UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Notas de Geometría Diferencial para alumnos de Cálculo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

ARTURO MONTES DE OCA BALTAZARES

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. AGUSTIN ONTIVEROS PINESA

2009

Notas de Geometría Diferencial para alumnos de Cálculo

Arturo Montes de Oca Baltazares
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México (U.N.A.M.)

Julio, 2009

Índice general

.

Capítulo 0

Agradecimientos

Cierta ocasión escuche a un profesor pedir un consejo a otro profesor sobre orientación vocacional para su hijo, en la que más o menos los acontecimientos pasaron así. "hola sabes mi hijo no sabe que carrera estudiar, que consejo podrias darle de que carrera elegir. ¿No tienes idea de qué carrera quieres? No, no tengo la mas mínima idea, ¡¡ya está!!, estudia matemáticas. ¿Pero como quieres que estudie matemáticas si no se qué carrera quiero estudiar? Pues por eso estudia matemáticas mientras decides que carrera quieres estudiar y así cuando decidas la carrera que quieres estudiar te ayudará a tener una visión diferente de tu carrera.(Moraleja las matemáticas te dan otra visión de la vida).
La primera persona a la que quiero agradecer es a mi madre quien con su amor páciencia y cariño me supo guiar hasta la culminación de esta maravillosa aventura que fue entrar al mundo de las matemáticas, porque todo el tiempo nos dijo a sus hijos las sabias palabras "las matemáticas están en todas partes, nada se salva de las matemáticas", circunstancia que pude comprobar al ir avanzando en mis estudios y adentrarme en el mundo de las matemáticas. Mi hermano (el Brother), que siempre fue un reto a vencer y un ejemplo a seguir, que siempre estuvo en los momentos, fáciles pero también en los difíciles cuando necesite de un verdadero amigo.

A mis profesores quienes me tuvieron un exceso de paciencia al darme una visita guiada por el inmenso mundo de las matemáticas, pero dentro de todo mi grupo de profesores quiero mencionar a 6 de ellos quienes considero fueron un gran apoyo tanto en la carrera como en la elaboración del presente trabajo.

Dr. Alberto Barajas Celis (el hacedor de matemáticos), quien me ayudó a enamorarme de las matemáticas cuando al darnos las clases hablara con tal pasión y facilidad de las matemáticas, y como en una entrevista lo dijera "Me dedico a formar matemáticos para poder platicar de matemáticas con matemáticos.ªfortunadamente pude platicar con él antes de que nos abandonara.

M. en C. Agustín Ontiveros por haber dirigido este trabajo. Dr. Oscar Palmas Velasco espero no haber agotado su paciencia.

Dr. Pablo Padilla y Dr. Pedro Miramontes, de quienes aprendí que las matemáticas se pueden aplicar absolutamente a todo lo que uno quiera, durante los cursos a los cuales tuve la oportunidad de asistir y como olvidar el reto que representaban los súper cursos del Dr. León Kushner, a todos mis compañeros con los que pasé momentos fáciles o difíciles de esta hermosa carrera. Termino esta dedicatoria citando una frase que leí en un boletín donde entrevistaban al Dr. Alberto Barajas "fuimos arrojados a esta maravillosa aventura del conocimiento, prendidos del mundo de la geometria".

También quiero agradecer enormemente a una persona especial en mi vida la cual tuve la dicha de conocer Petal Padmini Surujpaul (mi más grande amor) y es una de mis más grandes motivaciones, por que estemos juntos por siempre.

P.D. también agradezco a la facultad quien en sus aulas guardara los momentos felices, tristes y angustias que llegan con cada calificación. Gracias a todos, por hacerme ser quien soy.

Arturo (Arru).

Capítulo 1

Justificación

El motivo del presente trabajo es mostrar a alumnos de primeros semestres de las carreras impartidas en la facultad de ciencias, la importancia de los cursos de cálculo diferencial para la geometría diferencial, nos hemos enfocado a la parte de las curvas y en concreto a las curvas planas, entenderemos por curvas planas a aquellas que viven en un plano , con la finalidad de que los conocimientos adquiridos durante los cursos introductorios de cálculo sean suficientes para poder comprender este material, con la intención de invitar a los alumnos que se sientan atraídos por esta rama de la matemática a formar parte de los profesionistas que se interesan en el estudio de esta rama de las matemáticas llamada geometría diferencial.

