Universidad Nacional Autónoma de México.

Facultad de Ciencias.

ASPECTOS SOBRE LA FORMULACIÓN POSTULACIONAL DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL DE EINSTEIN, PUBLICADA EN 1905.

TESIS

que para obtener el grado de:

Físico.

Presenta:

Alberto Hauser Sánchez.

Director de Tesis: Dr. Marco Antonio Martínez Negrete.

2009

Datos del Jurado
1. Datos del alumno Hauser Sánchez Alberto 55 44 94 46 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 096533831
2. Datos del Tutor Dr. Marco Antonio Martínez Negrete
3. Datos del Sinodal 1 Dr. Rubén Gerardo Barrera Pérez
4. Datos del Sinodal 2 Dr. José Ernesto Marquina Fábrega
5. Datos del Sinodal 3 Dr. Julio Muñoz Rubio
6. Datos del Sinodal 4 M. en C. Arturo Nieva Gochicoa
7. Datos del trabajo escrito ASPECTOS SOBRE LA FORMULACIÓN POSTULACIONAL DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL DE EINSTEIN, PUBLICADA EN 1905. 47p 2009

Dedicatoria

A Lola y Alberto

A mi abuelo, por revelarme el placer de aprehender.

A la memoria de Oscar Falcon.

Agradecimientos.

A los amigos se Oscar Falcón que tanto me cobijaron:

Marco Antonio Martínez,
José Marquina,
Arturo Nieva y
Ángel Prieto.

A mis amigos: Lirio Aparicio Servin por molestarse en leer esta tesis y al socio (Sergio Arturo Cordero) por ayudarme a editar este trabajo en LaTeX.

Índice general

Introducción.

La presente tesis tiene como propósito principal facilitar la comprensión de la teoría de la relatividad especial, formulada por primera vez por Albert Einstein en 1905 [1] (AE1905, en adelante) y después en 1916 [2] (AE1916, en lo sucesivo). La tesis se centra en particular en una alternativa al principio de constancia de la velocidad de la luz, según el cual la luz se propaga con la misma velocidad para una fuente en reposo o en movimiento con respecto a un sistema "estacionario".

Como estrategia didáctica se propone el empleo de algunos postulados de transitividad, tanto para sistemas en reposo como en movimiento relativo inercial, así como el postulado de la homogeneidad e isotropía del espacio–tiempo.

En AE1905 y AE1916 el insigne físico formula un postulado de transitividad para la sincronización de relojes en sistemas en reposo, pero este postulado queda al margen de los postulados tradicionales, de los que AE deriva (y muchos otros después, en innumerables libros de texto) las consecuencias fundamentales de la teoría de la relatividad especial. En esta estrategia didáctica, el postulado de transitividad de AE para sistemas en reposo se extiende a sistemas en movimiento relativo, y esto, junto con las consecuencias de la isotropía y homogeneidad del espacio–tiempo, permiten en principio deducir todos los aspectos de la teoría de la relatividad especial ortodoxa.

En el capítulo **1** se describe brevemente la relevancia de los postulados de transitividad en física. En el capítulo **2** se expone el trabajo de AE, en lo que respecta a los postulados de los que deduce los aspectos relevantes de la teoría; pero también se describe el postulado de transitividad para la sincronización entre eventos, del cual aparentemente no saca provecho, pero del que se deduce que la velocidad de la luz es la misma en cualquier dirección, en un sistema en reposo.

En el capítulo **3** se analizan las consecuencias de la homogeneidad e isotropía del espacio y el tiempo, las que conducen, por un lado, a transformaciones de coordenadas espacio-temporales del tipo de *Lorentz* (así como la métrica de *Minkowski*), y, por otro, implican la existencia de un límite superior a la velocidad de propagación de señales y de partículas. Estas dos consecuencias se las suele considerar como sólo deducidas de los dos postulados enunciados en AE1905 (el principio de relatividad y la constancia de c).

Finalmente, en el capítulo **4** se extiende el postulado de transitividad sobre la sincronicidad, que aparece en AE1905, pero ahora referido a marcos inerciales y, con ayuda de las deducciones del capítulo **3**, se demuestra que c es una cantidad invariante relativista. Es decir, se obtiene una formulación de la teoría especial de la relatividad equivalente a la presentada en AE1905, pero sin necesidad de postular que c tiene el mismo valor, independientemente de la velocidad de la fuente emisora de luz.

Y, para terminar se concluye, y se analizan las posibles implicaciones didácticas de la presente formulación de la teoría de la relatividad especial.

1 Relevancia de los postulados de transitividad.

Cuando existe una relación de transitividad en física, es porque hay una cantidad del sistema físico en consideración que es invariante. Por ejemplo, en la termodinámica el postulado cero (P0 en adelante, al que se hace referencia como "*ley cero de la termodinámica*") es la expresión de la transitividad de la relación del equilibrio diatérmico entre dos objetos termodinámicos. Si la relación de equilibrio diatérmico la representamos por una tilde, entonces el P0 postula, para tres objetos termodinámicos cualesquiera, A, B y C, que:

1 Postulado (P0):
Si $A : B$ y $A : C$, entonces vale que $B : C$.

De este P0 y del aparato matemático se deduce que existe una propiedad invariante de todos los objetos termodinámicos que están en equilibrio diatérmico, su temperatura. Y, a la inversa, es la existencia de la temperatura como propiedad común de todo objeto termodinámico en equilibrio con los demás, la que garantiza la transitividad de la relación de equilibrio diatérmico.

J. C. Maxwell, en su libro "*Theory of heat*" ([3], págs. 32–33, mi traducción), manifiesta la relevancia de la transitividad de la forma siguiente:

"Ley de la igualdad de temperaturas.– Cuerpos cuyas temperaturas son iguales a las de otro tienen entre sí la misma temperatura. Esta ley no es una obviedad, sino que expresa el hecho de que si un pedazo de hierro al sumergirse en un balde de agua está en equilibrio térmico con el agua, y si la misma pieza de hierro, sin alterar su temperatura, se transfiere a un balde de aceite, y se encuentra que también está en equilibrio térmico con el aceite, entonces si el aceite y el agua fueran puestos en el mismo balde ellos estarían en equilibrio térmico entre ambos, y lo mismo sería cierto de cualesquiera otras tres sustancias.

Esta ley, en consecuencia, expresa mucho más que el axioma de Euclides 'Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales una a otra', y es el fundamento de toda la ciencia de la termometría."

En la crítica de Mach a Newton, respecto a la forma tautológica como el gran físico construye la noción de masa en sus *Principia*, aquél rompe la tautología invocando un postulado de transitividad, detrás del cual se encuentra como invariante a la masa inercial.

En su libro Ernst Mach [4] afirma que Newton incurre en una definición tautológica e incorrecta de la masa inercial, al referirla al volumen y la densidad del cuerpo por un lado, y a la cantidad de materia por el otro. Mientras que la densidad solamente podría definirse por la masa y el volumen, la tautología sería evidente, en tanto que la noción de "cantidad de materia" se deja indefinida. Desde luego, en el planteamiento de Newton tanto la densidad como la cantidad de materia podrían considerarse como elementos indefinidos (lo que ocurre normalmente en cualquier teoría científica), pero es el caso que los tres postulados de Newton permiten definir la masa, como se intenta (por ejemplo) en el texto de Ingard y Kraushaar ([5], cap. 2). Sin embargo, en términos modernos se puede precisar aún más la crítica a Newton, pues la masa y la cantidad de materia tienen unidades diferentes: la masa se mide en kilogramos y la cantidad de materia en moles, y esto es importante en la enseñanza de la física.

Pero parece, al igual que en el texto de Mach, que la caracterización de la masa como una consecuencia de un postulado previo de transitividad es más satisfactoria por cuanto se tiene una definición que no es tautológica, y además la situación es semejante a la que ocurre en la termodinámica, en que la propiedad distintiva de todos los sistemas (la temperatura) es también consecuencia de un A0.

