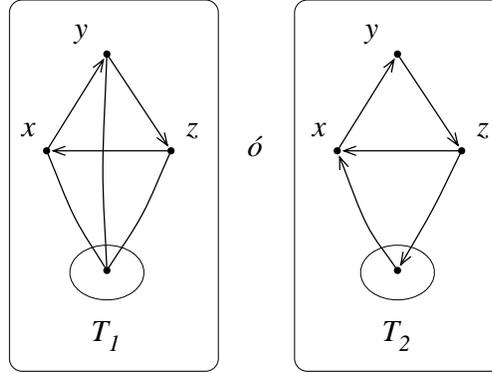


Figura 4.10: Teorema 4.14

**Afirmación 4.14.1.**  $v \rightarrow t$  para toda  $t \in T_1$ , o bien  $t \rightarrow v$  para toda  $t \in T_1$

**Demostración:** *Caso 1.* Supongamos primero que  $y \rightarrow v$ . Si suponemos que  $v \rightarrow z$  se tendría que  $y \sim u$  por la trayectoria dirigida  $(y, v, z, u)$ . Por lo tanto  $z \rightarrow v$ . Luego, si suponemos que  $v \rightarrow x$ , se tiene que  $u \sim v$  por la trayectoria dirigida  $(u, x, y, v)$ . Si  $v \rightarrow u$ , se tiene que  $u \sim y$  por  $(y, z, v, u)$ . Si  $u \rightarrow v$ , también se tiene que  $u \sim y$  por  $(u, v, x, y)$ . En ambos casos se llega a una contradicción, por lo tanto  $x \rightarrow v$ . Entonces se tienen las flechas  $t \rightarrow v$  para toda  $t \in T_1$ .

*Caso 2.* Supongamos que  $v \rightarrow y$ . Observemos que si  $x \rightarrow v$ , se tendría que  $u \sim v$  por  $(u, x, v, y)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto se tiene que  $v \rightarrow x$ . Luego, si suponemos que  $z \rightarrow v$ , se tiene que  $u \sim v$  por  $(v, y, z, u)$ . Si  $v \rightarrow u$ , se tiene que  $u \sim y$  por  $(y, z, v, u)$ , y si  $u \rightarrow v$ , también se tiene que  $u \sim y$  por  $(u, v, x, y)$ . Esto es una contradicción, por lo tanto  $v \rightarrow z$ . Entonces se tienen las flechas  $v \rightarrow t$  para toda  $t \in T_1$ .  $\square(4.14.1)$

Entonces  $T_1 = T_1^+ \cup T_1^-$ , donde  $T_1^+ = \{v \in T_1 \text{ tal que } t \rightarrow v \text{ para toda } t \in T\}$  y  $T_1^- = \{v \in T_1 \text{ tal que } v \rightarrow t \text{ para toda } t \in T\}$ .

**Afirmación 4.14.2.**  $T_1^+ = \emptyset$  o  $T_1^- = \emptyset$

**Demostración:** Sea  $u \in T_2$ ,  $u \rightarrow x$ ,  $z \rightarrow u$  y  $u \approx y$ . Demostraremos esta afirmación por contradicción. Supongamos que existen  $v^+ \in T_1^+$  y  $v^- \in T_1^-$ . Se tienen las adyacencias  $u \sim v^+$  por  $(u, x, y, v^+)$ , para todo  $v^+ \in T_1^+$ , y  $u \sim v^-$  por  $(v^-, y, z, u)$  para todo  $v^- \in T_1^-$ .

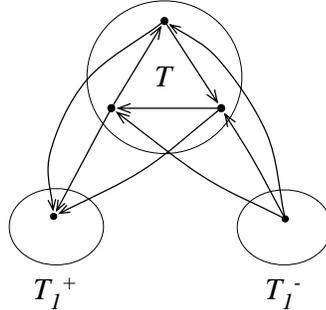


Figura 4.11: Por la afirmación 4.14.1 se tiene que  $T_1 = T_1^+ \cup T_1^-$ .

Se tiene que  $u \rightarrow v^+$  para todo  $v^+ \in T_1^+$  y para todo  $u \in T_2$ , pues si tuviéramos  $v^+ \rightarrow u$ , se tendría que  $u \sim y$  por  $(y, z, v^+, u)$ , lo cual contradice que  $u \in T_2$ . De la misma manera se tiene que  $v^- \rightarrow u$  para todo  $v^- \in T_1^-$  y para todo  $u \in T_2$ , pues si tuviéramos  $u \rightarrow v^-$ , se tendría que  $u \sim y$  por  $(u, v^-, x, y)$ , lo cual contradice que  $u \in T_2$ .