Capítulo 2

Preliminares

El objetivo de esta sección es presentar algunos resultados que serán de gran ayuda a lo largo del presente trabajo, en caso necesario se podrá acudir a libros especializados que profundicen mas en cada uno de los temas, aquí únicamente damos lo mas esencial a fin de poder comprender el trabajo aquí presentado. Los intervalos utilizados en el presente trabajo, son los mismos intervalos que se han estudiado en cursos previos de cálculo, y son tomados en un sentido general, en el cual no se excluyen los casos en que alguno o ambos extremos del intervalo sean infinitos. Ejemplos de los intervalos son los siguientes:

$$(a,b),(\infty,b),(a,\infty),(\infty,b],[a,\infty),[a,b),(a,b],[a,b]$$

2.1. Algunos resultados de funciones

Definición 2.1. *Si A y B son conjuntos,una función $f:A\to B$ es una regla que asigna a cada elemento $a\in A$ un elemento único $b\in B$. Es costumbre denotar al elemento $b=f(a)$*

Al conjunto A se le llama Dominio de la función.

Al conjunto B se le llama Codominio de la función.

Definición 2.2. *Una función $f:A\to B$ se dice que es inyectiva en A (o uno a uno) sí para todo par de elementos $a_1,a_2\in A$ con $a_1\neq a_2$ se tiene que $f(a_1)\neq f(a_2)$, o equivalentemente tenemos lo siguiente: Si $f(a_1)=f(a_2)$, entonces $a_1=a_2$*

Definición 2.3. *Una función $f : A \to B$ se dice que es suprayectiva sí para todo $b \in B$ existe una $a \in A$ tal que $f(a) = b$*

Definición 2.4. *Una función $f : A \to B$ que es simultáneamente inyectiva y suprayectiva se llama biyectiva.*

Definición 2.5. *Una función $f : A \to B$ es derivable en un punto x_0, sí existe la derivada de la función en el punto x_0, es decir existe el*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

.

2.2. $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial

Recordaremos que $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de las parejas ordenadas

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

para este conjunto de parejas ordenadas tenemos definida una suma y una multiplicación por escalares de la siguiente forma:

Definición 2.6. *dados dos elementos $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *suma coordenada a coordenada.*
2. $\alpha(u) = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha(x_1), \alpha(y_1))$

El elemento $\vec{0} = (0, 0)$ será llamadó elemento neutro de $\mathbb{R}^2$, y al elemento $-\vec{v}(-x, -y)$ se llamará elemento inverso aditivo de $\vec{v} = (x, y)$. Al conjunto $\mathbb{R}^2$ junto con las dos operaciónes de suma y multiplicación por escalares, tiene estructura de espacio vectorial ya que satisface las siguientes ocho propiedades.

Definición 2.7. *Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

1. *Para toda $\vec{u}, \vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ $\vec{u} + \vec{v} = v + u$ (conmutatividad)*
2. *Para toda $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en $\mathbb{R}^2$ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociatividad)*

3. *Existe un elemento en* $\mathbb{R}^2$ *llamado* $\vec{0}$ *tal que* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

4. *Para cada elemento* $\vec{v}$ *en* $\mathbb{R}^2$ *existe un elemento en* $\mathbb{R}^2$ *con la siguiente propiedad* $\vec{v} + \vec{-}v = \vec{0}$

5. *Para todo elemento* $\vec{v}\, en\, \mathbb{R}^2\ 1(\vec{v}) = \vec{v}$.

6. *Para cada* $\alpha, \beta\, en\, \mathbb{R}$ *y cada* $\vec{v}\, en\, \mathbb{R}^2\ \alpha\beta(\vec{v}) = \alpha(\beta\vec{v})$.

7. *Para cada* $\alpha\, en\, \mathbb{R}\, y\, \vec{u}, \vec{v}\, en\, \mathbb{R}^2\ \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(\vec{u}) + \alpha(\vec{v})$

8. *Para* $\alpha, \beta\, en\, \mathbb{R}\, y\, \vec{v}\, en\, \mathbb{R}^2$, $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha(\vec{v}) + \beta(\vec{v})$

2.3. Distancia y sus Propiedades fundamentales

Un concepto dentro de la matemática que juega un papel muy importante es el de distancia que, en términos matemáticos es la métrica, no podemos tomar cualquier función como una distancia, lo que entenderemos como una distancia, es la función que a cada par de objetos le asigna un número real positivo a continuación daremos un ejemplo para ver por que una distancia tiene que estar bien definida. Como veremos en el siguiente ejemplo pueden suceder cosas raras

Ejemplo 2.3.1. *Si definamos la distancia* $d(x, y) = \mid x - 2y \mid$ *en el conjunto de los números reales observemos que la distancia de 100 a 50 es cero, sin embargo la distancia de 50 a 100 es de 150, hechos como éstos son los que se buscan evitar dejando claro el concepto de distancia con la definición dada a continuación.*

Definición 2.8. *Si* p *y* q *son puntos* $\in \mathbb{R}^2$ *tales que* $p(x_1, y_1)$ *y* $q(x_2, y_2)$ *la distancia de* p *a* q*: es el número:*

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

el cual podemos ver como

$$d(p, q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

el cual debe cumplir las siguientes propiedades que serán dadas acontinuación.

