UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRÁFICAS TRANSITIVAS EN VÉRTICES
VS
GRÁFICAS TRANSITIVAS EN ARISTAS

REPORTE DE SEMINARIO DE TITULACIÓN

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

GERMÁN GUTIÉRREZ MENDOZA

TUTORA: DRA. ANA PAULINA FIGUEROA GUTIÉRREZ
COTUTORA: DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA

2009

Hoja de Datos del Jurado

Formato	Ejemplo
1.Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta	1. Datos del alumno Gutiérrez Mendoza Germán 55 94 56 15 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 095222208
2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	2. Datos del tutor Dra Ana Paulina Figueroa Gutiérrez
3. Datos del cotutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	3. Datos del cotutor Dra Rita Esther Zuazua Vega
4. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	4. Datos del sinodal 1 Dra Isabel Puga Espinosa
5. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	5. Datos del sinodal 2 Dra Bertha Maria Tomé Arreola
6. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	6. Datos del sinodal 3 M en C Alejandro Bravo Mojica
7. Datos del trabajo escrito. Título Número de páginas Año	7. Datos del trabajo escrito Gráficas Transitivas en Vértices VS Gráficas Transitivas en Aristas 74 p 2006

REPORTE DE SEMINARIO DE TITULACIÓN

Gráficas Transitivas en Vértices vs Gráficas Transitivas en Aristas

Germán Gutiérrez Mendoza

A mis padres:

José Luis Gutiérrez, *mi gran mentor en la vida, que con sus consejos me ha guiado a lo largo de éste camino, e*

Irma Mendoza, *una mujer incansable y dedicada, que con su cariño ha sido mi gran apoyo.*

Gracias a ustedes he llegado hasta aquí. Los Amo.

Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a mis asesoras de tesis Paulina Figueroa y Rita Zuazua, por la infinita paciencia y las largas horas de estudio dedicadas a éste trabajo. Y por todo el apoyo que me brindaron.

A mis sinodales, Alejandro Bravo, Isabel Puga y Bertha Tome, por su compromiso y apoyo a éste proyecto.

A mi querida Alma Mater, la **UNAM** y a la **Facultad de Ciencias**, que durante años han sido mi casa y el lugar en el cual además de aprender sobre filosofía y ciencias, he aprendido a ver la vida desde otra perspectiva...Como no te voy a querer, si mi corazón azul es y mi piel dorada siempre te querré!!

A mis amigos y compañeros de la Facultad que de alguna u otra manera me ayudaron a lo largo de éste andar:

Mi *Padawan* Ernesto, por todas las tardes de estudio, a Gasde por la ayudantía, Edgar Noé por su amistad, apoyo y ayuda durante y después de la carrera, al "Comandante 666" Paco por todo el cotorreo y comandancias.

A mi tocayo Germán Valle, por toda la ayuda con el LaTeX, a Claudia López por su ayuda en el pasado.

A mis amigos: Melissa Gage, gracias por todo el apoyo moral, cariño y amistad. Y por ser mi confidente durante todos estos años, algún día te acabaré de contar sobre la Ley Arquimediana.

Edith González, gracias por tu empuje y por no dejarme vencer, sin tu apoyo en aquellos días tal vez hubiera claudicado, y por que aun en la distancia me sigues echando porras...hasta nuestro siguiente encuentro, Norway will be my grave!!

Carlos Zaragoza, por el apoyo y la amistad, gracias por las clases de excel, sigue con tus N.M.S.I.
Milton Solorio, por la amistad, los consejos laborales y la ayuda con el Access.

Y a todos aquellos que de alguna u otra forma influyeron en mi gusto por las matemáticas, y como dicen por ahí: "Las Matemáticas es el lenguaje con que está escrito el Universo".

Dedicatorias

Quiero dedicarle este trabajo a mi familia, por que siempre han estado conmigo en los triunfos y las derrotas y que gracias a su apoyo infinito he llegado tan lejos.

A mi pequeña hermana "Nanis" tu eres el claro ejemplo de empeño y dedicación, estoy orgulloso de ti.

A mi hermano "Chozen" por tu paciencia y apoyo. Por creer en mi y alentarme a seguir en el "rock"...We were, what we are and we shall be!! Up the Hermanos Muerte!!

Finalmente, quiero hacer una dedicatoria especial, para una persona muy especial para mi. A Lorena, quien siempre está a mi lado en las buenas y las malas, gracias por echarme porras, por ser mi apoyo incondicional y por compartir triunfos y derrotas. Gracias por todo éste tiempo y por soñar juntos, eres única en el universo...You rock my world too!! (+)por(+)=(LYE), yo mas.
...Luv ya so much!!!

Ésta cita es para ti:

"Gracias! -Siempre he creído en los números. En las ecuaciones y la lógica que llevan a la razón. Pero, después de una vida de búsqueda me digo, ¿Qué es la lógica? ¿Quién decide la razón? He buscado a través de lo físico, lo metafísico, lo delirante, y he vuelto a empezar. Y he hecho el descubrimiento más importante de mi carrera, el más importante de mi vida.
Sólo en las misteriosas ecuaciones del amor se puede encontrar alguna lógica. Estoy aquí esta noche gracias a tí. Tú eres mi única razón de ser. Eres todas mis razones. ¡Gracias!"
John F. Nash Jr. Premio Novel, Economía 1994

Índice general

Introducción

En el presente trabajo vamos a estudiar al grupo de automorfismos de una gráfica. En particular analizaremos el caso en el que la acción de este grupo actúa transitivamente en los vértices de una gráfica y en sus aristas.

El primer capitulo de la tesis es un resumen de los conceptos fundamentales de la teoría de grupos que se necesitan para realizar el trabajo de la tesis.

En el segundo capítulo se desarrollaron los preliminares de la teoría de las gráficas y se demostró que el conjunto de automorfismos de una gráfica forman un grupo bajo la composición de funciones.

En el capítulo tres observamos cual es la acción del grupo de automorfismos sobre los vértices de la gráfica. Cuando esta acción es transitiva, entonces decimos que la gráfica es transitiva en vértices.

Así también demostaremos algunas proposiciones y teoremas conocidos que nos indican como puede ser la estructura de dichas gráficas. Además dimos ejemplos de familias de gráficas que cumplen con ser transitivas en vértices.

Entre ellas, demostramos que las gráficas de Cayley son transitiva en vértices. Ésta última es una familia muy importante pues son gráficas que se construyen a partir de un grupo finito, su estructura es muy regular y hay numerosos trabajos de investigación en el tema.

Por último, el capítulo cuatro estudia cuando la acción del grupo de automorfismos es transitivo en el conjunto de aristas. Una pregunta natural es ¿cómo se relacionan el ser transitivo en aristas y el ser transitivo en vértices?

Al final del capitulo cuatro se puntualiza que existen gráficas que son transitivas en vértices y no en aristas, y otras que son transitivas en aristas y no en vértices.

Con estos ejemplos también se muestra que muchos de los teoremas que se deducen de ser una gráfica transitiva en vértices no se cumple para las gráficas transitivas en aristas y no en vértices.

Capítulo 1

Preliminares de Álgebra

En este capítulo presentaremos algunos de los conceptos básicos de álgebra que requeriremos para el desarrollo de los siguientes capítulos. Iniciaremos con el concepto de relaciones de equivalencia y particiones de un conjunto y la equivalencia entre las mismas. En la segunda sección recordaremos la definición de grupo y algunos ejemplos clásicos. Terminaremos con las definiciones de homomorfismo y acciones de un grupo en un conjunto.

1.1. Relaciones y Particiones

Sean A y B dos conjuntos.

Definición 1.1 *Una* **relación** *R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.*

Ejemplo 1.1 Si $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{a, b, c\}$, entonces el conjunto de parejas ordenadas $R = \{(2n, a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es una relación entre A y B.

Definición 1.2 *Una* **relación de equivalencia** *en el conjunto A, es un subconjunto R de $A \times A$ tal que satisface las siguientes tres condiciones:*

1. *La pareja $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$, (R es reflexiva);*
2. *Si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$, (R es simétrica);*
3. *Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$, (R es transitiva).*

Ejemplo 1.2 Sea $A = \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$ un entero positivo. Dos enteros x, y son congruentes $mod(n)$, $(x \equiv y\ mod(n))$, si $x - y = \lambda n$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv y\ mod(n)\}$. Vamos a demostrar que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

Prueba.

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0n$, por lo tanto $x \equiv x\ mod(n)$. Entonces, se sigue que $(x, x) \in R$ lo que implica que R es reflexiva.

2. Si $(x, y) \in R$ entonces $x \equiv y\ mod(n)$, por lo que $x - y = \lambda n$, para alguna $\lambda \in \mathbb{Z}$. Equivalentemente, $y - x = (-\lambda)n$, por lo que $y \equiv x\ mod(n)$ y $(y, x) \in R$. Por lo tanto R es simétrica.

3. Supongamos que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $x \equiv y\ mod(n)$ y $y \equiv z\ mod(n)$ lo que implica que $x - y = \lambda_1 n$ y $y - z = \lambda_2 n$, por lo que $x - z = (\lambda_1 - \lambda_2)n$, se sigue que $x \equiv z\ mod(n)$. Por lo tanto $(x, z) \in R$ lo que implica que R es transitiva.

$\blacksquare$

Con ésto hemos probado que en los enteros, la relación de ser congruente es una relación de equivalencia.

Definición 1.3 *Una* **partición** *del conjunto A es una colección de subconjuntos de A, $A_1, A_2, \ldots, A_s$, tal que*

1. $\bigcup_{i=1}^{s} A_i = A$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$.

Ejemplo 1.3 Sea $A = \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$ un entero positivo. Para cada i, $0 \leq i \leq n-1$ definamos el conjunto

$$\bar{i} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = \lambda n + i, \lambda \in \mathbb{Z}\}.$$

Entonces la colección de subconjuntos de $\mathbb{Z}$, $\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ son una partición de $\mathbb{Z}$ como veremos a continuación.

1. Sea $a \in \mathbb{Z}$ y r el residuo de dividir a entre n entonces $0 \leq r \leq n - 1$ y $a = \lambda n + r$ por lo que $a \in \bar{r}$. Por lo tanto $\bigcup_{i=0}^{n-1} \bar{i} = \mathbb{Z}$.

2. Como el residuo es único, entonces $\bar{i} \cap \bar{j} = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

La siguiente observación nos demuestra que los conceptos de partición y relación de equivalencia no son tan ajenos como podríamos pensar.

Observación 1.1 *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$ un entero positivo, entonces $a \equiv b \; mod(n)$ si y sólo si $a, b \in \bar{i}$ para alguna $0 \leq i \leq n-1$.*

Prueba.
$\Rightarrow$) Si $a \equiv b \; mod(n)$ entonces $a - b = \lambda n$. Además al dividir los enteros a y b entre n tenemos que $a = \lambda_1 n + r_1$ y $b = \lambda_2 n + r_2$ donde $0 \leq r_1, r_2 \leq n-1$.

Por un lado $a - b = (\lambda_1 - \lambda_2)n + (r_1 - r_2)$, pero por hipótesis $a - b = \lambda n$, y como $|r_1 - r_2| < n$ se concluye que $r_1 - r_2 = 0$ lo que implica que $r_1 = r_2$. Por lo tanto $a \in \bar{r_1}$ y $b \in \bar{r_1}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a, b \in \bar{i}$ para $0 \leq i \leq n-1$. Por definición $a = \lambda_1 n + i$ y $b = \lambda_2 n + i$, lo que implica que $a - b = (\lambda_1 - \lambda_2)n$. Por lo que a es congruente con b módulo n. ■

1.1.1. Equivalencia entre las particiones de un conjunto A y sus relaciones de equivalencia

En el siguiente lema veremos que la observación anterior es un caso particular de la estrecha relación que siempre existe entre las particiones y las relaciones de equivalencia de un conjunto.

Para A un conjunto, definamos los conjuntos:

$$\begin{aligned} R_A &= \{ \text{ relaciones de equivalencia de } A\} \\ P_A &= \{ \text{ particiones de } A\} \end{aligned}$$

Lema 1.1 *Sea $R \in R_A$, para cada $a \in A$ se define el conjunto*

$$A_a = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}.$$

Entonces la colección $\{A_a\}_{a \in A}$ es una partición de A.

Prueba. Demostraremos que $\{A_a\}_{a\in A}$ cumple las dos condiciones necesarias para ser una partición de A.

(1) Como $R \in R_A$ es reflexiva, $(a,a) \in R$, para toda $a \in A$, lo que implica que $a \in A_a$, entonces $A_a \neq \emptyset$ para todo $a \in A$. Claramente se tiene que $A = \bigcup_{a\in A} A_a$.

Antes de probar que si dos conjuntos A_a, A_b no son iguales su intersección es vacía, veremos la siguiente observación.

Observación 1.2 *Si* $(a,b) \in R$ *entonces* $A_a = A_b$.

Supongamos que $c \in A_a$ y $(a,b) \in R$. Como $(a,c) \in R$ entonces $(c,a) \in R$ y $(a,b) \in R$, lo que implica que $(c,b) \in R$, se sigue que $c \in A_b$. Por lo tanto $A_a \subseteq A_b$.

Ahora, si $c \in A_b$ y $(a,b) \in R$. Se tiene que $(b,c) \in R$ y $(c,b) \in R$ como además $(b,a) \in R$ tenemos que $(c,a) \in R$ y $(a,c) \in R$, lo que implica que $c \in A_a$ y se sigue que $A_b \subseteq A_a$. Por lo tanto $A_a = A_b$.

(2) Supongamos $A_a \neq A_b$ y $c \in A_a \cap A_b$.

Como $c \in A_a \cap A_b$ se cumple que $(a,c) \in R$ y $(b,c) \in R$, por la observación 1.2, se tiene que $A_a = A_c$ y $A_b = A_c$ por lo que $A_a = A_b$, lo cual es una contradicción. Entonces se tiene que $A_a \cap A_b = \emptyset$.

Por lo tanto $\{A_a\}_{a\in A}$ es una partición. ■

Lema 1.2 *Sea* $P \in P_A$ *y* $P = \{P_A\}$, *definimos la siguiente relación* $R \in A$

$$(a,b) \in R \text{ si existe } P_i \in P \text{ tal que } a,b \in P_i.$$

Entonces R *es una relación de equivalencia de* A, *es decir*, $R \in R_A$.

Prueba.

(1) Como P es una partición de A entonces para todo $a \in A$ existe un P_i tal que $a \in P_i$, entonces $(a,a) \in R$ para todo $a \in A$.

(2) Si $(a,b) \in R$ entonces existe P_i tal que $a,b \in P_i$ por lo que $(b,a) \in R$.

(3) Si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces existe P_i tal que $a,b \in P_i$ y existe P_j tal que $b,c \in P_j$.
Como P es una partición $b \in P_i \cap P_j$, por lo que $P_i = P_j$, lo que implica que $a,b,c \in P_i$ y $(a,c) \in R$. Por lo tanto R es una relación de equivalencia. ■

Teorema 1.1 *Sea A un conjunto, si*

$$\begin{aligned} R_A &= \{ \text{ relaciones de equivalencia de } A\} \\ P_A &= \{ \text{ particiones de } A\} \end{aligned}$$

entonces existe una función biyectiva

$$\begin{aligned} \varphi &= R_A \to P_A \\ & \quad R \longmapsto P \end{aligned}$$

Prueba. Por el lema 1.1 si $\varphi(R_1) = \varphi(R_2)$ entonces se tiene que para todo $a \in A$

$$\begin{aligned} A_a^1 &= \{b \in A \mid (a,b) \in R_1\} \\ &= \{b \in A \mid (a,b) \in R_2\} \\ &= A_a^2 \end{aligned}$$

lo que implica que $R_1 = R_2$ y la función φ es inyectiva. Por el lema 1.2 la función φ es suprayectiva. Por lo tanto φ es una función biyectiva. ■

Observe que los ejemplos 1.2 y 1.3 verifican el teorema anterior.