El planteamiento de Mach empieza con la suposición de varias partículas en interacción, sin importar el tipo de ésta (es decir, los cuerpos pueden por ejemplo interactuar gravitatoriamente, o mediante un resorte). La interacción se da hipotéticamente en un marco inercial de referencia, suposición que contrasta con la afirmación de Mach de que: "En nuestro concepto de masa no interviene ninguna teoría". Sin embargo, es claro que la teoría newtoniana interviene parcialmente, pues un marco inercial de referencia se define como aquél en que un cuerpo se mueve con velocidad constante si no actúan fuerzas sobre él.

Mach primero reconoce que el concepto de masa y el principio de reacción (la llamada "*tercera ley de Newton*") no se pueden separar. En seguida afirma que los efectos de la interacción entre partículas se manifiestan en cambios de velocidad, es decir, en aceleraciones, de forma que:

"Todos los cuerpos son de igual masa cuando, actuando mutuamente entre sí, uno produce en el otro una aceleración igual y de signo opuesto."

En el caso general (en que las masas no sean iguales), se tendrá:

$$m_B = -\frac{a_A}{a_B} m_A.$$

(Aquí se puede comentar que si por ma se entiende la fuerza, entonces la relación anterior es el principio de reacción; pero mientras tal ecuación no se postule, no se puede decir que masa y principio de reacción estén involucrados, como establece Mach al inicio de la sección V del capítulo II [4].)

Si se escoge como unidad de masa la de la partícula A, $m_A = 1$ (en unidades arbitrarias, por ejemplo kilogramos), entonces la masa de B se determina midiendo experimentalmente el cociente de aceleraciones $-\frac{a_A}{a_B}$.

El programa de definición de la masa de las partículas no termina para Mach aquí, pues queda por resolver una cuestión (que también aparece en la termodinámica, punto al cual –según Mach– hace referencia Maxwell), y es la siguiente:

Sea el conjunto de cuerpos $A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots$, y compárense todos con la masa unitaria de A.

$$\begin{array}{ccccccc} A, & B, & C, & D, & E, & F, & \dots \\ 1, & m, & m', & m'', & m''', & m'''', & \dots \end{array}$$

"Asi encontramos entonces los valores de masa respectivos, 1, m, m', m'', $\dots$, y asi sucesivamente. Surge la cuestión: Si seleccionamos a B como patrón de comparación (como nuestra unidad): ¿obtendremos para C el valor de masa $\dfrac{m'}{m}$ y para D el valor $\dfrac{m''}{m}$, o resultarán valores completamente diferentes? La pregunta se puede hacer de manera más sencilla: Si los cuerpos B y C en acción mutua con A lo hacen con masas iguales, ¿actuarán también con masas iguales al actuar entre ellos? No hay necesidad *lógica* alguna de que siendo dos masas iguales a una tercera deban ser iguales entre sí. Porque de lo que aquí nos ocupamos no es de cuestiones matemáticas, sino físicas." (Las cursivas son del propio Mach.)

Mach supone universalmente válido, de conformidad con la experiencia, el principio de que *masas iguales a una tercera son iguales entre sí*. Y ésta enunciación es precisamente un postulado de transitividad en la mecánica, que podría llamarse *postulado cero de Mach*, en honor de quien (al parecer) primeramente lo formula (aunque sin llamarlo con tal nombre).

La conclusión de Mach acerca de que: "El concepto de masa, como aquí se ha desarrollado, conduce a lo innecesario de la formulación del principio de reacción", sólo se justifica si Mach postula la validez del segundo postulado de Newton ($F = ma$), en el que la masa que aquí aparece relacionada con la fuerza es la misma que la resultante del postulado de transitividad.

Por otra parte, Mach dice que la ecuación $F = ma$ es la definición de la fuerza, lo que no parece apropiado por cuanto se estarían haciendo equivalentes una definición con un postulado básico de la teoría. En efecto, el lado izquierdo de la ecuación anterior se refiere a la interacción de la partícula en consideración con otras, y se mide de manera independiente que ma, en tanto que éste mide el comportamiento cinemático de la partícula por su aceleración.

En resumen, Mach construye la teoría de la mecánica con un solo postulado explícito, (que es el de transitividad) y, mediante el supuesto de que (que él estipula como definición), deriva la llamada "tercera ley de Newton".

Hay situaciones de la vida cotidiana en que también se presentan relaciones transitivas, por ejemplo la relación de hermandad. Si A es hermano de B y B es hermano de C, entonces A y C son también hermanos. Esto significa que las tres personas poseen una propiedad común, invariante a ellos, que es tener los mismos padres o, equivalentemente, tener el mismo acervo genético. Y a la inversa, el que las tres personas provengan de los mismos padres o que una prueba de ADN revele el mismo acervo genético, garantiza que su relación de hermandad sea transitiva.

Esta sección termina con una disquisición de Maxwell, que se espera haga pensar al lector y le incite a profundizar en el significado de la transitividad (tomada de "*The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell*", Cambridge University Press, 1990):

Notes on Space and Position Circa 1857 (véase la carta de Maxwell a Monro del 5 de junio de 1857, No. 124).

> "There are certain geometrical truths connected with Form and Dimension which lead us to the idea of Absolute Space.
>
> And, first, to render distinct the idea of *space as independent of matter*, conceive a cubical apartment of which the walls are material but impenetrable and immoveable. Then though it is impossible to ascertain whether anything is inside the cube or not we can take measurements outside and determine completely the values of the cube or the amount of space which it contains and we are sure that though all the matter inside the cube were to be annihilated the volume within its sides would remain the same, and so would all the distances measured through the cube so that all the geometrical properties of the space within the cube remain whatever else is conceived to be removed.
>
> Next, to show that *the relations of bodies to space are independent of the consciousness of the observer*, we may consider the case of two observers measuring two different objects with the same rule. If a third observer compares the two objects, the consistence of his result with that of the former observers depends upon a *law* which includes in its operation the two objects and the rule as well as the three observers."

(Posiblemente el lector haya identificado la ley a que se refiere Maxwell en el último párrafo, como un postulado de transitividad. Las cursivas son del autor de la presente tesis.)

2 La teoría de la relatividad especial formulada por Einstein en 1905.

En 1905 Albert Einstein (AE) procede a formular su teoría de acuerdo con un conjunto de consideraciones que primero se relacionan con sistemas de referencia en reposo con respecto a lo que llama un "sistema estacionario" y, en seguida, se extienden a sistemas de referencia en traslación relativa.

2.1. El planteamiento de AE para el tiempo en un "sistema estacionario".

El propósito de esta sección es el diseño de un procedimiento para asignar un tiempo común a distintos puntos del sistema de referencia de un observador, que AE llama " sistema estacionario". La intención de AE es la posibilidad de describir el movimiento de cuerpos en éste sistema de referencia.

Por "sistema estacionario" AE entiende un sistema de coordenadas en el que valen las ecuaciones de Newton. Se trata, como se describe en los textos actuales de mecánica, de un *sistema de referencia inercial*.

(Para los propósitos de la presente tesis se puede adoptar, incluso, una definición puramente cinemática de sistema inercial: dos o más sistemas son inerciales entre sí si la aceleración de un cuerpo en uno de ellos es la misma que con respecto a otro cualquiera de los demás sistemas de referencia. El sistema en reposo o estacionario es en el que por convención se sitúa el observador.)

De acuerdo con AE, la posición de una partícula en reposo con respecto a este sistema estacionario se puede determinar, por ejemplo mediante el uso de cuerpos rígidos como una regla y los métodos de la geometría euclidiana, y especificarse mediante coordenadas cartesianas.

Si se quiere describir el *movimiento* (cursivas de AE) de la partícula, habrá que dar el valor de las coordenadas en función del tiempo. Pero para que esta descripción tenga significado físico, hay que tener claro lo que se entiende por "tiempo".