Definición 2.9. *Dado el conjunto de los puntos en el plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ *se dice que* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *define una distancia en* $\mathbb{R}^2$ *si cumple las siguientes propiedades, donde* $d(u, u) = \sqrt{(u, v)}$*:*

1. $d(u, v) \geqslant 0$, *donde* $d(u, v) = \sqrt{(u, v)}$ *y es igual a cero* $\Leftrightarrow u = v$
2. $d(u, v) = d(v, u)$
3. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

2.4. Producto interior y sus propiedades fundamentales

Existen dos productos entre vectores, uno de ellos da como resultado un número real y el otro nos da nuevamente un vector, primero daremos la definición, así como las propiedades del producto interior o producto punto , y veremos que nos permite medir el ángulo comprendido entre 2 vectores.

Definición 2.10. *El producto interior de dos vectores* $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ *donde* $\vec{u} = (x_1, y_1)$ *y* $\vec{v} = (x_2, y_2)$, *está definido por:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

y tiene las siguientes propiedades

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ *conmutatividad*
2. $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$ *y* $(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0$ *si y solo si* $\vec{u} = \vec{0}$

En seguida presentaremos una prueba que nos permite comprender por que el producto punto de dos vectores mide el angulo comprendido entre los vectores.

Demostración 2.1. *Sean* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *vectores en el plano cartesiano*
$|| \ \vec{u} - \vec{v} \ ||^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
$= \vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) - \vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$

$=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$
$=||\ \vec{u}\ ||^2\ -2\vec{u}\cdot\vec{v}+\ ||\ \vec{v}\ ||^2$
$2\vec{u}\cdot\vec{v}=||\ \ \vec{u}\ ||^2+||\ \vec{v}\ ||^2-||\ (\vec{u}-\vec{v})\ ||^2$
y utilizando la siguiente ley de los cosenos

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

haciendo las siguientes sustituciones

$$a=||\ \ (\vec{u}-\vec{v})\ ||, b=||\ \vec{u}\ ||, c=||\ \vec{v}\ ||\ \ y\, A=\alpha$$

obtenemos la siguiente ecuación
$\cos(\alpha)2\ ||\ \vec{u}\ ||||\ \vec{v}\ ||=||\ \vec{u}\ ||^2+||\ \vec{u}\ ||$ *de la ecuación tenemos que*
$2(\vec{u}\cdot\vec{v})=||\ \vec{u}\ ||^2+||\ \vec{v}\ ||^2-||\ \vec{u}-\vec{v}\ ||^2$
$\cos(\alpha)\ ||\ \vec{u}\ ||||\ \ \vec{v}\ ||=2\vec{u}\cdot\vec{v}$
$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}$
con lo cual llegamos al resultado que queríamos.

2.5. La norma de un vector y sus propiedades fundamentales

Y a partir de la distancia entre dos puntos, tomaremos un caso particular de la distancia. y daremos la definición de la norma de un vector, unicamente tenemos que sustituir a uno de los puntos dados en la distancia por el punto $(0,0)$ y obtendremos como resultado la distancia al origen de cualquier punto en $\mathbb{R}^2$ que es llamado el vector de posición.

Definición 2.11. *para cada vector $\vec{v}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ existe un escalar único llamado norma o magnitud de v, se denota por $\|v\|$ y se define como:*

$$\|v\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

la magnitud de cualquier vector es no negativa.

Definición 2.12. *Si $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial con un producto interior, para $u\in\mathbb{R}^2$ definimos la norma la cual denotaremos de la siguiente forma (o modulo) de u por medio de $||\ \vec{u}\ ||$ y tiene las siguientes propiedades:*

1. $||\ \alpha\vec{u}\ ||\ =|\ \alpha\ |\ ||\ \vec{u}\ ||$

2. $\| \vec{u} \| = 0$ *si y solo si* $\vec{u} = \vec{0}$ *de otra forma* $\| \vec{u} \| \geq 0$

3. $| (\vec{u}, \vec{v}) | \leqslant \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \|$ *conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

4. $\| (\vec{u} + \vec{v}) \| \leq \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$ *desigualdad de triángulo.*

2.6. Producto vectorial y sus propiedades fundamentales

Con esta operación entre vectores llamada producto vectorial o producto cruz obtendremos nuevamente un vector, que a diferencia del producto punto, este producto nuevamente nos da un vector, con la propiedad de ser ortogonal al plano, en donde se encuentran los otros dos vectores.