1.2. Grupos

Definición 1.4 *Un* **grupo** *G es un conjunto con una operación binaria $* : G \times G \to G$, tal que cumple con lo siguiente:*

- G_1 : *La operación binaria es asociativa.*
- G_2 : *Existe un elemento $e \in G$ llamado el elemento identidad, tal que para todo $g \in G$, $g * e = e * g = g$.*
- G_3 : *Para todo $g \in G$ existe un elemento $g' \in G$ llamado el inverso de g, tal que $g * g' = g' * g = e$.*

En general la operación binaria $*$ es de dos tipos: aditiva o multiplicativa, $* \in \{+, \cdot\}$.

Si $* = +$ entonces decimos que G es un **grupo aditivo** y la operación binaria está definida como:

$$
\begin{aligned}
+ \ : \ & G \times G \to G \\
& (g_1, g_2) \mapsto g_1 + g_2
\end{aligned}
$$

El elemento identidad se denota como cero, $e = 0$ y el inverso de $g \in G$ se escribe como $-g$.

Si la operación binaria $* = \cdot$ entonces decimos que G es un **grupo multiplicativo**, y la operación binaria está definida como:

$$
\begin{aligned}
\cdot \ : \ & G \times G \to G \\
& (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2
\end{aligned}
$$

El elemento identidad se denota como uno, $e = 1$ y el inverso de $g \in G$ se escribe como g^{-1}.

A continuación recordaremos tres de las familias más conocidas de grupos: el grupo de permutaciones, el grupo de enteros módulo n y los grupos cíclicos.

1.2.1. El grupo de permutaciones.

Recordemos que una **permutación** de un conjunto A es una función biyectiva de A en A.

El conjunto de las permutaciones de un conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se denota por S_n.

Como toda función biyectiva tiene inversa y la composición de funciones es asociativa, el conjunto S_n es un grupo donde el elemento identidad es la función identidad.

Además sabemos que para un conjunto de n elementos el número de permutaciones o funciones biyectivas es $n!$. Por lo que el grupo de permutaciones S_n tienes n factorial elementos.

Veamos con más detalle el caso particular de $n = 3$, es decir el grupo de permutaciones de un conjunto con tres elementos.

Sea $X = \{1, 2, 3\}$, vamos a estudiar el grupo S_3.

Notación: Dada una función biyectiva $f : A \to A$ con $A = a_1, a_2, \cdots, a_t$ usaremos la siguiente notación:

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_t \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_t) \end{pmatrix}$$

A continuación listamos las seis permutaciones del conjunto $X = \{1, 2, 3\}$.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ \rho_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \rho_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que si definimos a ϵ como la permutación identidad, σ y τ como las permutaciones siguientes:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces el grupo S_3 también se puede escribir como

$$S_3 = \left\{\epsilon, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\right\}$$

ya que un cálculo simple demuestra que

$$\epsilon = \rho_1, \quad \sigma = \rho_4, \quad \tau = \rho_3, \quad \sigma^2 = \rho_5, \quad \tau\sigma = \rho_6, \quad \tau\sigma^2 = \rho_2.$$

Sabemos que existen dos maneras de presentar a un conjunto, una es por numeración o extensión, que es cuando se listan todos los elementos del conjunto y la otra es la forma descriptiva, la cual da una fórmula o condiciones con las cuales se puedan decir quienes son sus elementos. Similarmente si tenemos un grupo, podemos describirlo numerando todos sus elementos o dando una forma descriptiva.

Para S_3 la forma por numeración sería:

$$S_3 = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6\}.$$

Y la forma descriptiva:

$$S_3 = \left\{\sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = \epsilon \ y \ \sigma\tau\sigma = \tau\right\}.$$

En general, si un grupo se da en la forma descriptiva, se dice que está dado por **generadores** y **relaciones**.

Para S_3 los generadores son σ y τ y las relaciones son $\sigma^3 = \tau^2 = \epsilon$ y $\sigma\tau\sigma = \tau$.

Se puede afirmar que si dos grupos tienen el mismo número de generadores y satisfacen las mismas relaciones, entonces los dos grupos van a ser esencialmente el mismo.

1.2.2. Los grupos $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_p^*$.

El segundo grupo que estudiaremos es el grupo $\mathbb{Z}_n$ cuyos elementos son las clases de equivalencia

$$\begin{array}{rcl} \overline{0} & = & \{x \mid x \equiv 0 \ mod \ n\} \\ \overline{1} & = & \{x \mid x \equiv 1 \ mod \ n\} \\ & \vdots & \\ \overline{n-1} & = & \{x \mid x \equiv n-1 \ mod \ n\} \end{array}$$

Es decir, $\mathbb{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$.

En el conjunto $\mathbb{Z}_n$ tenemos definidas dos operaciones binarias asociativas:

La operación aditiva $\overline{s} + \overline{t} = \overline{s+t}$ y la operación multiplicativa $\overline{s} \cdot \overline{t} = \overline{s \cdot t}$.

Demostraremos que con estas operaciones $\mathbb{Z}_n$ es un grupo aditivo pero no multiplicativo.

El elemento $\overline{0}$ satisface que $\overline{0+a} = \overline{a}$, $\forall\ \overline{a} \in \mathbb{Z}_n$, por lo tanto es el elemento identidad. Por otro lado, para cada $a \in \mathbb{Z}_n$ sea $a' = -a$ entonces $\overline{a} + \overline{a'} = \overline{a+a'} = \overline{a+(-a)} = \overline{0}$ por lo tanto $\overline{-a} = -\overline{a}$.

Es decir, el conjunto $\mathbb{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$ tiene estructura de grupo aditivo.

Ejemplo 1.4 Para $\mathbb{Z}_5$ sus elementos son:

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{\ldots,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\}\\
\overline{1} &= \{\ldots,-9,-4,1,6,11,16,\ldots\}\\
\overline{2} &= \{\ldots,-8,-3,2,7,12,17,\ldots\}\\
\overline{3} &= \{\ldots,-7,-2,3,8,13,18,\ldots\}\\
\overline{4} &= \{\ldots,-6,-1,4,9,14,19,\ldots\}
\end{aligned}$$

Al sumar y multiplicar las relaciones de equivalencia $\bar{2}$ y $\bar{4}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\bar{2}+\bar{4} &= \overline{2+4}=\overline{6}=\bar{1}\ mod(5)\\
\bar{2}\cdot\bar{4} &= \overline{2\cdot 4}=\overline{8}=\bar{3}\ mod(5)
\end{aligned}$$

Observemos que para la operación binaria asociativa $\overline{s}\cdot\overline{t}=\overline{s\cdot t}$ la clase del uno $\overline{1}$ juega el papel del elemento identidad ya que $\overline{s}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{s}=\overline{s}$ para todo $0\leq s\leq n-1$.

Un elemento $\overline{s}$ de $\mathbb{Z}_n$ tiene **inverso multiplicativo** si existe $\overline{t}$ tal que $\overline{s}\cdot\overline{t}=\overline{1}$.

Es fácil ver que por la definición de multiplicación de los elementos de $\mathbb{Z}_n$, el elemento $\overline{0}$ no tiene inverso multiplicativo, por lo que con esta operación binaria el conjunto $\mathbb{Z}_n$ no tiene estructura de grupo multiplicativo.

La pregunta natural es si habrá otros elementos de $\mathbb{Z}_n$ que tampoco tienen inverso multiplicativo o bastará con "quitar" al cero para tener un grupo multiplicativo?

La respuesta nos la da el siguiente resultado: Un elemento a tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}_n$ si y solo si $(a,n)=1$. Por lo tanto, si n es un número primo, excepto el cero, todos sus elementos tienen inverso multiplicativo. Con lo cual podemos definir un nuevo grupo multiplicativo asociado a $\mathbb{Z}_n$.

Definición 1.5 *Sea p un número primo, se define a $\mathbb{Z}_p^*$ como:*

$$\mathbb{Z}_p^*=\{\overline{1},\overline{2},\overline{3},\ldots,\overline{p-1}\}$$

Proposición 1.1 *Sea p un número primo, entonces $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo multiplicativo.*

Prueba. Sea $\mathbb{Z}_p^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$. Para todo $a \in \{1, ..., p-1\}$, $(a, p) = 1$ por lo que todo elemento de $\mathbb{Z}_p^*$ tiene inverso multiplicativo. Como la operación binaria es asociativa y la clase del uno es el elemento neutro, $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo multiplicativo. ■

Si n no es un primo, podemos considerar el conjunto formado por todas las unidades de $\mathbb{Z}_n$, es decir, los elementos que tienen inverso multiplicativo y también tendremos un grupo, usualmente denotado como $\mathbb{Z}_n^*$.

1.3. Grupos Cíclicos

Definición 1.6 *Un* **grupo cíclico** *es un grupo generado por un elemento a que se ve como $C = \{1, a, a^2, ..., a^{n-1}, a^n, ..\} = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.*

Observación 1.3 *Un grupo cíclico es finito de orden n si puede escribirse como $C_n = \{1, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ con la relación $a^n = 1$.*

Un grupo cíclico es infinito si no existe $n \geq 1$ tal que $a^n = 1$.

Ejemplo 1.4 La ecuación $x^4 - 1$ tiene cuatro raices en el campo de los complejos, $\{1, -1, i, -i\}$, donde $i^2 = -1$. Observemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = i^0 = 1$. Por lo tanto, el conjunto $G = \{1, -1, i, -i\} = \{i^0, i^1, i^2, i^3\}$ con la multiplicación usual de los números comlejos es un grupo cíclico de orden 4 con generador $a = i$.

Los grupos cíclicos juegan un papel muy importante en la teoría de grupos ya que tienen propiedades muy bonitas e interesantes. Por ejemplo, todo grupo cíclico es **abeliano**, es decir, su operación binaria es conmutativa. Otra propiedad de los grupos cíclicos es que cualquier subgrupo de un cíclico vuelve a ser cíclico.

1.3.1. Homomorfismos de grupos

Definición 1.7 *Sean G, H dos grupos y $\phi : G \to H$ una función. Entonces:*

1. *ϕ es un* **homomorfismo** *de grupos si para todo $a, b \in G$ se cumple que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.*

2. *Si además ϕ es biyectiva decimos que el homomorfismo es un* **isomorfismo**.

3. *Un* **automorfismo** *de G es un isomorfismo de grupos ϕ donde $H = G$.*

Con la definición de homomorfismos de grupos, podemos tener un nuevo ejemplo de grupo que es en general, muy difícil de estudiar, pero que si se conoce es de gran ayuda, nos referimos al grupo de automorfismos de un grupo, el cual definimos a continuación.

Definición 1.8 *Sea G un grupo, el* **conjunto de automorfismos** *de G se define como*

$$Aut(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ es un isomorfismo de grupos.}\}$$

No es difícil ver que definiendo la multiplicación como la composición de funciones $Aut(G)$ tiene una estructura de grupo multiplicativo donde el elemento identidad es la función identidad.

El siguiente lema nos muestra que los homomorfismos de grupos preservan al elemento identidad e inversos.

Lema 1.3 *Si $\phi : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos. Entonces $\phi(1) = 1$ y $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$ para todo $a \in G$.*

Prueba. Como ϕ es homomorfismo de grupos, $\phi(1) = \phi(1{,}1) = \phi(1)\phi(1)$, multiplicando en ambos lados de la igualdad por $\phi(1)^{-1}$ tenemos que $\phi(1) = 1$.

Por otro lado, $\phi(a^{-1})\phi(a) = \phi(a^{-1}a) = \phi(1) = 1$, por lo que $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$. ■

Ejemplo 1.5 Sea G un grupo y $g \in G$. La función $i_g : G \to G$ definida como $i_g(a) = g^{-1}ag$ para todo $a \in G$, es siempre un automorfismo de G conocido como la conjugación por g.

Prueba. Necesitamos demostrar que i_g es biyectiva y es un homomorfismo de grupos.

(1) Supongamos que $i_g(a) = i_g(b)$, entonces $g^{-1}ag = g^{-1}bg$, multiplicando a la izquierda de ambos lados de la igualdad por g, se tiene que $ag = bg$, multiplicando por la derecha por el inverso de g, se tiene que $a = b$, por lo que la función es inyectiva.

(2) Sea $a \in G$, entonces $g^{-1}(gag^{-1})g = a = i_g(gag^{-1})$. Por lo tanto la función es suprayectiva y en consecuencia biyectiva.

Únicamente nos falta ver que i_g es un homomorfismo de grupos, pero

$$i_g(ab) = g^{-1}(ab)g = g^{-1}(ag^{-1}gb)g = (g^{-1}ag)(g^{-1}bg) = i_g(a)i_g(b).$$

Por lo tanto i_g es un automorfismo de G. ■

Como mencionamos en la sección anterior, el grupo de permutaciones y los grupos cíclicos son muy importantes, esto puede verse en los resultados de teoría de los grupos que a continuación mencionamos.

1) Teorema de Cayley: Todo grupo de orden n es isomorfo a un subgrupo de S_n.

2) Sea G un grupo cíclico, si G tiene un número finito de elementos entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$; por otro lado, si G es infinito entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

1.4. Acciones de un grupo G en un conjunto $X \neq \emptyset$

A continuación daremos dos definiciones de acciones de un grupo G en un conjunto X y demostraremos que ambas son equivalentes.

Definición I: Una **acción de un grupo** G en un conjunto $X \neq \emptyset$ es una función

$$\begin{aligned} f \ : \ & G \times X \to X \\ & (g,x) \mapsto f(g,x) \end{aligned}$$

tal que

1. $f(1,x)$=x para toda $x \in X$
2. $f(gh,x) = f(g,f(h,x))$ para toda $g,h \in G$ y $x \in X$

es decir,

$$\begin{aligned} f(gh,x) &= f(g,f(h,x)) \\ (gh)x &= g(hx) \end{aligned}$$

donde $f(h, x) \in X$ y $gh \in G$.

Definición II: Una acción del grupo G a un conjunto $X \neq \emptyset$, es un homomorfismo de grupos $\varphi : G \to S_X$.

Para ver que la Definición I y la Definición II son equivalentes, demostraremos que dada $f : G \times X \to X$ que satisface la definición I, existe $\varphi : G \to S_X$ que satisface la definición II y viceversa.

Prueba.

I. Sea $f : G \times X \to X$ que satisface la definición I, definamos $\varphi : G \to S_X$ como $\varphi(g)(x) = f(g, x)$ para todo $g \in G, x \in X$.

Supongamos que $\varphi(g)(x) = \varphi(g)(y)$, como f es función, para toda $g \in G$ tenemos,

$$\begin{aligned} f(g^{-1}, \varphi(g)(x)) &= f(g^{-1}, \varphi(g)(y)) \\ f(g^{-1}, f(g, x)) &= f(g^{-1}, f(g, y)) \\ f(g^{-1}g, x) &= f(g^{-1}g, y) \\ f(1, x) &= f(1, y) \\ x &= y \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(g)$ es inyectiva.

Para $y \in X, g \in G$ definimos $x = f(g^{-1}, y)$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi g(x) &= f(g, x) \\ &= f(g, f(g^{-1}, y)) \\ &= f(gg^{-1}, y) \\ &= f(1, y) \\ &= y \end{aligned}$$

Por otro lado, si $y = f(g, x)$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(g^{-1}) &= f(g^{-1}, y) \\ &= f(g^{-1}, f(g, x)) \\ &= f(g^{-1}g, x) \\ &= f(1, x) \\ &= x \end{aligned}$$

Con lo que hemos demostrado que $\varphi(g)$ es suprayectiva y en consecuencia biyectiva. Es decir, para toda $g \in G$, $\varphi(g) \in S_X$.