Aquí vale citar a AE: "Debemos tomar en cuenta que todos nuestros juicios en que el tiempo juega un papel siempre son juicios acerca de *eventos simultáneos*. Si digo, por ejemplo, 'Tal tren llega aquí a las 7 horas', quiero decir algo como lo siguiente: 'El señalamiento de la manecilla pequeña de mi reloj al número 7 y la llegada del tren son eventos simultáneos'." (Las cursivas son de AE.)

Para hacer la descripción de partículas en movimiento en el sistema estacionario, en reposo o inercial, AE diseña un método para asignar un tiempo sincrónico en cada punto de paso del objeto, con el tiempo en el origen de dicho sistema de referencia.

"Si en el punto A del espacio hay un reloj, un observador en A puede determinar los valores temporales de los eventos en la vecindad próxima de A mirando las posiciones de las manecillas que son simultáneas con estos eventos" (como el paso de una partícula por ahí). De manera semejante, un observador en otro punto B puede ver las manecillas de un reloj situado en B (de iguales características al situado en A), para asignar un tiempo a los eventos que ocurren en su vecindad próxima (como el paso de la partícula anterior).

(Nota. Es claro que AEentiende por "evento" algo que sucede en un punto del espacio a un cierto tiempo; es decir, un evento se describe por una tétrada de tres coordenadas espaciales y una temporal.)

A partir de lo anterior el "tiempo A" y el "tiempo B" así percibidos se pueden "sincronizar" en espacio vacío (vale decir, las manecillas de los relojes en A y en B se mueven al unísono), mediante el procedimiento siguiente:

Al tiempo t_A se lanza de A un rayo luminoso hacia B.
El rayo se refleja de B hacia A al tiempo t_B.
El rayo llega de nuevo a A al tiempo t'_A.

Entonces:

1 Definición:
Los eventos en A y B están sincronizados si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B. \tag{2.1}$$

La sincronización de los eventos A y B se denotará como $A : B$, en lo sucesivo.

1 EJEMPLO:
Si $t_A = 12:00$, $t'_A = 12:02$ *y* $d_{BA} = 299,792,458\ m$, *entonces la ecuación anterior nos dice que las manecillas del reloj en* B *hay que ponerlas en* $t_B = 12:01$, *para que ambos relojes marchen sincrónicamente en lo sucesivo.*

Albert Einstein afirma que los eventos en A y B pueden tener un "tiempo común" determinado por (2.1) sólo si se satisface, *por definición* (cursivas de AE, que equivalen a un postulado), que el "tiempo" de viaje de la luz en el vacío de A a B es el mismo que el "tiempo" que requiere para hacer el viaje de vuelta de B hacia A, es decir:

$$c_{AB} = c_{BA}. \tag{2.2}$$

Y, finalmente, AE afirma que:

"De acuerdo con la experiencia suponemos además que la cantidad

$$\frac{2AB}{t'_a - t_A} = c, \tag{2.3}$$

es una constante universal –la velocidad de la luz en el espacio vacío".

En realidad, para poder asignar un tiempo común a todos los puntos del espacio del sistema estacionario, se requiere de algo más. En primer lugar, si el tiempo del evento en A se puede sincronizar con el tiempo del evento en B según (2.1), por simetría debe satisfacerse el inverso, es decir, dado el tiempo del evento en B la misma construcción que lleva a (2.1) debe permitir la sincronización con el tiempo del evento en A. O sea:

2 Postulado (P1):
Si $A : B$, entonces $B : A$, para cualquier pareja de eventos.

La suposición de simetría en la sincronización es un postulado que universaliza el cumplimiento de esta propiedad, satisfecha en múltiples intentos prácticos.

No obstante, falta un postulado más, que cubra la posibilidad de que todos los eventos del espacio del sistema estacionario tengan un tiempo común, no nada más aquellos que estén sobre la línea que une A con B. Para ello hay que considerar un tercer evento C, situado en cualquier dirección. Entonces:

3 Postulado (P0):
Si $A : B$ y $A : C$ entonces $B : C$.

Como los eventos A, B y C están orientados en cualquier dirección y en cualquier sitio del espacio, los postulados P0 y P1 pueden pensarse como consecuencia de la homogeneidad e isotropía del espacio.

(Al segundo postulado lo denotamos por P0, para conservar la tradición establecida en la termodinámica de designar con 0 al postulado de transitividad.)

Los dos postulados P1 y P0 los formula AE, inmediatamente después de

(2.1) escribiendo: "Suponemos que esta definición de sincronismo esté libre de contradicciones, y que lo *esté para puntos en número arbitrario, y por consiguiente son válidas en general las siguientes relaciones: ...*" (cursivas del presente redactor).

Como se aprecia, las *siguientes relaciones* son los dos postulados P0 y P1 arriba anotados. Sin embargo, en la secuencia de presentación de ambos postulados, AE parece no darle al P0 en particular un uso en la Teoría de la Relatividad Especial, semejante al que tiene el postulado de transitividad en Termodinámica y Mecánica como se ha visto antes. Es más, AE vuelve a mencionar en AE1916, en una nota a pie de la página 26:

> "Suponemos además que cuando ocurren tres fenómenos A, B, C en lugares distintos y A es simultáneo a B y B es simultáneo a C, entonces se cumple también el criterio de simultaneidad para la pareja de sucesos $A - C$. Este supuesto es una hipótesis física sobre la ley de propagación de la luz; tiene que cumplirse necesariamente para poder mantener en pie la ley de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío."

AE, sin embargo, no demuestra en esta nota que del cumplimiento de P0 se sigue la ley de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío.

2.2. Utilización de los postulados P1 y P0 de Einstein.

Se va a dar por satisfecha la condición de sincronización (2.1), para analizar las consecuencias de los dos postulados P1 y P0 de Einstein de 1905, en relación con las propiedades de la velocidad de propagación de la luz en el vacío en un sistema en reposo. En especial, se responderá la pregunta: ¿Qué invariante hay implícito detrás del P0?

En primer lugar, las consecuencias del P1 conducen a lo siguiente.

Cinemáticamente, para dos relojes sincronizados según el criterio de AE1905, vale que:

$$d_{AB} = c_{AB}(t_B - t_A),$$

y, a la inversa:

$$d_{BA} = c_{BA}(t'_A - t_B),$$

Las mediciones experimentales con cuerpos rígidos (las reglas de medir que AE considera) dan, para eventos $A,\ B$ cualesquiera en el vacío, que la distancia entre ellos satisface:

$$d_{AB} = d_{BA}. \tag{2.4}$$

Por tanto,

$$c_{AB}(t_B - t_A) = c_{BA}(t'_A - t_B).$$

Y, de , cuya expresión matemática es la ecuación (2.1), se obtiene:

$$c_{AB} = c_{BA}.$$

Si se hubiese realizado la sincronización tipo AE1905, pero ahora lanzando el pulso desde B y reflejándolo en A, se concluiría que:

$$c_{BA} = c_{AB},$$

habiendo utilizado que $B : A$, como lo exige el P1.

Por tanto, la luz viaja con la misma velocidad en un sentido u otro del trayecto AB como consecuencia del $\mathrm{P}1$, y no como definición. Es decir, en este otro planteamiento equivalente einsteniano:

$c_{BA} = c_{AB}$ es una consecuencia de la satisfacción de tres condiciones: la definición de sincronización de los eventos $A,\ B$, el $\mathrm{P}1$ o bien la isotropía del espacio en el sistema estacionario o en reposo y $d_{AB} = d_{BA}$.

Ahora, dado que la luz se propaga en el vacío con la misma velocidad en una u otra dirección de la línea que une a los eventos A y B, se podría escribir que:

$$c_{AB} = c_{BA} = c', \tag{2.5}$$

en donde es una constante universal, en la dirección de la línea AB, y nada más en ella.

Con lo anterior, se puede escribir (como en $\mathrm{AE}1905$) que:

$$Si\ A : B \Rightarrow c_{BA} = c_{AB} = \frac{d_{AB}}{t'_A - t_A} = \frac{2d_{BA}}{t_B - t_A} = c'. \tag{2.6}$$

(El último paso en la igualdad viene de la condición de sincronización entre los relojes en A y en B, $t'_A - t_B = t_B - t_A$, es decir: $t'_A + t_A = 2t_B$. Si se resta a ambos miembros de esta última ecuación $2t_A$, se obtiene

$$t'_A - t_A = 2(t_B - t_A),$$

que es el resultado deseado.)