Definición 2.13. *Sean dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ da como resultado un nuevo vector, $\vec{w}$.Para definir este nuevo vector es necesario especificar su módulo, dirección y sentido: El módulo de $\vec{w}$, está dado por*

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\| = \|\tilde{\mathbf{u}}\| \, \|\tilde{\mathbf{v}}\| \sin\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Definición 2.14. *Definimos el producto vectorial de la siguiente forma donde e_i denota la base estandar de $\mathbb{R}^3$*

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

Este producto vectorial tiene definidas algunas propiedades que daremos a continuación.
Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^3$

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, (anticonmutatividad)
2. $\langle \vec{u} \, , (\vec{u} \times \vec{v}) \rangle = \langle \vec{v} \, , (\vec{u} \times \vec{v}) \rangle = 0$ (el producto vectorial es perpendicular a cualquiera de los factores)
3. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u} || \vec{v}$ (el producto cruz de dos vectores paralelos es cero).

4. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$
5. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle\vec{v}-\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{w}$

Capítulo 3

Representación Paramétrica de Curvas

Los capítulos anteriores sirvieron para dar un breve recordatorio del material necesario que vamos a utilizar en los siguientes capítulos.

3.1. Representación Paramétrica de curvas

Definición 3.1. *Sí $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua e inyectiva, al conjunto de puntos $\alpha[a, b]$ lo denominaremos un arco simple.*

Ejemplo 3.1.1. *La gráfica de una función $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ en el plano XY definida en un intervalo cerrado es un arco simple.*

$$y = \alpha(x)$$

El siguiente ejemplo, muestra una función muy estudiada en cursos de cálculo.

Ejemplo 3.1.2. *La gráfica de la función $\alpha(t) = t^2$, nos define un arco simple y la parametrización está dado por*

$$\vec{\alpha}(t) = (t, t^2)$$

Definición 3.2. *La aplicación $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

que define la curva se denomina representación parámetrica de la curva, donde cada una de las funciones x(t), y(t) y z(t) , son llamadas funciones componentes (o funciones coordenadas).

Ejemplo 3.1.3. *La curva K definida por el mapeo*

$$\vec{\alpha}(t) = \begin{cases} x(t) = 2cos(t - \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = sen2(t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

la cual es una curva parametrizada, donde x(t) y y(t) son las funciones coordenadas.

3.2. Parametrizaciones Equivalentes

Los resultados de esta sección, serán de gran ayuda en el estudio de las curvas, ya que para poder estudiar las curvas lo haremos por medio de sus ecuaciones paramétricas, pero dada una curva veremos que ésta admite muchas otras parametrizaciones y los resultados que aquí presentamos nos harán ver que el estudio de la curva no depende de la parametrización, aquí trataremos de ver cuando dos parametrizaciones distintas representan la misma curva como objeto geométrico. es decir dadas dos parametrizaciones

$$\vec{\alpha}(t) = (x(t), (y(t), z(t)) \; \vec{\beta}(s) = (x^*(s), y^*(s), z^*(s))$$

cuando representan a la misma curva.

Definición 3.3. *Dos reparametrizaciones* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *y* $\vec{\beta} : J \to \mathbb{R}^3$ *son equivalentes si existe una función* h *continua monótona creciente de* J *en* I, $h : J \to I$ *tal que* $\vec{\alpha}(h(u)) = \vec{\beta}(u)$ *para toda* $u \in J$

Definición 3.4. *Si existe una aplicación continua monótona decreciente de* J *en* I *tal que* $\vec{\alpha}(h(u)) = \vec{\beta}(u)$ *para toda* $u \in J$ *entonces diremos que las dos representaciones son opuestas.*

3.3. Curvas parámetricas Regulares

Un punto $\vec{\alpha}(t_0)$ de una curva diferenciable $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ se llama regular, si $\vec{\alpha}'(t_0) \neq 0$. La curva se llama regular si todos sus puntos son regulares.