Sólo nos falta demostrar que φ es un homomorfismo de grupos.

Sean $g, h \in G$, entonces, $\varphi(gh)(x) = f(gh, x)$ para toda $x \in X$.

Por otro lado,

$(\varphi(g)\varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = (\varphi(g))(f(h, x)) = f(g, f(h, x)) = f(gh, x)$.

Por lo tanto $\varphi : G \to S_X$ es un homomorfismo de grupos.

II. Ahora supongamos que tenemos $\varphi : G \to S_X$ homomorfismo de grupos.

Definimos $f : G \times X \to X$ como $f(g, x) = \varphi(g)(x)$ para todo $g \in G, x \in X$.

Por definición $f(1, x) = \varphi(1)(x)$, como φ es homomorfismo de grupos $\varphi(1) = 1$, por lo tanto, para toda $x \in X$, tenemos que $f(1, x) = \varphi(1)(x) = x$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(gh, x) &= \varphi(gh)(x) \\ &= (\varphi(g)\varphi(h))(x) \\ &= \varphi(g)(\varphi(h)(x)) \\ &= \varphi(g)(f(h, x)) \\ &= f(g, f(h, x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $f : G \times X \to X$ satisface las condiciones de la definición I.

■

Ejemplos de acciones.

- Si $X = G$, el grupo G actúa en si mismo de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} f \ : \ & G \times G \to G \\ & (a, g) \mapsto aga^{-1} \end{aligned}$$

- Si H es subgrupo de G entonces H actúa en $X = G$, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} f \ : \ & H \times G \to G \\ & (h, g) \mapsto hg \end{aligned}$$

Observemos que en general, el grupo G no actúa en sus subgrupos.

Ahora, si G actúa en el conjunto X a través de la función $f : G \times X \to X$, se puede definir una relación de equivalencia en X de la siguiente forma:

$$x, y \in X, x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } y = f(g, x).$$

La cual nos permite definir el siguiente concepto.

Definición 1.9 *Sea f una acción del grupo G en el conjunto X, la* **órbita** *de x en G es el conjunto,*

$$[x]_G = \{y \in X \mid x \sim y\} = \{y \in X \mid y = f(g, x) \ p.a \ \ g \in G\}.$$

Definición 1.10 *Sea G un grupo y φ una acción del grupo de autormofismos de G en G, dada como:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & Aut(G) \times G & \longrightarrow & G \\ & (f, g) & \longmapsto & f(g) \end{array}$$

Se dice que φ es una **acción transitiva** *si para todo $g, g' \in G$ existe $f \in Aut(G)$ tal que $f(g) = g'$.*

Estos conceptos serán utilizados y ejemplificados en los capítulos tres y cuatro.

Capítulo 2

Introducción a la Teoría de Gráficas

En éste capítulo expondremos los conceptos básicos de la Teoría de Gráficas que se utilizarán para desarrollar los temas de los siguientes capítulos.

2.1. Gráficas

Sea V un conjunto, denotaremos por $\binom{V}{2}$ al conjunto $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.

Definición 2.1 *Una* ***gráfica simple*** G*, es una pareja de conjuntos* $(V(G), E(G))$*, donde* $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$*. Se dice que el conjunto* $V(G)$ *es el conjunto de vértices de* G *y* $E(G)$ *es el conjunto de aristas de* G*.*

Escribiremos $u \sim v$ (resp. $u \nsim v$) si $\{u, v\} \in E(G)$ (resp. $\{u, v\} \notin E(G)$). En algunas ocasiones denotaremos a la arista $\{u, v\}$ por uv.

En este trabajo sólo nos enfocaremos a estudiar las gráficas para las cuales $V(G)$ es un conjunto finito. Para abreviar, se dirá que G es una gráfica para referirse a que G es una gráfica simple y finita.

El siguiente es un dibujo de una gráfica en la que representamos a los vértices con puntos y a cada arista uv con el segmento de recta con extremos u y v.

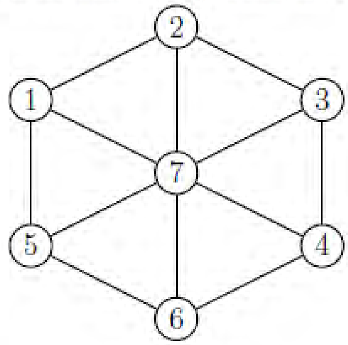


Figura 2.1

Notemos que si G es una gráfica simple, $v \nsim v$, puesto que $\{v\} \notin \binom{V}{2}$. Además, para cada par de vértices $u, v \in V(G)$, existe un único conjunto $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ que los contiene. El siguiente es un ejemplo de una gráfica que no es simple.

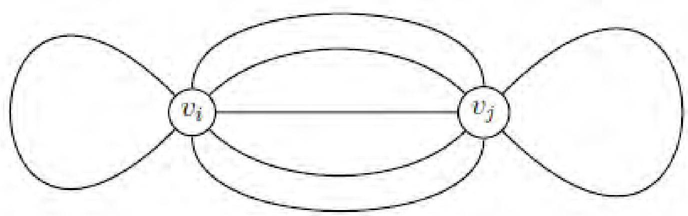


Figura 2.2

Definición 2.2 *Sea G una gráfica, el* ***orden*** *de G, $o(G)$, es la cardinalidad del conjunto de vértices de G. El* ***tamaño*** *de G, T_G, es la cardinalidad de sus aristas.*

En el ejemplo de la figura 2.1, la gráfica que se muestra tiene orden 7 y tamaño 12.

Definición 2.3 *Sea G una gráfica, decimos que G' es una* ***subgráfica*** *de G si $V(G') \subseteq V(G)$ y $E(G') \subseteq E(G)$.*

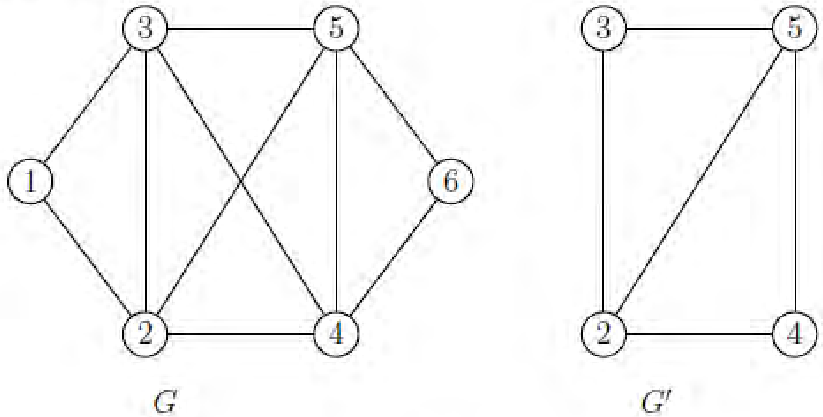


Figura 2.3

Definición 2.4 *Una subgráfica G' de una gráfica G es* ***generadora*** *si $V(G') = V(G)$.*

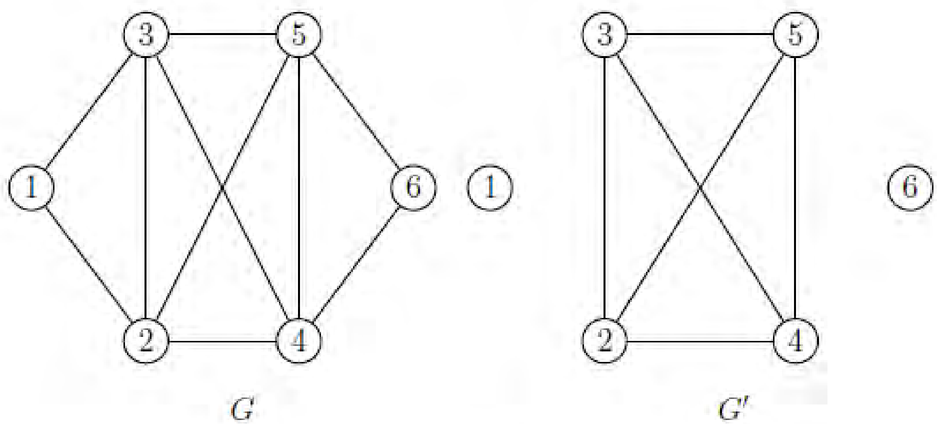
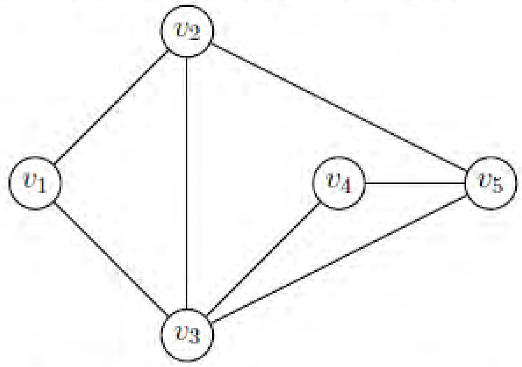


Figura 2.4

Definición 2.5 *Una subgráfica G' de una gráfica G es* ***inducida****, si para todo $u, v \in V(G')$, se tiene que $uv \in E(G')$ si y solo si $uv \in E(G)$.*

Definición 2.6 *Sea S un subconjunto de los vértices de una gráfica G. La gráfica* ***inducida por** S* ***en** G, $G[S]$, es la subgráfica inducida de G que tiene como vértices a S.*

Sea G la gráfica que se muestra en la siguiente figura



La subgráfica inducida en G por $S = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, es:

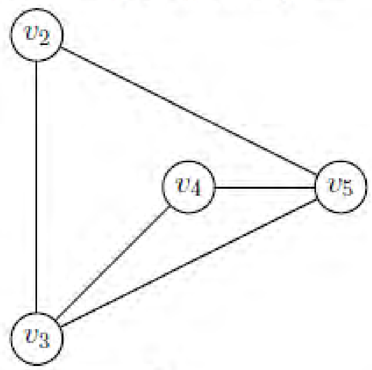


Figura 2.5

Definición 2.7 *Sea $n \in \mathbb{N}$, la* ***gráfica completa*** *con n vértices, K_n, es aquella cuyo orden es n y cuyo conjunto de aristas es $\binom{V}{2}$.*

Proposición 2.1 *El tamaño de K_n es $\frac{n(n-1)}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba. Cada vértice $v \in V(K_n)$ es adyacente a los $n-1$ vértices restantes. Entonces,

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

ya que $uv = vu$.

■

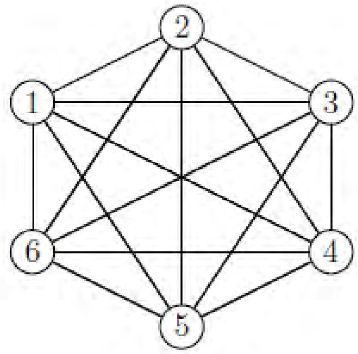


Figura 2.6 K_6

Definición 2.8 *Sean G una gráfica y $X \subseteq V(G)$. El conjunto X es* ***independiente*** *si la subgráfica inducida por X en G, $G[X]$, cumple que $E(G[X]) = \emptyset$.*

Definición 2.9 *Una gráfica G es* ***bipartita*** *si existen A, B subconjuntos de $V(G)$, tales que, $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y tanto A como B son conjuntos independientes. En ocasiones escribiremos $G = (A, B)$.*

Decimos que la gráfica bipartita, $G = (A, B)$, es **completa** si se cumple que $uv \in E(G(A, B))$ si y sólo si $u \in A$ y $v \in B$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, denotamos por $K_{m,n}$ a la bipartita completa que cumple que $|A| = m$, $|B| = n$.

Definición 2.10 *Sea G una gráfica, la* ***vecindad*** *de $v \in V(G)$, es el conjunto $N_G(v) = \{w \mid vw \in E(G)\}$.*

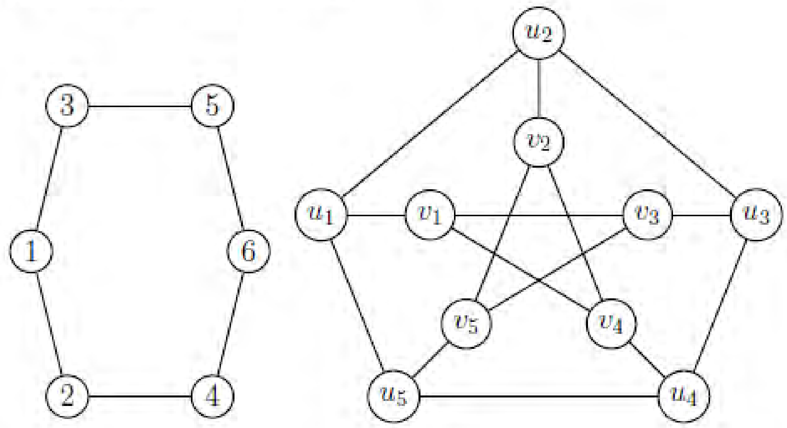
Definición 2.11 *El* ***grado del vértice*** *$u \in V(G)$, denotado por $d(u)$, es la cardinalidad de $N_G(u)$.*

La **vecindad cerrada** de v, denotada por $N_G[v]$, es la unión de la vecindad de $N_G(v)$ con $\{v\}$ y su cardinalidad es:

$$|N_G[v]| = d(v) + 1.$$

Definición 2.12 *Sea G una gráfica, se dice que G es* ***r-regular*** *si $d(u) = r$ para todo $u \in V(G)$.*

Notemos que en particular K_n es $n-1$-regular. En las siguientes figuras se ilustran gráficas que son regulares.



2-regular *3-regular*

Figura 2.7

2.2. Caminos y Trayectorias

Definición 2.13 *Un* ***paseo*** *en una gráfica G es una sucesión finita de vértices de G, $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $k \in \mathbb{N}$, que cumple que $v_i \sim v_{i+1}$ para $1 \leq i \leq k-1$.*

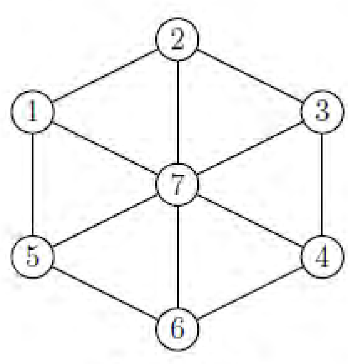


Figura 2.8

Por ejemplo, en la gráfica de la figura 2.8 un paseo es:

$$\mathscr{P} = (1, 2, 7, 3, 4, 7, 3, 7, 5, 6)\,.$$

Notemos que en un paseo se pueden repetir vértices y aristas. En el caso del paseo P, el vértice 7 y la arista $\{7, 3\}$ aparecen más de una vez.

Definición 2.14 *Un* ***camino*** *en una gráfica G es un paseo $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $v_i v_{i+1} \neq v_j v_{j+1}$ para $i \neq j$ con $0 \leq i, j \leq k-1$.*

Volvamos al ejemplo de la figura 2.8 y notemos que

$$\mathscr{C} = (1, 2, 7, 3, 4, 7, 5, 6)$$

es un camino. Es claro que un camino es un paseo en el que se pueden repetir vértices pero no aristas. Por ejemplo, en $\mathscr{C}$ sólo se repite el vértice 7.

Definición 2.15 *Una* ***trayectoria*** *de una gráfica G es un camino de G, $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$.*

Un ejemplo de una trayectoria que va del vértice 1 al 5 en la gráfica de la figura 2.8 es:

$$\mathscr{T} = (1, 2, 3, 7, 4, 6, 5)\,.$$

Notemos que una trayectoria es un camino que no repite vértices ni aristas. Diremos que una trayectoria (resp. camino), T, es una uv-trayectoria (resp. uv-camino) de G si $T = (u = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1} = v)$, $k \in \mathbb{N}$.