Por otro lado  $v^+ \sim v^-$  por  $(v^-, y, z, v^+)$  y la 3-cuasitransitividad de  $D$ . Esto se ilustra en la figura 4.2.2.  $v^- \rightarrow v^+$  para toda  $v^+ \in T_1^+$  y  $v^- \in T_1^-$ , pues si tuviéramos una flecha del tipo  $v^+ \rightarrow v^-$ , se tendría que  $u \sim y$  por  $(u, v^+, v^-, y)$ , lo cual contradice que  $u \in T_2$ . Entonces  $D$  no es fuertemente conexa, pues  $T_1^+$  domina al resto de la digráfica  $D$ , lo cual implica que no se puede llegar de los vértices de  $D - T_1^+$  a  $T_1^+$  por medio de alguna trayectoria dirigida. Esto es una contradicción. Por lo tanto  $T_1^+ = \phi$  o  $T_1^- = \phi$ , lo cual demuestra la afirmación.  $\square(4.14.2)$

*Caso 1.* Supongamos primero que  $T_1^+ = \phi$ . Como estamos suponiendo que  $T_1 \neq \phi$ , existe un vértice  $v^- \in T_1^-$ .  $v^- \rightarrow u$  para todo  $v^- \in T_1^-$  y para todo  $u \in T_2$ , pues si tuviéramos una flecha del tipo  $u \rightarrow v^-$ , se tendría que  $u \sim y$  por  $(u, v^-, x, y)$ , lo cual contradice que  $u \in T_2$ . Entonces los vértices de  $T_1^-$  dominan a los vértices de  $D - T_1^-$ . Entonces no se puede llegar de los vértices de  $D - T_1^-$  a  $T_1^-$  por medio de alguna trayectoria dirigida. Esto contradice nuestra suposición inicial de que  $D$  es fuertemente conexa.

*Caso 2.* Luego supongamos que  $T_1^- = \phi$ . Como estamos suponiendo que  $T_1 \neq \phi$ , existe un vértice  $v^+ \in T_1^+$ .  $u \rightarrow v^+$  para todo  $v^+ \in T_1^+$  y para todo  $u \in T_2$ , pues si tuviéramos una flecha del tipo  $v^+ \rightarrow u$ , se tendría que  $u \sim y$  por  $(y, z, v^+, u)$ , lo cual contradice que  $u \in T_2$ . Entonces los vértices de  $D - T_1^+$  dominan a los vértices de  $T_1^+$ , por lo que no se

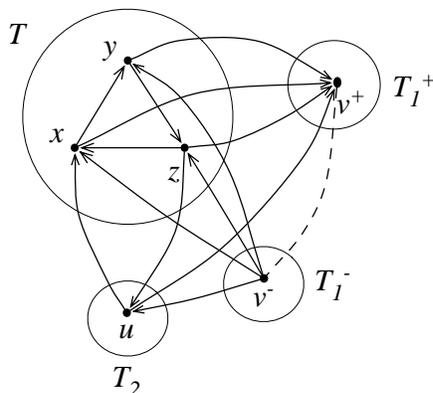


Figura 4.12:  $v^+ \sim v^-$  en la demostración de la afirmación 4.14.2

puede llegar de los vértices de  $T_1^+$  a  $D - T_1^+$  por medio de alguna trayectoria dirigida. Esto contradice nuestra suposición inicial de que  $D$  es fuertemente conexa.

Como estos dos casos son los únicos posibles, se llega a la conclusión de que  $T_1 = \phi$  o bien  $T_2 = \phi$ . Es decir, hemos demostrado que  $v \in T_1$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$  o bien  $v \in T_2$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$ .  $\square(4.14)$

### 4.2.3 Adyacencias entre vértices fuera del triángulo

En esta sección consideraremos nuevamente a una digráfica  $D$  que contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z, x)$ . Examinaremos las adyacencias entre pares de vértices  $(u, v)$  tales que  $u \notin T$  y  $v \notin T$ . Haremos una revisión de casos sobre las distancias de  $u$  y  $v$  a  $T$ , es decir, haciendo variar  $d(u, T)$  y  $d(T, v)$ .