Definición 3.5. *Una curva paramétrica* α *es regular de clase* C^k *sí existe una representación paramétrica* $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\vec{\alpha}$ *es de clase* C^k *y* $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$

Ejemplo 3.3.1. *La circunferencia es una curva regular, con la siguiente representación paramétrica:*

$$\vec{\alpha}(t) = (acost, asent, 0), \, para \, toda \, t \in [0, 2\pi]$$

3.4. Vector Tangente y Vector Normal

Por cada punto $\vec{\alpha}(t_0)$ de una curva diferenciable α se pueden trazar dos rectas, las cuales nos ayudarán a obtener información del comportamiento de las curvas utilizando técnicas aprendidas en cursos introductorios de cálculo.

Definición 3.6. *Dada una curva* $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ *definimos el vector tangente como*

$$\vec{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

donde la comilla denota diferenciación respecto al parámetro t*.*

Definición 3.7. *Dada una curva* $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ *definimos el vector normal como*

$$\vec{\alpha}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

a continuación mostraremos que estos dos vectores, son ortogonales, a partir de la siguiente igualdad, $(\vec{\alpha}'(t) \cdot \vec{\alpha}'(t)) = 1$

Demostración 3.1. *Tomemos la derivada en ambos lados de la igualdad y obtenemos:*

$$2(\vec{\alpha}'(t) \cdot \vec{\alpha}''(t)) = 0$$

entonces $\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$ *de donde obtenemos lo que queriamos mostrar.*

$$\vec{\alpha}' \perp \vec{\alpha}''$$

3.5. Longitud de Arco de una curva

La longitud de arco será de gran ayuda de aquí en adelante, ya que dada cualquier curva daremos una reparametrización en términos de la longitud de arco, debido a que longitud de arco nos permitirá operar con un vector unitario y esto nos facilitará algunos cálculos al momento de obtener propiedades de las curvas.

Definición 3.8. *Sí K es una curva (o arco) suave, parametrizada por $r(t)$ en $[a,b]$, la longitud de K se define por*

$$L(K) = \int_a^b \mid r'(t) \mid dt$$

donde recordamos que $\mid r'(t) \mid = [(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2]^{\frac{1}{2}}$

observación: la longitud es una propiedad intrínseca de la curva, también podemos decir que no depende de parametrizaciones.

3.6. Parametrización por longitud de Arco

Una parametrización que nos ayudará mucho en el estudio de las propiedades de las curvas es la parametrización por longitud de Arco, daremos una demostración de que siempre es posible obtener una parametrización por longitud de arco y además veremos que la ventaja de esta parametrización, es que su norma es igual a 1.

Proposición 3.6.1. *Sí K es una arco o una curva suave parametrizada por $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, entonces existe una reparametrización α de r tal que para todo $t \in [a,b]$, $\mid r'(t) \mid = 1$*

Demostración 3.2. *Supongamos para simplificar que K es suave, sea L la longitud de arco de K y vamos a definir la función longitud de arco $s : [a,b] \to [0,L]$ por*

$$s(t) = \int_a^b \mid r'(u) \mid du$$

tenemos entonces que

$$s'(t) = \mid r'(t) \mid > 0$$

a partir de la continuidad de s' en $[a, b]$ y s es estrictamente creciente en $[a, b]$ que por el Teorema de la función inversa, nos garantiza la existencia de la inversa, $t = t(s)$ con derivada continua en $[0, L]$ y

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} > 0$$

con esto, podemos escribir $\alpha = r \circ t$, donde $\alpha(s) = r(t(s))$ con $s \in [a, b]$ que es una reparemitrización de r y usando regla de la cadena tenemos:

$$\alpha'(s) = r'(t(s))t'(s) = \frac{r'(t(s))}{s'(t(s))}$$

de donde obtenemos que

$$| \alpha'(s) | = \frac{s'(t(s))}{s'(t(s))} = 1$$

que como esta dado para cualquier curva, nos permite ver que siempre es posible dar una reparametrización por longitud de arco para cualquier curva suave.

3.7. Clasificación de Curvas

En la sección anterior definimos el concepto de curva y dimos algunos ejemplos, resultados que serán de gran ayuda a fin de dejar claros los conceptos de esta sección, a continuación estudiaremos las propiedades de las curvas para poder dar una clasificación a partir de ellas.