Definición 2.16 *Sea $k \in \mathbb{N}$, la* ***longitud*** *de la trayectoria $(v_0, \ldots, v_{k-1})$ es k. A una trayectoria de longitud k se le denotará por P_k.*

Definición 2.17 *Un* ***ciclo*** *$\mathscr{C}$ de una gráfica G es una trayectoria de G, $(v_0, \ldots, v_{k-1})$, tal que $v_0 \sim v_{k-1}$, con $k \in \mathbb{N}$.*

Un ejemplo de un ciclo en la gráfica de la figura 2.9 es:

$$\mathscr{C} = (1, 2, 7, 6, 5, 1)\,.$$

Definición 2.18 *La* ***longitud*** *del ciclo $\mathscr{C} = (v_0, \ldots, v_{k-1})$ es k, donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geq 3$. A un ciclo de longitud k se le denotará por $\mathscr{C}_k$.*

Un ejemplo de un ciclo de longitud 6 para la gráfica de la figura 2.9 es:

$$\mathscr{C}_6 = (1, 2, 3, 4, 6, 5, 1)\,.$$

Definición 2.19 *Sea $\mathscr{C}$ un ciclo de longitud mínima en la gráfica G. Si m es la longitud de $\mathscr{C}$, entonces se dice que m es el* ***cuello*** *de G, y se le denota como $c(G)$.*

Teorema 2.1 *Sean G una gráfica y $u, v \in V(G)$. Existe un uv-camino en G si y sólo si existe una uv-trayectoria en G.*

Prueba.
Sea $C = (u = v_1, \ldots, v_k = v)$ el camino mas corto de u a v en G.

Si existen $i, j \in \{0, \ldots, k-1\}$ tales que $u_i = u_j$ y $i \neq j$, entonces podemos encontrar el ciclo

$$\mathscr{C} = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j\}$$

y formar el siguiente camino de longitud estrictamente menor a C:

$$C' = (v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_k)\,.$$

Ésto contradice que C sea de longitud mínima. Por lo tanto, C es una trayectoria.

Por otro lado, toda trayectoria es un camino. ∎

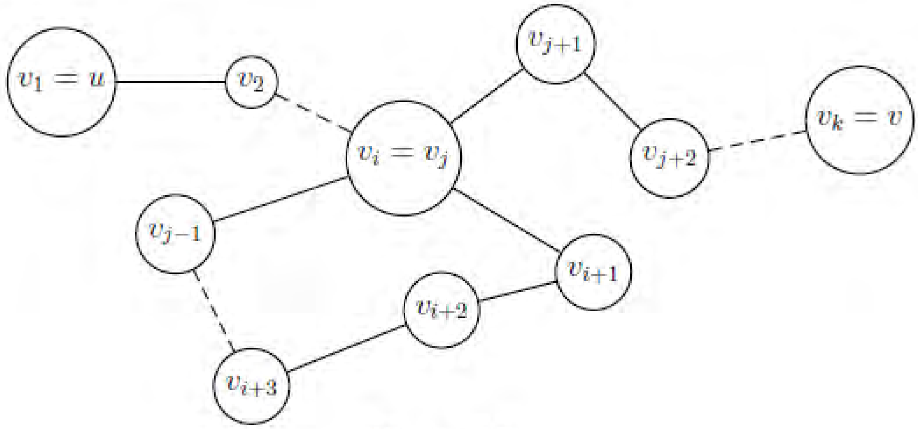


Figura 2.9

2.3. Conexidad

Definición 2.20 *Sea G una gráfica. Se dice que G es* ***conexa*** *si, para todo par de vértices distintos, $v, v' \in V(G)$, existe una vv' − trayectoria que los une. Es decir, existe una trayectoria $(v = v_1, v_2, \ldots, v_k = v')$ en G.*

Definición 2.21 *Sean G y C gráficas. Decimos que C es una* ***componente conexa*** *de G si es máxima con la propiedad de ser una subgráfica conexa de G.*

Notemos que G es conexa si y sólo si existe una única componente.

Definición 2.22 *Una gráfica G es* ***disconexa*** *si el número de componentes conexas es mayor que uno.*

Por ejemplo, la gráfica de la figura 2.11, tiene como componentes conexas a G_1, G_2, G_3 y G_4. Donde

$$G_1 = G[\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}],$$

$$G_2 = G[\{u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}\}],$$

$G_3 = G[\{u_{12}, u_{13}, u_{14}\}]$ y

$G_4 = G[\{u_{15}\}]$.

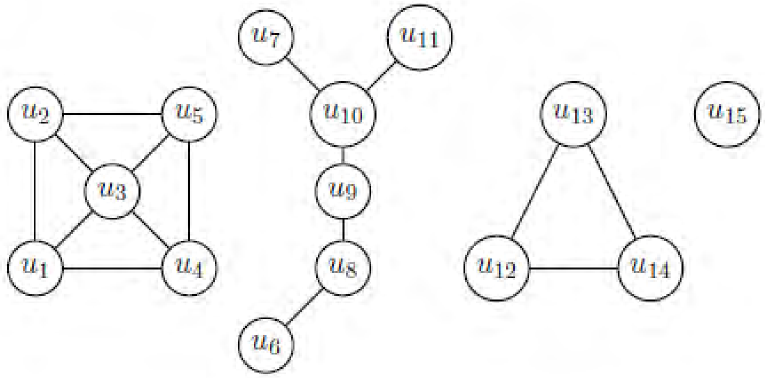


Figura 2.10

Definición 2.23 *Sea G una gráfica. El* **complemento** *de G, denotado por G^c, es la gráfica que cumple que $V(G^c) = V(G)$ y $E(G^c) = \binom{V}{2} \setminus E(G)$, es decir, $uw \in E(G^c)$ si y sólo si $uw \notin E(G)$.*

Es fácil notar que $(G^c)^c = G$.

Ahora, si $o(G) = n$, al unir las aristas de G y las aristas de G^c se obtienen las aristas de K_n.

Así, al sumar las cardinalidades de las aristas de G y G^c se tiene que:

$$|E(G)| + |E(G^c)| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Teorema 2.2 *Si G es disconexa, entonces G^c es conexa.*

Prueba. Como G es disconexa entonces el número de componentes conexas de G es mayor que uno. Sean $v_1, v_2 \in V(G)$.

Caso 1. v_1, v_2 están en distintas componentes conexas.

En este caso $v_1v_2 \notin E(G)$. Así, v_1 y v_2 son adyacentes en G^c. Por lo tanto existe una $v_1v_2 - trayectoria$ de longitud uno en G^c que los une.

Caso 2. v_1 y v_2 están en la misma componente conexa.
Sea C la componente conexa tal que $v_1, v_2 \in C$. Como el número de componentes conexas de G es mayor que uno, existe $v_3 \in V(G)$ que pertenece a una componente conexa distinta de C. Por lo tanto, si aplicamos el caso anterior a las parejas v_1, v_3 y v_2, v_3 sabemos que existe la trayectoria (v_1, v_3, v_2) en G^c.
Así, hemos demostrado que G^c es conexa. ■

Definición 2.24 *Se dice que una gráfica G es* **localmente conexa** *si para cada vértice $v \in V(G)$, la gráfica inducida por la vecindad de v, $G[N_G(v)]$ es conexa.*

Definición 2.25 *Sean G una gráfica y $\mathscr{F}$ un subconjunto de $\{A \mid A \subseteq V(G)\}$. La* **gráfica de intersección de G respecto a $\mathscr{F}$** *tiene como vértices a los elementos de $\mathscr{F}$ y sus aristas son el conjunto*

$$\{AA' \mid A \cap A' \neq \emptyset \ donde\ A, A' \in \mathscr{F}\}.$$

Ejemplo 2.1 Sea G una gráfica cuyos vértices son $\{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ y sea la familia de subconjuntos $\mathscr{F} = \{A_1, \ldots, A_5\}$ donde

$A_1 = \{u_1\}$

$A_2 = \{u_1, u_2\}$

$A_3 = \{u_2, u_3, u_5\}$

$A_4 = \{u_7, u_4, u_6\}$

$A_5 = \{u_4\}$

En la siguiente figura se muestran G y la gráfica intersección de G respecto a $\mathscr{F}$.

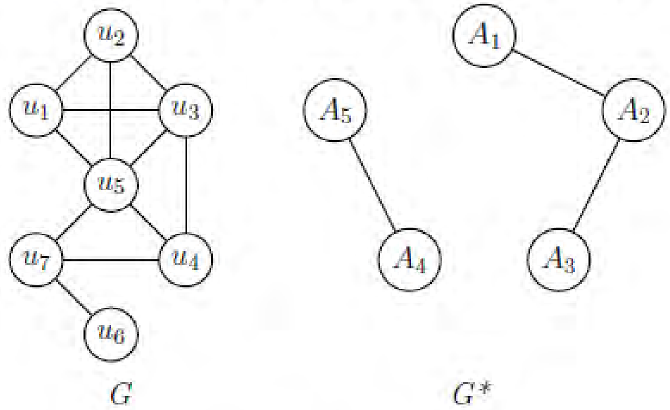


Figura 2.11

Definición 2.26 *Sea G una gráfica y $\mathscr{F} = \{\{u, v\} \mid uv \in E(G)\}$. La gráfica de líneas $L(G)$ es la gráfica de intersección de G respecto a $\mathscr{F}$.*

Es decir, $L(G)$ es la gráfica cuyos vértices son las aristas de G y dos aristas son adyacentes si comparten un vértice.
Ejemplo 2.2 En la siguiente figura se muestra una gráfica G con su gráfica de líneas.

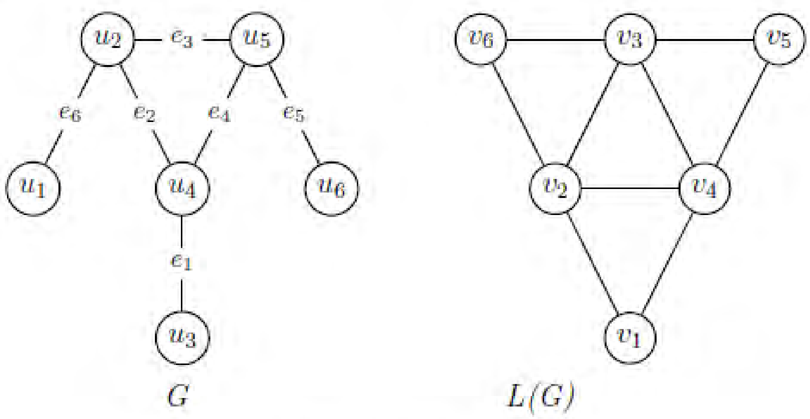


Figura 2.12

Nótese que una gráfica G es conexa si y sólo si la gráfica de lineas $L(G)$ es conexa. Además cuando se toma una subgráfica H de G y se construye la gráfica de lineas $L(H)$, ésta será una subgráfica de $L(G)$.

2.4. Isomorfismos en gráficas

A continuación vamos a estudiar las funciones que respetan la estructura de gráficas.

Definición 2.27 *Sean G y H gráficas. Un* ***morfismo reflexivo*** *entre G y H es una función $f : V(G) \to V(H)$ tal que para cualquier par de vértices, $u, u' \in V(G)$, se tiene que si $u \sim u'$ en G entonces $f(u) \sim f(u')$ o $f(u) = f(u')$ en H.*

Ejemplo 2.3 Un morfismo reflexivo puede mandar una arista de G en una arista de H o también manda aristas a vértices.

Sean G y H las gráficas que se muestran en la siguiente figura. Definimos a f de tal forma que $f(v_i) = u_i$ si $i \leq 4$ y $f(v_j) = u_{i+1}$ si $i \neq j$. La función f es claramente un morfismo reflexivo. Notemos que a todas las aristas entre los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 las mandamos u_1 y a la arista v_4v_5 a la arista u_1 a u_2.

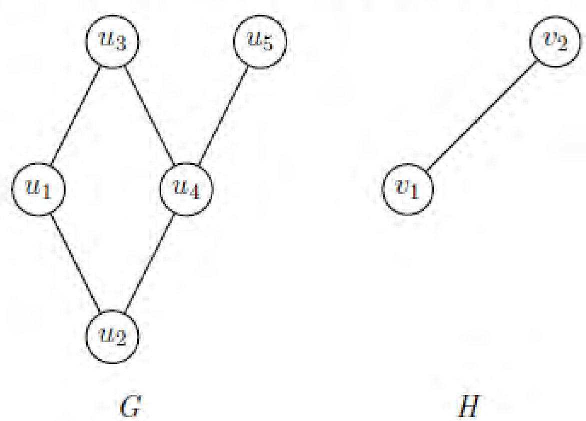


Figura 2.13

Definición 2.28 *Sean G y H gráficas. Un* ***morfismo*** *entre G y H es una función $f : V(G) \to V(H)$, tal que si $v \sim v'$ en G, entonces $f(v) \sim f(v') \in H$, para cada pareja de vértices $v, v' \in V(G)$.*

Ejemplo 2.4 Sean G y H las gráficas de la siguiente figura. Notemos que f definida por

$$\begin{array}{rccc} f: & V(G) & \longrightarrow & V(H) \\ & u_i & \longmapsto & v_i \end{array}$$

es un morfismo de gráficas.

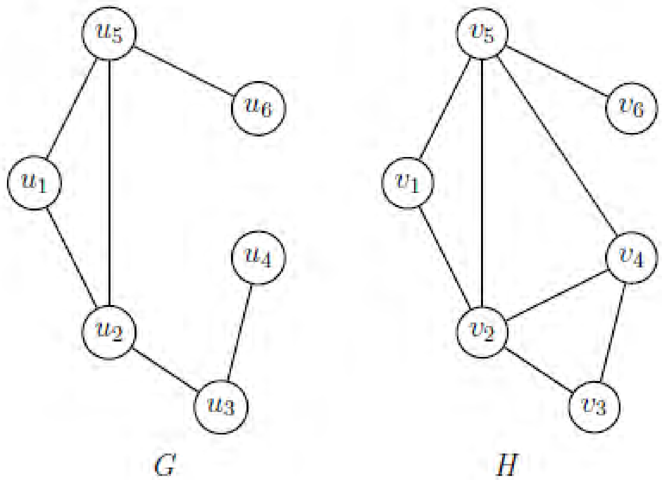


Figura 2.14

Notemos que dos vértices que son adyacentes en H no forzosamente deben de ser adyacentes en G.

Definición 2.29 *Un* ***isomorfismo de gráficas*** *G y H es una función biyectiva, $\phi : V(G) \to V(H)$ que cumple que, para cada par de vértices $u, v \in V(G)$, $u \sim v$ en G si y sólo si $\phi(u) \sim \phi(v)$ en H.*

Decimos que dos gráficas G y H son isomorfas, $(G \cong H)$, si existe un isomorfismo entre ellas.

Notemos que un isomorfismo de G en H induce una función biyectiva entre las aristas de G y las aristas de H.

$$\theta : E(G) \to E(H) \ tal\ que\ \theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$$

Definición 2.30 *Un* ***automorfismo de una gráfica*** *G es un isomorfismo de G en G.*

Nota: Un automorfismo es una permutación de los vértices de G que respeta la estructura de la gráfica G.

Teorema 2.3 *El conjunto de todos los automorfismos de una gráfica G, $Aut(G)$, es un grupo con la composición de funciones.*

Prueba. Demostraremos que $Aut(G) \leq S_{V(G)}$.