(Nótese que las ecuaciones (2.6) y la (2.7), adelante, son vectoriales, porque las d y las c que aparecen en ellas se refieren a desplazamientos y velocidades.)

De (6), se tiene:

$$(t_B - t_A)c' = d_{AB} \Rightarrow (t_B - t_A) = \frac{d_{AB} \cdot c'}{c' \cdot c'} \Rightarrow t_A = t_B - \frac{d_{AB} \cdot c'}{c' \cdot c'}. \quad (2.7)$$

Sin embargo, todavía no podría afirmarse (como hace AE inmediatamente después de formular P1 y P0), que es una constante universal general, pues el resultado (2.5) sólo vale para la línea que conecta los eventos A y B.

Hay que analizar ahora las implicaciones del P0.

Para esto, considérese que los relojes en A y C se sincronizan del mismo modo como se sincronizaron A y B, o sea, el destello que sale de A hacia B, sale también hacia C, en donde la luz se refleja en el tiempo t_C. Se puede, de manera concluyente como en (2.6), escribir la ecuación:

$$Si\ A : C \Rightarrow c_{CA} = c_{AC} = \frac{d_{AC}}{t_C - t_A} = c''. \quad (2.8)$$

De aquí:

$$t_A = t_C - \frac{d_{AC} \cdot c''}{c'' \cdot c''}. \quad (2.9)$$

El tiempo t_A en (2.7) y (2.9) es el mismo, por lo que:

$$t_A = t_B - \frac{d_{AB} \cdot c'}{c' \cdot c'} = t_C - \frac{d_{AC} \cdot c''}{c'' \cdot c''}.$$

O sea:

$$t_C - t_B = \frac{d_{AC} \cdot c''}{c'' \cdot c''} - \frac{d_{AB} \cdot c'}{c' \cdot c'}. \quad (2.10)$$

(En la notación tradicional el producto escalar de las cantidades vectoriales M y N se denota por $M \cdot N$)

El P0 demanda que si $A : B$ y $A : C$ se cumple que $B : C$, por lo que se debe satisfacer una relación del tipo de (2.6) y (2.8):

$$B : C \Rightarrow c_{BC} = c_{CB} = c''' = \frac{d_{BC}}{t_C - t_B}. \tag{2.11}$$

De aquí:

$$t_C - t_B = \frac{d_{BC} \cdot c'''}{c''' \cdot c'''}, \tag{2.12}$$

(2.10) y (2.12) son compatibles si:

$$c' = c'' = c''' = c, \tag{2.13}$$

pues siendo las d's vectores, se tiene que $d_{BC} = d_{AC} - d_{AB}$.

Aquí, c es una constante universal, dado que los eventos A, B y C son cualesquiera. Es decir,

$$(\text{P0+P1}) + (2.1) + (2.4) \Rightarrow c = \text{constante}, \tag{2.14}$$

es decir, c es constante universal para un sistema estacionario.

El planteamiento de $\text{AE}1905$ es en esta notación, por contraste:

$$(2.1) + (2.2) + (2.4) \Rightarrow (\text{P0+P1}). \tag{2.15}$$

Es seguro que a un resultado como (2.13) se refiere Einstein en la nota al pie de la página 26, en $\text{AE}1916$, antes citada (al final de la sección 2.1).

En conclusión, los axiomas de $\text{AE}1905$ P1 y P0, el cumplimiento de la sincronización (2.1) y la simetría en las mediciones de las distancias, implican que la luz se propaga en el vacío de manera isotrópica. La constancia de la velocidad de la luz en el vacío, en un sistema en reposo, surge así como el invariante detrás del postulado P0. De esto se sigue lo que AEbuscaba, la construcción de la malla espacio temporal, en que a cada punto se le puede asignar el tiempo del observador (denotada en tiempos más actuales por malla de Taylor-Wheeler [6]).

También podría decirse que la malla espacio-tiempo de un sistema estacionario es homogénea e isótropa respecto a la propagación de la luz en el vacío. Es homogénea porque (2.15) vale en cualquier región del espacio-tiempo; y es isotrópica por cuanto (2.15) establece que la luz se propaga con el mismo valor en cualquier dirección y sentido.

Un comentario final sobre (2.15), es decir, sobre el planteamiento en AE1905: Es posible que AE en el año de 1906 conociera la relevancia de los postulados de transitividad y la existencia de invariantes claves en algunas ramas de la física y, por ello buscara una formulación semejante para su teoría especial de la relatividad, pues se sabe que conocía en profundidad los escritos de Maxwell y Mach. Como se ha hecho notar anteriormente, ambos llegaron a formular sendos postulados de transitividad en la termodinámica y en la mecánica. ¿Por qué AEen 1906 no escogió, en vez de (2.15), un enfoque como en (2.14), más acorde con lo que llega a re enfatizar en AE1916, pero que tampoco llega a utilizar deductivamente?

2.3. Otros planteamientos equivalentes.

Un planteamiento más, que genera las conclusiones anteriormente deducidas (en particular la invariancia de la velocidad de la luz) para un sistema en reposo o estacionario, que será útil para el análisis de eventos en movimiento, se hace enseguida mediante el concepto de *intervalo de eventos*.

Como antes se indicó, un evento es un suceso que ocurre en un punto del espacio y en un tiempo dado del sistema estacionario; por ello queda caracterizado por cuatro coordenadas, tres espaciales y una temporal. El *intervalo de dos eventos*, por ejemplo la emisión de un pulso de luz en A y su arribo en B es, por definición:

$$s_{AB} = \sqrt{d_{AB}^2 - c_{AB}^2(t_B - t_A)^2}. \tag{2.16}$$

Análogamente, el intervalo entre los eventos de reflexión del pulso de luz en B y su recepción en A, con el que se completa la definición de sincronización ($eq1$) en AE1906, es:

$$s_{BA} = \sqrt{d_{BA}^2 - c_{BA}^2(t'_A - t_B)^2}. \tag{2.17}$$

(Todos los términos en esta expresión han sido introducidos anteriormente.)

Primeramente se va a demostrar que la isotropía de la propagación de la luz en la línea AB expresada por la ecuación (2.5), puede deducirse de la sincronicidad (2.1), la simetría espacial (2.4) y el siguiente postulado de simetría en términos de intervalos, válido para un sistema estacionario o en reposo:

4 Postulado (P1*):
Para cualquier pareja de eventos luminosos A, B en un sistema estacionario, se cumple $s_{AB} = s_{BA}$.

Igualando s_{AB} con s_{BA} se tiene:

$$\sqrt{d_{AB}^2 - c_{AB}^2(t_B - t_A)^2} = \sqrt{d_{BA}^2 - c_{BA}^2(t'_A - t_B)^2}.$$

Sustituyendo en esta expresión la condición de sincronicidad (2.1) y la simetría espacial (2.4), se concluye que:

$$c_{AB} = c_{BA} = c',$$

que es (2.5). Es decir, el pulso luminoso viaja con la misma velocidad en cualquier sentido a lo largo de la línea cualquiera AB.

Ahora, la constancia universal de la velocidad de la luz (2.13), para un sistema estacionario en el vacío, se puede deducir del siguiente postulado de transitividad para los intervalos de los tres eventos A, B y C cualesquiera:

5 Postulado (P0*):
Si $s_{AB} = 0$ y $s_{AC} = 0$, entonces $S_{BC} = 0$, para tres eventos luminosos cualesquiera A, B y C en el vacío en un sistema estacionario.