Definición 3.9. *Curva suave*
Diremos que una curva K es suave si existe una parametrización $\alpha : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, tal que para todo $t \in \mathbb{I}$ $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, existe $\alpha'(t) \neq 0$

Dentro de las curvas al igual que dentro de las funciones tenemos una clase de curvas que son las más sencillas y estas son las curvas simples, las cuales se caracterizan por que a valores distintos de t les corresponden valores distintos de α es decir si

$$t_1 \neq t_2 \to \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$$

es decir que las curvas simples son aquellas que no se cortan consigo misma. Una curva plana cerrada es una curva regular parametrizada

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$$

tal que α y todas sus derivadas coinciden en a y b es decir

$$\alpha(a) = \alpha(b), \alpha'(a) = \alpha'(b), \alpha''(a) = \alpha''(b), ...\alpha^n(a) = \alpha^n(b)$$

La curva es cerrada simple si carece de otras auto intersecciones, es decir si

$$t_1 \neq t_2 entonces \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$$

La curvatura de α puede ser positiva o negativa, es decir podemos asignar una determinada orientación a una curva plana, será conveniente revisar algún material que nos ayudara a aclarar este concepto tomando por ejemplo un plano, en el pudimos definir una determinada orientación, ayudados de los ángulos y tomando la dirección positiva el sentido de las manecillas del reloj, y la forma en que representamos una rotación por medio de una matriz. Con las dos observaciones que hemos hecho anteriormente estamos ya en condiciones de mostrar la forma en que podemos asignar a una curva una orientación. Tomando una base β y tomando la matriz A de cambio de base entre la base β y la base canónica obtenemos el determinante de la matriz la cual nos da lo siguiente:

$$det(A) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

En el primer caso donde $det(A) = 1$ diremos que la curva esta orientada positivamente, en si $det(A) = -1$ la curva está orientada negativamente. Es fácil comprobar que una orientación define una relación de equivalencia ya que satísface las propiedades de relación de equivalencia:

1. $\alpha(t) \simeq \alpha(t)$ reflexiva
2. $\alpha(t) \simeq \beta(t) \Rightarrow \beta(t) \simeq \alpha(t)$simétrica
3. si $\alpha(t) \simeq \beta(t)$ y $\beta(t) \simeq \gamma(t)$ entonces $\alpha(t) \simeq \gamma(t)$ transitiva

Ahora ¿comó aplicamos lo anterior para asignarle una orientación a una curva? Hemos visto que necesitamos vectores, tomaremos el vector tangente y el vector normal y haciendo uso del material desarrollado hasta aquí, veremos que hemos podido asignar una orientación a una curva plana. Otra propiedad de las curvas es el número de piezas por las que está formada, puede ser de una sola o varias partes, esta característica quedará clasificada por la siguiente definición

Definición 3.10. *Diremos que una curva o arco es conexa si está formada de una sola pieza.*

Ejemplo 3.7.1. *Un ejemplo de una curva que no es conexa esta dado por la hipérbola cuya representación paramétrica está dada por:*

$$\vec{\alpha}(t) = (\pm b\sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}})$$

para toda $t \in \mathbb{I}$ *tal que* $1 + \frac{t^2}{a^2} \geq 0$

A partir de las definiciones anteriores podemos decir que una curva conexa es simple si no se intersecta consigo misma y está hecha de una sola pieza.

3.8. Diedro de Frenet

Los dos vectores descritos a continuación constituyen el diedro de Frenet. Si $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, el vector tangente unitario a la curva es el siguiente:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'}{\mid \vec{\alpha}'(t) \mid} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}(x'(t), y'(t))$$

el vector normal unitario es:

$$\vec{N}(t) = \frac{\perp \vec{\alpha}'(t)}{\mid \vec{\alpha}'(t) \mid} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}(-y'(t), x'(t))$$

3.9. Fórmulas de Frenet

Teorema 3.1 (Fórmulas de Frenet)**.** *Sí* $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ *tiene velocidad unitaria con curvatura* $k > 0$ *y torsión* τ *entonces*

$$T' = kN$$
$$N' = -kT + \tau B$$
$$B' = -\tau N$$

Ejemplo 3.9.1. *Vamos a calcular las fórmulas de Frenet para la siguiente curva parametrizada, su curvatura y torsión sea*

$$\beta(s) = (acos\frac{s}{c}, asen\frac{s}{c}, \frac{bs}{c})$$

donde $c = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ *y* $a > 0$

$$T(s) = \beta'(s) = (-\frac{a}{c}sen\frac{s}{c}, \frac{a}{c}cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c})$$

de donde tenemos que:

$$T'(s) = (-\frac{a}{c^2}cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}sen\frac{s}{c}, 0)$$