Sean $g, g' \in Aut(G)$. Entonces $g \circ g' \in S_{V(G)}$ y además $uv \in E(G)$ si y solo si, $g'(u)g'(v) \in E(G)$, pues $g' \in Aut(G)$. Ésto último ocurre si y solo si $g(g'(u)) \sim g(g'(v))$ en G puesto que $g \in Aut(G)$. Por lo tanto $g \circ g'$ es un automorfismo de G, es decir, $Aut(G)$ es cerrado bajo la composición de funciones. Por otra parte $Aut(G)$ cumple que:

1. La función identidad I de $V(G)$ es un automorfismo
2. Dada $\varphi \in Aut(G)$, se tiene que $\varphi^{-1} \in Aut(G)$ puesto que, para cada par de vértices $u, v \in V(G)$, $\varphi^{-1}(u) \sim \varphi^{-1}(v)$ si y solo si $\varphi(\varphi^{-1}(u)) \sim \varphi(\varphi^{-1}(v))$, es decir, $u \sim v$.

Se sigue que $Aut(G)$ es un grupo.

■

Definición 2.31 *Sean G y H gráficas. G es **localmente H** si y solo si, para todo $v \in V(G)$, la gráfica inducida $G[N(v)] \cong H$.*

Ejemplo 2.5 Si se toma la gráfica del octaedro, O_3, las gráficas inducidas por los vecinos de cada vértice son ciclos de longitud 4, es decir C_4. Por lo que podríamos afirmar que el octaedro es localmente C_4.

Nota: En el siguiente capítulo demostraremos que O_3 es una gráfica transitiva en vértices, lo que tendrá como corolario inmediato que O_3 es localmente C_4.

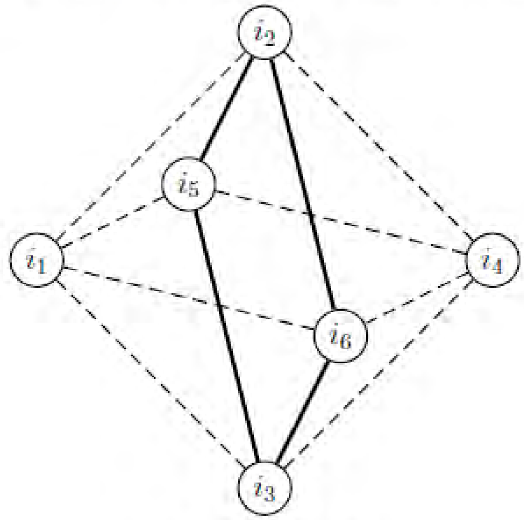


Figura 2.15 O_3

Claramente C_4 es una gráfica conexa, pero en general la gráfica H no forzosamente tiene que ser conexa. Un ejemplo de ésto es la gráfica de Petersen, que se muestra en la siguiente figura. En el siguiente capítulo demostraremos que Petersen es localmente tres copias de K_1.

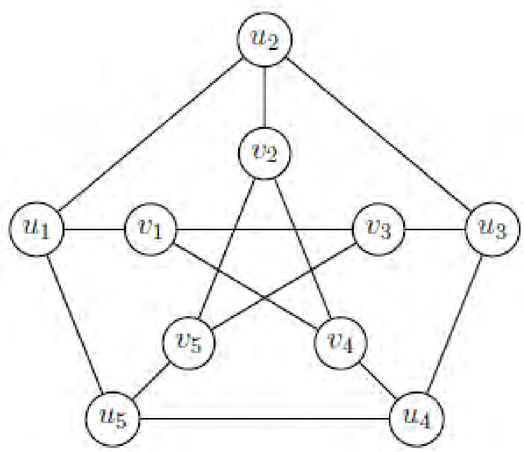


Figura 2.16 *Gráfica de Petersen*

Capítulo 3

Gráficas Transitivas en Vértices

Este capítulo está dedicado al estudio de las gráficas cuyo grupo de automorfismos actúa transitivamente en el conjunto de sus vértices. En la primera sección daremos la definición de una gráfica transitiva en vértices y algunos de los teoremas clásicos que se saben sobre la estructura de estas gráficas. En la segunda sección daremos ejemplos de gráficas que son conocidas en teoría de gráficas y que cumplen con ser transitivas en vértices.

3.1. Transitividad en vértices

3.1.1. La acción de $Aut(G)$ en $V(G)$

Si es G una gráfica, el grupo de automorfismos de G actúa de manera natural en los vértices de la gráfica. Esta acción esta dada por la función:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & Aut(G) \times V(G) & \longrightarrow & V(G) \\ & (g, x) & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

Esta función es una acción puesto que:

1. $\varphi(Id, x) = x$ para toda $x \in V(G)$ y
2. $\varphi(g \circ h, x) = g \circ h(x) = g(h(x)) = \varphi(g, h(x))$ para $g, h \in Aut(G)$ y $x \in V(G)$.

En el capítulo uno definimos la órbita de un elemento bajo la acción de un grupo. Con esta acción en particular, la órbita de cada vértice x de G es el conjunto formado por los vértices $y \in V(G)$ tales que $\sigma(x) = y$ para algún $\sigma \in Aut(G)$. Es decir,

$$[x]_{Aut(G)} = \{y \in V(G) \mid y = \sigma(x),\ p.a.\ \sigma \in Aut(G)\}.$$

Definición 3.1 *Sea $Aut(G)$ el grupo de automorfismos de una gráfica G. Decimos que G es una gráfica* ***transitiva en vértices*** *si, para cada par de vértices $v, w \in V(G)$, existe $g \in Aut(G)$ tal que $g(v) = w$.*

Notemos que G es transitiva en vértices si y sólo si $[x]_{Aut(G)} = V(G)$ para todo $x \in V(G)$.

A continuación daremos algunas definiciones y probaremos algunas proposiciones que facilitarán el trabajo de las demostraciones de los teoremas posteriores referentes a las gráficas transitivas en vértices.

Definición 3.2 *Sean $f : X \to Y$ una función y $A \subseteq X$. La* ***imagen de A bajo f****, es el conjunto $Im_f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.*

Definición 3.3 *Sea $g : X \to Y$ una función y $A \subseteq X$, entonces la* ***función g restringida a A***, *$g|_A$, esta dada por:*

$$\begin{array}{rccl} g|_A : & A & \longrightarrow & Im_g(A) \\ & a & \longmapsto & g(a) \end{array}$$

Notemos que, por la definición de $Im_g(A)$, la función $g|_A$ es suprayectiva. Además, $g|_A$ es biyectiva si y sólo si g es inyectiva.

Proposición 3.1 *Sean G una gráfica y G^c su complemento, entonces $Aut(G) \cong Aut(G^c)$.*

Prueba. Sea $g \in Aut(G)$. Demostraremos que $g \in Aut(G^c)$. Notemos que $V(G) = V(G^c)$, por lo que $g : V(G^c) \to V(G^c)$. Además, $g \in Aut(G)$ si y sólo si para cada par de vértices, $u, v \in V(G)$, se cumple que:

$$u \sim v \text{ en } G \text{ si y sólo si } g(v) \sim g(v) \text{ en } G.$$

Lo cual es equivalente a decir que, para cada par de vértices, $u, v \in V(G)$, se cumple que:

$$u \nsim v \text{ en } G \text{ si y sólo si } g(u) \nsim g(v) \text{ en } G.$$

Por la definición del complemento, es equivalente a que para cada par de vértices, $u, v \in V(G^c)$, se cumple que:

$$u \sim v \text{ en } G^c \text{ si y sólo si } g(u) \sim g(v) \text{ en } G^c.$$

Por lo tanto, $g \in Aut(G)$ si y sólo si $g \in Aut(G^c)$. ■

Proposición 3.2 *Sean g un automorfismo de una gráfica G y $A \subseteq V(G)$. La gráfica $G[A]$ es isomorfa a la gráfica $G[Im_g(A)]$.*

Prueba. Como habíamos notado anteriormente, $g|_A$ es una función biyectiva, puesto que g es, en particular, una función biyectiva. Probaremos que $g|_A$ es un isomorfismo entre $G[A]$ y $G[Im_g(A)]$.

Sean $x, y \in A$ tales que $xy \in E(G[A])$. Por la definición de $G[A]$, se tiene que $xy \in E(G)$. Como $g \in Aut(G)$, entonces $g(x)g(y) \in E(G)$. Además, como $x, y \in A$, se sigue que $g(x), g(y) \in Im_g(A)$. Así, $g(x)g(y) \in E(G[Im_g(A)])$. Por lo tanto, $g|_A(x) \sim g|_A(y)$ en $G[Im_g(A)])$.

Por otro lado, si $xy \notin E(G[A])$, entonces $xy \notin E(G)$. Como $g \in Aut(G)$, se tiene que $g(x)g(y) \notin E(G)$. Así, $g(x)g(y) \notin E(G[Im_g(A)])$. Por lo tanto $g|_A(x)g|_A(y) \notin E(G[Im_g(A)])$.

Hemos demostrado que $g|_A$ es un isomorfismo entre $G[A]$ y $G[Im_g(A)]$. ■

3.1.2. Teoremas clásicos de transitividad en vértices

Teorema 3.1 *Si G es una gráfica transitiva en vértices, entonces G es localmente H, para alguna gráfica H.*

Prueba. Sean v_0 un vértice de G y $N(v_0)$ su vecindad. Afirmamos que la gráfica $H = G[N(v_0)]$. Así que demostraremos que para cada $v \in V(G)$, $G[N(v_0)] \cong G[N(v)]$.

Como G es transitiva en vértices, existe $g \in Aut(G)$ tal que $g(v_0) = v$. Por la proposición 3.2, se tiene que $G[N(v_0)] \cong G[Im_g(N(v_0))]$ con el isomorfismo $g|_{N(v_0)}$.

Basta demostrar que $G[Im_g(N(v_0))] = G[N(v)]$. Esto último equivale a probar que $Im_g(N(v_0)) = N(v)$.

1. $N(v) \subseteq Im_g(N(v_0))$.

Sea $w \in N(v)$. Como g es suprayectiva, existe $w' \in V(G)$ tal que $w = g(w')$. Dado que $g \in Aut(G)$ y $vw \in E(G)$, entonces $v_0w' \in E(G)$. Así, $w' \in N(v_0)$. Lo que implica que $w \in Im_g(N(v_0))$.

2. $Im_g(N(v_0)) \subseteq N(v)$.

Sea $w \in Im_g(N(v_0))$. Por la definición de $Im_g(N(v_0))$, existe $w' \in N(v_0)$ tal que $g(w') = w$. Como $w'v_0 \in E(G)$ y $g \in Aut(G)$, entonces $g(w')g(v_0) \in E(G)$. Así, $wv \in E(G)$ lo que implica que $w \in N(v)$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $G\left[Im_g(N(v_0))\right] = G\left[N(v)\right]$.

■

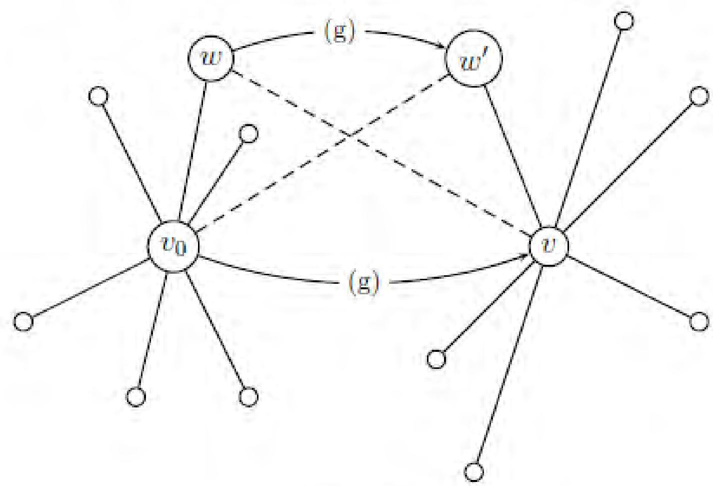


Figura 3.1

Teorema 3.2 *Sean G una gráfica transitiva en vértices y H una subgráfica de G. Si $v \in V(G)$, entonces $v \in V(H')$, para alguna subgráfica H' de G isomorfa a H.*

Prueba. Sean $v_0 \in V(H)$ y $G[V(H)]$ la gráfica inducida en G por los vértices de H. Si $v \in V(G)$, como G es transitiva en vértices, existe $g \in Aut(G)$ tal que $g(v_0) = v$.

Por la proposición 3.2, $G\left[V(H)\right] \cong G\left[Im_g(V(H))\right]$ con el isomorfismo $g|_{V(H)}$.

Sea H' la subgráfica generadora de $G\left[Im_g(V(H))\right]$ cuyas aristas son:

$$E(H') = \{g(x)g(y) \mid x, y \in V(H) \text{ y } xy \in E(H)\}$$

Claramente, $g|_{V(H)}$ es un isomorfismo de H en H'. Además, como H' es subgráfica generadora de $G\,[Im_g(V(H))]$ y $v \in Im_g(H)$, entonces $v \in V(H')$. ■

Teorema 3.3 *Sea G una gráfica transitiva en vértices, si G es disconexa entonces todas sus componentes conexas son isomorfas.*

Prueba. Sea G una gráfica disconexa que es transitiva en vértices. Entonces, el número de componentes conexas de G es mayor a uno. Sean $u, w \in V(G)$ tales que están en diferentes componentes conexas.

Por ser G transitiva en vértices, existe $g \in Aut(G)$ tal que $g(u) = w$.
Sea C la componente conexa que tiene a u como vértice y $g|_{V(C)}$ la función G restringida a los vértices de C. Sabemos que $g|_{V(C)}$ es un isomorfismo entre C y la gráfica inducida $G\,[Im_g(V(C))]$. Sea C' la componente conexa de w. Demostraremos que $G\,[Im_g(V(C))] = C'$. Basta demostrar que $Im_g(V(C)) = V(C')$

1. $Im_g(V(C)) \subseteq V(C')$. Sea $z \in V(C)$. Como C es una componente conexa, sabemos que existe una trayectoria, T, entre z y u. Entonces, $G[g(V(T))]$ es una trayectoria entre w y $g(z)$. Por lo tanto, $g(z) \in V(C')$.

2. $V(C') \subseteq Im_g(V(C))$.
Sea $v \in V(C')$. Como C' es la componente conexa de w, existe una trayectoria T' de w a v. Así, $G[g^{-1}(T)]$ es una trayectoria de u a $g^{-1}(v)$. Se sigue que $g^{-1}(v) \in V(C)$. Por lo tanto, $v \in Im_g(V(C))$. ■

Notemos que el ser una gráfica transitiva en vértices es una condición muy fuerte. A partir de los teoremas anteriores se desprenden los siguientes corolarios.

Corolario 3.1 *Si G es una gráfica transitiva en vértices, entonces G es regular.*

Prueba. Sean $v, v' \in V(G)$. Como G es transitiva en vértices, por el teorema 3.1 sabemos que existe una gráfica H tal que $G[N(v)] \cong H \cong G[N(v')]$. Entonces, existe un isomorfismo entre $G[N(v)]$ y $G[N(v')]$. Dado que un isomorfismo es, en particular, una función biyectiva entre $N(v)$ y $N(v')$, entonces $d(v) = |N(v)| = |N(v')| = d(v')$. Por lo tanto, G es regular. ■

Corolario 3.2 *Sean G una gráfica transitiva en vértices y $v \in V(G)$ que es vértice de k ciclos de longitud m. Si $w \in V(G)$, entonces w es vértice de k-ciclos de longitud m.*

Prueba. Sea $v \in V(G)$ y sean $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ el conjunto de los k ciclos de longitud m que tienen a v como vértice. Sea H una subgráfica de G, que tiene como conjunto de vértices a $V(H) = \bigcup V(C_i)$ y como conjunto de aristas a $E(H) = \{xy \mid xy \in E(C_i),\ p.a.\ i = 1, \ldots, k\}$.