La demostración de que P0* implica la constancia universal de la velocidad de la luz en un sistema estacionario, es semejante a la que llevó a (2.13), por lo siguiente:

$$\begin{aligned} s_{AB} &= \sqrt{d_{AB}^2 - c_{AB}^2(t_B - t_A)^2} = \\ &= \sqrt{[d_{AB} - c'(t_B - t_A)] \cdot [d_{AB} + c'(t_B - t_A)]} = 0 \\ &\Rightarrow d_{AB} - c'(t_B - t_A) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{AC} &= \sqrt{d_{AC}^2 - c_{AC}^2(t_C - t_A)^2} = \\ &= \sqrt{[d_{AC} - c''(t_C - t_A)] \cdot [d_{AC} + c''(t_C - t_A)]} = 0 \\ &\Rightarrow d_{AC} - c''(t_C - t_A) = 0. \end{aligned}$$

De estas dos expresiones se despeja t_A como en (2.7) y (2.9) y se igualan para dar (2.10).

De P0* se sigue que $s_{BC} = 0$, de la que se calcula $t_C - t_B$ como en (2.12).

Nuevamente, la compatibilidad entre ambas expresiones para $t_C - t_B$ demanda que se cumpla (2.13).

A partir de aquí, de la construcción de la malla Taylor-Wheeler, mediante la que se puede describir el movimiento de cualquier cuerpo en un sistema estacionario o inercial, AE en 1905 analiza la extensión del análisis relativista a eventos luminosos en movimiento con respecto a aquel sistema estacionario. Los eventos luminosos ahora son tales que se debe satisfacer el postulado (*principio de la constancia de la velocidad de la luz*, así denominado por AE), que denotaremos por AE2:

AE2: Un rayo de luz cualquiera se mueve en el sistema "estacionario" de coordenadas con la velocidad determinada c, sea que el rayo sea emitido por un cuerpo estacionario o en movimiento. Por tanto

$$velocidad = \frac{trayecto\ luminoso}{intervalo\ de\ tiempo}.$$

AE aclara enseguida que intervalo de tiempo se considera en el sentido definido por (2.1).

(El primer postulado, o principio como le llama AE, es el *principio de relatividad*:

AE1: Las leyes por las cuales cambian los estados de los sistemas físicos no se afectan, sea que los cambios de estado se refieran a uno u otro de dos sistemas de coordenadas en movimiento de traslación uniforme.)

A partir de estos dos principios o postulados, AE deduce en AE1905 las consecuencias más importantes de la teoría de la relatividad especial; en particular, deduce las ecuaciones de transformación de coordenadas espaciales y el tiempo, las llamadas ecuaciones de Lorentz.

En la presente tesis, en vez de postular el AE2 y a partir de éste deducir las ecuaciones de transformación de Lorentz, se van a formular dos postulados parecidos a los ya enunciados P0* y P1*, pero ahora para eventos luminosos en movimiento y en el vacío. Aplicando las ecuaciones de transformación del tipo de Lorentz, deducidas de la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, es posible deducir la constancia universal de la velocidad de la luz, como en (2.13), pero para fuentes luminosas en movimiento.

3 Consecuencias de la homogeneidad e isotropía del espacio–tiempo.

En esta sección se va a presentar el planteamiento de A. R. Lee y T. M. Kalotas [7] mediante el cual se deducen tanto la existencia de un límite superior a la velocidad de partículas y señales, como las ecuaciones de transformación de espacios y tiempos para sistemas de coordenadas en movimiento relativo a velocidad constante, del tipo de Lorentz. El argumento de Lee y Kalotas (LK, en adelante) se basa solamente en las nociones de isotropía y homogeneidad del espacio y el tiempo, junto con el postulado de relatividad.

Se parte de la existencia de marcos de referencia inerciales (de los definidos al principio de esta tesis) S y S', en movimiento relativo. La suposición de la homogeneidad del tiempo, y la homogeneidad e isotropía del espacio permite escoger una situación sencilla de movimiento relativo entre S y S': los ejes espaciales de S y S' coinciden al tiempo $t = t' = 0$ y el origen espacial de S' se mueve con velocidad v a lo largo del eje x de S.

Un evento en S está caracterizado por las coordenadas x, y, z, t, mientras que en el sistema S' es registrado por el conjunto de coordenadas x', y', z', t'. El problema es encontrar las ecuaciones de transformación de unas coordenadas en otras,

$$x' = x'(x, y, z, t),\ y' = y'(x, y, z, t),\ z' = z'(x, y, z, t),\ t' = t'(x, y, z, t)$$

La condición de homogeneidad implica que las transformaciones deben ser lineales. En caso de no ser lineales habría una preferencia física del origen (u otro punto cualquiera) sobre los demás. Supóngase, para hacer ver esto de manera sencilla, que x' depende del cuadrado de x, $x' = ax^2$; entonces la distancia entre dos puntos en S' estaría relacionada con la localización de esos puntos en el sistema S por $x'_2 - x'_1 = a(x_2^2 - x_1^2)$. Supóngase ahora que una regla de longitud uno en S tiene sus puntos extremos en $x_2 = 2$ y en $x_1 = 1$; entonces $x'_2 - x'_1 = 3a$. Si, en vez, sucede que la misma regla está situada entre $x_2 = 5$ y $x_1 = 4$, se obtendría $x'_2 - x'_1 = 9a$. Es decir, la longitud medida de la regla dependería del sitio del espacio en donde se encontrara. De manera semejante, se debe rechazar cualquier dependencia en t que no sea lineal, puesto que el intervalo de tiempo entre dos eventos no debería depender de los números en donde se ponen las manecillas del reloj del observador. De esta manera todos los puntos del espacio y el tiempo quedan en pie de igualdad, sin preferencias físicas de unos por otros. Se tendrá entonces:

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\
t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Los 16 coeficientes anteriores deben depender de la velocidad relativa v entre S y S'. Por ejemplo, si $v = 0$ en todo tiempo, entonces ambos marcos de referencia siempre coinciden y se espera que $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$, mientras que los demás coeficientes son nulos todos. En ciertas condiciones, los coeficientes a's deben ser tales que la transformación Ec. (3.1) coincida con la transformación de Galileo $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$ y $t' = t$. De lo que se trata es, de hallar los coeficientes para cualquier valor de v.

Los dieciséis coeficientes se van a determinar del principio de relatividad y de la suposición de homogeneidad e isotropía del espacio y el tiempo.

El eje x coincide continuamente con el eje x'. Esto será así sólo si para $y = 0,\ z = 0$ (que caracteriza los puntos sobre el eje x) siempre se tiene que $y' = 0,\ z' = 0$ (que caracteriza los puntos sobre el eje x'). En consecuencia, las fórmulas de transformación para y' y z' deben ser de la forma:

$$y' = a_{22}y + a_{23}z, \qquad z' = a_{32}y + a_{33}z.$$

Es decir, los coeficientes $a_{21},\ a_{24},\ a_{31},\ a_{34}$ deben todos ser 0. Del mismo modo, el plano $x - y$ (caracterizado por $z = 0$) debe transformarse en el plano $x' - y'$ (caracterizado por $z' = 0$); de manera semejante, para los planos $x - z$ y $x' - z'$, $y = 0$ debe dar $y' = 0$. Por tanto a_{23} y a_{32} son 0 de modo que:

$$y' = a_{22}y; \qquad z' = a_{33}z.$$

Los coeficientes restantes a_{22} y a_{33} se pueden determinar empleando el principio de relatividad $\mathrm{AE1}$. Véase el caso de a_{22}. Supóngase que se tiene una regla que está situada sobre el eje y, de longitud 1 según se mide en S (o sea $y = 1$). De acuerdo con el observador en S', la longitud de la regla será (porque $y' = a_{22} \times 1$). Ahora, si la misma regla se la lleva al reposo a lo largo del eje y' en el sistema S', el observador primado debe medir la misma longitud, (es decir $y' = 1$), del mismo modo que el observador no primado cuando la regla está en reposo respecto de él; de lo contrario habría una asimetría entre los sistemas de referencia. Sin embargo, en este caso, el observador S debería medir que la longitud de la regla es $\left(\frac{1}{a_{22}}\right)$, porque:

$$y = \left(\frac{1}{a_{22}}\right) y' = \left(\frac{1}{a_{22}}\right) \times 1.$$