**Teorema 4.15.** *Sean  $D$  una gráfica dirigida fuertemente conexa 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo  $T = (x, y, z, x)$ , y sean  $u$  y  $v$  dos vértices en  $V(D - T)$ . Entonces sucede exactamente uno de estos dos casos:*

- (a)  $u \sim v$ ;
- (b)  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_2$ .

**Demostración:** Haremos una revisión de casos sobre las distancias de  $u$  y  $v$  a  $T$ ; es decir, haciendo variar  $d(u, T)$  y  $d(T, v)$ .

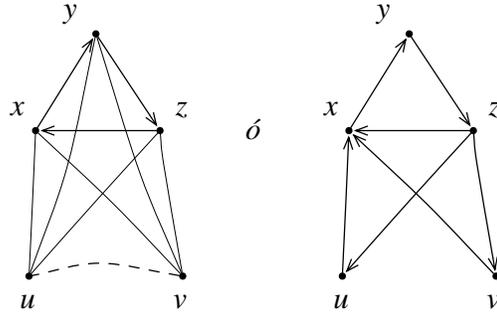


Figura 4.13: Teorema 4.15

**Caso 1**  $d(u, T) = 1$  y  $d(T, v) = 1$

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $u \rightarrow x$ .

**Caso 1.1** Supongamos que existe una trayectoria de longitud uno de  $y$  a  $v$ , esto es,  $y \rightarrow v$ . Entonces se tiene que  $(u, x, y, v)$  es una trayectoria dirigida de longitud tres, por lo tanto  $u \sim v$ .

**Caso 1.2** Supongamos que existe una trayectoria de longitud uno de  $x$  a  $v$ . Entonces se tiene que por  $(u, x, y, z)$ ,  $u \sim z$ , y que por  $(y, z, x, v)$ ,  $y \sim v$ . Si  $y \rightarrow v$ , se tendría la trayectoria dirigida  $(u, x, y, v)$  de longitud tres y  $u \sim v$  por la 3-cuasitransitividad de nuestra digráfica, así que supongamos que  $v \rightarrow y$ . Por otro lado, si  $u \rightarrow z$ , se tendría que  $u \sim v$  por  $(u, z, x, v)$ , y si  $z \rightarrow u$ , también se tendría que  $u \sim v$  por  $(v, y, z, u)$ . Por lo tanto  $u \sim v$  en este caso.

**Caso 1.3** Supongamos que existe una trayectoria de longitud uno de  $z$  a  $v$ . Se tiene que  $u \sim z$  y que  $x \sim v$  por las trayectorias  $(u, x, y, z)$  y  $(x, y, z, v)$  respectivamente.

**Caso 1.3.1** Supongamos primero que  $x \rightarrow v$ . Si  $u \rightarrow z$ , se tendría que  $u \sim v$  por la trayectoria dirigida  $(u, z, x, v)$ . Si  $z \rightarrow u$ , se tiene que  $v \sim y$  por  $(y, z, x, v)$ . Si  $y \rightarrow v$ , se tiene que  $u \sim v$  por  $(u, x, y, v)$ . Si  $v \rightarrow y$ , se tiene que  $u \sim v$  por  $(v, y, z, u)$ .

**Caso 1.3.2** Ahora supongamos que  $v \rightarrow x$ . Consideremos primero el caso en que  $u \rightarrow z$ , donde se tiene que  $u \sim y$  por la trayectoria dirigida  $(u, z, x, y)$ . Si  $u \rightarrow y$ , se tendría que  $u \sim v$ , por  $(u, y, z, v)$ , y si  $y \rightarrow u$ ,  $u \sim v$  por  $(v, x, y, u)$ . Por otro lado, si  $z \rightarrow u$ , observamos que la gráfica que nos queda es 3-cuasitransitiva, no bipartita, y no es semicompleta, pues  $u$  no es adyacente a  $v$ . Se tienen varios casos:

*Caso (i)*  $u \in T_1, v \in T_1$ . Por definición de  $T_1$  sabemos que  $v \sim y$ . Si  $v \rightarrow y$ , se tendría que  $u \sim v$  por  $(v, y, z, x)$ . Si  $y \rightarrow v$ , también se tendría que  $u \sim v$  por  $(u, x, y, z, v)$ . Concluimos que en este caso siempre se tiene que  $u \sim v$ .

*Caso (ii)* Sin pérdida de generalidad  $u \in T_1, v \in T_2$ . Por el teorema 4.14 este caso no puede suceder, pues tendrían que estar ambos en  $T_1$  o ambos en  $T_2$ .