Por el teorema 3.3, existe una subgráfica H' de G tal que $H' \cong H$ y $w \in V(H')$. Esto implica que w es vértice de los ciclos $\varphi(C_i)$ con $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, w es vértices de al menos tantos ciclos de longitud m como v.

Como w y v fueron escogidos arbitrariamente, se sigue que v es vértice de al menos tantos ciclos de longitud m como w. Por lo tanto, w está en exactamente k ciclos de longitud m.

■

Corolario 3.3 *Si G es una gráfica transitiva en vértices, entonces el cuello de G es la cardinalidad de un ciclo más pequeño que contiene a v, para todo $v \in V(G)$.*

Prueba. Sea G una gráfica. El cuello de G está definido como:

$$c(G) = min\left\{|V(C)| \mid C \text{ es ciclo de } G\right\}$$

y el mínimo ciclo que contiene a v definido como:

$$c_v(G) = min\left\{|V(C)| \mid C \text{ es ciclo de } G \text{ y } v \in V(C)\right\}.$$

Demostraremos que $c(G) \leq c_v(G)$.

Dado que

$$\left\{|V(C)| \mid C \text{ es ciclo de } G \text{ y } v \in V(C)\right\} \subseteq \left\{|V(C)| \mid C \text{ es ciclo de } G\right\}.$$

Eso implica que $c(G) \leq c_v(G)$.

Ahora demostraremos que $c_v(G) \leq c(G)$.

Sea $w \in V(C)$ tal que $|V(C)| = c(G)$. Como G es transitiva en vértices existe $g \in Aut(G)$ tal que $g(w) = v$. Entonces, existe un isomorfismo entre el ciclo

C y algún otro C' tal que $v \in V(C')$. De ahí que $|V(C)| = |V(C')|$. Se sigue que , v es vértice de un ciclo de la misma cardinalidad que $c(G)$. Por lo tanto, $c_v(G) \leq c(G)$.

■

Observación 3.1 *Notemos que si G es una gráfica transitiva en vértices, basta con saber la longitud de todos los ciclos que pasan por un solo vértice para saber cual es el cuello de G.*

3.1.3. Gráficas famosas que son transitivas en vértices

Definición 3.4 *Sean X un conjunto y $A \subseteq \{C \mid C \subseteq X\}$. La* **gráfica de incidencia** *de X respecto a A, $G = (X, A)$, es una gráfica bipartita tal que $V(G) = X \cup A$ y $E(G) = \{xC \mid x \in X, C \in A \text{ y } x \in C\}$.*

Definición 3.5 ***El plano de Fano*** *es una configuración que consta de 7 puntos y 7 lineas de manera que cada linea tiene exactamente tres puntos y por cada punto pasan exactamente tres lineas.*

En la siguiente figura representamos al plano de fano con el conjunto de puntos $\mathcal{P} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ y las líneas $\mathcal{L} = \{\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_4, \mathscr{L}_6, \mathscr{L}_8, \mathscr{L}_{10}, \mathscr{L}_{12}\}$, donde

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_0 &= \{1, 5, 13\}, \qquad \mathscr{L}_2 = \{1, 3, 7\}, \qquad \mathscr{L}_4 = \{5, 3, 9\}, \\ \mathscr{L}_6 &= \{5, 11, 7\}, \qquad \mathscr{L}_8 = \{7, 9, 13\}, \qquad \mathscr{L}_{10} = \{9, 11, 1\} \text{ y} \\ \mathscr{L}_{12} &= \{3, 11, 13\}. \end{aligned}$$

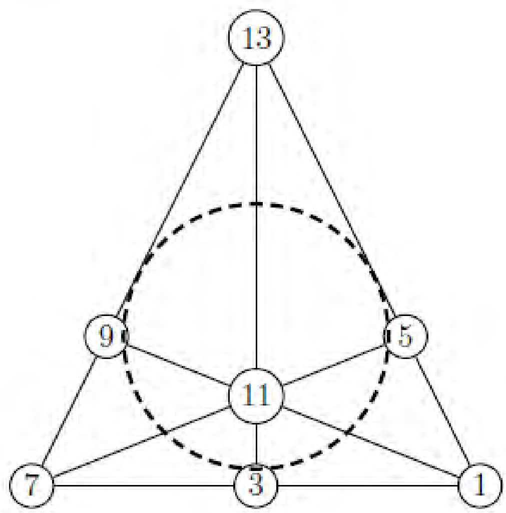


Figura 3.2 *Plano de Fano*

La gráfica de Heawood es la gráfica de incidencia de $\mathcal{P}$ respecto a $\mathcal{L}$. En el siguiente teorema se demuestra que la gráfica de Heawood es transitiva en vértices. Para facilitar la demostración a cada línea $\mathscr{L}_i$, $i \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, la etiquetaremos simplemente con el entero i. Entonces, es fácil ver que la gráfica de Heawood, H, es la gráfica tal que

$$V(H) = \{0, 1, 2, \ldots, 13\}$$

y

$$\begin{aligned} E(H) = \quad & \{\{i, i+1 \ mod(14)\} \mid i \in V(H)\} \cup \\ & \{\{i, i+5 \ mod(14)\} \mid i \in V(H) \text{ es par }\} \cup \\ & \{\{i, i-5 \ mod(14)\} \mid i \in V(H) \text{ es impar }\}. \end{aligned}$$

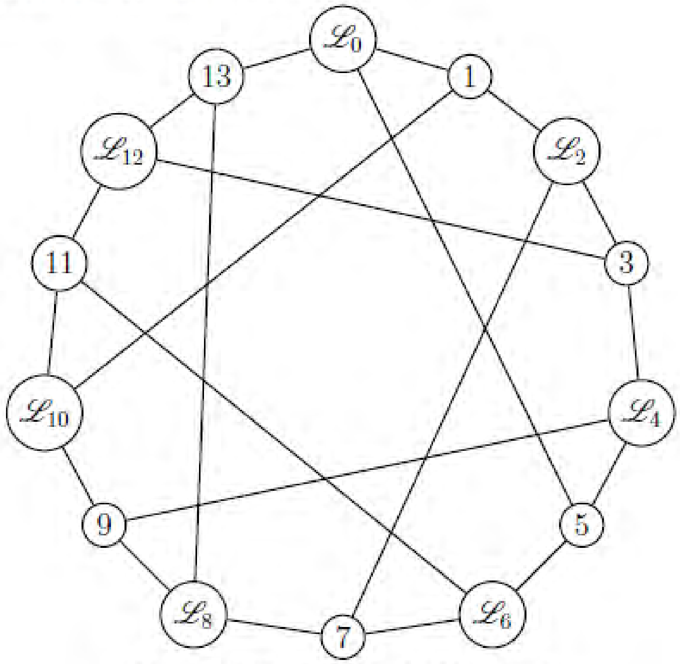


Figura 3.3 *Gráfica de Heawood*

Proposición 3.3 *La gráfica de Heawood es transitiva en vértices.*

Prueba. Sea H la gráfica de Heawood. A lo largo de la prueba, para facilitar la escritura, cualquier entero será tomado modulo 14. Afirmamos que existen a lo más dos órbitas. Para demostrarlo, mostraremos que $2i \in [0]_{Aut(H)}$ y $2i+1 \in [1]_{Aut(H)}$, para toda i.

Primero demostraremos que la función

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & V(H) & \longrightarrow & V(H) \\ & i & \longmapsto & i+2 \end{array}$$

es un automorfismo de H.

Notemos que σ es una función biyectiva en la que:

1. Las aristas de la forma $\{i, i+1\}$ $i\ mod(14)$ cumplen que:

$$\begin{array}{rcl} \{\sigma(i), \sigma(i+1)\} & = & \{i+2, i+3\} \in E(H) \text{ y} \\ \{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\} & = & \{i-2, i-1\} \in E(H). \end{array}$$

2. Las aristas de la forma $\{i, i+5\}$ tal que i es par cumplen que:

$$\begin{array}{rcl} \{\sigma(i), \sigma(i+5)\} & = & \{i+2, i+7\} \in E(H), \text{ puesto que } i+2 \text{ es par y} \\ \{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+5)\} & = & \{i-2, i+3\} \in E(H), \text{ puesto que } i-2 \text{ es par.} \end{array}$$

3. Las aristas de la forma $\{i, i-5\}$ tal que i es impar cumplen que:

$$\begin{aligned}\{\sigma(i), \sigma(i-5)\} &= \{i+2, i-3\} \in E(H), \text{ puesto que } i+2 \\ &\quad \text{es impar y} \\ \left\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i-5)\right\} &= \{i-2, i-7\} \in E(H) \text{ puesto que } i-2 \\ &\quad \text{es impar .}\end{aligned}$$

Así, $\sigma \in Aut(H)$.

Como el grupo de automorfismos es cerrado por composición:

$$\varphi_i = (\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{i-veces}) \in Aut(H).$$

Notemos que $\varphi_i(0) = 2i$ y $\varphi_i(1) = 2i+1$ para toda i.
Por lo tanto, $2i \in [0]_{Aut(H)}$ y $2i+1 \in [1]_{Aut(H)}$ para toda i.

Ahora, para demostrar que H es transitiva en vértices, demostraremos que $[0]_{Aut(H)} = V(H)$.

Basta probar que $[0]_{Aut(H)} = [1]_{Aut(H)}$. Para hacerlo, demostraremos que $0 \in [1]_{Aut(H)}$.

Sea ϕ una función tal que:

$$\begin{aligned}\phi : \ V(H) &\longrightarrow V(H) \\ i &\longmapsto 1-i\end{aligned}$$

Notamos que ϕ es biyectiva.

1. Las aristas de la forma $\{i, i+1\}$ cumplen que:

$$\begin{aligned}\{\phi(i), \phi(i+1)\} &= \{1-i, -i\} = \{-i, -i+1\} \in E(H) \text{ y} \\ \left\{\phi^{-1}(i), \phi^{-1}(i+1)\right\} &= \{-i+1, -i\} = \{-i, -i+1\} \in E(H).\end{aligned}$$

2. Además las aristas de la forma $\{i, i+5\}$, i par cumplen que:

$$\begin{aligned}\{\phi(i), \phi(i+5)\} &= \{1-i, (1-i)-5\} \in E(H), \text{ puesto que } 1-i \\ &\quad \text{es impar y} \\ \left\{\phi^{-1}(i), \phi^{-1}(i+5)\right\} &= \{-i+1, (-i+1)-5\} \in E(H), \text{ puesto que } 1-i \\ &\quad \text{es impar.}\end{aligned}$$

3. Por último, las aristas de la forma $\{i, i-5\}$, i impar cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\phi(i), \phi(i-5)\} &= \{1-i, (1-i)+5\} \in E(H), \text{ puesto que } 1-i \\ & \quad \text{es par y} \\ \left\{\phi^{-1}(i), \phi^{-1}(i-5)\right\} &= \{-i+1, (-i+1)+5\} \in E(H), \text{ puesto que } 1-i \\ & \quad \text{es par .} \end{aligned}$$

De esta manera hemos probado que $\phi \in Aut(H)$. Como $\phi(0) = 1$, entonces $0 \in [1]_{Aut(H)}$ y $[0]_{Aut(H)} = V(H)$. Por lo tanto, H es transitiva en vértices.

■

La gráfica de Petersen, P, es la gráfica que cumple que:

$$\begin{aligned} V(P) = \; & \{i \mid i = 0, \ldots, 4\} \cup \{v_i \mid i = 0, \ldots, 4\} \text{ y} \\ E(P) = \; & \{i, i+1 \mid i \in V(P) \text{ y } i+1 \; mod(5)\} \cup \\ & \{v_i, v_{i+2} \mid v_i \in V(P) \text{ y } i+2 \; mod(5)\} \cup \\ & \{v_i, i \mid i \in V(P)\}. \end{aligned}$$

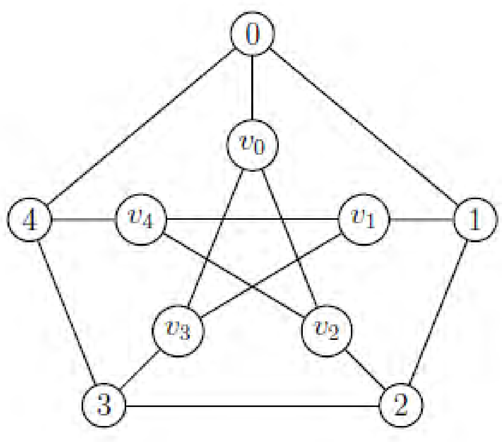


Figura 3.6 *Gráfica de Petersen*

Proposición 3.4 *La gráfica de Petersen es una gráfica transitiva en vértices.*

Prueba. Sea P la gráfica de Petersen. Para facilitar la escritura de esta demostración, a lo largo de la prueba todo entero será tomado módulo cinco.

Para demostrar que P es transitiva en vértices, primero probaremos que $i \in [0]_{Aut(P)}$ y $v_i \in [v_0]_{Aut(P)}$.

Sea σ la función tal que:

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & V(P) & \longrightarrow & V(P) \\ & i & \longmapsto & i+1 \\ & v_i & \longmapsto & v_{i+1} \end{array}$$

Notemos que σ es biyectiva y que es tal que:

1. Las aristas de la forma $\{i, i+1\}$, $i \in V(P)$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(i), \sigma(i+1)\} &= \{i+1, i+2\} \in E(P) \text{ y} \\ \left\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\right\} &= \{i-1, i\} \in E(P). \end{aligned}$$

2. Además las aristas de la forma $\{v_i, v_{i+2}\}$,con $v_i \in V(P)$, cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(v_i), \sigma(v_{i+2})\} &= \{v_{i+1}, v_{i+3}\} \in E(P) \text{ y} \\ \left\{\sigma^{-1}(v_i), \sigma^{-1}(v_{i+2})\right\} &= \{v_{i-1}, v_{i+1}\} \in E(P) \end{aligned}$$

3. Por último las aristas de la forma $\{v_i, i\}$, con $i, v_i \in V(P)$, cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(v_i), \sigma(i)\} &= \{v_{i+1}, i+1\} \in E(P) \text{ y} \\ \left\{\sigma^{-1}(v_i), \sigma^{-1}(i)\right\} &= \{v_{i-1}, i-1\} \in E(P). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma \in Aut(P)$.

Por otro lado, existe

$$\varphi_i = (\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{i-veces}) \in Aut(P)$$

que cumple que $\varphi_i(0) = i$ y $\varphi_i(v_0) = v_i$.
Por lo tanto $i \in [0]_{Aut(P)}$ para toda $i \in V(P)$ y $v_i \in [v_0]_{Aut(P)}$ para toda $v_i \in V(P)$.

Ahora, para demostrar que P es transitiva en vértices, demostraremos que $[0]_{Aut(P)} = V(P)$. Para hacerlo, mostraremos que $0 \in [v_0]_{Aut(P)}$.

Sea ϕ una función tal que:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & V(P) & \longrightarrow & V(P) \\ & i & \longmapsto & v_{2i} \\ & v_i & \longmapsto & 2i \end{array}$$

Notamos que ϕ es una función biyectiva y además:

1. Las aristas de la forma $\{i, i+1\}$ cumplen que:

$$\{\phi(i), \phi(i+1)\} \quad = \quad \left\{v_{2i}, v_{2(i+1)}\right\} \in E(P).$$

· Si i es impar, $\{i, i+1\} = \{2j+1, 2j+2\}$ para alguna j. Entonces,

$$\left\{\phi^{-1}(2j+1), \phi^{-1}(2j+2)\right\} = \{v_{j+3}, v_{j+1}\} \in E(P).$$

· Si i es par, $\{i, i+1\} = \{2j, 2j+1\}$ para alguna j. Entonces,

$$\left\{\phi^{-1}(2j), \phi^{-1}(2j+1)\right\} = \{v_j, v_{j+3}\} = \{v_j, v_{j-2}\} \in E(P)$$

puesto que $j+3 \equiv j-2 \ mod(5)$.