Pero debido a la naturaleza recíproca de estas medidas de longitud, el postulado $\mathrm{AE}1$ ampliado de modo que además de leyes incluya medidas requiere que éstas últimas sean iguales, pues de otro modo los marcos no serían físicamente equivalentes. Debe cumplirse entonces que

$$a_{22} \times 1 = \left(\frac{1}{a_{22}}\right) \times 1;$$

en consecuencia $a_{22} = 1$. Con una argumentación semejante se demostraría que $a_{33} = 1$. Así que:

$$y' = y; \qquad z' = z \tag{3.2}$$

Las otras dos ecuaciones de transformación de coordenadas que quedan son:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned}$$

En cuanto a la segunda ecuación se supone que, por simetría, t' no depende ni de y ni de z. De lo contrario relojes situados simétricamente en el plano y–z (por ejemplo en $+y,\ -y$, o $+z,\ -z$) alrededor del eje x mostrarían desacuerdo observados desde S', lo que estaría en contradicción con la isotropía espacial. O sea, $a_{42} = a_{43} = 0$. Por lo que respecta a la ecuación de x', el punto con $x' = 0$ aparenta moverse en la dirección positiva del eje de las x con velocidad v, de modo que la expresión $x' = 0$ debe ser idéntica al enunciado $x = vt$. Con esto, se espera que $x' = a_{11}(x - vt)$ sea la ecuación correcta de transformación; es decir, $x = vt$ siempre da que $x' = 0$ en esta ecuación. Por tanto, $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$. Esto da que $a_{41} = -va_{11}$, con lo que las cuatro ecuaciones quedan reducidas como sigue:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t. \end{aligned} \tag{3.3}$$

(Nótese que, hasta aquí, no se ha invocado el postulado AE2.)

La ecuación Ec. (3.3) se reescribe como:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma x + \delta t. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Los cuatro parámetros desconocidos anteriores todavía pueden reducirse a dos:

Como el origen de S' está en $x' = 0 \Rightarrow$

$$\alpha x + \beta t = 0 \Rightarrow \frac{x}{t} = -\frac{\beta}{\alpha} = v \Rightarrow \beta = -v\alpha.$$

El origen de S está en $x = 0 \Rightarrow$

$$x' = \beta t,\ t' = \delta t \Rightarrow \frac{x'}{t'} = -v = \frac{\beta}{\delta} \Rightarrow \alpha = \delta.$$

Entonces las dos últimas ecuaciones de transformación en Ec. (3.4) quedan,

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - v\alpha t, \\ t' &= \gamma x + \alpha t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -v\alpha \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

donde $\alpha(v)$ y $\gamma(v)$ son funciones par e impar en v, respectivamente, o sea $\alpha(v) = \alpha(-v)$ y $\gamma(v) = -\gamma(-v)$. Para demostrar esto, se cambian los sentidos de los ejes x y x' (equivalente a reflexiones en los planos y–z), así que:

$$x_{re} \equiv -x, \qquad x'_{re} \equiv -x'.$$

Dado que S se mueve con velocidad $-v$ en relación con S', se tiene:

$$\begin{pmatrix} x'_{re} \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(-v) & -(-v)\alpha(-v) \\ \gamma(-v) & \alpha(-v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{re} \\ t \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, si nada más se cambian los signos de la primera ecuación de Ec. (3.5) y se sustituye en la segunda $\gamma x = -\gamma(-x) = -\gamma x_{re}$,

$$\begin{aligned} x'_{re} &= \alpha x_{re} + v\alpha t, \\ t' &= -\gamma x_{re} + \alpha t. \end{aligned}$$

En matrices:

$$\begin{pmatrix} x'_{re} \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(v) & +v\alpha(v) \\ -\gamma(v) & \alpha(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{re} \\ t \end{pmatrix}.$$

La igualdad de las dos matrices anteriores requiere precisamente que

$$\alpha(v) = \alpha(-v) \quad \text{y} \quad \gamma(v) = -\gamma(-v).$$

En el caso particular $v = 0$, el significado físico de la transformación demanda que:

$$\alpha(0) = 1, \qquad \gamma(0) = 0,$$

lo que es compatible con que α y γ son funciones par e impar en v, respectivamente.

La determinación de la forma de α y γ en función de v surge de un postulado de transitividad de la relación de inercialidad entre sistemas de referencia:

6 Postulado (Transitividad):
Si S es inercial con respecto a S' y S' es inercial con respecto a S'', entonces S y S'' son sistemas de referencia inerciales entre ellos.

Siguiendo a LK se emplea la notación $S \longrightarrow^{v} S'$, para indicar que S' se mueve con velocidad v relativamente a S. Con esta notación la siguiente secuencia y su matriz de transformación son:

$$S \longrightarrow^{v_2} S' \longrightarrow^{v_1} S''$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -v_1\alpha_1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & -v_2\alpha_2 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 - v_1\alpha_1\gamma_2 & -\alpha_1\alpha_2(v_1+v_2) \\ \gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_2 - v_2\alpha_2\gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Se han utilizado las abreviaciones:

$$\alpha(v_i) = \alpha_i; \qquad \gamma(v_i) = \gamma_i.$$

Por el postulado de transitividad 6 S y S'' son mutuamente inerciales, por lo que debe existir una única velocidad v_0 que relaciona los movimientos y, también, una transformación directa de la forma:

$$S \longrightarrow^{v_0} S''$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & -v_0\alpha_0 \\ \gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Igualando los elementos diagonales de Ec. (3.7) y Ec. (3.8) se concluye que:

$$\frac{\gamma_1}{v_1\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{v_2\alpha_2} \tag{3.9}$$

De Ec. (3.4), en donde el miembro izquierdo de la ecuación depende sólo de v_1 y el miembro derecho de la ecuación es una función nada más de v_2, se infiere que el invariante asociado al postulado de transitividad 6 es precisamente el cociente $\dfrac{\gamma}{v\alpha}$.

Es decir:

$$\frac{\gamma(v)}{v\alpha(v)} = k, \tag{3.10}$$

en donde k es una constante universal que no depende de v.

Las transformaciones Ec. (3.7) y Ec. (3.8) se leen ahora:

$$S \longrightarrow^{v_2} S' \longrightarrow^{v_1} S''$$

$$\alpha_1\alpha_2(1-kv_1v_2)\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{v_1+v_2}{1-kv_1v_2} \\ \dfrac{k(v_1+v_2)}{1-kv_1v_2} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$S \longrightarrow^{v_0} S''$$

$$\alpha_0\begin{pmatrix} 1 & -v_0 \\ kv_0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Igualando términos en Ec. (3.11) y Ec. (3.12) se llega a identificar a v_0 inmediatamente, obteniéndose la ley de adición de velocidades

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{1 - kv_1v_2}, \tag{3.13}$$

y la ecuación de transformación de $\alpha(v)$:

$$\alpha(v_0) = \alpha(v_1)\alpha(v_2)[1 - kv_1v_2]. \tag{3.14}$$

Ahora, sin importar el valor de k, siempre se puede escoger un número real v tal que seleccionando:

$$v_1 = -v_2 = v,$$

el denominador en la ecuación Ec. (3.13) permanece finito, y lleva a que $v_0 = 0$. Esto equivale a dos transformaciones sucesivas, una adelante y otra hacia atrás

$$S \longrightarrow^{v} S' \longrightarrow^{-v} S''.$$

Para este caso, empleando $\alpha(v_0 = 0) = 1$, se obtiene de Ec. (3.14):

$$\alpha(v)\alpha(-v)[1 + kv^2] = 1.$$

O sea,

$$\alpha(v) = (1 + kv^2)^{1/2}, \tag{3.15}$$

puesto que $\alpha(v)$ es par en v. La raíz negativa se excluyó debido a que $\alpha(0) = 1$.