Entonces $k(s) =\mid\mid T'(s) \mid\mid= \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0$ *a partir de que T'=kN, obtenemos el vector normal*

$$N(s) = (-cos\frac{s}{c}, -sen\frac{s}{c}, 0)$$

obtendremos al vector B *como resultado del producto curso de los vectores* $\vec{T}$ *y* $\vec{N}$ *quedando*

$$B(s) = (\frac{b}{c}sen\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c})$$

a partir de esto podremos obtener la torsión, primero obtenemos B'

$$B'(s) = (\frac{b}{c^2}cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}sen\frac{s}{c}, 0)$$

y utilizando la siguiente igualdad $B' = \tau N$*, obtenemos la torsión la cual está dada por* $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$

3.10. Curvatura

Definición 3.11. *Sí* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *es una curva regular se define la función de curvatura* k *de* α *en punto* $\alpha(t_0)$ *como*

$$k(s) =\mid T(s) \mid, \; tal\, que\, s \in I$$

observación: cuando $k \geq 0$*, lo que nos dice esta función de curvatura es que tan rápido va dando vuelta la curva, esto quiere decir que para valores mayores de* k *la curva es más pronunciada.*

3.11. Teorema Fundamental (versión plana)

Teorema 3.2. *Dada una función diferenciable $k(s) > 0$ existe una curva regular parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ tal que s es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura de α, sin embargo cualquier otra curva $\widetilde{\alpha}$ que satisfaga las mismas condiciones, difiere de α por un movimiento rígido, es decir existe un mapeo lineal ortogonal ρ de $\mathbb{R}^3$ con determinante positivo y un vector c tal que*

$$\widetilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$$

Capítulo 4

Curvas planas

Es importante señalar que para una mejor comprensión y estudio de las curvas planas, el lector deberá tener nociones de teoremas de cálculo diferencial debido a la aplicación del material estudiado en estos cursos para el estudio de curvas planas.

Definición 4.1. *Curvas planas*
Diremos que una curva K en $\mathbb{R}^3$ es plana sí existe un plano Π en $\mathbb{R}^3$ tal que $K \subseteq \Pi$. Consideraremos a $\mathbb{R}^2$ como el plano Π contenido en $\mathbb{R}^3$ y las curvas planas estarán completamente contenidas en $\mathbb{R}^2$ y veremos que estas curvas planas están libres de torsión.

Proposición 4.0.1. *Sea K una curva en $\mathbb{R}^3$ diferenciable y simple, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de K con vector velocidad unitaria y curvatura $k > 0$ en I y supongamos que α tiene al menos segunda derivada en I. Afirmamos que K es una curva plana sí y solo sí la torsión $\tau = 0$ en I.*

Demostración 4.1. *Supongamos que K es plana entonces existen vectores p y q en $\mathbb{R}^3$ con $q \neq 0$ tal que para todo $s \in I$, $\alpha(s) - p) \cdot q = 0$, derivando el lado derecho de la igualdad tenemos entonces:*

$$\alpha' \cdot q = \alpha'' \cdot q = 0$$

Luego para toda $s \in I$, q es ortogonal a $T = \alpha'$ y a $N = \frac{\alpha''}{k}$, por lo tanto q es proporcional a B y como B es unitario, tenemos que para todo $s \in I$ $B(s) = \pm\frac{q}{|q|}$, de donde obtenemos que $B'(s) \equiv 0$ en I y por lo tanto $\tau = 0$ A la inversa supongamos que $\tau = 0$

Entonces $B' = 0$ en I esto nos indica que B es constante en I, sean $s_0 \in I$ y $f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B$ tenemos entonces que

$$\frac{df}{ds}(s) = \alpha'(s) \cdot B = T(s) \cdot B = 0$$

y como $f(s_0) = 0$ entonces $f \equiv 0$ en I por lo tanto para todo $s \in I$ $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B = 0$

4.1. Plano Normal y Plano Osculador

El plano determinado por los vectores $\vec{N}$ normal y $\vec{B}$ binormal en el punto P sobre una curva C se llama Plano normal de C en P y esta formado por todas las rectas que son ortogonales al vector tangente y que pasan por el punto P. El plano determinado por los vectores tangente $\vec{T}$ y normal $\vec{N}$,se llama plano osculante de C en P. Es el plano que está tan cerca que contiene la parte de la curva que está cerca de P.