2. Las aristas de la forma $\{v_i, v_{i+2}\}$ cumplen que:

$$\{\phi(v_i), \phi(v_{i+2})\} \quad = \quad \{2i, 2(i+2)\} = \{2i, 2i-1\} \in E(P)$$

puesto que $2i+4 \equiv 2i-1 \ mod(5)$.

· Si i es impar, $\{v_i, v_{i+2}\} = \{v_{2j+1}, v_{2j+3}\}$ para alguna j. Entonces,

$$\left\{\phi^{-1}(v_{2j+1}), \phi^{-1}(v_{2j+3})\right\} = \{j+3, j+4\} \in E(P).$$

· Si i es par, $\{v_i, v_{i+2}\} = \{v_{2j}, v_{2j+2}\}$ para alguna j. Entonces,

$$\left\{\phi^{-1}(v_{2j}), \phi^{-1}(v_{2j+2})\right\} = \{j, j+1\} \in E(P).$$

3. Por último, las aristas de la forma $\{i, v_i\}$ cumplen que:

$$\{\phi(i), \phi(v_i)\} \;=\; \{v_{2i}, 2i\} \in E(P)$$

· Si i es impar $\{i, v_i\} = \{2j+1, v_{2j+1}\}$ para alguna j. Entonces,

$$\left\{\phi^{-1}(2j+1), \phi^{-1}(v_{2j+1})\right\} = \{v_{j+3}, j+3\} \in E(P).$$

· Si i es par $\{i, v_i\} = \{2j, v_{2j}\}$ para alguna j. Entonces,

$$\left\{\phi^{-1}(2j), \phi^{-1}(v_{2j})\right\} = \{v_j, j\} \in E(P).$$

Por lo tanto, $\phi \in Aut(P)$.

Entonces, se sigue que $0 \in [v_0]_{Aut(H)}$ y $[v_0]_{Aut(H)} = V(P)$. Lo que implica que P es transitiva en vértices.

■

La gráfica del octaedro, O_3, cuyos vértices y aristas son:

$$\begin{aligned} V(O_3) &= \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\} \\ E(O_3) &= \{u_i w \mid w \in V(O_3) \setminus \{u_i v_i\}\} \cup \{v_i w \mid w \in V(O_3) \setminus \{u_i, v_i\}\} \end{aligned}$$

es la que se muestra a continuación.

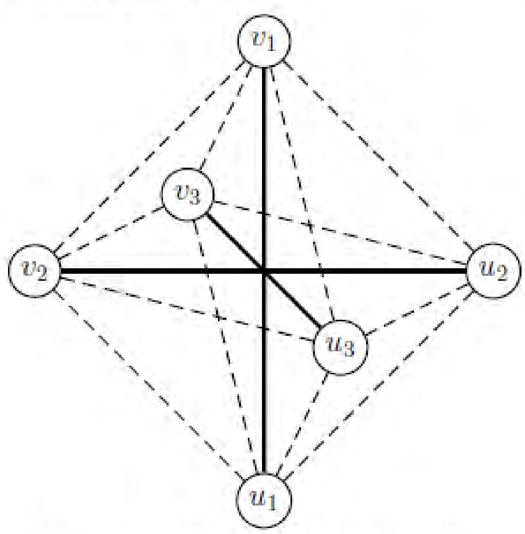


Figura 3.7 *Gráfica del octaedro*

Proposición 3.5 *La gráfica O_3 del octaedro es transitiva en vértices.*

Prueba. Por la proposición 3.1, $Aut(O_3) = Aut(O_3^c)$. Demostraremos que O_3 es transitiva en vértices demostrando que O_3^c es transitiva en vértices.

Notemos que O_3^c es la gráfica que cumple que:

$$\begin{aligned} V(O_3^c) &= \{v_i \mid i = 1,2,3\} \cup \{u_i \mid i = 1,2,3\} \\ E(O_3^c) &= \{v_i u_i \mid i = 1,2,3\} \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que $v_i \in [v_1]_{Aut(O_3)}$ y $u_i \in [u_1]_{Aut(O_3)}$, con $i \in \{1,2,3\}$.

Para ello tomaremos una función:

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & V(O_3) & \longrightarrow & V(O_3) \\ & v_i & \longmapsto & v_{i+1}\ i, i+1\ mod(3) \\ & u_i & \longmapsto & u_{i+1}\ i, i+1\ mod(3) \end{array}$$

Notemos que $\sigma \in Aut(O_3)$ es biyectiva y cumple que

Las aristas $\{v_i, u_i\}$ satisfacen que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(v_i), \sigma(u_i)\} &= \{v_{i+1}, u_{i+1}\} \in E(O_3^c) \\ \{\sigma^{-1}(v_i), \sigma^{-1}(u_i)\} &= \{v_{i-1}, u_{i-1}\} \in E(O_3^c) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma \in Aut(O_3^c)$.

Por otro lado, sabemos que existe

$$\varphi_i = (\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{i-veces}) \in Aut(O_3)$$

que cumple que $\varphi_1(v_1) = v_i$ y $\varphi_i(u_1) = u_i$

Por lo tanto $v_i \in [v_1]_{Aut(O_3)}$ y $u_i \in [u_1]_{Aut(O_3)}$.

Ahora para demostrar que O_3 es transitiva en vértices, demostraremos que $[v_1]_{Aut(O_3)} = V(O_3)$. Es decir, probaremos que $v_1 \in [u_1]_{Aut(O_3)}$.

Sea ϕ una función tal que:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V(O_3) & \longrightarrow & V(O_3) \\ & v_i & \longmapsto & u_i \\ & u_i & \longmapsto & v_i \end{array}$$

Notamos que podemos asegurar que ϕ es biyectiva.

Además se cumple que para las aristas $\{v_i, u_i\}$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\phi(v_i), \phi(u_i)\} &= \{u_i, v_i\} \in E(O_3^c), \\ \{\phi^{-1}(v_i), \phi^{-1}(u_i)\} &= \{u_i, v_i\} \in E(O_3^c). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \in Aut(O_3^c)$.
Entonces, se sigue que $v_1 \in [u_1]_{Aut(O_3)}$ y $[v_1]_{Aut(O_3)} = V(O_3)$.
Lo que implica que O_3 es transitiva en vértices.

■

Observación 3.2 *Notemos que como el octaedro es una gráfica transitiva en vértices y por el teorema 3.2 es localmente H, para alguna gráfica H. Entonces, para $u \in V(O_3)$ la gráfica inducida por $G[N_{O_3}(u)] = C_4$, y al ser O_3 transitiva en vértices entonces es localmente C_4.*

Para finalizar este capítulo estudiaremos a las gráficas de Cayley. Estas gráficas se construyen a partir de cualquier grupo finito. Son muy conocidas en la teoría de Gráficas por tener mucha estructura.

Definición 3.6 *Sea G grupo finito y $\mathscr{S}$ un subconjunto de G, decimos que $\mathscr{S}$ es* **cerrado por inversos** *si se cumple que:*

$$\textit{Si } x \in \mathscr{S}, \textit{ entonces } x^{-1} \in \mathscr{S}.$$

Definición 3.7 *Sean G un grupo finito y $\mathscr{S}$ un conjunto generador de G cerrado por inversos que no contiene a la identidad en G. La* ***gráfica de Cayley*** *denotada por $\mathscr{G}(G, \mathscr{S})$, es una gráfica simple cuyos vértices y aristas se definen como:*

$$V(\mathscr{G}) = G; \qquad E(\mathscr{G}) = \big\{\{g, h\} \mid g^{-1}h \in \mathscr{S}\big\}$$

es decir, $\{g, h\} \in E(\mathscr{G})$ si y sólo si $h = gs$ para alguna $s \in \mathscr{S}$.

Antes de empezar con el análisis de las gráficas de Cayley, daremos un ejemplo para ilustrar como se construyen.

Ejemplo 3.2 Sea S_3 el grupo de permutaciones de tres elementos, analizado en el primer capitulo de la tesis. A continuación nombramos a sus elementos.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ \rho_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \rho_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos al subconjunto $\mathscr{S} = \{\rho_3, \rho_2, \rho_6\}$. El conjunto $\mathscr{S}$ cumple con generar a S_3, ser cerrado bajo inversos y con no contener a la identidad. A continuación se muestra la gráfica de Cayley $\mathscr{G}(S_3, \mathscr{S})$.

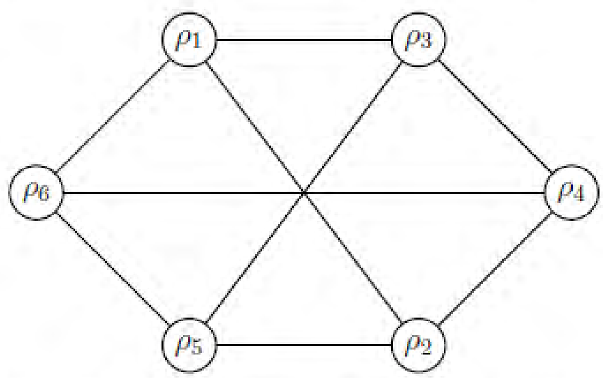


Figura 3.9 $K_{3,3}$ *vista como una gráfica de Cayley para* S_3

Para demostrar que las gráficas de Cayley son transitivas en vértices nos apoyaremos en las siguientes proposiciones.

Proposición 3.6 *Sea G una gráfica conexa, si para cada arista $uv \in E(G)$ existe un automorfismo $\sigma \in Aut(G)$ tal que $\sigma(u) = v$ entonces G es transitiva en vértices.*

Prueba. Como la gráfica G es conexa, para cualesquier par de vértices $u, v \in V(G)$ existe una $uv - trayectoria$ que los une:

$T = (u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} = v)$. Entonces para cada arista $u_{i-1}u_i$, $i\ mod(n)$ existe $\sigma_i \in Aut(G)$ tal que $\sigma_i(u_{i-1}) = u_i$, $1 \leq i \leq n-1$.

$$\begin{aligned} \sigma_0(u_0) &= u_1 \\ \sigma_1(u_1) &= u_2 \\ &\vdots \\ \sigma_{n-1}(u_{n-1}) &= u_n \end{aligned}$$

Por lo que existe $\varphi_n \in Aut(G)$ tal que $\varphi_n = (\sigma_{n-1} \circ \ldots \circ \sigma_1)$. Esto es $\varphi_n(u_o) = u_{n-1}$, es decir $\varphi_n(u) = v$.
Por lo tanto la gráfica G es transitiva en vértices.

■

Proposición 3.7 *La gráfica de Cayley $\mathscr{G}(G, \mathscr{S})$ es conexa.*

Prueba. Sean $g_1, g_2 \in G$, demostraremos que existe una $g_1g_2 - trayectoria$. Sabemos que $g_1^{-1}g_2 \in G$, como el conjunto $\mathscr{S}$ es generador, existen $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathscr{S}$ tal que

$$\begin{aligned} g_1^{-1}g_2 &= s_1 \cdots _2 \cdot \ldots \cdot s_k \\ g_2 &= g_1 s_1 \cdots _2 \cdot \ldots \cdot s_k \end{aligned}$$

Tomamos $T = (h_0, \ldots, h_k)$, sabemos que T es un camino, sea $h_0 = g_1$ y $h_i = h_{i-1}s_i$, $i = \{1, \ldots, k\}$.

Teniendo en cuenta que $h_0 = g_1$ vamos a probar por inducción sobre k que $h_k = g_1 s_1 \cdots s_k$.

Si $k = 1$, $h_1 = h_0 s_1 = g_1 s_1$ lo cual cumple.
Supongamos que es cierto si $i \leq k$, entonces $h_k = h_{k-1}s_k$ pero como

$$\begin{aligned} h_{k-1} &= g_1 s_1 \cdots s_{k-1} \\ \Rightarrow h_k &= g_1 s_1 \cdots s_{k-1} s_k \\ \Rightarrow h_k &= g_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el camino va de g_1 a g_2, y al ser camino existe una $g_1g_2 - trayectoria$. Lo que implica que la gráfica de Cayley es conexa.

■

Proposición 3.8 *La gráfica de Cayley $\mathscr{G}(G, \mathscr{S})$ es una gráfica transitiva en vértices.*

Prueba. Sea $\mathscr{G}$ la gráfica de Cayley cuyos vértices están dados por $V(\mathscr{G}) = G$ y aristas $E(G) = \{(g, h) \mid g^{-1}h \in \mathscr{S}\}$.

Por la proposición 3.7 la gráfica $\mathscr{G}(G, \mathscr{S})$ es conexa.

Sea $gh \in E(\mathscr{G})$, es decir, $h = gs$ para algún $s \in \mathscr{S}$.

Sea la función:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{g,h}: & V(G) & \longrightarrow & V(G) \\ & v & \longmapsto & gsg^{-1}v \end{array}$$

Demostraremos que $\varphi_{g,h}$ es un automorfismo.

Probaremos que es sobreyectiva.

Sea $w \in G$, existe $v = gs^{-1}g^{-1}w$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_{g,h}(v) &= gsg^{-1}v \\ &= gsg^{-1}gs^{-1}g^{-1}w \\ &= w \end{aligned}$$

Por lo tanto es suprayectiva.

Demostraremos que $\varphi_{g,h}$ es inyectiva.

Sean $v, v' \in G$, si $\varphi_{g,h}(v) = \varphi_{g,h}(v')$, entonces

$$\begin{aligned} gsg^{-1}v &= gsg^{-1}v' \\ sg^{-1}v &= sg^{-1}v' \\ g^{-1}v &= g^{-1}v' \\ v &= v' \end{aligned}$$

Por lo tanto es inyectiva. Lo que implica que $\varphi_{g,h}$ es biyectiva.

Ahora se probara que $\varphi_{g,h}$ respeta adyacencias.

Sean $u, v \in G$, $u \sim v$ si y solo si $v = us_1$ para alguna $s_1 \in \mathscr{S}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ gsg^{-1}v = gsg^{-1}us_1 \\ &\Leftrightarrow\ \varphi_{g,h}(v) = \varphi_{g,h}(u)s_1 \\ &\Leftrightarrow\ \varphi_{g,h}(v) \sim \varphi_{g,h}(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_{g,h}$ es automorfismo.

Como $\mathscr{G}(G, \mathscr{S})$ es conexa y existe $\varphi_{g,h} \in Aut(G)$ tal que $\varphi_{g,h}(g) = h$, entonces por la proposición 3.6, la gráfica Cayley $\mathscr{G}(G, \mathscr{S})$ es transitiva en vértices.

■

Capítulo 4

Gráficas Transitivas en Aristas vs Gráficas Transitivas en Vértices

Este capítulo está dedicado al estudio de las gráficas cuyo grupo de automorfismos actúa transitivamente en el conjunto de sus aristas. En la primera sección daremos la definición de una gráfica transitiva en aristas y los teoremas clásicos que se saben sobre la estructura de estas gráficas. En la segunda sección daremos ejemplos de gráficas que son transitivas en vértices pero no son transitivas en aristas, y viceversa.