Los valores que k puede tomar quedan definidos por Ec. (3.13) y Ec. (3.15). Si k es positivo, Ec. (3.13) indica que la velocidad resultante v_0 crece al infinito en $v_1v_2 = \frac{1}{k}$; en este valor sucede un cambio de signo en la velocidad resultante, de modo que se llega a la situación extraña de que dos velocidades en el mismo sentido pueden dar una suma en sentido contrario; por esta razón k debe ser negativo. Dado que el valor $k = 0$ genera las ecuaciones de transformación de Galileo:

$$v_0 = v_1 + v_2,$$
$$x' = x - vt,$$
$$t' = t,$$

se concluye que k sólo puede tomar valores negativos o cero.

Si se escribe,

$$k = -\frac{1}{\sigma^2},$$

siendo σ una constante positiva, los parámetros de la transformación de coordenadas quedan como:

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}, \\ \gamma(v) &= -\frac{v}{\sigma^2}\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalmente, de Ec. (3.5) se obtienen las ecuaciones tipo Lorentz de transformación entre las coordenadas de S y S':

$$\begin{aligned} z' &= z, & y' &= y, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\sigma^2}}}, & t' &= \frac{t - \frac{v}{\sigma^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\sigma^2}}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

En términos de la definición tradicional para γ:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{\sigma^2}},$$

las ecuaciones de transformación anteriores se pueden rescribir como:

$$\begin{aligned} z' &= z, & y' &= y, \\ x' &= \gamma(x - vt) & t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{\sigma^2}x\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Y la fórmula de LK para la suma de velocidades paralelas queda, de Ec. (3.13) como:

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{\sigma^2}},$$

con $0 < \sigma^2 < \infty$.

Obsérvese de lo expuesto que, las ecuaciones de transformación de las coordenadas de los sistemas S y S' [Ec. 3.16] son del *tipo de Lorentz*, por cuanto en vez de c^2 aparece σ^2, ya que:

i) σ^2 es, por el postulado de transitividad 6 una constante universal, como se expresa en la conclusión de invariancia [Ec. 3.9].

ii) σ juega el papel de velocidad límite universal que, aunque única, no se necesita identificar con la velocidad de la luz en el vacío. El valor límite universal de la velocidad surge tanto de las fórmulas como de un postulado semejante al AE2. Aunque la posibilidad de que $\sigma^2 = \infty$ (transformaciones de Galileo) no se puede descartar sobre bases únicamente teóricas, muchos experimentos sugieren que σ^2 es finita; entre ellos están: el incremento relativista de la masa con la velocidad (por ejemplo de los electrones); la dilatación temporal (deducida de las ecuaciones tipo Lorentz), por ejemplo en el incremento del tiempo de decaimiento de los mesones π. Según LK, σ y c son indistinguibles, según los límites actuales de precisión experimental.

En la sección siguiente se introducirán otros postulados equivalentes para el desarrollo de la teoría de la relatividad especial, de los que podrá concluirse que $\sigma = c$.

4 Otros postulados equivalentes para la teoría de la relatividad especial.

El planteamiento siguiente considera primeramente los eventos involucrados en la sincronización de relojes en A y B, fijos en un sistema estacionario, pero ahora observados desde un sistema en movimiento relativo a velocidad constante.

Un evento consiste en la emisión de un pulso de luz en el punto A y su viaje al punto B, ambos puntos referidos al original sistema estacionario de $\text{AE}1905$. Estos eventos son observados desde un sistema S_1, que se mueve con velocidad relativa v respecto al sistema estacionario (o en reposo). Sin pérdida de generalidad se puede suponer que sus ejes x y x_1 coinciden en dirección y sentido, de modo que las ecuaciones de transformación del tipo de Lorentz (3.17) son:

$$\begin{aligned} z_1 &= z, \\ y_1 &= y, \\ x_1 &= \gamma(x - vt), \\ t_1 &= \gamma\left(t - \tfrac{v}{\sigma^2}x\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aquí, $\gamma = \sqrt{1 - \dfrac{v}{\sigma^2}}$.

Los intervalos de los eventos A y B, observados desde el sistema estacionario y el sistema S_1 son, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
S_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 + c_{AB}^2 (t_B - t_A)^2}, \\
S_{1AB} &= \sqrt{(x_{1B} - x_{1A})^2 + (y_{1B} - y_{1A})^2 + (z_{1B} - z_{1A})^2 + c_{1AB}^2 (t_{1B} - t_{1A})^2},
\end{aligned}
$$

No se ha supuesto válido el postulado AE2 por el cual $c_{AB} = c_{1AB}$, es decir, que la luz viaja con la misma velocidad se la vea desde el sistema estacionario o desde el sistema S_1. Esto se va a demostrar, en vez, del siguiente postulado:

7 Postulado (P1**):
El intervalo de emisión y recepción de luz entre dos puntos A y B, respectivamente, fijos en un sistema estacionario, son iguales para un sistema cualquiera en movimiento relativo a velocidad constante v,

$$S_{AB} = S_{1AB}. \tag{4.2}$$

Elevando al cuadrado la igualdad de intervalos (4.2):

$$
\begin{aligned}
&(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 + c_{AB}^2 (t_B - t_A)^2 = \\
&(x_{1B} - x_{1A})^2 + (y_{1B} - y_{1A})^2 + (z_{1B} - z_{1A})^2 + c_{1AB}^2 (t_{1B} - t_{1A})^2.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Como: $z_A = z_{1A}$; $z_B = z_{1B}$; $y_A = y_{1A}$; $y_B = y_{1B}$; y

$$x_{1A} = \gamma(x_A - vt_A); \qquad t_{1A} = \gamma\left(t_A - \frac{v}{\sigma^2} x_A\right),$$

se concluye de la igualdad (4.2) que:

$$X^2 - c_{AB}^2 T^2 \quad = \quad \gamma^2 \left(1 - c_{1AB}^2 \frac{v^2}{\sigma^4}\right) X^2 + \gamma^2 (v^2 - c_{1AB}^2) T^2 - 2\gamma^2 v \left(1 - \frac{c_{1AB}^2}{\sigma^4}\right) XT, \tag{4.4}$$

en donde $X = x_B - x_A;\ T = t_B - t_A$.

La igualdad se cumple si los coeficientes de las variables X y T en el miembro derecho son iguales a los coeficientes de esas variables en el miembro izquierdo. El coeficiente de X^2 en el miembro derecho debe valer 1, esto es:

$$\left(1 - \frac{c_{AB}^2 v^2}{\sigma^4}\right)\gamma^2 = \left(1 - \frac{c_{AB}^2 v^2}{\sigma^4}\right) \frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{\sigma^2}} = 1, \quad \text{si} \quad c_{AB}^2 = \sigma^2. \tag{4.5}$$

La igualdad de los coeficientes de en ambos miembros de la ecuación (4.4) implica que:

$$-c_{AB}^2 = \gamma^2 (v^2 - c_{1AB}^2) = \frac{v^2 - c_{1AB}^2}{1 - \dfrac{v^2}{c_{AB}^2}} = -\frac{v^2 - c_{1AB}^2}{v^2 - c_{AB}^2} c_{AB}^2,$$

que se satisface si:

$$c_{AB} = c_{1AB}. \tag{4.6}$$

La igualdad con 0 del coeficiente XT en el lado derecho de (4.4) repite la conclusión dada por (4.5).

Reuniendo las ecuaciones (4.5) y (4.6) se tiene:

$$c_{AB} = c_{1AB} = \sigma. \tag{4.7}$$

Es decir, del postulado P1** emerge que la luz en la dirección AB es una constante universal, invariante frente a dos sistemas de referencia cualesquiera en movimiento relativo con velocidad constante. El valor de esta constante coincide *deductivamente* con σ, lo que marca una diferencia con el planteamiento de LK, en que la igualdad se basa en un acuerdo experimental (hasta donde las incertidumbres experimentales lo permiten).