4.2. Curvas definidas implícitamente

Un caso particular e importante de curvas planas es cuando ocurre $x = t$ o $y = t$ y la curva esta dada de la siguiente forma

$$x = \phi_1(t), y = \phi_2(t)$$

con lo que tenemos una curva definida como una función implícita

4.3. Curvatura de curvas planas

Curvatura.
Para una curva regular parametrizada que es suave, la parametrización determina una dirección a lo largo de la curva. A partir de esta dirección podemos obtener curvas orientadas, dado que una curva orientada es una curva con una dirección a nosotros nos interesa la tasa de cambio de la dirección por medio del vector tangente de forma tal que no depende de una parametrización particular de la curva, y sí dependa de la orientación de la curva. Sí θ es el ángulo medido en el sentido de las manecillas del reloj respecto al lado positivo del eje x, con el vector tangente de una curva $\alpha(t)$

Ejemplo 4.3.1. *Uno de los ejemplos más representativos de cálculo de curvatura, es el siguiente: Mostrar que la curvatura de un círculo de radio R es $\frac{1}{R}$ lo primero es obtener una parametrización del círculo de radio R con centro en $(0,0)$, sea $\alpha(t) = (rcos(t), rsen(t))$, parametrización de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio r una parametrización respecto a la longitud de arco está dada por:*

$$\alpha(s) = (rcos(\frac{s}{r}), rsen(\frac{s}{r}))$$

de donde obtenemos la segunda derivada, la cual nos proporciona la curvatura

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{r}(cos(\frac{s}{r}), sen(\frac{s}{r}))$$

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

este ejemplo nos muestra que conforme sea mayor el valor de r más lentamente se dobla la curva.

Definición 4.2. *La curvatura o signo de curvatura κ, de una curva suave α parametrizada por longitud de arco s en un punto regular, es la tasa de cambio de dirección de la recta tangente respecto a la longitud de arco s*

$$k = \frac{d\alpha}{ds}$$

La curvatura de una curva parametrizada por su longitud de arco es la tasa de cambio de la dirección de el vector tangente. el valor absoluto de la curvatura es una medida de qué tan rápido la curva se dobla. La curvatura κ puede ser:

$$k = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

4.4. Las cónicas como curvas planas

La Parábola como curva plana. Observemos que la parábola podemos escribirla como una curva parametrizada de la siguiente forma: sea α una curva parametrizada $\alpha : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$, donde $\alpha(t) = (t, t^2)$

4.5. La Circunferencia como curva plana

Sin pérdida de generalidad, tomaremos la circunferencia unitaria, vista como una curva plana, que tiene la siguiente forma:

$$y = \sqrt{1 - t^2}$$

donde $t \in \mathbb{I}$ es el parámetro, cuidando que $1 - t^2 > 0$ para toda $t \in \mathbb{I}$, observemos el siguiente hecho, al tomar la función raíz cuadrada tendremos $\pm\sqrt{1 - t^2}$ lo que nos lleva a tomar por un lado:

$$y_1 = -\sqrt{1 - t^2}$$

y

$$y_2 = +\sqrt{1 - t^2}$$

$$\alpha(t) = (t, \pm\sqrt{1 - t^2})$$

lo cual nos muestra que para el caso de la circunferencia tenemos una parametrización por cada mitad de la circunferencia.

4.6. La Elipse como curva plana

la elipse vista como una curva plana tiene la siguiente representación paramétrica:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$$

donde nuevamente tenemos dos representaciones paramétricas:

$$y_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$$

$$y_2 = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$$

obteniendo la curva parametrizada por medio de

$$\alpha(t) = (t, \pm b\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}})$$

4.7. La Hipérbola como curva plana

de igual forma que las anteriores cónicas a partir de la ecuación de la hipérbola y después de manipulación algebráica obtenemos:

$$y_1 = b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$y_2 = -b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

obteniendo así la una curva parametrizada:

$$\alpha(t) = (t, \pm b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}})$$

Bibliografía

[1] Bruce, J.W. Curves and singularities editorial, editorial Cambridge University Press año 1993

[2] Richard Courant, Fritz John . Introducción al cálculo y al análisis matemático Vol 1 ,Limusa año 1978

[3] Charles Chapman. Pugh Real mathematical analysis, editorial Springer-Verlang año 2001

[4] M.P. Do Carmo. Differential geometry of curves and surfaces , editorial Prentice Hall año 1976

[5] R.H. Flower, M.A. The elementary differential geometry of plane curves, editorial Cambridge University Press año 1929

[6] Gibson C.G. Elementary geometry of diferentiable curves, editorial Cambridge University Press año 2001

[7] Mcleary J. Geometry form a differentiable, viewpoint editorial Cambridge University Press año 1995

[8] Barrett O´Neill. Elementary differential geometry, editorial Academic Press año 2006

[9] John W. Rutter. Geometry of curvese, editorial Chapman y Hall/CRC año 2000