4.1. Gráficas transitivas en aristas

Definición 4.1 *Sea G una gráfica, G es* ***transitiva en aristas*** *si para cada $uv, u'v' \in E(G)$ existe $\sigma \in Aut(G)$ tal que $\{\sigma(u), \sigma(v)\} = \{u', v'\}$.*

4.1.1. Teoremas sobre gráficas transitivas en aristas

Definición 4.2 *Sea una gráfica G, y C_k un ciclo de longitud k, al número de ciclos a los que pertenece una arista $a \in E(G)$ lo denotaremos por*

$$n_a^k = |\{C_k \mid a \text{ es arista de } C_k\}|$$

Teorema 4.1 *Si G es una gráfica transitiva en aristas con ciclos C_k de longitud $3 \leq k \in \mathbb{N}$ y $a, a' \in E(G)$ entonces $n_a^k = n_{a'}^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Prueba. Como G es transitiva en aristas entonces para cada par de aristas $a = \{u, v\}$ y $a' = \{u', v'\}$ existe un automorfismo $\sigma \in Aut(G)$ tal que $Im_\sigma(a) = a'$.

Sea $C_k \subseteq G$ un ciclo de longitud k, tal que $a \in E(C_k)$. Entonces $C_k = (u, u_1, \ldots, u_k = v)$. Notemos que $C_k' = (\sigma(u), \sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_k))$ es un ciclo de longitud k puesto que $u_i \sim u_{i+1}$ si y solamente si $\sigma(u_i) \sim \sigma(u_{i+1})$ por ser σ un automorfismo de G. Además $a' \in E(C_k')$ ya que $a' = \sigma(u)\sigma(v)$.

Hemos probado que a' está en por lo menos n_a^k ciclos de longitud k. Si hacemos lo mismo con el automorfismo σ^{-1} obtendremos que a está en por lo menos $n_{a'}^k$ ciclos de longitud k. Por lo tanto $n_a^k = n_{a'}^k$.

■

Este teorema nos dice que si al tomar cualquier par de aristas en una gráfica G transitiva en aristas, éstas deben de pertenecer al mismo número de ciclos de una cierta longitud, por ejemplo, si una arista a de G pertenece a 5 ciclos de longitud 4, entonces la arista a' debe también pertenecer a 5 ciclos de longitud 4.

Teorema 4.2 *Si G es una gráfica transitiva en aristas, $uv \in E(G)$, y H es una subgráfica de G tal que $uv \in E(H)$. Entonces, para cada arista $u'v' \in E(G)$ existe una subgráfica H' de G tal que*

1. $H' \cong H$

2. $u'v' \in E(H')$

Prueba. Sean $uv \in E(G)$, $u'v' \in E(G)$ y H es una subgráfica de G tal que $uv \in E(H)$. Como G es transitiva en aristas existe $\sigma \in Aut(G)$ tal que $\sigma(u)\sigma(v) = u'v'$.

Afirmamos que H' es la subgráfica de G tal que $V(H') = Im_\sigma(V(H))$ y $E(H') = \{\sigma(x)\sigma(y) \mid x \sim y\}$. Entonces $\sigma|_{V(H)}$ es claramente un isomorfismo entre H y H'. Además $u'v' \in E(H')$ ya que $u'v' = \sigma(u)\sigma(v)$.

■

Dos preguntas naturales son: ¿Será cierto que toda gráfica transitiva en vértices es transitiva en aristas? y ¿Será cierto que toda gráfica transitiva en aristas es transitiva en vértices? La respuesta es que existen gráficas transitivas en vértices que no son transitivas en aristas y viceversa.

Ejemplo 4.1 La siguiente gráfica es un ejemplo de una gráfica transitiva en vértices que no es transitiva en aristas.

Sea T la gráfica cuyos vértices y aristas son:

$$\begin{aligned} V(T) &= \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\} \\ E(T) &= \{u_i u_{i+1} \mid i+1 \; mod(3)\} \cup \{v_i v_{i+1} \mid i+1 \; mod(3)\} \\ &\quad \cup \{u_i v_i \mid i = 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

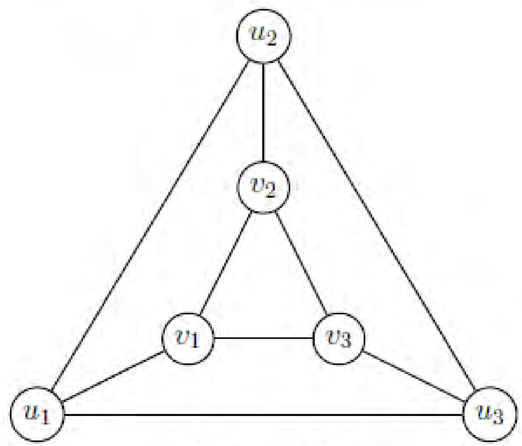


Figura 4.1

Prueba. Demostraremos que T es transitiva en vértices.

Primero veremos que en T existen a lo más dos órbitas, en particular, probaremos que $u_i \in [u_1]_{Aut(T)}$ y $v_i \in [v_1]_{Aut(T)}$, con $i \; mod(3)$. Para facilitar la demostración todo entero será tomado $mod(3)$.

Sea σ la función definida por

$$\begin{aligned} \sigma: \; V(T) &\longrightarrow V(T) \\ u_i &\longmapsto u_{i+1} \\ v_i &\longmapsto v_{i+1} \end{aligned}$$

Demostraremos que $\sigma \in Aut(T)$.

Notemos que σ es biyectiva.

1. Las aristas de la forma $\{u_i, u_{i+1}\}$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(u_i), \sigma(u_{i+1})\} &= \{u_{i+1}, u_{i+2}\} \in E(T) \ y \\ \left\{\sigma^{-1}(u_i), \sigma^{-1}(u_{i+1})\right\} &= \{u_{i-1}, u_i\} \in E(T) \end{aligned}$$

2. Además las aristas de la forma $\{v_i, v_{i+1}\}$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(v_i), \sigma(v_{i+1})\} &= \{v_{i+1}, v_{i+2}\} \in E(T) \ y \\ \left\{\sigma^{-1}(v_i), \sigma^{-1}(v_{i+1})\right\} &= \{v_{i-1}, v_i\} \in E(T) \end{aligned}$$

3. Por otro lado, las aristas de la forma $\{u_i, v_i\}$, cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\sigma(u_i), \sigma(v_i)\} &= \{u_{i+1}, v_{i+1}\} \in E(T) \ y \\ \left\{\sigma^{-1}(u_i), \sigma^{-1}(v_i)\right\} &= \{u_{i-1}, v_{i-1}\} \in E(T) \end{aligned}$$

Por otro lado sabemos que existe

$$\varphi_i = (\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{i-veces}) \in Aut(T)$$

que cumple que $\varphi_i(u_1) = v_i$ y $\varphi_i(v_1) = v_i$.

Por lo tanto $u_i \in [u_1]_{Aut(T)}$ para toda y $v_i \in [v_1]_{Aut(T)}$ para toda i.

Ahora para demostrar que T es transitiva en vértices, demostraremos que $[u_1]_{Aut(T)} = V(T)$.

Basta probar que $[u_1]_{Aut(T)} = [v_1]_{Aut(T)}$, en particular $v_1 \in [u_1]_{Aut(T)}$.

Sea ϕ una función tal que:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V(T) & \longrightarrow & V(T) \\ & u_i & \longmapsto & v_i \\ & v_i & \longmapsto & u_i \end{array}$$

Notamos que ϕ es biyectiva.

1. Las aristas de la forma $\{u_i, v_i\}$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\phi(u_i), \phi(v_i)\} &= \{v_i, u_i\} \in E(T) \ y \\ \left\{\phi^{-1}(u_i), \phi^{-1}(v_i)\right\} &= \{v_i, u_i\} \in E(T) \end{aligned}$$

Además las aristas de la forma $\{v_i, v_{i+1}\}$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\phi(v_i), \phi(v_{i+1})\} &= \{u_i, u_{i+1}\} \in E(T) \ y \\ \left\{\phi^{-1}(v_i), \phi^{-1}(v_{i+1})\right\} &= \{u_i, u_{i+1}\} \in E(T) \end{aligned}$$

Y por último las aristas de la forma $\{u_i, u_{i+1}\}$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \{\phi(u_i), \phi(u_{i+1})\} &= \{v_i, v_{i+1}\} \in E(T) \ y \\ \left\{\phi^{-1}(u_i), \phi^{-1}(u_{i+1})\right\} &= \{v_i, v_{i+1}\} \in E(T) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \in Aut(T)$.

Entonces, se sigue que $v_1 \in [u_1]_{Aut(T)}$ y $[u_1]_{Aut(T)} = V(T)$. Lo que implica que T es transitiva en vértices.

Si tomamos las aristas v_1v_2 y u_3v_3, se puede ver que $v_1v_2 \in C_3$ un ciclo de longitud 3, y $u_3v_3 \in C_4$ un ciclo de longitud 4, por el corolario 4.1 ésta gráfica efectivamente no es transitiva en aristas.

■

Ejemplo 4.2 Este es un ejemplo de una gráfica transitiva en aristas pero que no es transitiva en vértices.

Sea $K_{1,m}$ con $m > 1$ la gráfica de una estrella.

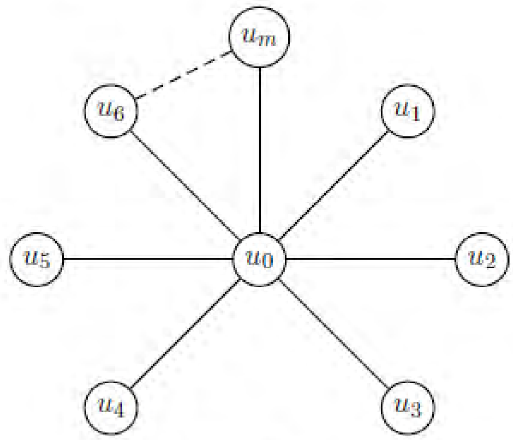


Figura 4.2 $K_{1,m}$

Las aristas de $K_{1,m}$ son del tipo $\{u_0, u_i\}$ con $1 \leq i \leq m \in \mathbb{N}$.

Como $K_{1,m}$ es transitiva en aristas, para cada $\{u_0, u_i\} \in E(K_{1,m})$ existe un $\sigma \in Aut(K_{1,m})$ tal que $\{\sigma(u_0), \sigma(u_i)\} = \{u_0, u_j\}$, $i \neq j$ y $1 \leq j \leq m \in \mathbb{N}$.

Por el contrario vemos que como $K_{1,m}$ no es transitiva en vértices no existe un $\sigma \in Aut(K_{1,m})$ tal que $\sigma(u_0) = u_i$ con $i = 1, \ldots, m$.

Observación 4.1 *De los dos ejemplos anteriores, se puede notar que a diferencia de las gráficas transitivas en vértices, las gráficas transitivas en aristas no necesariamente tienen que ser regulares.*

Proposición 4.1 *Sea G una gráfica transitiva en aristas sin vértices aislados. Si G no es vértice transitiva entonces $Aut(G)$ tiene exactamente dos órbitas y dichas órbitas forman una bipartición.*

Prueba. Demostraremos que G es vértice transitiva.

Recordemos que la órbita de un vértice x son todos aquellos vértices y, tales que $\sigma(x) = y$ para algún $\sigma \in Aut(G)$.

Sea $vw \in E(G)$ tal que v, w vértices en la misma órbita y sea $x \in V(G)$, como no existen vértices aislados, existe $y \in V(G)$ tal que $xy \in E(G)$, como G es transitiva en aristas existe $\sigma \in Aut(G)$ tal que:

Caso (1)

$$\{\sigma(v), \sigma(w)\} = \{x, y\}$$

por lo que se puede asegurar que $x \in [v]_{Aut(G)}$.

Caso (2)

$$\{\sigma(v), \sigma(w)\} = \{y, x\}$$

como w está en la misma órbita que v existe $\sigma' \in Aut(G)$ tal que $\sigma'(v) = w$ entonces $\sigma \circ \sigma'(v) = x$. Por lo tanto x está en la órbita de v, y ésto es una contradicción.

En ambos casos se tiene que la gráfica es vértice transitiva, ya que $V(G) \subseteq [v]_{Aut(G)}$ es una contradicción. Por lo tanto las órbitas son conjuntos independientes. Lo que implica que hay una partición del conjunto de vértices.

Ahora, demostraremos que sólo existen dos órbitas.
Como G es transitiva en aristas existe $\sigma \in Aut(G)$ tal que $\{\sigma(v), \sigma(w)\} = \{x, y\}$, entonces:

Caso (1)

$$si\ \sigma(v) = x \Rightarrow x \in [v]_{Aut(G)}$$

Caso (2)

$$si\ \sigma(w) = y \Rightarrow y \in [w]_{Aut(G)}$$

entonces para todo $x \in V(G) \setminus \left([v]_{Aut(G)} \cup [w]_{Aut(G)}\right)$, es decir $x \in [v]_{Aut(G)}$ o $x \in [w]_{Aut(G)}$ y ésto es una contradicción.

Lo mismo sucede para el vértice y. Por lo tanto las órbitas forman una bipartición. ■

Encontrar gráficas transitivas en aristas no es nada sencillo, como se menciono en la observación 4.1 existen gráficas transitiva en aristas que son regulares y además todas las gráficas vértice transitiva son regulares, pues bien, el siguiente es un ejemplo de una gráfica que es transitiva en aristas pero no transitiva en vértices y además es $4-regular$.

Notemos que la siguiente gráfica es una gráfica bipartita $K_{m,m}$ donde la bipartición se puede apreciar con el conjunto de vértices blancos y negros.

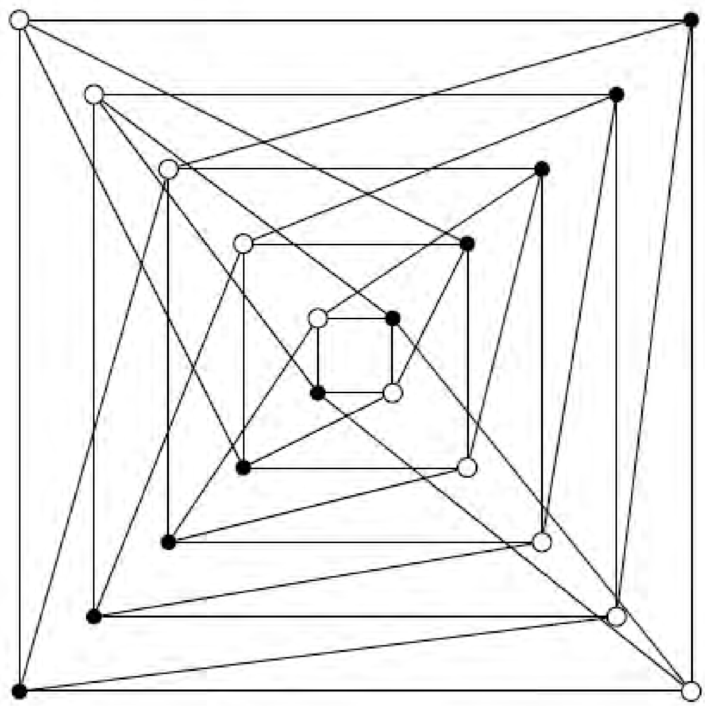


Figura 4.3 $K_{m,m}$

Bibliografía

[1] M.A. Amstrong, *Groups and Symetry*, Springer-Verlang, New York, 1988

[2] J.D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation Groups*, Springer-Verlang, New York, 1996

[3] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlang, New York, 2001

[4] J.B. Fraleigh, *Álgebra Abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington Delaware, 1987

[5] H. Cardenas, E. Lluis, F. Raggi. F. Tomas, *Álgebra Superior*, Trillas, México 1997

[6] J.J. Rotman, *An Introduction to The Theory of Groups*, WCB Publishers, New York, 1995

[7] R. Balakrishnan, K. Ranganathan, *A Textbook of Graph Theory*, Springer, New York 2000

[8] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Wilmington Delaware, 1969

[9] N.L. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1994