*Caso (iii)*  $u \in T_2, v \in T_2$ . En este caso sabemos que no hay más adyacencias entre  $u$  y  $T$  o entre  $v$  y  $T$ , pues  $u \approx y$  y  $u \approx y$  por definición de  $T_2$ . Por el teorema 4.14 se tiene que si existe algún otro vértice  $w \in V(D - T)$  con  $u \neq w \neq v$ , entonces  $w \in T_2$ . Esto significa que  $w$  tendría las mismas adyacencias que  $u$  y  $v$ . Podemos pensar en los vértices  $u$  y  $w$  como copias de  $v$ . Ahora supongamos que  $u \sim v$ . Demostraremos que esto es imposible. Si se tuviera la flecha  $u \rightarrow v$ , se tendría que  $v \sim y$  por  $(y, z, u, v)$ . Y si  $v \rightarrow u$ , se tendría que  $u \sim y$  por  $(y, z, v, u)$ . Como ambos casos nos llevan a una contradicción se concluye que  $u \approx v$ .

**Caso 2**  $d(u, T) = 2$  y  $d(T, v) = 1$

Como  $d(u, T) = 2$ , se tiene que toda trayectoria dirigida desde  $u$  hacia  $T$  pasa por algún vértice intermedio  $s$ , donde  $s$  no puede ser  $v$ , porque esto nos daría una flecha de  $u$  a  $v$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $z \rightarrow v$ .

**Caso 2.** Supongamos que  $s \neq v$ . Veamos a donde puede ser adyacente el vértice  $s$ .

**Caso 2.1** Si  $s \rightarrow z$ , se tendría que  $u \sim v$  por la trayectoria  $(u, s, z, v)$ .

**Caso 2.2** Si  $s \rightarrow x$  se tiene que  $x \sim v$  y  $u \sim y$  por 3-cuasitransitividad y las trayectorias dirigidas  $(u, s, x, y)$  y  $(x, y, z, v)$  respectivamente. Si  $x \rightarrow v$  se tendría que  $u \sim v$  por la trayectoria dirigida  $(u, s, x, v)$ , y si  $u \rightarrow y$  se tendría que  $d(u, T) = 1$ , así que supongamos que  $v \rightarrow x$  y  $y \rightarrow u$ . Entonces se obtiene la trayectoria dirigida de longitud tres  $(v, x, y, u)$ , y por lo tanto  $u \sim v$ .

**Caso 2.3** Si  $s \rightarrow y$ , se tiene que  $s \sim x$  por  $(s, y, z, x)$ . Examinemos las posibilidades de ésta flecha.

**Caso 2.3.1** Si  $s \rightarrow x$ , se tiene que  $u \sim y$  y que  $x \sim v$  por  $(u, s, x, y)$  y  $(x, y, z, v)$  respectivamente. Si  $u \rightarrow y$  se tendría que  $d(u, T) = 1$ , y si  $x \rightarrow v$ , se tendría que  $u \sim v$  por  $(u, s, x, v)$ , así que supongamos que  $y \rightarrow u$  y  $v \rightarrow x$ , y nuevamente se obtiene que  $u \sim v$  por  $(v, x, y, u)$ .

**Caso 2.3.2** Si  $x \rightarrow s$ , se tiene que  $u \sim z$  por  $(u, s, y, z)$ , y que  $x \sim v$ . Como  $d(u, T) = 2$ , se tiene que  $z \rightarrow u$ , pues si  $u \rightarrow z$ , se tendría que  $z \rightarrow u$ ,  $d(u, T) = 1$ .

**Caso 2.3.2.a** Si  $x \rightarrow v$ , se tiene que  $y \sim v$  por  $(y, z, x, v)$ . Si  $y \rightarrow v$ , se tendría que  $u \sim v$  por  $(u, s, y, v)$ , así que supongamos que  $v \rightarrow y$ . Como  $z \rightarrow u$ , se tiene que  $u \sim v$  por la trayectoria  $(v, y, z, u)$ .

**Caso 2.3.2.b** Supongamos que  $v \rightarrow x$ .  $v \sim y$  por la trayectoria dirigida  $(v, x, s, y)$ . Si sucediera que  $y \rightarrow v$ , se tendría que  $u \sim v$  por la trayectoria dirigida  $(u, s, y, v)$ , así que supongamos que  $v \rightarrow y$ . Como  $z \rightarrow u$ , se tiene que  $u \sim v$  por  $(v, y, z, u)$ .