Si el mismo planteamiento anterior se repite para el rayo que se refleja en B y parte hacia su recepción en A, es decir, si estos dos eventos son observados desde el sistema estacionario y S_1, se habría obtenido una ecuación semejante a (4.7), pero ahora para la luz viajando en el sentido opuesto, $c_{AB} = c_{1AB} = \sigma$. Y, como σ es una constante universal en la dirección AB, se tiene que:

$$c_{AB} = c_{BA} = \sigma = \textit{constante universal en la dirección } AB. \tag{4.8}$$

Para demostrar que la luz se propaga isotrópicamente, considérese (como en el caso del reposo) un tercer punto C, de tal manera que el pulso que sale de A a B, parte también hacia C. Las consideraciones anteriores para el pulso que viaja de A hacia B y de regreso se pueden repetir, sólo cambiando B por C, para llegar a una ecuación como la (4.8), en que sólo hay que sustituir σ_1 en vez de σ, y C por B:

$$c_{AC} = c_{CA} = \sigma = \textit{constante universal en la dirección } AC. \tag{4.9}$$

En realidad, se puede formular un postulado de transitividad parecido al P0* para un sistema estacionario, pero ahora para tres eventos A, B y C, que son observados desde un sistema de referencia en movimiento, del estilo:

8 Postulado (P0**):

Si $S_{1AB} = 0$ y $S_{1AC} = 0$, entonces $S_{1BC} = 0$, para tres eventos luminosos cualesquiera A, B y C en el vacío en un sistema en movimiento S_1, que se mueve a velocidad constante con respecto a un sistema en reposo.

De $S_{1AB} = 0 \Rightarrow d_{1AB} = c_{1AB}(t_{1B} - t_{1A}) \Rightarrow t_{1A} = t_{1B} - \dfrac{d_{1AB} \cdot c_{1AB}}{c_{1AB} \cdot c_{1AB}}$.

Y de $S_{1AC} = 0 \Rightarrow d_{1AC} = c_{1AC}(t_{1C} - t_{1C}) \Rightarrow t_{1C} = t_{1C} - \dfrac{d_{1AC} \cdot c_{1AC}}{c_{1AC} \cdot c_{1AC}}$.

De la igualdad de las t_{1A} se infiere:

$$t_{1C} - t_{1B} = \frac{d_{1AC} \cdot c_{1AC}}{c_{1AC} \cdot c_{1AC}} - \frac{d_{1AB} \cdot c_{1AB}}{c_{1AB} \cdot c_{1AB}}. \tag{4.10}$$

Por otra parte, del P0** se debe cumplir que:

$$S_{1BC} = 0 \Rightarrow t_{1C} - t_{1B} = \frac{d_{1BC} \cdot c_{1BC}}{c_{1BC} \cdot c_{1BC}}. \tag{4.11}$$

De (4.10) y (4.11) se deduce que:

$$\frac{d_{1BC} \cdot c_{1BC}}{c_{1BC} \cdot c_{1BC}} = \frac{d_{1AC} \cdot c_{1AC}}{c_{1AC} \cdot c_{1AC}} - \frac{d_{1AB} \cdot c_{1AB}}{c_{1AB} \cdot c_{1AB}}. \tag{4.12}$$

Ahora bien, se vio que para el triángulo ABC en el sistema estacionario vale la relación vectorial entre sus lados $d_{BC} = d_{AC} - d_{BA}$; una relación semejante se cumple para este triángulo visto (deformado) desde el sistema en movimiento S_1:

$$d_{1BC} = d_{1AC} - d_{1AB}. \tag{4.13}$$

Por lo tanto las ecuaciones (4.12) y (4.13) implican, finalmente, que:

$$c_{1AB} = c_{1AC} = c_{1BC} = \sigma = c, \quad \textit{constante universal.} \tag{4.14}$$

Es decir, la velocidad de la luz es la misma en el sistema estacionario que en el sistema en movimiento relativo (que es arbitrario) y, por esto, c es una constante universal. Se deduce así el AE2 postulado por Einstein en 1905.

(El triángulo ABC se deforma visto desde S_1 porque, mientras las coordenadas x y y de los vértices A, B y C no cambian, no sucede lo mismo con la coordenada z de esos mismos vértices. Con más detalle, el lado AC se transforma en el lado $AC1$, de modo que:

$$\begin{aligned} d_{1AC} &= [(x_{1C} - x_{1A}), (y_{1C} - y_{1A}), (z_{1C} - z_{1A})] = \\ &= [\gamma(x_C - vt_C - x_A + vt_A), (y_C - y_A), (z_C - z_A)] = \\ &= [\gamma(x_C - x_A) - \gamma v(t_C - t_A), (y_C - y_A), (z_C - z_A)]\,, \end{aligned}$$

puesto que, de (4.1):

$$\begin{aligned} z_{1C} - z_{1A} &= z_C - z_A; \quad y_{1C} - y_{1A} = y_C - y_A; \quad x_1 = \gamma(x - vt) \\ &\Rightarrow \quad x_{1C} = \gamma(x_C - vt_C), \quad x_{1A} = \gamma(x_A - vt_A). \end{aligned}$$

Asimismo:

$$d_{1AB} = [\gamma(x_B - x_A) - \gamma v(t_B - t_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A)]\,.$$

Restando una expresión de la otra:

$$d_{1AC} - d_{1AB} = [\gamma(x_C - x_B) - \gamma v(t_C - t_B), (y_C - y_B), (z_C - z_B)] \,.$$

La expresión anterior no es otra que d_{1BC}, con lo que se demuestra (4.13). Es decir el triángulo ABC se ve deformado en el sistema S_1, por γ en $(x_C - x_B)$ y por γ en $-v(t_C - t_B)$.

Conclusiones.

Los postulados aquí planteados para el desarrollo de la teoría de la relatividad especial son equivalentes a los expresados por AE en 1905, con algunas diferencias notables:

i) Las ecuaciones de transformación del tipo de Lorentz, así como la indicación de un límite superior para la velocidad de propagación de señales y partículas, son deducidas de la suposición de que el espacio–tiempo es homogéneo e isótropo (planteamiento de LK);

ii) la identificación del límite superior a la velocidad de propagación de señales y partículas se deduce de dos postulados ya formulados en AE1905 para un sistema en reposo, y otros dos postulados similares para sistemas en movimiento relativo.

Una posible secuencia didáctica para la enseñanza de la teoría de la relatividad especial sería:

a) Definición de la sincronización entre relojes, como en AE1905;

b) presentación de los postulados sobre la sincronización de relojes para un sistema estacionario;

c) deducción de la invariancia isotrópica de la velocidad de la luz en el vacío en un sistema estacionario, y construcción de la malla de Taylor–Wheeler, a partir de los dos postulados anteriores, y de otros dos postulados equivalentes, formulados en términos de intervalos de eventos;

d) deducción de las ecuaciones de transformación del tipo de Lorentz y la existencia de un límite superior universal para la propagación de señales y partículas, de la suposición de la homogeneidad e isotropía del espacio–tiempo (construcción de LK);

e) deducción de la constancia de la velocidad de la luz a partir de los postulados de simetría y transitividad;

f) deducción de la constancia universal de la velocidad de la luz para sistemas en movimiento relativo a velocidad constante, a partir de postulados sobre intervalos entre eventos.

Referencias.

1. **Einstein, A.**, "Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento", en "Einstein 1905: un año milagroso", John Stachel (ed.) Editorial Crítica, Barcelona, segunda edición, 2004.

2. **Einstein, A.**, "Sobre la teoría de la relatividad especial y general", Editorial Altaya, Barcelona, 1999.

3. **Maxwell, J. C.**, "Theory of heat", Editorial Dover, USA, 2001.

4. **Mach, E.**, "The science of mechanics: A critical and historical account of its development", The Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, USA, 1960.

5. **Ingard, U.** and **Kraushaar, W. L.**, "Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas", Editorial Reverté, México, 1972.

6. **Taylor, E. F.** and **Wheeler, J. A.**, "Spacetime Physics", W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1966.

7. **Lee, A. R.** and **Kalotas, T. M.**, *"Lorentz transformations from the first postulate"*, American Journal of Physics, Vol. 43, No. 5, pp. 434–437, 1975.