**Caso 3**  $d(u, T) = 1$  y  $d(T, v) = 2$

Sean  $U$  y  $V$  trayectorias de longitud mínima de  $u$  a  $T$  y de  $v$  a  $T$  respectivamente. Este caso se puede hacer análogo al 1.2, considerando a  $D^r$ , la digráfica transpuesta de  $D$ , y considerando las trayectorias mínimas  $U^r$  y  $V^r$ . En  $D^r$  se tendría que  $d(v, T) = 1$  y  $d(T, u) = 2$ , y entonces se tendría que  $u \sim v$  en  $D^r$ , y por lo tanto, también en  $D$ .

**Caso 4**  $d(u, T) \geq 2$  y  $d(T, v) \geq 2$

Sean  $s = d(u, T)$ ,  $t = d(T, v)$  y sean  $U = (u_0, u_1, \dots, u_s)$  y  $V = (v_0, v_1, \dots, v_t)$  trayectorias dirigidas de longitud mínima de  $T$  hacia  $u$  y  $v$  respectivamente, con  $u_0 = u$ ,  $u_s \in T$ ,  $v_0 \in T$  y  $v_t = v$ .

Por el lema 4.8 se tiene que nuestra digráfica contiene la flecha  $u_s \rightarrow u_0$ , y por el corolario 4.9, contiene la flecha  $v_t \rightarrow v_0$ . Entonces se tiene que  $d(v, T) = 1$  y  $d(T, u) = 1$ . Este caso ya lo hemos examinado en el caso 1.  $\square(4.15)$

**Lema 4.16.** Sean  $D$  una gráfica dirigida fuertemente conexa 3-cuasitransitiva que contiene un triángulo  $T = (x, y, z, x)$ , y sean  $u$  y  $v$  dos vértices en  $V(D - T)$  tales que  $u \sim v$ . Entonces  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_1$ .

**Demostración:** Supongamos que  $u \rightarrow v$  sin pérdida de generalidad. Por el teorema 4.14 sabemos que  $v \in T_1$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$  o bien  $v \in T_2$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$ . Entonces  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_1$  o son de tipo  $T_2$ . Supongamos que ambos son de tipo  $T_2$ . Entonces se tiene la trayectoria dirigida de longitud dos  $(u, v, x, y)$ . Por la 3-cuasitransitividad de  $D$  se tiene que  $u \sim y$ , contradiciendo la suposición de que  $u$  es de tipo  $T_2$ . Por lo tanto  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_1$ .  $\square(4.16)$

#### 4.2.4 Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas no bipartitas

**Teorema 4.17.** Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva fuertemente conexa no bipartita. Entonces

- (i)  $D$  es semicompleta, o

- (ii)  $D = (V(D), F(D))$  tal que  $V(D) = \{x, y, z\} \cup V^*$  y  $F(D) = \{(x, y), (y, z), (z, x)\} \cup \{(v_i, x) | v_i \in V^*\} \cup \{(z, v_i) | v_i \in V^*\}$ .

**Demostración:** Por el lema 2.12 se tiene que como  $D$  no es bipartita entonces contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Por el lema 4.3 se tiene que  $D$  contiene un triángulo dirigido  $T = (x, y, z)$ . Por el teorema 4.14 se tiene que  $v \in T_1$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$  o bien  $v \in T_2$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$ . Observemos que por el teorema 4.15, sabemos que todo par de vértices  $u, v$  que no están en el triángulo cumplen que  $u \sim v$ , o bien  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_2$ , y por el lema 4.16 sabemos que si  $u \sim v$  entonces  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_1$ . Como  $D$  es fuertemente conexa y asimétrica entonces  $V(D) \geq 3$ .

**Caso 1.** Si  $|V(D)| = 3$ , entonces  $D$  es un triángulo pues al ser  $D$  asimétrica cualquier conjunto de flechas tales que no formen un triángulo dirigido producen una digráfica que no es fuertemente conexa. Observemos que un triángulo dirigido es una digráfica semicompleta.

**Caso 2.**  $|V(D)| = 4$ .  $V(D) = T \cup \{v_1\}$ . Por el teorema 4.14  $v \in T_1$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$  o bien  $v \in T_2$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$ . Si  $v \in T_1$  se tiene que  $D$  es semicompleta y se cumple *i*). Si  $v \in T_2$  se tiene que  $D$  cumple *(ii)*.

**Caso 3.**  $|V(D)| \geq 4$ . Por el teorema 4.15 sucede que si  $u$  y  $v$  son dos vértices en  $V(D - T)$  entonces  $u \sim v$  o bien  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_2$ . Por el lema 4.16 si  $u \sim v$  entonces  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_1$ .

*(i)* Supongamos que hay  $u$  y  $v$  son dos vértices en  $V(D - T)$  tales que  $u \sim v$ , y que por lo tanto son de tipo  $T_1$ . Supongamos que existe otro par de vértices  $x$  y  $y$  de  $V(D - T)$  (no necesariamente distintos de  $u$  o de  $v$ ) tal que  $x \approx y$ . Entonces  $x$  y  $y$  son de tipo  $T_2$  por el teorema 4.15, lo cual es imposible ya que, por el teorema 4.14,  $v \in T_1$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$  o bien  $v \in T_2$  para todo vértice  $v \in V(D - T)$ . Por lo tanto  $x \sim y$  para todo par de vértices de  $V(D)$ . Por otro lado,  $x \sim t$  para todo  $x \in V(D_T)$  y  $t \in T$  por ser  $x$  de tipo  $T_1$  para todo  $x \in V(D_T)$ . Entonces en este caso se tiene que  $D$  es semicompleta.

*(ii)* Supongamos que hay dos vértices en  $V(D - T)$ ,  $u$  y  $v$ , tales que  $u$  y  $v$  son de tipo  $T_2$ . Entonces por el teorema 4.14 se tiene que si existe otro vértice  $z$  tal que  $z \in V(D - T)$  se tiene que  $z$  es de tipo  $T_2$ . En este caso se tendría que  $D = (V(D), F(D))$  tal que  $V(D) = \{x, y, z\} \cup V^*$  y  $F(D) = \{(x, y), (y, z), (z, x)\} \cup \{(v_i, x) | v_i \in V^*\} \cup \{(z, v_i) | v_i \in V^*\}$ , pues todos los vértices en  $V(D - T)$  serían de tipo  $T_2$ .

□(4.17)

### 4.3 Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas asimétricas fuertemente conexas

**Teorema 4.18** (Caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas asimétricas fuertemente conexas). *Sea  $D$  una digráfica 3-cuasitransitivas asimétricas fuertemente conexas. Entonces sucede exactamente una de los siguientes casos:*

- (i)  $D$  es bipartita semicompleta, o
- (ii)  $D$  es semicompleta, o
- (iii)  $D = (V(D), F(D))$  tal que  $V(D) = \{x, y, z\} \cup V^*$  y  $F(D) = \{(x, y), (y, z), (z, x)\} \cup \{(v_i, x) | v_i \in V^*\} \cup \{(z, v_i) | v_i \in V^*\}$ .

**Demostración:** Por el teorema 4.2 si  $D$  es una digráfica bipartita conexa 3-cuasitransitiva fuertemente conexa, entonces  $D$  es bipartita semicompleta. Por el teorema 4.17 si  $D$  una digráfica 3-cuasitransitiva fuertemente conexa no bipartita, entonces  $D$  es semicompleta o bien  $D = (V(D), F(D))$  tal que  $V(D) = \{x, y, z\} \cup V^*$  y  $F(D) = \{(x, y), (y, z), (z, x)\} \cup \{(v_i, x) | v_i \in V^*\} \cup \{(z, v_i) | v_i \in V^*\}$ . □(4.18)



# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1 Algunas observaciones y trabajo futuro

Con el teorema 4.18 hemos dado una caracterización de las digráficas 3-cuasitransitivas asimétricas fuertemente conexas. El error en la demostración que se presenta en [2] es no tratar por separado los casos de trayectorias de longitud cuatro en digráficas no bipartitas, las cuales tienen un comportamiento no trivial.

Al tener caracterizadas a las digráficas 3-cuasitransitivas para el caso asimétrico surgen dos temas a tratar que se siguen de manera muy natural de este trabajo.

(i) Caracterizar a las digráficas asimétricas (no necesariamente fuertemente conexas)

(ii) Caracterizar a las digráficas  $n$ -cuasitransitivas

Recordemos que hemos definido a las digráficas  $n$ -cuasitransitivas como las que cumplen que para todo par de vértices  $u$  y  $v$  tales que existe una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud  $n$  se tiene que  $u \sim v$ .



# Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen and J. Huang. Quasi-transitive digraphs. *Journal of Graph Theory* **20** (1995), 141–161
- [2] J. Bang-Jensen. The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs. *Discrete Math* **283** (2004), 1–6.
- [3] J. Bang-Jensen and G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms, and Applications*. Monographs in Mathematics. Springer, 2001.